

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS  
(Moscow, Russia)

INTERNATIONAL CONFERENCE

«ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS FOR  
SOLVING OF HYDRODYNAMICS, MATHEMATICAL  
PHYSICS AND BIOLOGY PROBLEMS»,

dedicated to the 100-th anniversary of K. I. Babenko

26–29 August 2019

Pushchino, Moscow Region

PROCEEDINGS

Moscow – 2019

УДК 51, 53

ББК 22.19

Proceedings of the International Conference «Analytical and numerical methods for solving of hydrodynamics, mathematical physics and biology problems», dedicated to the 100th anniversary of K. I. Babenko (Pushchino, 26–29 August, 2019), Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, 2019. – 182 p.

### ABSTRACT

The conference includes lectures and reports on computational mathematics, aero-hydrodynamic, molecular biology. The development of mathematical physics algorithms and the parallel computational technologies are discussed. The theoretical problems on differential equations, exact and asymptotic solutions of boundary problems are considered.

The conference was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-20036).



Editorial committee: A.I. Aptekarev, A.L. Afendikov, V.T. Zhukov, T.V. Konstantinovskaya, T.V. Dudnikova

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной  
математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»

Moscow, 2019

---

ISBN: 978-5-98354-052-1

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН  
(Москва)

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

**«АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ,  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И БИОЛОГИИ»,**

посвященная 100-летию К. И. Бабенко

26–29 августа 2019 г.

Пушино, Московская область

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва – 2019

## PROGRAM and LOCAL COMMITTEES

### Program Committee:

- A. I. Aptekarev, corresponding member RAS, KIAM RAS, Moscow (*chairman*)
- A. L. Afendikov, KIAM RAS, Moscow (*vice-chairman*)
- V. N. Belyh, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
- T. V. Dudnikova, KIAM RAS, Moscow
- V. T. Zhukov, KIAM RAS, Moscow
- V. D. Lakhno, Institute of Mathematical Problems of Biology RAS, Pushchino
- N. I. Makarenko, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk
- P. I. Plotnikov, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk
- V. V. Pukhnachev, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk
- V. M. Tikhomirov, Lomonosov Moscow State University, Moscow
- V. F. Tishkin, corresponding member RAS, KIAM RAS, Moscow
- M. N. Ustinin, Institute of Mathematical Problems of Biology RAS, Pushchino
- A. V. Fursikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow
- B. N. Chetverushkin, academician RAS, KIAM RAS, Moscow
- A. Dyachenko, University College London, UK
- M. Groves, Universitat des Saarlandes, Germany
- A. Kostianko, University of Surrey, UK
- S. Zelik, Lanzhou University, China

### Local committee:

- A. L. Afendikov, KIAM RAS, Moscow (*chairman*)
- T. V. Dudnikova, KIAM RAS, Moscow (*vice-chairman*)
- V. T. Zhukov, KIAM RAS, Moscow (*vice-chairman*)
- N. G. Afendikova, KIAM RAS, Moscow
- V. G. Lysov, KIAM RAS, Moscow
- L. I. Mikhailova, KIAM RAS, Moscow
- K. E. Nikitin, KIAM RAS, Moscow
- N. N. Novikova, KIAM RAS, Moscow

A. V. Severin, KIAM RAS, Moscow  
 T. A. Sushkevich, KIAM RAS, Moscow  
 A. A. Tayursky, KIAM RAS, Moscow  
 M. N. Ustinin, KIAM RAS, Moscow

## **ПРОГРАММНЫЙ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТЫ**

### **Программный комитет:**

А. И. Аптекарев, чл.-корр. РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва  
*(председатель)*  
 А. Л. Афендикова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва *(зам. председателя)*  
 В. Н. Белых, Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск  
 Т. В. Дудникова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва  
 В. Т. Жуков, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва  
 В. Д. Лахно, ИМПБ РАН, Пущино  
 Н. И. Макаренко, ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
 П. И. Плотников, ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
 В. В. Пухначев, ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
 В. М. Тихомиров, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва  
 В. Ф. Тишкин, чл.-корр. РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва  
 М. Н. Устинин, ИМПБ РАН, Пущино  
 А. В. Фурсиков, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва  
 Б. Н. Четверушкин, академик РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва  
 Alexander Dyachenko, University College London, UK  
 Mark Groves, Universitat des Saarlandes, Germany  
 Anna Kostianko, University of Surrey, UK  
 Sergey Zelik, Lanzhou University, China

### **Локальный оргкомитет:**

А. Л. Афендикова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН *(председатель)*  
 Т. В. Дудникова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН *(зам. председателя)*  
 В. Т. Жуков, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН *(зам. председателя)*  
 Н. Г. Афендикова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
 В. Г. Лысов, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
 Л. И. Михайлова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

К. Е. Никитин, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
Н. Д. Новикова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
А. В. Северин, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
Т. А. Сушкевич, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
А. А. Таюрский, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
М. Н. Устинин, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

## CONTENTS

I.V. Abalakin, A.P. Duben, <b>N.S. Zhdanova</b> , T.K. Kozubskaya APPLICATION OF THE IMMERSSED BOUNDARIES METHOD FOR THE NUMERICAL SIMULATION OF WING MECHANIZA- TION ELEMENTS.....	17
I.V. Abalakin, <b>A.P. Duben</b> , V.O. Tsvetkova EFFECTIVE METHODOLOGY FOR SETTING BOUNDARY CONDITIONS ON SOLID WALLS AS APPLIED TO THE SIMU- LATION OF HIGH REYNOLDS COMPRESSIBLE TURBULENT FLOWS .....	19
<b>A.L. Afendikov</b> BIFURCATIONS FROM CURVES OF EQUILIBRIA IN SYM- METRIC AND COSYMMETRIC HYDRODYNAMIC PROBLEMS..	21
<b>N.G. Afendikova</b> KONSTANTIN IVANOVICH BABENKO. BIOGRAPHICAL SKETCH.....	22
A.V. Alexandrov, <b>L.V. Doronicyn</b> , A.P. Duben MODELING OF THREE-DIMENSIONAL TURBULENT FIELD DYNAMICS BY STOCHASTIC-DETERMINISTIC METHOD.....	24
<b>A.K. Alekseev</b> , A.E. Bondarev A POSTERIORI ESTIMATE OF THE ERROR IN CALCULATING THE FLOW ON AN ENSEMBLE OF NUMERICAL SOLUTIONS USING THE THEORY OF CONCENTRATION MEASURES.....	26
<b>S.D. Algazin</b> H - MATRIX, NEW MATHEMATICAL APPARATUS FOR DIS- CRETIZATION OF MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS.....	29
<b>S.V. Anpilov</b> , N.P. Savenkova, V.S. Laponin, S.A. Skladchikov MODELING THE DYNAMICS OF THE DISPERSED GAS PHASE IN THE ANODE REGION OF AN ALUMINUM ELECTROLYZER.	31
<b>A.V. Babakov</b> MATHEMATICAL MODELING OF VORTEX MOTION IN STEL- LAR ACCRETION DISKS .....	32

<b>N.D. Baikov</b> , A.G. Petrov NUMERICAL SCHEMES FOR CALCULATING OF THE CUMULATIVE JETS FORMATION .....	34
<b>N.M. Balashov</b> , I.V. Glazyrin, N.A. Mikhailov TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC GRID ADAPTATION IN EULERIAN GAS DYNAMICS ON AN UNSTRUCTURED GRID.....	36
<b>V.N. Belykh</b> SUPERCONVERGENT ALGORITHMS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS (ON THE PROBLEM OF K.I. BABENKO).....	37
<b>S.I. Bezrodnykh</b> ANALYTICAL CONTINUATION OF HORN'S HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND SOME APPLICATIONS .....	38
A.M. Blokhin, E.A. Kruglova, <b>B.V. Semisalov</b> NUMERICAL ANALYSIS OF STATIONARY FLOWS OF A POLYMER LIQUID BASED ON AN ALGORITHM "WITHOUT SATURATION".....	39
<b>G.A. Bocharov</b> , D.S. Grebennikov MATHEMATICAL MODELING OF VIRAL INFECTIONS.....	41
V.E. Borisov, A.A. Davydov, <b>T.V. Konstantinovskaya</b> , A.E. Lutsky ACOUSTIC DISTURBANCES INFLUENCE ON A WINGTIP VORTEX IN A SUPERSONIC FLOW.....	43
<b>D.N. Bukharov</b> MATHEMATICAL MODELING OF LASER DEPOSITION AND STRUCTURE OF INSULAR NANOFILMS WITH CONTROLLED TOPOLOGY.....	46
T.E. Bulgakova, <b>A.V. Voytishchik</b> RANDOMIZED NUMERICAL ALGORITHMS FOR APPROXIMATING THE SOLUTION OF THE FREDHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND .....	48
<b>N.V. Bykov</b> CRITICAL CONDITIONS IN THE CASE OF A "HYDRODYNAMIC EFFECT" IN BALLISTIC TEST FACILITIES.....	49



<b>A.P. Chernyaev</b> EXACT SOLUTIONS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF A SINGLE-CHAMBER HEART, BASED ON THE EQUATIONS OF FORCED OSCILLATIONS.....	52
<b>A.P. Chetverikov, V.D. Lakhno</b> MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES OF THE INTERACTION OF ELECTRONS WITH MOBILE LOCALIZED WAVES IN A DNA MOLECULE.....	54
<b>A.V. Danilkovich, I.V. Mikhailova, D.A. Tikhonov</b> BIOGELI. CONFORMATIONAL FEATURES OF PEPTIDE COM- PLEXES (RADA) 4.....	56
<b>K.V. Demyanko</b> ON THE STABILITY OF FLUID FLOW IN AN ELLIPTICAL TUBE WITH A COMPLIANT WALL.....	59
<b>G.V. Dolgoleva</b> ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELING OF THE ENER- GY DEPOSITION IN MULTI-STAGE TARGETS OF HEAVY ION SYNTHESIS BASED ON SHOCKLESS COMPRESSION.....	61
<b>T.V. Dudnikova</b> NON-EQUILIBRIUM STATES AND ENERGY CURRENT FOR INFINITE LATTICE SYSTEMS.....	62
A.I. Dyachenko, S. A. Dyachenko, <b>P. M. Lushnikov</b> , V. E. Zakharov BABENKO'S EQUATION FOR STOKES WAVE AND INTEGRA- BILITY OF FREE SURFACE DYNAMICS.....	63
<b>A.V. Dyachenko, X. Zhan</b> ON HURWITZ POLYNOMIAL MATRICES .....	66
<b>N.S. Fialko, V.D. Lakhno</b> DYNAMICS OF POLARON HOLSTEIN AT LOW THERMOSTAT TEMPERATURE.....	67
A.A. Frolov, <b>E.V. Chizhonkov</b> INFLUENCE OF ELECTRON-ION COLLISIONS ON THE OVER- TURNING OF PLASMA OSCILLATIONS.....	68

<b>A.V. Fursikov, L.S. Osipova</b> ON NONLOCAL STABILIZATION PROBLEM FOR SOME HYDRODYNAMIC TYPE SYSTEMS.....	69
<b>M.P. Galanin, S.A. Konev</b> B-SERIES FOR (M, K)-METHODS FOR SOLVING HARD SYSTEMS.....	70
<b>V.A. Galkin, A.O. Dubovik</b> ON MODELING A LAYERED FLOW OF A CONDUCTING FLUID IN A TIME-VARYING REGION.....	71
<b>K.I. Ilyin, A.B. Morgulis</b> INSTABILITY IN THE COUETTE-TAYLOR PROBLEM WITH RADIAL FLOW.....	73
<b>K.I. Ilyin, A.B. Morgulis</b> KELLER-SEGEL TYPE SYSTEM WITH A SHORT-WAVE EXTERNAL SIGNAL.....	75
<b>V.M. Imaykin</b> ON STABILITY OF ZERO SOLITON FOR A CHARGED PARTICLE AT REST IN THE MAXWELL FIELD.....	78
<b>S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko</b> DIFFUSION PROCESSES IN ECONOMICS AND SOCIOLOGY. SIMULATION AND CIRCULATION.....	80
<b>V.V. Kalmanovich, E.V. Seregina, A.A. Kartanov</b> ON THE POSSIBILITY OF NUMERICAL SOLUTION OF THE HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEM IN A MULTILAYER MEDIUM BY THE MATRIX METHOD.....	81
<b>M.Yu. Khristichenko, Yu.M. Nechepurenko, E.V. Sklyarova, D.S. Grebennikov, G.A. Bocharov</b> OPTIMAL PERTURBATIONS OF STATIONARY STATES OF VIRAL INFECTION MODELS.....	84
<b>I.Yu. Kolesnikov</b> EXPANSIONS INTO FINITE SERIES ON COMPLETE SYSTEMS OF SPECTRAL NON-ALGEBRAIC SHAPE FUNCTIONS AND APPLICATIONS.....	86

<b>A.N. Korshunova, V.D. Lakhno</b> TWO TYPES OF OSCILLATIONS OF A HOLSTEIN POLARON MOVING UNIFORMLY ALONG A CHAIN IN A CONSTANT ELECTRIC FIELD.....	87
<b>M.V. Kraposhin, V.G. Melnikova, A.S. Epihin</b> MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF INTER- ACTION OF WATER DROPLETS WITH A HIGH- TEMPERATURE GAS JET.....	89
<b>O.I. Krivorotko, S.I. Kabanikhin</b> IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF BIOLO- GY.....	90
<b>M.A. Krivov, A.V. Zaitsev, P.S. Ivanov</b> NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF THE GEOMET- RIC SHAPE OF THE PROTEIN STRUCTURES OF THE CELL ON THE NUMBER OF MEROTEL MICROTUBE LINKS DURING MITOSIS.....	92
<b>D. Kuzmin, N. Klyushnev</b> LIMITING AND DIVERGENCE CLEANING FOR CONTINUOUS FINITE ELEMENT DISCRETIZATIONS OF THE MHD EQUA- TIONS.....	94
<b>V.S. Laponin, S.A. Skladchikov, S.V. Anpilov, N.P. Savenkova</b> NUMERICAL STUDY OF THE VORTEX STRUCTURES DEVEL- OPMENT DURING THE FORMATION OF WIND WAVES.....	95
<b>I.V. Likhachev, V.D. Lakhno, N.K. Balabaev</b> PROGRAM FOR MODELING MOLECULAR DYNAMICS IN A HETEROGENEOUS COMPUTING ENVIRONMENT AND ITS APPLICATION TO VARIOUS BIOMOLECULAR SYSTEMS.....	96
<b>V.Y. Lunin, N.L. Lunina, T.E. Petrova</b> X-RAY LASERS AND COMPUTATIONAL TASKS OF BIOLOGI- CAL CRYSTALLOGRAPHY.....	98
<b>A.E. Lutsky, Ya.V. Khanhasaeva</b> NUMERICAL SIMULATION OF SUPERSONIC FLOW AROUND BLUNT BODY AT PERIODIC ENERGY INVESTMENT.....	99

<b>N.I. Makarenko</b> THE PROBLEM ON NON-STATIONARY MOTION OF THE BODY UNDER FREE SURFACE OF IDEAL FLUID.....	101
<b>S.A. Makhortyh</b> THE MODEL OF LIQUID SOIL IN THE CALCULATIONS OF THE FIELD OF ELASTIC WAVES .....	102
<b>D.V. Maklakov</b> ALMOST EXTREME CONFIGURATIONS OF SURFACE AND INTERNAL GRAVITY WAVES.....	105
<b>S.N. Markizov, S.V. Polyakov, V.O. Podryga, D.V. Puzyrkov, N.I. Tarasov, I.O. Tolstov</b> THE DESIGN OF A WEB-LABORATORY WITH USER ACCESS TO HPC RESOURCES.....	107
<b>I.S. Menshov, A.V. Severin</b> SOLVING AIRFLOW PROBLEMS OF BODIES WITH POROUS INSERTS.....	108
<b>Yu.M. Nechepurenko, M.Yu. Khristichenko, E.V. Sklyarova, D.S. Grebennikov, G.A. Bocharov</b> CALCULATION OF STEADY STATES OF VIRAL INFECTIONS MODELS.....	110
<b>I.S. Nikitin, N.G. Burago, V.I. Golubev, A.D. Nikitin</b> MATHEMATICAL MODELS OF LAYERED AND BLOCK ME- DIA WITH NONLINEAR CONTACT CONDITIONS.....	113
<b>A.V. Osipov, K. Koshelev, S. Strizhak</b> COMPARATIVE ANALYSIS OF ANALYTICAL MODELS FOR CALCULATING THE PARAMETERS OF THE WIND TURBINE VORTEX WAKE.....	114
<b>A.N. Pankratov, N.M. Pankratova</b> SPECTRAL AND ANALYTICAL METHOD OF REPEATS RECOGNITION IN SIGNALS.....	116
<b>A.G. Petrov</b> SATURATIONLESS NUMERICAL SCHEMES FOR POLYHAR- MONIC EQUATION.....	117

<b>K. Pileckas</b> RECENT YEARS ACHIEVEMENTS IN THE THEORY OF STATIONARY NAVIER-STOKES EQUATIONS.....	118
<b>V.V. Pukhnachev</b> EXACT AND ASYMPTOTIC SOLUTIONS IN THE MOTION MODELS OF AQUEOUS POLYMER SOLUTIONS.....	120
<b>E.V. Radkevich, O.A. Vasileva</b> ABOUT HYDRODYNAMIC INSTABILITIES.....	121
<b>O.S. Rozanova, M.K. Turzynski</b> STEADY STATES OF COMPRESSIBLE FLUID AND THEIR STABILITY.....	122
<b>V.R. Rudnev, D.A. Tikhonov, L.I. Kulikova, A.V. Efimov, M.Yu. Gubin</b> ALGORITHM FOR PREDICTING STRUCTURAL MOTIFS OF THE TYPE ALPHA-ALPHA-CORNER WITH A SHORT CONSTRUCTION OF A CERTAIN TYPE ACCORDING TO THE AMINO ACID SEQUENCE.....	123
<b>Yu.G. Rykov</b> SOME FACTS THAT AFFECT THE CONCEPTION OF GENERALIZED SOLUTIONS TO SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS.....	125
<b>V.S. Rykovanov, F.A. Sapozhnikov</b> THE CHOICE OF THE METHOD OF SOLVING THE HEAT EQUATION IN THE METHOD OF SMOOTHED PARTICLES SPH.	127
<b>S.D. Rykunov</b> APPLICATION OF THE METHOD OF VIRTUAL ELECTRODES TO THE ANALYSIS OF MAGNETIC ECEPHALOGRAPHY DATA	128
<b>F.A. Sapozhnikov, V.S. Rykovanov</b> THE INFLUENCE OF THE INITIAL ARRANGEMENT OF PARTICLES ON THE SPHERICITY OF A SHOCK-LOADED BOUNDARY OF SUBSTANCES IN THE SIMULATION OF RICHTMYER – MESHKOV INSTABILITY BY THE SPH METHOD.....	131
<b>E.V. Seregina, M.A. Stepovich</b> ON THE PROJECTION METHOD FOR SOLVING THE HEAT	

EQUATION WITH A CONCENTRATED HEAT CAPACITY IN A SEMI-INFINITE REGION.....	133
<b>M.V. Shamolin</b> MODELING OF THE SPATIAL MOTION OF A SOLID BODY IN A MEDIUM.....	134
<b>Yu.D. Shevelev, F.A Maksimov</b> FLOW NEAR THE ROTATING DISK.....	135
<b>E.P. Shurina, N.B. Itkina, S.A. Trofimova</b> NON-CONFORMAL MIXED FINITE ELEMENT VARIATIONAL STATEMENTS FOR FILTERING PROBLEMS.....	137
A.L. Sibirev, M.N. Shipko, <b>M.A. Stepovich</b> ON SOME PROBLEMS ASSOCIATED WITH THE FORMULATION OF PROBLEMS FOR THE CHANNELING OF KILOVOLT ELECTRONS IN AQUEOUS MEDIA AND THE PROSPECTS FOR USING THIS PHENOMENON IN BIOLOGY AND MEDICINE.....	138
<b>S.A. Skladchikov, V.S. Laponin, S.V. Anpilov, N.P. Savenkova</b> THE STUDY OF THE DYNAMICS OF THE DISTRIBUTION OF DRUGS WITHIN THE EYE, DEPENDING ON THE LOCATION OF THE INJECTION.....	140
<b>S.V. Starchenko</b> BASIC NONLINEARITY OF ROTATING MHD DYNAMO.....	141
S.V. Starchenko, <b>A.Yu. Smirnov</b> MODERN GEODIPOLE AND INTERNAL CURRENTS OF THE EARTH.....	143
<b>E. Stepin</b> TRANS-ALFVEN MHD FLOWS WITH ACCELERATION IN CO-AXIAL CHANNELS UNDER LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD.....	146
<b>L.G. Strakhovskaya</b> THE FORMATION OF SPIRAL-VORTEX STRUCTURES IN GRAVITATING PROTOPLANETARY DISK.....	148
<b>M.D. Surnachev</b> NOTES ON THE LAVRENTIEV PHENOMENON.....	149

<b>T.A. Sushkevich</b> GENERALIZED SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF RADIATION TRANSFER THEORY AND THEIR APPLICATIONS.....	150
<b>A.A. Tayursky</b> INVESTIGATION OF NONLINEAR ABSORPTION OF AN ALFVEN WAVE BY A DISSIPATIVE PLASMA.....	153
<b>D.A. Tikhonov, L.I. Kulikova, A.V. Efimov</b> DOUBLE STRANDED STRUCTURAL MOTIFS IN PROTEINS AND ANALYSIS OF THEIR CHARACTERISTICS.....	154
<b>D.A. Tikhonov, A.B. Medvinsky</b> SHANNON'S CROSS-CORRELATION ENTROPY AS A MEASURE OF THE CONJUGACY OF ECOLOGICAL PROCESSES.....	156
<b>M.N. Ustinin</b> RECONSTRUCTION OF THE FUNCTIONAL STRUCTURE OF THE HUMAN BODY ACCORDING TO MULTI-CHANNEL MEASUREMENTS.....	156
<b>V.P. Varin</b> HIGH PRECISION COMPUTATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS.....	159
<b>V.V. Vedenyapin, S.Z. Adjiev, I.V. Melihov, N.N. Fimin, V.M. Chechetkin</b> KINETIC AND QUASILINEAR EQUATIONS AND VARIATIONAL PRINCIPLES.....	160
<b>E.V. Vikhrov, V.O. Podryga, S.V. Polyakov</b> MOLECULAR-DYNAMICS CALCULATION OF THE TECHNICAL GASES DIFFUSION COEFFICIENT.....	162
<b>V.I. Vlasov, S.L. Skorokhodov</b> ON THE ASYMPTOTICS OF CAVITATION FLOW AROUND AN OBSTACLE.....	163
<b>S.S. Vlasova</b> EXACT SOLUTION FOR PLANE FREE CONVECTION OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN AN INFINITE STRIP	

WITH QUADRATIC TEMPERATURE DISTRIBUTION AT THE LOWER BOUNDARY.....	166
<b>L.V. Vshivkova, G.I. Dudnikova</b> NUMERICAL SIMULATION OF THE INTERACTION OF ION FLOWS IN A COLLISIONLESS PLASMA.....	168
<b>S.V. Yakovleva, S.V. Starchenko</b> THE ORIGINAL STATISTICAL ANALYSIS OF THE SPECIFIC ENERGY VARIATIONS OF THE POTENTIAL GEOMAGNETIC FIELD FROM OBSERVATIONS IN THE XX AND XXI CENTURY	168
<b>N.A. Zaitsev, B.V. Kritsky</b> MODELING OF TWO-PHASE FLOWS BASED ON THE NAVIER-STOKES-KORTEWEG EQUATIONS.....	171
<b>G.V. Zasko, A.V. Glazunov, E.V. Mortikov, Yu.M. Nechepurenko</b> ON OPTIMAL PERTURBATIONS OF A STABLY STRATIFIED TURBULENT COUETTE FLOW.....	173
<b>V.T. Zhukov, O.B. Feodoritova, N.N. Novikova</b> NUMERICAL EXPERIMENTS TO SOLVE NAVIER-STOKES EQUATIONS USING LOCAL ITERATIONS SCHEME.....	175
<b>G.I. Zmievskaya, M.S. Zhmyleva</b> STOCHASTIC MODELS OF PHASE TRANSITIONS IN SOLIDS: THE FORMATION OF POROSITY AND POLARIZATION OF A FERROELECTRIC.....	177



## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОГРУЖЕННЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЗАЦИИ КРЫЛА

И.В. Абалакин, А.П. Дубень, **Н.С. Жданова**, Т.К. Козубская

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, ilya.abalakin@gmail.com,  
dualks@gmail.com, tatiana.kozubskaya@gmail.com,  
nat.zhdanova@gmail.com*

Численное моделирование является эффективным инструментом исследования различных задач, возникающих в современной авиационной промышленности. Одной из таких задач является оптимизация геометрической формы обтекаемых элементов конструкции. Она включает в себя обязательное требование учета акустических характеристик, что обусловлено постоянным ужесточением норм по шуму для пассажирского авиационного транспорта. Задача оптимизации формы обтекаемого тела может быть решена посредством проведения серии расчетов с разными геометрическими параметрами исследуемой конфигурации. При этом каждый расчет обладает столь высокой вычислительной ресурсоемкостью, что проведение серийных вычислительных экспериментов становится дорогой задачей даже при использовании самых современных суперкомпьютеров.

В работе строится новая численная методика, которая призвана ускорить проведение серийных расчетов по оптимизации формы обтекаемых тел. В рамках этой методики предполагается варьирование необходимого набора геометрических параметров задачи в рамках одного расчёта. Эта возможность осуществляется путём чередования периодов быстрого плавного изменения исследуемой конфигурации и достаточно продолжительного накопления статистических данных. Таким образом, отсутствует необходимость построения набора сеток, соответствующих рассматриваемым конфигурациям, а время установления квазистационарного турбулентного течения пренебрежимо мало по сравнению со временем нестационарного расчета задачи.

Предлагаемая методика основывается на синтезе трёх методов, а именно метода погруженных границ, метода динамической сеточной адаптации и метода деформации сетки.

Метод погруженных границ подразумевает моделирование условия на границе раздела двух сред (твердое тело и окружающая его газовая среда) внутри односвязной области при аппроксимации на сплошной сетке (без выделения границы сеточными узлами). В работе

используется разновидность этого подхода, а именно метод Бринкмана штрафных функций [1].

Динамическая сеточная адаптация применяется для обеспечения достаточного сеточного разрешения в пристеночных областях течения. Используется оригинальный метод сеточной адаптации с сохранением топологии расчетной сетки, разработанный на основе вариационных принципов теории упругости с конечными деформациями [2].

Деформация сетки необходима, когда происходит изменение формы обтекаемой поверхности и следует ее подстроить под новую конфигурацию за счет передвижения узлов. В работе разработан и реализован алгебраический алгоритм деформации расчетной сетки, в котором смещение координат узлов сетки вычисляются на основе передвижения дополнительно построенной структурированной двумерной решётки.

Работоспособность методики демонстрируется на одной из прикладных задач авиационной отрасли - моделировании аэроакустических свойств двухкомпонентного крылового профиля с различной конфигурацией внутренней поверхности предкрылка.

Сначала с целью валидации задача решается на согласованной с поверхностью сетке. Затем этот же самый расчет повторяется для случая, когда граничное условие на поверхности предкрылка моделируется методом погруженных границ (рис.1 слева). Далее происходит смещение внутренней поверхности предкрылка посредством деформации расчетной сетки, и расчет продолжается до накопления статистически корректных данных, нужных для получения спектральных аэроакустических характеристик.

Проведённые расчёты демонстрируют работоспособность созданной вычислительной методики и показывают её эффективность, которая особенно наглядно проявляется в выигрыше во времени расчёта.

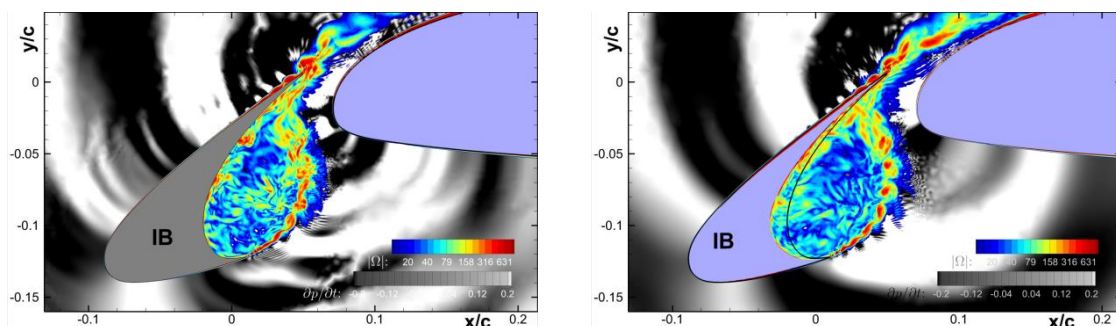


Рис. 1. Мгновенные поля завихренности и производной давления по времени: слева – исходная форма предкрылка, справа – деформированная форма.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант № 16-11-10350.

### *References*

1. Angot Ph., Bruneau C.-H. and Fabrie P. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows // Numer. Math. V. 81 PP. 497–520. 1999.

2. Garanzha V. A., Kudryavtseva L. N. and Utyuzhnikov S. V. Variational method for untangling and optimization of spatial meshes // Journal of Computational and Applied Mathematics, V. 269, PP. 24-41, 2014. doi: 10.1016/j.cam.2014.03.006

## **ЭФФЕКТИВНАЯ МЕТОДИКА ПОСТАНОВКИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТВЁРДЫХ СТЕНКАХ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЫСОКОРЕЙНОЛЬДСОВЫХ СЖИМАЕМЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

И.В. Абалакин<sup>1</sup>, А.П. Дубень<sup>1</sup>, В.О. Цветкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва

*ilya.abalakin@gmail.com, alexey.duben@gmail.com,  
lera.tsvetkova@gmail.com*

Вихреразрешающее моделирование все чаще используется для решения научных и прикладных задач аэродинамики и аэроакустики. Такая тенденция обусловлена следующими факторами: повышение качества и доступности вычислительных ресурсов и развитие численных методов и подходов к моделированию турбулентных течений. Среди них наиболее часто используемыми и стремительно развивающимися являются гибридные RANS-LES подходы, эффективно комбинирующие экономичный RANS в пристеночных областях и более точный LES в остальных зонах. Но, несмотря на все преимущества, данный подход остается слишком дорогим для его эффективного использования применительно к «промышленным» задачам. В настоящее время большие усилия направлены на разработку и развитие различных техник и технологий, позволяющих снизить вычислительную стоимость расчетов высокорейнольдсовых турбулентных течений возле сложных конфигураций, при этом

существенно не влияющих на точность получаемых результатов. Одной из таких технологий являются так называемые пристеночные функции, позволяющие снизить требования к сеточному разрешению возле твердых стенок.

В докладе будет представлена эффективная методика задания граничных условий на твердых стенках, применимая для моделирования сложных высокорейнольдсовых сжимаемых турбулентных течений, ориентированная на использование в расчетах с помощью гибридных незонных RANS-LES методов. Методика основана на задании искусственных граничных условий, моделирующих влияние стенки на течение через задание вязких потоков на границе [1,2]. Ее применение снижает расчетные затраты вследствие использования более грубой сетки в пристеночной области и соответствующего сокращения количества сеточных узлов и элементов. Разработанная техника основана на решении с помощью метода итераций по Ньютону одномерной системы уравнений в приближении пограничного слоя [3,4] для каждого приграничного узла.

Была проведена серия расчетов, которая показала основные преимущества, недостатки и ограничения разработанной технологии. Тестирование методики проводилось на серии канонических турбулентных течений, в том числе с наличием отрыва и присоединения потока.

Программная реализация разработанной методики произведена в рамках вершинно-центрированного конечно-объемного расчетного кода NOISEtte, работающего на гибридных неструктурированных вычислительных сетках.

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 18-31-00368.

#### *Список литературы:*

1. Kalitzin G., Medic G., Iaccarino G., Durbin P. Near-wall behaviour of RANS turbulence models and implications for wall functions. *Journal of Computational Physics* 204, 265–291, 2005.
2. Knopp, T. Universal Wall Functions for Aerodynamic Flows: Turbulence Model Consistent Design, Potential and Limitations. In: MEGADESIGN and MegaOpt - German Initiatives for Aerodynamic Simulation and Optimization in Aircraft Design, pp. 55-71, 2010.
3. Davidson L., Backar J.-A. Evaluation of numerical wall functions on the axisymmetric impinging jet using OpenFOA. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 67, pp. 27–42, 2017.

4. Knopp T., Spallek F., Frederich O., Rapin G. Application of Numerical Wall Functions for Boundary Layer Flows with Separation and Reattachment. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design 132, pp. 145-155, 2016.

## **BIFURCATIONS FROM CURVES OF EQUILIBRIA IN SYMMETRIC AND COSYMMETRIC HYDRODYNAMIC PROBLEMS**

**Afendikov A.L.**

*KIAM RAS*

It is well known that curves of equilibria naturally appear in problems with a continuous symmetry groups. In 80th K.I. Babenko noticed that in the Kolmogorov problem in unbounded domain  $K = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  there is a continuous family of steady states which is given explicitly. In [1], [2] it was demonstrated that the stability spectrum of individual steady states is not the same along the curve in the contrast to families in symmetric problems and the bifurcation problem was studied. Later V.I. Yudovich noticed that in some hydrodynamic problems the same situation may be due to the existence of the additional structure which he called cosymmetry in order to stress the difference to any kind of continuous symmetries. Ten years later J. Alexander, B. Fiedler and S. Liebscher independently studied bifurcations from lines of equilibria without additional structural hypotheses. They discovered the phenomena which they called bifurcation without parameters. In [3] Kirchgässner reduction was used to study Kolmogorov problem in the domain  $K$ . Some of the results on the interaction of these theories in hydrodynamic problems will be discussed.

### *References:*

1. Afendikov A.L. The analysis of instabilities of the generalized Kolmogorov flows, Preprint, KIAM, N 126, Keldysh Inst. Appl. Math. Acad. Sci. USSR, Moscow, 1995 (in Russian).
2. Afendikov A.L. and Babenko K.I. Bifurcation in the presence of the symmetry group and loss of stability of some plane viscous fluid flows, Soviet Math. Dokl. 33(3), 742–747, 1986.

3. Afendikov A.L. and Kirchgässner K. Spatial dynamics approach to Kolmogorov flows on plane torus, *Angew. Math. Mech.* 78(Supl. 1), 211–212, 1998.

## **КОНСТАНТИН ИВАНОВИЧ БАБЕНКО. БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК**

**Н.Г. Афендикова**

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва,  
keldysh111@gmail.com*

Константин Иванович Бабенко родился 21 мая 1919 г. на Брянском руднике Луганской области. После окончания средней школы в 1936 году он поступил на физико–математический факультет Харьковского университета. После окончания университета К.И.Бабенко был призван в армию и направлен учиться в ВВИА им. Н. Е. Жуковского. Продолжил обучение в адъюнктуре академии и в 1948 году защитил кандидатскую диссертацию «Определение сил и моментов, действующих на колеблющееся стреловидное в плане крыло в сверхзвуковом потоке газа». Первая математическая работа К. И. Бабенко «О взвешенном приближении многочленами непрерывных на всей числовой оси функций» была опубликована в 1947 г. в журнале «Доклады АН СССР». Ко времени работы К. И. Бабенко над кандидатской диссертацией относятся его первые научные контакты с академиком М.В. Келдышем, продолженные и во время его работы над докторской диссертацией. Мстислав Всеволодович оценил математическую одаренность Бабенко и организовал в 1951 году его перевод на работу в МИАН в отдел прикладной математики. Докторская диссертация «К теории уравнений смешанного типа» была защищена 12 июля 1952г. В 1953г. было образовано Отделение прикладной математики МИАН, и К. И. Бабенко был переведен туда в отдел И. М. Гельфанда. В отделе решались математические задачи, сопровождавшие срочное создание атомного и термоядерного оружия. О существенном вкладе Константина Ивановича в выполненные работы говорит его награждение двумя орденами Трудового Красного Знамени (в 1955 и 1956 гг.).

В 1956г. К. И. Бабенко был назначен начальником отдела №4 в ИПМ. На этой должности Константин Иванович работал до конца жизни. В 1959 г. К. И. Бабенко был утвержден в звании профессора.

К. И. Бабенко с коллективом сотрудников в 1967г. был удостоен Государственной премии за монографию «Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом».

С 1970г. К. И. Бабенко начал преподавание в качестве профессора кафедры общих проблем управления на мехмате МГУ.

По инициативе К. И. Бабенко и под его руководством с 1976 года стали проводиться Всесоюзные школы по теоретическим основам и конструированию алгоритмов решения задач математической физики. Эти Школы-конференции, посвященные памяти К. И. Бабенко, проводятся и в настоящее время.

В декабре 1976 К. И. Бабенко был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по Отделению механики и процессов управления по специальности «Механика».

За выдающиеся заслуги в развитии отечественной науки К. И. Бабенко был удостоен государственных наград, в том числе Ордена Ленина в 1979г.

Выше были перечислены лишь факты биографии К. И. Бабенко. На самом деле не будет преувеличением сказать, что биография Константина Ивановича Бабенко по сути состоит из перечисления его достижений в решении многообразных математических и прикладных задач. Диапазон математических интересов Константина Ивановича удивительно широк. Список его трудов содержит 132 пункта.

10 июня 1987 года после тяжелой болезни Константин Иванович скончался. Похоронен в Москве на Кунцевском кладбище.

#### *Список литературы:*

1. Личное дело К.И.Бабенко. Архив ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. Ф. 1939, Оп. 4, Д. 1394
2. Волевич Л.Р. и др. Математическая жизнь в СССР и за рубежом. Константин Иванович Бабенко. УМН. 1980. Т.35. Вып.2(212).
3. Некролог. Прикладная математика и механика. 1987. Том 51. №5.
4. Некролог. УМН. 1988. Том 43. Вып. 2.
5. Волевич Л.Р. О работах К.И.Бабенко по теории уравнений в частных производных. Сб. Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. ИПМ им. М.В.Келдыша. 1989.
6. Тихомиров В.М. Бабенко и теория приближений. Сб. Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. ИПМ им. М.В.Келдыша. 1989.

7. Афондииков А.Л. и др. К восьмидесятилетию члена-корреспондента АН СССР К.И.Бабенко. Вестник Российской академии наук. 1999

8. Тихомиров В.М. Константин Иванович Бабенко. 7 искусств. 2011. № 12

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОЛЯ СТОХАСТИКО- ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ**

А.В. Александров<sup>1</sup>, Л.В. Дородницын<sup>2</sup>, А.П. Дубень<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ИИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва,  
*anatoly.v.alexandrov@gmail.com, alexey.duben@gmail.com*

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
*dorodn@cs.msu.su*

Работа посвящена проблеме генерации синтетической турбулентности для расчетов газовых течений. В настоящее время актуальным вопросом является построение входных условий на границе зоны вихреразрешающего моделирования на основе искусственно сгенерированного турбулентного поля скоростей. К свойствам такого поля предъявляются высокие требования с точки зрения физической корректности.

Авторы остановились на полностью стохастическом подходе к получению турбулентного поля скоростей, основанном на рандомизированном спектральном методе (РСМ) [1]. Результаты работы [2], где методика успешно применялась для моделирования двумерных задач аэроакустики, обобщаются на трехмерный случай. Рассматриваются две разновидности РСМ, отличающиеся процедурой распределения волнового числа  $k$  по энергетическому диапазону. Изучаются способы задания эволюции турбулентного поля во времени и возможности учета анизотропии тензора рейнольдсовых напряжений.



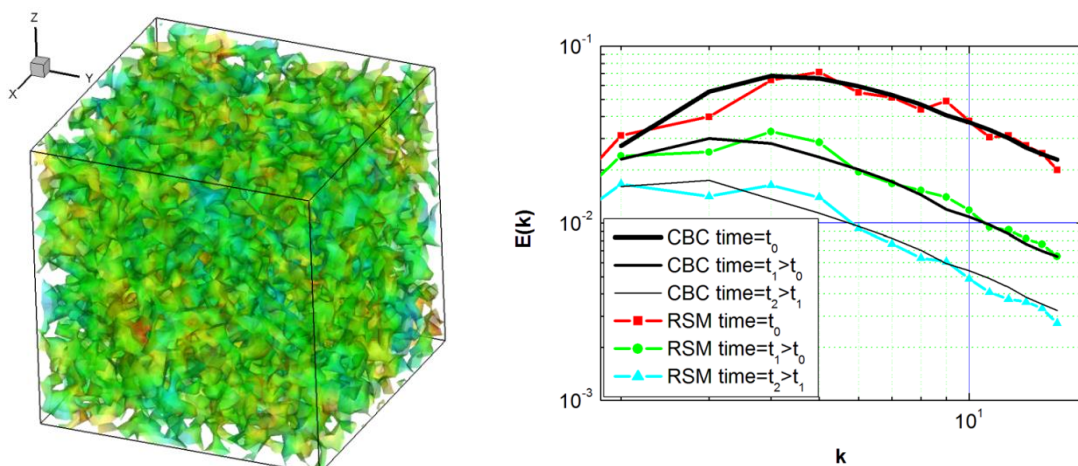


Рис.1. Слева – начальное поле скоростей в кубе (Q-критерий); справа – энергетические спектры на три момента времени (расчет и эксперимент).

Пример сгенерированного начального поля скоростей иллюстрирует рис.1 (слева). В работе показано, что построенные поля удовлетворяют важнейшим характеристикам однородной изотропной турбулентности, известным из физики: одноточечным моментам 1-го, 2-го и 3-го порядков; двухточечным корреляциям; энергетическому спектру. Исследуется влияние зависимости поля от времени на автокорреляционную функцию.

Проводятся валидационные расчеты на основе технологии крупных вихрей (LES). В частности, численно решалась нестационарная детерминированная задача о распаде однородной турбулентности в кубе в терминах уравнений Навье–Стокса с моделью Смагоринского, где стохастические турбулентные поля задавались в качестве начальных условий. Использовался вычислительный алгоритм, реализованный в программном комплексе NOISEtte [3] и основанный на разностной схеме EBR4 повышенной точности. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [4]. На рис.1 (справа) сравниваются расчетные (RSM) и эталонные (CBC) энергетические спектры на три момента времени, известные из эксперимента. В другом расчете моделируется формирование анизотропной турбулентности при течении в канале.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00726).

#### *Список литературы:*

1. Kurbanmuradov O., Sabelfeld K., Kramer P.R. Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // J. Comput. Phys. V.245. P.218–234. 2013.

2. Боровская И. А., Козубская Т. К., Курбанмурадов О., Сабельфельд К.К. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // Матем. моделирование. Т.19, №10. С.76–88. 2007.

3. Абалакин И. В., Бахвалов П. А., Горобец А. В., Дубень А. П., Козубская Т. К. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Выч. мет. программирование. Т.13, №3. С.110–125. 2012.

4. Comte-Bellot G., Corrsin S.. Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated ‘isotropic’ turbulence // J. Fluid Mech. V.48, part 2. P.273–337. 1971.

## АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ НА АНСАМБЛЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕРЫ

А.К. Алексеев<sup>1</sup>, А.Е.Бондарев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*МФТИ, Долгопрудный, Моск. обл., Россия,  
aleksey.k.alekseev@gmail.com*

<sup>2</sup>*ИПМ им М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия, bond@keldysh.ru*

Сеточные функции, используемые при дискретизации многомерных уравнений в частных производных, принадлежат пространству большой размерности и на их свойствах может сказываться эффект концентрации меры [1-3]. В данной работе рассмотрено его использование для апостериорной оценки погрешности расчета. Влияние концентрации меры зависит как от геометрии множества, занимаемого решением (в данном случае его погрешностью) в многомерном пространстве, так и от алгоритма выбора векторов на этом множестве (степени произвольности выбора).

Численные решения уравнений аэрогазодинамики, полученные разными методами, нельзя рассматривать как независимые вектора, так как они описывают единственное решение и, поэтому, должны проявлять высокую степень корреляции. В то же время локальная погрешность аппроксимации (ошибка усечения) и погрешность расчета с интуитивной точки зрения должны быть более независимыми. Обозначим систему уравнений как  $A\tilde{y} = f$ . Рассмотрим ансамбль из  $M$  численных решений, полученных на одной сетке с помощью

независимых разностных схем (в простейшем случае схем разного порядка). Численное решение, полученное  $k$ -м алгоритмом, определяется дискретным оператором  $A_h^{(k)} u^{(k)} = f_h$ . Ошибка усечения  $\delta u^{(k)}$  получается из формального разложения в ряд Тейлора численного решения (сеточной функции)  $u^{(k)}$  и подстановки результата в основную систему уравнений  $\delta u^{(k)} = \sum_{i \geq k} C_i h^i \cdot \partial^{i+1} u / \partial x^{i+1}$ . Так как для их взаимной

трансформации нужен код бесконечной длины, естественным выглядит предположение, что они являются алгоритмически независимыми (случайными по Колмогорову) [4]. Если трактовать алгоритмическую случайность как произвольный выбор с ограничениями меры ноль (отбрасыванием “слишком регулярных” векторов) [5], то ансамбль расчетов по алгоритмам с несовпадающим порядком аппроксимации соответствует произвольно выбранным  $\delta u^{(k)}$ . Что касается погрешностей дискретизации  $\Delta u^{(k)} = (u^{(k)} - \tilde{u}) = (A_h^{(k)})^{-1} \delta u^{(k)}$ , то, вследствие интегральных свойств оператора  $(A_h^{(k)})^{-1}$ , есть вероятность, что  $\Delta u^{(k)}$  более зависимы, корреляция погрешностей может также вызываться лимитерами, применяемыми в современных алгоритмах.

Если предположить, что алгоритмическая независимость погрешности  $\Delta u^{(k)}$  имеет место, то принадлежность погрешности к пространствам очень большой размерности дает нестандартные возможности для определения нормы погрешности и положения истинного решения. Известно, что в пространствах достаточно большой размерности  $N$  расстояние  $d_{1,2}$  между двумя произвольно выбранными векторами  $v^{(1)} \in R^N$  и  $v^{(2)} \in R^N$  “с вероятностью 1” больше длины этих векторов  $\|v^{(i)}\| \leq d_{1,2}$ . Это вызвано тем обстоятельством, что хорда в этих пространствах “почти всегда больше радиуса” [3], а два произвольно выбранных единичных вектора с большой вероятностью ортогональны [1], а именно для вероятности выполняется соотношение  $P\{(v^{(1)}, v^{(2)}) > \delta\} < \sqrt{\pi} / 2e^{-\delta^2 N/2}$  (здесь  $(v^{(1)}, v^{(2)})$  - скалярное произведение).

