Циклические и нефундированные выводы в модальных логиках GL и GL_∞

Д. С. Шамканов

21 сентября 2020 г.

Модальные логики $\mathsf{K4}$ и GL. Напомним, что *формулы языка модальной логики* строятся из пропозициональных переменных p_i и константы $\bot$ с помощью связок $\to$, $\Box$. Мы рассматриваем остальные булевы связки и модальную связку $\Diamond$ как сокращения: $\neg\varphi := \varphi \to \bot$, $\top := \neg\bot$, $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi)$, $\varphi \vee \psi := (\neg\varphi \to \psi)$, $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$. Ниже мы обозначаем через Fm множество формул языка модальной логики.

Модальная логика[1] $\mathsf{K4}$ задаётся с помощью следующего аксиоматического исчисления:

Схемы аксиом:

(i) тавтологии классической логики высказываний;

(ii) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$;

(iii) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Правила вывода:

$$\mathsf{mp}\ \frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ , \qquad \mathsf{nec}\ \frac{\varphi}{\Box\varphi}\ .$$

Будем говорить, что *формула φ следует из множества формул Γ в логике $\mathsf{K4}$*, и записывать $\Gamma \vdash_{\mathsf{K4}} \varphi$, если существует конечное дерево формул, построенное по правилам вывода (mp) и (nec), в котором каждый лист помечен

[1] Мы будем понимать термин *логика* следующим образом. *Логика высказываний* — это пара $(\Omega, \vdash)$, в которой Ω является алгебраической сигнатурой, т.е. множеством функциональных символов (или, иначе говоря, связок) с указанием местности каждого символа, $\vdash$ представляет собой бинарное отношение, связывающее множества формул сигнатуры Ω с единичными формулами сигнатуры Ω, т.е. $\vdash \subset \mathcal{P}(Fm_\Omega) \times Fm_\Omega$. Кроме того, отношение $\vdash$ удовлетворяет следующим условиям:

(I) $\Gamma \vdash \varphi$, если $\varphi \in \Gamma$;

(M) $\Delta \vdash \varphi$, если $\Delta \supset \Gamma$ и $\Gamma \vdash \varphi$;

(C) $\Delta \vdash \varphi$, если $\Delta \vdash \psi$ для любой формулы $\psi \in \Gamma$ и $\Gamma \vdash \varphi$;

(S) $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\varphi)$ для любой подстановки $\sigma\colon Fm_\Omega \to Fm_\Omega$, если $\Gamma \vdash \varphi$.

аксиомой или формулой из множества Γ, а корень при этом помечен формулой φ. Если $\varnothing \vdash_{\mathsf{K4}} \varphi$, то мы также пишем $\mathsf{K4} \vdash \varphi$ и называем φ *теоремой логики* $\mathsf{K4}$.

Данная логика обладает интересной доксастической[2] интерпретацией. Представим себе обладающий некоторой совокупностью пропозициональных убеждений субъект S, который рассуждает (может быть, наряду с чем-то иным) о своих собственных убеждениях. Мы интерпретируем выражение $\Box\varphi$, как утверждение: субъект S убежден, что истинно φ. Будем считать, что к совокупности высказываний, в истинности которых убежден субъекта S, принадлежат все высказывания, чья логическая форма является подстановочным примером тавтологии классической логики высказываний, а также, что эта совокупность замкнута относительно правила (mp). Кроме того, предполагаем, что субъект S обладает значительными интроспективными возможностями: если предложение φ принадлежит к совокупности пропозициональных убеждений субъекта S, то данный субъект осознает этот факт и формирует убеждение в истинности $\Box\varphi$. Другими словами, совокупность пропозициональных убеждений субъекта S замкнута относительно правила (nec). Мы также считаем, что субъект S обладает настолько значительными интроспективными возможностями, что осознает, что совокупность высказываний, в истинности которых убежден S, замкнута относительно правил (mp) и (nec). Иными словами, данный субъект убежден в истинности всех высказываний вида

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \qquad \text{и} \qquad \Box\,\varphi \to \Box\,\Box\,\varphi.$$

Представив себе такого субъекта, мы можем интерпретировать выражение $\Gamma \vdash_{\mathsf{K4}} \varphi$, как утверждение о том, что субъект S убежден в истинности φ, как только S убежден в истинности всех высказываний из множества Γ.