Применительно к нашей задаче учтем, что разность между численными решениями равна разности между погрешностями этих решений  $u^{(1)} - u^{(2)} = u^{(1)} - \tilde{u} - u^{(2)} + \tilde{u} = \Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}$ . Считаем также, что норма погрешностей ограничена  $\|\Delta u^{(i)}\| \leq R$  (они принадлежат некоторой гиперсфере радиуса  $R$  с центром в нуле).

В таком случае, расстояние  $d_{1,2} = \|u^{(1)} - u^{(2)}\| = \|\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}\|$  между двумя численными решениями  $u^{(1)} \in R^N$  и  $u^{(2)} \in R^N$  “с вероятностью 1” больше расстояния между точным и численным решениями:

$$d(u^{(i)}, \tilde{u}) = \|\tilde{u} - u^{(i)}\| \leq d_{1,2} = \|\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}\| \quad (1).$$

Данные численных расчетов, проведенных для двумерных уравнений Эйлера, описывающих течение невязкого сжимаемого газа, указывают на то, что для ансамбля численных решений, полученных независимыми методами, максимум расстояния между решениями  $\|du_{\max}\|$  может служить верхней оценкой погрешности дискретизации с индексом эффективности  $I_{eff} = \frac{\|du_{\max}\|}{\|\Delta u\|} \sim 0.6 \div 3$ . Анализ ансамбля расчетов или его расширение позволяют улучшить этот индекс до величин  $I_{eff} \sim 1.1 \div 1.5$ .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 18-11-00215.

#### *Список литературы:*

1. Зорич В.А., Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность. ТВП 59:3 (2014), 436-451.
2. Gorban A.N., Tyukin I. Y., Blessing of dimensionality: mathematical foundations of the statistical physics of data, arXiv:1801.03421v1, 2018
3. Sidiropoulos P., N-sphere chord length distribution, arXiv:1411.5639v1, 2014
4. Колмогоров А. Н., Три подхода к определению понятия “количество информации”, Проблемы передачи информации, т. 1, вып. 1, с. 3-11, 1965
5. Vanderlooy Stijn, Sprinkhuizen-Kuyper Ida G., An Overview of Algorithmic Randomness and its Application to Reliable Instance Classification, Maastricht Univ., Technical Report; CS 07-02, 2007

## H – МАТРИЦА, НОВЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С. Д. Алгазин

*Федеральное Государственное Бюджетное Учреждение Науки  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А. Ю. ИШЛИНСКОГО РАН  
algszinsd@mail.ru*

При дискретизации методом без насыщения К. И. Бабенко задачи Дирихле для оператора Лапласа в круге получается матрица, имеющая следующую блочную структуру:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mm} \end{pmatrix},$$

где  $h_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, m$  – симметричные циркулянты размера  $N \times N$ ,  $N = 2n + 1$ , т. е. матрицы, первая строка которых имеет вид:  $b_0, b_1, \dots, b_n, b_n, \dots, b_1$ , а остальные строки получаются из первой циклической перестановкой. Для краткости будем называть матрицы такого вида  $h$ -матрицами. Здесь  $m$  и  $N$  – параметры в круге,  $m$  – число окружностей сетки, а  $N = 2n + 1$  – число точек на каждой окружности. Теорема о свойствах этой матрицы доказана в [1].

Симметричный циркулянт можно представить в виде:

$$B_{ij} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos[k2\pi(i-j)/N], \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  – собственные значения этой матрицы  $\lambda_j = b_0 + 2 \sum_{p=1}^n b_p \cos(p\varphi_j)$ ,  $\varphi_j = 2\pi j/N$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2n$ , штрих у знака суммы означает, что слагаемое при  $k = 0$  берётся с коэффициентом  $1/2$ . Далее

$$B_{ij}^{-1} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \lambda_k^{-1} \cos[k2\pi(i-j)/N], \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

Эти утверждения обобщаются на матрицу  $H$  следующим способом:  $H = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \Lambda_k \otimes h_k$ ,  $H^{-1} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \Lambda_k^{-1} \otimes h_k$ , где штрих у знака суммы означает, что слагаемое при  $k=0$  берётся с коэффициентом  $1/2$ ;  $\Lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  – матрица размера  $m \times m$ , элемент  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, m$  которой  $k$ -ое собственное значение матрицы  $h_{\mu\nu}$ ;  $h_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  – матрица размера  $N \times N$ :  $h_{kij} = \cos[k2\pi(i-j)/N]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , через  $\otimes$  обозначено кронекерово произведение матриц.

Позднее стало ясно, что матрицы такого вида и некоторые их обобщения широко встречаются в задачах математической физики. Их можно использовать при дискретизации так, что дискретизация двумерной задачи сводится к дискретизации одномерной задачи, а дискретизация трехмерной задачи сводится к дискретизации двумерной задачи. Можно сказать, что дискретная задача наследует свойство разделения переменных соответствующей бесконечномерной задачи.

Таким образом, при периодическом краевом условии по одной переменной (тело вращения) можно описанным выше аппаратом  $h$ -матрицы свести дискретизацию двумерной задачи к одномерной, а трёхмерной к двумерной.

Для умножения  $h$ -матрицы на вектор можно, при  $N = 3^r$ , применить быстрое преобразование Фурье, тогда число операций составит  $O(m^2 r N)$ .

Для примера рассмотрим одномерную задачу на собственные значения для нулевого уравнения Бесселя:

$$(xy')' + \lambda xy = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y(1) = 0, \quad |y(0)| < \infty \quad (1)$$

Пусть

$$y(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) y_j, \quad y_j = y(x_j), \quad l_j(1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

где  $l_j(x)$  - фундаментальные функции интерполяции,  $x_j$  - узлы интерполяции [1].

Подставляя (2) в (1) и применяя обычную процедуру Бубнова-Галёркина (используется интегрирование по частям и квадратурная формула с коэффициентами  $c_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n$ ) получим конечномерную задачу на собственные значения:

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{\nu=1}^n l'_i(x_\nu) l'_j(x_\nu) x_\nu c_\nu \right) y_j = \lambda \sum_{\nu=1}^n x_\nu c_\nu y_\nu \quad (3)$$

Для того, чтобы перейти к двумерной задаче, воспользуемся аппаратом  $h$ -матрицы, описанном в пункте 1. Из (3) получаем клетку  $h$ -матрицы  $\Lambda_0$ , остальные матрицы  $\Lambda_k, k = 1, \dots, n$  получаются из  $\Lambda_0$  прибавлением диагональной матрицы (это следует из уравнений Бесселя). Таким образом,  $H = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \Lambda_k \otimes h_k, H^{-1} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^n \Lambda_k^{-1} \otimes h_k$  - оператор Лапласа и обратный к нему в круге единичного радиуса. Случай произвольной области сводится к кругу конформным отображением. Для этого нужно умножить матрицу  $H$  на диагональную матрицу слева.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310380-1.

*Список литературы:*

1. Алгазин С. Д.  $h$  – матрица, новый математический аппарат для дискретизации многомерных уравнений математической физики. М: «URSS», 2019, 152 с. ISBN 978-5-9710-5244-9.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ В ПРИАНОДНОЙ ОБЛАСТИ АЛЮМИНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА**

**С.В. Анпилов<sup>1</sup>, Н.П. Савенкова<sup>2</sup>, В.С. Лапони<sup>3</sup>,  
С.А. Складчиков<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>*ВМК МГУ, Москва, svanpilov@inbox.ru*

<sup>2</sup>*ВМК МГУ, Москва, mknandrew@mail.ru*

<sup>3</sup>*ВМК МГУ, Москва, lapvlad@mail.ru*

<sup>4</sup>*ВМК МГУ, Москва, sklادتchikov@mail.ru*

Предложенная ранее двухфазная трехмерная магнитогидродинамическая модель [1], позволяющая моделировать поведение сред при возникновении затяжного анодного эффекта за счет резкого уменьшения локальной электрической проводимости электролита, была расширена введением третьей компоненты смеси – дисперсных пузырьков газа.

Основным показателем работы электролизёра является выход по току. Выход по току - отношение между практическим и теоретическим производством алюминия. Считается, что первопричина снижения выхода по току - окисление растворенного алюминия анодным газом (CO<sub>2</sub>). Введение третьей (дисперсной) фазы [2] позволило уточнить этот параметр. Моделирование поведения газовой составляющей смеси позволит описывать обратное окисление полученного алюминия – в соответствии с распределением этой компоненты в среде электролита.

В результате численного моделирования, учитывающего реальные геометрические и технологические параметры ванны, получены поля скоростей в алюминии, электролите, а распределение сопротивления многофазной среды и токов, построена граница раздела сред.

*Список литературы:*

1. Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Пискажова Т.В. Двухфазная 3D модель мгд-явлений алюминиевого электролизёра. - Сборник докладов третьего международного конгресса «Цветные металлы - 2011». Красноярск,. – С. 282-286, 2011.
2. Дорохов И.Н., Кафаров В.В., Нигматулин Р.И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами тепло и массопереноса. Прикладная математика и механика. Т.39, No.3. С. 485-496, 1975.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ В ЗВЁЗДНЫХ АККРЕЦИОННЫХ ДИСКАХ**

**А. Бабаков**

*ИАП РАН, Москва, avbabakov@mail.ru*

Данная работа является продолжением исследований [1,2] по изучению вихревого движения в компактных астрофизических объектах на основе численного моделирования с использованием газодинамических моделей среды. Для моделирования нестационарных движений материи в быстровращающихся аккреционных дисках используется консервативный численный метод потоков [3,4], основанный на конечно-разностном представлении законов сохранения плотности, компонент импульса и полной энергии для конечного объёма. Используются “upwind” аппроксимации векторов плотностей потоков указанных характеристик среды. При моделировании быстровращающихся аккреционных дисков, для которых вращение является существенно доминирующим движением, используется модифицированная конечно-разностная методика, позволяющая сохранять компоненты момента импульса, законы сохранения для которых не входят в основную систему уравнений.

Рассматривается модельная задача о вихревой структуре аккреционного диска массой  $1.088 \cdot 10^{31}$  гр. и радиуса  $r_0 = 1.0 \cdot 10^7$  см., быстровращающегося вокруг нейтронной звезды массы  $M = 2.7846 \cdot 10^{33}$  гр. и радиуса  $r_0 = 1.0 \cdot 10^6$  см. Для среды в диске используется газодинамическая модель совершенного, невязкого газа с отношением удельных теплоемкостей равным  $5/3$ .



Масса центральной гравитирующей области (нейтронной звезды) превышает массу материи в аккреционном диске в 257 раз, что позволяет пренебречь самогравитацией внутри аккреционного диска.

Начальные поля давления и плотности задаются таким образом, чтобы при нулевых скоростях движения реализовывалось равновесие в области аккреционного диска, находящегося в центральном гравитационном поле (нейтронной звезды). При этом используется политропное уравнение состояния газовой среды. Энтропия в начальном поле постоянна во всей области интегрирования, что соответствует гидродинамическому равновесию, не препятствующему, однако, образованию течений. Отличия дискретного задания газодинамических переменных начального поля в аккреционном диске и гравитационного поля от аналитического представления являются своего рода малыми возмущениями, которые при эволюционном расчете (особенно в условиях большой гравитационной массы звезды) приводят к нестационарному численному решению. При интегрировании по времени численное решение внутри аккреционного диска приобретает нестационарный характер с образованием вихревых структур. Подтверждением этому являются представленные на рис. 1 для различных моментов безразмерного времени поля плотности и проекции мгновенных линий тока на плоскость, проходящую через ось вращения (плотность в логарифмическом масштабе отнесена к значению на поверхности аккреционного диска, граничащей с нейтронной звездой, в начальный момент времени).

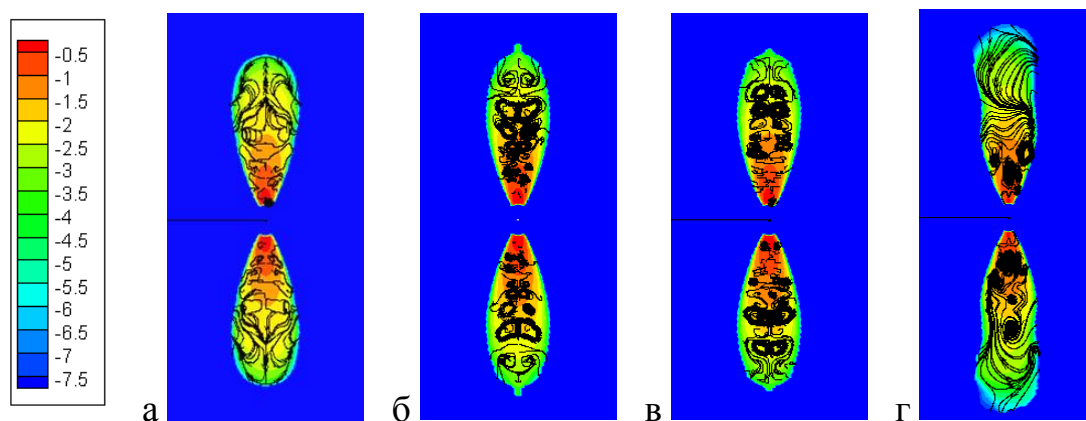


Рис. 1. Поле плотности и проекции мгновенных линий тока в сечении аккреционного диска в различные моменты времени: а -  $t=1$ , б - 5, в-25, г-150

Приведенные картины дают представление о пространственно-нестационарной вихревой структуре аккреционного диска.

В расчетах использовались вычислительные сетки, содержащие до 30 миллионов конечных объемов. Моделирование реализовывалось на вычислительных комплексах кластерной архитектуры с использованием до 2000 многоядерных процессоров. Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного Суперкомпьютерного центра РАН (МСЦ РАН).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАП РАН.

*Список литературы:*

1. Babakov, A.V., Popov, M.V., Chechetkin, V.M. Mathematical Simulation of a Massive Star Evolution Based on a Gasdynamical Model. Mathematical models and computer simulations. Vol.10(3). 357–362, 2018.
2. Aksenov, A.G., Babakov, A.V., Chechetkin, V.M. Mathematical simulation of the vortex structures in the fast rotation astrophysical objects. Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 58(8). 1287–1293, 2018.
3. Belotserkovskii, O.M., Severinov, L.I. The conservative “flow” method and the calculation of the flow of a viscous heat-conducting gas past a body of finite size. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. Vol. 13(2). 141–156, 1973.
4. Babakov, A.V. Program package FLUX for the simulation of fundamental and applied problems of fluid dynamics. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. Vol. 56(6). 1151–1161, 2016.

## **ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РАСЧЕТА ФОРМИРОВАНИЯ КУМУЛЯТИВНЫХ СТРУЙ**

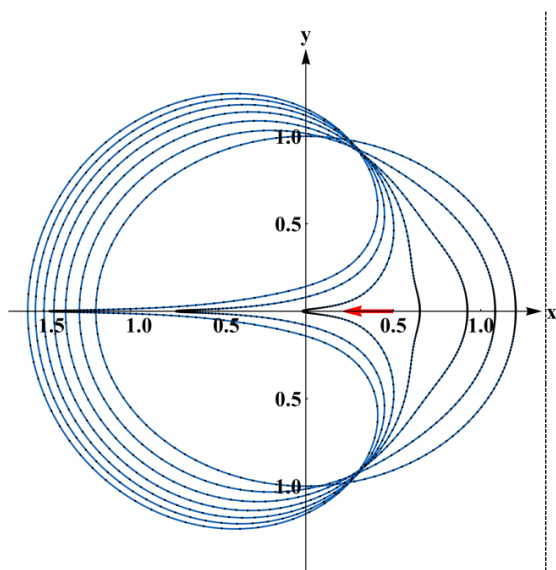
**Байков Никита Дмитриевич<sup>1</sup>, Петров Александр Георгие-  
вич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова*

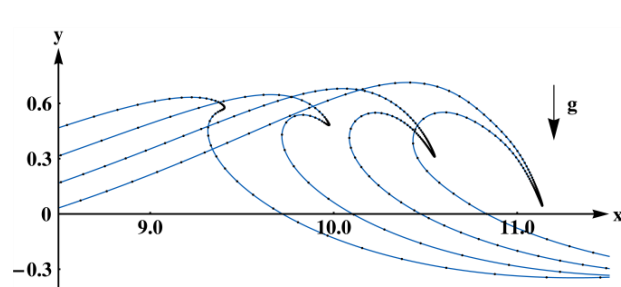
<sup>2</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*

В работе изучаются плоские нестационарные задачи движения свободной границы в потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости. На основе метода граничных элементов строится численный алгоритм расчета формы свободной границы. Приводятся результаты расчетов формирования кумулятивных струй в задачах деформации

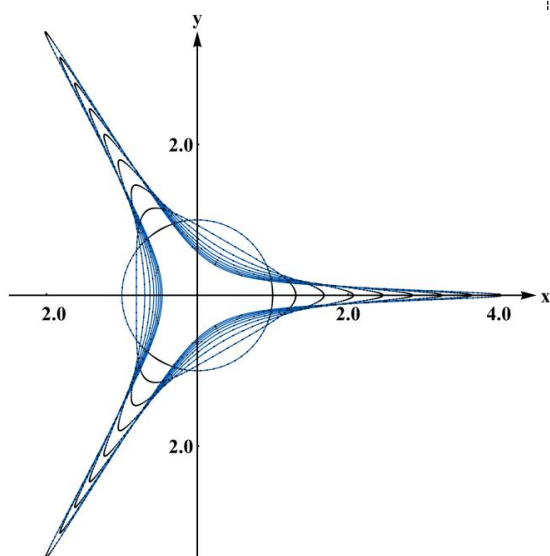
цилиндрических полостей в жидкости, движения и деформации свободной границы жидкого вращающегося и самогравитрующего цилиндра, а также обрушения капиллярно-гравитационных волн. Описание численного алгоритма сопровождается выводом механических законов сохранения, их сеточных аналогов, с помощью которых контролируется алгоритм. Проводится сравнение с известными, а также новыми точными аналитическими и полуаналитическими решениями.



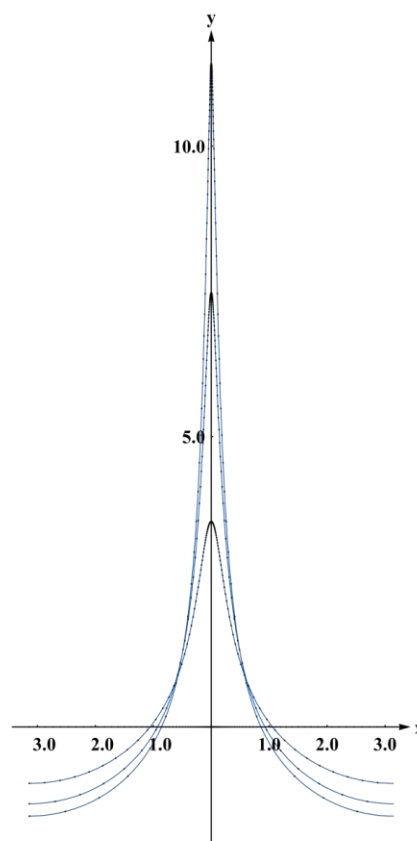
(a)



(b)



(c)



(d)

## ДВУМЕРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ АДАПТАЦИЯ СЕТКИ В ЭЙЛЕРОВОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ

**Н.М. Балашов, И.В. Глазырин, Н.А. Михайлов**

*РФЯЦ-ВНИИТФ, Снежинск, balashovnm@vniitf.ru*

*РФЯЦ-ВНИИТФ, Снежинск, i.v.glazyrin@vniitf.ru*

*РФЯЦ-ВНИИТФ, Снежинск, n.a.mikhaylov@vniitf.ru*

В докладе представлено применение динамической адаптации сетки для двумерных осесимметричных задач в эйлеровой газодинамической программе. Основные особенности программы: декартовая система координат, неструктурированная сетка, метод конечных объемов, многокомпонентность, геометрическое восстановление контактных границ.

Для динамической адаптации сетки используется метод деления отдельных ячеек («h-refinement method») [1]. В докладе представлены основные этапы алгоритма динамической адаптации сетки: выбор ячеек по критерию, измельчение/укрупнение сетки и расчет величин в новых ячейках. Рассмотрен вопрос консервативности при расчете величин в новых ячейках.

Приведены результаты тестирования динамической адаптации сетки на сферической задаче Сода. Решения сравниваются на статичных сетках и с динамической адаптацией до второго уровня. Эталонное решение получено по одномерному программному комплексу Волна [2].

### *Список литературы:*

1. Powell K.G., Roe P.L., Quirk J. Adaptive-Mesh Algorithms for Computational Fluid Dynamics// In: Hussaini M.Y., Kumar A., Salas M.D. (eds) Algorithmic Trends in Computational Fluid Dynamics. ICASE/NASA LaRC Series. Springer, New York, NY, 1993.

2. Куропатенко В.Ф., Коваленко Г.В., Кузнецова В.И. и др. Комплекс программ «Волна» и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся сжимаемых сплошных сред. Часть 1. Неоднородный разностный метод// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. С. 9-17, 1989.

## СВЕРХСХОДЯЩИЕСЯ АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ (К ПРОБЛЕМЕ К.И. БАБЕНКО)

**В. Н. Белых**

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,  
belykh @math.nsc.ru*

Построены ненасыщаемые хорошо обусловленные алгоритмы численного решения эллиптических краевых задач для уравнения Лапласа в гладких осесимметричных областях достаточно произвольной формы. Отличительная черта последних отсутствие главного члена погрешности, и как результат способность автоматически подстраиваться к любым избыточным (экстраординарным) запасам гладкости отыскиваемых решений задач. Причём для бесконечно гладких решений этих задач численный ответ конструируется с абсолютно неуллучшаемой экспоненциальной оценкой погрешности. Неуллучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровского  $m$ -поперечника компакта бесконечно гладких функций, содержащего точное решение задачи. Эта асимптотика также имеет вид убывающей к нулю (с ростом целого параметра  $m$ ) экспоненты.

### *Список литературы:*

1. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 743 с., 1986 (2-е издание: М.; Ижевск: РХД, 2002).
2. Белых В.Н. Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // ДАН. Т.417, №4. С.442-445, 2007.
3. Белых В.Н. Особенности реализации ненасыщаемого численного метода для внешней осесимметричной задачи Неймана // СМЖ. Т.54, №6. С.1237-1249. 2013.
4. Белых В.Н. К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке // Матем. сб. Т.210, №1. С.27-62. 2019.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ГОРНА И ПРИЛОЖЕНИЕ

С.И. Безродных<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, *sbezrodnykh@mail.ru*

Весьма обширный класс гипергеометрических функций многих переменных  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$  определяется в виде так называемого ряда Горна [1]-[3], который имеет вид:

$$F^{(N)}(\mathbf{z}) = \sum \Lambda(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}. \quad (1)$$

Здесь суммирование ведется по мультииндексу  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$  с неотрицательными целыми компонентами, а коэффициенты  $\Lambda(\mathbf{k})$  таковы, что отношение любых двух соседних является рациональной функцией аргументов  $k_1, k_2, \dots, k_N$ . Иначе говоря, выполняются соотношения

$$\Lambda(\mathbf{k} + \mathbf{e}_j) / \Lambda(\mathbf{k}) = P_j(\mathbf{k}) / Q_j(\mathbf{k}), \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $P_j$  и  $Q_j$  являются некоторыми полиномами, а  $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  – вектор с единицей на  $j$ -м месте.

В соответствии с теоремой Орре–Сато [2], [3] коэффициенты  $\Lambda(\mathbf{k})$ , отнормированные таким образом, что  $F^{(N)}(\mathbf{0}) = 1$ , записываются в виде

$$\Lambda(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^s (\Gamma(\gamma_j) / \Gamma(\mathbf{k} \cdot L^j + \gamma_j));$$

здесь  $\mathbf{k} \cdot L^j$  – скалярное произведение, а  $L^j$  есть  $j$ -й столбец целочисленной матрицы  $L = \{\lambda_{rj}\}$  размера  $N \times s$ , элементы которой удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^s \lambda_{rj} = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{C}^s$  – вектор параметров, а  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Таким образом, ряд (1) будем обозначать через  $F^{(N,s)}(L; \gamma; \mathbf{z})$ .

Предложен подход для вывода формул аналитического продолжения ряда  $F^{(N,s)}$  по переменным  $\mathbf{z}$  во все комплексное пространство  $\mathbb{C}^N$  в виде конечных сумм

$$F^{(N,s)}(L; \gamma; \mathbf{z}) = \sum_m A_m(L; \gamma) u_m(L; \gamma; \mathbf{z}),$$

где  $u_m(L; \gamma; \mathbf{z})$  – обобщенные гипергеометрические ряды, вообще говоря, не горновского типа, удовлетворяющие той же системе дифференциальных уравнений в частных производных, которой удовлетворяет ряд (1),  $A_m(L; \gamma)$  – некоторые коэффициенты.

В качестве примера реализации этого подхода построено аналитическое продолжение четырех функций Лауричеллы  $F_j^{(N)}$ , где  $j \in \{A, B, C, D\}$ , а также функций Кампе де Ферье; об этих функциях см. [4], [5].

Результаты по аналитическому продолжению функции  $F_D^{(N)}$  применены в [6] к решению проблемы кроудинга параметров интеграла Кристоффеля – Шварца, представляющего конформное отображение верхней полуплоскости на многоугольник с очень узким перешейком.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-07-00750.

*Список литературы:*

1. Horn J. Math. Ann. V. 34. 544-600, 1889.
2. Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С. Успехи матем. наук. Т. 47. Вып. 4(286), 3-82, 1992
3. Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
4. Lauricella G. Rendiconti Circ. Math. Palermo, V. 7. 111-158, 1893.
5. Exton H. Multiple hypergeometric functions and application. New York: J. Willey&Sons, 1976.
6. Безродных С.И. Успехи матем. наук. V. No 6. 3-94, 2018.

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ  
ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА  
«БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ»**

А. М. Блохин<sup>1,3</sup>, Е. А. Круглова<sup>2,3</sup>, Б. В. Семисалов<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
blokhin@math.nsc.ru*

<sup>2</sup>*Институт вычислительных технологий СО РАН,  
krugloverus@gmail.com*

<sup>3</sup>*Новосибирский государственный университет, vibis@ngs.ru*

Для описания динамики растворов и расплавов полимерных материалов в работе использована обобщённая реологическая мезоскопическая модель Покровского–Виноградова [1,2], учитывающая температурные и электромагнитные воздействия, имеющие место в термоструйных и пьезоэлектрических технологиях печати. Проведена идентификация параметров модели по данным о свойствах современных полимерных чернил и характеристиках печатающих устройств. Для расчёта стационарных двумерных течений в каналах печатающих устройств получена система разрешающих

квазилинейных уравнений для скорости течения, температуры и магнитного поля.

Для поиска численных решений задачи использован итерационный метод установления, приближения на основе рядов Фурье и полиномов Чебышёва и специальный подход к формированию и решению задачи линейной алгебры, соответствующей исходной постановке [3]. Доказаны сходимость и отсутствие насыщения [4] предложенного алгоритма в линейном приближении. При решении нелинейных тестовых задач показано, что погрешность численного решения строго соответствует асимптотике погрешности наилучшего полиномиального приближения по соответствующему классу гладкости.

Предложенный алгоритм использован для поиска стационарных течений полимерной жидкости в каналах с сечениями прямоугольной, круговой и эллиптической форм с тонкими включениями. На основе ненасыщаемости алгоритма, обратных теорем приближения и дробно-рациональных аппроксимаций дан анализ порядка гладкости и положения особенностей искомым функций. Приведены оценки погрешностей полученных решений.

#### *Список литературы:*

1. Pokrovskii, V.N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. 2nd edn. Springer, Berlin, 2010.
2. Блохин А.М., Круглова Е.А., Семисалов Б.В. Стационарные неизотермические течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами // Журн. выч. мат. и мат. физ. Т. 57. № 7, С. 1184–1197. 2017.
3. Семисалов Б. В. Быстрый нелокальный алгоритм решения краевых задач Неймана–Дирихле с контролем погрешности // Выч. мет. прогр. Т. 17 №4. С. 500–522. 2016.
4. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ

Г.А. Бочаров<sup>1</sup>, Д.С. Гребенников<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*ИВМ им. Г.И. Марчука РАН, Москва Россия bocharov@m.inm.ras.ru*

<sup>2</sup>*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия dmitry.ew@gmail.com*

Математическое моделирование в иммунологии является одной из активно развивающихся областей прикладной математики. Фундаментальные основы построения математических моделей иммунных реакций при инфекционных заболеваниях были заложены в работах Г.И. Марчука [1]. В основе построения математических моделей вирусных инфекций лежит принцип выделения из большого числа переменных и процессов набора «главных» факторов, доступных количественному оцениванию по клиническим и экспериментальным данным. Для каждой конкретной вирусной инфекции существует некоторый «оптимальный» уровень идеализации для математического описания соответствующей сложной системы «вирус-организм хозяина» на основе систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в рамках которого можно осуществить калибровку и исследование моделей для реальных инфекций, а также строить логические выводы, имеющие содержательную ценность для иммунологии. К числу таких моделей относятся базовая модель вирусной инфекции и модель противовирусного иммунного ответа Марчука-Петрова [1]. Первая из этих моделей относится к числу простейших и описывает динамику заболевания системой четырех нелинейных дифференциальных уравнений. Более полной по совокупности иммунных процессов является вторая модель. Она описывает динамику вирусной инфекции и иммунного ответа системой десяти дифференциальных уравнений и учитывает в виде запаздываний продолжительность процессов деления и дифференцировки клеток иммунной системы. Модель Марчука-Петрова и ее последующие модификации, разработанные для описания иммунофизиологических реакций организма, а также смешанных вирусно-бактериальных инфекций, являются классическими математическими моделями, используемыми для анализа механизмов развития вирусных заболеваний. На их основе построены модели экспериментальных вирусных инфекций [2] и инфекций человека, таких как вирусный гепатит [1,2].

Актуальной задачей моделирования вирусных инфекций является разработка многомасштабных и гибридных математических моделей широкого спектра физических, химических и биологических процессов,

опосредующих взаимодействия в системе «вирус-организм хозяина» на внутриклеточном, клеточно-популяционном и системном уровнях регуляции. Вместе с тем, для численной реализации и исследования многомасштабных моделей требуется развитие эффективных методов редукции размерности моделей, один из которых связан с введением запаздывающих переменных для феноменологического описания несущественных, для конкретной задачи моделирования, процессов и структур. Таким образом, разработка вычислительных технологий для анализа моделей, сформулированных в виде систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, является актуальной для задач математической иммунологии.

Построение и идентификация математических моделей для описания и исследования динамики инфекционных заболеваний имеет своей конечной целью анализ характеристик чувствительности процессов к воздействиям различной природы, изменяющим параметры соответствующей динамической системы и её состояние. На их основе могут быть рассчитаны количественные характеристики устойчивости и чувствительности режимов динамики, соответствующих фенотипически различным вариантам течения и исхода инфекций. В контексте этой проблемы очень важным является вычисление всех стационарных и периодических решений математических моделей и анализ их устойчивости.

Как правило, в пространстве параметров моделей вирусных инфекций существуют области моностабильности и бистабильности, поиск которых представляет актуальную задачу моделирования. Путем параметрического сдвига процессов в системе «вирус-организм» хозяина моностабильная система может быть переведена в бистабильную область. В свою очередь, перевод системы в область бистабильности позволяет подойти к решению задачи управления фенотипом заболевания путем оптимального возмущения неблагоприятного варианта динамики с высокой инфекционной нагрузкой с целью перевода системы в состояние с низким уровнем инфекционного процесса. Однако для этого требуется разработка эффективных алгоритмов анализа чувствительности моделей динамики вирусных инфекций и построения оптимальных многокомпонентных воздействий, т.е. таких, которые характеризуются максимальной амплификацией возмущения начального состояния системы, и индуцируют переход из одного стационарного состояния в другое, с более низким уровнем инфекционного процесса.

В случае, когда система не может быть переведена в бистабильный параметрический режим с наличием благоприятного стационарного состояния, стратегия управления такой системой предполагает использование методов построения продолжительных во

времени управляющих воздействий для стабилизации системы по обратной связи или в рамках программного управления системой на основе принципа максимума Понтрягина [3]. Разработка подходов к управлению динамикой вирусных инфекций с учетом фармакокинетики и фармакодинамики препаратов является активной областью исследований современной математической иммунологии вирусных инфекций.

Построение и программная реализация используемых алгоритмов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 17-71-20149), численный анализ моделей вирусных инфекций выполнен при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 18-11-00171).

*Список литературы:*

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в иммунологии и медицине. Избранные труды. Т. 4. Российская академия наук, Институт вычислительной математики: Москва, С. 650. 2018.

2. Bocharov G., Volpert V., Ludewig B., Meyerhans A. *Mathematical Immunology of Virus Infections*. Springer: Cham, 2018.

3. Bocharov G., Kim A.V., Krasovskii A.N., Chereshev V.A., Glushenkova V., Ivanov A. An extremal shift method for control of HIV infection dynamics. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 30(1): 11-26. 2015.

## **ВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ АКУСТИЧЕСКОГО ТИПА НА КОНЦЕВОЙ ВИХРЬ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

**В.Е. Борисов<sup>1</sup>, А.А. Давыдов<sup>1</sup>, Т.В. Константиновская<sup>1</sup>,  
А.Е. Луцкий<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, konstantinovskaya.t.v@gmail.com*

Исследуется влияния возмущений акустического типа в сверхзвуковом набегающем потоке на параметры концевой вихря за крылом-генератором. Длина расчетной области по потоку превышала 30 хорд крыла. Число Маха набегающего потока рассматривалось  $M_\infty = 2$  и 3,  $Re = 10^7$ .

Концевой вихрь генерировался прямым крылом с острыми передней и задней кромками. Крыло имело ромбовидное основание,

хорду  $b = 30$  мм, полуразмах 95 мм, угол атаки  $10^\circ$ . Для описания сверхзвукового течения применялся подход URANS с однопараметрической моделью турбулентности Спаларта-Аллмареса для сжимаемых течений [1], [2]. Численные расчеты проводились в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на гибридной суперкомпьютерной системе К-60. Для расчетов использовалась неструктурированная сетка с порядка 15 500 000 гексагональными ячейками. Вокруг крыла и в зоне образования концевой вихря было выполнено сгущение расчетной сетки.

Результаты расчетов концевой вихря в сверхзвуковом потоке в отсутствие внешних возмущений представлены в [3]. В данной работе возмущения вводились в стационарный поток в виде плоских монохроматических волн малой амплитуды на входной границе расчетной области [4][5][6]:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ p' \\ \rho' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$$

где  $u'$ ,  $v'$ ,  $p'$  и  $\rho'$  - пульсации скорости по оси  $X$  (по потоку) и по оси  $Y$ , давления и плотности соответственно;  $\theta$  - угол распространения внешней акустической волны;  $A$  - амплитуда возмущения;  $t$  - время;  $k_x = k \cos \theta$ ,  $k_y = k \sin \theta$ ,  $k = \omega / (M_\infty \cos \theta \pm 1)$ ;  $\omega$  - безразмерная частота.

В расчетах амплитуда возмущений принималась  $A = 0.286 \cdot P_\infty$ , угол падения волны был взят  $\theta = 0$ , безразмерная частота  $\omega = 100$ .

Получены пульсации газодинамических параметров в вихревом следе за крылом. На рис. 1 представлены пульсации давления на оси вихря в точке  $x = 0.5$  (пунктирная линия  $M_\infty = 2$ , сплошная -  $M_\infty = 3$ ).

Получено спектральное разложение пульсаций давления [7], которое представлено на рис. 2 для нескольких точек на оси вихря (красная линия  $M_\infty = 2$ , черная -  $M_\infty = 3$ ).

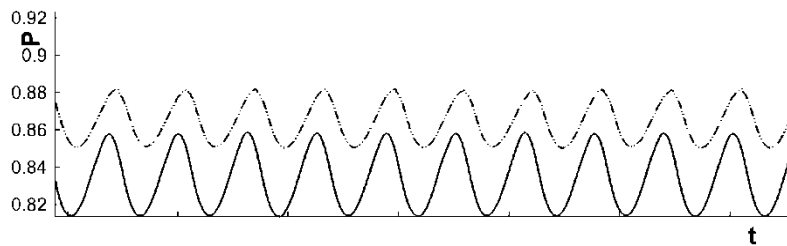


Рис. 1. Колебания давления на оси вихря при  $x = 0.5$

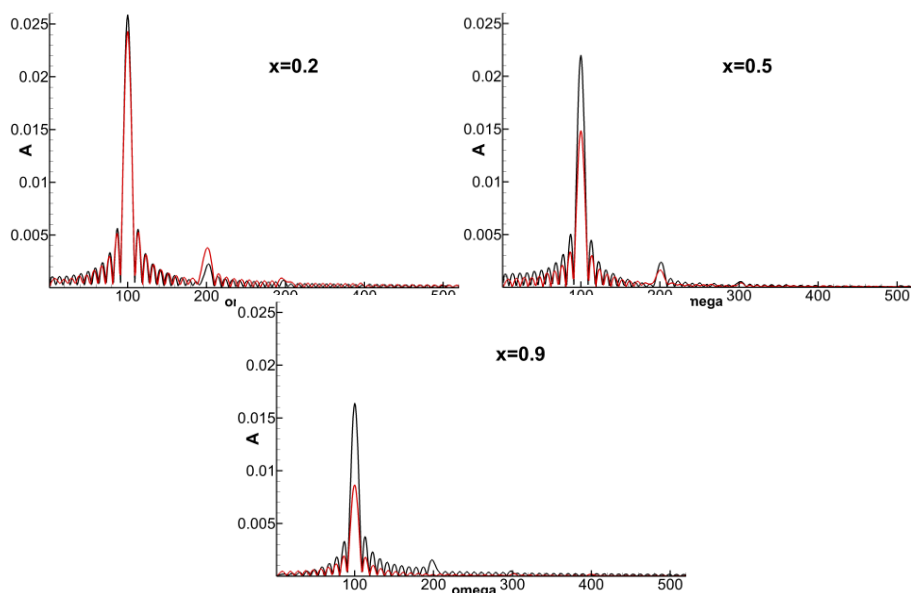


Рис. 2. Спектральное разложение колебаний давления в нескольких точках на оси вихря:  $x = 0.2$ ,  $x = 0.5$ ,  $x = 0.9$

Показано, что амплитуда пульсаций давления уменьшается с увеличением дистанции от крыла вниз по потоку, что естественно ввиду поглощения звука.

Анализ спектров показывает, что возмущения распространяются по всей расчетной области, частота первой гармоники сохраняется равной частоте заданного на входной границе возмущения. За крылом в первой половине расчетной области появляются дополнительные гармоники с частотой, кратной частоте первой гармоники, и малой амплитуды. Амплитуды уменьшаются по мере удаления от крыла-генератора вниз по потоку.

#### *Список литературы:*

1. Allmaras, S.R., Johnson, F.T., Spalart P.R. 7th Int. Conf. on CFD (ICCFD7). Big Island, Hawaii, 2012.
2. Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Препринт ИПМ № 68. Москва. 2016.
3. Borisov, V.E., Davydov, A.A., Konstantinovskaya, T.V., Lutsky, A.E., Shevchenko, A.M., Shmakov, A.S. AIP Conf. Proc. (ICMAR 2018) 2027 030120.
4. Maslov, A.A., Kudryavtsev, A.N., Mironov, S.G., Poplavskaya, T.V., Tsyryul'nikov, I.S. J. of Applied Mechanics and Technical Physics. Vol. 48 No 3. 368-374, 2007.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. VI. М.: Наука, 736 с. 1986.

6. Zhong, X. 42nd AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. AIAA 2004-253. 2004.

7. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. М.: БИНОМ, 652 с. 2006.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЛАЗЕРНОГО ОСАЖДЕНИЯ И СТРУКТУРЫ ОСТРОВКОВОЙ НАНОПЛЕНКИ С УПРАВЛЯЕМОЙ ТОПОЛОГИЕЙ**

**Д. Бухаров**

*ВлГУ, Владимир, buharovdn@gmail.com*

Для управления топологией синтезируемого островкового нанослоя [1] необходимо иметь возможность предсказывать структуру области осаждения, для чего применим аппарат математического моделирования.

Распространение продуктов осаждения удобно представляется в гидродинамическом приближении как систему безразмерных уравнений Навье-Стокса Стокса в терминах функции тока и вихря для задачи с плоской геометрией [2]. Расчетная область представляла собой канал с одним входным и двумя выходными сечениями (рис. 1). Граничные условия на входном и выходном сечениях определяются в соответствии с течением Пуазейля. На стенках канала значения функции тока заданы исходя из условий прилипания, для вихря - приближенно по формуле Вудса. Разностные уравнения для определения решения в узлах сетки получены на пятиточечном шаблоне. Уравнения для вихря получены на основе интегрального метода, так что разностная схема является консервативной. Система уравнений относительно значений решения в узлах сетки решалась методом релаксации. Итерации прекращались при достижении точности  $10^{-3}$ .

Анализ результатов расчета гидродинамической модели показывает, что граница этой области осаждения проходит через точки, в которых скорость осажденных частиц на порядок меньше скоростей входного потока (прямая ВF на рис.1) .

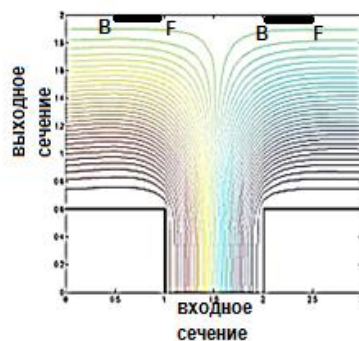


Рис.1. График функции тока для числа Рейнольдса  $Re = 10$

Рассчитав основные геометрические характеристики области осаждения, перейдем к рассмотрению структуры островка пленки на подложке в области BF приближении DLA[3]. Алгоритм модели позволяет генерировать структуры, используя случайное блуждание частицы в рамках окрестности фон Неймана [4], прилипающей к уже сформированному агрегату. Влияние величины вероятности прилипания на профиль пленки можно оценить из рис.2.

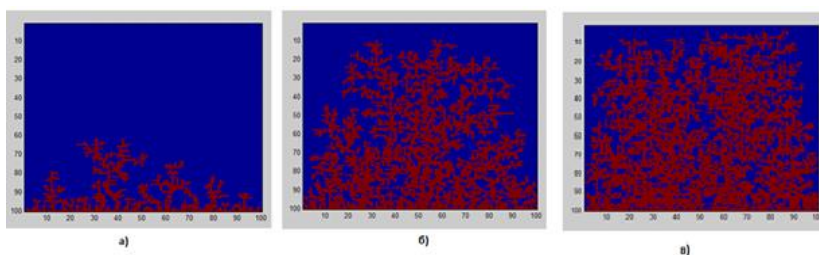


Рис.2. Структура осажденной пленки: вероятность прилипания а) 0.1  
б) 0.5 в) 0.8.

Таким образом, предложенная модель движения продуктов прямого лазерного воздействия в гидродинамическом приближении позволяет в первом приближении оценить области, где возможно образование островков нанопленки на «общем структурном уровне», а модель структуры островка в DLA приближении дополняет упомянутые выше алгоритмы и иллюстрирует структуру пленки на «уровне поведения отдельной частицы».

#### *Список литературы:*

1. Бухаров Д.Н., Кучерик А.О. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. №1-3. 205-210, 2013.
2. Антипов А.А., Аракелян С.М., Бухаров Д.Н. Кутровская С.В., Кучерик А.О., Прокошев В.Г. Ученые записки физического факультета Московского университета. №1.23-32, 2012.

3. Бухаров Д.Н., Кучерик А.О., Истратов А.В. Четвертый междисциплинарный научный форум с международным участием «Новые материалы и перспективные технологии». Москва. 27-30 ноября 2018 г. 300-303, 2018.

4. Лобанов А.И. Компьютерные исследования моделирование. № 3. 273–293. 2010.

## **РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА**

Т.Е. Булгакова<sup>1</sup>, А.В. Войтишек<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Новосибирский государственный университет, Новосибирск,  
tatyana.bulgakova@gmail.com*

<sup>2</sup>*Институт вычислительной математики и математической  
геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет,  
Новосибирск, vav@osmf.sscs.ru*

В докладе сформулированы постановки задач теории и приложений рандомизированных функциональных численных алгоритмов приближения решения уравнения Фредгольма второго рода (см., например, [1, 2]), а также представлены некоторые новые результаты.

Приведена новая классификация и проведен сравнительный анализ практического применения сеточных, проекционных и проекционно-сеточных рандомизированных функциональных алгоритмов [3, 4]. Сравнение трех типов функциональных алгоритмов проведено также в рамках теории условной оптимизации [1, 2]. Показано определенное преимущество проекционно-сеточного алгоритма.

Приведены соображения о том, что для развития теории конструирования и условной оптимизации проекционно-сеточного алгоритма можно использовать соображения из теории «ядерных» оценок вероятностных плотностей из работы [5].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315-2016-0002).



*Список литературы:*

1. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численно-статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Издательский центр «Академия», 2006.
2. Войтишек А.В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
3. Войтишек А.В. Математический анализ. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 155. 3–19, 2018.
4. Войтишек А.В. Сибирский журнал индустриальной математики. Т. 21. № 2. 32–45, 2018.
5. Епанечников В.А. Теория вероятностей и ее применения. Т. 14. Вып. 1. 156–161, 1969.

**CRITICAL CONDITIONS IN THE CASE OF A  
“HYDRODYNAMIC EFFECT” IN BALLISTIC TEST  
FACILITIES**

**N. V. Bykov**

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, bykov@bmstu.ru*

The process of high-speed extrusion of a deformable piston (referred to as a “hydrodynamic” effect in laboratory ballistic launchers [1-3]) enables one to increase the projectile velocity due to the redistribution of velocities in the piston material. The “hydrodynamic” effect occurs in laboratory launchers with deformable pistons such as light gas guns (LGG) [1, 2, 4] or guns with a tapered adapter (GTA) [3]. The difference between LGG and GTA is that in the latter, as a rule, the deformable piston continues moving instead of stopping when it passes the tapered section. The laboratory launchers on these principles are widely used in aerodynamic and ballistic studies, the modeling of the interaction of space debris and spacecraft, study of high-speed impact, elements of testing devices for overload, etc. [4]. The hydrodynamic effect enables one to study the behavior of polyethylene at high strains and high strain rates [5, 6]. Such conditions are difficult to implement in other manners.

The general scheme of high-speed extrusion is shown in Figure 1. Energy source 1 (compressed gas or propellant) accelerates the assembly, which consists of inertial pallet 2, deformable piston 3 with length  $x_{dp}$  and

projectile 4. In the case of an LGG, elements 2 and 4 are missing. The assembly accelerates in the first cylindrical section (barrel) 5 with diameter  $D$ , passes through the tapered (conical) section 6 with length  $x_c$ , and continues to move in the second cylindrical section 7 of smaller diameter  $d$ . The principle of acceleration is the redistribution of velocities in the material of the piston during its extrusion through the conical tapering element. This redistribution enables the projectile to achieve an additional speed due to the acceleration of the front part of the deformable piston. The velocities of the inertial pallet and rear part of the deformable piston decrease in this case.

This paper presents the results of experimental and theoretical studies (and their comparison) of the process of high-speed extrusion of polyethylene in ballistic laboratory launchers and its critical conditions.

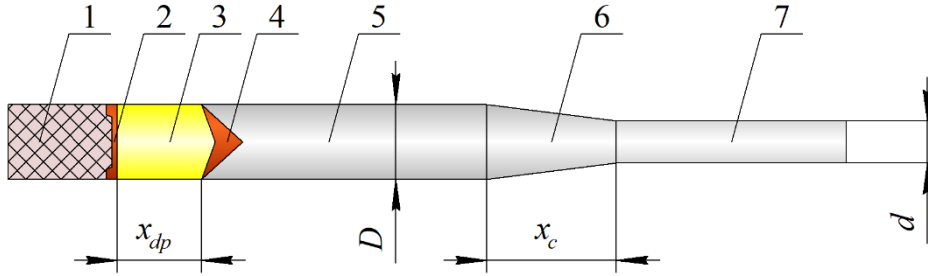


Fig. 1. Scheme of the high-speed extrusion: 1 – energy source, 2 – inertial pallet, 3 – deformable piston, 4 – projectile, 5 – first cylindrical section, 6 – tapered section, 7 – second cylindrical section

A deformable piston motion can be described by a system of quasi-one-dimensional equations:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho u^2 - \sigma^{xx})S)}{\partial x} = 2\pi R \sigma_w^{n\tau} - \sigma_w^{nn} \frac{\partial S}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho E S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\rho E - \sigma^{xx})u S] = 2\pi R \sigma_w^{n\tau} u.$$

Here,  $\rho$ ,  $u$  and  $E$  are the density, velocity, and total specific energy of the material of the piston, respectively;  $S$  is the variable cross sectional area of the barrel;  $\sigma^{xx}$  is the axial component of the stress tensor;  $R$  is the bore radius; subscript “w” corresponds to the values of the parameters on the external surface of the piston:  $\sigma_w^{n\tau}$  is the shear stress, and  $\sigma_w^{nn}$  is the normal stress. These equations are supplemented by the following empirical constitution laws from [2].

For the numerical solution of the system of equations due to the presence of contact boundaries that move in time, a two-step scheme of the predictor-corrector type on a moving grid was used. The flows at the

interfaces were determined from the solution of Riemann problem using the advection upstream splitting method (AUSM+) [7-9].

The first critical condition is the case of deformable piston stopping during moving through a tapered section. And the second critical condition is the case of piston's destruction due to high strain during its deformation in a tapered section.

The work was performed with the partial support of the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 16-38-00948 mol-a and 16-29-09596 ofi-m).

### *References*

1. Khristenko, Yu. F. AIP Conference Proceedings, Vol. 1893, 030132, 2017.
2. Kasimov, V. Z., Ushakova, O. V., Khomenko, Yu. P. J. Appl. Mech. Tech. Phy. Vol. 44. 612–619, 2003.
3. Bykov, N. V. J. Phys.: Conf. Ser., Vol. 572. 012055, 2014.
4. Hypervelocity launchers (ed. F. Seiler and O. Igra), Springer, 2016.
5. Brown, E. N., Furmanski, J., Ramos, K. J. et al J. Phys.: Conf. Ser., Vol. 500. 112011, 2014.
6. Furmanski, J., Trujillo, C. P., Martinez, D. T. et al. Polymer Testing. Vol. 31. 1031–1037, 2012.
7. Liou, M. S., Steffen, C. J. J. of Computational Physics, Vol. 107. 23-39, 1993.
8. Bykov, N. V., Nesterenko, E. A. Scientific Visualization, Vol. 7. 65–77, 2015.
9. Bykov, N. V., Tovarnov, M. S. AIP Conference Proceedings, Vol. 2103. 020003, 2019.

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОКАМЕРНОГО СЕРДЦА, ОСНОВАННОЙ НА УРАВНЕНИЯХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

А.П. Черняев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет), *chernyaev49@yandex.ru*

Рассматриваемая математическая модель однокамерного сердца имеет вид [1,2]

$$I_1 \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + R_1 \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_1(t)}{C_1} = P_1(t) - F(t), \quad (1)$$

$$I_2 \frac{d^2 V_2(t)}{dt^2} + R_2 \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{V_2(t)}{C_2} = P_2(t), \quad (2)$$

$$R_{1,2} \frac{dV_1(t)}{dt} = P_2(t) - P_1(t), \quad (3)$$

$$R_{2,1} \frac{dV_2(t)}{dt} = P_1(t) - P_2(t). \quad (4)$$

В (2.1)–(2.4)  $V_1(t), V_2(t)$  – подлежащие определению объемы первой и второй камер;  $P_1(t), P_2(t)$  – давления в них;  $F(t)$  – дополнительное внешнее давление, создаваемое активной стенкой первой камеры;  $I_1, I_2$  – коэффициенты инерции камер;  $C_1, C_2$  – растяжимости;  $R_1, R_2$  – сопротивления камер,  $R_{1,2}$  – коэффициент сопротивления межкамерного потока. Из (3) и (4) мы получаем

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -\frac{dV_2(t)}{dt} \Rightarrow V_1(t) + V_2(t) = V_0 = const. \quad (5)$$

Для удобства из (5) получим три равенства

$$V_2(t) = V_0 - V_1(t), \quad \frac{dV_2(t)}{dt} = -\frac{dV_1(t)}{dt}, \quad \frac{d^2 V_2(t)}{dt^2} = -\frac{d^2 V_1(t)}{dt^2},$$

которые мы подставим в (2) и запишем полученное в виде

$$I_2 \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + R_2 \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_1(t)}{C_2} = \frac{V_0}{C_2} - P_2(t).$$

Складывая последнее с (1), получим

$$(I_1 + I_2) \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2) \frac{dV_1(t)}{dt} + (C_1^{-1} + C_2^{-1}) V_1(t) = \frac{V_0}{C_2} + P_1(t) - P_2(t) - F(t).$$

Подставляя разность давлений в последнее уравнение из уравнения (3), имеем

$$(I_1 + I_2) \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2 + R_{1,2}) \frac{dV_1(t)}{dt} + (C_1^{-1} + C_2^{-1}) V_1(t) = \frac{V_0}{C_2} - F(t) \quad (6)$$

Уравнение вынужденных колебаний (6) является линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью. Оно имеет три различных режима решений в зависимости от того: являются ли корни характеристического уравнения

$$(I_1 + I_2) \lambda^2 + (R_1 + R_2 + R_{1,2}) \lambda + (C_1^{-1} + C_2^{-1}) = 0$$

различными действительными, совпадающими действительными, или комплексно сопряженными.

Эта модель описывает гемодинамическую систему простейших. Помимо этого искусственные однокамерные сердца активно применяются в хирургии.

Уравнение (6) очень удобно для описания смены режимов деятельности сердечной камеры и изменений пульса.

#### *Список литературы:*

1. Холодов А.С. Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ // Компьютерные модели и прогресс медицины. – М.: Наука, 392 с. С. 127–163, 2001.

2. Калябин Г.А. Применение математического анализа к описанию процессов репарации инфаркта миокарда и прогнозированию кардиологических заболеваний: Учеб. Пособие. – М.: РУДН. – 144. 2008.

**MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES  
OF THE INTERACTION OF ELECTRONS WITH MOBILE  
LOCALIZED WAVES IN A DNA MOLECULE**

**A. Chetverikov<sup>1,2</sup>, V. Lakhno<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Saratov National Research State University, Saratov,  
chetverikovap@info.sgu.ru*

<sup>2</sup>*Institute of Mathematical Problems of Biology-Branch of Keldysh Institute  
of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Pushchino,  
lak@impb.ru*

The study of transport of electrons trapped by localized nonlinear nucleotide pair radius perturbation waves in DNA, is performed as a role in the framework of the quantum-classical model combining the Peyrard-Bishop-Dauxois model [1] and the Holstein model [2]. The first of them models the interaction of pairs of nucleotides, and the bond of nucleotides in each pair is described by the nonlinear Morse potential, and the pairs in the chain (sites) are considered as links of a quasi-one-dimensional chain of finite length connected by nonlinear forces. The second model describes the evolution of the discrete wave function of an external charged particle, an electron or a hole. When a particle interacts with perturbations in a molecule due to the polarization effect, which stimulates the electron to be localized in the region of compression of the density of perturbed sites, a quasiparticle is formed, which combines a localized perturbation in the chain and a captured particle. Since the transport of electrons is carried out under the specified conditions by mobile discrete breathers, we state that the quasi-particle includes bound a breather and an electron.

The Hamiltonian of such a model of interacting perturbations in the chain and the electron is written as

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_n \alpha_n |n\rangle\langle n| - \sum_{n,m} v_{nm} |n\rangle\langle m| + \chi \sum_n (w_n - v_n) |n\rangle\langle n| + \\ & + \sum_n \left[ \frac{1}{2} M (\dot{w}_n^2 + \dot{v}_n^2) + V_n(w_n, v_n) + W_n(w_{n,n-1}, v_{n,n-1}) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

where  $V_n = D(e^{-2\sigma y_n} - 2e^{-\sigma y_n})$  is the Morse potential,  $W_n = \frac{K}{2}(y_n - y_{n-1})^2 [1 + \rho e^{-\alpha(y_n + y_{n-1})}]$  is the intersite interaction potential,  $M$  is the nucleotide mass,  $\chi$  is the electron-lattice bond parameter when analyzing such an interaction within the tight-bonding approximation, the meaning of the other parameters is described in detail in the corresponding works [3].

The equations of motion for chain sites (the evolution of displacements of each  $n$ -th nucleotide from the equilibrium position  $q_n$ , and only one equation of motion is considered for each pair due to the symmetry of motion of the nucleotides in a pair) and the evolution equations for the complex components  $c_n$  of a discrete wave electron function, follow from the Hamiltonian (1). They are presented in dimensionless variables as

$$\ddot{q}_n = e^{-q_n} (e^{-q_n} - 1) + \omega_{\text{bond}}^2 \left\{ (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) + \rho f_n (y_{n-1,n,n+1}) \right\} + \chi_h |c_n|^2 \quad (2)$$

$$\dot{c}_n = i\tau_e (c_{n+1} + c_{n-1}) + i\chi_{\text{el}} q_n c_n \quad (3)$$

and  $\sum_{n=1}^N |c_n|^2 = 1$ . Dots denote derivatives with respect to dimensionless time, the meaning of the other parameters is explained, for example, in [3].

The equations for both “quasi-chains” that make up the system of ordinary nonlinear differential equations in complex variables with constant coefficients (2) - (3) are complemented by boundary conditions corresponding to the three states of the DNA molecule of  $N$  nucleotide pairs: a) with fixed ends,  $q_{1,N} = v_{1,N} = 0$ , where  $v_n$  is the velocity of the  $n$ -th nucleotide, b) with free ends - the 1-st site bonds to the 2-nd one only,  $N$ -th to the  $(N-1)$ -th one only, in while all others ones connect to two "neighbors", left and right, and this condition applies on the wave function components as well in cases a) and b), c) a ring molecule - it is assumed that  $q_0 = q_N$ ,  $v_0 = v_N$ ,  $c_0 = c_N$ ,  $q_{N+1} = q_1$ ,  $v_{N+1} = v_1$ ,  $c_{N+1} = c_1$  i.e. periodic boundary conditions are set.

When studying the electron capture by localized excitations in the chain — by mobile breathers — and transporting them along the molecule without influence of an external electric field, the initial values of the coordinates and velocities in a group of adjacent particles are set to provide the formation of a mobile breather. In particular, a mobile breather is efficiently excited near one of the fixed ends of the molecule if two or three particles are perturbed that are located in close proximity to the end of molecule. The wave function of an electron must be localized in the same region, its shape is set, as a rule, in the form of a Gaussian or a rectangular pulse.

The equations are solved numerically by the 4-th order Runge–Kutta method with a step of 0.001–0.0001. To account for the various energy losses in the system, the term  $\gamma v_n$  is added sometimes to the left side of equation (2), where  $\gamma$  is the friction coefficient. Its value is chosen so small that the relaxation time is much longer than the lifetime of the quasi-particles under study.

The work is supported by a grant of the Russian Science Foundation 16-11-10163

### References

1. Dauxois, T., Peyrard, M., Bishop, A. R. Phys. Rev. E. Vol. 47. 2755, 1993.
2. Holstein, T. Ann. Phys. Vol. 8, 325 – 343, 1959. [reprinted Ibidem Vol. 281, 706 – 725, 2000]
3. Chetverikov, A. P., Ebeling, W., Lakhno, V. D., Shigaev, A. S., Velarde, M. G. Eur. Phys. J. B. Vol. 89, 101, 2016.

## БИОГЕЛИ. КОНФОРМАЦИОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ КОМПЛЕКСОВ ПЕПТИДОВ (RADA)<sub>4</sub>

**А.В. Данилкович<sup>1</sup>, И.В. Михайлова<sup>2</sup>, Д.А. Тихонов<sup>3,4</sup>**

<sup>1</sup>ФИБХ РАН, Пущино, [danilkovich@bibch.ru](mailto:danilkovich@bibch.ru)

<sup>2</sup>ПуцГЕНИ, Пущино, [rinarowing@mail.ru](mailto:rinarowing@mail.ru)

<sup>3</sup>ИМПБ РАН, Пущино, [dmitry.tikhonov@gmail.com](mailto:dmitry.tikhonov@gmail.com)

<sup>4</sup>ИТЭБ РАН, Пущино

В свете интереса к получению новых материалов для биомедицины, искусственный внеклеточный матрикс рассматривается в качестве основы для формирования тканеспецифичной среды с участием определённого типа клеток в ходе воссоздания трёхмерных участков органов. Полярные пептиды ArgAlaAspAlaArgAlaAspAlaArgAlaAspAlaArgAlaAspAla представляют собой структуры, способные в растворах при физиологических условиях образовывать сложные надмолекулярные комплексы в виде лентовидных трехслойных филаментов длиной до сотен нанометров. В результате образуется биогель в высокой степени обводнённости (свыше 98%), обладающий высокой устойчивостью к температурным (0-80С) и механическим воздействиям в широком диапазоне значений рН (2-10). Искусственный матрикс (биогель) нейтрален в отношении разных типов клеток эукариот, включая стволовые клетки. Кроме того, биогель, формируемый пептидами типа Н-(RADA)<sub>4</sub>-ОН, может быть использован в качестве «подложки-носителя» в системе для культивирования клеток-продуцентов на биотехнологических производствах, а смесь самоорганизующихся пептидов с химическими веществами, позволяет получать «биогель-контейнер» активной субстанции лекарственной формы, обеспечивая сравнительно низкую скорость поступления инкорпорированного лекарства в окружающие



ткани. Последовательность аминокислотных остатков пептида может быть дополнена в ходе химического синтеза сигнальными эпитопами типа -RGD, -YIGSR или -IKVAV, что позволяет разрабатывать специализированные биогели с улучшенными адгезивными свойствами.

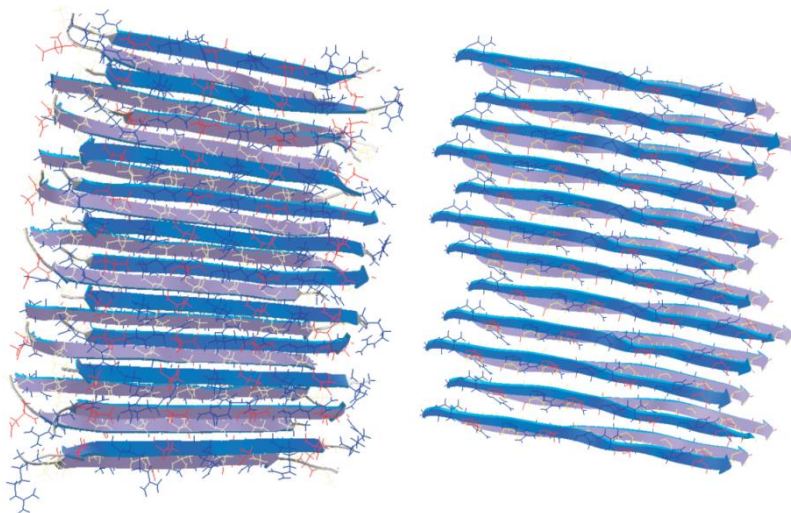


Рис. 1. Комплексы, созданные в результате молекулярного докинга 24-х структур  $\text{H-(RADA)}_4\text{-OH}$  в  $\beta$ -конформации; слева на рисунке - комплекс пептидов в анти-параллельной ориентации. Справа комплекс пептидов с двумя  $\beta$ -слоями в суп-ориентации.

Поскольку механизм, предшествующий самоорганизации пептидов  $\text{H-(RADA)}_4\text{-OH}$  пока не выяснен, для изучения свойств пептидных комплексов использован метод молекулярной динамики. Ранее было установлено, что силовое поле ff03 (пакет программ AMBER v.11) позволяет успешно моделировать комплекс филамента. Поскольку взаимная ориентация пептидов  $\text{H-(RADA)}_4\text{-OH}$  в составе филамента не ясна, методом молекулярной динамики были исследованы структурные особенности двух типов комплексов с  $\beta$ -слоями из пептидов в параллельной или антипараллельной ориентации N-концов. Определено, что комплекс пептидов в антипараллельной ориентации характеризуется наименьшими величинами свободной энергии и среднеквадратичного отклонения координат атомов, что, очевидно, отражает особенности начального этапа самоорганизации пептидов  $\text{H-(RADA)}_4\text{-OH}$ .

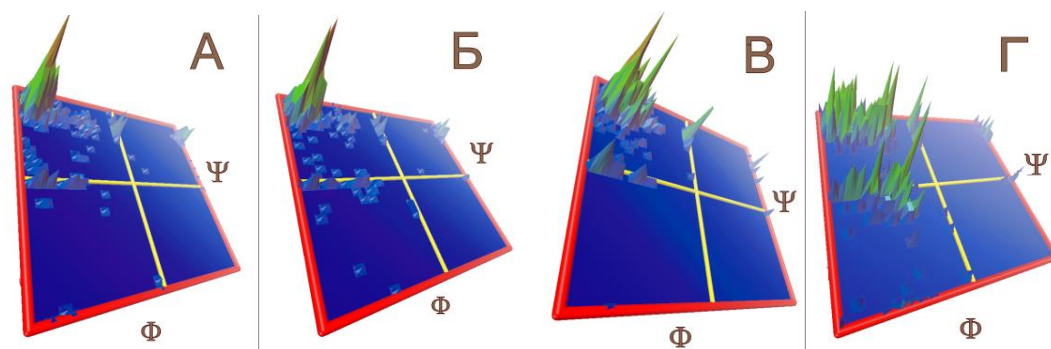


Рис. 2. Карты Рамачандрана для аминокислотных остатков в составе комплексов двух типов: А и Б характеризуют изменения исходной  $\beta$ -конформации пептидов в анти-параллельной ориентации от начального (А) - к итоговому (Б) состояниям в ходе моделирования динамики; В и Г - аналогичные изменения структуры комплекса из 24-х пептидов в параллельной ориентации и слоями в суп-ориентации.

### References

1. Danilkovich A.V., Sobolev E.V., Tikhonov D.A., Shadrina T.E., Udovichenko I.P. Molecular dynamics of the complexes of (RADA)<sub>4</sub>–the self-organizing ionic peptides // *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2011. Vol. 6, no. 1. P. 92–101. 10.17537/2011.6.92. URL: <https://doi.org/10.17537/2011.6.92>.
2. Danilkovich A.V., Sobolev E.V., Tikhonov D.A., Udovichenko I.P., Lipkin V.M. Distinctive H–(RLDL)<sub>4</sub>–OH peptide complexes potentiate nanostructure self-assembling in water // *Doklady Biochemistry and Biophysics*. 2012. Apr. Vol. 443, no. 1. P. 96–99. 10.1134/S160767291202010X. URL: <https://doi.org/10.1134/S160767291202010X>.
3. Sobolev E.V., Danilkovich A.V., Udovichenko I.P., Lipkin V.M., Tikhonov D. A. Methods of the Theory of Liquids as an Efficient Approach to the Analysis of Polar Peptide Complexes // *Doklady Biochemistry and Biophysics*. 2013. Feb. Vol. 450, no. 1. P. 122–125. 10.1134/S0012501613050060. URL: <https://doi.org/10.1134/S0012501613050060>.
4. Данилкович А.В., Тихонов Д.А. Биогели. Структурные особенности комплексов антипараллельных и параллельных пептидов H-(RADA)<sub>4</sub>-OH со слоями в суп-ориентации // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2019. № 72. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-72>.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С ПОДАТЛИВОЙ СТЕНКОЙ

К.В. Демьянко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ИПМ им М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИВМ им Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия [kirill.demyanko@yandex.ru](mailto:kirill.demyanko@yandex.ru)

Устойчивость сдвиговых течений вязкой несжимаемой жидкости в каналах и трубах существенно зависит от различных факторов, включая форму поперечного сечения канала, соотношение масштабов течения в направлении, перпендикулярном направлению основного течения, а также податливость стенок. Например, в работе [1] численно исследована устойчивость течения Пуазейля в продольно оребренном канале и показано, что по сравнению с плоским каналом при определенных значениях периода, высоты и заостренности оребрения увеличивается и энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса [2], отдавая тем самым как докритический, так и естественный ламинарно-турбулентный переход [3]. Для канала прямоугольного сечения достаточно подробно исследована зависимость линейного критического числа Рейнольдса от отношения длин сторон сечения канала [4-8], в том числе, на основе теоремы Сквайра [3] дано физическое объяснение этой зависимости [6,7]. Аналогичная зависимость была рассчитана и для трубы эллиптического сечения [9]. Интерес к исследованию влияния податливых покрытий на устойчивость сдвиговых течений существует с середины XX века. Этой теме посвящено множество работ (см., например, работы [10,11] и обзоры литературы в них). На примере достаточно простых конфигураций (пограничный слой над плоской или слабо вогнутой пластиной, плоское течение Пуазейля) показано, что податливое покрытие может оказывать как стабилизирующий, так и дестабилизирующий эффект на течение. Поэтому одна из главных проблем заключается в выборе покрытия с оптимальными физическими характеристиками для достижения требуемой цели, например, задержки ламинарно-турбулентного перехода, снижения потерь на трение.

В работе [12] была предложена численная модель для исследования устойчивости течения Пуазейля в трубе эллиптического сечения с податливой стенкой. До недавнего времени устойчивость такого течения, по-видимому, никем не исследовалась. В рамках предложенной модели стенка трубы рассматривается, как тонкая оболочка, которая может быть окружена однородным эластичным

основанием, причем эти два «слоя» могут иметь различные вязкоупругие характеристики. Колебания стенки, вызванные пульсациями давления, описываются уравнениями Лява. В докладе обсуждаются результаты исследования комбинированного влияния на устойчивость течения Пуазейля величины отношения длин полуосей эллиптического сечения трубы, а также вязкоупругих характеристик её стенки, включая мембранную и изгибную жесткости оболочки, упругость и демпфирование основания, соотношение толщин оболочки и основания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-20149).

*Список литературы:*

1. Бойко А.В., Ключнев Н.В., Нечепуренко Ю.М. Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016.
2. Schmid P.J., Henningson D.S. Stability and transition in shear flows. В.: Springer–Verlag, 2000.
3. Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V. Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012.
4. Tatsumi T., Yoshimura T. Stability of the laminar flow in a rectangular duct // J. Fluid Mech. Vol. 212. P. 437 – 449. 1990.
5. Theofilis V., Duck P.W., Owen J. Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flow // J. Fluid Mech. Vol. 505. P. 249 – 286. 2004.
6. Demyanko K.V., Nечepurenko Yu.M. Dependence of the linear stability of Poiseuille flows in a rectangular duct on the cross-sectional aspect ratio // Doklady Physics. Vol. 56, No. 10. P. 531 – 533. 2011.
7. Demyanko K.V., Nечepurenko Yu.M. Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. Vol. 28, No. 2. P. 125 – 148. 2013.
8. Adachi T. Linear stability of flow in rectangular ducts in the vicinity of the critical aspect ratio // Eur. J. Mech. B Fluids. Vol. 41. P. 163 – 168. 2013.
9. Kerswell R.R., Davey A. On the linear instability of elliptic pipe flow // J. Fluid Mech. Vol. 316. P. 307–324. 1996.
10. Davies C., Carpenter P.W. Instabilities in a plane channel flow between compliant walls // J. Fluid. Mech. Vol. 352. P. 205 – 243. 1997.

11. Hoepffner J., Bottaro A., Favier J. Mechanisms of non-modal energy amplification in channel flow between compliant walls // J. Fluid. Mech. Vol. 642. P. 489 – 507. 2010.

12. Demyanko K.V. Stability of the Poiseuille flow in a compliant pipe of elliptic cross-section // AIP Conference Proceedings Vol. 2027. P. 030082 – 1 – 10. 2018.

## **АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГОВЛОЖЕНИЯ В МНОГОКАСКАДНЫЕ МИШЕНИ ТЯЖЕЛО ИОННОГО СИНТЕЗА, РАБОТАЮЩИЕ НА ОСНОВЕ БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ**

**Г.В. Долголева**

*Московский Государственный Университет, dolgg@list.ru*

При численном конструировании микромишеней ИТИС для осуществления термоядерного синтеза автор базируется на концепцию безударного сжатия. Основой таких мишеней могут служить цилиндрические, слоистые системы.

Ранее рассматривались однокаскадные [1] и двухкаскадные слоистые [2] системы. Были показаны преимущества двухкаскадных мишеней перед однокаскадными по величине вкладываемой энергии и коэффициенту термоядерного усиления. В данной работе рассматриваются трехкаскадные слоистые системы. Аналитически находятся законы энерговложения в каждый из каскадов с целью осуществления безударного сжатия рабочей DT- области и большего отбора энергии этой областью. Аналитические выкладки подтверждаются численными расчетами.

### *Список литературы:*

1. Долголева Г.В., Забродин А.В. «Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия», М, ФИЗМАТЛИТ, 2004.

2. Dolgoleva G.V. Numerical design of a two-cascade cylindrical microtarget for shock-free compression // Journal of Russian Laser Research, vol. 34, issue 3, p. 230-238, 2013.

## NON-EQUILIBRIUM STATES AND ENERGY CURRENT FOR INFINITE LATTICE SYSTEMS

**T.V. Dudnikova**

*KIAM RAS, Moscow, tdudnikov@mail.ru*

In the talk, we discuss stationary energy transport in crystals. As a model, we consider a  $d$ -dimensional crystal lattice in harmonic approximation,  $d \geq 1$ , and study the Cauchy problem with random initial data. The distribution  $\mu_t$  of the solution at time  $t \in \mathbb{R}$  is studied. The convergence of correlation functions of the measures  $\mu_t$  to a limit for large times holds. The explicit formulas for the limiting correlation functions and for the energy current density (in mean) are obtained in the terms of the initial covariance. Moreover, the weak convergence of  $\mu_t$  to a limit measure  $\mu_\infty$  as  $t \rightarrow \infty$  holds, see [2, 3]. We apply these results to the case when initially some infinite “parts” of the crystal have Gibbs distributions with different temperatures. In particular, we find stationary states (i.e. probability measures  $\mu_\infty$ ) in which there is a constant non-zero energy current flowing through the infinite crystal. For example, our model can be considered as a “system + two reservoirs”, where by “reservoirs” we mean two parts of the crystal consisting of the particles lying in two regions  $R_- = \{n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : n_1 < -a\}$  and  $R_+ = \{n \in \mathbb{Z}^d : n_1 > a\}$  with some  $a > 0$ , and by a “system” the remaining (“middle”) part. At  $t = 0$ , the reservoirs  $R_-$  and  $R_+$  are in thermal equilibrium with temperatures  $T_-$  and  $T_+$ , respectively. We show that the limiting energy current density  $J_\infty = (J_\infty^1, \dots, J_\infty^d)$  is of a form

$$J_\infty = (-\kappa T_+ - T_-, 0, \dots, 0) \quad \text{with some constant } \kappa > 0,$$

what corresponds to the Second Law (see, for instance, [1]), i.e., the heat flows (on average) from the “hot” reservoir to the “cold” one.

We also consider the initial boundary value problem for the harmonic crystal in the half-space with zero boundary condition and show that the similar results hold [4]. Furthermore, the obtained results remain true for the harmonic crystals with defects [5].

There are a large literature devoted to the study of return to equilibrium, convergence to non-equilibrium states and heat conduction for nonlinear systems, see, e.g., [1, 6] and the survey book [7] for an extensive list of references. In the talk, we also concern the problem of rigorous mathematical derivation of Fourier’s law from Newton’s equations of

motion. We give a brief survey of some lattice models that are used in the literature on this problem.

The work is supported by research grant of RFBR (18-01-00524).

### *References*

1. Bonetto, F., Lebowitz, J.L., Rey-Bellet, L. In: Fokas, A., Grigoryan, A., Kibble, T., Zegarlinski, B. (Eds.) *Mathematical Physics 2000*. Imperial College Press, London, pp. 128–150, 2000.
2. Dudnikova, T.V., Komech, A.I., Mauser, N.J.: *J. Stat. Phys.* Vol. 114. No 3-4. 1035–1083, 2004.
3. Dudnikova, T.V.: *Russian J. Math. Phys.* Vol. 15. No 4. 460–472, 2008.
4. Dudnikova, T.V.: *J. Math. Phys.* Vol. 58. No. 4. 043301, 2017.
5. Dudnikova, T.V.: *Keldysh Institute Preprints*. No 254. 2018.
6. Lepri, S., Livi, R., Politi, A.: *Physics Reports* Vol. 377. No 1. 1–80, 2003.
7. Lepri, S. (Ed.) *Thermal Transport in Low Dimensions: From Statistical Physics to Nanoscale Heat Transfer*. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 921, 2016.

## **BABENKO'S EQUATION FOR STOKES WAVE AND INTEGRABILITY OF FREE SURFACE DYNAMICS**

A.I. Dyachenko<sup>1,2</sup>, S. A. Dyachenko<sup>3</sup>, **P. M. Lushnikov**<sup>1,4</sup>, and  
V. E. Zakharov<sup>5</sup>

<sup>1</sup>*Landau Institute For Theoretical Physics, Russia,*

<sup>2</sup>*Center for Advanced Studies, Skoltech, Russia,*

<sup>3</sup>*Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign,  
USA,*

<sup>4</sup>*Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, USA,  
plushnik@math.unm.edu*

<sup>5</sup>*Department of Mathematics, University of Arizona, USA*

We consider 2D fluid surface dynamics. A time-dependent conformal transformation maps a fluid domain of the variable  $z=x+iy$  into the lower complex half-plane of the new auxiliary variable  $w=u+iv$  (see Fig. 1), where

$x$  and  $y$  are the horizontal and vertical coordinates. We study the dynamics of singularities of both  $z(w,t)$  and the complex fluid potential  $\Pi(w,t)$  in the upper complex half-plane of  $w$ . We reformulate the exact Eulerian dynamics through the non-canonical nonlocal Hamiltonian structure for a pair of the Hamiltonian variables [1], the imaginary part of  $z(w,t)$  and the real part of  $\Pi(w,t)$  (both evaluated of fluid's free surface). The corresponding Poisson bracket is non-degenerate, i.e. it does not have any Casimir invariant. Any two functionals of the conformal mapping commute with respect to the Poisson bracket. New Hamiltonian structure is a generalization of the canonical Hamiltonian structure of Ref. [2] (valid only for solutions for which the natural surface parametrization is single valued, i.e. each value of the horizontal coordinate corresponds only to a single point on the free surface). In contrast, new non-canonical Hamiltonian equations are valid for arbitrary nonlinear solutions (including multiple-valued natural surface parametrization) and are equivalent to Euler equations.

For spatially periodic gravity waves propagating with the constant velocity (Stokes waves), these Hamiltonian equations are reduced to the Babenko's equation [3]. We analyze Babenko's equation in its different forms both analytically and numerically. We found [4] that non-limiting Stokes wave has one square root branch point per spatial period each located above the fluid's free surface. The branch cut connecting each branch point to the complex infinity defines the second sheet of the Riemann surface if one crosses the branch cut. The infinite number of pairs of square root singularities is found corresponding to infinite number of non-physical sheets of Riemann surface.

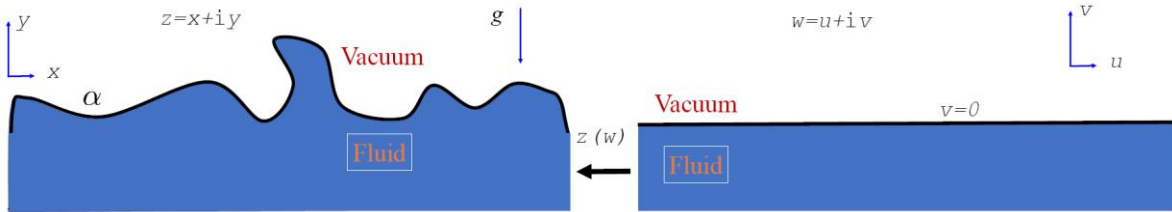


Fig. 1. Dark area represents the domain occupied by fluid in the physical plane (left) and the same domain in  $w$  plane (right). Thick solid lines correspond to the fluid's free surface in both planes.

Each pair belongs to its own non-physical sheet of Riemann surface. Increase of the steepness of the Stokes wave means that all these singularities simultaneously approach the real line from different sheets of Riemann surface and merge together forming  $2/3$  power law singularity of the limiting Stokes wave [5]. We found that that non-limiting Stokes wave at the leading order consists of the infinite product of nested square root singularities which form the infinite number of sheets of Riemann surface



[4]. Numerically we use Babenko's equation coupled with the additional conformal maps which allows highly non-uniform but spectrally accurate grid to resolve nearly limiting Stokes wave with the distances of the branch point to the real line well below  $10^{-20}$  [4, 6-8].

For full time-dependent dynamics we show the existence of solutions with an arbitrary finite number  $N$  of complex poles for the derivatives  $z_w(w,t)$  and  $\Pi_w(w,t)$  of both  $z(w,t)$  and  $\Pi(w,t)$  over  $w$  [9,10]. These solutions are not purely rational because they generally have branch points at other positions of the upper complex half-plane with the infinite number of sheets of the Riemann surface for  $z(w,t)$  and  $\Pi(w,t)$ . The order of poles is arbitrary for zero surface tension while all orders are even for nonzero surface tension. We find that the residues of  $z_w(w,t)$  at these  $N$  points are new, previously unknown constants of motion. These constants of motion commute with each other with respect to the Poisson bracket. There are many more integrals of motion beyond these residues. If all poles are simple then the number of independent real integrals of motion is  $4N$  for zero gravity and  $4N-1$  for nonzero gravity. For higher order poles the number of the integrals is increasing. These nontrivial constants of motion provides an argument in support of the conjecture of complete integrability of free surface hydrodynamics.

The work of A.I.D., P.M.L. and V.E.Z. was supported by the state assignment 'Dynamics of the complex systems'. The work of P.M.L. was supported by the National Science Foundation, grant DMS-1814619. The work of S.A.D. was supported by the National Science Foundation, grant number DMS-1716822. The work of V.E.Z. was supported by the National Science Foundation, grant number DMS-1715323. The work of A.I.D. and V.E.Z. on dynamics of singularities was supported by the Russian Science Foundation, grant number 19-72-30028.

### *References*

1. Dyachenko A. I., Lushnikov P. M., and Zakharov V. E., *Journal of Fluid Mechanics* 869, 526–552, 2019.
2. Zakharov V. E., *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 9, 190–194, 1968.
3. Babenko K.I., *Soviet, Math. Doklady* 35, 599–603, 1987.
4. Lushnikov P.M. *Journal of Fluid Mechanics*, 800, 557-594, 2016.
5. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves. *Math. Phys. Paper* 1, 197–229, 1880.
6. Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., and Korotkevich A.O. *JETP. Lett.* 98, 675–679, 2014.
7. Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., and Korotkevich A.O. *Studies in Applied Mathematics*, 137, 419-472, 2016.

8. Lushnikov P.M., Dyachenko S.A., and Silantyev D.A., Proc. Roy. Soc. A 473, 20170198, 2017.
9. Dyachenko A. I. and Zakharov V. E., arXiv:1206.2046, 2012.
10. Dyachenko A. I., Dyachenko S. A., Lushnikov P. M. and Zakharov V. E., Accepted to Journal of Fluid Mechanics, 2019.

## ON HURWITZ POLYNOMIAL MATRICES

**A. Dyachenko**<sup>1</sup>, X. Zhan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*UCL Department of Mathematics, London, diachenko@sfedu.ru*

<sup>2</sup>*SCNU School of Mathematical Sciences, Guangzhou, zhan@math.uni-leipzig.de*

The talk is devoted to the Routh-Hurwitz problem for polynomial matrices — to determine the inertia with respect to the imaginary axis, i.e. the number of zeros of a polynomial matrix in the left/right half of the complex plane (counting with multiplicities).

There are several approaches to this well-established topic. Our method is relevant to [1] and based on a matrix analogue of the classical Markov parameters. It aims at studying the interrelations between the even and the odd parts of the polynomial matrix. Then the solution may be expressed through the inertia triples of the block Hankel matrix built from the matrix Markov parameters of the polynomial matrix. We will compare this method with others, and discuss its advantages and disadvantages.

### *References*

1. L. Lerer, M. Tismenetsky, The Bezoutian and the eigenvalue-separation problem for matrix polynomials, Integral Equations Oper. Theory 5, 387–444, 1982.

## ДИНАМИКА ПОЛЯРОНА ХОЛСТЕЙНА ПРИ МАЛОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ТЕРМОСТАТА

Н.С. Фиалко<sup>1</sup>, В.Д. Лахно<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИМПБ РАН - филиал ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Пущино,  
*fialka@impb.ru, lak@impb.ru*

Модель Холстейна применяется для исследования процессов переноса заряда в биополимерах, например, в ДНК. Мы рассматриваем полуклассическое приближение, в рамках которого заряд (дырка или электрон) описывается уравнением Шредингера, а движение сайтов цепочки (в случае ДНК сайт – комплементарная пара оснований) описывается классическими уравнениями движения. Для имитации тепловых толчков окружающей среды в классическую подсистему добавлен член с трением и случайная сила со специальными свойствами (термостат Ланжевена).

В данной работе с помощью прямого моделирования изучена динамика поляронных состояний (без учета температуры полярон – состояние с наименьшей энергией). При проведении расчетов для квантовой подсистемы использованы параметры, соответствующие однородным фрагментам ДНК (аденин А, цитозин С и тимин Т). В рамках модели полагается, что заряд не может перейти на комплементарную нить ДНК. В классической подсистеме рассмотрены различные значения частот сайтов и коэффициента трения. Эти значения параметров соответствуют полярону малого радиуса (ПМР) в случае polyA фрагментов  $R \sim 1.05$ , и для polyC цепочек  $R \sim 1.2$ . Для polyT  $R \sim 6.7$  можно считать поляроном большого радиуса (ПБР). Рассмотрен случай малых температур, когда существуют «почти поляронные» состояния.

Результаты моделирования показывают, что:

- в случае ПМР при малых температурах полярон неподвижен. С увеличением температуры наблюдается режим переключения между состояниями «неподвижный полярон – делокализованное состояние», и новый полярон возникает на случайном сайте. Под действием электрического поля с постоянной напряженностью заряд движется по направлению поля, но перенос происходит в делокализованном состоянии.

- в случае ПБР найдены зависимости, одинаковые при одной температуре для цепочек разной длины, и по аналогии с оценкой подвижности заряда из среднего смещения масс заряда в поле с постоянной напряженностью сделана оценка поляронной подвижности. Проведенные расчеты позволяют предположить, что при нулевой

температуре подвижность полярона большого радиуса маленькая, но ненулевая.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранты 17-07-00801 и 19-07-00406, и РФФИ, проект № 16-11-10163.

## **ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОН-ИОННЫХ СОУДАРЕНИЙ НА ОПРОКИДЫВАНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**А.А. Фролов<sup>1</sup>, Е.В. Чижонков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, frolova@lebedev.ru*

<sup>2</sup>*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
chizhonk@mech.math.msu.su*

Проведено численное и аналитическое исследование влияния электрон-ионных соударений на опрокидывание цилиндрических нелинейных электронных колебаний в холодной плазме. Если соударения в плазме отсутствуют, то опрокидывание плазменных колебаний происходит вследствие образования вне оси колебаний максимума электронной плотности, который нарастает со временем и через несколько периодов колебаний обращается в бесконечность [1].

На основе уравнений движения аналитически методом возмущений в режиме слабой нелинейности получено выражение для смещения частицы в зависимости от времени и начальной координаты. Исходя из условия обращения плотности электронов в бесконечность, найдено время опрокидывания, и показано, что с увеличением частоты соударений это время нарастает. Численно и аналитически установлено, что существует некоторое пороговое значение для частоты столкновений, выше которого сингулярности плотности не возникает.

Расчеты показывают, что при частотах соударений выше порогового значения максимум плотности вне оси колебаний после своего образования некоторое время нарастает, достигает экстремума, а затем происходит его спадание вследствие затухания колебаний. Результаты аналитического рассмотрения хорошо согласуются с численными экспериментами [2] и могут быть полезны при обсуждении различных физических эффектов, связанных с плазменными колебаниями и волнами [3].

Работа поддержана грантом РФФИ № 17-02-00648а.

*Список литературы:*

1. Чижонков Е.В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018.
2. Фролов А.А., Чижонков Е.В. Влияние электрон-ионных соударений на опрокидывание цилиндрических плазменных колебаний // Математическое моделирование. Т.30. №10. С.86-106. 2018.
3. Фролов А.А., Чижонков Е.В. Влияние электронных соударений на опрокидывание плазменных колебаний // Физика плазмы. Т.44. №4. С.347-354. 2018.

**ON NONLOCAL STABILIZATION PROBLEM FOR SOME  
HYDRODYNAMIC TYPE SYSTEMS**

**A.V. Fursikov<sup>1</sup>, L.S. Osipova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*MSU, Moscow; VSU, Voronezh, fursikov@gmail.com*

<sup>2</sup>*MSU, Moscow, l\_shatina@mail.ru*

Let consider 3D Helmholtz for spatial variables (i.e. defined on 3D torus  $T^3$ ) and with arbitrary smooth system that describes evolution of the velocity vortex of viscous incompressible fluid with periodic boundary conditions initial condition. One has to find impulse control supported in a given subdomain of  $\omega \subset T^3$  that will ensure the tendency to zero of the solution's  $L_2(T^3)$  - norm with increasing time. This problem is full of content because the millennium problem is not solved yet, i.e. existence in whole of smooth solutions for 3D Helmholtz system (or, what is equivalent, for 3D Navier-Stokes system) is not proved.

The quadratic operator in the Helmholtz system consists of the sum of a normal operator  $\Phi(y)y$  whose image is collinear to the argument  $y$ , and the tangential operator  $B_\tau(y)$ , whose image is orthogonal to  $y$  in  $L_2(T^3)$ . At the first stage, we solve the problem by omitting the operator  $B_\tau(y)$  of the Helmholtz system. As is known, (see [1]) the solution of the problem obtained has an explicit formula that allows us to solve the stabilization problem (see [2, 3]). At the second stage, after returning the operator  $B_\tau(y)$ , only the first steps were made, more precisely, the stabilization problem solution was obtained, but not for the Helmholtz system. Solution of stabilization problem has been obtained only in the case of a model problem for the differentiated Burgers equation (see [4]). The main content of the report is related to the presentation of the results of the second stage.

This research was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (grant 14.Z50.31.0037).

### *References*

1. Fursikov, A. V. Adv. in Math. Anal. of PDEs. Vol. 232. 99-118, 2014.
2. Fursikov, A. V. and Shatina, L. S. Discr. Contin. Dyn. Syst. Vol. 38. 1187-1242, 2018.
3. Fursikov, A. V. and Osipova, L. S. SCIENCE CHINA Math. Vol. 61, No 11. 2017-2032, 2018.
4. Фурсиков, А. В. и Осипова, Л. С. Дифф. Уравн. 2019. Том 55, №5. 702-716, 2019.

## **В-РЯДЫ ДЛЯ (М,К)-МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЖЁСТКИХ СИСТЕМ**

М.Р. Галанин<sup>1</sup>, С.А. Конев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, [galan@keldysh.ru](mailto:galan@keldysh.ru)

<sup>2</sup>ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, [skonev11@yandex.ru](mailto:skonev11@yandex.ru)

Жёсткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений возникают при решении многих задач математической физики. Одними из наиболее известных являются методы Розенброка [1], для них разработана теория порядка, опирающаяся на теорию корневых деревьев Бутчера, что не требует применения формулы Тейлора [2,3].

В 1989 г. представлено семейство (m,k)-методов [4], которые являются обобщением методов Розенброка. Исследованию свойств устойчивости и аппроксимации (m,k)-метода посвящено множество работ, но до настоящего момента вывод условий порядка для них осуществлялся с помощью трудоёмкого разложения по формуле Тейлора, а инструментарий корневых деревьев представлен не был. В работе [5] представлено развитие теории корневых деревьев Бутчера на случай упрощённого (m,k)-метода.

В докладе представлена формулировка (m,k)-методов, описаны сложности, связанные с выводом условий порядка, и представлена общая идея вывода условий порядка с помощью теории деревьев.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 18-01-00252, 18-31-20020, 19-01-00602)

*Список литературы:*

1. Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations. *The Comput. J.* V. 5. № 4. pp. 329–330. 1963.
2. Hairer E., Nörsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.* Berlin. Springer. 528 p. 1993.
3. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems.* Berlin. Springer. 614 p. 2010.
4. Новиков Е.А., Шитов Ю.А., Шокин Ю.И. О классе  $(m,k)$ -методов решения жёстких систем. *ЖВМ и МФ.* Т. 29. № 2. с. 194-201. 1989.
5. Конев С.А. Расширение теории корневых деревьев Бутчера для упрощённого  $(m,k)$ -метода. *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* № 23. 26 с. 2019.