Модальная логики Гёделя-Лёба GL задаётся с помощью аксиоматического исчисления для логики $\mathsf{K4}$, к которому добавлено *правило вывода Лёба*

$$\mathsf{LR}\,\frac{\Box\varphi \to \varphi}{\varphi}\,.$$

Мы будем говорить, что *формула φ следует из множества формул Γ в логике* GL, и записывать $\Gamma \vdash_{\mathsf{GL}} \varphi$, если существует конечное дерево формул, построенное по правилам вывода (mp),(nec) и (LR), в котором каждый лист помечен аксиомой или формулой из множества Γ, а корень при этом помечен формулой φ. В случае, когда $\varnothing \vdash_{\mathsf{GL}} \varphi$, мы также пишем $\mathsf{GL} \vdash \varphi$ и называем φ *теоремой логики* GL.

Развивая данную выше интерпретацию логики $\mathsf{K4}$ на случай логики GL, предположим, что субъект S наряду со всем тем, что мы предположили выше, обладает намерением, которое выражается следующим образом: если субъект S приходит к убеждению, что утверждение φ истинно, как только φ принадлежит совокупности убеждений S, то субъект формирует у себя

[2]От древнегреческого слова $\delta\acute{o}\xi\alpha$ — «мнение», «убеждение», «взгляд». Также имеет значение «слава».

убеждение в истинности утверждения φ. Другими словами, совокупность убеждений субъекта S замкнута относительно правила Лёба. Как и в случае логики $\mathsf{K4}$, представив себе такого субъекта, мы получаем доксастичеускую интерпретацию логики GL. Теперь спросим себя: можем ли мы предъявить хотя бы один пример утверждения φ, истинность которого зависит от того, убежден ли в истинности φ субъект S? Оказывается, что можем.

Утверждение 1. *Для любой формулы φ имеем*

$$\mathsf{K4} \vdash \Box(\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi) \to (\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi).$$

Доказательство. Обозначим формулу $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ через λ, а её подформулы $\Box\varphi \to \varphi$ и $\Box\varphi$ — через ψ и η соответственно. Докажем, что $\mathsf{K4} \vdash \Box\lambda \to \lambda$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{K4} \vdash \Box\,(\Box\psi \to \eta) &\to (\Box\,\Box\,\psi \to \Box\eta), \\ \Box\,\psi &\to \Box\,\Box\,\psi, \\ \Box\,(\Box\psi \to \eta) &\to (\Box\psi \to \Box\eta), \end{aligned} \tag{1}$$

где первые две формулы являются аксиомами (ii) и (iii) логики $\mathsf{K4}$, а третья следует из первых двух в классической логике высказываний. Учитывая, что λ имеет вид $\Box\psi \to \eta$, а ψ имеет вид $\eta \to \varphi$, продолжаем предыдущий вывод

$$\begin{aligned} \mathsf{K4} \vdash \Box\,\lambda &\to (\Box(\eta \to \varphi) \to \Box\eta), \\ \Box\,(\eta \to \varphi) &\to (\Box\eta \to \Box\varphi), \\ \Box\,\lambda &\to (\Box(\eta \to \varphi) \to \Box\varphi). \end{aligned}$$

В данном выводе первая формула совпадает с формулой (1), вторая формула является аксиомой (ii) логики $\mathsf{K4}$, а третья следует из первых двух в классической логике высказываний и совпадает с $\Box\lambda \to \lambda$. $\Box$

Следствие 2. *Для любой формулы φ имеем* $\mathsf{GL} \vdash \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Возвращаясь к доксастической интерпретации логики $\mathsf{K4}$, мы можем сказать, что всякий субъект, совокупность убеждений которого замкнута относительно правила Лёба, осознает этот факт. Другими словами, такой субъект убежден в истинности всех высказываний вида

$$\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi.$$

Теперь рассмотрим аксиоматическое исчисление для логики $\mathsf{K4}$, к которому добавлена новая схема аксиом, называемая *схемой Лёба*,

(iv) $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Утверждение 3. $\mathsf{GL} = \mathsf{K4} +$ *схема Лёба.*

Доказательство. Обозначим логику, задаваемую исчислением для логики $\mathsf{K4}$, к которому добавлена схема Лёба, GL'. Надо доказать, что для любого множества формул Γ и любой формулы φ

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{GL}} \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{GL}'} \varphi.$$

Импликация справа-налево следует из следствия 2. Чтобы доказать импликацию слева-направо, достаточно проверить, что $\Box\varphi \to \varphi \vdash_{\mathsf{GL}'} \varphi$ для любой формулы φ. Имеем

$$\mathsf{mp}\,\dfrac{\mathsf{mp}\,\dfrac{\mathsf{nec}\,\dfrac{\Box\varphi \to \varphi}{\Box(\Box\varphi \to \varphi)} \qquad \dfrac{\mathsf{Ax}}{\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi}}{\Box\varphi} \qquad \Box\varphi \to \varphi}{\varphi}\ .$$

Следовательно, $\Box\varphi \to \varphi \vdash_{\mathsf{GL}'} \varphi$ для любой формулы φ. $\Box$

Циклические выводы в логике GL. Вспоминая доксастическую интерпретацию логики GL, зададимся вопросом, как субъект S, будучи убежденным в истинности утверждения $\Box\varphi \to \varphi$, мог бы аргументировать истинность утверждения φ. Возможный ответ состоит в следующем: по убеждениям S, утверждение φ истинно, поскольку истинно утверждение $\Box\varphi$, а последнее истинно поскольку S убежден в истинности φ. Циклическую форму аргумента S можно эксплицировать с помощью понятия циклического вывода.

Циклическим выводом формулы φ из множества формул Γ называется пара (κ, d), в которой κ является конечным деревом формул, построенным по правилам вывода (mp) и (nec), в корне κ стоит формула φ, а d является функцией со следующими свойствами: функция d определена на всех листьях дерева κ, не помеченных аксиомами логики $\mathsf{K4}$ или формулами из множества Γ; образ $d(a)$ листа a лежит на пути между корнем κ и листом a; на пути между a и $d(a)$ встречается применение правила (nec); a и $d(a)$ помечены одинаковыми формулами. Если на листе a функция d определена, то мы говорим, что вершины a и $d(a)$ соединены *обратной ссылкой*. Если пара (κ, d) является циклическим выводом формулы φ из пустого множества формул, то мы называем пару (κ, d) *циклическим доказательством формулы* φ.

В качестве примера рассмотрим циклический вывод формулы φ из множества $\{\Box\varphi \to \varphi\}$ (на наш взгляд, этот вывод эксплицирующий циклическую форму вышеприведенного аргумента S):

$$\mathsf{mp}\,\dfrac{\mathsf{nec}\,\dfrac{\varphi}{\Box\varphi} \qquad \Box\varphi \to \varphi}{\varphi}\ . \tag{2}$$

Мы будем говорить, что *формула φ выводится из множества формул* Γ *с помощью циклического вывода*, и записывать $\Gamma \vdash_{\mathsf{cycl}} \varphi$, если существует циклический вывод формулы φ из множества формул Γ. Оказывается, что это отношение выводимости задает в точности логику GL.

Определим множество листьев-посылок циклического вывода $\pi = (\kappa, d)$ как множество листьев дерева κ, не помеченных аксиомами и не соединенных обратными ссылками с помощью функции d. Назовем посылку модализированной, если на пути от данного листа до корня встречается применение правила (nec). Обозначим множество модализированных посылок вывода π через $MA(\pi)$ и множество всех остальных посылок через $A(\pi)$. Для поддерева τ дерева κ определим функцию обратных ссылок d_τ как множество всех ссылок из d, образы которых лежат в τ. Обозначим формулу $\psi \wedge \Box\psi$ через $\boxdot\psi$.

Лемма 4. *Пусть $\pi = (\kappa, d)$ — циклический вывод формулы φ. Тогда*

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \varphi,$$

где ψ_a означает формулу, которой помечен лист a.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по построению вывода κ. База индукции, когда κ состоит из единственной формулы, тривиальна. Предположим, что корень κ не соединен обратной ссылкой ни с каким листом данного дерева, и рассмотрим последнее применение правила вывода в κ.