**О МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОИСТОГО ТЕЧЕНИЯ  
ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ, ПЕРЕМЕННОЙ  
ВО ВРЕМЕНИ**

В.А. Галкин, А.О. Дубовик

*Обособленное подразделение ФБУ ФНЦ НИИСИ РАН в г. Сургуте,  
Сургутский государственный университет  
e-mail: val-gal@yandex.ru, alldubovik@gmail.com*

Рассматривается течение вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени. В рамках модели слоистого течения жидкости [1] исследуется изменение параметров жидкости в результате объемного воздействия магнитным полем и движения границы области течения (рис. 1, 2). Представлено точное решение задачи, использованное для верификации результатов расчетов, показавшее их высокую точность. Моделирование изменения структуры течения из-за воздействия различных типов при изменении во времени области течения связано с решением более общего класса задач – задач управления параметрами несжимаемой жидкости. Примером такой задачи для нефтегазовой отрасли является задача моделирования отклика месторождения на динамические воздействия с целью повышения нефтеотдачи, что является особо важным в связи с

необходимостью создания отечественной технологии “цифровое месторождение” [2].

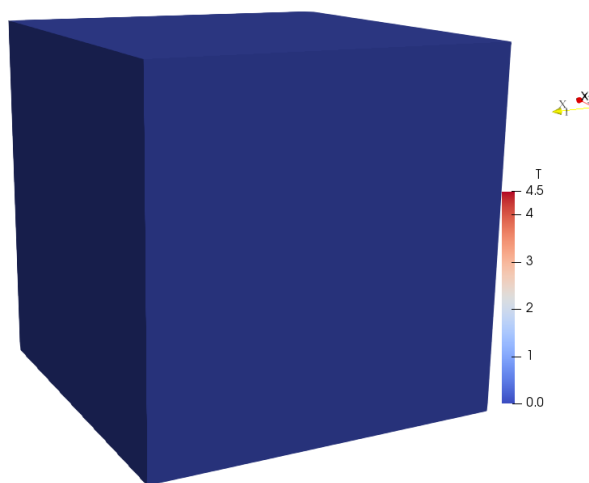


Рис. 1. Некоторая область, заполненная жидкостью, в условный момент времени  $t=0$ , цвет соответствует полю температуры

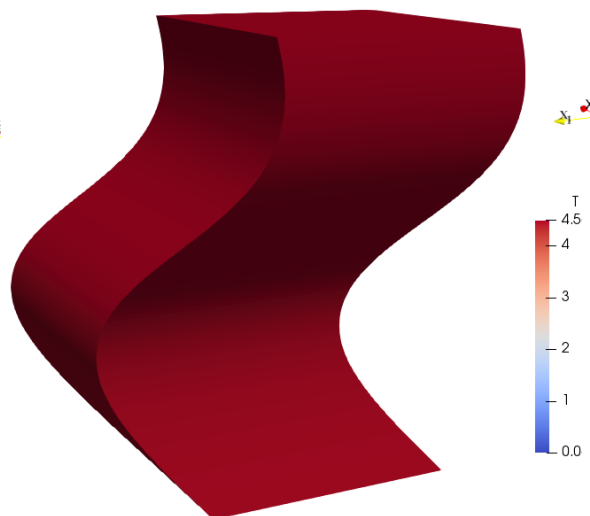


Рис. 2. Результат движения выбранного фрагмента области, заполненного жидкостью, в условный момент времени  $t=1$ , цвет соответствует полю температуры

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 18-01-00343, 18-47-860005).

#### *Список литературы:*

1. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О. Об управляемом слоистом течении вязкой несжимаемой жидкости в модели МГД // ДАН. Т. 470. № 2. С. 150-152. 2016.
2. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Задачи управления параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // ДАН. М.: Изд-во Академиздатцентр «Наука». Т.463. №2. С. 149-151. 2015.



## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЭЙЛОРА С РАДИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ

К. Ильин<sup>1</sup>, А. Моргулис<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*The University of York, York konstantin.ilin@york.ac.uk*

<sup>2</sup>*ЮМИ ВНЦ РАН и ЮФУ, Владикавказ-Ростов-на-Дону,  
morgulisandrey@gmail.com*

Композиция классического течения Куэтта-Тейлора и радиального потока в зазоре между пористыми цилиндрами даёт сквозное течение Куэтта-Тейлора (далее – СКТ). Ilin & Morgulis (2013-2017) установили, что, в пределе большого радиального числа Рейнольдса  $R$  (= исчезающей вязкости), неустойчивость СКТ относительно азимутальных или винтовых волн есть случай общего положения. В этом сообщении мы дадим обзор этих результатов, и дополним их подробной (и, во многом, новой) картой критических кривых СКТ в области умеренных  $R$ , в частности, покажем, как, начиная с  $R \sim 10$ , невязкая неустойчивость постепенно вытесняет классическую неустойчивость Куэтта-Тейлора в область более высоких азимутальных чисел Рейнольдса и коротких волн, см. рис 1.

Пусть вязкая несжимаемая и однородная жидкость прокачивается через зазор между двумя соосными цилиндрами радиусов  $r_2 > r_1$ , так что её расход равен постоянной  $q$ , причём внутренний (внешний) цилиндр вращается с угловой скоростью  $\Omega_1 = const$  ( $\Omega_2 = const$ ). Вводим числа Рейнольдса  $Re_1 = \Omega_1 r_1 (r_2 - r_1) / \nu$ ,  $Re_2 = \Omega_2 r_2 (r_2 - r_1) / \nu$ , (где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости), и радиальное число Рейнольдса  $R = q / \nu$ , причём  $q > 0$  и  $R > 0$  ( $q < 0$  и  $R < 0$ ), если поток расходящийся (сходящийся). Соответственно задаём векторы скорости жидкости на граничных цилиндрах. Указанные граничные условия определяют ровно одно вращательно инвариантное плоское стационарное решение системы Навье-Стокса. Это и есть сквозное течение Куэтта-Тейлора (далее - СКТ).

Устойчивость СКТ изучалась многими авторами. Надлежащие ссылки есть в статье [6], доступной онлайн. Важной мотивацией исследований СКТ служат приложения к технологиям динамической фильтрации (Wron'ski et al (1989), Beadoin & Jaffrin (1989)), а также к проблеме формирования аккреционных дисков чёрных дыр (Kersale (2004), Gallet et al. (2010), Kerswell (2015)). В ранних работах установлено, что слабый расходящийся поток дестабилизирует, а достаточно сильный – стабилизирует, равно как и сходящийся поток (Min & Lueptow (1994), Kolyshkin & Vaillancourt (1997)). (Отметим, что этот вывод верен, если зазор между цилиндрами относительно мал и,

как мы выяснили, вообще говоря, не верен если зазор между цилиндрами достаточно большой.) Вопрос, который оставался открытым, заключался в том, может ли радиальный поток сам по себе привести к неустойчивости потоков, которые без него были бы устойчивы. Положительный ответ был дан в работах Fujita et al. (1997), Gallet et al. (2010), где, в частности, была обнаружена неустойчивость специальных классов СКТ по отношению к плоским (трансляционно-инвариантным) азимутальным волнам. Позже Pin & Morgulis (2013, 2015) установили, что такого рода колебательная неустойчивость реализуется как «случай общего положения» при  $R \rightarrow \infty$  (что эквивалентно исчезающей вязкости), и затем распространили этот результат на трёхмерную задачу устойчивости (2017).

Хотя перечисленные исследования привели к значительному прогрессу в понимании влияния радиального потока на устойчивость СКТ, полной картины они не дают, ввиду различных ограничений на типы возмущений, и/или диапазоны параметров. В этом сообщении большинство пробелов будет заполнено с помощью продолжения невязких мод в область умеренных радиальных чисел Рейнольдса.

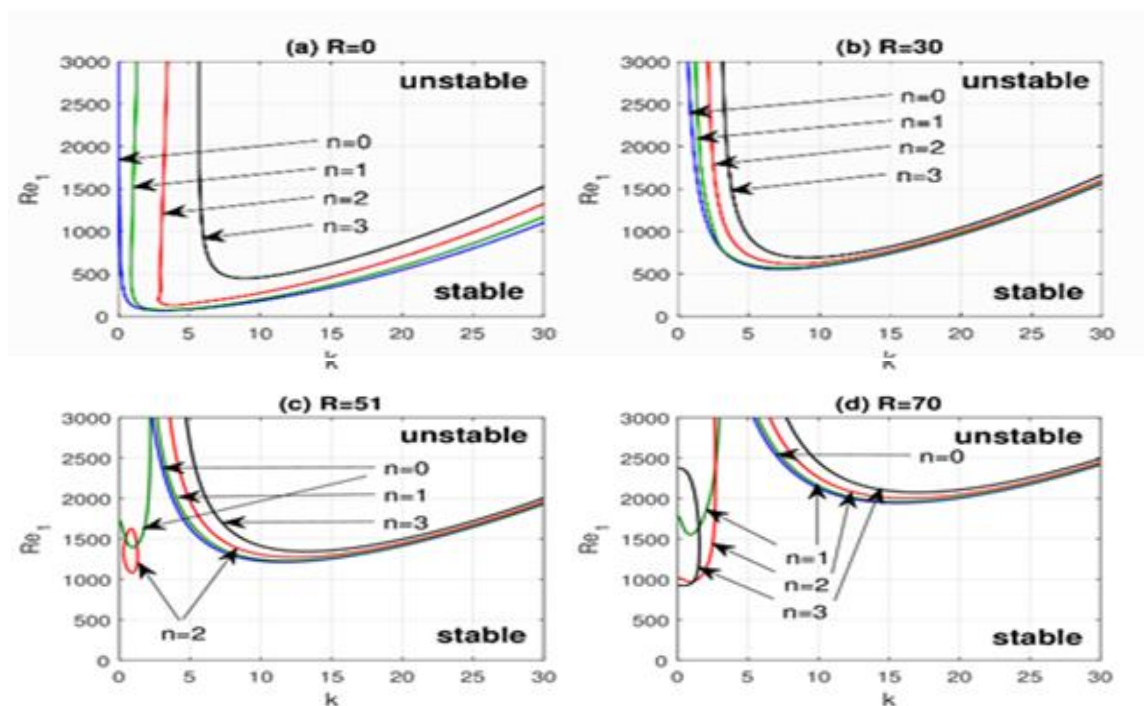


Рис.1. Нейтральные кривые СКТ  $Re_1(k)$ ,  $a = 2$ , и  $Re_2 = 0$ : (a) -  $R = 0$ ; (b) -  $R = 30$ ; (c) -  $R = 50$ ; (d) -  $R = 70$

#### Список литературы:

1. Min K., Lueptow R. M. Hydrodynamic stability of viscous flow between rotating porous cylinders with radial flow //Physics of Fluids. Т. 6., №. 1. С. 144-151. 1994.

2. Kolyshkin A. A., Vaillancourt R. Convective instability boundary of Couette flow between rotating porous cylinders with axial and radial flows. *Phys. Fluids. C.* 910–918. 1997.
3. Fujita, H., Morimoto, H., Okamoto, H. Stability analysis of Navier-Stokes flows in annuli. *Mathematical methods in the applied sciences.* Т. 20, № 6. С. 959–978. 1997.
4. Gallet, B., Doering, C. R., Spiegel, E. A. Destabilizing Taylor-Couette flow with suction. *Phys. Fluids.* Т. 22, № 3, 034105. 2010.
5. Ilin, K. Morgulis A. Inviscid instability of an incompressible flow between rotating porous cylinders to three-dimensional perturbations. *Eur. J. Mech. - B/Fluids.* Т. 62. – С. 46–60. 2017.
6. Ilin K., Morgulis A. On the stability of the Couette-Taylor flow between rotating porous cylinders with radial flow //arXiv preprint arXiv:1811.10043. 2018.

## СИСТЕМЫ ТИПА КЕЛЛЕРА-СЕГЕЛЯ С КОРОТКОВОЛНОВЫМ ВНЕШНИМ СИГНАЛОМ

К. Ильин<sup>1</sup>, А. Моргулис<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*The University of York, York konstantin.ilin@york.ac.uk*

<sup>2</sup>*ЮМИ ВНЦ РАН и ЮФУ, Владикавказ-Ростов-на-Дону,  
morgulisandrey@gmail.com*

Мы рассматриваем известную модель (Говорухин, Моргулис, Тютюнов, 2000) активной среды, состоящей из двух субстанций – «видов», из которых один – условный «хищник» – наделён способностью к детерминированному крупномасштабному движению в поиске другого вида – «жертв», регулируемому законом Патлака-Келлера-Сегеля, широко используемым при моделировании различных активных сред (см. Иваницкий и др (1994), Tsyganov et al. (2003-2004), а также обзор Bellomo et al. (2015)). Такой тип массопереноса рассматривается также как разновидность нелинейной кросс-диффузии.

В нашем случае поток хищника сонаправлен градиенту некоего сигнала, вырабатываемого жертвой, а не плотности последней, то есть, имеет место так называемый непрямой таксис к жертве (indirect prey-taxis, Tello & Wrozek, (2016)). Выработка указанного сигнала регулируется как плотностью жертв, так и другим сигналом, подаваемым извне. Последний считается заданным.

В нашем сообщении даётся анализ воздействию коротковолнового внешнего сигнала методом гомогенизации. Усреднение по коротким волнам приводит к так называемой *гомогенизированной системе*, описывающей динамику «плавной» компоненты решения. Эта система во многом похожа на точную систему, в которой внешний сигнал отключён, но отличается от неё дрейфом хищников. Скорость дрейфа определяется как внешним сигналом, так и средней скоростью хищников, но может быть ненулевой при том, что средняя скорость хищника равна нулю. Подобные явления известны в гидродинамике как дрейф Стокса. В нашем случае именно этот дрейф отвечает за все коротковолновые эффекты.

Однородная система (то есть, точная система без внешнего сигнала) может находиться в равновесии, в котором скорость адвекции равна нулю, а плотности видов постоянны. Оказывается, при определенных условиях, гомогенизированная система также может находиться в таком же однородном равновесии. При этом однородное равновесие гомогенизированной системы отождествляется с квазиравновесием – коротковолновым режимом с нулевой средней скоростью и постоянными средними плотностями видов.

Квазиравновесие в определённом смысле аналогично равновесиям усреднённой системы в теории перевёрнутого маятника, а роль дрейфа аналогична роли эффективной потенциальной энергии. Развивая эту аналогию, мы провели сравнительный анализ устойчивости однородных квазиравновесий и равновесий однородной системы.

Устойчивость и бифуркаций равновесий однородной системы изучали Говорухин и др (2000), Arditi et. al (2001). В однородном случае имеется пороговое значение подвижности хищника, ниже которого однородное равновесие устойчиво независимо ни от длины волны возмущения, ни от средней численности хищников. При превышении этого порога увеличение средней численности хищников приводит к колебательной неустойчивости, сопровождающейся ответвлением предельного цикла. Движениям на нём соответствуют периодические по времени волны, которые хаотизируются по мере роста средней численности хищников. При этом усложнение пространственно-временной структуры сообщества оказывается выгодным в том смысле, что сложный динамический режим позволяет хищникам потреблять больше, чем в равновесии, оставляя при этом большой запас жертв.

Эффект внешнего сигнала на устойчивость квазиравновесий неоднозначен. Интенсивный внешний сигнал может снизить эффективную подвижность хищника экспоненциально, что влечёт за собой стабилизацию. Можно сказать, что интенсивные

мелкомасштабные колебания окружающей среды дезориентируют и отвлекают хищников, и мешают им эффективно преследовать добычу. Слабый сигнал, напротив, может дестабилизировать.

*Список литературы:*

1. Иваницкий Г. Р., Медвинский А. Б., Цыганов М. А. От динамики популяционных автоволн, формируемых живыми клетками, к нейроинформатике //Успехи физических наук. Т. 164. №. 10. С. 1041-1072. 1994.
2. Tsyganov M. A. et al. Quasisoliton interaction of pursuit-evasion waves in a predator-prey system //Physical review letters. Т. 91. №. 21. С. 218102, 2003.
3. Tsyganov M. A. et al. Soliton-like phenomena in one-dimensional cross-diffusion systems: a predator–prey pursuit and evasion example //Physica D. Т. 197. №. 1-2. С. 18-33, 2004.
4. Tsyganov M. A., Biktashev V. N. Half-soliton interaction of population taxis waves in predator-prey systems with pursuit and evasion //Phys. Rev. E. Т. 70. №. 3. С. 031901, 2004.
5. Li C., Wang X., Shao Y. Steady states of a predator–prey model with prey-taxis //Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. Т. 97. С. 155-168. 2014.
6. Tello J. I., Wrzosek D. Predator–prey model with diffusion and indirect prey-taxis. Math. Models & Methods in Appl. Sci. Т. 26. №. 11. С. 2129-2162. 2016.
7. Tyutyunov Y. V., Titova L. I., Senina I. N. Prey-taxis destabilizes homogeneous stationary state in spatial Gause–Kolmogorov-type model for predator–prey system //Ecological complexity. Т. 31. С. 170-180. 2017.
8. Bellomo N. et al. Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues //Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Т. 25. №. 09. С. 1663-1763, 2015.
9. Говорухин В. Н., Моргулис А. Б., Тютюнов Ю. В. Медленный таксис в модели хищник-жертва //Доклады академии наук. Т. 372. №. 6. С. 730-732. 2000.
10. Arditi R. et al. Directed movement of predators and the emergence of density-dependence in predator–prey models //Theoretical Population Biology. Т. 59. №. 3. С. 207-221. 2001.

11. Pearce I. G. et al. Chemotaxis-induced spatio-temporal heterogeneity in multi-species host-parasitoid systems //Journal of mathematical biology. T. 55. №. 3. C. 365-388. 2007.

12. Wang Q., Yang J., Zhang L. Time-periodic and stable patterns of a two-competing-species Keller-Segel chemotaxis model: Effect of cellular growth //Discrete & Continuous Dynamical Systems-B. T. 22. №. 9. C. 3547-3574. 2017.

13. Yurk B. P., Cobbold C. A. Homogenization techniques for population dynamics in strongly heterogeneous landscapes //Journal of biological dynamics. T. 12. №. 1. C. 171-193. 2018.

## ON STABILITY OF ZERO SOLITON FOR A CHARGED PARTICLE AT REST IN THE MAXWELL FIELD

V. Imaykin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*RUT (MIIT), Moscow, ivm61@mail.ru*

The system of dynamical equations for a rotating charged particle at rest reads

$$\partial_t E = \partial_x \wedge B - (\omega \wedge x) \rho, \quad \partial_t B = -\partial_x \wedge E, \quad Id\omega/dt = \int x \wedge [E + (\omega \wedge x) \wedge B] \rho \, dx \quad (1)$$

with the transversality and symmetry conditions

$$\partial_x \cdot E = \rho, \quad \partial_x \cdot B = 0, \quad E(-x, t) = -E(x, t), \quad B(-x, t) = B(x, t). \quad (2)$$

Here  $E=E(x, t)$ ,  $B=B(x, t)$ ,  $x \in \mathbf{R}^3$ ,  $t \in \mathbf{R}$  are electric and magnetic fields respectively,  $\partial_x$  is the gradient in  $x$ ,  $\omega = \omega(t)$  is the angular velocity of the particle, and  $\rho = \rho(x)$  is the charge and mass distribution of the particle which are supposed to be proportional. We assume that  $\rho$  is sufficiently smooth, compact supported and spherically symmetric. Then the moment of inertia  $I$  of the particle is given by  $I=(2/3)\int x^2 \rho(x) \, dx$ .

Consider the space  $L = (\mathbf{R}^3, L^2(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3), L^2(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3))$ . The phase space for the system (1)-(2) is the nonlinear submanifold  $M$  of states  $(\omega, E, B) \in L$ , where  $E, B$  satisfy (2). Under the above assumptions the dynamics for the system (1)-(2) exists in  $M$  which is the space of finite energy states; the energy

$$H = H(\omega, E, B) := (1/2)I\omega^2 + (1/2)\int (|E|^2 + |B|^2) \, dx \quad (3)$$

is conserved along the solutions of the system, [1].

The system (1)-(2) is rotational invariant and admits soliton-type solutions (solitons)  $E = E_\omega(x)$ ,  $B = B_\omega(x)$ ,  $\omega(t) \equiv \omega = \text{const}$ . The solitons satisfy the stationary equations

$$\partial_x \wedge B_\omega - (\omega \wedge x) \rho = 0, \partial_x \wedge E_\omega = 0, \int x \wedge [E_\omega + (\omega \wedge x) \wedge B_\omega] \rho dx = 0, \quad (4)$$

$$\partial_x \cdot E_\omega = \rho, \partial_x \cdot B_\omega = 0, E_\omega(-x) = -E_\omega(x), B_\omega(-x) = B_\omega(x). \quad (5)$$

In Fourier space the soliton fields are expressed [1] by

$$FE_\omega(k) = -(ikF\rho(k))/k^2, FB_\omega(k) = -(k \wedge (\omega \wedge \partial_k F\rho(k)))/k^2, \quad (6)$$

where  $F$  denotes the Fourier transform.

To study stability of a soliton solution let us put

$$E(x,t) = E_\omega(x) + e(x,t), B(x,t) = B_\omega(x) + b(x,t), \omega(t) = \omega + \Omega(t) \quad (7)$$

with

$$\partial_x \cdot e = 0, \partial_x \cdot b = 0, e(-x,t) = -e(x,t), b(-x,t) = b(x,t). \quad (8)$$

Insert (7) into (1), take the stationary equations (4) into account and obtain the following system for the perturbations  $e$ ,  $b$ ,  $\Omega$ :

$$\partial_t e = \partial_x \wedge b - (\Omega \wedge x) \rho, \partial_t b = -\partial_x \wedge e, \quad (9)$$

$$Id\Omega/dt = \int x \wedge [e + (\Omega \wedge x) \wedge B_\omega + (\omega \wedge x) \wedge b + (\Omega \wedge x) \wedge b] \rho dx. \quad (10)$$

In the case  $\omega = 0$  (the zero soliton) the equation (10) by (6) reduces to

$$Id\Omega/dt = \int x \wedge [e + (\Omega \wedge x) \wedge b] \rho dx. \quad (11)$$

The system (8), (9), (11) is almost identical to the initial system (1)-(2). The difference is that one has  $\partial_x \cdot E = \rho$  in the initial system but  $\partial_x \cdot e = 0$  in the latter system. Nevertheless, by a straightforward computation one can check that the energy

$$h = h(\Omega, e, b) := (1/2)I\Omega^2 + (1/2) \int (|e|^2 + |b|^2) dx \quad (12)$$

is conserved along the solutions to the system (8), (9), (11). This fact implies the following result on stability of the zero soliton:

**Proposition.** *For the system (1)-(2), in the phase space  $M$ , the zero soliton ( $E = E_0(x)$ ,  $B = 0$ ,  $\omega(t) \equiv 0$ ) is Lyapunov stable (and as well orbital stable) but is not asymptotically stable.*

The problem of stability of a soliton ( $E_\omega(x), B_\omega(x)$ ,  $\omega$ ) with an arbitrary  $\omega$  still remains open.

### References

1. Imaykin, V., Komech, A., Spohn, H. Rotating charge coupled to the Maxwell field: scattering theory and adiabatic limit, Monatshefte fuer Mathematik, Vol. 142. No 1-2. 143-156, 2004.

## ДИФFUЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭКОНОМИКЕ И СОЦИОЛОГИИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАЩЕНИЕ.

**С.И. Кабанихин<sup>1,2</sup>**, О.И. Криворотько<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, kabanikhin@sccc.ru*

<sup>2</sup>*НГУ, Новосибирск, olga.krivorotko@sccc.ru*

Рассмотрены прямые и обратные задачи вида  $A(q) = f$ , в которых  $Q$  и  $F$  – гильбертовы пространства, а оператор  $A: Q \rightarrow F$  является вполне непрерывным. Пусть  $X$  и  $Y$  – компактные подмножества гильбертовых пространств  $Q$  и  $F$  соответственно. Пусть  $\varepsilon(X; N)$  – величина, обратная к  $\varepsilon$ -энтропии компакта  $X$ . В некорректных задачах  $\varepsilon(X; N)$  много меньше  $\varepsilon(Y; N)$  [1].

В работе исследуются обратные задачи для диффузионных процессов, возникающих в экономике (модель Солоу) [2] и социологии (распространение информации в онлайн социальных сетях) [3], состоящие в определении функций источника и коэффициентов моделей (вектор неизвестных  $q$ ) по дополнительной информации  $f$  о решении прямых задач в фиксированные моменты времени и некоторых точках пространства. Решения обратных задач сводятся к минимизации целевого функционала [4]. Для поиска глобального минимума применяются методы тензорного разложения [5], дифференциальной эволюции, имитации отжига. Для уточнения результатов используются методы градиентного спуска. Результаты численных расчетов представлены и проанализированы.

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 18-71-10044) и Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.



*Список литературы:*

1. Бабенко, К.И. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
2. Kabanikhin, S. Krivorotko, O., Bektemessov, M., Bektemessov, Z., Zhang, S. arXiv:1904.10627, 2019.
3. Kabanikhin, S., Krivorotko, O., Zhang, S., Kashtanova, V., Wang, Y. arXiv:1906.05246, 2019.
4. Kabanikhin, S.I. J. Inverse Ill-Posed Probl. Vol. 16. 317-357, 2008.
5. Zheltkova, V.V., Zheltkov, D.A., Grossman, Z., Bocharov, G.A., Tyrtysnikov, E.E. J. Inverse Ill-Posed Probl. Vol. 26. No 1. 51-66, 2018.

**О ВОЗМОЖНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ  
МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ**

**В.В. Калманович<sup>1</sup>, Е.В. Серегина<sup>2</sup>, А.А. Картанов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского,  
Калуга, v572264@yandex.ru,*

<sup>2</sup>*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана*

*(национальный исследовательский университет), Калужский филиал,  
Калуга, evfs@yandex.ru*

<sup>3</sup>*Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет), Москва, kartanovartem@gmail.com*

В настоящей работе рассмотрены возможности использования матричного метода для численного решения стационарной задачи теплопереноса в многослойной среде

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} \Phi^{(i)}(x) - m_i^2 \Phi^{(i)}(x) = \mu^{(i)}(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где потенциал  $\Phi^{(i)}(x)$  – искомая функция,

$$D_1^{(i)} = a_1^{(i)}(x) \frac{d}{dx}, \quad D_2^{(i)} = a_2^{(i)}(x) \frac{d}{dx},$$

$a_1^{(i)}(x)$ ,  $a_2^{(i)}(x)$  – положительные функции, определённые физическими и геометрическими параметрами слоёв,  $\mu^{(i)}(x)$  – величина,

пропорциональная объёмной плотности мощности распределения источников,  $i$  – номер слоя.

Изначально предлагаемый матричный метод является аналитическим. Формула решения представляет собой последовательное умножение и сложение функциональных матриц второго порядка, компоненты которых в каждой точке определяются физическими и геометрическими параметрами слоёв [1–4]. Аналитический матричный метод можно применять для решения первой, второй или третьей краевой задачи тепломассопереноса при любом конечном числе слоёв, при этом независимо от их количества решение сведётся в общем случае к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Однако для аналитического решения необходимо знать некоторое частное решение уравнения (1) для каждого слоя, что не всегда удается получить. В подобных ситуациях матричный метод возможно использовать как численный. Для этого материал разбивается на большое число тонких слоёв, на каждом из которых правая часть аппроксимируется, например, постоянной или линейной функцией.

Ранее нами были получены результаты по предлагаемому подходу для решения задачи распределения концентрации неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком, после их диффузии в однородный полупроводник [5, 6]. В настоящей работе проведены расчёты для многослойных полупроводниковых структур. Результаты сопоставлены с расчетами, полученными методом конечных разностей. Оценки погрешностей расчетов показывают перспективность дальнейшего исследования и развития предлагаемого матричного метода для численного моделирования тепломассопереноса как в случае однородной, так и многослойной среды.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

#### *Список литературы:*

1. Gladyshev Yu.A., Kalmanovich V.V., Stepovich M.A. On the Possibility of Applying the Bers Apparatus to Modeling the Processes of Heat and Mass Transfer Caused by Electrons in a Planar Multilayer Medium // J. of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, vol. 11, no. 5. P.1096-1100, 2017.

2. Гладышев Ю.А., Калманович В.В., Степович М.А. Матричный метод моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале

// Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений: Труды международной научной конференции. Том. 1. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт». С. 85-93, 2017.

3. В.В. Калманович, М.А. Степович. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2018. Сборник трудов. – М.: ИППМ РАН. Вып. III. С. 194 – 201, 2018.

4. Гладышев Ю.А., Калманович В.В., Серегина Е.В., Степович М.А. О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Ядерно-реакторные константы. № 3. С. 158-167. 2018.

5. Калманович В.В., Степович М.А., Серегина Е.В. О численном решении задач тепломассопереноса с использованием матричного метода и метода обобщенных степеней Берса // Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики. Тезисы докладов XXII Всероссийской конференции, посвященной памяти К.И. Бабенко. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. С. 51-52, 2018.

6. Kalmanovich V.V., Seregina E.V., Stepovich M.A. On the Possibility of a Numerical Solution of the Heat and Mass Transfer Problem with the Combined Matrix&Generalized Powers of Bers Method // J. of Physics: Conference Series, vol. 1163. 012012, 2019.

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ МОДЕЛЕЙ ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ

**М.Ю. Христинченко<sup>1</sup>, Ю.М. Нечепуренко<sup>1,2</sup>,  
Е.В. Склеярова<sup>1</sup>, Д.С. Гребенников<sup>1,2</sup>, Г.А. Бочаров<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ИИМ им М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия, misha.hrist@gmail.com, yumnech@yandex.ru, sklyarova.ev@phystech.edu, dmitry.ew@gmail.com*

<sup>2</sup>*ИВМ им Г.И. Марчука РАН, Москва Россия bocharov@m.inm.ras.ru*

Для описания динамики вирусных инфекций и противовирусного иммунного ответа в настоящее время широко используют системы дифференциальных уравнений с запаздыванием [1,2]. Обычно имеется несколько возможных вариантов динамики вирусных заболеваний, в том числе с большой и малой вирусными нагрузками. Первый вариант соответствует хроническому заболеванию с низким уровнем иммунного ответа, а второй – состоянию выздоровевшего организма с иммунной памятью, которая поддерживается за счёт антигенной стимуляции небольшой интенсивности. Такую альтернативность развития заболевания отражает бистабильность [3] соответствующей модели, то есть существование как минимум двух устойчивых стационарных состояний при одних и тех же значениях параметров. Для бистабильных систем актуален поиск многокомпонентных воздействий, вызывающих максимальный отклик и переводящих систему из состояния с высокой вирусной нагрузкой в состояние с низкой вирусной нагрузкой.

Данный доклад посвящен оригинальному подходу к построению многокомпонентных воздействий, вызывающих максимальный отклик заданной бистабильной системы и переводящих ее из состояния с высокой вирусной нагрузкой в состояние с низкой вирусной нагрузкой. Эти воздействия предлагается находить на основе оптимальных возмущениях.

Понятие оптимального возмущения широко используется в аэродинамике для объяснения механизма докритического ламинарно-турбулентного перехода. Для систем с запаздыванием оптимальные возмущения были впервые определены и использованы в работах [4,5,6]. В этих работах был предложен и обоснован достаточно простой алгоритм вычисления оптимальных возмущений, основанный на сведении исходной задачи к вычислению матричных произведений. Этот алгоритм эффективен для систем с запаздыванием небольшой размерности, не требующих для интегрирования по времени слишком мелкой сетки (по сравнению с задержками). В работе [7] были предложены и обоснованы алгоритмы эффективного вычисления

оптимальных возмущений для систем с запаздыванием большой размерности и/или требующих для интегрирования по времени достаточно мелкой сетки. Эти алгоритмы представляют собой модификации алгоритмов вычисления оптимальных возмущений, предложенных в работе [8] для систем без запаздывания.

В докладе кратко описываются и сравниваются упомянутые алгоритмы вычисления оптимальных возмущений для систем с запаздыванием. В качестве примера рассматриваются модель динамики инфекции, вызванной вирусом лимфоцитарного хориоменингита, и модель противовирусного иммунного ответа Марчука-Петрова. Обе эти модели при определенных значениях параметров обладают свойством бистабильности.

Разработка и реализация используемых алгоритмов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 17-71-20149), численный анализ модели вирусной инфекции выполнен при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 18-11-00171).

#### *Список литературы:*

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в иммунологии и медицине. Избранные труды. Т. 4. Российская академия наук, Институт вычислительной математики: Москва, С. 650. 2018.
2. Bocharov G., Volpert V., Ludewig B., Meyerhans A. *Mathematical Immunology of Virus Infections*. Springer: Cham, 2018.
3. Ferrell J.E. Bistability, bifurcations, and Waddington's epigenetic landscape // *Curr. Biol.* Vol. 22, No. 11, P. 458–466. 2012.
4. Bocharov G.A., Nечепуренко Y.M., Khristichenko M.Y., Grebennikov D.S. Maximum response perturbation based control of virus infection model with time-delays // *RJNAMM*. Vol. 32, No. 5, P. 275–291. 2017.
5. Бочаров Г.А., Нечепуренко Ю.М., Христинченко М.Ю., Гребенников Д.С. Оптимальные возмущения систем с запаздывающим аргументом для управления динамикой инфекционных заболеваний на основе многокомпонентных воздействий // *Современная математика. Фундаментальные направления*. Т. 63, № 3, С. 392–417. 2017.
6. Бочаров Г.А., Нечепуренко Ю. М., Христинченко М.Ю., Гребенников Д.С. Оптимальные возмущения бистабильных систем с запаздыванием, моделирующих вирусные инфекции // *Доклады Академии наук*, Т. 481, №. 2, С. 123-126. 2018.

7. Нечепуренко Ю.М., Христиченко М.Ю. Разработка и исследование алгоритмов вычисления оптимальных возмущений для систем с запаздыванием// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. № 120. 26 с. 2018.

8. Yu.M. Nechepurenko, M. Sadkane. Computing humps of the matrix exponential// J. of Comput. and Appl. Math. Vol. 319, P. 87–96. 2017.

## **EXPANSIONS INTO FINITE SERIES ON COMPLETE SYSTEMS OF SPECTRAL NON-ALGEBRAIC SHAPE FUNCTIONS AND APPLICATIONS**

**I. Kolesnikov**

*GC RAS, Moscow, kol@wdcb.ru*

This talk devotes to formation of complete systems of spectral shape functions, which are solutions of interpolation problems for Laplace and Helmholtz equations. In case of square with an arbitrary number of boundary-only equally spaced nodes (at different sides may be different nodes numbers) are constructed [1,2] non-algebraic shape functions, which are exact solutions of Laplace equation. Complete system of 1D shape functions with improved behavior near ends (corners) are constructed, that guaranteed by the best linear approximating method in form Favard's trigonometric sums. For equally spaced nodes on cube's boundary, spectral shape functions [3] are constructed via approximate solution of the Dirichlet problem for Laplace equation. Convolutions of (6th, 5th and 4th)-orders sums for vertices and edges ensure minimal possible only 2nd-order sums for all boundary nodes. In limit case, the infinite series converge uniformly in a closed cube (as addition to the [4, p.406]). It is essential, in contrast to algebraic shape functions, internal nodes are not introduced the both for square and cube. In the case of the Helmholtz operator have been constructed shape functions with canonical variation type: slow and fast (exponential or oscillating).

The complete systems of 2D and 3D shape functions are constructed for set of equally spaced boundary and internal nodes in square and cube by using of mixed interpolations on base of the constructed boundary-only shape functions and their correcting Fourier discrete series at the inner nodes.

Constructed shape functions are used for formation of compatible isoparametric finite elements with an arbitrary nodes number (macro-elements) and with multiscale representation of field functions for wanting

types of varying. In result, possibilities of the boundary element method, spectral and meshless method are realized within the framework of the finite element method.

Constructed spectral expansions on base of the Trefftz method give explicit analytical solutions for Laplace equation in rectangle and parallelepiped with Dirichlet boundary conditions. The solutions for the rectangular domains have good computational properties (no Gibbs phenomenon for field functions and for the first derivatives). However, for the non-rectangular domains such solutions always are divergent due to the ill-conditionality of collocation equations system [5].

### *References*

1. Kolesnikov, I. *Izv. AN SSSR. MTT* [transl.: *Mechanics of Solids*], No 5. 136-141, 1984.
2. Gorshkov, A., Kolesnikov, I. *Mechanics of Solids*, No 1. 116-129, 1998.
3. Gorshkov, A., Kolesnikov, I. *Mechanics of Solids*, No 3. 14-21, 1990.
4. Budak, B.M., Samarskii, A.A., Tihonov, A.N.: Moscow, Nauka, 1980.
5. Givoli, D.: *IACM Expressions*, No. 23. 10-15, 2008.

## **ДВА ТИПА ОСЦИЛЛЯЦИЙ ХОЛСТЕЙНОВСКОГО ПОЛЯРОНА РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ЦЕПОЧКЕ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ.**

**Коршунова А.Н., Лахно В.Д.**

*ИМПБ РАН - филиал ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Пущино*  
*alya@impb.ru, lak@impb.ru*

В связи с развитием молекулярной нанобиоэлектроники, основной задачей которой является конструирование электронных устройств на основе биологических молекул, всё больший интерес вызывают проблемы транспорта заряда в таких протяжённых молекулах как ДНК. Актуальность изучения движения зарядов в одномерных молекулярных цепочках в первую очередь связана с возможностью использования таких цепочек в качестве проводов в наноэлектронных устройствах. Носителями тока в одномерных

цепочках являются самозахваченные электронные состояния, которые имеют вид поляронных образований.

В представленной работе мы исследуем движение холстейновского полярона в процессе его равномерного движения по цепочке в постоянном электрическом поле. Динамическое поведение полярона при наличии постоянного внешнего поля в однородной молекулярной цепочке моделируется системой связанных квантово–классических динамических уравнений с диссипацией. В используемой нами модели ДНК рассматривается как однородная незамкнутая цепочка, составленная из  $N$  сайтов. Каждый сайт представляет собой нуклеотидную пару, которая рассматривается как гармонический осциллятор [1].

Проведённые ранее исследования показывают [2], что при определённых параметрах цепочки, существует возможность равномерного движения заряда в постоянном электрическом поле на очень большие расстояния. Движение заряда с постоянной скоростью возможно для небольших значений напряжённости электрического поля. С увеличением значения напряжённости электрического поля заряд переходит в колебательный режим движения с блоховскими осцилляциями.

В работе [3] нами было показано, что при равномерном движении по цепочке в слабом электрическом поле полярон испытывает небольшие колебания своей формы. Эти колебания связаны с дискретностью цепочки и обусловлены наличием в дискретной цепочке потенциала Пайерлса-Набарро.

Проведённые вычисления показали, что элементы блоховских осцилляций появляются и при стационарном движении полярона по цепочке.

Таким образом показано, что, равномерно движущийся по цепочке в постоянном электрическом поле холстейновский полярон, испытывает не только колебания Пайерлса-Набарро, но и малоамплитудные колебания с блоховским периодом.

Работа выполнена при поддержке РФФ, проект №16-11-10163, РФФИ, проект №19-07-00406.

#### *Список литературы:*

1. Лахно В.Д. , Коршунова А.Н. Математическая биология и биоинформатика. Формирование стационарных электронных состояний в однородных молекулярных цепочках конечной длины. Т. 5, №1, С. 1–29. 2010.



2. Коршунова А.Н., Лахно В.Д. Моделирование стационарных и нестационарных режимов движения заряда в однородной холстейновской цепочке в постоянном электрическом поле. Журнал технической физики. Т. 88. №9. С. 1312–1319. 2018.

3. Lakhno, V.D., Korshunova A.N. Electron motion in a Holstein molecular chain in an electric field. Euro. Phys. J. B, V. 79, P. 147–151. 2011.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ ВОДЫ С ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОВОЙ СТРУЕЙ**

М. Крапошин<sup>1</sup>, В. Мельникова<sup>1</sup>, А. Епихин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*ИСП РАН, Москва, vg-melnikova@yandex.ru*

В настоящее время одной из актуальных задач в ракетно-космической области является снижение акустического шума от струй работающих двигателей. Для решения данной задачи используются различные пассивные и активные методы. Одним из таких способов является подача струй воды в область истечения горячей газовой струи [1-2]. Детальное изучение газодинамических и акустических процессов, возникающих при использовании этой технологии, в натуральных условиях является сложной и дорогостоящей задачей. Неоднородность области по числу Маха, многофазность, «разбрызгивание» водяных струй, наличие физико-химических процессов, возможное взаимодействие и отражение ударных волн и др. - все эти особенности обуславливают необходимость применения инструментов численного моделирования и разработки гибридной модели решателя, способного корректно воспроизводить и прогнозировать описанные выше явления при изменении конструкторской документации.

Решение такой задачи требует согласованного учета распространения капель в сверхзвуковом потоке. Для этого необходимо разделить описание газокапельного потока на две системы: континуальную (Эйлерову) и дискретную (описываемую в переменных Лагранжа). С учётом принятых на данный момент допущений математическая модель состоит из трехмерных уравнений Навье-Стокса для турбулентных сверх-, транс- и дозвуковых течений сжимаемой газокапельной смеси, включая уравнения сохранения массы, импульса и энергии; переноса турбулентных величин, переноса компонент смеси, переноса капель, описание механизмов

взаимодействия водяных и газовых потоков (испарение, обмен импульсом).

В работе рассматривается реализация и верификация гибридного (Euler-Lagrange) подхода на базе пакета OpenFOAM, а также его применение для численного моделирования процесса взаимодействия газовых струй с водяными.

*Список литературы:*

1. P. Rajput, S. Kumar. Jet noise reduction by downstream fluidic injection: effect of injection pressure ratio and number of injection ports // 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2018. DOI: 10.2514/6.2018-0258
2. M. Kandula, B. Vu. On the scaling laws for jet noise in subsonic and supersonic flow // NASA Preprint No. KSC-2003-040, 2003.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ БИОЛОГИИ

**О.И. Криворотько<sup>1,2</sup>, С.И. Кабанихин<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*ИВММГ СО РАН, Новосибирск, olga.krivorotko@sscc.ru*

<sup>2</sup>*НГУ, Новосибирск, kabanikhin@sscc.ru*

В работе исследуются задачи определения параметров математических моделей эпидемиологии и иммунологии, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), основанные на законе баланса масс в замкнутой системе, по дополнительной информации о некоторых состояниях системы в фиксированные моменты времени. Параметры исследуемых математических моделей (коэффициенты систем ОДУ, начальные данные) зависят от показателей заболеваемости в регионе, характеристик иммунной системы и заболевания и носят усредненный характер. Ввиду этого рекомендации по противоэпидемическим программам и планам лечения носят усредненный характер. В работе задачи определения коэффициентов и начальных данных задач Коши для систем ОДУ по некоторой дополнительной информации сводятся к задачам многопараметрической оптимизации квадратичного целевого функционала, которые являются неустойчивыми [1]. На первом этапе исследования корректности таких задач проводится анализ идентифицируемости, позволяющий выделить набор идентифицируемых параметров при фиксированном наборе данных

измерений, а также оценить устойчивость определения параметров к ошибкам в измерениях [2]. На основе полученного анализа разрабатываются комбинированные алгоритмы регуляризации: методы глобальной оптимизации (тензорного разложения, генетического алгоритма, имитации отжига, роя частиц и др.) позволяют локализовать область глобального экстремума целевого функционала в многомерном пространстве, а методы локальной оптимизации (градиентные методы, метод Нелдера-Мида) с гарантированной точностью определяют набор искомых параметров задачи.

В работе проанализированы решения задач определения параметров для математических моделей эпидемии туберкулеза и ВИЧ в регионах РФ [3] и динамики ВИЧ на клеточном уровне [4], а также представлен краткосрочный прогноз моделирования указанных заболеваний.

Работа поддержана грантом Президента (соглашение № 075-15-2019-1078 (МК-814-814.2019.1)) и Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

*Список литературы:*

1. Kabanikhin, S.I. J. Inverse Ill-Posed Probl. Vol. 16. 317-357, 2008.
2. Miao, H., Xia, X., Perelson, A., Wu, H. SIAM Rev Soc Ind Appl Math. Vol. 53. No 1. 3-39, 2011.
3. Kabanikhin, S., Krivorotko, O., Kashtanova, V. J. Inverse Ill-Posed Probl. Vol. 26. No 1. 121-131, 2018.
4. Banks, H.T., Kabanikhin, S.I., Krivorotko, O.I., Yermolenko, D.V. Inverse Ill-Posed Probl. Vol. 26. No 6. 859-873, 2018.

## ЧИСЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ БЕЛКОВЫХ СТРУКТУР НА ЧИСЛО МЕРОТЕЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ МИКРОТРУБОЧЕК ПРИ МИТОЗЕ

**М.А. Кривов<sup>1</sup>, А.В. Зайцев<sup>2</sup>, П.С. Иванов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, m\_krivov@cs.msu.su*

<sup>2</sup>*ЦТП ФХФ РАН, zaytsev.anatoly@gmail.com*

<sup>3</sup>*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, psmart@rambler.ru*

К концу 80-х годов прошлого века процесс митотического деления биологических клеток был формализован до такой степени, что вопросами изучения митоза смогли активно заниматься не только биологи, но также физики и математики [1]. Среди актуальных направлений исследований стоит отметить разработку и развитие математических моделей, способных воспроизводить экспериментальные результаты, определять функциональность вовлеченных в митоз белковых структур или предсказывать новые факты о природе митоза.

Особый интерес представляет изучение метафазы, так как она играет ключевую роль в идентичном распределении генетического материала между двумя дочерними клетками на последующих этапах митоза. Тубулиновые микротрубочки, растущие с противоположных полюсов веретена деления, зацепляются за кинетохоры сестринских хроматид и порождают притягивающие силы, благодаря чему осуществляется поворот хромосом и их центрирование в экваториальной плоскости клетки (см. Рис. 1А и Рис. 1В). При этом могут появляться меротельные зацепления, когда за один кинетохор (см. Рис. 1С) прикрепляются микротрубочки с разных полюсов деления, что может приводить к ошибкам на анафазе и телофазе и стать причиной анеуплоидности дочерних клеток [2].