Случай 1. Дерево κ имеет вид

$$\mathsf{mp}\,\frac{\begin{array}{c}\kappa_0\\ \vdots\\ \psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\kappa_1\\ \vdots\\ \psi\to\varphi\end{array}}{\varphi}\ .$$

По предположению индукции для циклических выводов $\pi_0 = (\kappa_0, d_{\kappa_0})$ и $\pi_1 = (\kappa_1, d_{\kappa_1})$ имеем

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi_0)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi_0)\} \to \psi,$$
$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi_1)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi_1)\} \to (\psi \to \varphi).$$

Поскольку множество модализированных (немодализированных) посылок циклического вывода π является объедением множеств модализированных (немодализированных) посылок циклических выводов π_0 и π_1, получаем

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to (\psi \wedge (\psi \to \varphi)).$$

Следовательно, мы имеем

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \varphi.$$

Случай 2. Дерево κ имеет вид

$$\mathsf{nec}\,\frac{\begin{array}{c}\kappa_0\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\Box\psi}\ ,$$

где $\Box\psi = \varphi$. По предположению индукции для циклического вывода $\pi_0 = (\kappa_0, d_{\kappa_0})$ имеем

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi_0)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi_0)\} \to \psi.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\Box\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi_0)\} \wedge \bigwedge\{\Box\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi_0)\} \to \Box\psi,$$
$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in A(\pi_0)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi_0)\} \to \Box\psi.$$

Поскольку все посылки циклического вывода π_0 является модализированными посылками вывода π, и других посылок у вывода π нет, мы можем заключить, что

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \varphi.$$

Осталось рассмотреть случай, когда корень κ соединен обратной ссылкой с некоторым листом. Напомним, что между двумя вершинами, соединенными обратной ссылкой, всегда встречается применение правила (nec). Используя предположение индукции и рассуждения для предыдущих случаев, мы видим, что

$$\mathsf{GL} \vdash (\bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \wedge \Box\varphi) \to \varphi.$$

Имеем

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to (\Box\varphi \to \varphi), \tag{3}$$
$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\Box\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \Box(\Box\varphi \to \varphi),$$
$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \Box(\Box\varphi \to \varphi).$$

Поскольку $\mathsf{GL} \vdash \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$, получаем

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \Box\varphi.$$

Из данной формулы и формулы (3), мы можем заключить, что

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \varphi.$$

$\Box$

Утверждение 5. $\mathsf{GL} = \mathsf{K4}$ + *циклические выводы.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для любого множества формул Γ и любой формулы φ

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{GL}} \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{cycl}} \varphi.$$

Импликация слева-направо следует из того, что $\Box\varphi \to \varphi \vdash_{\mathsf{cycl}} \varphi$ для любой формулы φ. Действительно, любая формула φ выводится из множества $\{\Box\varphi \to \varphi\}$ с помощью циклического вывода, что показывает пример (2).

Докажем импликацию справа-налево. Предположим, что $\Gamma \vdash_{\mathsf{cycl}} \varphi$. Тогда существует циклический вывод π формулы φ из множества формул Γ. По предшествующей лемме, имеем

$$\mathsf{GL} \vdash \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\} \to \varphi.$$

Очевидно, что

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{GL}} \bigwedge\{\boxdot\psi_a \mid a \in A(\pi)\} \wedge \bigwedge\{\Box\psi_a \mid a \in MA(\pi)\}.$$

Следовательно, мы можем заключить $\Gamma \vdash_{\mathsf{GL}} \varphi$.

$\Box$

Логика GL допускает циклические рассуждения, которые мы старались осмыслить, привлекая доксастическую интерпретацию. Отметим, что у данной логики существует другая, при этом очень важная, интерпретация, связанная со второй теоремой Гёделя о неполноте (см. запись лекции «Доказуемостная интерпретация логики GL»).

Модальная логика GL_∞. В предшествующем параграфе мы изучали циклические выводы в логике GL. Обратимся к изучению выводов более общего вида. Будем называть *нефундированным выводом (∞-выводом) формулы φ из множества формул* Γ любое (возможно, бесконечное) дерево формул, построенное по правилам вывода (mp) и (nec), в котором каждый лист помечен аксиомой логики $\mathsf{K4}$ или формулой из множества Γ, корень помечен формулой φ, и в котором всякая бесконечная ветвь содержит бесконечное количество применений правила (nec). Нефундированный вывод из пустого множества посылок также называется *нефундированным доказательством (или ∞-доказательством)*.