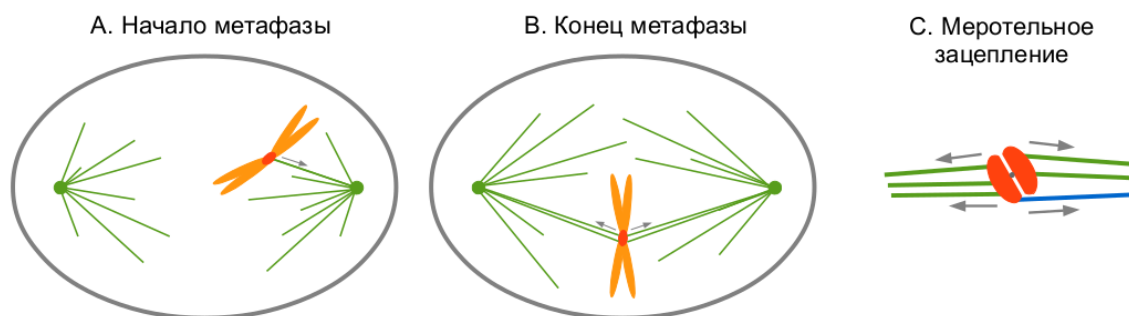


Рис. 1. Зацепления микротрубочек за кинетохор в метафазе

В работе [3] показана важность так называемых геометрических механизмов подавления меротельных зацеплений, под которыми понимаются строго определённые размеры участвующих в митозе белковых структур. С помощью аппарата численного моделирования был сделан вывод, что при отклонении размера «короны» кинетохора (области, к которой могут прикрепляться микротрубочки) от значения, взятого из экспериментальных работ по изучению культуры клеток млекопитающих, меротельные зацепления сохраняются до конца метафазы.

В настоящем докладе представлены результаты идейно близкого моделирования прометафазы и метафазы, выполненного с использованием разработанного авторами пакета MiCoSi [4]. Основным отличием от [3] является переход от двумерной модели клетки к трёхмерной и варьирование большего числа её параметров. В частности, дополнительно изучено влияние на число меротельных зацеплений размеров рук хромосомы и кинетохора, параметров центромеры, радиуса клеточной мембраны, а также механизма отцепления и зацепления микротрубочек.

Проведённое моделирование позволило уточнить предназначение размера «короны» кинетохора. Согласно полученным результатам, в рамках трёхмерной модели данная белковая структура отвечает не столько за подавление меротельных зацеплений (как это было в двумерной), сколько за обеспечение корректной ориентации пары сестринских хроматид. В свою очередь, после достижения требуемой ориентации наблюдается монотонное уменьшение числа меротельных зацеплений. Варьирование прочих параметров приводит к изменению числа меротельных зацеплений как в большую, так и меньшую сторону, но при этом также влияет на общее число зацеплений. Как следствие, их не следует относить к классу геометрических механизмов подавления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-01164а

### *References*

1. Civelekoglu-Scholey G., Cimini D. Modelling chromosome dynamics in mitosis: a historical perspective on models of metaphase and anaphase in eukaryotic cells // *Interface Focus*, June 2014, vol. 4 (3), pp. 1 – 9. 2014.
2. Cimini D. Merotelic kinetochore orientation, aneuploidy, and cancer // *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Reviews on Cancer*, vol. 1786 (1), pp. 32 – 40, 2008.
3. Zaytsev A., Grishchuk E. Basic mechanism for biorientation of mitotic chromosomes is provided by the kinetochore geometry and indiscrimi-

nate turnover of kinetochore microtubules // *Molecular Biology of the Cell*, November 2015, vol. 26, pp. 3985 – 3998. 2015.

4. Портал проекта MiCoSi: <https://github.com/m-krivov/MiCoSi> (дата обращения: 15.07.2019).

## **LIMITING AND DIVERGENCE CLEANING FOR CONTINUOUS FINITE ELEMENT DISCRETIZATIONS OF THE MHD EQUATIONS**

**D. Kuzmin<sup>1</sup>, N. Klyushnev<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*TU Dortmund, LS III, Dortmund, kuzmin@math.uni-dortmund.de*

<sup>2</sup>*KIAM RAS, Moscow, n\_klyushnev@mail.ru*

In this talk we will discuss modifications and improvements of an implicit finite element scheme for solving the equations of ideal magnetohydrodynamics, presented in [1]. The continuous Galerkin approximation is constrained using flux-corrected transport (FCT) algorithm. The underlying low-order scheme is constructed using a Rusanov-type artificial viscosity operator based on scalar dissipation proportional to the fastest wave speed. At the FCT correction step the changes of all conserved quantities are limited sequentially, and an additional limiter guarantees positivity preservation for the pressure. Divergence cleaning for the magnetic field is performed in a form of FCT-type corrections, which are limited simultaneously with the antidiffusive corrections of other quantities.

Two common 2D test problems are considered (rotor problem and Orszag-Tang vortex problem) to verify and show adequacy of the algorithm and to compare the results with other approaches.

The work was carried out in TU Dortmund University. The results are published in [2].

### *References*

1. Basting M., Kuzmin D. An FCT finite element scheme for ideal MHD equations in 1D and 2D. *J. Comput. Phys.* Vol. 338, 585–605, 2017.
2. Kuzmin D., Klyushnev N. Limiting and divergence cleaning for continuous finite element discretizations of the MHD equations. *Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik*, No. 608. 2019.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ВЕТРОВЫХ ВОЛН.

**В.С. Лапонин<sup>1</sup>**, С.А. Складчиков<sup>1</sup>, С.В. Анпилов<sup>1</sup>,  
Н.П. Савенкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, lap@cs.msu.ru*

Главной причиной возникновения волн является ветер. Даже слабый ветер создает волны. Изучению ветровых волн и их эволюции посвящено большое количество работ, например [1-5]. Тем не менее, многие вопросы до сих пор остались не выясненными.

Рассмотрим замкнутый кольцевой канал, в начальный момент времени в канале находится покоящаяся жидкость (вода), занимающая половину объема в установке, оставшийся объем заполнен воздухом. Ветер создается четырьмя вентиляторами, расположенными равномерно над каналом. В ходе численных экспериментов мощности вентиляторов будут изменяться, именно из-за этого будет формироваться то или иное количество условно устойчивых конфигураций на поверхности жидкости.

В результате математического моделирования на поверхности воды образуются волновые движения, которые начинаются с очень малых капиллярных волн (волн ряби). Со временем амплитуда и длина волны увеличиваются, причем амплитуда нарастает быстрее, чем длина. Когда эти волны достигают определенной длины и крутизны, ситуация меняется: увеличение длины волны идет быстрее, чем рост амплитуды, в результате чего крутизна уменьшается. В жидкости образуются вихревые структуры, направленные по ходу движения волны, и внутренние вихри, направленные на самоподдержание условно устойчивой волны. Также в подветренной части волн образуются вихревые движения воздуха.

### *Список литературы:*

1. Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987.
2. Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. Современные проблемы физики. М.: Физматлит, 1996.
3. Holthuijsen, L.H. «Waves in oceanic and coastal waters», Cambridge University Press, ISBN 0521860288, 2007.

4. Falkovich, Gregory, «Fluid Mechanics (A short course for physicists)», Cambridge University Press, ISBN 978-1-107-00575-4, 2011.

5. Математическое моделирование формирования уединенной волны на поверхности жидкости. Р.Н. Кузьмин, В.С. Лапонин, Н.П. Савенкова, С.А. Складчиков // Инженерная физика. № 8. С. 19–24, 2014.

## **ПРОГРАММА МОДЕЛИРОВАНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ В ГЕТЕРОГЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РАЗЛИЧНЫМ БИМОЛЕКУЛЯРНЫМ СИСТЕМАМ**

**Лихачев И.В.**, Лахно В.Д., Балабаев Н.К.

*ИМПБ РАН – филиал ИПМ им. М.В. Келдыша, Пуццино  
ilya\_lihachev@mail.ru*

Методом моделирования молекулярной динамики пользуются во многих научно-исследовательских лабораториях. Расчёты в настоящее время ведутся, как на традиционных персональных компьютерах, так и на вычислительных кластерах (суперкомпьютерах). Независимо от класса вычислительных ресурсов, сейчас в совокупности с центральными процессорами всё чаще используются графические ускорители в качестве сопроцессоров общего назначения.

Основная задача программы моделирования молекулярной динамики – интегрирование уравнений движения. Неотъемлемая часть этих уравнений – вычисление сил. Между атомами моделируемой системы действуют валентные (валентные связи, валентные и торсионные углы) и невалентные (силы Кулона и Ван-дер-Ваальса) взаимодействия. Вычислительная сложность расчета валентных сил линейна. Невалентных, в общем случае, зависит от квадрата числа атомов.

Как правило, в вычислительных экспериментах вводится радиус обрезания невалентных взаимодействий. Таким образом, вычислительная сложность падает с  $N^2$  до  $N \times M$ , где  $N$  – количество атомов в системе,  $M$  – количество учитываемых соседей на расстоянии радиуса обрезания.

Традиционно, при написании гетерогенных программ, на ускорители выносятся не вся программа, а лишь наиболее вычислительно трудоемкая ее часть. Для реализации учёта радиуса



обрезания в молекулярной динамике используются алгоритм составления списков пар взаимодействующих атомов (список Верле) и алгоритм сканирования по пространству. Последний алгоритм показал свою эффективность при реализации на традиционных центральных процессорах. Несмотря на свою эффективность по потреблению памяти, на графических ускорителях данный алгоритм неэффективен из-за необходимости обработки неиспользуемых путей ветвлений.

При реализации гетерогенной программы моделирования молекулярной динамики PUMA-CUDA был использован алгоритм составления списков пар взаимодействующих атомов (список Верле). Последний составляется по структурам алгоритма сканирования по пространству непосредственно на самом графическом ускорителе и остаётся в памяти устройства для использования в течение нескольких шагов интегрирования, что повышает эффективность программы.

В целях повышения быстродействия реализовано одновременное использование двух графических адаптеров для расчета Кулоновских и Ван-дер-Ваальсовых взаимодействий. Также реализован расчет валентных взаимодействий на ядрах центрального процессора параллельно с запуском невалентных взаимодействий на графических ускорителях.

Программа содержит опции, позволяющие включать внешние силовые воздействия на моделируемую систему. Применение таких опций позволяет переходить к так называемой управляемой молекулярной динамике. Сложность используемых для этого алгоритмов линейна и не требует вмешательств в основные алгоритмы расчета, от которых зависит быстродействие.

Наряду с традиционными задачами моделирования молекулярной динамики – моделирования процессов в системах с заранее известными начальными условиями – ставятся задачи по конструированию новых структур. В отличие от молекулярных конструкторов, где задаются координаты молекул, МД-манипулятор направленно переводит известную систему в новое состояние с использованием механизмов, моделирующих реальные физические процессы. В естественных условиях на такой переход требуется макроскопическое время, что делает невозможным его моделирование на молекулярном уровне. Один из подходов для решения проблемы – применение МД-манипуляторов.

Гетерогенная программа моделирования молекулярной динамики PUMA-CUDA использовалась для проверки гипотезы о существовании параллельно спиральной ДНК. Рассматривалась традиционная молекула ДНК из 30 пар оснований АТ. При помощи молекулярного конструктора нити развели на достаточное расстояние друг от друга.

Зафиксировали атомы фосфора. Затем добавили силовое поле, которое притягивало нуклеотиды одной спирали в сторону второй.

Для построения бислоя был написан молекулярный конструктор. Одну молекулу фосфолипида размножили в виде прямоугольника  $8 \times 8$ . Затем, повернув на  $180$  градусов, изобразили вторую часть бислоя, получив модель клеточной мембраны из  $8 \times 8 \times 2 = 128$  фосфолипидов. С внешней стороны от плоскости мембраны поместили олигопептид. Система была помещена в периодические граничные условия для моделирования бесконечной мембраны. Всё свободное пространство было заполнено водой. Для моделирования прохождения олигопептида сквозь мембрану было использовано силовое поле (МД-манипулятор), которое протаскивало пептид сквозь фосфолипидный бислой с постоянной скоростью концевых атома, либо центра его масс.

Создание собственной гетерогенной программы моделирования молекулярной динамики позволяет: 1) проводить объемные вычислительные эксперименты с молекулярными наноструктурами; 2) добавлять различные МД-манипуляторы для построения новых структур.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект РНФ 16-11-10163.

## **X-RAY LASERS AND COMPUTATIONAL TASKS OF BIOLOGICAL CRYSTALLOGRAPHY**

**V.Y. Lunin, N.L. Lunina, T.E. Petrova**

*IMPB, KIAM RAS, Pushchino,*

*lunin@impb.ru, lunina@impb.ru, tania.petrova.ru@gmail.com*

X-ray diffraction experiment is the main tool for obtaining information about the structure of biological macromolecules (proteins, DNA, RNA) and their complexes at atomic resolution. At the moment, the structures of more than 100 thousand biological objects were found by this method. The result of the study of an individual object are the spatial coordinates of tens and hundreds of thousands of atoms that form the object, while the amount of recorded experimental information can reach hundreds of thousands or millions of independent measurements.

The applicability of the approach is limited, today, by the need to prepare the object under study in the form of a single crystal, which allows one to significantly increase the intensity of the scattered radiation. The advent of X-ray lasers creates a potential possibility to remove this limitation and register scattering by individual instances of the object being studied.

The implementation of this possibility requires a significant modernization of the computing tools. There are several classes of emerging tasks:

- Collection, processing, storage, and providing access to experimental information. The amount of data related to one experiment can reach tens of terabytes.

- Conversion of a series of two-dimensional frames into a three-dimensional data set. Extrapolation of experimental data to a higher "resolution" area.

- Solving the inverse problem of diffraction, i.e., converting the magnitude of Fourier transform of the electron density distribution of an object into this distribution or a set of atomic coordinates of the object. Accounting for translational, inversion, and homometric ambiguity of the solution of the inverse problem.

Besides the problem of preparing a crystal, a serious disadvantage of the use of crystalline species in diffraction experiments is the loss of Fourier transform values for all the points except for a discrete grid in the three-dimensional space, which is linked to the fact that the Fourier transform of a periodic function is a grid of  $\delta$ -functions modulated by Fourier coefficients calculated from the unit cell content. In contrast, the Fourier transform of the density of an isolated particle is an entire holomorphic function. This opens wide theoretical possibilities for structure studies, which meet, however, serious difficulties in practical implementation.

### *References*

1. Lunin, V.Y., Lunina, N.L., Petrova, T.E. *Math. Biol. and Bioinf.* Vol. 12. 55-71, 2017.

2. Lunin, V.Y., Lunina, N.L., Petrova, T.E., Baumstark, M.W., Urzhumtsev, A.G. *Acta Cryst. D.* Vol. 72. 147-157, 2016.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭНЕРГОВЛОЖЕНИИ**

**Луцкий А.Е.<sup>1</sup>, Ханхасаева Я.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, allutsky@yandex.ru*

<sup>2</sup>*ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, hanhyana@mail.ru*

В работе численно исследовано нестационарное течение, образующееся при обтекании сверхзвуковым потоком с  $M=2.4$  тела

конфигурации затупленный конус-цилиндр при наличии периодического энерговклада в область перед телом. Постановка задачи в значительной степени воспроизводит условия физического эксперимента [1]. В частности, рассмотрено два варианта течения: обтекание тела равномерным сверхзвуковым потоком и недорасширенной сверхзвуковой струей. Расчеты проводились в рамках уравнений Эйлера с использованием метода свободной границы (вариант подхода *immersed boundary method*) и многоуровневых декартовых сеток с локальной адаптацией на основе вейвлет-анализа [2].

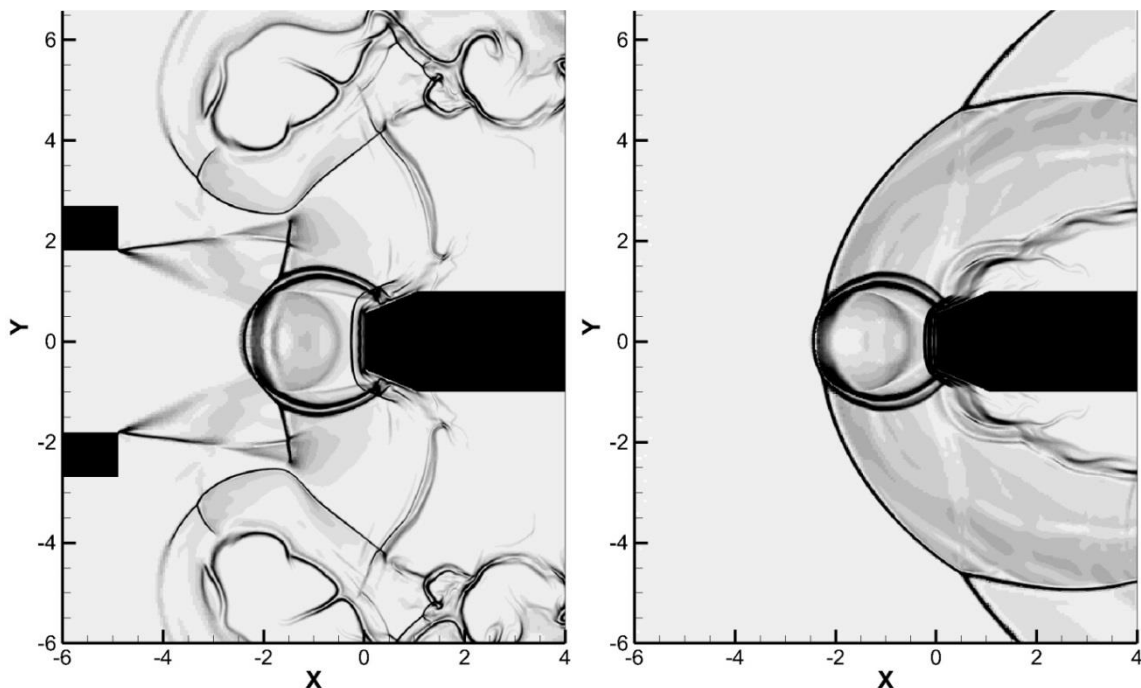


Рис. 1. Теневые изображения нестационарного течения: слева - обтекание недорасширенной сверхзвуковой струей, справа - обтекание равномерным сверхзвуковым потоком.

Проведено сравнение с имеющимися данными физического эксперимента [1]. Исследована динамика течения, движение и взаимодействие ударных волн. Выявлено влияние входных параметров задачи на структуру и динамику результирующего течения. В результате перестройки течения, вызванной вложением энергии, получено существенное снижение волнового сопротивления тела. Этот факт находится в полном соответствии с концепциями, разработанными академиком В.А. Левиным [3]

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 17-71-30014.

*Список литературы:*

1. Знаменская И.А., Наумов Д.С., Сысоев Н.Н., Черников В.А. Журнал технической физики, т.89, в.6, 856-860, 2019.
2. Афендииков А.Л., Давыдов А.А., Луцкий А.Е., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Пленкин А.В., Ханхасаева Я.В. Адаптивные вейвлетные алгоритмы для решения задач гидро- и газовой динамики на декартовых сетках. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 232 с., 2016.
3. Георгиевский П.Ю., Левин В.А. Письма в ЖТФ, т.14, в.8, 684-687, 1988.

**THE PROBLEM ON NON-STATIONARY MOTION OF THE BODY UNDER FREE SURFACE OF IDEAL FLUID**

**N. Makarenko**

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk,  
makarenko@hydro.nsc.ru*

Non-stationary free surface flow of infinitely deep ideal fluid generated by the motion of a submerged body is considered analytically. Fully nonlinear 2D water wave problem is reduced to the integral-differential system for the functions defining free surface elevation  $\eta$ , normal- and tangential velocity components. Small-time asymptotic solution is constructed for the case of circular and elliptic cylinder that moves with constant acceleration from rest. This approximate solution describes adequately the formation of added mass layers near the body and generation of splash jets and finite amplitude surface waves.

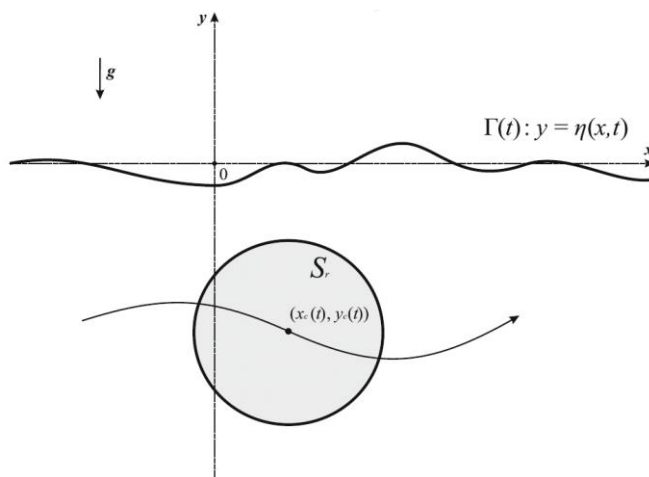


Fig. 1. Scheme of motion.

An impact of non-linearity was investigated for three basic flow regimes: horizontal motion, vertical rising, and vertical submersion of the cylinder. The most interesting analytical example of the flow is the formation of a non-stationary splash jet over submerging cylinder. It was demonstrated that small-scaled waves can arise and propagate along the deflected free surface  $\Gamma(t)$  with non-constant phase speed.

The work is supported by RFBR grant No 18-01-00648 and Interdisciplinary Program SB RAS (Project No 2).

### *References*

1. Makarenko N.: JOMAE Transactions of the ASME. Vol. 125. No 1. 72-75, 2003.
2. Makarenko N., Kostikov V. : J. Appl. Mech. Techn. Phys. Vol. 53. No 3. 367-376, 2013.
3. Makarenko N., Kostikov V. : Nat. Hazards Earth Syst. Sci . Vol. 14. No 4. 751-756, 2014.
4. Kostikov V., Makarenko N.: J. Engn. Math. Vol.122. No 2. 1-16, 2018.

## **МОДЕЛЬ ЖИДКОГО ГРУНТА В РАСЧЕТАХ ПОЛЯ УПРУГИХ ВОЛН**

**С. Махортых**

*ИМПБ РАН – филиал ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Пущино  
makh@impb.ru*

Грунт представляет собой довольно сложную вязкоупругую среду, в которой необходимо учитывать затухание, объемную и сдвиговую составляющие упругости. Точный анализ волновых процессов требует аккуратного выбора вычислительной схемы из числа, например, сеточных методов, конечно-разностных и конечно-элементных подходов. Корректное применение этих методов должно повысить точность прогноза величин волновых полей, но для этого необходимым условием становится априорное и достаточно точное знание параметров системы (среды, источника и прочих элементов). Обычно такие параметры определяются в ходе прямых измерений. Во всех прочих случаях отсутствие достоверных данных о геологии грунта отрицательно сказывается на точности прогноза с использованием

сколь угодно точной вычислительной схемы. В докладе предлагается «загрубление» постановки задачи с гарантированной точностью расчета в пределах погрешности, связанной с неточным заданием исходных данных. Будет использоваться приближение «жидкого» грунта, то есть во внимание будет приниматься только объемная упругость среды, переносящей волновые возмущения от подземного источника (например, туннеля метрополитена) к поверхности земли. В этом подходе упругость, связанная со сдвигом будет учитываться при оценке реакции грунта на источник (внешнюю сторону туннеля), а также при учете отражения от свободной поверхности и генерации поверхностной волны Рэлея, которая, как известно, не возникает в среде без сдвиговой упругости. Расчеты и измерения, проведенные в ИМПБ РАН и Туннельной ассоциации России, показывают, что аппроксимация «жидкого грунта» не приводит к значительным ошибкам в прогнозах в случае неизбежной для задачи неопределенности относительно значений исходных параметров. Данное приближение было использовано для расчетов волновых полей в условиях подземных волноводов (в дальней волновой области), а также вблизи источника в ближнем неволновом поле изучаемой среды. В результате имеем приемлемую точность для данной задачи прогноза вибрации и структурного шума на поверхности грунта, а также существенное упрощение вычислений и повышение контролируемости и устойчивости получаемых оценок.

Существует ряд причин, объясняющих, почему метод конечных элементов (МКЭ) не идеален для решения ряда важных практических задач в рассматриваемой области. Когда мы не можем включить в расчётную схему МКЭ все необходимые параметры, а также корректно задать шаг схемы, можно потерять целиком некоторые существенные компоненты прогнозируемого волнового поля (например, коротковолновую поверхностную составляющую). Для формальной оценки, использованного в работе приближения, были проведены тестовые расчеты с простой конечно-элементной моделью среды. Отношение полученных амплитуд вибрации для жидких сред  $w_f$  и почвы со сдвиговой упругостью  $w_r$  представлена на рис. 1 (в логарифмических единицах  $L = 20 \lg \frac{w_f}{w_r}$ ).

Представленная здесь методика расчета прошла большое количество практических проверок на эксплуатируемых участках московского метрополитена.

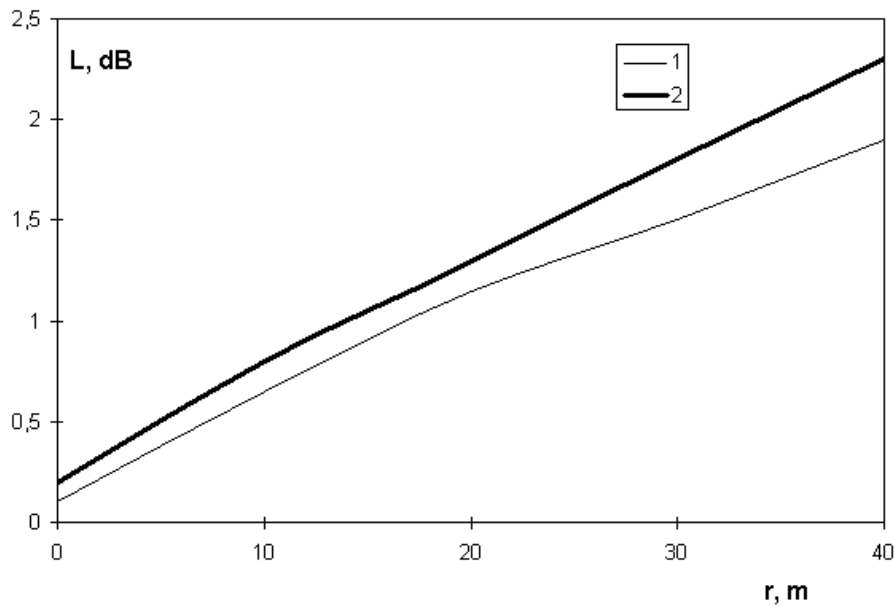


Рис. 1. Соотношение полученных уровней вибрации для жидких сред  $w_f$  (2) и грунта с упругостью  $w_r$  при сдвиге (1) представлено (в логарифмических единицах  $L = 20 \lg \frac{w_f}{w_r}$ ).

$$L = 20 \lg \frac{w_f}{w_r}.$$

*Список литературы:*

1. Музыченко В.В., Рыбак С.А. Низкочастотное рассеяние звука ограниченными оболочками. Обзор. Акуст. журн. Том 34, вып. 4, с. 561 - 577. 1988.
2. Бреховских Л.М., В.В. Гончаров. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982, 336 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 248 с, 1987.
4. Transportation Noise Reference Book / Ed. by P.M.Nelson. - London: Butterworths. 427 p, 1987.
5. Kostarev S.A., Makhortykh S.A., Rybak S.A. Calculations of ground vibrations induced by underground sources: analytical and numerical approaches. – In Noise and vibration from high-speed trains. London, Thomas Telford Publishing, с. 397-422, 2001.



## ПОЧТИ ПРЕДЕЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Д. Маклаков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>КФУ, Казань, *dmaklak@kpfu.ru*

Основы нелинейной теории диспергирующих гравитационных поверхностных волн были заложены Стоксом (1847). Им же было высказано предположение, что предельная волна максимальной амплитуды имеет при вершине угловую точку, содержащую угол в  $120^\circ$ . В последствии справедливость этого предположения была строго доказана Амико и др. (1982). Лонге-Хиггинс и Фокс (JFM 1977, 1978) разработали асимптотическую теорию предельного перехода почти предельных волн к предельным конфигурациям. Неожиданные выводы этой теории были подтверждены Маклаковым (EJAM 2002) на основе прямого численного моделирования.

Для внутренних волн на границе раздела сред вопрос о предельных и почти предельных конфигурациях до настоящего момента оставался открытым даже для простейшего случая двух безграничных жидкостей разной плотности. Этот случай и является предметом настоящего доклада. Рядом ученых (Holyer, JFM 1979; Saffman & Yuen JFM 1982; Turner & Vanden-Broeck, Physics of fluids 1986) было высказано несколько взаимно исключающих предположений относительно предельного перехода.

В представляемом докладе в основном излагаются результаты, полученные в работе [1], где на основе леммы Хопфа строго доказано, что угол наклона касательной к поверхности внутренней волны не может превосходить  $180^\circ$ . Тем самым выдвинут критерий близости волны к предельной. Проведены расчеты почти предельных конфигураций с углом наклона большим, чем  $179.98^\circ$ . Эти грибообразные формы для различных отношений плотностей жидкостей  $\rho$  приведены на рис. 1.

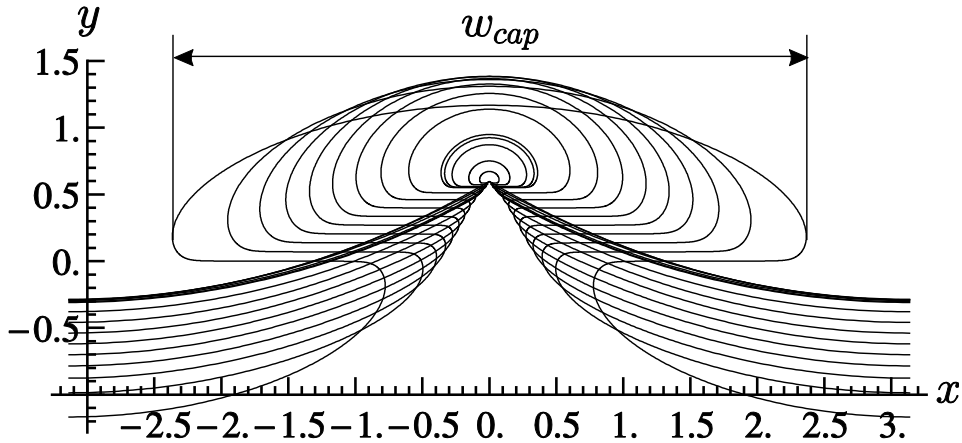


Рис. 1. Почти предельные конфигурации внутренних гравитационных волн:  $\rho = 0.01-1$ . Чем меньше  $\rho$ , тем меньше размеры шляпки гриба.

Для грибообразных форм введено понятие внутреннего горба (точки  $C$  и  $C'$  на рис. 2) и найден естественный масштаб  $l$  для построения внутренних решений. Этим масштабом является расстояние по вертикали от внутреннего горба до горизонтальной линии с уравнением  $y = c^2 / 2$ , где  $c$  – фазовая скорость волны. Показано, что для конфигураций волн, близких к предельным, на уровне  $y = c^2 / 2$  формируется почти горизонтальный участок с углом наклона почти  $180^\circ$ , но все же меньше, чем  $180^\circ$ . Схемы конфигураций почти предельных и предполагаемых предельных волн показаны на рис. 2.

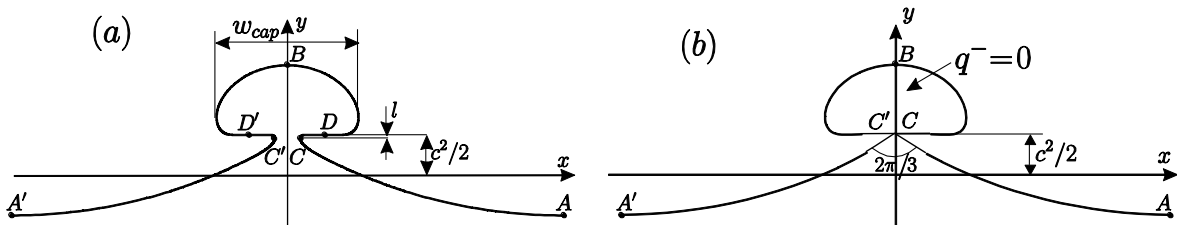


Рис. 2. Почти предельная (a) и предельная (b) конфигурации внутренних волн.

Кроме того, в докладе будут изложены результаты численного анализа теоремы существования, доказанной в статье [2] с помощью топологических методов. Установлено, что введенный в [2] бифуркационный параметр при стремлении его к бесконечности приводит к волнам с углом наклона меньше  $\pi / 2$ . Более того, когда отношение плотностей  $\rho \rightarrow 1$ , волны, существование которых доказано в [2], становятся инфинитизимальными. Таким образом, доказанная теорема не охватывает случая нависающих волн (overhanging waves), и проблема их существования остается открытой.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 18-11-00115.

*Список литературы:*

1. Maklakov, D.V., Sharipov, R.R. J. Fluid Mech. Vol. 856. 673-708, 2018.
2. Sun, S.M. SIAM J. Math. Anal. Vol. 32. No 5. 673-708, 2001.

**ПОСТРОЕНИЕ ВЕБ-ЛАБОРАТОРИИ С  
ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИМ ДОСТУПОМ К НРС-РЕСУРСАМ**

**Маркизов С.Н.<sup>1</sup>, Поляков С.В.<sup>1,2</sup>, Подрыга В.О.<sup>1</sup>,  
Пузырьков Д.В.<sup>1</sup>, Тарасов Н. И.<sup>1</sup>, Толстов И.О.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047,  
Россия, Москва, Миусская пл., 4*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,  
115409, Россия, Москва, Каширское ш., 31*

Повсеместное распространение интернета и появление широкополосного доступа к нему привело к бурному развитию сетевых технологий. Они способствуют переходу от десктопных приложений к более привлекательным веб-решениям. Основными преимуществами последних являются кросс-платформенность, мобильность, а, кроме того, отсутствие жестких требований, налагаемых на пользовательский компьютер, единственным необходимым элементом при этом является наличие современного веб-браузера. В данной работе будет представлен опыт построения образовательной веб-лаборатории. Текущее состояние веб-технологий позволяет строить глубокие, функциональные и интерактивные приложения для пользовательского взаимодействия с удаленными вычислительными ресурсами. При этом использование современных подходов при создании веб-лаборатории позволяет создать удобный интерфейс, экранирующий монотонные действия, связанные с разверткой и управлением исполняемого на вычислителе классического приложения. Это крайне важно в образовательной деятельности, поскольку позволяет сконцентрироваться непосредственно на поставленной задаче, не отвлекаясь на администрирование. Данный подход позволяет создать удобный как для студента, так и для преподавателя веб-инструмент, позволяющий увеличить эффективность и наглядность при изучении

таких дисциплин, как численные методы, математическое моделирование и программирование. В докладе будет представлена система управления вычислительными задачами (WMCS) взятым за ядро системы, а также о технологиях и подходах к созданию веб-оболочки, и о виртуализации на основе контейнеров [1] для развертывания и управления всеми сервисами системы. Непосредственно веб-лаборатория строится на клиент-серверном подходе, с использованием фреймворка Django [2] в части серверной логики и управления базой данных, а также Vue.js [3] в качестве части клиентского интерактивного интерфейса.

*Список литературы:*

1. Enterprise Container Platform | Docker [Электронный ресурс] . URL: <https://www.docker.com/> (дата обращения: 27.06.2019).
2. Django: The Web framework for perfectionists with deadlines [Электронный ресурс]. URL: <https://www.djangoproject.com/> (дата обращения: 27.06.2019).
3. Vue.js [Электронный ресурс]. URL: <https://vuejs.org/> (дата обращения: 27.06.2019).

## SOLVING AIRFLOW PROBLEMS OF BODIES WITH POROUS INSERTS

I. Menshov<sup>1</sup>, A. Severin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*KIAM RAS, Moscow, menshov@kiam.ru*

<sup>2</sup>*KIAM RAS, Moscow, severin@kiam.ru*

A 3D parallel solver has been developed for problems with gas flow through a porous media using an implicit LU-SGS method. [1]

The motion of gas in a porous medium is described on the basis of the Nigmatulin continual model [3] using the equations of the liquid component in the Baer-Nunziato model [2], provided that the velocity of the solid component is zero.

Turbulence is modeled using the Spalart-Allmaras model. Thermal conductivity and heat capacity of the solid phase are taken into account. Despite the high thermal conductivity of a solid media, the implicit method maintains stability when the Courant number is 3 orders of magnitude or more.

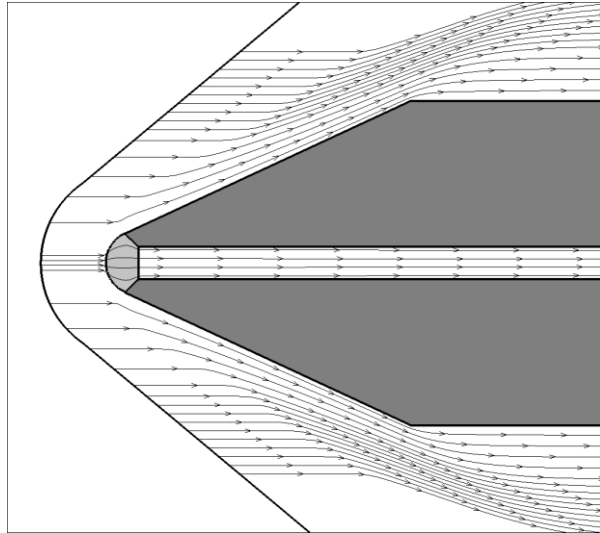


Fig. 1. Current lines when wrapping around a cone with a porous insert.

### *References*

1. Menshov I., Nakamura Y., "Hybrid Explicit-Implicit, Unconditionally Stable Scheme for Unsteady Compressible Flows," *AIAA Journal*, Vol. 42, No 3, 2004.
2. Baer M., Nunziato J., "A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 12, 1986.
3. Nigmatulin R., "Dynamics of multiphase media," Hemisphere Publ. Corp., Vol. I, 1991.
4. Rochette D., Clain S., Buffard T., "Numerical Scheme to Complete a Compressible Gas Flow in Variable Porosity Media," *Int. Jour. of Comp. Fluid Dynamics*, Vol. 19, No 4, 2005.
5. Fomin V., Zapryagaev V., Lokotko A., Volkov V., Lutskaa A., Men'shov I., Maksimov Yu., Kirdyashkin A., "Aerodynamic characteristics of a body of revolution with gas-permeable surface areas," *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol.51, 2010.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ МОДЕЛЕЙ ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ

Ю.М. Нечепуренко<sup>1,2</sup>, М.Ю. Христиненко<sup>1</sup>, Е.В. Склярова<sup>1</sup>,

Д.С. Гребенников<sup>1,2</sup>, Г.А. Бочаров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*ИПМ им М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

*yumnech@yandex.ru, misha.hrist@gmail.com, dmitry.ew@gmail.com*

<sup>2</sup>*ИВМ им Г.И. Марчука РАН, Москва Россия bocharov@m.inm.ras.ru*

Многие вирусные инфекции, например, вызванные вирусами гепатита и иммунодефицита, относятся к числу инфекций, наиболее опасных для человека. Для анализа механизмов развития вирусных заболеваний широко используют математические модели, представляющие собой системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [1,2]. Эти модели обычно калибруют по данным острых форм динамики вирусных заболеваний. В то же время они могут быть использованы и для исследования более сложных для лечения хронических форм. Однако этот потенциал моделей до сих пор практически не реализован, что, в частности, связано с тем, что нахождение всех возможных стационарных состояний заданной модели, которые соответствуют хроническим формам, оказалось нетривиальной задачей, и до недавнего времени алгоритмы ее решения известны не были.

Доклад посвящен предложенной в работах [3,4] технологии гарантированного вычисления всех стационарных состояний заданной модели вирусного заболевания при фиксированных значениях параметров и анализу их устойчивости. Для примера рассматриваются модель динамики инфекции, вызванной вирусом лимфоцитарного хориоменингита, и модель противовирусного иммунного ответа Марчука-Петрова. Эти модели имеют следующие особенности: логистическое описание роста вирусной нагрузки, взаимодействие «вирус-организм хозяина» типа Лотка-Вольтерра с функциональным ответом в форме колокола, ограниченное экспоненциальное выражение для гомеостаза иммунных клеток и задержки иммунной реакции. Предлагаемая технология для моделей с такими свойствами обеспечивает надежное вычисление всех стационарных состояний в рассматриваемой области параметров и использует алгебраический подход для анализа их устойчивости. При анализе устойчивости ведущие собственные значения соответствующей нелинейной проблемы собственных значений вычисляются для каждого нового значения параметра путем решения полной проблемы собственных значений для рациональной аппроксимации исходного нелинейного

матричного пучка и уточнения вычисленных приближенных ведущих собственных значений локальным методом. Это гарантирует, что собственное значение с максимальной действительной частью всегда вычисляется правильно.

Следует отметить, что в настоящее время существуют численные пакеты DDE-BIFTOOL [5,6], knut (ранее PDDE-CONT) [7] и TRACE-DDE [8], которые реализуют различные методы расчета стационарных состояний и анализа их устойчивости для систем с запаздыванием более общих форм, чем модели вирусных инфекций (например, систем с задержками, зависящими от состояния). Первый пакет предназначен для бифуркационного анализа. Он позволяет трассировать стационарные состояния вдоль параметров, начиная с заданного начального стационарного состояния. Однако проблему гарантированного вычисления всех стационарных состояний его авторы не рассматривали. Проблемы собственных значений решаются с помощью одновременных итераций, основанных на решении задач Коши для соответствующих линейризованных уравнений. Второй пакет предназначен для анализа периодических решений. Стационарные состояния рассматриваются как постоянные периодические решения. Третий пакет не предназначен для поиска или трассировки стационарных состояний. Он позволяет находить области устойчивости заданного стационарного состояния по двум варьируемым параметрам. Для решения проблем собственных значений используется аппроксимация инфинитезимального генератора для линейризованных уравнений методом коллокаций на чебышевской сетке.

Не исключено, что на основе вышеупомянутых пакетов можно разработать другую технологию, которая также автоматически (без ручной работы) позволит вычислять все стационарные состояния заданной модели вирусной инфекции с запаздыванием как функций параметров модели и исследовать их устойчивость, но на сегодняшний день единственной технологией, которая решает вышеуказанную проблему, является технология, которой посвящен данный доклад.

Разработка и реализация используемых алгоритмов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 17-71-20149), численный анализ моделей вирусных инфекций выполнен при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 18-11-00171).

#### *Список литературы:*

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в иммунологии и медицине. Избранные труды. Т. 4. Российская академия наук, Институт вычислительной математики: Москва. с. 650, 2018.

2. Bocharov G., Volpert V., Ludewig B., Meyerhans A. *Mathematical Immunology of Virus Infections*. Springer: Cham, 2018.

3. Нечепуренко Ю.М., Христинченко М.Ю., Гребенников Д.С., Бочаров Г.А. Анализ бистабильности моделей вирусных инфекций с запаздывающим аргументом // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. № 17. с. 26. 2019.

4. Склярова Е.В., Нечепуренко Ю.М., Бочаров Г.А. Анализ бистабильности моделей вирусных инфекций с запаздывающим аргументом // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. № 39. 26 с. 2019.

5. Engelborghs E., Luzyanina T., Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // *ACM Trans. Math. Softw.* V.28. p.1-21. 2002.

6. Sieber J., Engelborghs K., Luzyanina T., Samaey G., Roose D. DDE-BIFTOOL Manual - Bifurcation Analysis of Delay Differential Equations, preprint, arXiv:1406.7144.

7. Roose D., Szalai R. Continuation and bifurcation analysis of delay differential equations/ *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path Following and Boundary Value Problems*, Springer: Dordrecht, p. 359–399, 2007.

8. Breda D., Maset S., Vermiglio R. TRACE-DDE: a tool for robust analysis and characteristic equations for delay differential equations / *Topics in Time Delay Systems: Analysis, Algorithms and Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer: Berlin Heidelberg, p. 145-155, 2009.



## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОИСТЫХ И БЛОЧНЫХ СРЕД С НЕЛИНЕЙНЫМИ КОНТАКТНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**И.С. Никитин<sup>1</sup>**, Н.Г. Бураго<sup>2</sup>, В.И. Голубев<sup>3</sup>, А.Д. Никитин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва,  
i\_nikitin@list.ru*

<sup>2</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,  
buragong@yandex.ru*

<sup>3</sup>*Московский Физико-Технический Институт (НИУ), Москва,  
w.golubev@mail.ru*

Континуальные модели деформируемых твердых сред с дискретным набором плоскостей скольжения могут быть получены методом асимптотического осреднения или с помощью дискретного варианта теории скольжения. Ранее было показано, что системы уравнений нулевого приближения, построенные методом асимптотического осреднения (гомогенизации), совпадают с континуальными системами уравнений, полученными на основе теории скольжения.

В данной работе с использованием теории скольжения построены континуальные модели деформируемых твердых сред с дискретным набором плоскостей скольжения (слоистые, блочные среды) и с нелинейными условиями проскальзывания на контактных границах структурных элементов. Во всех этих случаях в определяющие соотношения системы входят уравнения с нелинейным свободным членом и малым временем релаксации напряжений. Для устойчивого численного решения системы дифференциальных уравнений предложен явно- неявный метод с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов. Из неявных нелинейных разностных аппроксимаций аналитически, с использованием метода возмущений получены различные эффективные формулы корректировки компонент напряжений после «упругого» шага по времени.

Для расчета «упругого» шага использован сеточно-характеристический метод на гексаэдральных сетках. Для монотонизации был использован сеточно-характеристический критерий монотонности, опирающийся на характеристическое свойство точного решения модельного уравнения переноса. Использование этого метода позволило существенно увеличить точность и скорость расчётов, и провести моделирование нестационарных трёхмерных задач о

рассеянии упругих волн и формировании отклика от ориентированного слоистого или блочного трещиноватого кластера, расположенного в однородной упругой среде. Приведены примеры расчетов волновых картин, а также развития зон скольжения и отслоения в слоистых и блочных массивах при нестационарных воздействиях.

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 19-71-10060.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ВИХРЕВОГО СЛЕДА ВЕТРОУСТАНОВКИ

А. Осипов<sup>1</sup>, К. Кошелев<sup>1</sup>, С. Стрижак<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИСП РАН, Москва,

*hitzig@yandex.ru, koshelevkb@mail.ru, strijhak@yandex.ru*

В связи со строительством новых ветропарков на территории РФ изучение вихревых следов от ветроустановок является актуальной задачей. Так как многие ветроэлектрические установки (ВЭУ) расположены в следе других ВЭУ, то они испытывают дефицит скорости в набегающем потоке. Поэтому следы от ВЭУ влияют на падение вырабатываемой мощности в ветропарках. В последнее время исследования научных коллективов были направлены на разработку аналитических, численных и экспериментальных методов для моделирования и изучения динамики вихревых следов, оценки параметров турбулентности. Несмотря на то что численные и экспериментальные методы стали более точными, простые аналитические методы и модели остаются полезным инструментом для расчета параметров вихревых следов и оценки их влияния на выработку электроэнергии в ветропарках. Аналитические модели являются более простыми и требуют меньших вычислительных ресурсов. Одна из первых аналитических моделей для вихревого следа была разработана N. Jensen в работе [1]. В данной работе было предложено использовать модель "верхней шапки" для значения безразмерной скорости в следе ВЭУ, форма и профиль которой представлена на Рисунке 1 слева. Значение безразмерного дефицита скорости было записано в виде:

$$\frac{\Delta U}{U_\infty} = (1 - \sqrt{1 - C_t}) / \left(1 + \frac{2k_{wake}x}{d_0}\right)^2, \quad (1)$$

где  $U_\infty$  - скорость набегающего потока,  $C_t$  - коэффициент осевой силы тяги ВЭУ,  $d_0$  - диаметр лопасти ВЭУ,  $x$  - расстояние в следе за ВЭУ,

$k_{wake}$  - коэффициент, характеризующий скорость расширения следа.  
 $k_{wake} = 0.075$ .

Данная модель активно использовалась в литературе и в коммерческом программном обеспечении (WasP, WindPRO, WindSim). Однако в этой модели существовало два недостатка: 1) предположение о распределении профиля скорости являлось недостоверным; 2) для вывода уравнения (1) использовался только закон сохранения массы.

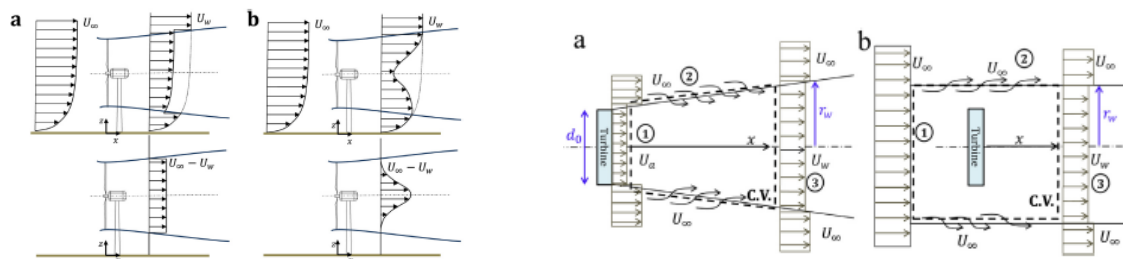


Рис.1 Профиль скорости за ВЭУ      Рис.2 Пример контрольного объема

В последствии S.T. Frandsen применил уравнения сохранения массы и количества движения для контрольного объема вокруг ветроустановки (Рис.2) и предложил новое выражение для значения безразмерного дефицита скорости в следе за ВЭУ в работе [2].

Вихревые следы за телами в свободном потоке активно исследовались в теории сдвиговых течений. В этих исследованиях был обнаружен автомодельный профиль Гаусса для профиля скорости (Рис. 1). Автомодельный профиль Гаусса для профиля скорости также был обнаружен в экспериментах в аэродинамических трубах, в численных расчетах, в измерениях в действующих ветропарках. Новая модель с автомодельным профилем Гаусса была получена на основе решения аналитических и интегральных уравнений в работе [3]. Данная модель учитывала расположение оси гандолы ВЭУ  $z_h$ .

В данной работе проводится расчет для модельной ветроустановки по различным аналитическим моделям. Данные по размерам ВЭУ  $d_0 = 0.15$  метра,  $z_h = 0.125$  метра, для скорости набегающего потока  $U_\infty = 2.2$  м/с, для коэффициента  $C_t = 0.42$ , для значения  $z_0$  (коэффициент шероховатости поверхности) взяты из эксперимента в аэродинамической трубе по работе [4].

В результате расчета было проведено сравнение результатов для величины нормализованной скорости на высоте ветроколеса ВЭУ в зависимости от безразмерной координаты с результатами эксперимента. Наиболее достоверные данные получены с использованием модели с автомодельным профилем Гаусса для значения безразмерного дефицита скорости в зависимости от безразмерной координаты в следе за ВЭУ.

В дальнейшем планируется использовать данный подход для расчета параметров течения в ветропарках, строящихся в Ульяновской области РФ, в Республике Адыгея и в Республике Саха.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-01391.

*Список литературы:*

1. Jensen, N. A note on wind turbine interaction. Technical report Ris-M-2411. Roskilde, Denmark: Risø National Laboratory. 1983.
2. Frandsen, S.T., Barthelmie, R.J., Pryor, S., Rathmann, O., Larsen, S., Højstrup J, et al. Analytical modelling of wind speed deficit in large off-shore wind farms. *Wind Energy*, Vol. 9:39e53, 2006.
3. Bastankhah, M. and Porte-Agel, F. A new analytical model for wind-turbine wakes. *Renewable Energy*. Vol. 70, 116-123, 2014.
4. Chamorro, L.P., Porté-Agel, F. Effects of thermal stability and incoming boundary-layer flow characteristics on wind-turbine wakes: a wind-tunnel study. *Bound-Layer Meteorol*. Vol. 136:515e33, 2010.

## **СПЕКТРАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ ПОВТОРОВ В СИГНАЛАХ**

**А.Н. Панкратов, Н.М.Панкратова**

*ИМПБ РАН – филиал ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, Пущино,  
{pan,pnm}@impb.ru*

Настоящая работа посвящена обзору возможностей спектрально-аналитического подхода к вопросам распознавания повторов в различных сигналах. Исходно спектрально-аналитический подход относится к численно-аналитическим методам решения задач математической физики. Основным предложением является использование аппарата численной аппроксимации и аналитических преобразований для решения информационных задач.

Одной из наиболее общих постановок информационных задач является задача о распознавании повторов в сигналах. Эта задача является исследованием над попарным сравнением объектов или их фрагментов.

Эта задача была поставлена и выполнена для актуального направления биоинформатики – поиска протяженных повторов в

генах [1]. Этот подход был также применен к исследованию повторов в пространственных структурах белковых молекул [2]. Затем последовало естественное обобщение находить повторы в аминокислотных последовательностях [3]. Также были произведены попытки решения задачи нахождения повторов в многоканальных сигналах электрической активности мозга.

Проведенные исследования поставили вопросы обоснования метода и исследования качества его результатов. Были выявлены основные свойства метода: универсальность, адаптивность, масштабируемость и эффективность.

Работа частично поддержана грантом РФФИ №17-07-00677а.

#### *Список литературы:*

1. Панкратов А.Н., Пятков М.И., Тетуев Р.К., Назипова Н.Н., Дедус Ф.Ф. Поиск протяженных повторов в геномах на основе спектрально-аналитического метода. Математическая биология и биоинформатика. Т.7. №2. с. 476 – 492, 2012.

2. Руднев В.Р., Панкратов А.Н., Куликова Л.И., Дедус Ф.Ф., Тихонов Д.А., Ефимов А.В. Распознавание и анализ устойчивости структурных мотивов типа а-а-уголок в глобулярных белках. Математическая биология и биоинформатика. Т.8. №2. с.398–406, 2013.

3. Панкратов А.Н., Тетуев Р.К., Пятков М.И., Тойгильдин В.П., Попова Н.Н. Спектрально-аналитический метод распознавания неточных повторов в символьных последовательностях. Труды Института системного программирования РАН. Т.27. №6. с. 335 – 344, 2015.

## **ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**А.Г. Петров**

*Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН*

Доклад посвящен конструированию численных схем без насыщения для линейных операторов, действующих на периодические функции. Понятие насыщаемости и ненасыщаемости численной схемы введено К. И. Бабенко. В зависимости от числа узлов сетки  $N$  погрешность насыщаемых численных схем убывает по степенному закону  $N^{-k}$ , тогда как в схеме без насыщения она убывает значительно

быстрее по экспоненциальному закону  $\text{Exp}(-C N)$ . Предлагается общий метод конструирования схем без насыщения. В качестве примеров выведены формулы без насыщения для вычисления производных, интегралов, интерполяции и интегральных операторов с логарифмической особенностью.

Рассматриваются приложения к построению схем без насыщения для решения общих краевых задач для гармонического и бигармонического уравнений на плоскости. Для этого используется интегральное уравнение на произвольном гладком замкнутом граничном контуре. Интегральные операторы действуют на функции, определенные на контуре и имеющие естественный период, равный длине контура. При увеличении числа узлов сетки по арифметической прогрессии погрешность решения по схеме без насыщения убывает по геометрической прогрессии. Предлагаемый метод иллюстрируется на ряде примеров решений краевых задач с приложениями к механике.

## **RECENT YEARS ACHIEVEMENTS IN THE THEORY OF STATIONARY NAVIER-STOKES EQUATIONS**

**Konstantin Pileckas**

*Institute of Applied Mathematics, Vilnius University, Vilnius, Lithuania*  
*konstantinas.pileckas@mif.vu.lt*

All results of this presentation were obtained jointly with M. Korobkov and R. Russo.

In the first part of the talk, I will present recent results on the Leray problem (1933) for the nonhomogeneous boundary value problem for the steady Navier-Stokes equations in a bounded domain with multiple connected boundary. The boundary conditions are assumed only to satisfy the necessary requirement of zero total flux. It is proved that the problem is solvable in arbitrary bounded planar or three-dimensional axially symmetric domains. The proof uses Bernoulli's law for weak solutions of the Euler equations and a generalization of the Morse-Sard theorem for functions in Sobolev spaces.

In the second part of the talk, I will discuss the existence results for the steady Navier-Stokes equations in two- and three-dimensional exterior domains with multiply connected boundaries (in the three-dimensional case under the assumption of axial symmetry) and nonhomogeneous boundary conditions. We prove that for 3D case, this problem has a solution for axially symmetric data without any restrictions on the fluxes of the boundary value. For the two-dimensional case the problem with nonhomogeneous boundary

conditions admits at least one solution with finite Dirichlet integral if the total flux of the boundary value is zero.

Finally, I will discuss the properties of the arbitrary solutions with the finite Dirichlet integral of the two-dimensional exterior problem for the stationary Navier-Stokes equations. It will be shown that such solutions are bounded and uniformly converge to a constant vector at infinity. Moreover, we prove that the Leray's solution to the obstacle problem (flow past a prescribed body) is always nontrivial. By Leray's solutions we understand the ones obtained by the method of „invading domains “. Denoting by  $\mathbf{u}_k$  the solution to the Navier-Stokes problem on the intersection  $\Omega_k$  of the domain  $\Omega$  with the disk  $B_k$  of radius  $k$ , J. Leray showed that the sequence  $\{\mathbf{u}_k\}$  has uniformly bounded Dirichlet integral. Hence, it is possible to extract a subsequence which weakly converges to the solution  $\mathbf{u}_L$  of the Navier-Stokes problem in the exterior domain  $\Omega$ . This solution was later called Leray's solution. However, if its limit at infinity is zero, this solution is trivial:  $\mathbf{u}_L$  is identically zero. So, our results exclude this possibility.

### *References*

1. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. Leray's plane steady state solutions are nontrivial, *Advances in Mathematics*, submitted.
2. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. On the steady Navier-Stokes equations in 2D exterior domains, *J. Differential Equations*, submitted.
3. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. On Convergence of Arbitrary D-Solution of Steady Navier-Stokes System in 2D Exterior Domains, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 233, issue 1, 385-407, 2019.
4. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. The existence theorem for the steady Navier-Stokes problem in exterior axially symmetric 3D domains, *Mathematische Annalen*, Vol. 370, issue 1-2, 727-784, 2018 .
5. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. Leray's Problem on Existence of Steady State Solutions for the Navier-Stokes Flow, *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics*, Y. Giga, A. Novotny (eds.), Springer, 1-50, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-10151-4\_5-1
6. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. Solution of Leray's problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains, *Annals of Mathematics*, Vol. 181, issue 2, 769-807, 2015.
7. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. An existence theorem for steady Navier–Stokes equations in the axially symmetric case, *Annali Della*

Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, Vol. 14, issue 1, 233-262, 2015.

8. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. The existence of a solution with finite Dirichlet integral for the steady Navier-Stokes equations in a plane exterior symmetric domain, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, Vol. 101, issue 3, 257-274, 2014.

9. Korobkov, M.V., Pileckas, K., Russo, R., Pukhnachev, V.V. The flux problem for the Navier–Stokes equations, *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 69, issue 6, 1065-1122, 2014.

10. Korobkov, M., Pileckas, K., Russo, R. On the flux problem in the theory of steady Navier-Stokes Equations with nonhomogeneous boundary conditions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 207, issue 1, 185-213, 2013.

11. Pileckas, K., Russo, R. On the existence of vanishing at infinity symmetric solutions to the plane stationary exterior Navier-Stokes problem, *Mathematische Annalen*, Vol. 352, issue 3, 643-658, 2012.

## **ТОЧНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ДВИЖЕНИЯ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ**

**В.В. Пухначев**

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,*

*Новосибирский государственный университет*

*E-mail: pukhnachev@gmail.com*

Исследуются математические свойства трех моделей движения водных растворов полимера: модель Войткунского, Амфилохиева и Павловского (1970), ее модификация в предельном случае малых времен релаксации (Павловский, 1971) и модель жидкости 2-го порядка (Ривлин и Эриксен, 1955). Изучены нестационарные слоистые движения во всех трех моделях. В первом случае их уравнения тождественны уравнениям акустики вязкого газа при подходящем соответствии параметров моделей. В двух других случаях возможно образование слабых разрывов, которые сохраняются в процессе движения. Найдено семейство точных решений, описывающих стационарные и нестационарные плоские и осесимметричные движения



около критической точки. Соответствующие им уравнения имеют двойное вырождение за счет обращения в нуль коэффициента при старшей производной на стенке и за счет малости параметра релаксационной вязкости, входящего в этот коэффициент. Оказалось, что две эти сингулярности нейтрализуют друг друга, и полученные решения не содержат функций типа пограничного слоя. Построено точное решение, которое описывает течение в полупространстве, индуцированное вращением твердой плоскости (аналог классического вихря Кармана). Рассмотрены задачи о движении раствора в цилиндрической трубе произвольного сечения под действием продольного градиента давления. Здесь существуют течения с прямолинейными траекториями, аналогичные течению Пуазейля в первых двух моделях с давлением, не зависящим от поперечных координат. В третьей же модели прямолинейность траекторий сохраняется, однако здесь давление зависит от всех трех пространственных переменных. Для периодических по времени движений градиент давления в поперечных направлениях колеблется с удвоенной частотой по сравнению с частотой колебаний продольного градиента. Такая же ситуация имеет место и в задаче о движении раствора полимера во внешности круглого цилиндра, вызванном его продольными периодическими колебаниями.

## О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ

**Е.В. Радкевич<sup>1</sup>, О.А. Васильева<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*МГУ им. М.В. Ломоносова, evrad07@gmail.com*

<sup>2</sup>*НИУ МГСУ, vasiljeva.ovas@yandex.ru*

Для ламинарно-турбулентного перехода построена модель реконструкции начальной стадии неустойчивости как неравновесного перехода, механизмом которого является диффузионное расслоение. Показано, что свободная энергия Гиббса отклонения от однородного состояния (относительно рассматриваемой неустойчивости) есть аналог потенциала Гинзбурга–Ландау.

Проведены численные эксперименты самовозбуждения однородного состояния управлением краевым условием возрастания скорости. Численным экспериментом установлено возникновение ламинарно-турбулентного перехода и его развитие от регулярных форм (так называемых диссипативных структур) с последующим переходом к нерегулярным течениям через хаотизацию процесса. Под внешним воздействием (возрастание скорости) наблюдается переход к хаосу

через бифуркации удвоения периода подобно каскаду удвоений периода Фейгенбаума.

Хаотизация процесса трансформирует регулярные формы (диссипативные структуры) в двухскоростной режим (режим двух ударных волн), названный Пригожиным катастрофой Римана. Эта трансформация существенно зависит от гравитации. Установлена нелокальность возмущения, что указывает на невозможности применения в этом случае классической теории возмущения.

## STEADY STATES OF COMPRESSIBLE FLUID AND THEIR STABILITY

O.S. Rozanova<sup>1</sup>, M.K. Turzynski<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*MSU, Moscow, rozanova@mech.math.msu.su*

<sup>2</sup>*MSU, Moscow, m13041@yandex.ru*

We study the possible stationary states in two-dimensional compressible media in a uniformly rotating reference frame and their nonlinear stability. This question is very important for modeling meteorological processes.

First we consider affine motion, where the velocity components are linear with respect to the spatial coordinates. This motion can be completely described by a quadratic non-linear system of ODEs. We study the equilibria of this system and their stability under various assumptions in the class of affine perturbations. The equilibria correspond to the stationary states of the original model. There are two families of stationary states: shifts (two-parameter) and vortices (one-parameter). It is shown that the vortices can be stable under certain conditions on the parameters, whereas the shifts are always unstable. Moreover, with a small disturbance, the shift basically either blows up or transforms into a vortex. We will also consider several subclasses of affine motion, where the system can be integrated.

Further, we consider a more general class of isolated steady vortices, containing decaying at infinity and compactly supported vortices as particular cases. At every point of the plane, this isolated steady vortex can be approximated by a solution with a linear profile of velocity. Thus, at every point of the plane, there arises a nonlinear system of ODEs with initial data generated by derivatives of the steady vortex state. It is hypothesized that if at every point the solution to this ODEs system falls in the domain of attraction of equilibrium, then the steady vortex is nonlinearly stable. We compare this nonlinear stability hypothesis with the Rayleigh criterium of

linearized stability with respect to radial perturbation. In particular, we find that the rotation has a stabilizing effect.

### *References*

1. Rozanova, O., Turzynsky, M. The stability of vortices in gas on the l-plane: the influence of centrifugal force, in press (ArXiv e-prints, № 1901.08484)
2. Rozanova, O., Turzynsky, M. Nonlinear stability of localized and non-localized vortices in rotating compressible media, Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, v. 236, 567-580

## **АЛГОРИТМ ПРЕДСКАЗАНИЯ СТРУКТУРНЫХ МОТИВОВ ТИПА АЛЬФА-АЛЬФА-УГОЛОК С КОРОТКОЙ ПЕРЕТЯЖКОЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО ТИПА ПО АМИНОКИСЛОТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

**В.Р. Руднев<sup>1</sup>, Д.А. Тихонов<sup>2</sup>, Л.И. Куликова<sup>2</sup>, А.В. Ефимов<sup>3</sup>,  
М.Ю. Губин<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН,  
Пушино, Московская область, Россия, volodyarv@mail.ru*

<sup>2</sup>*Институт математических проблем биологии РАН – филиал ИПМ  
им. М.В. Келдыша РАН, Пушино, Московская область, Россия,  
dmitry.tikhonov@gmail.com, likulikova@mail.ru*

<sup>3</sup>*Институт белка РАН, Пушино, Московская область, Россия,  
efimov@protres.ru*

<sup>4</sup>*Национальный исследовательский Томский политехнический  
университет, Томский политехнический университет, mgubin@tpu.ru*

Предсказание вторичной структуры белка по его первичной структуре является актуальной и сложной задачей. Данная работа направлена на исследование частного случая предсказания супервторичной структуры в глобулярных белках по аминокислотной последовательности, а именно предсказание структур, образующих в качестве супервторичной структуры  $\alpha$ -уголок. В качестве подхода к решению данной задачи было предложено использование машинного обучения с учителем. Для предсказания данного вида структуры белковых молекул предполагается использовать ансамбль моделей

машинного обучения, основанных на различных подходах. Прототип системы представляет собой одну модель машинного обучения с использованием метода опорных векторов, в дальнейшем предполагается расширение ансамбля другими моделями. На данном этапе проводится исследование с целью выбора оптимального метода объединения результатов ансамбля моделей в конечный результат. Рассматриваются такие варианты, как бустинг, беггинг, и комбинированный подход BagBoost. [1] На момент публикации, в ансамбле недостаточно моделей для постановки эксперимента по выбору предпочтительного типа объединения результатов, ведется работа по созданию дополнительных моделей. В качестве входных данных моделей будет использована первичная структура белковых молекул, дополненная данными по гидрофильности аминокислот, статистикой по встречаемости аминокислот в белке, а также статистикой встречаемости пар и троек аминокислот. [2] Для дальнейшего развития модели предполагается переход к более длинным цепочкам аминокислот, вплоть до 13 элементов. [3]

Реализованная на данный момент модель представляет собой классификатор белков на альфа-уголки и не-альфа-уголки, основанный на методе опорных векторов.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-07-01031.

#### *Список литературы:*

1. Бурнаев Е. В., Приходько П. В. Об одной методике построения ансамблей регрессионных моделей // Автоматика и телемеханика. №. 10. С. 36-54. 2013.
2. Тихонов Д. А., Куликова Л. И., Ефимов А. В. Исследование межспиральных углов в структурных мотивах, образованных двумя спиральями // Математическая биология и биоинформатика. Т. 12. №. 1. С. 83-101. 2017.
3. Hua S., Sun Z. A novel method of protein secondary structure prediction with high segment overlap measure: support vector machine approach // Journal of molecular biology. Т. 308. №. 2. С. 397-407. 2001.

## SOME FACTS THAT AFFECT THE CONCEPTION OF GENERALIZED SOLUTIONS TO SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

**Yu. G. Rykov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, rykov@keldysh.ru*

Consider the 1D system of quasilinear conservation laws,  $i = 1, \dots, n$

$$U_t + F(U)_x = 0; U(t, x) \equiv \{u_i(t, x)\}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where the subscripts  $t$  and  $x$  denote the corresponding partial derivatives,  $F$  is a sufficiently smooth (at least of class  $C^1(\mathbb{R}^n)$ ) vector function of variables  $\{u_i(t, x)\}$ . In general two classes of methods are used for the investigation of existence and uniqueness of the weak solutions to (1): vanishing viscosity method and approximate solutions method. The most interesting results in this direction in the last decades are obtained via vanishing viscosity method but still there is no more or less complete theory even for 1D systems in case of large initial data. Moreover, there exist a couple of facts that show certain inadequacy in vanishing viscosity method.

First, it is known that there exist strictly hyperbolic, genuinely nonlinear systems of conservation laws that have no classical weak solutions to Riemann problem (2)

$$u_t + (u^2 - v)_x = 0, v_t + (u^3 / 3 - u)_x = 0, \quad (2)$$

and the application of vanishing viscosity method gives the emergence of  $\delta$ -functions along the shock lines [1], which seems inappropriate for nonlinear systems.

Second, in the recent work [2] new type of estimates for divergence-free positive tensors is obtained, which cannot be maintained when passing from Navier-Stokes to Euler system. Such estimates in 1D case include certain estimate of integral of  $\rho P$  ( $\rho$  - density,  $P$  - pressure) and in fact also rules out the possibility of  $\delta$ -functions in  $\rho$ .

From the vast variety of works on conservation laws it is possible to conjecture that certain new approaches are necessary that are not connected with the vanishing viscosity method. Let propose an example of such approach. Instead of (1) consider either of the functionals  $J: \chi(\tau) \in C^1([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $I: \chi(\tau) \in C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &\equiv \int_0^T \mathbf{L}(\dot{\chi}, \mathbf{U}) d\tau; \mathbf{L}(\dot{\chi}, \mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}(\tau, \chi(\tau)) \dot{\chi}(\tau) - \mathbf{F} \circ \mathbf{U}(\tau, \chi(\tau)) \\
\mathbf{I} &\equiv \int_0^T \mathbf{M}(\mathbf{U})(\tau, \chi(\tau)) d\tau \equiv \int_0^T \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau}(\tau, \chi(\tau)) + \mathbf{F} \circ \mathbf{U}(\tau, \chi(\tau)) \right] d\tau, \quad (3)
\end{aligned}$$

where  $\mathbf{V}(t, x) \equiv \int \mathbf{U}(t, p) dp$ . Then it is possible to name the function  $\mathbf{U}(t, x)$  the weak solution to system (1) if either variations of the functionals (3)  $\delta \mathbf{J} = 0$  or  $\delta \mathbf{I} = 0$  for all trajectories  $\chi(\tau)$ , where corresponding variation exists. It is shown in [3] that the condition  $\delta \mathbf{J} = 0$  is equivalent to the conventional concept of weak solution for the functions  $\mathbf{U}(t, x)$  with simple structure. Also it is shown that the approach in general could be extended to multidimensional case.

Described view supposes the application of variational methods, for example [4], in order to prove existence and uniqueness theorems for the systems of quasilinear conservation laws rather than the conventional methods of apriori estimates.

The work is supported by Russian Science Foundation, grant No. 19-71-30004.

### *References*

1. Keyfitz, B.L. *Confluentes Math.* Vol. 3. 445-470, 2011.
2. Serre, D. *Annales de l'Institut Henri Poincare.* Vol. 35. 1209-1234, 2018.
3. Rykov, Yu.G. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* Vol. 301. 213-227, 2018.
4. Struwe, M. *Variational methods. Applications to nonlinear PDEs and Hamiltonian systems.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.

## ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МЕТОДЕ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ SPH

**В.С. Рыкованов, Ф.А. Сапожников**

*RFNC-VNIITF, Snezhinsk, v.s.rykovanov@vniitf.ru*

В РФЯЦ-ВНИИТФ развивается трёхмерный параллельный программный комплекс Молох [1] для задач «миллиардного класса» с высокой степенью параллельности, основанный на понятии «частицы», используемом на микроуровне (метод молекулярной динамики) и макроуровне (метод SPH).

SPH применяется для моделирования газов и конденсированных сред, поэтому представляет интерес решение уравнения теплопроводности на частицах.

Отрицательной особенностью SPH является снижение качества разностного приближения при последовательном применении к нему операторов дифференцирования по пространству. В SPH для оператора  $\nabla^2$ , также называемого лапласианом, разработаны разностные приближения повышенного порядка точности [2, 3], поэтому использование правой части тождества  $\nabla(\kappa\nabla T) \equiv \frac{1}{2}(\nabla^2(\kappa T) - T\nabla^2\kappa + \kappa\nabla^2T)$ , предпочтительнее двукратного дифференцирования в левой части.

Для эффективного массового распараллеливания вычислительной нагрузки, учитывая требования к количеству частиц в расчётах и ёмкость разностного шаблона в 3D SPH, предпочтение отдаётся явным схемам [4, 5].

Явная разностная схема накладывает строгое ограничение на шаг по времени. Семейство явно-итерационных схем [6, 7] лишено ограничения на шаг по времени, но предъявляет требования к числу итераций в рамках осуществления одного шага. Также важно свойство монотонности, наблюдаемое у схемы, основанной на полиномах Ланцоша [6], и схемы ЛИ-М [7].

Для метода SPH из соображений простоты алгоритма была выбрана схема, основанная на полиномах Ланцоша [6]. Хотя схема ЛИ-М [7] обладает небольшим (~10%) преимуществом в числе итераций.

Оценка качества работы схемы была проведена на двух модельных задачах теплопроводности неподвижных частиц:

1) с постоянным  $\kappa$  и постоянными граничными условиями первого рода;

2) с  $\kappa \sim T^8$ , и левым граничным условием  $T \sim t^{1/8}$ .

*Список литературы:*

1. Sapozhnikov F., Dremov V., Ionov V., Derbenev I. and Chizhkova E.: EPJ Web of Conferences. Vol. 10. 00017, 2010.
2. Jubelgas M., Springel V. and Dolag K. Mon. Not. R. Astron. Soc. Vol. 351. 423–435, 2004.
3. Stranex T., Wheaton S. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 200. 392–402, 2011.
4. Chetverushkin B.N., Gulín A.V. Doklady Mathematics. Vol. 86. No. 2. 681–683, 2012.
5. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 28. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-28>
6. Козырев О.М., Литвинов В.П. ВАНТ, сер. ММФП. Вып. 4. 3–12, 2012.
7. Жуков В.Т. Матем. моделирование. Vol. 22. No. 10. 127–158, 2010.

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВИРТУАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ К АНАЛИЗУ ДАННЫХ МАГНИТНОЙ ЭЦЕФАЛОГРАФИИ**

**С.Д. Рыкунов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*ИМПБ РАН - филиал ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Пущино,  
rykunov@impb.ru*

Разработан метод виртуальных электродов, основанный на методе функциональной томографии по данным многоканальных магнитных измерений и методе парциальной спектроскопии головного мозга [1]. В основе метода лежит тот факт, что функциональная томография ставит в соответствие каждой элементарной осцилляции пространственное положение ее источника. Выбирая область пространства и все источники, находящиеся в ней, по их частотам и коэффициентам разложения Фурье можно восстановить многоканальный временной ряд, получая таким образом энцефалограмму выбранной области.

Программная реализация метода выполнена в виде кроссплатформенного графического приложения на языке Python с использованием свободно распространяемых библиотек numpy, PyFFTW, Matplotlib. Комплекс предоставляет пользователю следующие



возможности: - загрузка и совместное отображение магнитно-резонансной и функциональной томограммы; - фильтрация функциональной томограммы по качеству решения; - выбор местоположения и формы области интереса – виртуального электрода; - построение парциального спектра источников в выбранной области; - восстановление многоканального временного ряда в выбранной области; - сохранение парциального спектра и восстановленного многоканального временного ряда в файл для дальнейшего анализа.

Программный комплекс ВиртЭл [2] был опробован на экспериментальных данных 15 испытуемых. Для каждого из субъектов были сделаны записи магнитной энцефалограммы (МЭГ) и магнитно-резонансной томограммы (МРТ). Затем по данным МЭГ была рассчитана функциональная томограмма (ФТ), а также многоканальный спектр. Экспериментальные данные магнитной энцефалографии были взяты из открытого МЭГ-архива OMEGA. Магнитные энцефалограммы были записаны на пятнадцати контрольных субъектах, включая восемь мужчин и семь женщин. Субъекты находились в спокойном состоянии с закрытыми глазами в течение 5 минут, они сидели прямо. Положение головы регистрировалось при помощи трех опорных маркеров (на переносице и перед ушами). По экспериментальным данным были рассчитаны функциональные томограммы для состояния «глаза закрыты» и получены многоканальные спектры. Виртуальный электрод большого размера (радиусом 31 мм) был размещен в затылочной области мозга. Спектр частот показывает сильный пик в районе 10 Гц, что соответствует альфа-ритму. Восстановленный многоканальный временной ряд для этой области также имеет заметные пики каждые 1/10 секунды. Наблюдаемые результаты подтверждаются общепринятыми представлениями о нахождении источника альфа-ритма в затылочной области мозга.

Разработанный метод виртуальных электродов открывает новые возможности для исследования данных магнитной энцефалографии. Виртуальный электрод большого радиуса может эффективно использоваться для разделения сигналов по пространственному признаку, например, выделить только сигналы от головного мозга человека. Виртуальный электрод малого радиуса может использоваться для детального исследования области интереса. Используя электрод размером с ячейку функциональной томограммы, был построен профиль распределения энергий источников альфа-ритма.

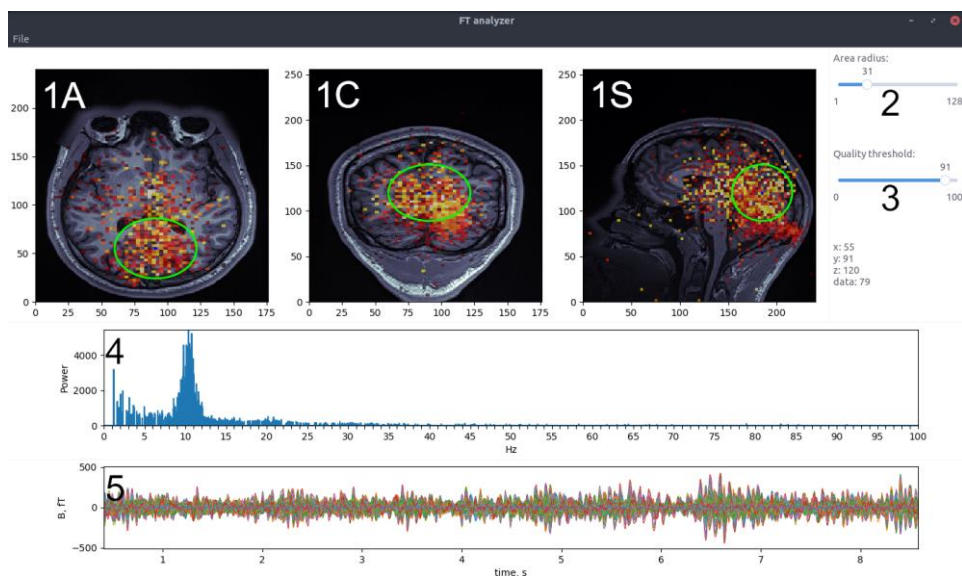


Рисунок 1. Анализ функциональной томограммы, виртуальный электрод радиусом 31 мм расположен в области максимума альфа-ритма испытуемого. Функциональная томограмма наложена на магниторезонансную томограмму, зеленой окружностью обозначены сечения виртуального электрода.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00178).

*Список литературы:*

1. Рыкунов С.Д., Устинин М.Н., Полянин А.Г., Сычев В.В., Линас Р.Р. Комплекс программ для расчёта парциальных спектров головного мозга человека. Математическая биология и биоинформатика. Т. 11. № 1. С. 127–140. 2016. doi: 10.17537/2016.11.127
2. Рыкунов С.Д., Рыкунова Е.Д., Бойко А.И., Устинин М.Н. Программный комплекс «ВиртЭл» для анализа данных магнитной энцефалографии методом виртуальных электродов. Математическая биология и биоинформатика. Т. 14. № 1. С. 340–354. 2019. doi: 10.17537/2019.14.340

## ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ РАССТАНОВКИ ЧАСТИЦ НА СФЕРИЧНОСТЬ УДАРНО НАГРУЖЕННОЙ ГРАНИЦЫ ВЕЩЕСТВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РИХТМАЙЕРА-МЕШКОВА SPH МЕТОДОМ

Ф.А. Сапожников, В.С. Рыкованов

*РФЯЦ-ВНИИТФ, Снежинск, f.a.sapozhnikov@vniitf.ru*

Неустойчивость Рихтмайера-Мешкова (RMI) появляется, когда возмущённая граница двух жидкостей различной плотности подвергается ударному ускорению, такому как ударная волна. Изучение RMI важно для понимания процесса инерциального термоядерного синтеза, где сферическая твёрдая дейтерий-тритиевая (DT) оболочка, заполненная DT газом, обжимается с использованием мощных лазеров [1]. Взрывная ударная волна, двигаясь к центру сферической оболочки, порождает RMI на её внутренней поверхности из-за большого перепада плотности между твёрдой и газовой фазами DT, приводя к быстрому росту начальных случайных возмущений. Обычно на границе областей DT присутствуют случайные возмущения (шероховатость поверхности, канавки от машинной обработки и т.д.). Для повышения достоверности результатов моделирования необходимо понять, какие факторы влияют на рост RMI.

Метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH) был предложен Люси, Гингольдом и Монаганом в 1977 году для анализа астрофизических задач. Либерски и Петшек в 1990 году расширили его до изучения динамического отклика материалов. Метод применяется для исследования таких задач как потоки со свободной поверхностью, взрывные явления, столкновение и проникновение, рост неустойчивостей.

Целью нашей работы является нахождение наилучшего начального расположения частиц, которое не вносило бы искусственных возмущений на сферическую границу двух веществ. Сферическая симметрия ударно нагруженной границы должна сохраняться, если не было наложено возмущений.

Постановка задачи — сферические слои DT газа, DT льда, аблятора и нагруженного аблятора. Все материалы моделируются с использованием УРС-а идеального газа в программном комплексе «Молох» [2] методом SPH.

В нашей работе исследуются два способа построения начальных условий (НУ): решётчатый — с использованием гранецентрированной кубической решётки, сферический — с использованием концентрических сфер.

После прохождения ударной волны через границу веществ возникает явная разница в сферичности для разных НУ. Паразитные возмущения гораздо сильнее для решётчатых НУ, чем для сферических.

Адаптация НУ необходима, чтобы уменьшить количество частиц, необходимое для достижения требуемого пространственного разрешения рядом с границей слоёв. Расщепление частиц — это типичный способ увеличения локального разрешения [3]. Для решётчатых НУ для расщепления частиц вблизи границы был применён произвольно повернутый и не повернутый икосаэдрический шаблон. Для сферических НУ было использовано постепенное изменение радиуса.

После прохождения ударной волны через границу раздела двух сред оба (повернутый и не повернутый) икосаэдрических шаблона на решётчатых НУ показали много паразитных возмущений. Сферические НУ с постепенным изменением радиуса показали намного более хорошие результаты.

Итак, было показано, в задачах моделирования сферических образцов, состоящих из сферических слоёв с высокими перепадами плотности важно использовать такие начальные условия, которые не привносят искусственные возмущения. Часто применяемые решётчатые НУ с расщеплением частиц показали плохие результаты при моделировании сферического обжатия. Рекомендуется использовать сферические НУ с постепенным изменением радиуса. Такие НУ сохраняют локальный порядок частиц и при ударном нагружении привносят наименьшее паразитное возмущение.

#### *Список литературы:*

1. Amendt P., Landen O.L., Robey H.F., Li C.K., and Petrasso R.D.: Plasma Barodiffusion in Inertial-Confinement-Fusion Implosions: Application to Observed Yield Anomalies in Thermonuclear Fuel Mixtures. Phys. Rev. Lett. 2010.
2. Sapozhnikov F., Dremov V., Ionov V., Derbenev I. and Chizhkova E: MOLOCH computer code for molecular-dynamics simulation of processes in condensed matter. EPJ Web of Conferences 10, 00017. 2010.
3. Vacondio R., Rogers B., Stansby P. and Mignosa P.: Variable resolution for SPH in three dimensions: Towards optimal splitting and coalescing for dynamic adaptivity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 300. 2016.

## О ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЁМКОСТЬЮ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

**Е.В. Серегина<sup>1</sup>, М.А. Степович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»,  
Калужский филиал, evfs@yandex.ru*

<sup>2</sup>*ФГБОУ ВО «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского»,  
m.stepovich@mail.ru*

В работе [1] был представлен алгоритм и проведено обоснование проекционного метода Галёркина для решения стационарного дифференциального уравнения тепломассопереноса в полубесконечной области.

В настоящей работе предложен алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов (МНК) для нахождения решения нестационарного дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью на полупрямой. Искомое решение находится в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра-Якоби. В работе [2] было проведено обоснование и рассмотрен вопрос вычислительной устойчивости модифицированной проекционной схемы МНК для моделирования распределения неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах. Настоящая работа продолжает такие исследования. Получена оценка погрешности и условие вычислительной устойчивости проекционной схемы МНК, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью, для расчета температурного поля. Проведены расчеты для двумерной модельной задачи.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

*Список литературы:*

1. Makarenkov A.M., Seregina E.V., and Stepovich M.A. Comput.Math. Math. Phys. Vol. 57. No 5, 802-814, 2017.
2. Seregina E.V., Makarenkov A.M. and Stepovich M.A. J. Surf. Invest.: X-Ray, Synchrotron and Neutron Tech. Vol. 7. No 6, 1077-1080, 2013.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА В СРЕДЕ****М.В. Шамолин<sup>1</sup>**<sup>1</sup>*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, shamolin@rambler.ru*

Рассматривается математическая модель пространственного воздействия среды на осесимметричное твердое тело, частью участка внешней поверхности которого является круговой конус. Приводится полная система уравнений движения в условиях квазистационарности [1]. Динамическая часть образует независимую систему шестого порядка, в которой выделяются независимые подсистемы меньших порядков. Исследован вопрос устойчивости по части переменных ключевого режима – пространственного прямолинейного поступательного торможения тела. Получена также классификация типичных фазовых портретов системы в трехмерном пространстве квазискоростей (см. также [2, 3]).

В задаче о пространственном движении однородного осесимметричного твердого тела, часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания, проведен обстоятельный многопараметрический качественный, а также численный анализ. Все это в предположении, что остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды.

Наряду с результатами прикладного характера, получено новое многопараметрическое семейство трехмерных фазовых портретов, типичные представители которого являются грубыми, и которое состоит из топологически неэквивалентных фазовых портретов и обобщает предыдущие исследования по данному вопросу.

*Список литературы:*

1. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // *Фундам. и прикл. матем.* 14:3, 3–237, 2008.
2. Шамолин М.В. К задаче о свободном торможении твердого тела с передним конусом в сопротивляющейся среде // *Матем. моделирование.* 28:9, 3–23, 2016.
3. Шамолин М.В. Семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 22:2(78), 118–131, 2019.

**ТЕЧЕНИЕ ОКОЛО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА**

**Ю.Д. Шевелев, Ф.А. Максимов**

*Институт автоматизации проектирования РАН, shevelev@icad.org.ru*

Приведены результаты расчета течения вязкого газа между двумя дисками, часть одного из дисков в виде круга вращается. Моделирование осуществляется в рамках уравнений Навье-Стокса методом [1]. Проведена серия расчетов при изменении расстояния между дисками при фиксированных прочих параметрах. Все расчеты выполнены по одной схеме. Первоначально при заданных геометрических параметрах из состояния покоя методом установления находится решение при  $Re = 1000$ . Во всех случаях получается осесимметричное решение. Затем изменяется число  $Re$  до 2000. При уменьшении вязкости осесимметричный характер течения разрушается и устанавливается трехмерное течение с образованием «многогранника».

На рис.1 приведены примеры течения между дисками. Нижний диск состоит из подвижной части радиусом  $R = 1$ , вращающейся относительно вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ , и неподвижной части  $2 \geq R > 1$ . Другие поверхности неподвижны. Расстояние между дисками  $\Delta = 0.15R$ . Число  $Re = \omega R^2/\nu$ , где  $\nu$  - коэффициент вязкости. При угловой скорости вращения  $\omega$  линейная скорость движения внешней части диска равна 0.1 от скорости звука.

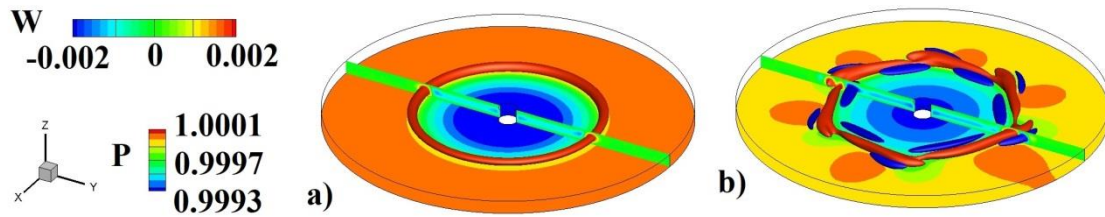


Рис. 1 Распределение скорости и давления.  $Re = 1000$  (a),  $2000$  (b)

На рис.1 представлено распределение вертикальной скорости в сечении, проходящем через ось вращения. На внешней стороне вращающейся части образуется течение вверх, а над вращающейся частью – вниз. На нижнем диске приведено распределение давления. При  $Re = 1000$  течение осесимметрично, при  $Re = 2000$  осесимметричный характер разрушается с образованием шестиугольника. Около сторон многоугольника реализуются локальные максимумы давления.

В зависимости от параметров задачи ( $Re$ ,  $\Delta$ ) возможно образование различных правильных многоугольников. На рис.2 приведено распределение скорости по направлению оси при изменении  $\Delta$  от 0.12 до 0.2 при  $Re = 2000$ . Распределение приведено в среднем сечении между дисками. При  $\Delta = 0.12$  образуется восьмиугольник;  $\Delta = 0.13 \div 0.14$  – семиугольник;  $\Delta = 0.15 \div 0.17$  – шестиугольник;  $\Delta = 0.18 \div 0.19$  – пятиугольник;  $\Delta = 0.20$  – четырехугольник.

Образование аналогичных течений наблюдается в экспериментальных исследованиях [2], в полярных областях Сатурна. Расчеты проводились на МВС-100К МСЦ РАН.

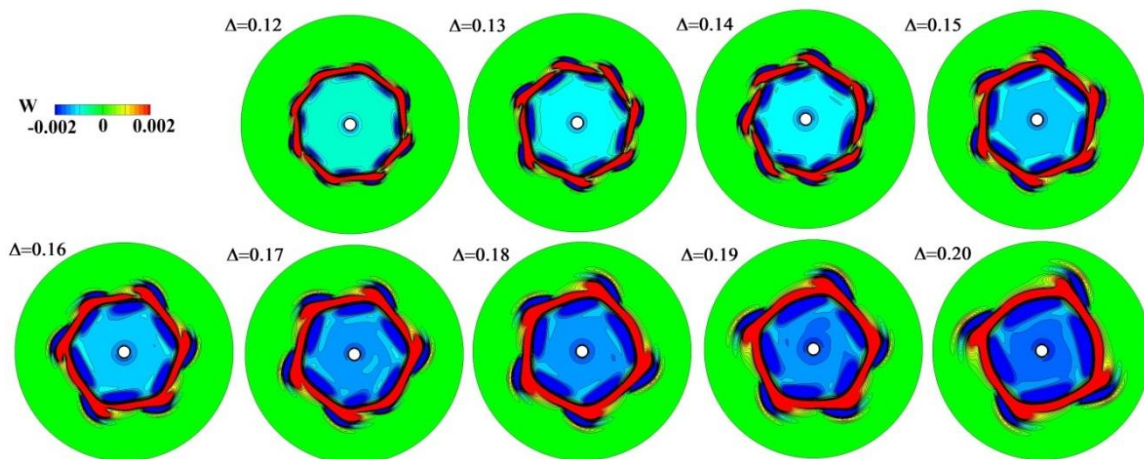


Рис.2 Изменение характера течения при изменении расстояния между дисками.



*Список литературы:*

1. Максимов Ф.А., Чураков Д.А., Шевелев Ю.Д. Разработка математических моделей и численных методов для решения задач аэродинамического проектирования на многопроцессорной вычислительной технике // ЖВММФ, том 51, №2, с.303-328, 2011
2. Алексеев В.В., Киселева С.В., Лаппо С.С. Лабораторные модели физических процессов в атмосфере и океане. – М.: Наука, 2005.

**НЕКОНФОРМНЫЕ СМЕШАННЫЕ  
КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ  
ПОСТАНОВКИ ДЛЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ.**

Э.П. Шурина<sup>1</sup>, Н.Б. Иткина<sup>2</sup>, С.А.Трофимова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*ИНГГ СО РАН, Новосибирск, shurina@online.sinor.ru*

<sup>2</sup>*НГТУ, Новосибирск, itkina.nat@yandex.ru*

<sup>3</sup>*ИНГГ СО РАН, Новосибирск, svetik-missy@mail.ru*

Математическое моделирование процессов просачивания жидкости (газа) в пористую среду – это актуальная задача для нефтедобывающей отрасли. Для описания процесса фильтрации используется полуэмпирический подход, основанный на применении модели Дарси.