Пример ∞-вывода можно получить, если рассмотреть развертку любого циклического вывода. В качестве другого примера рассмотрим ∞-вывод формулы φ_0 из множества формул $\{\Box\varphi_{n+1} \to \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\mathsf{mp}\,\dfrac{\mathsf{nec}\,\dfrac{\mathsf{mp}\,\dfrac{\mathsf{nec}\,\dfrac{\mathsf{mp}\,\dfrac{\mathsf{nec}\,\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi_3\end{array}}{\Box\varphi_3} \qquad \Box\varphi_3 \to \varphi_2}{\varphi_2}}{\Box\varphi_2} \qquad \Box\varphi_2 \to \varphi_1}{\varphi_1}}{\Box\varphi_1} \qquad \Box\varphi_1 \to \varphi_0}{\varphi_0}\;. \tag{4}$$

Основным фрагментом ∞-вывода называется конечное дерево формул, полученное из ∞-вывода обрезанием каждой ветви на ближайшем к корню применении правила (nec). Для ∞-вывода π определим его *локальную высоту* $|\pi|$ как длину наибольшей ветви основного фрагмента π. Если ∞-вывод состоит из единственной формулы, то его высота равна 0.

Основной фрагмент ∞-вывода (4) имеет вид

$$\mathsf{mp}\,\frac{\Box\varphi_1 \qquad\qquad \Box\varphi_1 \to \varphi_0}{\varphi_0}\,,$$

при этом его локальная высота равна 1.

Мы будем говорить, что *формула φ выводится из множества формул Γ с помощью ∞-вывода*, и записывать $\Gamma \vdash_\infty \varphi$, если существует ∞-вывод формулы φ из множества формул Γ. Обозначим логику, задаваемую данным отношением выводимости, через GL_∞.

Так же, как и логика GL, логика GL_∞ может быть задана с помощью некоторого варианта правила Лёба. Рассмотрим аксиоматическое исчисление для логики $\mathsf{K4}$, к которому добавлено *ω-правило Лёба*

$$\omega\mathsf{LR}\,\frac{\{\Box\varphi_{n+1} \to \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}}{\varphi_0}\,.$$

Утверждение 6. $\mathsf{GL}_\infty = \mathsf{K4} + \omega$*-правило Лёба.*

Доказательство. Обозначим логику, задаваемую исчислением для логики $\mathsf{K4}$, к которому добавлено ω-правило Лёба, GL_ω. Докажем, что для любого множества формул Γ и любой формулы φ

$$\Gamma \vdash_\infty \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash_\omega \varphi.$$

Импликация справа-налево следует из того, что $\{\Box\varphi_{n+1} \to \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \vdash_\infty \varphi_0$. Действительно, формула φ_0 выводится из множества формул $\{\Box\varphi_{n+1} \to \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, что показывает пример (4).

Докажем импликацию слева-направо. Предположим, что $\Gamma \vdash_\infty \varphi$. Тогда существует ∞-вывод π формулы φ из множества формул Γ. Для всякой вершины w ∞-вывода π обозначим через π_w поддерево π с корнем w. Положим $r(w) := |\pi_w|$. Кроме того, формулу, которой помечена вершина w, обозначим через ψ_w. Будем говорить, что w принадлежит $(n+1)$-у слою π, если путь от вершины w к корню π проходит ровно через n применений правила (nec). Также обозначим формулу $\bigwedge\{\psi_w \mid w$ принадлежит $(n+1)$-у слою $\pi\}$ через ξ_n.

Проверим, что $\Gamma \vdash_\omega \Box\xi_{n+1} \to \xi_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно показать, что $\Gamma \vdash_\omega \Box\xi_{n+1} \to \psi_w$, если w принадлежит $(n+1)$-у слою π. Проведем доказательство индукцией по $r(w)$.

Если ψ_w является аксиомой логики $\mathsf{K4}$ или формулой множества Γ, то очевидно, что $\Gamma \vdash_\omega \Box\xi_{n+1} \to \psi_w$.

Рассмотрим случай, когда формула ψ_w получается применением правила вывода в π.

Случай 1. Формула ψ_w получена применением правила вывода (nec). Тогда формула ψ_w имеет вид $\Box\psi_u$, где u является вершиной, соответствующей посылке правила (nec). Поскольку u принадлежит $(n+2)$-у слою π, $\Gamma \vdash_\omega \xi_{n+1} \to \psi_u$ и $\Gamma \vdash_\omega \Box\xi_{n+1} \to \psi_w$.

Случай 2. Формула ψ_w получена применением правила вывода (mp). Пусть u_1 и u_2 — вершины, соответствующие посылкам применения правила (mp). Тогда $r(u_1) < r(w)$ и $r(u_2) < r(w)$. По предположению индукции получаем, что $\Gamma \vdash_\omega \Box\xi_{n+1} \to (\psi_{u_1} \wedge \psi_{u_2})$. Поскольку $\psi_{u_2} = \psi_{u_1} \to \psi_w$, получаем, что $\Gamma \vdash_\omega \Box\xi_{n+1} \to \psi_w$.

Мы проверили, что $\Gamma \vdash_\omega \Box\xi_{n+1} \to \xi_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Применяя ω-правило Лёба, приходим к выводу, что $\Gamma \vdash_\omega \xi_0$. Кроме того, имеем $\Gamma \vdash_\omega \xi_0 \to \varphi$. Следовательно, $\Gamma \vdash_\omega \varphi$. $\Box$

Ниже мы увидим, что логики GL и GL_∞ имеют одно и то же множество теорем, т.е. для любой формулы φ

$$\mathsf{GL} \vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathsf{GL}_\infty \vdash \varphi.$$

Другими словами, логика GL допускает произвольные нефундированные доказательства.

Алгебраическая семантика логик GL и GL_∞. В настоящем параграфе и далее мы предполагаем хорошее знакомство нашего читателя с понятием булевой алгебры.

Кортеж $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1, \Box)$ называется *модальной алгеброй*, если $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ — это булева алгебра, на которой задана унарная операция $\Box\colon A \to A$, удовлетворяющая соотношениям

$$\Box 1 = 1, \quad \Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y.$$

Для любой модальной алгебры $\mathcal{A}$ операция $\Box$ является монотонной относительно порядка на $\mathcal{A}$, определенного структурой булевой алгебры. Действительно, если $a \leqslant b$, то $a \wedge b = a$, $\Box a \wedge \Box b = \Box(a \wedge b) = \Box a$ и $\Box a \leqslant \Box b$.

Модальная алгебра $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1, \Box)$ называется *алгеброй Магари*, если операция $\Box\colon A \to A$ дополнительно удовлетворяет соотношению

$$\Box(\Box x \to x) = \Box x.$$

Упражнение 7. *Проверьте, что в любой алгебре Магари выполняется соотношение $\Box x \leqslant \Box\Box x$.*

Упражнение 8. *Докажите, что в любой модальной алгебре, в которой выполняется соотношение $\Box x \leqslant \Box\Box x$ также выполняется соотношение*

$$\Box(\Box(\Box x \to x) \to \Box x) \leqslant (\Box(\Box x \to x) \to \Box x).$$

Понятие алгебры Магари $\mathcal{A}$ может быть определено в терминах бинарного отношения $\prec_{\mathcal{A}}$ на $\mathcal{A}$:

$$a \prec_{\mathcal{A}} b \Longleftrightarrow \Box a \leqslant b.$$

Утверждение 9. *Модальная алгебра $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1, \Box)$ является алгеброй Магари тогда и только тогда, когда отношение $\prec_{\mathcal{A}}$ является строгим частичным порядком на $A \setminus \{1\}$.*

Доказательство. Пусть дана алгебра Магари $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1, \Box)$. Проверим, что отношение $\prec_{\mathcal{A}}$ является строгим частичным порядком на $A \setminus \{1\}$.

Если $a \prec_{\mathcal{A}} a$ для некоторого $a \in A$, то

$$\Box a \leqslant a, \qquad \Box a \to a = 1, \qquad \Box a = \Box(\Box a \to a) = \Box 1 = 1, \qquad a = 1.$$

Следовательно, $a \notin A \setminus \{1\}$.

Если $a \prec_{\mathcal{A}} b$ и $b \prec_{\mathcal{A}} c$, то $\Box a \leqslant \Box\Box a \leqslant \Box b \leqslant c$, поскольку операция $\Box$ монотонна относительно порядка на алгебре $\mathcal{A}$ и, кроме того, в $\mathcal{A}$ выполняется соотношение $\Box x \leqslant \Box\Box x$ (см. упражнение 7). Следовательно, $a \prec_{\mathcal{A}} c$ и $\prec_{\mathcal{A}}$ является строгим частичным порядком на $A \setminus \{1\}$.