Построение дискретного конечно-элементного аналога задачи Дарси при непосредственном определении скорости, со специальными краевыми условиями, задающими поведение компонент скорости на границе области моделирования, успешно применяются смешанные вариационные постановки.

Основная идея такой постановки - определение первичной и дуальной переменной. При этом осуществляется поиск критической точки соответствующего функционала в конечно-элементном пространстве допустимых пробных функций, представимом в виде прямой суммы двух или более подпространств. Такой подход позволяет найти релевантное решение, но имеет ряд недостатков: 1) из-за одновременной аппроксимации как первичных, так и дуальных переменных происходит резкое увеличение количества степеней свободы, и, следовательно, рост размерности системы алгебраических уравнений (СЛАУ); 2) так как смешанная задача – это задача о седловой точке, то результирующая СЛАУ законоопределена; 3)

дискретные аналоги смешанных постановок менее устойчивы, чем дискретные аналоги прямых постановок, в которых выбор конечно-элементных пространств обусловлен только свойствами аппроксимации и удобством реализации.

В связи с этими особенностями эффективное построение смешанных вычислительных схем требует специального выбора конечно-элементных пространств (базис с заданными свойствами) и специального многоуровневого решателя для дискретного аналога.

Для 2-D и 3-D постановки задачи Дарси предлагаются оригинальные неконформные смешанные вариационные постановки, рассматривается проблема построения специальных конечно-элементных базисов в пространстве  $H^{\text{div}}$  для тетраэдральных и прямоугольных конечных элементов, исследуются специальные, учитывающие структуру СЛАУ многоуровневые решатели.

Работа поддержана грантом ОФИ-М 16-29-15094.

**О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С  
ПОСТАНОВКОЙ ЗАДАЧ  
ДЛЯ МОДЕЛЕЙ КАНАЛИРОВАНИЯ КИЛОВОЛЬТНЫХ  
ЭЛЕКТРОНОВ  
В ВОДНЫХ СРЕДАХ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
ЭТОГО ЯВЛЕНИЯ В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ**

А.Л. Сибирев<sup>1</sup>, М.Н. Шипко<sup>2</sup>, М.А. Степович<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Ивановский государственный химико-технологический университет,  
Иваново, alsibirev@mail.ru*

<sup>2</sup>*Ивановский государственный энергетический университет  
им. В.И. Ленина,*

*Иваново, michael-1946@mail.ru*

<sup>3</sup>*Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского,  
Калуга, m.stepovich@rambler.ru*

Эффекты каналирования частиц хорошо известны в кристаллофизике твёрдых тел. В меньшей степени изучено каналирование низкоэнергетических электронов в жидких средах. В силу этого в настоящее время имеется в основном лишь качественное описание этого явления и основной проблемой является его математическое описание и последующее использование в биологии и медицине.

Перспективным методом для изучения ориентационного и позиционного порядков в структурированных водных растворах, является метод газоразрядной визуализации (ГРВ) [1]. Он основан на иницировании и изучении процессов каналирования посредством анализа оптоэлектронной эмиссии, возбуждаемой электронами, вышедшими из водной среды в воздух из водного раствора. В настоящей работе проведён анализ явления каналирования и рассмотрены некоторые проблемы, связанные с постановкой задач для математического моделирования эффектов, возникающих при каналировании киловольтных (9 кэВ) электронов в водных средах. В качестве исходных использованы результаты наших экспериментальных исследований водных растворов поверхностно-активных веществ [1-3] и результаты исследования крови и её составляющих до и после окисления [4]. Полученные результаты указывают на возможность использования эффекта каналирования низкоэнергетических электронов для создания и изучения типа упорядочения мицеллярных растворов, изучения структуры и физических свойств упорядоченных жидких сред.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), РФФИ и правительства Ивановской области (проект № 18-43-370012), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

#### *Список литературы:*

1. Коротков К.Г. Принципы анализа в ГРВ биоэлектрографии. – СПб.: Реноме, 286 с. 2007.
2. Шипко М.Н., Степович М.А., Сибирев А.Л., Усольцева Н.В., Масленникова О.М., Смирнова А.И. Изв. РАН. Сер. физ. Том. 82. № 8. 1058-1062. 2018.
3. Шипко М.Н., Усольцева Н.В., Сибирев А.Л., Масленникова О.М., Смирнова А.И., Степович М.А., Габдулсадыкова Г.Ф. Жидкие кристаллы и их практич. использование. Том. 18. № 1. 47-52. 2018.
4. Stepovich M.A., Maslennikova O.M., Shipko M.N., Sibirev A.L. and Chrishtop V.V. J. of Cardiology and Cardiovascular Therapy. Vol. 9. Issue 4. 555770. 2018.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ ВНУТРИ ГЛАЗА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИНЪЕКЦИИ**

**С.А. Складчиков, В.С. Лапонин, С.В. Анпилов,  
Н.П. Савенкова**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
skladtchikov@mail.ru*

В настоящее время во всем мире наблюдается лавинообразный рост интравитреальных инъекций (ИВИ). Так по данным Medicare в США было выполнено более 5.9 млн ИВИ в 2016 году. Предполагается, что в текущем году их число достигнет 10 млн. Закономерно увеличивается и число лекарственных препаратов, применяемых интравитреально, растет число перспективных направлений, в частности создание комбинированных медикаментов и разработка препаратов длительного терапевтического действия.

Уже многие заболевания – возрастная макулярная дегенерация (ВМД), диабетический макулярный отек (ДМО), тромбоз центральной вены сетчатки (ЦВС) и её ветвей, воспалительные заболевания глаза (увеиты) и некоторые дегенеративные заболевания сетчатки (миопия высокой степени) – эффективно лечатся препаратами, которые доставляются прямо в стекловидное тело глазного яблока.

В связи с этим исследование влияния скорости распространения лекарственных средств, а также продолжительности воздействия активного вещества от местоположения инъекции имеет существенную практическую значимость.

Модель глаза, рассматриваемая в работе, представляет собой каплевидный объект, разделенный на переднюю и заднюю камеры. Камеры соединены между собой тонким круговым каналом вокруг хрусталика, свободно пропускающим жидкость.

Жидкость поступает в глаз по круговому каналу, опоясывающему заднюю камеру, расположенному вблизи границы перехода из задней камеры в переднюю. Отток жидкости происходит через Шлемов канал, который опоясывает по окружности переднюю камеру глаза. Внутренние структуры передней и задней камер различны. В текущей модели структура передней камеры является свободный объем, беспрепятственно пропускающий сквозь себя жидкость. В отличие от передней камеры, полость задней камеры практически полностью заполнена стекловидным телом, которое в текущей постановке моделируется пористым телом сложной структуры с заданными характеристиками. Однако вблизи стенки задней камеры газа по всей

поверхности существует пространство, не заполненное стекловидным телом. В нем происходит беспрепятственный ток жидкости.

Дополнительно в модели учтены пульсации кровеносных сосудов по поверхности задней камеры глаза, а также температурные особенности среды. Физические свойства вводимого лекарственного препарата заданы.

*Список литературы:*

1. Нестеров А.П. Глаукома. / М.: Медицина, 256 с. 1995.
2. Laponin V. S., Skladchikov S. A., Savenkova N. P., Novoderezhkin V. V. Investigating the causes of glaucoma: Mathematical modeling of the hydrodynamics of fluid outflow through schlemm's canal // Computational Mathematics and Modeling. Vol. 29, no. 2. P. 146–152. 2018.
3. Алексеев И.Б., Белкин В.Е., Самойленко А.И. и др. Стекловидное тело. Строение, патология и методы хирургического лечения (обзор литературы) - Новости глаукомы №1(33) с.12-14. 2015.

## **БАЗОВЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ВРАЩАЮЩИХСЯ МГД ДИНАМО**

**С.В. Старченко**

*ИЗМИРАН, Москва, sstarchenko@mail.ru*

Моделирование динамо-процессов генерации магнитных полей течениями было исключительно теоретическим почти полвека. И лишь последние четверть века осуществляются успешные численные и физические эксперименты. К сожалению, ключевые параметры этих экспериментов еще на порядки отстают от реальных параметров моделируемых планет, звезд, галактик и пр. Поэтому, а еще больше для понимания физической сути, необходимы упрощенные модели. Исторически таковыми были и остаются усредненные и маломодовые модели [1]. Их стабилизирующую нелинейность в модельных уравнениях для генерирующих коэффициентов (чаще) искусственно задают в виде  $(1 - \mathbf{V}^2)$ ,  $1 / (1 + \mathbf{V}^2)$  или (реже) в сходной форме тензоров, исходящих из квадратной по магнитному полю  $\mathbf{V}$  силы Лоренца. Цель этой работы – удалить эту застарелую искусственность, оценивая МГД динамо нелинейности прямо из исходных уравнений при наличии

значимого вращения, которое является естественным для приложений к Земле, планетам, Солнцу и звездам.

Векторное произведение скорости течений на магнитное поле является единственным отвечающим за генерацию магнитного поля членом в уравнении магнитной индукции, см. [1]. Оценим это произведение, скалярно умножая уравнение Навье-Стокса для течения на вектор скорости течения. Результат этого умножения представлен, например, в формуле (2) работы [2]. Из этой формулы, очевидным образом при значимом вращении, но несколько неожиданно следует, что искомое произведение обратно пропорционально магнитному полю! Таким образом, генерация глобально усредненного поля  $A$  может быть грубо описана следующим ОДЕ и его общим решением.

$$dA / dt = 1 / A - A, \quad A = \pm \sqrt{1 + C \exp(-2t)} \quad (1a,b)$$

Здесь время нормировано на время магнитной диффузии ( $-A$  моделирует диффузию в (1a)), а поле  $A$  нормировано на соответствующее установившееся поле следующее, например, из [2]. В результате получаем замечательную согласованность с эволюцией геодинамо диполя, который, как общеизвестно, преимущественно стабилизируется вблизи некоторого характерного для данной эпохи значения. Различные эпохи далее представлены различными знаками и константами  $C$  из (1b), как это показано на рис. 1.

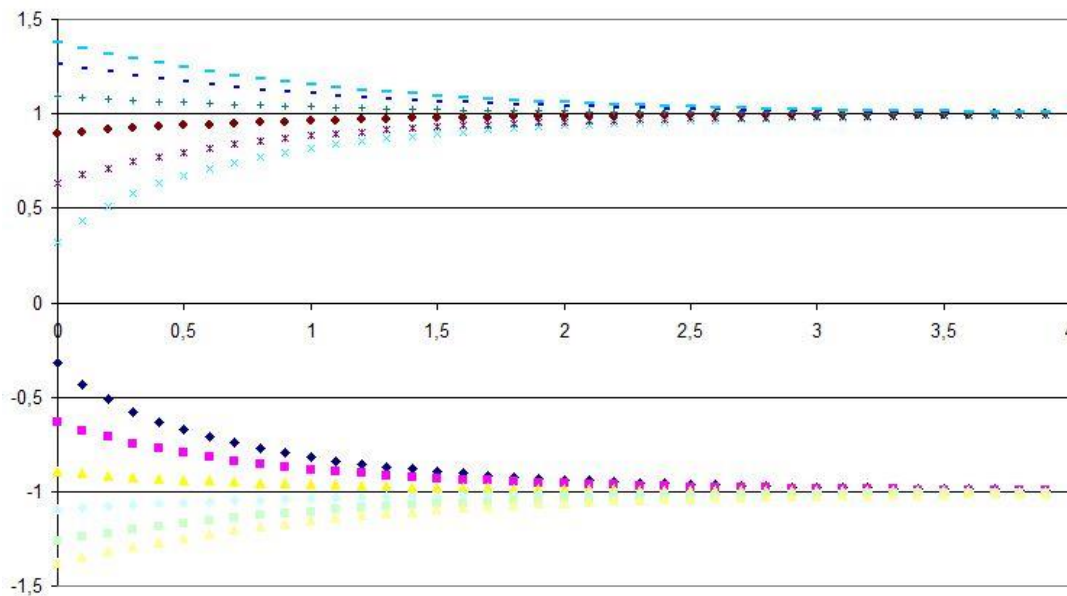


Рис.1. Эволюция геодинамо подобного магнитного поля соответственно (1b).

Если учесть случайные и регулярные изменения стабилизирующегося поля, заменяя 1 на функцию времени в (1a) и на

соответствующий интеграл в (1b), то можно будет моделировать не только наблюдаемые вариации, но и оцениваемые палеомагнитологами инверсии и экскурсы. Таким образом, полученная простейшая базовая МГД нелинейность сразу дает характерное поведение геодинamo и естественно ожидать сходного поведения в подобных быстро вращающихся планетах и звездах.

Умножая теперь уравнение Навье-Стокса скалярно на  $\mathbf{V}$ , получим оценку подобной динамо Солнца зависимости динамо-коэффициентов в виде системы из двух линейных (!) ОДЕ для полоидального поля  $A$  и тороидального поля  $B$ :

$$dA / dt = -\omega^2 B, \quad dB / dt = A \quad (2a,b)$$

Очевидное гармоническое решение системы (2) согласуется с наблюдаемой магнитной активностью Солнца, которая в первом приближении также описывается синусом или косинусом (с 22-х летним полным периодом). Аналогичной зависимости следует ожидать и в других подобных Солнцу сравнительно медленно вращающихся звездах.

Рассмотренные крайние и наипростейшие типы базовых нелинейностей, безусловно, можно комбинировать для получения более реалистических динамо-систем, которые могут быть сравнены как с непосредственными наблюдениями, так и с численными/физическими экспериментами.

#### *Список литературы:*

1. Moffatt K., Dormy E. Self-Exciting Fluid Dynamos. Cambridge University Press. 536p. 2019.
2. Starchenko S.V. Analytic scaling laws in planetary dynamo models // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. V. 113. P. 71-79. 2019.

## **СОВРЕМЕННЫЙ ГЕОДИПОЛЬ И ВНУТРЕННИЕ ТОКИ ЗЕМЛИ**

**С.В. Старченко, А.Ю. Смирнов**

*ИЗМИРАН, sstarchenko@mail.ru, smirnoff.alexandr@gmail.com*

Получены физически адекватные и, по-видимому, наипростейшие распределенные объемные электрические токи, определяющиеся наблюдаемым геомагнитным диполем.

### ОЦЕНКИ ТОКОВ В ЖИДКОМ/ТВЕРДОМ ЯДРЕ

Классические уравнения Максвелла и Ампера [1;2] в верном для ядра Земли МГД приближении связывают векторы скорости течений  $\mathbf{U}$ , плотности тока  $\mathbf{J}$ , магнитного  $\mathbf{B}$  и электрического  $\mathbf{E}$  полей:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (1a,b,c)$$

Здесь:  $\sigma$  – электрическая проводимость,  $\mu$  – магнитная проницаемость, которая в ядре Земли практически совпадает с проницаемостью в вакууме  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Для геодинамо нужна достаточно большая типичная (или средняя) скорость  $U$ , поэтому естественно из (1b,c) оценить типичную среднеквадратичную плотность тока в жидком ядре  $J_0$  пренебрегая, исходя из классического МГД приближения, электрическим полем:

$$J_0 = \sigma U B_0 \quad (2)$$

Здесь  $B_0$  – типичное среднеквадратичное магнитное поле в жидком ядре.

Для оценки сверху тока в твердом ядре положим  $\mathbf{U} = 0$  и из (1a,b) получаем диффузионное уравнение

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B} / \mu \sigma) \quad (3)$$

Это уравнение имеет точное решение, которое для упомянутой оценки сверху дает диполь [1; 2] со временем затухания

$$\tau_i = \mu \sigma (r_i / \pi)^2 \quad (4)$$

Здесь  $r_i$  – радиус твердого ядра Земли. Подставляя (4) в (3) и аппроксимируя производные отношениями величин, получим электромагнитный масштаб в твердом ядре  $r_i / \pi$ . Подставляя этот масштаб в (1c), оценим типичную среднеквадратичную плотность тока в твердом ядре

$$J_i = \pi B_i / (\mu r_i) \quad (5)$$

Соответственно отношение плотностей тока в жидком (2) и твердом (5) ядре очень велико

$$\frac{J_0}{J_i} = \mu \sigma U r_i \frac{B_0}{B_i} \gg 1 \quad (6)$$



### ПРОСТЕЙШИЕ ОБЪЕМНЫЕ ТОКИ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ

Направим полярную (или токовую) ось сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$  вдоль геомагнитного диполя  $\mathbf{M}$ . При этом плотность тока  $\mathbf{J}$  не зависит от угла  $\varphi$  и задается нами в наипростейшем виде:

$$\mathbf{J} = \begin{cases} Gr \sin \theta \mathbf{1}_\varphi & | r \geq r_i \\ \mathbf{0} & | r < r_i \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $G(t)$  – зависящий от времени  $t$  коэффициент, который нам предстоит определить, а «жирной» единицей обозначаются единичные вектора. Выбранное нами представление (7), удовлетворяет условию  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  и естественной для любого геодинамо слабой зависимости от высоты вдоль вектора угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\Omega}$  [3; 4; 5].

Рассмотрим точку на оси диполя, удалённую от центра Земли на расстояние  $x > r$ . Осевое магнитное поле, создаваемое в этой точке тонким слоем тока радиусом  $r \sin \theta$  равно:

$$dB(x) = \mu \frac{Gr \sin \theta r^3 \sin^2 \theta dr d\theta}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta)^{3/2}} \quad (8)$$

Здесь уже проведено интегрирование по углу  $\varphi$ . Для суммарного поля  $B$  запишем

$$B(x) = \mu G \int_{0 \leq \theta \leq \pi} \int_{r_i \leq r \leq r_o} \frac{r^4 \sin^3 \theta dr d\theta}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta)^{3/2}} \quad (9)$$

где  $r_1 = 1220$  км и  $r_0 = 3481$  км – радиусы твёрдого и жидкого ядер, соответственно. Разложим знаменатель подынтегрального выражения (9) в ряд Тейлора по малому параметру (для удаленных от ядра точек)  $r/x$ . В главном порядке этого разложения, по определению [2], получим вклад чисто дипольной составляющей  $D$  в суммарное поле  $B$ :

$$D = \frac{\mu G}{x^3} \int_0^\pi \int_{r_i}^{r_o} r^4 \sin^3 \theta dr d\theta = \frac{4\mu G}{15x^3} (r_o^5 - r_i^5) \quad (10)$$

Для получения единственной неизвестной  $G$  приравняем наиболее достоверно определяемое в полюсе диполя у поверхности Земли ( $x = R = 6371$  км) дипольное поле к (10). И через стандартные коэффициенты Гаусса [1] получим:

$$G = 7.5R^3 \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} / [\mu (r_o^5 - r_i^5)] \quad (11)$$

Используя находящиеся в свободном доступе IGRF коэффициенты Гаусса, определим  $G$  из (11) и (7). Исходя из этих  $G$ ,

получаем суммарный ток  $I$  через меридиональное сечение и мощность  $W$  омической диссипации во всем объеме ядра:

$$I = \int_0^{\pi} \int_{r_i}^{r_o} J r dr d\theta = \frac{2G}{3} (r_o^3 - r_i^3), \quad W = \frac{2\pi}{\sigma} \int_0^{\pi} \int_{r_i}^{r_o} J^2 r^2 dr \sin \theta d\theta = \frac{8\pi G^2}{15\sigma} (r_o^5 - r_i^5) \quad (12a,b)$$

При постоянной электрической проводимости  $\sigma = 5 \cdot 10^5$  См/м [3; 7] огромный ток  $\sim 2.5 \cdot 10^9$  А сочетается со сравнительно небольшой мощностью Омической диссипации  $\sim 1.5 \cdot 10^7$  Вт.

*Список литературы:*

1. Parkinson U. Introduction to Geomagnetism, Edinburgh: Scottish Acad. Press, 1983
2. Davidson P.A. An Introduction to Magnetohydrodynamics, Cambridge University Press. 2001.
3. Старченко С.В. // Геомагнетизм и Аэрномия. Т. 51. № 3. С. 412-418. 2011.
4. Starchenko S.V., Jones C.A. // Icarus. V. 157. P. 426–435. 2002.
5. Christensen U.R. // Space Sci Rev. V. 152. P. 565-590. 2010.
6. Aubert J., Gastine T., Fournier A. // J. Fluid Mech. V. 813. P. 558-593. 2017.
7. Williams Q. // Annu. Rev. Earth Planet. Sci. V. 46. Published online May 2018.

**TRANS-ALFVEN MHD FLOWS WITH ACCELERATION IN COAXIAL CHANNELS UNDER LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD**

**E. Stepin**

*KIAM RAS, Moscow and NRNU MEPhI, Moscow,  
eugene.v.stepin@gmail.com*

The paper deals with mathematical modeling and numerical simulation of plasma flows in coaxial channels of plasma accelerators with a longitudinal magnetic field additionally induced by external current-carrying conductors.

Behavior of a plasma flow in the channel is described in terms of magnetohydrodynamics (MHD). In the presence of a longitudinal magnetic

field, steady-state MHD flows in the accelerator channel belong to one of the two classes [1]: super-Alfven ( $v > C_A$ ) or sub-Alfven ( $v < C_A$ ), where  $v$  is the plasma flow velocity and  $C_A$  is the Alfven speed corresponding to the longitudinal field.

Super-Alfven transonic MHD flows, which are the main object of interest in theory of plasma accelerators, can exist in the channel when the longitudinal magnetic field doesn't exceed some critical value [2]. Under further longitudinal field increasing, regions of the sub-Alfven regime arise in the accelerator area.

The work is focused on the previously unexplored MHD flow type – trans-Alfven transonic with acceleration. This flow type corresponds to the specific case when the longitudinal field exceeds the above-mentioned critical value, but transonic accelerating behavior of the flux remains. Meanwhile, the plasma flow experiences the transition through the Alfven speed in the channel area.

In the present paper, the results of numerical simulation of the trans-Alfven transonic MHD flow regime with acceleration in the coaxial channel are presented. A general assessment of the longitudinal field influence on accelerating characteristic of the channel is provided.

In terms of applications, existence of the trans-Alfven transonic flow type with acceleration results in extension of the longitudinal magnetic field range, in which accelerating regime of the device can be obtained.

The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-31-00351.

### *References*

1. Morozov A.I., Solov'ev L.S. Steady-State Plasma Flow in a Magnetic Field // Reviews of Plasma Physics / ed. by M.A. Leontovich. NY, London: Consultants Bureau. Vol. 8. 1-103, 1980.
2. Brushlinskii K.V. Mathematical and Computational Problems in Magnetohydrodynamics. Moscow: Binom, 200 p., 2009. [in Russian]

## ФОРМИРОВАНИЕ СПИРАЛЬНО-ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ГРАВИТИРУЮЩЕМ ПРОТОПЛАНЕТНОМ ДИСКЕ

Л.Г. Страховская

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, lgstrakhovskaya@yandex.ru

Моделируется развитие малых возмущений стационарно вращающегося протопланетного диска. Используется 3D газодинамическое приближение в переменных Эйлера в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  и уравнение Пуассона для гравитационного потенциала диска. Численному моделированию неустойчивостей в аккреционных дисках посвящено множество исследований, например, в [1]. В этих работах подчеркивается, что влиянием гравитации диска и его вязкостью можно пренебречь. В протопланетном диске, масса которого больше массы аккреционного в  $\sim 100$  раз, этим пренебрегать нельзя. Проведенные автором сравнительные расчеты показали, что учет самогравитации и в аккреционном диске меняет картину течения газа.

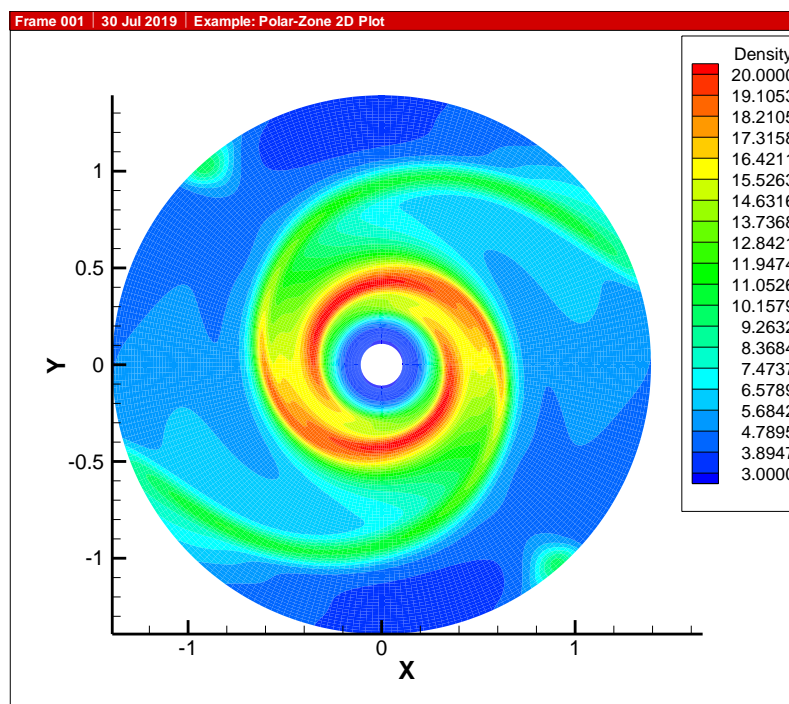


Рис. 1. Распределение плотности в виде двух спиральных рукавов.

В [2] предложен алгоритм для вычисления стационарного состояния политропного гравитирующего газа:  $u=0$ ,  $w=0$ ,  $\partial/\partial\varphi=0$ , где  $\mathbf{v}(u, v, w)$  вектор скорости. В скорость вращения  $v(r)$  вводится малое возмущение, зависящее от  $\varphi$ , и решается нестационарная задача. Стационарное решение представляется в виде кольца, где по  $\varphi$  все

постоянно. В процессе эволюции кольцо ломается, образуются рукава плотности в виде спиралей, число которых зависит от числа периодов начального возмущения на  $[0, 2\pi]$  и сохраняется во время всего расчета. Наблюдается раздвоение рукавов и истечение газа через боковую поверхность вдоль рукавов. На внешней границе поставлены свободные краевые условия. Вблизи границы наблюдаются области пониженного давления, через которые газ под действием гравитации притекает в диск. За время расчета масса диска увеличилась в два раза. На рисунке 1 представлена картина течения в плоскости  $z=0$  на безразмерное время  $T=3.5$ , масса диска  $M_d=1.05$ .

*Список литературы:*

1. Велихов Е.П., Луговский А.Ю., Мухин С.И., Попов Ю.П., Чечеткин В.М. Астрон. журн. 84, 1, 2007.
2. Strakhovskaya L.G. Mathematical Models and Computer Simulations, Vol. 10, No. 1, pp. 15–25, 2018.

## NOTES ON THE LAVRENTIEV PHENOMENON

**M.D. Surnachev<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*KIAM RAS, Moscow, peitsche@yandex.ru*

In [1] Zhikov constructed his famous example of the Lavrentiev phenomenon (gap) for a 2D variational problem with a nonstandard Lagrangian of the form  $f(x, \xi) = p(x)^{-1} |\xi|^{p(x)} - b \cdot \xi$ . He showed that the infimum over the set of smooth functions can be strictly greater than the infimum over the natural energy space. In this example the variable exponent  $p(x)$  was piecewise constant with the checkerboard structure, equal to  $p_1 < 2$  on black cells and to  $p_2 > 2$  on white cells. Later this example was refined in [2] and [3], together with various sufficient conditions ensuring the absence of the Lavrentiev gap / guaranteeing the density of smooth functions in the natural energy space. Similar effects are observed also in the presence of weights [2], [4]. The important feature of Zhikov's example is that the exponent  $p(x)$  has a saddle-point structure with the dimensional threshold separating the values  $p_1$  and  $p_2$ . If one takes both  $p_1$  and  $p_2$  less than 2 or greater than 2 then smooth functions are dense in the corresponding Sobolev-Orlicz space and there is no gap. In the subsequent elaborations [2], [3], [5] the dimensional threshold remained. This led people to the conjecture that it is crucial for the presence of the Lavrentiev phenomenon. In Zhikov's example the set of

saddle-type contact points consists of only one point so its dimension of zero. The authors of [5] constructed an example with a fractal set of saddle-type contact points, but it was still not free from the dimensional threshold. In our work we provide a general construction providing a piecewise constant variable exponent  $p(x)$  taking (any) two values  $p_1$  and  $p_2$ , not necessarily separated by the dimension, such that smooth functions are not dense in the corresponding Sobolev-Orlicz space  $W^{l,p(x)}(D)$ . The contact set is a Cantor set and was inspired by [4]. The same construction also shows accuracy of some results from [6] and [7] concerning minimizers of integral functionals with integrands of the type  $|\xi|^p + a(x)|\xi|^q$ ,  $q > p$ .

This is a joint work with Lars Diening and Anna Kh. Balci from Bielefeld University. The work is supported by the Russian Science Foundation under grant 19-71-30004.

### *References*

1. Zhikov, V.V. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* Vol. 50. No. 4. 675-710, 1986.
2. Zhikov, V. V. *Russian J. Math. Phys.* Vol. 3. No. 2. 249-269, 1995.
3. Zhikov, V.V. *Zap. Nauchn. Sem. POMI.* Vol. 310. 67-81, 2004.
4. Zhikov, V.V. *Mat. Sb.* Vol. 189. No. 8. 27-58, 1998.
5. Fonseca, I., Maly, J., Mingione, G. *Arch. Ration. Mech. Anal.* Vol. 172. No. 2. 295-307, 2004.
6. Colombo, M., Mingione G. *Arch. Ration. Mech. Anal.* Vol. 218. No. 1. 219-273, 2015.
7. Baroni P., Colombo M., Mingione G. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, Vol. 57. No. 2: Art. 62. 48 pp., 2018.

## **ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Т.А. Сушкевич<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*ИИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, tamaras@keldysh.ru*

В год 60-летия научной деятельности автора и 55-летия первой статьи [1] в области теории переноса излучения объективно считаю своими учителями трех великих ученых 20-го века, которые определили научные направления моего творчества и научное наследие которых отражено и в результатах моей научной деятельности: Трижды

Герой Социалистического Труда Главный Теоретик Космонавтики М.В.Келдыш – покорение космоса и становление космических исследований и дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ); Дважды Герой Социалистического Труда А.Н.Тихонов – сформировал «физика-теоретика» по специальности «теоретическая и математическая физика» как одного из первых специалистов по математическому моделированию, заложил высочайший уровень математики в прикладных задачах, разработал теорию и методы решения обратных задач, без которых невозможно ДЗЗ; профессор Е.С.Кузнецов – научный руководитель в 1959-1966 гг. со студенческих лет, основатель отечественной научной школы по теории переноса излучения, нейтронов, заряженных частиц и создатель в Институте Келдыша в 1955 году уникального и единственного в мире отдела № 7 «Кинетические уравнения».

Е.С.Кузнецов, В.С.Владимиров и Г.И.Марчук – главные специалисты по теории переноса излучения, нейтронов и заряженных частиц в стратегических проектах «ракетно-ядерный щит» и «атомная энергетика», заложившие фундаментальные основы вычислительной математики и математического моделирования в этих областях и оказавшие влияние на мои математические результаты в космических исследованиях благодаря личному общению.

65 лет назад, 14 февраля 1954 года, в кабинете М.В.Келдыша состоялось первое совещание, на котором впервые обсуждался вопрос о возможности создания и запуска в космическое пространство ПЕРВОГО искусственного спутника Земли (ИСЗ). О программе космических исследований заговорили в 1955 году. По указанию М.В. Келдыша из Академии наук СССР разослали письма в разные организации и ученым разных специальностей с одним вопросом «**Как можно использовать космос?**» Мнений и предложений поступило много и разных. Для убеждения руководителей СССР в необходимости освоения космического пространства и запусков космических спутников и кораблей М.В. Келдыш как уже признанный государственный деятель выделил **две главные задачи: разведка и наблюдение Земли**, вокруг которых сформировались многие научно-исследовательские проекты, определилась новая отрасль человеческой деятельности, в 1955 году началось строительство космодрома «Байконур» и были созданы Министерство общего машиностроения и другие ведомства.

В ноябре 1955 года из АН СССР в ЦК КПСС и Совет Министров было направлено письмо с «Программой космических исследований». Так родилось новое научно-практическое направление REMOTE SENSING – ДЗЗ с приложениями в разных отраслях народного хозяйства и экономики, включая военно-оборонный комплекс, которое

послужило драйвером создания и развития не только вычислительной техники, но и разных направлений в информационных технологиях, в т.ч. телекоммуникационные технологии, Интернет, ГРИД и «облачные» системы, big data и др.

В 2019 году отмечается 60-летие первых в истории человечества полетов к Луне трех советских автоматических межпланетных станций: 02.01.1959 - «Луна-1», 14.09.1959 - «Луна-2», 04.10.1959 - «Луна-3», обеспеченных коллективом Института Келдыша. В XXI веке подтверждается стратегический выбор, сделанный математиком-легендой академиком М.В. Келдышем в 1955 году: благодаря достижениям в космосе и компьютерах созданы фундаментальные и технологические основы для реализации Всемирной Глобальной Научной Программы «Будущее Земли» и новых «Лунных Программ», а проекты обеспечения безопасности страны и планеты стимулируют создание новых суперкомпьютеров для решения «больших» задач и серверов для хранения big data и получение новых достижений в развитии и применении теории переноса излучения. Как XX век был веком «электроники», так XXI век становится веком «световых технологий».

В докладе представлены результаты становления методов ДЗЗ и расчетов радиационного поля Земли от инженерного подхода до теории обобщенных решений краевых задач для уравнений переноса и теории передаточных операторов на основе обобщенных функций [2], созданных автором [3-10] и активно развиваемых для новых математических задач и приложений, в том числе для «факторизации» и «декомпозиции» задач для параллельных супервычислений и гибридных численных методов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-01-00609, 17-01-00220).

#### *Список литературы:*

1. Масленников М.В., Сушкевич Т.А. ЖВМ и МФ. Т. 4. № 1. 23-34, 1964.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 280 с. 1976.
3. Сушкевич Т.А., Мишин И.В. Докл. АН СССР. Т. 263. № 1. 60-63, 1982.
4. Сушкевич Т.А., Мишин И.В., Иолтуховский А.А. Докл. АН СССР. Т. 269. № 1. 84-88, 1983.



5. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А. Докл. АН СССР. Т. 271 № 1. 89-93, 1983.
6. Сушкевич Т.А., Мишин И.В., Иолтуховский А.А. ЖВМ и МФ. Т. 24. № 1. 92-108, 1984.
7. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 296 с. 1990.
8. Сушкевич Т.А. Докл. РАН. Т. 350. № 4. 460-464, 1996.
9. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А. Докл. РАН. Т. 364. № 4. 457-461, 1999.
10. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 661 с. 2005. (при поддержке РФФИ)

## **ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ**

**А.А. Таюрский<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, [taurskiy2001@mail.ru](mailto:taurskiy2001@mail.ru)*

В докладе численно исследовано нелинейное поглощение плоской альфвеновской волны, падающей на неподвижную границу диссипативной плазмы, обусловленное магнитной вязкостью, гидродинамическими вязкостями и теплопроводностями электронов и ионов, тормозным, фоторекомбинационным и синхротронным излучениями и обменом энергией между плазменными компонентами. Данное исследование обусловлено предложенным рядом авторов в 2011 г. механизмом разогрева солнечной короны и генерации солнечного ветра как результата затухания в плазме альфвеновских волн, генерируемых в нижних, значительно более холодных солнечных слоях. В основу исследования положены уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики с полным учётом инерции электронов. Предложенная неявная разностная схема расчёта плоскопараллельных течений двухжидкостной плазмы позволила выявить ряд важных закономерностей поглощения. В частности, установлена зависимость поглощения от тормозного и фоторекомбинационного излучений. Обнаружен эффект запираания альфвеновской волны в диссипативной плазме и возникновение квазистационарного режима поглощения альфвеновской волны. А

также при учёте фоторекомбинационного излучения электронная и ионная температуры заметно уменьшаются вместе с глубиной проникновения в плазму по сравнению со случаем, учитывающем только тормозное излучение.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект №16-11-10278).

*Список литературы:*

1. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме // Математическое моделирование. Т.25. №8. С.65-79. 2013.

**ДВУХСПИРАЛЬНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ МОТИВЫ В БЕЛКАХ  
И АНАЛИЗ ИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

**Д.А. Тихонов<sup>1,2</sup>, Л.И. Куликова<sup>1</sup>, А.В. Ефимов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт математических проблем биологии РАН – филиал ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Пущино, Московская область, 142290, likulikova@mail.ru*

<sup>2</sup>*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, Московская область, 142290, dmitry.tikhonov@gmail.com*

<sup>3</sup>*Институт белка РАН, Пущино, Московская область, 142290, efimof@protres.ru*

Всесторонне изучение структурных мотивов в белках крайне актуально и важно для понимания принципов укладки полипептидной цепи в пространственные структуры и знания всех возможных конформаций исследуемых мотивов и полипептидной цепи в целом. Полученные знания необходимы для установления закономерностей структурной организации, а также могут быть весьма полезны при решении задач автоматического распознавания и предсказания различных структурных мотивов белковых молекул. Структурные мотивы имеют уникальные укладки полипептидной цепи в пространстве, они могут играть определяющую роль в процессе сворачивания белка. В настоящей работе всесторонне исследуются геометрические характеристики мотивов, состоящих из двух любого типа спиралей, связанных между собой различной длины и конформации перетяжкой. Для этого была создана база данных, в

которую отобраны из банка белковых данных (PDB) пары связанных перетяжками соседних по цепи спиралей. Все множество отобранных структур разбито на три подмножества по критерию пересечения проекций спиралей на параллельные плоскости, проходящие через оси спиралей. В зависимости от типов спиралей, образующих спиральные пары, можно поделить все множество отобранных структурных мотивов на шесть типов структур. Далее проводился анализ характеристик всех типов и подмножеств спиральных пар: минимального и межплоскостного расстояний между спиральями, углов между осями спиралей, длины спиралей, площади и периметра полигона пересечения проекций спиралей. Представлены статистические оценки распределений исследуемых характеристик. Проведено также исследование зависимости торсионных углов между осями спиралей от их длины. Рассматриваются также возможные причины такой взаимосвязи. Полученные результаты имеют очень большое значение для определения взаимной ориентации спиралей при моделировании и предсказании структуры белков.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-07-01031.

*Список литературы:*

1. Тихонов Д.А., Куликова Л.И., Ефимов А.В. Математическая биология и биоинформатика. Vol. 11. 170–190, 2016.
2. Тихонов Д.А., Куликова Л.И., Ефимов А.В. Математическая биология и биоинформатика. Vol. 12. № 1. 83–101, 2017.
3. Тихонов Д.А., Куликова Л.И., Ефимов А.В. Математическая биология и биоинформатика. Vol. 12. № 2. 398–410, 2017.
4. Тихонов Д.А., Куликова Л.И., Ефимов А.В. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. № 59, 2018.

## **КРОСС-КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЭНТРОПИЯ ШЕННОНА КАК МЕРА СОПРЯЖЕННОСТИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.**

**Д.А. Тихонов<sup>1</sup>, А.Б. Медвинский<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ИМПБ РАН филиал ИПМ им. М.В. Келдыша, ИТЭБ РАН, Пущино,  
dmitry.tikhonov@gmail.com*

<sup>2</sup>*ИТЭБ РАН, Пущино, alexander\_medvinsky@yahoo.com*

Предложен способ оценки взаимного влияния коротких временных рядов, основанный на обобщении понятия спектральной энтропии в применении к спектрам кросскорреляционных функций. Приведены алгоритмы расчета и программы. Проведен анализ временных рядов измерений обилия планктона в аквасистеме озер республики Беларусь с целью выявления взаимных корреляций. Выявлены корреляции обилия бактериопланктона и сезонной температуры. Проанализированы особенности корреляции обилия зоопланктона и фитопланктона с температурой в зависимости от водоема.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 17-04-00048)

### *Список литературы:*

1. Тихонов Д.А., Медвинский А.Б. О корреляции временных рядов в экологии аквасистем. Препринт ИПМ № 49, Москва, 2019.

## **РЕКОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ТЕЛА ПО ДАННЫМ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

**М.Н. Устинин<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*ИМПБ РАН – филиал ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Пущино,  
ustinin@impb.ru*

Предложен новый подход к реконструкции электрической активности человеческого тела по многоканальным записям внешнего магнитного поля – метод функциональной томографии. Этот подход основан на детальном частотном анализе и выделении частотных компонент с высокой когерентностью и похожими паттернами.

Математические основы метода были заложены в работе [1] и состоят в следующей последовательности операций: - прямое преобразование Фурье полного временного ряда; - обратное преобразование Фурье на каждой частоте; - выделение независимых компонент полученного сигнала; - разбиение экспериментального пространства на элементарные ячейки с нужным разрешением (1-3 мм); - генерация множества пробных источников (3-5 млн) в принятой физической модели; - решение обратной задачи для каждой независимой компоненты методом полного перебора. В результате выполнения этого алгоритма строится массив функциональной томограммы размером  $N \times M$ , где  $N$  (число независимых компонент) – несколько десятков тысяч, а  $M$  равно 7 и содержит информацию о номере компоненты, частоте, номере ячейки в пространстве, спектральной мощности, направлении и амплитуде элементарного источника, а также о качестве решения обратной задачи. Эту томограмму можно представить в воксельном виде, где координаты вокселя определяются его положением в пространстве датчиков поля, а яркость – суммой энергий или амплитуд источников поля, расположенных в этом вокселе. Для дальнейшего анализа к полученному распределению может быть применена фильтрация по качеству решения, частоте, энергии и амплитуде источника поля. В работе [2] метод был успешно верифицирован на компьютерных экспериментах и на физическом фантоме, а затем применен к данным магнитной энцефалографии. Исследовался альфа-ритм у десяти контрольных субъектов. Было найдено, что полученные функциональные томограммы хорошо согласуются с имеющимися представлениями о природе альфа-ритма, при этом они обладают индивидуальными различиями. Разрешение метода по частоте определяется временем измерений, для эксперимента длительностью 7 минут оно равно 1/420 Гц, а пространственное разрешение определяется вычислительными возможностями, в статье оно было в диапазоне 1-3 мм. Применение метода функциональной томографии для изучения альфа-ритма человека иллюстрируется на рисунке 1. Можно видеть изменение функционального состояния мозга при закрывании глаз: на границе теменной и затылочной доли мозга возникает группа мощных источников электрической активности.

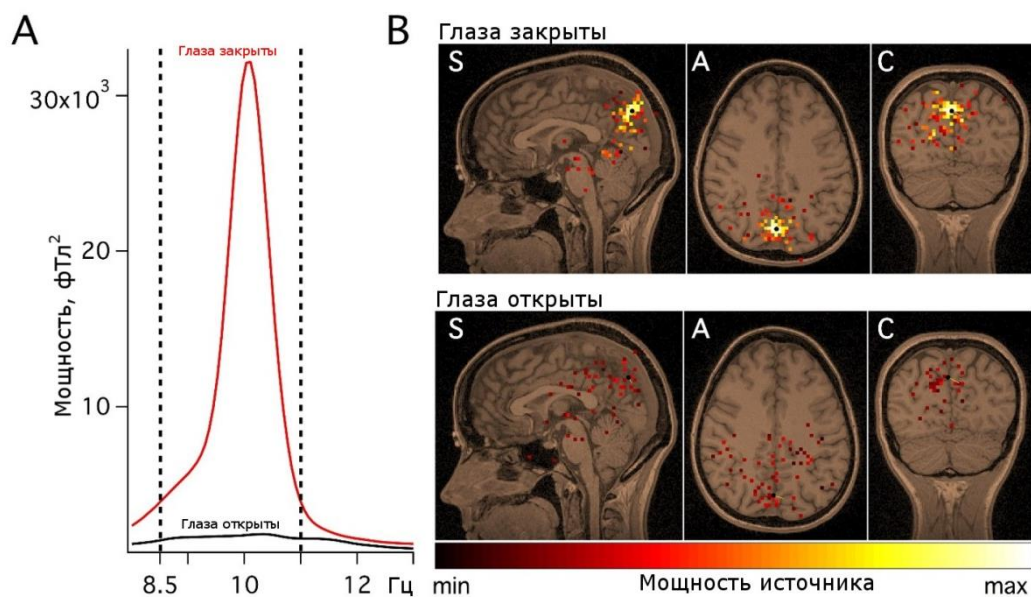


Рис. 1. Альфа-ритм: Спектры мощности (А) и функциональные томограммы (В) для измерений с закрытыми и открытыми глазами. Показаны стандартные сечения магниторезонансной томограммы головы с наложенной функциональной томограммой.

Метод также использовался для восстановления функциональной структуры сердца и скелетных мышц [3,4]. Полученные результаты разумно интерпретируются анатомически, что позволяет говорить о применимости метода в задачах диагностики.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00178).

#### *Список литературы:*

1. Llinas R.R., Ustinin M.N. Frequency-pattern functional tomography of magnetoencephalography data allows new approach to the study of human brain organization. *Front. Neural Circuits*. 2014. V. 8. P. 43. doi:10.3389/fncir.2014.00043

2. Llinas R.R., Ustinin M.N., Rykunov S.D., Boyko A.I., Sychev V.V., Walton K.D., Rabello G.M. and Garcia J. Reconstruction of human brain spontaneous activity based on frequency-pattern analysis of magnetoencephalography data. 2015. *Frontiers in Neuroscience*. 9:373. doi:10.3389/fnins.2015.00373

3. Устинин М.Н., Масленников Ю.В., Рыкунов С.Д., Крымов В.А. Реконструкция функциональной структуры сердца человека по малока-

нальной магнитной кардиограмме // Математическая биология и биоинформатика. 2018; 13(2):392-401 doi: 10.17537/2018.13.392

4. Устинин М.Н., Рыкунов С.Д., Поликарпов М.А., Юреня А.Ю., Наурзаков С.П., Гребенкин А.П., Панченко В.Я. Реконструкция функциональной структуры кисти руки человека по магнитной миограмме. // Математическая биология и биоинформатика. 2018; 13(2):480-489 doi: 10.17537/2018.13.480

## HIGH PRECISION COMPUTATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS

V.P. Varin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*KIAM RAS, Moscow, varin@keldysh.ru*

As is well known, the progress in fundamental physics for the past 100 years is intimately related to constant improvements in the precision of measurements in experiments and the corresponding refinement of fundamental physical constants and their standards.

In mathematics, one would expect an analogous development with the improvement of precision in computations. The more so, since not so recent advances in computer science made high precision computations widely available.

However, high precision computations do not play as big a role in mathematics as high precision measurements in physics.

Pure mathematics mostly does not rely on numerical computations, while modern applied mathematics moves in the direction of parallel computations for numerical solution of big scale problems.