Теперь предположим, что для модальной алгебры $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1, \Box)$ отношение $\prec_{\mathcal{A}}$ является строгим частичным порядком на $A \setminus \{1\}$. Докажем, что $\Box(\Box a \to a) = \Box a$ для любого $a \in A$.

Заметим, что $a \leqslant (\Box a \to a)$ и $\Box a \leqslant \Box(\Box a \to a)$. Докажем неравенство в обратную сторону.

Для этого проверим, что $\Box b \leqslant \Box\Box b$ для любого $b \in A$. Если b, $\Box b$ или $\Box\Box b$ равен 1, то неравенство очевидно верно. В противном случае, $b \prec_{\mathcal{A}} \Box\Box b$, поскольку $b \prec_{\mathcal{A}} \Box b$ и $\Box b \prec_{\mathcal{A}} \Box\Box b$, при этом элементы b, $\Box b$ и $\Box\Box b$ лежат в множестве $A \setminus \{1\}$. Проверили, что $\Box b \leqslant \Box\Box b$.

Вспоминая упражнение 8, имеем $(\Box(\Box a \to a) \to \Box a) \prec_{\mathcal{A}} (\Box(\Box a \to a) \to \Box a)$. В силу иррефлексивности отношения $\prec_{\mathcal{A}}$ на $A \setminus \{1\}$ заключаем, что $(\Box(\Box a \to a) \to \Box a) = 1$ и $\Box(\Box a \to a) \leqslant \Box a$. □

Алгебра Магари называется *□-фундированной*, если, для любой последовательности её элементов $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ таких, что $\Box a_{i+1} \leqslant a_i$, имеем $a_0 = 1$. Отметим, что в любой □-фундированной алгебре Магари все члены такого рода последовательности равны 1.

Утверждение 10. *Алгебра Магари $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1, \Box)$ является □-фундированной тогда и только тогда, когда частичный порядок $\prec_{\mathcal{A}}$ на $A \setminus \{1\}$ фундирован.*

Доказательство. □

Приведем пример семейства □-фундированных алгебр Магари. Алгебра Магари является *σ-полной*, если всякое её счетно подмножество S имеет точную верхнюю грань $\bigvee S$ (относительно порядка, определенного структурой булевой алгебры). Эквивалентное условие состоит в том, что для всякого счетного подмножества S найдется точная нижняя грань $\bigwedge S$.

Утверждение 11. *Любая σ-полная алгебра Магари □-фундирована.*

Доказательство. Пусть дана σ-полная алгебра Магари $\mathcal{A}$ вместе с последовательностью её элементов $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ такой, что $\Box a_{i+1} \leqslant a_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Докажем, что $a_0 = 1$. Положим $b = \bigwedge\limits_{i \in \mathbb{N}} a_i$. Для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем $b \leqslant a_{i+1}$ и $\Box b \leqslant \Box a_{i+1} \leqslant a_i$. Следовательно, $\Box b \leqslant b$, $b \prec_{\mathcal{A}} b$ и $b = 1$. Заключаем, что $a_0 = 1$. □

Оценкой в алгебре $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1, \Box)$ называется функция $v\colon Fm \to A$ такая, что $v(\bot) = 0$, $v(\varphi \to \psi) = v(\varphi) \to v(\psi)$ и $v(\Box\varphi) = \Box v(\varphi)$ для любых формул φ и ψ. Классы алгебр Магари и $\Box$-фундированных алгебр Магари задают следующие отношения семантического следования.

Для любого множества формул Γ и любой формулы φ положим $\Gamma \Vdash_{\mathsf{MA}} \varphi$ ($\Gamma \Vdash_{\infty} \varphi$), если для любой ($\Box$-фундированной) алгебры Магари $\mathcal{A}$ и любой оценке v в $\mathcal{A}$

$$(\forall \psi \in \Gamma \;\; v(\psi) = 1) \Rightarrow v(\varphi) = 1.$$

Теорема 12 (Алгебраическая полнота)**.** *Для любого множества формул* Γ *и любой формулы* φ *имеем*

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{GL}} \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash_{\mathsf{MA}} \varphi, \qquad \Gamma \vdash_{\infty} \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash_{\infty} \varphi.$$

Доказательство. $\square$