High precision computations in mathematics are relegated mostly to the theory of numbers.

Nevertheless, there exist computational techniques that allow solution of some problems in mathematical physics in such a way as if the problems were integrable and solutions expressed in known functions.

For boundary value problems, there exist the so called methods without saturation [1], while for Cauchy problems, an analogous algorithm based on Taylor expansions can be developed [2,3].

We demonstrate on some examples that high precision computations can play a crucial part in solution of some difficult applied problems, as well as be indispensable in numerical experiments.

*References*

1. Babenko, K.I., Foundations of numerical analysis. M: Nauka. 1986. (in Russian).
2. Varin, V.P. Asymptotic expansion of Crocco solution and the Blasius constant // *Comp. Math. & Math. Phys.* Vol. 58. No 4. 517-528, 2018.
3. Varin, V.P. Integration of ODEs on Riemann surfaces with unbounded precision // *Comp. Math. & Math. Phys.* Vol. 59. No 7. 65-90, 2019. (in Russian).

**KINETIC AND QUASILINEAR EQUATIONS AND  
VARIATIONAL PRINCIPLES**

**V.V. Vedenyapin<sup>1</sup>, S.Z. Adjiev<sup>2</sup>, I.V. Melihov<sup>2</sup>, N.N. Fimin<sup>1</sup>,  
V.M. Chechetkin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*KIAM RAS, Moscow, vicveden@yahoo.com*

<sup>2</sup>*MSU, Moscow, sergeyadzhiev@yandex.ru*

K.I. Babenko was a recognized specialist in quasilinear equations and was interested on connections of hydrodynamics to kinetic theory. He was an official referee for one of the authors (V.V. Vedenyapin) PHD dissertation The hydrodynamic substitution, which is well known in the theory of the Vlasov equation [1–3], has recently been applied to the Liouville equation[4–6]. This give us possibility to derive several classes of quasilinear equations from kinetic ones of Vlasov type [4-6]. Entropy maximum variation principle was applied for obtaining time average for Liouville equation: time means are shown to coincide with those entropy extremums [7-8]. We also apply minimal action principle to derive all types of Vlasov kinetic equations: Vlasov-Poisson and Vlasov-Maxwell-Einstein equations [9-12].

*References*

1. Vlasov A.A. Statistical Distribution Functions. Nauka, Moscow, 1966. (in Russian)
2. Bom D. General Theory of Collective Coordinates. Wiley, New York, 1959; Mir, Moscow, 1964.
3. Vedenyapin V. V., Synitsyn A. V., and Dulov E. I. Kinetic Boltzmann, Vlasov, and Related Equations. Elsevier, Amsterdam, 2011.



4. Vedenyapin V. V., Andreeva A. A., Vorobyeva V. V. Euler and Navier-Stokes equations as self-consistent fields. Dokl. Math. 97, No. 3, 283-285, 2018; translation from Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk 480, No. 4, 405-407, 2018.
5. Vedenyapin V. V., Kazakova T. S., Kisselevskaya-Babinina V. Ya., Chetverushkin B. N. Schrödinger equation as a self-consistent field. Dokl. Math. 97, No. 3, 240-242, 2018; translation from Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk 480, No. 3, 270-272, 2018.
6. Vedenyapin V. V., Negmatov M. A., Fimin N. N. Vlasov- and Liouville-type equations and their macroscopic, energetic and hydrodynamical consequences. (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 81, 2017, no. 3, 45–82; translation in Izv. Math. 81, 2017, no. 3, 505–541.
7. Vedenyapin V. V. and Adzhiev S. Z. Entropy in the sense of Boltzmann and Poincare. Russian Math. Surveys 69:6 995–1029. Uspekhi Mat. Nauk 69:6 45–80, 2014.
8. Vedenyapin V. V. “Time averages and Boltzmann extremals”, Dokl. Math., 78:2, 686–688, 2008.
9. Vedenyapin V. V. , Negmatov M. A. “Derivation and classification of Vlasov-type and magnetohydrodynamics equations: Lagrange identity and Godunov's form, Theoret. and Math. Phys., 170:3, 394–405, 2012.
10. Vedenyapin V. V. and Negmatov M. A. On the Topology of Steady-State Solutions of Hydrodynamic and Vortex Consequences of the Vlasov Equation and the Hamilton–Jacobi Method. Dokl. Math. 87, 240–244, 2013.
11. Vedenyapin V. V. , Pershin I. S. Vlasov–Maxwell–Einstein equation and Einstein lambda, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 039, 17 стр., 2019.
12. Vedenyapin V. V. , Negmatov, M. A. On derivation and classification of Vlasov type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass, Journal of Mathematical Sciences, 202:5, 769–782, 2014.

## МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ГАЗОВ

**Е.В. Вихров**<sup>1,2</sup>, В.О. Подрыга<sup>1,3</sup>, С.В. Поляков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва,  
vikhrov.e@gmail.com, pvictoria@list.ru, polyakov@itamod.ru,*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,  
Москва,*

<sup>3</sup>*Московский автомобильно-дорожный государственный технический  
университет, Москва*

Представленная работа посвящена молекулярно-динамическим расчетам свойств технических газов, исследование которых является традиционной проблемой физики вещества. В настоящее время наблюдается повышенный интерес к данной проблеме в связи с развитием нанотехнологий и их внедрением в различные отрасли промышленности.

Необходимые для моделирования свойства газа выражаются в виде набора макропараметров, включающих кинетические коэффициенты, параметры уравнения состояния, величины кинетической, потенциальной, полной и внутренней энергий. Основное внимание в данной работе уделено расчету коэффициента диффузии. В работе в качестве метода моделирования выбран метод молекулярной динамики [1, 2], численная реализация которого основана на применении схемы Верле в скоростной форме [3].

Исследование выполнено для таких популярных технических газов как аргон, водород, азот и метан. В данной работе была рассмотрена модель, в которой молекулы, состоящие из 2 и более атомов, представляются в виде шара. В соответствии с такой моделью подбирались потенциалы межчастичного взаимодействия. Моделирование производилось при давлении 1 атм, в диапазоне температур 100-900 К. Полученные расчетные данные по коэффициентам диффузии рассмотренных газов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и теоретическими оценками.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 18-37-20062-мол\_а\_вед, 16-29-15095-офи\_м, 17-01-00973-а.

*Список литературы:*

1. Haile, J.M. Molecular Dynamics Simulations. Elementary Methods. NY: John Wiley & Sons Inc., 489 p., 1992.
2. Frenkel, D. and Smit, B. Understanding Molecular Simulation. From Algorithm to Applications. NY: Academic Press, 638 p., 2002.
3. Verlet, L. Computer «experiments» on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. Phys. Rev. Vol. 159. 98-103, 1967.

## ОБ АСИМПТОТИКЕ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ПРЕПЯТСТВИЯ

**В.И. Власов<sup>1</sup>, С.Л. Скороходов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*ФИЦ ИУ РАН, Москва, vlasov@ccas.ru*

Задача о стационарном обтекании клина потоком идеальной жидкости с образованием каверны изучалась во многих работах, в том числе в [1]-[11]. Она рассматривалась в рамках теории струй как задача с неизвестной свободной границей на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  и для ее решения использовались методы комплексного анализа, обладающие большими возможностями. Вводился комплексный потенциал течения  $f(z)$ , так что скорость  $V(z) = V(z)\exp(i\theta(z))$  выражается через него в виде  $V(z) = f'(z)$ , где штрих означает производную, черта – комплексное сопряжение, а  $V(z)$  и  $\theta(z)$  – модуль скорости и угол ее наклона к вещественной оси. Для течений со свободной границей, аналогичных рассматриваемому, вводится число кавитации  $Q = (V_Q^2 - V_0^2) / V_0^2$ , где  $V_0$  и  $V_Q$  – заданные значения модуля скорости соответственно на бесконечности и на свободной линии тока, ограничивающей каверну. Коэффициент сопротивления  $C_x(Q)$  определяется как отношение силы сопротивления  $P$ , являющейся  $x$  – компонентой интеграла сил, действующих на препятствие (в нашем случае – это клин  $L$ , длина стенки которого равна  $l$ ), к произведению  $\rho V_0^2 l$ , где  $\rho$  – плотность набегающего потока, а сила сопротивления  $P = \int_L (p(z) - p_Q) \sin \theta(z) |dz|$ , где  $p(z)$  и  $p_Q$  – давление на клин  $L$  соответственно со стороны потока и каверны. Основным инструментом при решении рассматриваемой задачи является функция годографа Жуковского, которая вводится по формуле  $\omega(z) = -\ln(V_Q^{-1} f'(z))$ .

Рассматриваемая задача об обтекании равнобочного клина сводится к построению комплексного потенциала течения  $w = f(z)$ .

Поскольку область, занимаемая течением, симметрична относительно вещественной оси, то задачу будем решать в ее верхней половине  $B_Q$ , которая является криволинейной полуплоскостью. Тогда согласно [12] комплексный потенциал осуществляет конформное отображение области  $B_Q$  на верхнюю полуплоскость  $\{\text{Im } z > 0\}$  с условиями  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) = V_0$ . Если функция  $f(z)$  найдена, то все остальные характеристики течения могут быть через нее выражены.

Решение задачи находится следующим образом. В соответствии с определением функции годографа убеждаемся, что суперпозиция функций  $\zeta = \omega(z)$  и  $z = f^{-1}(w)$ , обозначаемая через  $F(w) = \omega(f^{-1}(w))$ , осуществляет конформное отображение верхней половины плоскости  $w$  на область годографа  $G_Q$  на плоскости  $\zeta$  со следующим соответствием точек:  $F(\infty) = \ln\sqrt{1+Q}$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F(b) = i\pi\alpha$ , где  $b$  – образ конца клина, а  $\pi\alpha$  – угол наклона клина. Из формулы для функции годографа вытекает  $1/f'(z) = \exp(\omega(z))/V_0$ . Подставляя в нее  $z = f^{-1}(w)$  получаем равенство  $f^{-1}(w) = \exp(F(w))/V_0$ , интегрируя которое находим зависимость  $z = f^{-1}(w) = (1/V_0) \int_0^w \exp(F(w)) dw$ . Обращая ее, например, с помощью численных процедур, получаем искомый потенциал течения  $w = f(z)$ .

Обратимся к вопросу о получении асимптотики коэффициента сопротивления  $C_x(Q)$  при стремлении числа кавитации  $Q$  к нулю. Анализ схем кавитационного обтекания равнобочного клина, предложенных в цитированных выше работах, показал, что область годографа  $G_Q$  для всех схем представляет собой полуполосу  $\{\zeta: \text{Im } \zeta \in (0, \pi\alpha), \text{Re } \zeta \in (0, +\infty)\}$ , к отрезку  $\{0 < \zeta < \ln\sqrt{1+Q}\}$  границы которой присоединена некоторая область, и схемы отличаются как раз видом этой присоединенной области.

Предлагаемый подход, который можно рассматривать как некоторую обобщенную схему замыкания каверны, заключается в том, чтобы рассмотреть сразу целый класс таких присоединенных областей и получить для этой обобщенной схемы (при некоторых естественных ограничениях) асимптотики при  $Q \rightarrow 0$  для основных искомых величин, прежде всего, для  $C_x(Q)$ . Математическим аппаратом для этого может служить теория конформного отображения сингулярно деформируемых областей, разработанная в [13], так как область годографа  $G_Q$  представляет собой сингулярно деформированную полуполосу  $\{\zeta: \text{Im } \zeta \in (0, \pi\alpha), \text{Re } \zeta \in (0, +\infty)\}$ , так что  $G_Q$  стремится к этой полуполосе как к ядру в смысле Каратеодори [14] при  $Q \rightarrow 0$ . С помощью реализации этой схемы был получен, в частности, следующий вид асимптотики для коэффициента сопротивления  $C_x(Q) = (1 + Q) C_x(0) [1 + \lambda K(\alpha) (Q/2\alpha)^2 + O(Q^3)]$ , где параметр  $\lambda$  для любых присоединенных областей лежит на отрезке  $[3/4, 1]$ , что включает все

рассмотренные ранее в цитированных работах схемы замыкания каверны; величина  $K(\alpha)$  вычисляется в явном виде через гипергеометрическую функцию Гаусса.

*Список литературы:*

1. Helmholtz H. Keonigl. Akad. Wissenschaften, Berlin, 1968.
2. Kirchhoff G. J. reine angew. Math. Bd. 70. 289-298. 1869.
3. Жуковский Н.Е. Матем. сборник. Т. 15. 1890.
4. Riabouchinsky D. Proc. London Math. Soc. V. 19, Ser. 2. 206-215. 1920.
5. Lighthill M.J. ARC Rep. and Memo. No 2112, 1945.
6. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы, каверны. М.: Мир, 1964.
7. Tulin M.P. Journ. Ship. Res. Vol. 8, No 3. P. 16-37, 1964.
8. Larock B.E., Street R.L. J. Fluid Mech. Vol. 29. No 2, 1967.
9. Барский И.Л. Ж. вычисл матем. и матем. физ. Т. 12, No 3. 686-699, 1972.
10. Эфрос Д.А. Докл. АН СССР. Т. 51, No 4, 1946.
11. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
13. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докт. дисс. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
14. Caratheodory C.: Mathem. Ann. V. 72, 107-144, 1912.

## **ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ**

**С.С. Власова**

*АО «Казанское ОКБ «Союз», Казань, sveta040790@yandex.ru*

Автором проведено исследование тепловой свободной (естественной) конвекции, индуцированной квадратичным законом распределения температуры на нижней твердой границе бесконечного геометрически анизотропного слоя вязкой несжимаемой жидкости в рамках класса точных решений с линейным распределением скоростей по одной из координат (горизонтальной) и с зависимостью коэффициентов от вертикальной координаты. Поле температуры и давления описываются, квадратичными формами по горизонтальной координате. Коэффициенты, так же как и коэффициенты поля скоростей, зависят от вертикальной координаты. Математическое моделирование рассмотренной задачи осуществлялось в рамках двумерной стационарной системы уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска [1, 2]. На верхней свободной границе учитываются фазовые превращения в жидкости, которые описываются законом Ньютона-Рихмана. Полученные точные решения обобщают решения Остроумова-Бириха [3, 4] не только для давления и температуры, но и для скоростей.

Точное решение четырех рассмотренных краевых задач, соответствующих четырем типам нагрева нижней границы, вычислено с использованием линеаризованных уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска. Линеаризация проведена не типичным способом, а с использованием двух характерных масштабов с учетом геометрической анизотропии рассматриваемого слоя и с преобладанием горизонтального размера над вертикальным, что характерно для крупномасштабных течений. Безразмерное число Грасгофа (конвективное число Рейнольдса), используемое при построении безразмерных решений, при линеаризации может достигать значений порядка нескольких сотен и тысяч. Линеаризация возможна при числе Грасгофа, обратно пропорциональном квадрату геометрической анизотропии. При данной линеаризации, полученные точные решения для тонких слоев жидкости справедливы не только для ламинарных, но и для турбулентных течений.

При анализе полученных решений выявлено, что поля скоростей совпадают для первого способа (типа) нагрева и третьего, для второго и четвертого соответственно. Выявлены оценки для безразмерного числа Био, при которых возникают противотечения (застойные точки), подтекание жидкости к свободной границе и оттекание. Рассматриваемое течение вязкой несжимаемой жидкости является вихревым. Изолинии температуры для всех четырех краевых задач являются локально гиперболическими или локально параболическими; изолинии давления, напротив, для первой и второй краевой задачи при выявленных значениях безразмерного числа Био могут принимать локально эллиптический тип. Таким образом, выявляются зоны повышенного и пониженного давления в сравнении с атмосферным.

Отметим, что найденные точные решения, безусловно, справедливы при определенных безразмерных комплексах подобия, а линеаризация накладывает дополнительные ограничения. Проведенная линеаризация по двум характерным масштабам существенно расширяет классические методы приведения уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска к безразмерному виду. Полученные решения имеют свою область применения и могут быть расширены в дальнейших исследованиях.

*Список литературы:*

1. Boussinesq J. Theorie Analytique de la Chaleur, Paris, Gauthier – Villars, Vol.2, 665 p. 1903.
2. Oberbeck A. Ueber die Warmleitung der Flissigkeiten bei Beriicksichtigung der Stromungen infolge von Temperaturdifferenzen / A. Oberbeck // Ann. Phys. Chem. V. 7. P. 271-292. 1879.
3. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Москва: ГИТТЛ, 256с. 1952.
4. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. // ПМТФ, №3. С.69-72. 1966.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИОННЫХ ПОТОКОВ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ**

**Л.В. Вшивкова, Г.И. Дудникова**

*ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, lyudmila.vshivkova@sscc.ru*

В данной работе представлены результаты численного моделирования генерации и взаимодействия высокоскоростных ионных потоков в постоянном магнитном поле. Численная модель основана на применении уравнения Власова для ионной компоненты плазмы и методе частиц в ячейках для его решения. Для электронов используются уравнения магнитной гидродинамики. Применение гибридной модели позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты по сравнению с использованием полностью кинетической модели. Кроме того, данный подход дает возможность изучать физические процессы, которые не могут быть исследованы традиционными гидродинамическими моделями. Созданная модель позволяет рассматривать плазменные неустойчивости на ионных временных и пространственных масштабах, пренебрегая модами, связанными с электронной компонентой плазмы. Представлена новая схема на основе гибридной модели и результаты численного моделирования. Показано, что взаимодействие потоков плазмы сопровождается формированием ударных волн, структура которых зависит от скорости потока и напряженности магнитного поля. Исследован механизм генерации и характеристики пучков ионов на фронте бесстолкновительной ударной волны.

Данная работа поддержана грантом РФФИ № 18-29-21025 мк.

## **ОРИГИНАЛЬНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УДЕЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ ЭНЕРГИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ В XX-XXI ВЕКЕ**

**С.В. Яковлева, С.В. Старченко**

*ИЗМИРАН, Москва, svyakov@izmiran.ru, sstarchenko@mail.ru*

Предлагается новый тип анализа временных рядов, дополняющий известные анализы в определении временных характеристик рассматриваемого ряда. В качестве естественной частотной меры предлагается отношение временной вариации значений ряда к самому



значению, что эквивалентно логарифмической производной или удельной вариации. Положительные удельные вариации равны моментальной степени экспоненциального роста, а отрицательные – падения для модуля рассматриваемой величины.

Предлагаемый анализ определяется и апробируется на ряде значений энергии потенциального геомагнитного поля из IGRF модели 1900-2020гг. (<http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>). Величина полной энергии  $E$ , а также его «удельной вариации»  $S = (\Delta E/\Delta t)/E$  были получены в [1]. Их временные изменения приведены на Рис.1.

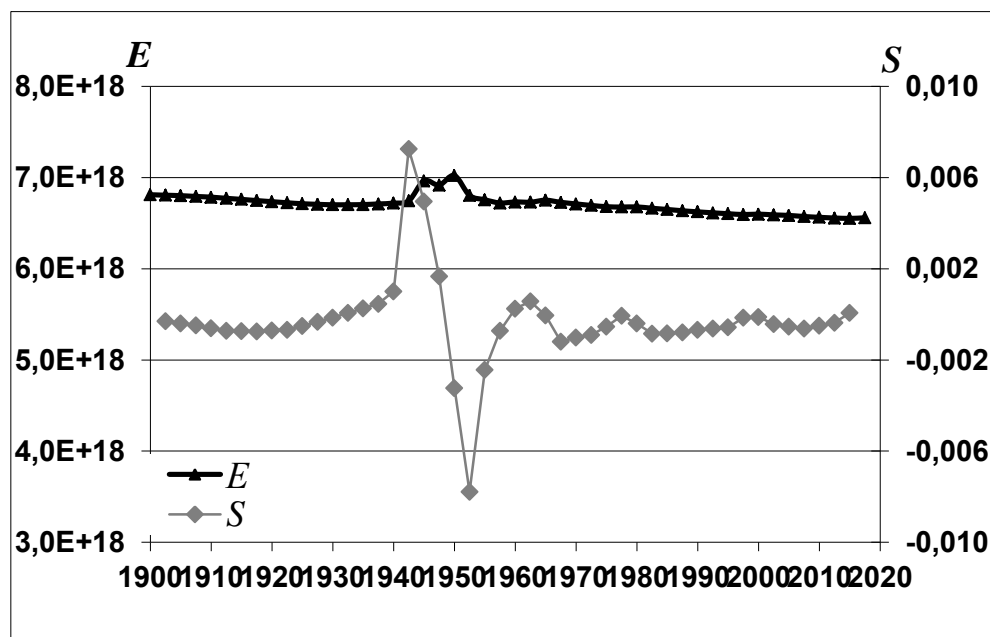


Рис.1. Эволюция энергии геомагнитного поля и его «удельной вариации». Энергия  $E$  выражена в Джоулях, а вариация  $S$  в 1/год.

Свойства таких удельных вариаций определяют их временные характеристики, как на интервалах меньше длины рассматриваемого ряда, так и на интервалах превышающих эту длину. В качестве простейшей статистической гипотезы предполагаем, что каждая из удельных вариаций дает равновероятный вклад в ее проявление для рассматриваемого ряда. Для нашего вероятностно-статистического анализа был построен вероятностный профиль, посчитаны и проанализированы некоторые статистические величины.

Медианная величина для всех удельных вариаций  $-1/(1995 \text{ лет})$ , для положительных  $+1/(1942 \text{ года})$  и для преобладающих отрицательных  $-1/(1628 \text{ лет})$ . Эти значения хорошо согласуются с геодинамо [2], наблюдениями и с общепринятыми наблюдательными оценками западного дрейфа [3]. Менее вероятные экстремальные значения  $-1/(128 \text{ лет})$  и  $-1/(19013 \text{ лет})$  соотносятся с магнитной диффузией и МГД адвекцией, определяя величину проводимости ядра

Земли и среднюю скорость течений. Большое отношение экстремальных удельных вариаций свидетельствует о турбулентном характере геодинамо.

Таблица. Значения статистических величин для удельных вариаций (1/год)

	Минимум	Средне-арифметическое	Медиана	Средне-квадратичное	Максимум
S (общ)	-1/128	-1/3028	-1/1995	1/518	1/138
S (<0)	-1/128	-1/1134	-1/1628	1/634	-1/19013
S (>0)	1/16266	1/604	1/1942	1/350	1/138

Среднеарифметическая вариация  $-1/(3028 \text{ лет})$  по модулю почти в полтора раза меньше модуля медианной вариации, что свидетельствует о весьма существенном отклонении вероятностного профиля от линейной зависимости с более вероятными малыми по модулю вариациями. Среднеквадратичная величина  $1/(518 \text{ лет})$  очень хорошо согласуется с независимой оценкой ее аналога по наблюдениям и динамо моделям в работе [4].

По сравнению с традиционными анализами, базирующимися на разложении Фурье, преимущество нашего анализа удельных вариаций в возможности грубо оценивать характерные времена превышающие длину ряда. Основные недостатки: неполная определенность статистического веса каждой из рассматриваемых вариаций, их изначальная дискретность, отсутствие периодичности и отсутствие возможности разложения по ортогональным функциям. Для некоторого купирования этих недостатков мы вынуждены предположить, что каждая из удельных вариаций дает равновероятный вклад в ее проявление как в пределах рассматриваемого ряда, так и вне его.

#### *Список литературы:*

1. Старченко С.В., Яковлева С.В. Спектры энергии и мощности геомагнитного потенциала с 1840г. // Геомагнетизм и Аэрномия, Т. 59. №1, С. 1–7. 2019.
2. Starchenko S.V. Analytic base of geodynamo-like scaling laws in the planets, geomagnetic periodicities and inversions // Geomagnetism and Aeronomy. V. 54, No 6. P. 694-701. 2014.

3. Петрова Г.Н., Нечаева Т.Н., Поспелова Г.А. Характерные изменения геомагнитного поля в прошлом. М.: Наука. 176 с. 1992.

4. Christensen U.R., Tilgner A. Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos // Nature. V. 429. P. 169-171. 2004.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА-КОРТЕВЕГА

Н. А. Зайцев, Б. В. Критский

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва*

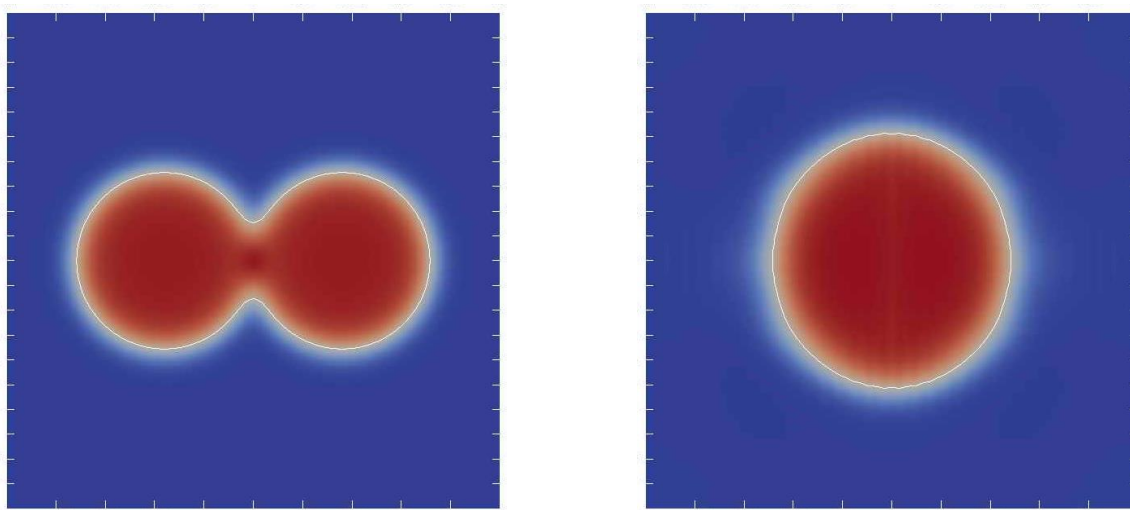
*nikolai\_zaitsev@mail.ru, boris.v.kritskiy@gmail.com*

В работе предложен метод расчета двухфазных течений однокомпонентных сред на основе уравнений Навье-Стокса-Кортевега (НСК), которые предполагают, что в каждой точке области течения есть один набор параметров среды (плотность, скорость, энергия, температура, давление и т.д.). В отличие от модели многоскоростного континуума [1], в которой каждая фаза "размазана" по всему объему и описывается своим набором уравнений движения, в уравнениях НСК разные фазы — это просто разные области пространства параметров среды; осреднения параметров среды не производится, реологические и термодинамические свойства зависят только от среды, но не от режима течения. В уравнениях НСК используется модель диффузного интерфейса, в которой области, занятые средой в разных фазовых состояниях, разделяются не поверхностью раздела фаз, а областью интерфейса, где параметры среды меняются быстро, но непрерывно [2]. Капиллярные эффекты в отсутствии поверхности раздела фаз учитываются добавлением в тензор напряжений тензора статических напряжений Кортевега, выражающийся через пространственные производные плотности. При таком описании двухфазных течений параметры среды попадают в область эллиптичности, расположенные под линией спинодали в плоскости  $(\rho, T)$ , которая характеризуется неустойчивостью решений.

В настоящей работе предлагается численный метод решения системы уравнений НСК, регуляризирующий задачу на дискретном уровне. В основе метода лежит локальный разрывный метод Галеркина, предложенный в 1998 году Кокбурном и Шу [3] для нестационарных уравнений конвекции-диффузии. Суть метода заключается в том, чтобы

записать систему законов сохранения, содержащих старшие пространственные производные, в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка и применить к ней разрывный метод Галеркина. В работе расчеты проводились для среды Ван-дер-Ваальса, т. к. многие вычислительные трудности, определяемые наличием так называемой области эллиптичности в пространстве определяющих термодинамических параметров и зон резкого изменения параметров среды, для реальных двухфазных сред и среды Ван-дер-Ваальса совпадают.

В соответствии с идеей метода [3], для учета производных порядка выше первого вводятся дополнительные переменные. Для расширенного набора искомым функций выписывается система определяющих уравнений в слабой постановке и решается с помощью разрывного метода Галеркина. Нормальные потоки на гранях, относящиеся к конвективной части вычисляются по схеме Лакса-Фридрикса. Остальные граничные потоки берутся как полусумма потоков слева и справа от границы. Схема имеет теоретически произвольный порядок точности и обеспечивает строгую консервативность. Шаг по времени выбирался из соображений точности.



а

б

Рис. 1. Результаты моделирования (поле плотности) слияния двух капель под действием сил поверхностного натяжения; (а) - начальная форма капли, (б) - промежуточная форма, близкая к сферической.

На рисунке 1 приводятся результаты расчета слияния двух капель под действием капиллярных сил. На рисунках цветом показаны поля плотности в различные моменты времени. Видно, что осцилляции в зоне фазового перехода, где плотность меняется от плотности пара до

плотности жидкости, отсутствуют. Параметры среды Ван дер Ваальса выбраны такими, чтобы свойства среды были близки к свойствам воды.

Таким образом, разработан метод расчета двухфазных течений однокомпонентных жидкостей в рамках модели диффузного интерфейса, учитывающий капиллярные силы. Метод позволяет рассчитывать монотонные на межфазном интерфейсе решения для уравнений состояния типа Ван дер Ваальса и не требует отслеживания межфазных границ, что позволяет использовать его для расчета возникновения и движения большого количества пузырьков и капель. Эти свойства делают его перспективным для использования в прямом численном моделировании сложных течений (DNS).

Работа поддержана грантом РФФ №19-71-30004.

*Список литературы:*

1. Р.И. Нигматулин, Динамика многофазных сред. Ч. I и II. М.: Наука, 464 с. и 360 с., 1987.
2. D.M. Anderson, G/B. McFadden, A.A. Wheeler, // Annu. Rev. Fluid Mech. 30 139–165. 1998.
3. V. Cockburn and C.-W. Shu // SIAM J. Numer. Anal., 35, pp. 2440-2463. 1998.

**ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ УСТОЙЧИВО-СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА**

**Г.В. Засько<sup>1</sup>, А.В. Глазунов<sup>2</sup>, Е.В. Мортиков<sup>3,2</sup>,  
Ю.М. Нечепуренко<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
125047, Москва, zasko.gr@bk.ru, yimnech@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН,  
119333, Москва, and.glas@gmail.com*

<sup>3</sup>*Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В.  
Ломоносова, 119234, Москва, evgeny.mortikov@gmail.com*

Крупномасштабные структуры на фоне мелкомасштабной турбулентности часто наблюдаются в геофизических пограничных слоях и вносят существенный вклад в обмен импульсом, теплом и влагой между свободной атмосферой и подстилающей поверхностью

[1]. Иногда возникновение таких структур можно объяснить при помощи анализа гидродинамической устойчивости системы, линеаризованной относительно среднего состояния и учитывающей турбулентность путем введения коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности [2,3]. Однако, во многих случаях механизм образования крупномасштабных структур на фоне мелкомасштабной турбулентности остается необъясненным. Примером таких структур являются слоистые структуры в поле температуры, наблюдаемые в природе и при прямом (DNS) или вихререзающем (LES) численном моделировании устойчиво-стратифицированной атмосферной турбулентности [4].

В работе [5] было проведено DNS-моделирование устойчиво-стратифицированного турбулентного течения Куэтта. Это модельное течение близко к турбулентным течениям в пограничных слоях атмосферы и океана. При больших числах Рейнольдса, в широком диапазоне статической устойчивости, характеризуемой различными значениями числа Ричардсона, наряду с хаотической турбулентностью течение Куэтта содержит крупные структуры, которые могут быть выделены из результатов DNS-моделирования путем разложения мгновенных полей в комплексные ряды Фурье по горизонтальным переменным и отбора крупномасштабных гармоник. В случаях, близких к нейтральной стратификации, эти структуры представляют собой крупномасштабные вихри приблизительно круглой формы в поперечном сечении канала, а в случае устойчивой стратификации – крупномасштабные наклонные слои в поле температуры в продольном сечении канала.

В настоящем докладе образование таких структур связывается с возникновением и развитием в мелкомасштабном турбулентном потоке оптимальных возмущений. Оптимальные возмущения вычислялись на основе линейной модели с помощью технологии, разработанной и описанной в работах [6,7]. Все необходимые параметры для расчета оптимальных возмущений были получены по данным DNS-моделирования. Качественное и количественное сравнение крупномасштабных структур с соответствующими им по волновым числам оптимальными возмущениями показало совпадение их пространственных масштабов и конфигураций.

Вычисление оптимальных возмущений (проект № 17-71-20149) и прямое численное моделирование (проект № 17-17-01210) выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда на оборудовании Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

*Список литературы:*

1. Drobinski P., Brown R., Flamant P., Pelon J. Evidence of organized large eddies by ground-based doppler lidar, sonic anemometer and sodar. // Bound.-Layer Meteor. Vol. 88, No. 3, P. 343-361. 1988.
2. Lilly D.K. On the instability of Ekman Boundary Flow // J. Atmos. Sci. Vol. 23, No. 5, P. 481-494. 1966.
3. Brown A.R. A Secondary Flow Model for the Planetary Boundary Layer // J. Atmos. Sci. Vol. 27, No. 5, P. 742-757. 1970.
4. Sullivan, P.P., Weil, J.C., Patton, E.G., Jonker, H.J. and Mironov, D.V. Turbulent winds and temperature fronts in large-eddy simulations of the stable atmospheric boundary layer. // J. Atmos. Sci. Vol. 73, No. 4, P.1815-1840. 2016.
5. Глазунов А.В., Мортиков Е.В., Барсков К.В., Каданцев Е.В., Зилитинкевич С.С. О слоистой структуре устойчиво-стратифицированных турбулентных течений со сдвигом скорости// Известия РАН, сер. ФАиО. 2019 (в печати).
6. Бойко А.В., Ключнев Н.В., Нечепуренко Ю.М. Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016.
7. Nечepurenko Yu.M., Sadkan M. A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm // SIAM J. Matr. Anal. Appl. Vol. 32, No. 2, P. 349-363. 2011.

**ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО РЕШЕНИЮ  
УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С ПОМОЩЬЮ СХЕМЫ  
ЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ**

**В.Т. Жуков<sup>1</sup>, О.Б. Феодоритова<sup>1</sup>, Н.Д. Новикова<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, zhukov@kiam.ru,  
feodor@kiam.ru, nn@kiam.ru*

Одной из актуальных задач вычислительной гидродинамики является создание методов расчета трехмерных многокомпонентных течений. Нами для интегрирования по времени нестационарных уравнений Навье-Стокса предложена новая схема LINS (Local Iterations for Navier-Stokes equations). В целях упрощения, не ограничивая

общности, в докладе приводится конструкция схемы для случая однокомпонентных течений. В основе схемы LINS лежит расщепление алгоритма расчета одного временного шага на гиперболический (конвективный) и параболический (диффузионный). Для гиперболической подсистемы расчет одного шага по времени является вычислительно менее затратным и может быть выполнен по явной схеме Годуновского типа с шагом  $\tau_{conv}$ , ограниченным конвективным условием устойчивости. При наличии зон с доминированием диффузии над конвекцией полный расчет проводить по явной схеме практически невозможно. В этом случае можно записать неявную схему, для решения которой, как правило, применяют итерационные алгоритмы, требующие подбора эмпирических элементов (предобусловливателей, критериев окончания итераций). В схеме LINS диффузионный этап реализуется с помощью чебышевской явно-итерационной схемы, не имеющей настроечных параметров – число итераций и итерационные параметры определяются шагом  $\tau_{conv}$  и верхней границей сеточного диффузионного оператора. Результирующая схема обеспечивает выполнение основных законов сохранения, а ее алгоритмическая структура гарантирует эффективность параллельной реализации. Преимущество расщепления состоит в том, что расчет каждого этапа в отдельности требует меньше вычислительных затрат, чем решение полной системы в силу различной природы гиперболических и параболических уравнений.

В данной работе работоспособность схемы LINS демонстрируется на двух примерах. Приводятся результаты решения задачи о тепловой конвекции [1] – нестационарном течении газа при постоянном нагреве границы теплопроводной сжимаемой среды, и задачи расчета сверхзвукового течения в канале переменного сечения [2].

#### *Список литературы:*

1. Полежаев В.И. Численное решение уравнений Навье-Стокса для течения и теплообмена в замкнутой двумерной области. // Дисс. на соискание ученой степени канд. технических наук. М.: НИИТП. 196 с, 1967.
2. Башкин В.А., Егоров И.В. Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики. - М.: ФИЗМАТЛИТ. 332 с. ISBN 978-5-922 1-1524-7, 2013.



## СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ: ФОРМИРОВАНИЕ ПОРИСТОСТИ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКА

Г.И. Змиевская<sup>1</sup>, М.С. Жмылева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия*

Для изучения пористости в материалах при облучении ионами инертных газов [1] как среды одномерных фотонных кристаллов [2] и сегнетоэлектрических свойств (поляризации и восприимчивости, образования доменов и др.) диэлектриков, помещенных во внешнее электрическое поле, а также для моделирования условий получения nano размерных порошков в плазме разряда [3], разработаны устойчивые алгоритмы метода стохастической молекулярной динамики, позволяющие рассматривать неравновесную кинетику фазовых переходов на стадии зародышеобразования в условиях "открытой физической системы", развивая идеи стохастического подхода Я.Б. Зельдовича к моделям конденсации в задачах газодинамики новыми приложениями.

Возникновение пористости в тонких слоях покрытия, облучаемых высокоэнергетическими ионами  $\text{Xe}^{++}$ , является фазовым переходом первого рода. На начальной стадии происходит зарождение вакансионно-газовых дефектов (ВГД), формирование которых рассматривается как суперпозиция двух случайных процессов: диффузии в фазовом пространстве размеров или кластеризации дефектов и их броуновского движения (БД) (или диффузии в кристаллической решетке облучаемого ионами материала). БД инициируется косвенным упругим взаимодействием между дефектами через возмущение колебаний акустических фононов решетки, частоты которых изменяются при появлении ВГД (пористости). Диффузия в этом случае зависит от дальнего действующего потенциала, зависящего от положения и размеров дефектов в моделируемом объеме материала. Модель описывается квазилинейными кинетическими уравнениями Колмогорова-Феллера для кластеризации ВГД и Эйнштейна-Смолуховского для броуновского движения. Кинетические уравнения связаны с системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито-Стратоновича, которые решаются с помощью устойчивых алгоритмов. Результатом является набор траекторий, интерпретируемых как кинетическая функция распределения (DF) дефектов, которая зависит от размеров ВГД и глубины их проникновения в материал при

облучении. Концентрация дефектов и результирующие напряжения в материале были получены для карбида кремния при энергии ионов  $\text{Xe}^{++}$  4 кэВ, дозе  $10^{16} \text{ см}^{-2}$  и температуре 1532К. Средний размер ВГД нелинейно зависит от температуры, установлена степень дисперсности среды с порами, в защитном слое покрытия определены напряжения при формировании пор.

Рассмотрена численная стохастическая кинетическая модель изменения поляризации в одноосном сегнетоэлектрике (пропорциональная одномерному смещению ионов в кристаллической решетке при воздействии поля,  $E \cos \Omega t$ ), этот тип фазового перехода аналогичен фазовым переходам "порядок - беспорядок" (и обратно) в твердом теле. Сформулированы стохастические уравнения Ланжевена (СДЛ) для двух (+/-) направлений поляризации  $P(x, V)$  и соответствующие уравнения Колмогорова (Фоккера-Планка) с нелинейными коэффициентами. Рассмотрена модификация алгоритмов решения СДЛ численного метода для моделирования свойств сегнетоэлектрика. Предложена модель свободной энергии Гиббса образования доменов поляризации как кластеров зародышей фазового перехода. Решение СДЛ позволяет найти распределение спонтанной поляризации  $P(x, V, t)$ , по траекториям стохастических динамических переменных координат и скоростей диполей,  $X(t)$  и  $V(t)$ , рассчитать величину электрического поля  $E$ , при котором происходит переключение спонтанной поляризации при заданной температуре образца; время переключения поляризации на неравновесной стадии фазового перехода.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 18-01-00436.

#### *Список литературы:*

1. Zmievskaia G.I., Averina T.A., Bondareva A.L. Applied Numerical Mathematics. Intern. Conference "Difference Schemes and Applications" in Honor of the 90-th Birthday of Professor V.S. Ryaben'kii. V. 93. July 2015 : 15–29. 2015.
2. Zmievskaia G.I., Bondareva A.L. Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, Volume 10, Issue 4, 802–808. 2016.
3. Змиевская Г.И., Аверина Т.А. Флуктуации заряда на каплях расплава карбида кремния в процессе конденсации //Препринт ИПМ №280, 21 с, 2018.(doi:10/20948/prepr-2018-280).
4. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. Центр «Академия», 368 с, 2006.

## INDEX

<b>A</b>		<b>E</b>	
Abalakin I.V.	17, 19	Efimov A.V.	123, 154
Adjiev S.Z.	160	Epihin A.S.	89
Afendikov A.L.	21	<b>F</b>	
Afendikova N.G.	22	Feodoritova O.B.	175
Alekseev A.K.	26	Fialko N.S.	67
Alexandrov A.V.	24	Fimin N.N.	160
Algazin S.D.	29	Frolov A.A.	68
Anpilov S.V.	31, 95, 140	Fursikov A.V.	69
<b>B</b>		<b>G</b>	
Babakov A.V.	32	Galanin M.R.	70
Baikov N.D.	34	Galkin V.A.	71
Balabaev N.K.	96	Glazunov A.V.	173
Balashov N.M.	36	Glazyrin I.V.	36
Belykh V.N.	37	Golubev V.I.	113
Bezrodnykh S.I.	38	Grebennikov D.S.	41, 110
Blokhin A.M.	39	Grebennukov D.S.	84
Bocharov G.A.	41, 84, 110	Gubin M.Yu.	123
Bondarev A.V.	26	<b>I</b>	
Borisov V.E.	43	Ilyin K.I.	73, 75
Bukharov D.N.	46	Imaykin V.M.	78
Bulgakova T.E.	48	Itkina N.B.	137
Burago N.G.	113	Ivanov P.S.	92
Bykov N.V.	49	<b>K</b>	
<b>C</b>		Kabanikhin S.I.	80, 90
Chechetkin V.M.	160	Kalmanovich V.V.	81
Chernyaev A.P.	52	Kartanov A.A.	81
Chetverikov A.P.	54	Khanhasaeva Ya.V.	99
Chizhonkov E.V.	68	Khristichenko M.Yu.	84, 110
<b>D</b>		Klyushnev N.	94
Danilkovich A.V.	56	Kolesnikov I.Yu.	86
Davydov A.A.	43	Konev S.A.	70
Demyanko K.V.	59	Konstantinovskaya T.V.	43
Dolgoleva G.V.	61	Korshunova A.N.	87
Doronicyn L.V.	24	Koshelev K.	114
Duben A.P.	17, 19, 24	Kozubskaya T.K.	17
Dubovik A.O.	71	Kraposhin M.V.	89
Dudnikova G.I.	168	Kritsky B.V.	171
Dudnikova T.V.	62	Krivorotko O.I.	80, 90
Dyachenko A.I.	63	Krivov M.A.	92
Dyachenko A.V.	66	Kruglova E.A.	39
Dyachenko S. A.	63	Kulikova L.I.	123, 154
		Kuzmin D.	94

<b>L</b>			
Lakhno V.D.	54, 67, 87, 96		
Laponin V.S.	31, 95, 140		
Likhachev I.V.	96		
Lunin V.Y.	98		
Lunina N.L.	98		
Lushnikov P. M.	63		
Lutsky A.E.	43, 99		
<b>M</b>			
Makarenko N.I.	101		
Makhortyh S.A.	102		
Maklakov D.V.	105		
Maksimov F.A.	135		
Markizov S.N.	107		
Medvinsky A.B.	156		
Melihov I.V.	160		
Melnikova V.G.	89		
Menshov I.S.	108		
Mikhailov N.A.	36		
Mikhailova I.V.	56		
Morgulis A.B.	73, 75		
Mortikov E.V.	173		
<b>N</b>			
Nechepurenko Yu.M.	84, 110, 173		
Nikitin A.D.	113		
Nikitin I.S.	113		
Novikova N.N.	175		
<b>O</b>			
Osipov A.V.	114		
Osipova L.S.	69		
<b>P</b>			
Pankratov A.N.	116		
Pankratova N.M.	116		
Petrov A.G.	34, 117		
Petrova T.E.	98		
Pileckas K.	118		
Podryga V.O.	107, 162		
Polyakov S.V.	107, 162		
Pukhnachev V.V.	120		
Puzyrkov D.V.	107		
<b>R</b>			
Radkevich E.V.	121		
Rozanova O.S.	122		
Rudnev V.R.	123		
		Rykov Yu.G.	125
		Rykovanov V.S.	127, 131
		Rykunov S.D.	128
<b>S</b>			
		Sapozhnikov F.A.	127, 131
		Savenkova N.P.	31, 95, 140
		Semisalov B.V.	39
		Seregina E.V.	81, 133
		Severin A.V.	108
		Shamolin M.V.	134
		Shevelev Yu.D.	135
		Shipko M.N.	138
		Shurina E.P.	137
		Sibirev A.L.	138
		Skladchikov S.A.	31, 95, 140
		Sklyarova E.V.	84, 110
		Skorokhodov S.L.	163
		Smirnov A.Yu.	143
		Starchenko S.V.	141, 143, 168
		Stepin E.	146
		Stepovich M.A.	133, 138
		Strakhovskaya L.G.	148
		Strizhak S.	114
		Surnachev M.D.	149
		Sushkevich T.A.	150
<b>T</b>			
		Tarasov N.I.	107
		Tayursky A.A.	153
		Tikhonov D.A.	56, 123, 154, 156
		Tolstov I.O.	107
		Trofimova S.A.	137
		Tsvetkova V.O.	19
		Turzynski M.K.	122
<b>U</b>			
		Ustinin M.N.	156
<b>V</b>			
		Varin V.P.	159
		Vasileva O.A.	121
		Vedenyapin V.V.	160
		Vikhrov E.V.	162
		Vlasov V.I.	163
		Vlasova S.S.	166
		Voytishek A.V.	48
		Vshivkova L.V.	168

<b>Y</b>		Zasko G.V.	173
Yakovleva S.V.	168	Zhan X.	66
		Zhdanova N.S.	17
<b>Z</b>		Zhmyleva M.S.	177
Zaitsev A.V.	92	Zhukov V.T.	175
Zaitsev N.A.	171	Zmievskaya G.I.	177
Zakharov V. E.	63		

*Scientific publication*

Editorial and computer preparation for publication  
– A.L. Afendikov, V.T. Zhukov, T.V. Konstantinovskaya, T.V. Dudnikova

Printed from the original layout made at the  
Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS