Вторая конференция Математических центров России

7–11 ноября 2022, г. Москва, МГУ, МИАН

Аннотации докладов

Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
Институт вычислительной математики Российской академии наук
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265, грант на создание и развитие МЦФПМ, соглашения № 075-15-2022-283, № 075-15-2022-284, № 075-15-2022-286).

Содержание

1 Пленарные доклады

А. Д. Баранов (СПбГУ). Оценки интегралов n-листных функций и геометрические свойства областей

В докладе рассматривается задача об оценке интегралов от производных ограниченных n-листных функций. Показано, что в области D со спрямляемой границей имеет место точная по порядку зависимости от n оценка $\int_D |f'(z)|dxdy \le CL\sqrt{\log n}\|f\|_\infty$, где L — длина границы области, а C — некоторая абсолютная константа. Точность неравенства видна уже на произведениях Бляшке в единичном круге и вытекает из тонких результатов Н. Г. Макарова (1989) и Р. Бануэлоса и Ч. Н. Мура (1991) о граничном поведении функций из пространства Блоха.

Аналогичные оценки получены и для L^p-нормы производной при $1 < p < 2$. Полученные неравенства существенно обобщают известные оценки Е. П. Долженко (1966) для рациональных функций в областях с достаточно гладкой границей. Если отказаться от условия спрямляемости, то характер зависимости от порядка листности меняется. Нами получены оценки интегралов от производных ограниченных n-листных функций в терминах размерности Минковского границы.

Доклад основан на совместной работе с И. Р. Каюмовым (Казанский федеральный университет).

Д. И. Борисов (ИМВЦ УФИЦ РАН). Усреднение операторов с произвольным возмущением в младших коэффициентах

Рассматривается задача об усреднении многомерного эллиптического оператора второго порядка с произвольным возмущением в младших коэффициентах. Показано, что возможность усреднения такого оператора и установления равномерной резольвентной сходимости эквивалентна сходимости возмущенных коэффициентов в подходящих пространствах мультипликаторов. Для сходимости в указанных пространствах доказаны простые и легко проверяемые критерии, что позволило достаточно точно описать класс возмущений, для которых возможна процедура усреднения. Результаты продемонстрированы на серии примеров.

П. А. Бородин (МГУ им. М. В. Ломоносова). Квантованные приближения

Формулируются геометрические условия на множество в банаховом пространстве, необходимые или достаточные для того, чтобы суммы элементов этого множества были плотны в этом пространстве. Из общих теорем такого рода выводятся качественные результаты о возможности приближения наипростейшими дробями (логарифмическими производными комплексных многочленов), суммами сдвигов одной функции, многочленами с целыми коэффициентами и другими множествами в различных функциональных пространствах.

А. А. Гайфуллин (МИАН). 27-вершинные триангуляции 16-мерных многообразий, похожих на октавную проективную плоскость

В 1987 году Брем и Кюнель доказали следующую оценку: всякая комбинаторная триангуляция отличного от сферы d-мерного многообразия (без края) должна иметь не менее $\frac{3d}{2}+3$ вершин. Более того, наличие у многообразия, отличного от сферы, триангуляции ровно с $\frac{3d}{2}+3$ вершинами накладывает на это многообразие очень жесткие условия. Во-первых, размерность d может быть равна только 2, 4, 8 или 16; во-вторых, многообразие должно быть «многообразием, похожим на проективную плоскость», то есть должно допускать (кусочно линейную) функцию Морса ровно с тремя критическими точками. До недавнего времени было известно ровно 5 примеров таких триангуляций в размерностях 2, 4 и 8. Случай $d = 16$ оставался полностью открытым: не было известно никаких 27-вершинных триангуляций 16-мерных многообразий, отличных от сферы. Я расскажу о построении таких триангуляций. А именно, будет предъявлено четыре таких триангуляции с группой симметрий порядка 351 и на их основе построено очень много (более 10^{103}) таких триангуляций с меньшими группами симметрий. Естественная гипотеза состоит в том, что все построенные симплициальные многообразия кусочно линейно гомеоморфны октавной проективной плоскости. Однако попытки доказательства этой гипотезы упираются в необходимость вычисления второго класса Понтрягина построенных симплициальных многообразий. В настоящее время не известно эффективного способа такого вычисления.

А. В. Гасников (МФТИ). Современная стохастическая оптимизация и анализ данных

В прошлом году издательство Springer заказало нам книгу “Algorithmic stochastic optimization”, в которой планируется описать основные алгоритмы стохастической оптимизации и их приложения к анализу данных. Наиболее яркие сюжеты из книги было решено вынести в доклад и постараться презентовать их в максимально популярном (но математически строгом) ключе. В частности, будут затронуты достаточно тонкие современные аспекты задач оптимизации, возникающих в анализе данных. Например, схожесть слагаемых в целевом функционале вида суммы или необходимость решения таких задач на децентрализованных меняющихся со временем архитектурах...

И. Ш. Калимуллин (КФУ). Алгебраические структуры и вычислимая категоричность

Вычислимая алгебраическая структура вычислимо категорична, если между любыми двумя ее вычислимыми копиями существует вычислимый изоморфизм. В докладе будет сделан обзор понятий и новых результатов теории вычислимых моделей и классической теории вычислимости, связанных с вычислимой категоричностью и ее обобщениями. В частности, будут обсуждены результаты об аналогах вычислимой категоричности для примитивно рекурсивных (пунктуальных) структур.

М. А. Королев (МИАН). О некоторых арифметических свойствах дробей Фарея

Рядом Фарея порядка N называется множество рациональных несократимых дробей a/b с условиями $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant N$, упорядоченных по возрастанию. Дроби Фарея возникают естественым образом в различных задачах аналитической теории чисел. Они представляют собой полезный инструмент исследования (как, скажем, в круговом методе) и одновременно являются интересным объектом для изучения. В частности, имеется большое число результатов о статистических и арифметических свойствах таких дробей. Пожалуй, самым известным из последних является “модулярное соотношение” $ad - bc = 1$, которое справедливо для любых двух соседних дробей Фарея $c/d < a/b$. В докладе мы расскажем о других, более тонких свойствах дробей, доказательства которых основаны на изучении одного геометрического преобразования половинки единичного квадрата в себя, именуемого преобразованием Бока–Кобели–Захареску.

Е. А. Кудрявцева (МГУ им. М. В. Ломоносова). Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на 4-мерных многообразиях

Лагранжевы слоения с особенностями являются естественным обобщением вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Мы дадим классификацию с точностью до топологической эквивалентности лагранжевых слоений с особенностями на замкнутых симплектических 4-мерных многообразиях, когда все особенности невырождены, хотя бы одна из них имеет ранг 1, и база слоения удовлетворяет некоторому условию ориентируемости. Ключевым шагом доказательства служит геометрическая классификация целочисленных аффинных структур с особенностями, которые могут возникать на любом открытом страте базы такого лагранжева слоения с особенностями.

А. Г. Кузнецов (МИАН). Многообразия Фано и проблема рациональности

Алгебраическое многообразие называется рациональным, если в нем есть открытое всюду плотное подмножество изоморфное открытому плотному подмножеству афинного пространства. Как ни странно, отличить рациональные многообразия от нерациональных оказывается весьма непросто. Я сделаю обзор классических результатов о рациональности, а также постараюсь рассказать об открытых вопросах связанных с этой проблемой.

Н. В. Маслова (ИММ УрО РАН, УрФУ). О характеризации конечной группы ее арифметическими параметрами

Симметрия — один из фундаментальных принципов самоорганизации материальных форм в природе. Множество всех симметрий некоторого объекта или множество тех его симметрий, которые сохраняют какие-то свойства этого объекта (например, ориентацию в пространстве), образует алгебраическую структуру, которая называется группой. Исследовав группу симметрий объекта, можно получить новую информацию уже о самом объекте. Однако при исследовании объекта (математического, физического, химического или какого-то другого) ситуация, когда группа его симметрий известна a priori, является редкой. Обычно из эмпирических соображений, из “видимых” свойств объекта удается извлечь только информацию о каких-то свойствах этой группы, например, некоторые ее арифметические параметры.

Примерами арифметических параметров конечной группы являются ее порядок, множество порядков всех ее элементов (которое принято называть спектром группы), множество величин всех классов сопряженности ее элементов, множество всех степеней неприводимых комплексных представлений этой группы и т.д. Появляется задача определить группу или описать хотя бы какие-то ее структурные свойства и особенности возможных действий на объектах, если известны только некоторые арифметические параметры этой группы. Получение результатов такого рода — это разработка математического аппарата, который в дальнейшем может быть применен и за пределами математики.

Одним из хорошо известных арифметических параметров конечной группы G является ее граф Грюнберга–Кегеля, который называют еще графом простых чисел. Это неориентированный граф без петель и кратных ребер, вершинами которого являются все простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны в котором тогда и только тогда, когда группа G содержит элемент порядка pq. Граф Грюнберга–Кегеля конечной группы, с одной стороны, бывает “достаточно легко” вычислить, с другой стороны, в некоторых случаях он определяет группу однозначно с точностью до изоморфизма. Например, хорошо известная конечная простая спорадическая группа Монстр содержит порядка $8,08 \times 10^{53}$ элементов (для сравнения, по недавним оценкам, количество элементарных частиц в наблюдаемой части Вселенной — примерно $3,28 \times 10^{80}$), при этом граф Грюнберга–Кегеля группы Монстр содержит всего 15 вершин (причем наибольшая из них равна 71), и эта группа однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим графом Грюнберга–Кегеля в классе конечных групп.

В этом докладе мы обсудим вопрос характеризации конечной группы ее арифметическими параметрами, в частности, вопрос характеризации конечной группы ее графом Грюнберга–Кегеля.

А. Е. Миронов (ИМ СО РАН, НГУ). О дифференциальных уравнениях для интегрируемых бильярдных столов

В докладе будет рассказано о методе нахождения дифференциальных уравнений на функции, задающие границы областей с интегрируемым бильярдом Биркгофа. Мы применяем этот метод для исследования проволочного бильярда (wire billiards), для нахождения поверхностей с (локальным) первым интегралом и для нахождения кусочно гладкой поверхности, гомеоморфной тору, с двумя независимыми первыми бильярдными интегралами.

А. В. Пяткин (ИМ СО РАН, НГУ). Концепция инциденторных раскрасок

Инцидентором в ориентированном графе называется пара из вершины и инцидентной ей дуги; инцидентор удобно трактовать как половину дуги, примыкающую к данной вершине. Требуется раскрасить инциденторы мультиграфа в минимальное число цветов с соблюдением заданных ограничений на цвета смежных (имеющих общую вершину) и сопряженных (имеющих общую дугу) инциденторов. В докладе будет полностью освещена концепция таких раскрасок: история возникновения модели, развитие методов, краткий обзор результатов и остающихся открытыми проблем.

Е. Б. Савенков (ИПМ им. М. В. Келдыша РАН). «Цифровой керн»: модели диффузной границы и математическое моделирование микротечений многофазных сред в пористых средах

Доклад основан на совместной работе с В. А. Балашовым.

В докладе рассмотрен ряд вопросов реализации прикладной технологии «Цифровой керн», суть которой — прямое численное моделирование микротечений многофазной жидкости в поровом пространстве горных пород — коллекторов нефти и газа. Основу технологии составляют так называемые модели с диффузной границей. Они являются термодинамически согласованными и позволяют описывать течения многофазной жидкости с прямым разрешением динамики границ раздела фаз и контактных углов однородным по пространству способом. Используемые в работе уравнения модели являются квази(гидро)динамической (КГД) регуляризацией более привычных уравнений типа Навье–Стокса–Кана–Хилларда. Дополнительные КГД слагаемые являются диссипативными и играют роль регуляризаторов явной разностной схемы. Разработанные вычислительные алгоритмы допускают эффективное распараллеливание и позволяют анализировать задачи представительной сеточной размерности, в том числе течения в воксельных моделях реальных пористых сред, полученных методами компьютерной микротомографии. В докладе рассмотрены общие идеи «Цифровой керн», вопросы построения и применения моделей типа диффузной границы, а также приводятся результаты модельных и содержательных численных расчетов, демонстрирующих возможности подхода.

2 Алгебра

Хасан Алхуссейн. Вычисление когомологий конформной алгебры через соответствие Морса

Понятие конформной алгебры Ли, введенное В. Г. Кацем в 1996 г., является алгебраической формализацией свойств коэффициентов сингулярной части разложения операторного опризведения (OPE) для киральных полей в 2-мерной конформной теории поля. Хорошо известно, что для «обычной» алгебры Ли $\mathfrak{g}$, действующей на модуле V, группы когомологий $H^n(\mathfrak{g}, V)$ совпадают с группами когомологий Хохшильда универсальной ассоциативной обертывающей $U(\mathfrak{g})$ со значениями в V. Для конформных алгебр картина существенно иная. Мы использовали дискретную алгебраическую теорию Морса для построения метода, позволяющего вычислить когомологии редуцированного комплекса для ассоциативной конформной алгебры. В качестве примера данный метод позволил вычислить все группы когомологий Хохшильда для универсальной ассоциативной обертывающей $U(3)$ конформной алгебры Вирасоро со значениями в скалярном модуле. Доклад подготовлен на основе совместной работы с П. С. Колесниковым и В. Е. Лопаткиным.

В. Ю. Березнюк. Коммутаторная длина степеней в свободных произведениях групп

Пусть даны свободное произведение групп $G = A * B$ и натуральное число n. Какова минимальная возможная коммутаторная длина элемента $g^n \in G$, не сопряженного элементам свободных множителей? Мы дадим полный ответ на данный вопрос.

Е. К. Брусянская. О делимости числа наборов элементов группы с заданным свойством

В докладе будет представлена теорема о делимости числа наборов элементов группы, удовлетворяющих формуле первого порядка в групповом языке (с константами). Этот результат обобщает классические теоремы Фробениуса и Соломона.

С. А. Гайфуллин. Локально нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от трёх переменных (по совместной работе с N. Dasgupta)

Рассмотрим алгебру $A = k[x, y, z]$, где k — поле. Для того, чтобы изучать группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$ этой алгебры важным объектом являются локально нильпотентные дифференцирования, которые соответствуют алгебраическим подгруппам в $\mathrm{Aut}(A)$, изоморфным аддитивной группе поля. Локально нильпотентные дифференцирование (ЛНД) — это линейный оператор D на A, удовлетворяющий тождеству Лейбница такой, что для любого элемента из A найдётся натуральное число n такое, что D^n обнуляет этот элемент. Локально нильпотентному дифференцированию на A можно приписать числовую характеристику, которая называется рангом этого дифференцирования. Ранг может принимать значения 1, 2 и 3. Дифференцирования ранга 1 устроены довольно просто: это реплики частных производных в некоторой системе координат. Дифференцирования 2 и тем более 3 не имеют такого простого описания. В докладе будет описана итерационная процедура построения ЛНД, которой могут быть получены все ЛНД ранга 2. Будут получены новые примеры нетриангуляризуемых ЛНД ранга 2. Также будут предъявлены новые примеры ЛНД ранга 3.

А. А. Гальт. О расщепляемости нормализатора максимального тора в группах лиева типа

Задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса в 1966 году. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ простого поля характеристики p. Пусть σ — эндоморфизм Стейнберга и $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$. Хорошо известно, что все максимальные торы сопряжены в $\overline{G}$ и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\overline{G}$. Возникает естественный вопрос: для каких групп $\overline{G}$ нормализатор $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$. Аналогичный вопрос может быть сформулирован для конечных групп лиева типа. В докладе будет рассказано о решении поставленных вопросов.

М. П. Голубятников. О классе вершинно примитивных транзитивных на дугах вполне регулярных графов, возникающих из подгрупповой структуры группы $PSL(2,q)$

Обыкновенный k-регулярный граф с v вершинами называется вполне регулярным с параметрами (v,k,λ,μ), если любые две смежные вершины имеют точно λ общих соседей, а любые вершины, находящиеся на расстоянии 2 в этом графе, имеют точно μ общих соседей.

Пусть G — конечная группа, $H \leq G$, $\mathfrak{H} = \{H^g \,|\, g \in G\}$ — соответствующий класс сопряженности подгрупп группы G и $1 \leq d$ — целое число. Построим обыкновенный граф $\Gamma(G,H,d)$ следующим образом: вершинами графа $\Gamma(G,H,d)$ являются элементы класса $\mathfrak{H}$ и две различные вершины H_1 и H_2 из $\mathfrak{H}$ смежны в $\Gamma(G,H,d)$ тогда и только тогда, когда $|H_1 \cap H_2| = d$.

В докладе будет доказано, что если q — степень простого числа такая, что $13 \leq q \equiv 1 \pmod 4$, $G = SL_2(q)$ и H — диэдральная максимальная подгруппа группы G порядка $2(q-1)$, то граф $\Gamma = \Gamma(G,H,8)$ является вершинно примитивным транзитивным на дугах вполне регулярным графом с параметрами $\left(\dfrac{q(q+1)}{2}, \dfrac{q-1}{2}, 1, 1\right)$, при этом $\mathrm{Aut}(PSL_2(q)) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Более того, мы показываем, что $\Gamma = \Gamma(G,H,8)$ содержит совершенный 1-код, в частности, диаметр этого графа больше 2.

Доклад основан на результатах совместной с Н. В. Масловой работы.

М. Е. Гончаров. Операторы Роты–Бакстера на кокоммутативных алгебрах Хопфа

Операторы Роты–Бакстера (на ассоциативных алгебрах) впервые возникли в работе Г. Бакстера как формализм при изучении интегральных операторов в теории вероятностей и математической статистике. Независимо от этого, операторы Роты–Бакстера веса ноль естественным образом возникли в начале 80-х годов прошлого столетия в работе М. А. Семенова-Тян-Шанского при изучении структур гамильтоновых многообразий на группах Ли. К настоящему моменту известны тесные связи операторов Роты–Бакстера с такими объектами математики, как решения классического уравнения Янга–Бакстера, биалгебры Ли, пост- и прелиевы алгебры, двойные алгебры Ли, двойные алгебры Пуассона и т. д.

В своей недавней работе Л. Гуо, Х. Ланг и Ю. Шенг дали определение оператора Роты — Бакстера на группах. Данное определение согласуется с обычным понятием оператора Роты–Бакстера на алгебрах следующим образом: если G — это группа Ли и B является оператором

Роты–Бакстера на группе G, то отображение, являющееся касательным к B в 1, является оператором Роты–Бакстера веса 1 на соответствующей алгебре Ли группы G.

В данной работе мы вводим понятие оператора Роты–Бакстера на кокоммутативных алгебрах Хопфа. Данное понятие естественным образом обобщает понятия операторов Роты–Бакстера на группах и алгебрах Ли. В частности, операторы Роты–Бакстера веса 1 на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (соответственно, на группе G) находятся во взаимно-однозначном соответствии с операторами Рота–Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ (соответственно, на групповой алгебре $F[G]$ группы G).

А. С. Гордиенко. Универсальные (ко)действующие бимоноиды и моноиды Хопфа

Во многих разделах математики и физики находят своё применение (ко)модульные алгебры над алгебрами Хопфа. С одной стороны, такие алгебры являются обобщениями алгебр, градуированных группами и алгебр с действиями групп автоморфизмами. С другой стороны, (ко)модульные алгебры можно проинтерпретировать как алгебры функций на (возможно, некоммутативных) алгебраических многообразиях, на которых действуют квантовые группы симметрий. Для многих приложений (структурная теория, полиномиальные H-тождества, ...) оказывается несущественным, какая конкретно алгебра Хопфа (ко)действует на заданной алгебре. Здесь мы естественным образом приходим к понятию эквивалентности (ко)модульных структур, которое является обобщением хорошо известного понятия эквивалентности градуировок, причём можно доказать, что среди всех алгебр Хопфа, задающих эквивалентные структуры, существуют универсальные. Более того, данные построения можно сделать, используя язык заплетённых моноидальных категорий и моноидов Хопфа. (Моноидами Хопфа в категории векторных пространств являются алгебры Хопфа, а в категории множеств - группы.) В докладе будет рассказано о том, как можно объединить эти универсальные моноиды Хопфа и универсальные (ко)действующие биалгебры и алгебры Хопфа Свидлера–Манина–Тамбары в единую теорию, что, в частности, позволяет установить определённую двойственность между ними, а также о проблеме вычисления универсальных алгебр Хопфа, свойствах отношения эквивалентности и его приложениях к теории полиномиальных H-тождеств.

И. Б. Горшков. Аксиальные алгебры йорданова типа

Аксиальные алгебры — это класс неассоциативных коммутативных алгебр, свойства которых определяются в терминах закона слияния. Когда этот закон градуирован, в группе автоморфизмов такой алгебры можно выделить конечную подгруппу, порожденную инволюциями. Это обеспечивает естественную связь теории аксиальных алгебр с теорией конечных, в том числе конечных простых, групп. Примеры аксиальных алгебр включают большинство йордановых алгебр и алгебру Грайса. В этом докладе мы введем понятие аксиальной алгебры и сконцентрируемся на аксиальных алгебрах йорданова типа.

В. Ю. Губарев. Алгебры Роты–Бакстера и двойные алгебры Ли

В 2008 году М. Ван ден Берг в качестве некоммутативного аналога алгебры Пуассона ввёл понятие двойной алгебры Пуассона. По определению двойная алгебра Пуассона снабжена ассоциативным умножением и двойной скобкой Ли, которые связаны аналогом тождества Лейбница. Векторное пространство с заданной на нём двойной скобкой Ли называется двойной алгеброй Ли.

Известен факт (см., например, работу М. Гончарова и П. Колесникова, 2018), что двойные скобки Ли на конечномерном пространстве V находятся во взаимно однозначном соответствии с кососимметричными операторами Роты–Бакстера веса 0 на алгебре $\mathrm{End}(V)$. Данное соответствие продолжено на бесконечномерный случай. Таким образом, получен первый пример простой двойной алгебры Ли.

В совместной работе с М. Е. Гончаровым введено понятие двойной алгебры Ли веса λ, которое при $\lambda = 0$ совпадает с уже известным понятием двойной алгебры Ли. Показано взаимно однозначное соответствие между двойными скобками Ли ненулевого веса λ на пространстве V и λ-кососимметричными операторами Роты–Бакстера веса λ на алгебре $\mathrm{End}(V)$. Установлено, что, как и в случае нулевого веса, простых конечномерных двойных алгебр Ли не существует.

Доказано, что каждая двойная скобка Ли веса λ, заданная на векторном пространстве V, единственным образом продолжается до модифицированной двойной скобки Пуассона на свободной ассоциативной алгебре $\mathrm{As}(V)$. Этот результат, в частности, подтверждает гипотезу С. Артамонова (2017).

Б. Е. Дураков. О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса

Группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Группа G называется *группой Фробениуса* с дополнением H и ядром F, если F и H — собственные подгруппы группы G и $G = F \leftthreetimes H$, (G, H) — пара Фробениуса, т. е. $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$, и $G \setminus F^{\#} = \bigcup H^g$.

В докладе приводятся достаточные условия, при которых бесконечная периодическая группа G, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса. В наших исследованиях среди таких условий важную роль занимает наличие в группе конечных и обобщённо конечных элементов. Элемент a называется *конечным* в группе G, если все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ $(g \in G)$ конечны; элементы a и b группы G называются *обобщённо конечными*, если все подгруппы вида $\langle a, b^g \rangle$ $(g \in G)$ конечны.

С. А. Жилина. Свойства корней многочленов над алгебрами Кэли–Диксона

Алгебрами Кэли–Диксона над произвольным полем F называется семейство 2^n-мерных алгебр, естественным образом обобщающих алгебры комплексных чисел, кватернионов и октонионов. Алгебры Кэли–Диксона, вообще говоря, некоммутативны и неассоциативны, а при $n \geq 4$ перестают быть даже альтернативными. Наиболее изученными среди них являются вещественные алгебры главной последовательности, для которых F — поле вещественных чисел, а все параметры процедуры Кэли–Диксона подразумеваются равными -1.

Для каждого многочлена $f(x)$ над алгеброй Кэли–Диксона определён некоторый многочлен $C_f(x)$ над полем F, называемый сопровождающим. Целью данной работы является изучение связи между корнями $f(x)$, $f'(x)$ и $C_f(x)$ для произвольного многочлена $f(x)$ над алгеброй Кэли–Диксона. В докладе будут изложены следующие результаты:

1. В работе Чапмана было показано, что при $n \leq 3$ корни любого многочлена $f(x)$ являются также корнями $C_f(x)$. Установлено, что при $n \geq 4$ это утверждение перестаёт быть верным в общем случае, однако продолжает выполняться для сферических корней многочлена $f(x)$.

2. Классическая теорема Гаусса–Лукаса утверждает, что для любого комплексного многочлена $f(x)$ степени не меньше 1 корни $f'(x)$ содержатся в выпуклой оболочке корней $f(x)$. Гилони и Перотти обобщили эту теорему на случай алгебры кватернионов, показав, что в этом случае корни $f'(x)$ содержатся в так называемой улитке Гаусса–Лукаса $\mathrm{sn}(f)$. Показано, что такая формулировка теоремы Гаусса–Лукаса остаётся верной и для произвольных вещественных алгебр главной последовательности.

Доклад основан на совместной статье с Соломоном Вишкауцаном, Александром Эмилевичем Гутерманом и Адамом Чапманом.

К. А. Ильенко. О почти простых группах с графом Грюнберга–Кегеля как у неразрешимых групп Фробениуса

Граф Грюнберга–Кегеля (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G — это обыкновенный граф, вершинами которого являются все простые делители порядка G, и вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G найдется элемент порядка pq. По *теореме Грюнберга — Кегеля*, если G – группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, то выполняется одно из следующих утверждений: G – группа Фробениуса, G – 2-фробениусова группа, G – расширение нильпотентной группы с помощью почти простой группы.

Группа G называется *распознаваемой* по графу Грюнберга–Кегеля, если она определяется своим графом Грюнберга–Кегеля с точностью до изоморфизма, *почти распознаваемой*, если существует лишь конечное число попарно неизоморфных групп, графы Грюнберга–Кегеля которых равны $\Gamma(G)$, и *нераспознаваемой* по графу Грюнберга–Кегеля иначе. Недавно П. Камероном и Н. В. Масловой было показано, что если группа почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля, то она почти проста. В виду этого результата и теоремы Грюнберга–Кегеля представляет интерес вопрос совпадения графов Грюнберга–Кегеля почти простой группы G и группы H, которая является группой Фробениуса или 2-фробениусовой группой. Решение этого вопроса было получено М. Р. Зиновьевой и В. Д. Мазуровым (2012 г.) для случая, когда G проста, а в случае, когда H разрешима, соответствующие результаты следуют из совокупности реузльтатов работ М. Р. Зиновьевой и А. С. Кондратьева (2015 г.), И. Б. Горшкова и Н. В. Масловой (2018 г.). В этом докладе мы обсуждаем решение вопроса для оставшегося случая, когда группа G почти проста, но не проста, а группа H является неразрешимой группой Фробениуса. Доклад основан на результатах совместной с Н. В. Масловой работы.

А. В. Кислицин. Условия конечной базируемости тождеств мультипликативных векторных пространств и совпадения *T*- и *L*-идеалов

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F, E — подпространство алгебры A, порождающее A как алгебру. Алгебра A в этом случае называется *обертывающей алгеброй* пространства E, а пространство E называется *мультипликативным векторным пространством* или *L-пространством.* Свободную ассоциативную алгебру от множества свободных образующих X будем обозначать через $F\langle X\rangle$.

Под *тождеством пары* (A, E) понимается такой многочлен из $F\langle X\rangle$, который равен нулю в алгебре A при подстановке вместо переменных элементов пространства E. В этом случае также будем говорить о *тождестве векторного пространства E.*

Через $T(G)$ обозначим T-идеал, порожденный множеством $G \in F\langle X\rangle$, а через $L(G)$ обозначим идеал алгебры $F\langle X\rangle$, замкнутый относительно линейных замен переменных и назовем его *L-идеалом, порожденным множеством G*.

Скажем, что *тождество g пространства E следует из тождеств $f_1, f_2, \dots$ этого пространства*, если $g \in L(f_1, f_2, \dots)$. Множество тождеств L-пространства E, из которых следуют все тождества этого пространства, назовем *базисом тождеств E*. В случае, если базис L-пространства E конечен, скажем, что E *имеет конечный базис тождеств* или *конечно базируемо*.

Ранее автором исследован вопрос о наличии условий конечной базируемости тождеств произвольного L-пространства. Доказано, что всякое мультипликативное векторное пространство E над бесконечным полем, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]z = 0$, либо тождеству $x[y, z] = 0$, имеет конечный базис тождеств. При этом, если G — базис тождеств E, то $T(G) = L(G)$.

В настоящей работе доказано, что всякое мультипликативное векторное пространство E над полем нулевой характеристики, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]zt = 0$, либо тождеству $xy[z, t] = 0$, имеет конечный базис тождеств. При этом существует L-пространство с базисом тождеств G, содержащим один из многочленов $[x, y]zt$, либо $xy[z, t]$, для которого $T(G) \neq L(G)$.

Р. А. Козлов. Универсальные ассоциативные обёртывающие с ограничением на локальность 3 для квадратичных конформных алгебр, построенных по специальным алгебрам Гельфанда–Дорфман

Алгебры Новикова возникли как помощник в построении некоторых гамильтоновых операторов в вариационном исчислении. Формально, это алгебры с одной операцией — умножением Новикова — которая является левосимметрической и правокоммутативной. Алгебра Гельфанда–Дорфман это векторное пространство с двумя билинейными операциями $[\cdot, \cdot]$ и $(\cdot \circ \cdot)$, относительно которых мы получаем алгебры Ли и Новикова соответственно, а также удовлетворяющими дополнительному тождеству согласования. Если алгебра Гельфанда–Дорфман естественным образом вкладывается в алгебру Пуассона с дифференцированием, то она называется *специальной*.

Конформная алгебра — это модуль C над алгеброй полиномов $H = \Bbbk[\partial]$, снабжённый операцией умножения $C \otimes C \to C[\lambda]$ (т.е. результат умножения – это полином от формальной переменной λ со значениями в C) и набором аксиом. Подобно “обычным” алгебрам, конформные алгебры разбиваются на многообразия (ассоциативные, Ли и т. д.). Например, конформные алгебры Ли оказываются очень полезны как инструмент по изучению структуры и представлений вертексных алгебр.

Алгебры Гельфанда–Дорфман находятся во взаимно-однозначном соответствии с квадратичными конформными алгебрами Ли, весьма широким классом, содержащим в себе большинство классических примеров: конформная алгебра Гейзенберга, Вирасоро, Навье–Шварца и т.д.

Для обычных алгебр Ли хорошо известна и очень полезна конструкция универсальной ассоциативной обёртывающей. Способ превращения ассоциативной алгебры в алгебру Ли работает и в конформном случае. Однако, в отличие от классического результата, не всякая конформная алгебра Ли инъективно вкладывается в ассоциативную. Это обусловлено “многозначностью” умножения, а именно, требованием локальности. Тем не менее, если квадратичная конформная алгебра Ли построена по специальной алгебре Гельфанда–Дорфман, то удаётся привести явную конструкцию для построения универсальной ассоциативной конформной обёртывающей алгебры с локальностью не выше 3.

А. В. Кравчук. Спектр транспозиционного графа

Транспозиционный граф T_n определяется как граф Кэли на симметрической группе Sym_n относительно порождающего множества транспозиций. Известно, что все собственные значения этого графа являются целыми числами. Кроме этого, доказано, что наибольшее собственное значение $\frac{n(n-1)}{2}$ имеет кратность 1, второе собственное значение $\frac{n(n-3)}{2}$ имеет кратность $(n-1)^2$, и для каждого $k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, значение $\frac{n(n-2k+1)}{2}$ является собственным значением с кратностью не менее $\frac{n!}{n(n-k)!(k-i)!}$. Поскольку транспозиционный граф является двудольным, то для любого его собственного значения λ верно, что $-\lambda$ также является собственным значением с той же кратностью, что и λ. Таким образом, имеется некоторое представление о том, как устроен спектр $Spec(T_n)$ транспозиционного графа T_n, где под спектром понимается множество всех различных собственных значений графа вместе с их кратностями. Однако точное описание спектра для графа T_n неизвестно. В этом докладе будут рассказаны результаты в изучении спектра графа T_n, которых уже удалось добиться, а так же о сложностях, которые возникают при попытке точно описать спектр данного графа.

О. В. Куликова. О некоторых факторгруппах гиперболических групп

Доклад посвящён обобщению некоторых результатов, изложенных в книге А. Ю. Ольшанского *Геометрия определяющих соотношений в группах*, на случай нециклических гиперболических групп без кручения.

М. В. Майсурадзе. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр над конечными полями

Свободные неассоциативные алгебры относятся к шраерову многообразию алгебр. Что означает, что любая подалгебра таких алгебр является свободной. Примитивные элементы — элементы, входящие в множество свободных образующих алгебры.

Используя технику свободного дифференциального исчисления и критерий примитивности, сформулированный в терминах обратимости матриц (над универсальной обёртывающей алгеброй) частных производных, получилось найти новый подход к исследованию. В частности, для элементов длины 2 с произвольным числом образующих найдена взаимосвязь между рангами матриц, составленных из коэффициентов при неассоциативных мономах и примитивностью элемента.

О. В. Маркова. Алгебры длины один

Доклад основан на совместном исследовании с К. Мартинес (Университет Овьедо, Испания) и Р. Л. Родригесом (Университет Сан-Паулу, Бразилия).

Длиной конечной системы образующих конечномерной (не обязательно ассоциативной) алгебры над полем называется наименьшее натуральное число k такое, что произведения длины, не превышающей k, порождают эту алгебру (как векторное пространство). Максимальная длина систем образующих алгебры называется длиной алгебры. Вычисление длины является достаточно трудной задачей, например, длина полной матричной алгебры неизвестна (проблема Паза 1984 г.). Изучение алгебр, длина которых близка к минимальной, представляет интерес в контексте вычислительных процедур. В докладе будет дано описание алгебр длины один над произвольными полями в терминах базиса с известной таблицей умножения.

М. А. Михеенко. О разрешимости уравнений над группами: конечные и локально индикабельные группы

Уравнение $w(x_1, \dots x_n) = 1$ называется разрешимым над группой G, если G вложима в какую-то группу, в которой есть решение данного уравнения.

Теорема Ницше–Тома утверждает, что над конечной группой разрешимо любое уравнение с нетривиальным содержанием. Теорема Бродского–Хауи–Шорта говорит, что если группа локально индикабельна, то над ней класс разрешимых уравнений ещё шире.

Наш (с А. А. Клячко) результат обобщает эти две теоремы.

В. В. Паньшин. О распознавании конечных групп по множеству размеров классов сопряженности.

Для конечной группы G обозначим через $N(G)$ множество размеров её классов сопряженности, а через G^n — ее декартову n-ю степень. Недавно был сформулирован следующий вопрос ("Коуровская тетрадь", вопрос 20.29): если S — неабелева простая группа, верно ли, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой конечной группы G с тривиальным центром из равенства $N(G) = N(S^n)$ следует изоморфизм $G \simeq S^n$? Для $n = 1$ ответ на этот вопрос утвердителен для всех неабелевых простых групп S (это известная гипотеза Дж. Томпсона 1987 года, доказанная полностью в 2019 году). В докладе будет представлен обзор результатов для $n > 1$, в частности, будут рассмотрены случаи: $n = 2$ и $S \in \{A_5, A_6\}$; $n = 3$ и $S = A_5$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

О. В. Постнова. Тензорные степени векторного представления $U_q(sl_2)$ в корнях из единицы

Будут рассмотрены представления квантованной универсальной обертывающей алгебры sl_2 с разделенными степенями и малой квантовой группы в корнях из единицы. Мы получим явные формулы для кратностей косых модулей в тензорных степенях двумерных представлений большой и малой квантовых групп. Будет рассмотрено ограничение представлений большой квантовой группы на малую квантовую группу, и построение модели решеточных путей.

Е. В. Соколов. Об аппроксимируемости фундаментальных групп некоторых графов групп

Группа X называется аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$, если для каждого ее неединичного элемента x найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, переводящий x в элемент, отличный от 1. Наибольшую известность получило свойство финитной аппроксимируемости (т. е. аппроксимируемости классом всех конечных групп), поскольку для конечно определенной финитно аппроксимируемой группы разрешима проблема тождества. Наряду с финитной изучалась также аппроксимируемость конечными p-группами (где p — простое число), разрешимыми, нильпотентными, свободными и некоторыми другими классами групп. В настоящем докладе свойство аппроксимируемости рассматривается применительно к различным свободным конструкциям групп (обобщенным свободным произведениям, HNN-расширениям и т. д.), каждая из которых представляет собой одновременно и фундаментальную группу некоторого графа групп. Б?льшая часть известных результатов об аппроксимируемости таких конструкций относится к случаю, когда аппроксимирующий класс является корневым, т. е. замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых степеней. В последние годы был выработан подход, позволяющий изучать аппроксимируемость фундаментальных групп графов групп сразу целым (потенциально бесконечным) семейством корневых классов. Это, в частности, позволило весьма существенно продвинуться в изучении аппроксимируемости свободных конструкций групп классом всех разрешимых групп и различными его подклассами. В докладе будет приведено краткое описание указанного подхода, сформулированы основные задачи, возникающие при его применении, и перечислены некоторые случаи, в которых эти задачи удалось решить.

А. М. Старолетов. О группах йорданова типа

Аксиальные алгебры йорданового типа η были введены Ф. Рееном, С. Шпекторовым и Дж. Холлом в 2015 г. Это коммутативные алгебры, порождённые идемпотентами, операторы левого сдвига которых имеют минимальный многочлен, делящий $(x-1)x(x-\eta)$, где $\eta \notin \{0,1\}$. Умножение в таких алгебрах подчиняется правилам, обобщающим правила из пирсовского разложения в йордановых алгебрах, где $\frac{1}{2}$ заменяется на η. Оказалось, что для каждого порождающего идемпотента можно построить автоморфизм алгебры порядка два, который называется инволюцией Миямото. В докладе мы обсудим свойства групп, порожденных инволюциями Миямото аксиальных алгебр йоранова типа.

Р. О. Стасенко. Короткие SL_2-структуры

Известна классическая конструкция Титса–Кантора–Кёхера, позволяющая по простой йордановой алгебре J построить простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, имеющую вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(J).$$

Теорема Титса–Кантора–Кёхера утверждает, что между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли, удовлетворяющими описанной выше формуле, существует взаимно однозначное соответствие.

Конструкцию Титса–Кантора–Кёхера можно интерпретировать как линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое разлагается на неприводимые представления размерностей 1 и 3. Естественным обобщением является следующее понятие. Пусть S — редуктивная алгебраическая группа. S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\Phi : S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовем короткой, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. При этом изотипное разложение представления Φ будет иметь вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \big(\mathbb{C}^2 \otimes J_1\big) \oplus \big(\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2\big).$$

Конструкция Титса–Кантора–Кёхера получается при $J_1 = 0$. Доклад будет посвящён случаю $J_1 \neq 0$.

Аналогично теореме Титса–Кантора–Кехера, будет установлено взаимно однозначное соответствие между простыми алгебрам Ли с короткой SL_2-структурой с $J_1 \neq 0$ и так называемыми простыми симплектическими тройками Ли–Йордана $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$, где J_1 — симплектическое пространство, $\mathfrak{g}_0$ — редуктивная подалгебра Ли в $\mathfrak{sp}(J_1)$, а J_2 — простая йорданова подалгебра симметрических операторов на J_1, причем на J_1 алгебры J_2 и $\mathfrak{g}_0$ не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств. Будет дана полная классификация коротких SL_2-структур на простых алгебрах Ли.

Короткие и очень короткие SL_2-структуры можно аналогичным образом задавать на произвольных $\mathfrak{g}$-модулях, используя соответствующее линейное представление алгебры ли $\mathfrak{g}$. Подобная конструкция имеет интересные приложения к теории представлений йордановых алгебр, о которых также будет рассказано в докладе.

О. Г. Стырт. Графы ортогональности матриц над коммутативными кольцами

Доклад посвящён исследованию графов ортогональности некоммутативных ассоциативных колец на примере кольца матриц. Так, в случае, если основное кольцо является телом, ранее были получены следующие свойства графа ортогональности кольца $(n \times n)$-матриц: при $n = 2$ он несвязен, и все его связные компоненты имеют диаметры не более 2, а при $n \geq 3$ он связен и имеет диаметр 4. Эти утверждения доказаны в 2014 г. для поля [1], а в 2017 г. — для произвольного тела [2]; их также легко обобщить на целостные кольца (путём перехода к полю частных).

Основу выступления составляет граф ортогональности кольца $(n \times n)$-матриц над коммутативным нецелостным кольцом. Автором доказано, что при $n > 1$ данный граф связен, его диаметр равен 3 либо 4, а радиус — 2, 3 либо 4; получен критерий каждого из значений диаметра.

[1] Бахадлы Б. Р., Гутерман А. Э., Маркова О. В. Графы, определённые ортогональностью // Зап. научн. семин. ПОМИ 2014. Т. 428. Сс. 49–80.

[2] Гутерман А. Э., Маркова О. В. Графы ортогональности матриц над телами // Зап. научн. семин. ПОМИ 2017. Т. 463. Сс. 81–93.

А. Л. Таламбуца. О свободных полугруппах целочисленных матриц и связанных с ними вопросах

Доклад посвящён алгоритмической задаче проверки, является ли данный набор квадратных целочисленных матриц базисом свободной полугруппы. Доказано, что эта задача алгоритмически неразрешима уже для матриц размера 3×3, а для матриц 2×2 этот вопрос открыт. Эта задача также тесно связана с вопросом Эрдёша–Грэхэма о плотностях орбит целочисленных линейных функций одной переменной, который возник из исследования существования латинских квадратов чётных размеров, и которая также остаётся нерешённой уже более 40 лет. Будет рассказано о результатах докладчика в этих двух направлениях.

Д. Т. Тапкин. Инволюции и автоморфизмы в алгебре формальных матриц

Исследование автоморфизмов и инволюций матричных алгебр относится к классическим задачам теории колец. Здесь можно выделить два основных направления. С одной стороны, можно изучать непосредственно общий вид автоморфизмов и инволюций. А с другой стороны, можно исследовать эти отображения в целом и описывать группу автоморфизмов или, если нам достаточно изучить поведение отображений с точностью до некоторого отношения эквивалентности, группу внешних автоморфизмов и классификацию инволюций с точностью до эквивалентности. Здесь мы говорим что инволюции первого рода $*$ и $\circ$ алгебры A эквивалентны, если $(A, *)$ и $(A, \circ)$ изоморфны как алгебры с инволюциями.

В докладе будет приведен обзор имеющихся результатов об автоморфизмах и инволюциях, а также и некоторые новые результаты.

Н. А. Шишмаров. Симметрии Гекке, ассоциированные с регулярными по Артину–Шельтеру алгебрами типов E и H

Симметрии Гекке представляют собой специальный класс решений уравнения Янга–Бакстера. С каждой симметрией Гекке R на векторном пространстве V можно связать алгебры $\mathbb{S}(V, R)$ и $\Lambda(V, R)$, которые можно рассматривать как обобщение симметрической и кососимметрической алгебр для пространства V. В серии работ разных авторов было показано, что при некоторых ограничениях алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ обладает определенными гомологическими свойствами, что относит ее к классу регулярных алгебр, изучавшихся М. Артином и В. Шельтером. В докладе будет рассказано о симметриях Гекке R, для которых соотвествующая алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ является регулярной типа E. Также будет показано, что не существует симметрии Гекке R такой, что алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ имеет тип H.

3 Алгебраическая геометрия

И. В. Аржанцев. Лучезарные торические многообразия и действия унипотентных групп

Полное торическое многообразие будем называть лучезарным, если максимальная унипотентная подгруппа U группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ действует на X с открытой орбитой. Оказывается, такие многообразия могут быть охарактеризованы целым рядом замечательных свойств. В докладе мы обсудим эти свойства, охарактеризуем полные веера, отвечающие лучезарным многообразиям, и предложим комбинаторную технику, позволяющую описывать множество корней Демазюра лучезарного многообразия. В качестве приложения будет описана структура максимальной унипотентной подгруппы U группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. В частности, мы вычислим ступень разрешимости и класс нильпотентности группы U. Также будет предложен эффективный критерий для нахождения всех регулярных подгрупп группы U, которые действуют на многообразии X с открытой орбитой. В качестве приложения мы получим несколько результатов об эквивариантных торических пополнениях унипотентных групп. В заключение будет дано эффективное описание лучезарных поверхностей.

Доклад основан на результатах совместных работ с А. Ю. Перепечко, Е. Л. Ромаскевич и К. В. Шахматовым. Исследования поддержаны грантом RSF-DST 22-41-02019.

М. С. Венчаков. Характеры неприводимых представлений унитреугольной группы

Основные понятия

G — конечная группа

$\varphi\colon G \to GL(V)$ — её представление

$\psi\colon G \to \mathbb{C}$ — характер представления φ

$\psi(g) = \mathrm{tr}\ \varphi(g)$, $g \in G$

$supp(\psi) = \{g \in G \mid \psi(g) \neq 0\}$ — его носитель

$G = SL_n(\mathbb{F}_q)$ или $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$

$B \subset G$ — борелевская подгруппа (верхнетреугольная)

$N \subset B$ — её унипотентный радикал

$\mathfrak{n} = Lie\ N$, $N \curvearrowright \mathfrak{n}$, $N \curvearrowright \mathfrak{n}^*$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, * \in \mathbb{F}_q \right\}$$

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathfrak{n}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Метод орбит

Группа N действует на $\mathfrak{n}^*$ по правилу $g.\lambda = (g\lambda g^{-}1)_{\mathrm{low}}$

1962 г., А.А. Кириллов: $\mathrm{Irr}\ N \leftrightarrow \mathfrak{n}^*/N$

В этом случае, значение характера, соответствующего орбите формы Ω на элементе g группы N равно:

$$\psi_\Omega(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu\in\Omega} \theta(\mu(\ln(g))),\ \theta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$$

Характер глубины k - характер максимальной размерности в $\mathfrak{n}_k$.
Регулярные характеры — характеры максимальной размерности.
Субрегулярные орбиты соответствуют характерам предмаксимальной размерности.
Характеры глубины 2 — характеры размерности q^{M-2}.-

Основная теорема
а) Найден носитель $supp(\psi) = \bigcup\limits_{D,\xi} K_{D,\xi}$.
б) Вычислено значение $\psi(K_{D,\xi}) = q^{m_D} \prod_{(i,j)\in D} \theta(\ldots)$.
Где $K_{D,\xi}$ — класс сопряжённости элемента $1 + x_{D,\xi} = \sum\limits_{(i,j)\in D} \xi_{j,i} e_{i,j}$

А. В. Викулова. Конечные подгруппы в группе бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра над полем $\mathbb{Q}$.

В этом докладе мы покажем, что нетривиальные конечные подгруппы в группе бирациональных автоморфизмов нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра над полем $\mathbb{Q}$ изоморфны либо $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, либо $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Более того, мы покажем, что группа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ является подгруппой в группе бирациональных автоморфизмов любой поверхности Севери–Брауэра над полем характеристики ноль.

А. С. Голота. Конечные абелевы подгруппы в группах бирациональных автоморфизмов

Я расскажу о конечных абелевых подгруппах в группах бирациональных автоморфизмов проективных многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, а также в группах бимероморфных автоморфизмов компактных кэлеровых пространств. В частности, я расскажу о многообразиях, группы бирациональных автоморфизмов которых содержат конечные абелевы подгруппы неограниченного порядка, но с фиксированным минимальным числом образующих.

Н. Го. Гипотеза Гротендика–Серра и теорема о чистоте

The Grothendieck–Serre conjecture predicts that every principal bundle under a reductive group scheme G over a regular local ring R is trivial if it is generically trivial. In other words,

$$\text{the map} \quad H^1_{\text{ét}}(R, G) \to H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Frac} R, G) \quad \text{has trivial kernel.}$$

When R contains a field, the conjecture was solved affirmatively, whereas when R is of mixed characteristic, it is widely open. Besides, a non-Noetherian variant of the conjecture, when R is replaced by a valuation ring, was solved affirmatively. In this report, beyond the historical summary, I briefly talk about the following recent progress on this conjecture.

(i) For an irreducible scheme X smooth projective over a discrete valuation ring R of mixed characteristic, every generically trivial principal bundle under a reductive connected R-group is Zariski-locally trivial. This is a joint work with Панин Иван Александрович.

(ii) For a scheme X smooth of finite type over a valuation ring V, if $x \in X$ is not a maximal point of V-fibers of X and $\dim \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$, then for any X-torus T, we have the purity

$$H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}, T) \simeq H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \backslash \{x\}, T),$$

which leads to the Grothendieck–Serre for tori on X. This is a joint work with Fei Liu.

А. Э. Дружинин. Гладкие модели мотивных пространств и спектров

Мотивная теория гомотопий изучает алгебраические многообразия и их инварианты с точностью до процедур подобных топологическим склейкам, дифформациям и гомотопиям топологических пространств. С одной стороны, мотив алгеброгеометрического многообразия — это сущность, улавливающая в многообразиях то, что существенно для исследуемого класса инвариантов, таких как теории гомологий и когомологий. С другой, сами многообразия отличаются от мотивов более чёткими структурами, и их уместно рассматривать как средство выразить некие априори абстрактные мотивы представляющие рассматриваемые когомологий теории в явном геометрическом виде. В докладе мы обсудим геометрические модели для некоторых стандартных теорий когомологий и их роль в исследовании свойств этих теорий, уделяя особое внимание свойствам связности мотивов и точности ассоциированныйх комплексов Герстена или Кузена.

И. Ю. Ждановский. Квартика Игусы и коммутаторы проекторов

Этот доклад основан на совместной работе с А. Кочеровой.

Мы будем изучать геометрические свойства двух полных наборов ортогональных проекторов ранга 1: $\{p_i\}_{i=1}^n$ и $\{q_j\}_{j=1}^n$, действующих в n-мерном комплексном пространстве V. Пусть X — многообразие, параметризующее пары наборов. Рассмотрим фактор $Y = X//\mathrm{GL}(V)$. Можно показать, что кольцо $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X)^{\mathrm{GL(V)}}$ порождено функциями

$$\mathrm{Tr} p_{i_1} q_{j_1} \dots p_{i_s} q_{j_s}, \quad s \leq n,$$

причем все коэффициенты i (а также j) различны. В нашем докладе мы расскажем про некоторые геометрические свойства многообразия Y.

Зафиксируем проекторы p_i диагональными и обозначим через T диагональный тор. Рассмотрим произведение (ко)присоединенных орбит $Z = \mathcal{O}(q_1) \times \dots \times \mathcal{O}(q_n)$ проекторов ранга 1. Тогда есть хорошо-известное отображение моментов $\mu_1 \colon Z \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, определенное так:

$$(q_1, \dots, q_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Несложно показать, что Y описать как фактор $\mu_1^{-1}(E)/\mathrm{GL}(V)$. Далее, есть естественное отображение моментов относительно действия T^n:

$$\mu_2 \colon Z \to \mathbb{C}^{n(n-1)},$$

определенное по формуле

$$\mu_2\colon (q_1,\dots,q_n)\mapsto \mathrm{Tr}(p_iq_j)_{i=1,\dots,n-1;j=1,\dots,n}.$$

Отображение μ_2 можно определить на Y — получим отображение $\mu_2\colon Y\to\mathbb{C}^{(n-1)^2}$, заданное функциями $\mathrm{Tr}p_iq_j$. Данное отображение имеет хорошо известную “квантово-механическую” переформулировку: для этого надо рассмотреть комплексное пространство с эрмитовой метрикой, вместо проекторов можно рассмотреть эрмитовы проекторы. Тогда каждому набору соответствует своя наблюдаемая, а следам — вероятности перехода квантово-механической системы из одного состояния в другое. То есть отображение μ_2 это сопоставление квантовой системе из 2 наблюдаемых — вероятностей перехода.

Зафиксируем точку $Q=(q_1,\dots,q_n)\in Y$ и обозначим $\mathfrak{t}_Q$ картановскую подалгебру, порожденную q_i. Методами симплектической геометрии можно показать, что для касательного пространства в фиксированной точке Q имеем изоморфизм

$$\mathrm{Ker}\, d\mu_2|_Q=[\mathfrak{t},\mathfrak{t}_Q]^{\perp}/(\mathfrak{t}_Q+\mathfrak{t}),$$

здесь $\perp$ — взятие ортогонального дополнения относительно формы следа, а $\mathfrak{t}$ — диагональная картановская подалгебра.

Далее, рассмотрим другое описание набора проекторов: полный набор ортогональных проекторов задается набором из n точек в $\mathbb{P}^{n-1}$. Каждому проектору сопостовляется его образ, используя ортогональность получаем однозначное задание проекторов. Двум полным системама проекторов соответствует набор из $2n$ точек в $\mathbb{P}^{n-1}$. Рассмотрим пример $n=3$. В этом случае многообразие, задающее 6 точек в $\mathbb{P}^2$ - многообразие Кобла $\mathcal{C}$ — естественная компактификация многообразия Y. А отображение μ_2 продолжается до двулистного накрытия $\mu_2\colon\mathcal{C}\to\mathbb{P}^4$. При этом с помощью описания ядра $\mathrm{Ker}\, d\mu_2$ в формуле получаем, что дивизор ветвления μ_2 характеризуется тем, что существует нетривиальное соотношение на коммутаторы проекторов: $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}[p_i,q_j]=0$. С другой стороны дивизор ветвления - квартика Игусы, параметризующее 6 точек на конике. Таким образом, можно сформулировать следующий результат:

Теорема. Пусть есть 2 тройки ортогональных проекторов $\{p_i\}$ и $\{q_j\}$ действующих в 3-мерном пространстве. Тогда существует нетривиальное соотношение $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}[p_i,q_j]=0$ тогда и только тогда, когда точки соответствующие образам проекторов лежат на конике.

Также, если останется время, я расскажу об обобщениях этого результата.

Ю. И. Зайцева. Горенштейновы алгебры и аддитивные действия на проективных гиперповерхностях

Аддитивным действием на алгебраическом многообразии называется эффективное регулярное действие коммутативной унипотентной линейной алгебраической группы с открытой орбитой. Другими словами, изучаются открытые эквивариантные вложения векторной группы в алгебраические многообразия. В работе (Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Not. IMRN 1999 (1999), no. 22, 1211–1230) Хассетт и Чинкель установили соответствие между коммутативными локальными артиновыми алгебрами с единицей и аддитивными действиями на проективных пространствах. Этот подход может быть применён к изучению аддитивных действий на проективных гиперповерхностях. Оказывается, что случай невырожденной гиперповерхности соответствует горенштейновым локальным алгебрам, и с помощью этой техники можно доказать несколько результатов об аддитивных действиях. В частности, доказано, что на невырожденных проективных гиперповерхностях существует не более одного аддитивного действия. Доклад основан на совместной работе с И.В.Аржанцевым (И.В.Аржанцев и Ю.И.Зайцева. Эквивариантные пополнения аффинных пространств. Успехи математических наук 77:4 (466) (2022), 3–90). Работа поддержана грантом РНФ 19-11-00172.

В. И. Звонилов. Вещественные алгебраические многообразия, гомологичные нулю в комплексификации

В 1978 г. Рохлин получил формулу для комплексных ориентаций неособой плоской вещественной алгебраической кривой чётной степени, разбивающей свою комплексификацию. Доклад посвящён распространнению формулы Рохлина на случай неособой нечётномерной проективной вещественной алгебраической гиперповерхности чётной степени, гомологичной нулю в комплексификации. Приведены примеры вещественных алгебраических многообразий любой размерности, гомологичных нулю в своей комплексификации.

М. В. Игнатьев. Автоморфизмы инд-многообразий обобщенных флагов

Мы изучаем бесконечномерные инд-многообразия обобщенных флагов в счетномерных комплексных пространствах. В классической конечномерной ситуации группа автоморфизмов многообразия флагов G/P — это «почти» группа G. Оказывается, что в бесконечномерной ситуации группа автоморфизмов инд-многообразия G/P ГОРАЗДО больше, чем группа G. А именно, это группа Макки некоторой пары векторных пространств с невырожденным спариванием. Кроме того, мы даем матричную интерпретацию этой группы автоморфизмов.

В. А. Кириченко. Многогранники Ньютона–Окунькова многообразий Ботта–Самельсона

Многообразия Ботта–Самельсона представляют собой разрешения особенностей многообразий Шуберта. Их можно построить индуктивно как башни проективных расслоений со слоем прямая. Я опишу выпукло-геометрические аналоги проективных расслоений со слоем прямая, которые позволяют индуктивно строить многогранники Ньютона–Окунькова. Примеры включают в себя классические многогранники Гроссберга–Каршон, а также новое семейство многогранников, обощающих многогранники Винберга–Литтельманна–Фейгина–Фурье.

Г. В. Коновалов. Производные Пуассоновы вырождения

Будет рассказано про то, как строить операды, котнролирующие вырожденные Пуассоновы алгебры, где под вырожденной Пуассоновой алгеброй подразумевается Пуассонова алгебра, ранг скобки которой ограничен сверху. В качестве приложения будет рассказано про построение производных Пуассоновых вырождений.

А. А. Кузнецова. Критерий регуляризуемости бирациональных автоморфизмов

Изучение свойств бирационального автоморфизма многообразия обычно начинается с поиска удобной бирациональной модели многообразия. В идеале желательно найти модель, на которой индуцирован регулярный автоморфизм. Однако достичь этого удается не всегда, если порядок автоморфизма бесконечен. Я опишу бирациональный автоморфизм проективного трехмерного пространства и сформулирую критерий, доказывающий, что этот автоморфизм не регуляризуется.

Е. С. Малыгина. Оптимальные кривые рода 3 и их приложения

В докладе речь пойдет об оптимальных кривых рода 3, определенных над конечными полями с дискриминантами -19, -43, -67, -163. Под оптимальной кривой понимается кривая, чье число рациональных точек удовлетворяет границе Хассе–Вейля–Серра. Поскольку на сегодняшний день не существует общего алгоритма построения кривых с большим числом рациональных точек над конечными полями (за исключением эллиптического и гиперэллиптического случаев), то весьма актуальным становится вопрос нахождения явных уравнений кривых и их практических приоложений. Я расскажу о том, что оптимальные кривые рода три, расматриваемые над определенными конечными полями, представляют собой двойное накрытие эллиптической оптимальной кривой, они не являются гиперэллиптическими, а также о структуре их группы автоморфизмов. Существует два подхода для вывода уравнений таких кривых. Первый основан на построении явных базисов пространства Римана–Роха, которое ассоциировано с некоторым дивизором, кратным бесконечно удаленной точке кривой. Второй подход основан на использовании группы автоморфизмов кривой относительно базиса пространства Римана–Роха и его инвариантности. В обоих случаях используется теория функциональных полей рассматриваемых кривых. Также я расскажу о приложениях таких кривых в теории кодирования и криптографии.

П. С. Осипов. Специальные кэлеровы многообразия и алгбраические интегрируемые системы

Специальным кэлеровым многообразием называется кэлерово многообразия (M, I, g, ω) с плоской симплектической связностью ∇ такой, что g локально задаётся гессианом функции в ∇-плоских координатах. Пусть X комплексное симплектическое многообразие. Алгебраической интегрируемой системой называется голоморфное отображение $\pi : X \to M$, слои которого — лагранжевы абелевы многообразия. Я расскажу как связаны специальные кэлеровы многообразия и алгебраические интегрируемые системы: тотальное пространство алгебраическая интегрируемой системы имеет вид T^*M/Λ, где M — специальное кэлерово многообразие и Λ — решётка в T^*M.

На кокасательном расслоении к специальному кэлерову многообразия может быть построена гиперкэлерова структура. Как следствие, тотальное пространство алгебраической интегрируемой системы допускает гиперкэлерову структуру.

А.Б.Павлов. Расслоения Ульриха над кубикой Хессе и матрицы Мура

Для гладкой эллиптической кривой в канонической форме Хессе мы матричные факторизации расслоений Ульриха. Случай ранга один напрямую связан с матрицей Мура эллиптической кривой. Если время позволит мы обсудим связи с тета-функциями в случае эллиптической кривой над комплексными числами.

В. А. Петров. Алгебры Хопфа и мотивы однородных многообразий

Пусть G — расщепимая полупростая линейная алгебраическая группа над полем F, E — G-торсор над спектром F. Тогда каждому проективному многообразию с G-действием можно сопоставить его E-скрученную форму. Мы вводим некоторую алгебру Хопфа, ассоциированную с E и ориентированной теорией когомологий A (некоторую фактор-алгебру $A^*(G)$) и показываем, что она (ко)действует на реализации мотивов скрученных форм. Это дает сильные ограничения на возможный вид мотивных разложений таких многообразий. Мы демонстрируем это на примере маломерных квадрик и некоторых многообразий исключительного типа.

А. В. Петухов. Комбинаторика коприсоединённых орбит нильпотентых алгебр Ли

Пусть G — это комплексная простая группа Ли, N — её максимальная унипотентная подгруппа, $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли N. Орбиты коприсоединённого действия $N : \mathfrak{n}^*$ активно изучаются вот уже более 50 лет в контексте метода орбит Кириллова, и их полное описание для всех типов сразу является дикой задачей (насколько мне известно, даже для довольно маленьких алгебр Ли, скажем, для F_4 ответ пока не найден). С другой стороны, для простых групп классических серий A, B, C, D имеется стратификация орбит Андре, разбивающая все орбиты на большие и довольно явно описанные классы; каждая страта (класс) в этой конструкции описывается расстановкой ладей.

В моём докладе я хотел показать как дополнить комбинаторику стратификации Андре до полной классификации коприсоединённых орбит $N : \mathfrak{n}^*$ в типах B_4, C_4, D_4, а так же как из схожих конструкций можно получить описание орбит максимальной и предмаксимальной размерности во всех классических типах (раннее этот результат был получен А. А. Кирилловым и А. Н. Пановым для типа A). Доклад основан на совместной работе с М. В. Игнатьевым, которую мы сейчас пишем.

А. В. Семенов. Геометрия симметрических пространств типа EVI

Для изучения алгебраических групп часто рассматриваются связанные с ней геометрические структуры с действием группы на них. Для анизотропных групп можно рассматривать замкнутые подгруппы, которые являются стабилизаторами некоторых инволюций. Соответствующие пространства называются симметрическими и являются классическими объектами изучения дифференциальной геометрии. Винбергом и Ацуямой независимо было посчитано число прямых, проходящих через две точки в общем положении в симметрических пространствах над базовым полем $\mathbb{R}$, после чего Ацуяма исследовал также вопрос специального положения двух точек и многообразия прямых, проходящих через них.

Мы обобщим этот результат на произвольное поле F характеристики нуль в случае пространства типа EVI, используя чисто алгебраические и алгебро-геометрические методы.

Для этого мы исследуем пространство $E7/(D6 + A1)$ над базовым полем F и используем следующую геометрическую реализацию: в качестве как точек, так и прямых мы используем множества подгрупп типа A_1 с индексом Дынкина, равным единице, в E_7, и мы будем использовать правило, что прямая B_1 инцидентна точке B_2 в том и только том случае, если они коммутируют. Тогда наш результат состоит в достижении полной классификации возможностей для множества прямых, проходящих через две точки, аналогичной классификации Ацуямы.

Д. А. Тимашев. О группе компонент вещественной алгебраической группы

Пусть G — связная алгебраическая группа, определённая над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Множество её комплексных точек $G(\mathbb{C})$ есть связная комплексная группа Ли, а множество вещественных точек $G(\mathbb{R})$ — вещественная группа Ли, но уже не обязательно связная: в качестве контрпримера достаточно взять $GL_n(\mathbb{R})$. Оказывается, что группа компонент связности $\pi_0 G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^\circ$ (где $\mathbb{G}(\mathbb{R})^\circ$ — связная компонента единицы) всегда будет элементарной абелевой 2-группой. Этот результат был впервые получен Х. Мацумото в 1964 г. для полупростых алгебраических групп. Обобщая и уточняя теорему Мацумото, мы явно вычислим группу $\pi_0 G(\mathbb{R})$ для произвольной (не обязательно линейной) связной алгебраической группы, основываясь на точной последовательности

$$1 \longrightarrow \pi_0 G(\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, \pi_1 G(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, \widetilde{G}),$$

где $\pi_1 G(\mathbb{C})$ — фундаментальная группа, а $\widetilde{G}$ — универсальная накрывающая группы Ли $G(\mathbb{C})$, и $H^1(\mathbb{R}, -)$ обозначает множество первых когомологий группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ с коэффициентами в данной группе. Ответ выглядит особенно наглядно в случаях, когда G — линейная алгебраическая группа или абелево многообразие.

С. В. Феклистов. Голоморфное продолжение в голоморфных расслоениях с $(1,0)$-компактифицируемым слоем

Спектральная последовательность Лере позволяет получить утверждение об обращении в нуль групп когомологий с компактными носителями пучка голоморфных функций на пространстве голоморфного расслоения. Одним из приложений является результат об устранении компактных особенностей голоморфных функций в пространстве голоморфного расслоения с некомпактным слоем, имеющим один топологический конец и допускающий компактификацию с нулевой иррегулярностью.

А. В. Фонарёв. Обобщенная гипотеза Дубровина

Известная гипотеза, принадлежащая Борису Анатольевичу Дубровину, устанавливает связь между симплектической и алгебраической геометрией проективного многообразия. А именно, предлагает необходимые и достаточные условия полупростоты в общей точке больших квантовых когомологий в терминах строения производной категории когерентных пучков. В докладе будет рассказано об обобщении гипотезы Дубровина, предложенным Александром Кузнецовым и Максимом Смирновым, которое имеет дело с малыми квантовыми когомологиями, и разобраны примеры, в которых данную гипотезу удается проверить.

А. А. Шевченко. Касательные конусы к аффинным многообразиям Шуберта

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, B — её борелевская подгруппа, G/B — многообразие флагов. Будем рассматривать касательные конусы к многообразиям Шуберта в точке $p = eB$. В 2011 году А. Н. Панов выдвинул гипотезу, что для инволюций в группе Вейля касательные конусы различны как подсхемы в касательном пространстве к G/B в точке p. Легко показать, что гипотезу достаточно проверить для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней. На данный момент она доказана для типов A_n, B_n, C_n, F_4, G_2, а так же для части инволюций в оставшихся типах. В докладе будет обсуждаться расширение этой гипотезы на аффинные группы Каца-Муди. А точнее, следующая ситуация. Пусть W — группа Вейля типа $\widetilde{A_n}$, $\widetilde{G}$ — соответствующая ей группа Каца-Муди, $\widetilde{B}$ — её борелевская подгруппа, $\widetilde{G}/\widetilde{B}$ — многообразие флагов. Аналогично редуктивному случаю определяются аффинные многообразия Шуберта и можно сформулировать такую же гипотезу.

4 Геометрия и топология

Н. В. Абросимов. Об объеме гиперболического тетраэдра

В докладе будет дан обзор последних результатов по нахождению точных формул для вычисления объемов гиперболических тетраэдров. Будут представлены формулы для гиперболических тетраэдров общего вида и специальных видов: идеальных, биортогональных, 3-ортогональных и других.

В частности, будет рассмотрено 4-параметрическое семейство тетраэдров, у которых одно ребро ортогонально грани. Для них будут установлены формулы, выражающие гиперболический объем и объем, нормализованный по площади поверхности, а также показано их ассимптотическое поведение.

И. С. Алексеев. Меры сложности и многочлен HOMFLY-PT узлов

Мы исследуем классическую сложность узлов и зацеплений по наименьшему числу перекрёстков. Один из подходов к её вычислению предполагает обращение к полиномиальным инвариантам узлов, а именно, к неравенствам Мортона–Фрэнкса–Уильямса, которые связывают количество перекрёстков диаграмм зацепления с шириной его многочлена HOMFLY-PT. И хотя этот способ вычисления не является универсальным, для некоторых классов зацеплений соответствующие оценки достигаются и предоставляют наглядные критерии минимальности диаграмм. Доклад посвящен обзору недавних результатов в этом направлении.

В. Г. Бардаков. Произведение квандловых структур.

Квандл — алгебраическая система с одной бинарной операцией, удовлетворяющей трем аксиомам, соответствующим трем движениям Рейдемейстера диаграмм зацеплений в 3-мерном пространстве. Квандлы были введены независимо С. В. Матвеевым и Д. Джойсом для построения инвариантов узлов и зацеплений.

В докладе будет введено произведение квандловых структур, определенных на одном множестве, будут сформулированы условия, при которых это произведение задает квандл. Далее будут показано, что произведение квандловых структур образует группу, и установлено, что эта группа является абелевой.

Это совместная работа с Д. А. Федосеевым.

Г. В. Белозеров. Биллиарды с потенциалом Гука на некоторых трехмерных столах, ограниченных софокусными квадриками

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ — компактная область, ограниченная конечным числом софокусных квадрик и имеющая двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Рассмотрим следующую динамическую систему: материальная точка (шар) единичной массы движется внутри $\mathcal{D}$ под действием силы упругости (закон Гука), отражаясь от $\partial\mathcal{D}$ абсолютно упруго. Такая система является интегрируемой по Лиувиллю системой в кусочно-гладком смысле. Один из ее первых интегралов — полная механическая энергия. Еще два первых интеграла F_1 и F_2, функционально независимых с H, можно найти с помощью метода В. В. Козлова, используя дополнительные первые интегралы I_1, I_2 задачи без потенциала. Оказывается, что функции H, F_1 и F_2 находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона.

В докладе будут рассмотрены биллиарды с потенциалом Гука внутри двух трехмерных софокусных столов. Для каждого из этих столов построены бифуркационные диаграммы соответствующих биллиардов, описаны прообразы малых окрестностей слоев слоения Лиувилля, а также определены классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей для небифуркационных значений энергии.

В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, Эволюционные биллиарды как способ реализации интегрируемых случаев Эйлера и Лагранжа.

Академиком А. Т. Фоменко был открыт новый класс интегрируемых биллиардов, а именно, эволюционные биллиарды. Они представляют собой биллиарды, положение стенок которых зависит от энергии биллиардной частицы, т.е. чем больше скорость, тем больше область, в которую при движении может попасть биллиардный шар. Как оказалось, с помощью нового класса биллиардов удается промоделировать слоение Лиувилля сразу на нескольких изоэнергетических многообразиях разных областей энергии — например, в известных интегрируемых случаев Эйлера и Лагранжа и интегрируемых геодезических потоков на поверхностях постоянной энергии с интегралом малой степени.

А. Х. Галстян. Устойчивость решения проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами

Проблема Ферма–Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ пространства Y минимальна. Множество A в таком случае называют границей, а все A_i — граничными множествами. Мы рассматриваем эту проблему в случае, когда Y — это пространство непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X, наделённое метрикой Хаусдорфа, то есть Y является гиперпространством над X. В данной работе изучается вопрос устойчивости решения проблемы Ферма–Штейнера при переходе от границы из конечных компактов к границе, состоящей из их выпуклых оболочек. Под устойчивостью имеется в виду, что при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов минимум суммы расстояний не изменится.

Д. В. Гугнин. Любая надстройка и любая гомологическая сфера являются 2H-пространствами

В докладе будет рассказано об обобщении классического понятия H-пространства. А именно, линейно связное хаусдорфово топологическое пространство X является nH-пространством, $n > 1$, если оно допускает n-значное умножение с единицей, то есть существует непрерывное отображение $\mu\colon X \times X \to \mathrm{Sym}^n X$ со свойством $\mu(x, e) = \mu(e, x) = [x, x, \ldots, x]$ для всех $x \in X$. Можно показать, что односвязный конечный CW комплекс X размерности d допускает структуру nH-пространства для любого $n \geq d$. Будут представлены следующие два недавних результата докладчика: (1) надстройка над любым связным конечным или счетным полиэдром является $2H$-пространством; (2) любая сглаживаемая гомологическая сфера является $2H$-пространством.

Д. А. Дроздов. О прересечениях фрактальных кубов

Определение. *Пусть* $D = \{d_1, \ldots, d_r\} \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}^k$*, где* $n \geq 2$*, а* $1 < \#D < n^k$*. Фрактальным* k*-кубом порядка* n *с множеством единиц* D *называют компактное множество* $K \subset R^k$*, удовлетворяющее* $K = \dfrac{K+D}{n}$.

Пусть $P = [0,1]^k$, тогда любой фрактальный k-куб содержится в P.

Определим грани куба P. Пусть $\alpha \in A = \{-1, 0, 1\}^k$, тогда $P_\alpha = P \cap (P + \alpha)$ есть α-грань куба P. Размерность такой α-грани есть $\dim(P_\alpha) = k - \sum_{i=1}^k |\alpha_i|$.

Пусть $\alpha, \beta \in A$, будем говорить, что β подчинено α (обозначим через $\beta \sqsupset \alpha$), если для любого $i = 1, \ldots, k$ неравенство $\alpha_i \neq 0$ влечёт $\alpha_i = \beta_i$.

Для фрактального k-куба K мы определим его грани K_α как $K_\alpha = K \cap P_\alpha$. Грани фрактального куба есть фрактальные кубы.

Пусть $K_1 = \dfrac{D_1 + K_1}{n}$ и $K_2 = \dfrac{D_2 + K_2}{n}$ – фрактальные k кубы. Мы доказываем следующую теорему о пересечении фрактальных кубов:

Теорема. *Семейство* $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ *пересечений* $F_\alpha = K_1 \cap (K_2 + \alpha)$ *удовлетворяет системе уравнений* $F_\alpha = \bigcup\limits_{\beta \sqsupseteq \alpha} T_{\alpha\beta}(F_\beta)$, $\quad \alpha \in A$*, где для любого* $\beta \sqsupseteq \alpha$, $T_{\alpha\beta}(F_\beta) = \frac{1}{n}(F_\beta + G_{\alpha\beta})$ *и* $G_{\alpha\beta} = D_1 \cap (D_2 + n\alpha - \beta)$.

Предложение. $F_\alpha = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\beta \sqsupseteq \alpha$ *и любой конечной последовательности* $\alpha = \alpha_0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_p = \beta$ *произведение* $\#G_{\alpha_0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \ldots \#G_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \cdot \#G_\beta$ *равно нулю.*

Мы доказали теоремы о размерности множества F_0 и о признаке бесконечной меры этого множества:

Теорема. *Если* $F_0 \neq \varnothing$*, то размерность* $\dim(F_0) = \log_n m$*, где* $m = \max\{\#G_\alpha,\ \alpha \in A :$ *для любой последовательности* $0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_{p-1} \sqsubset \alpha$ *произведение* $\#G_{0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \#G_{\alpha_{p-1}\alpha} \cdot \#G_\alpha \neq 0\}$.

Теорема. *Пусть* $\#G_0 = \#G_\beta$ *и* $\log_n \#G_0 = s$*. Если существует последовательность* $0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_{p-1} \sqsubset \beta$ *такая, что* $\#G_{0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \#G_{\alpha_{p-1}\beta} \geq 1$*, то* $H^s(F_0) = \infty$.

А. А. Егоров. Верхние оценки объемов гиперболических многогранников

Г. Беллетти показал, что объем произвольного обобщенного гиперболического многогранника P меньше объема идеального прямоугольного гиперболического многогранника, 1-скелет которого является медиальным графом 1-скелета P. Мы поговорим о верхних оценках объемов обобщенных гиперболических многогранников, которые могут быть получены с помощью данного результата.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

С. Д. Илиадис, Ю. В. Садовничий. Размерность, произведение пространств и универсальность

В докладе будут рассмотрены следующие предложения.

Предложение 1. *Для любого сепарабельного метризуемого пространства* Y *и любых счетных ординалов* α *и* β *в непустом классе всех сепарабельных метризуемых пространств* X*, для которых* $ind(X) = \alpha$ *и* $ind(Y \times X) = \beta$ *существует универсальный элемент.*

Предложение 2. *Для любого вполне регулярного пространства Y и любых ординалов α и β в непустом классе всех вполне регулярных пространств X, для которых $ind(X) = \alpha$ и $ind(Y \times X) = \beta$ существует универсальный элемент.*

В. А. Кибкало. Некомпактные слоения механических систем в псевдо-евклидовых пространствах

Теория топологической классификации интегрируемых систем в компактном случае была построена в работах А. Т. Фоменко и его научной школы. Важным классом систем, в применении к которому данная теория показала свою эффективность (позволив обнаружить новые случаи эквивалентности разных систем) оказались интегрируемые системы динамики твердого тела и интегрируемые биллиарды. Как оказалось, при помощи дискретных инвариантов можно сравнивать такие системы с точностью до послойной гомеоморфности их слоений Лиувилля. Почти все их слои, отметим, являются замыканиями фазовых траекторий системы.

В нашем докладе мы расскажем о том, как более широкий класс слоений, имеющий некомпактные слои и некритические бифуркации, возникает в псевдо-евклидовых аналогах интегрируемых систем динамики, в частности, аналогах волчков Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Будет рассказано об особенностях слоений Лиувилля этих систем, построенных бифуркационных диаграммах отображения момента при разных значениях параметров и полученных критериях компактности совместных уровней первых интегралов.

И. Ф. Кобцев. Магнитные геодезические потоки на двумерных многообразиях вращения

Рассматривается динамическая система, описывающая движение материальной точки по двумерному риманову многообразию M, на котором определено действие группы S^1 изометриями (будут изучаться конкретные случаи $M \approx S^2$ и $M \approx \mathbb{R}P^2$). Такая система называется называется геодезическим потоком на римановом многообразии, она является гамильтоновой.

Добавив к стандартной симплектической структуре $d(pdq)$ замкнутую 2-форму на конфигурационном многообразии (локально это равносильно добавлению к гамильтониану линейных по обобщенным импульсам слагаемых), получим новую постановку, которую будем называть магнитным геодезическим потоком (линейные по импульсам слагаемые естественным образом появляются при исследовании движений заряженной материальной точки в магнитном поле). Построенная таким образом система остается гамильтоновой и, более того, становится вполне интегрируемой по Лиувиллю (если потребовать S^1-инвариантность наложенного магнитного поля).

Возникает вопрос об исследовании топологических свойств слоения Лиувилля (т.е. лагранжева слоения с особенностями) этой задачи.

В рамках доклада будут изложены основные результаты проведенной работы:

- построены бифуркационные диаграммы;
- описаны особенности рангов 0 и 1 (как невырожденные, так и вырожденные; в частности, были обнаружены бифуркации типа «pitch-fork», не связанные с какими-либо симметриями в системе);
- найдены инварианты грубой и тонкой лиувиллевой эквивалентности;

- в задачах динамики твердого тела выявлено несколько интегрируемых систем, лиувиллево эквивалентных данной системе на ее неособых изоэнергетических многообразиях.

А. В. Костин. Обобщения задачи о тени и поверхности постоянной кривизны

Задача о тени поставлена Г. Худайбергановым в 1982 г. в следующей формулировке: какое минимальное число непересекающихся шаров с центрами на единичной сфере евклидова пространства и радиусами, меньшими единицы, достаточно для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекалась хотя бы с одним их этих шаров. Решение этой задачи в размерностях, больших двух, получено в 2015 г. Ю. Б. Зелинским, И. Ю. Выговской и М. С. Стефанчук. Задача о тени является частым случаем задачи о принадлежности точки обобщённо-выпуклой оболочке множеств. В работе рассматриваются задачи такого рода в пространстве Лобачевского. С задачей о принадлежности точки обобщённо-выпуклой оболочке оришаров косвенно оказывается связанной задача о вложении в евклидово пространство псевдосферических поверхностей вращения, найденных Ф. Миндингом. Все три типа псевдосферических поверхностей вращения получают общее истолкование в пространстве Лобачевского, связанное с касательными конусами к орисферам.

Т. А. Козловская. Подгруппы ромашкового типа и группа сингулярных кос

В работе будет представлена конечная система порождающих и определяющих соотношений группы сингулярных крашеных кос SP_n, которая является подгруппой группы сингулярных кос SB_n. Используя это представление, будет доказано, что центр группы SP_n выделяется в ней прямым множителем. Кроме того, будут построены линейные представления и представление автоморфизмами свободной группы F_n группы SB_n. Также мы определим подгруппы ромашкового типа и докажем, что группа SP_n, $n \geq 5$, является группой ромашкового типа.

И. Ю. Лимонченко. О полиэдральных произведениях, гомологии петель которых являются свободными алгебрами

В 1950-х годах Ж.-П. Серр доказал, что ряд Пуанкаре коммутативного локального нетерова кольца органичен определенной рациональной функцией, зависящей от чисел Бетти комплекса Кошуля и минимального числа образующих в максимальном идеале. В 1962 году Е.С.Голод показал, что неравенство Серра превращается в равенство тогда и только тогда, когда умножение и все произведения Масси в гомологиях Кошуля локального кольца являются тривиальными; такое локальное кольцо называется кольцом Голода. Дж. Бакелин доказал в 1982 году, что ряды Пуанкаре мономиальных колец рациональны; среди мономиальных колец есть хорошо известный класс колец Стенли–Рейснера (или колец граней) симплициальных комплексов.

В этом докладе мы обсудим, как торическая топология позволяет нам устанавливать комбинаторные, алгебраические и топологические условия, эквивалентные голодовости и минимальной неголодовости кольца граней симплициального комплекса над любым полем. Мы опишем эти два класса колец Стенли–Рейснера в терминах их рядов Пуанкаре, гомологий Кошуля и структуры алгебры Ли на гомологиях петель соответствующих момент-угол комплексов. Мы увидим, как теория пространств с действием компактного тора позволяет нам получать топологические интерпретации алгебраических свойств рядов Пуанкаре и гомологий Кошуля колец Стенли–Рейснера, а также новые результаты.

Доклад основан на совместной работе с Т. Е. Пановым.

А. Е. Липин. Об уплотнении метризуемых пространств на σ-компактные

В 1949 году И. Л. Раухваргер доказала, что для всякого метрического компакта X и любого счетного множества $H \subseteq X$ существует уплотнение (т.е. непрерывная биекция) подпространства $X \setminus H$ на метрический компакт. Известно, что ограничение на мощность H здесь существенно: в 1977 году Е. Г. Пыткеев доказал, что всякое метрическое сепарабельное пространство мощности $\mathfrak{c}$ можно разбить на два континуальных подпространства, каждое из которых не уплотнимо на полное метрическое пространство.

В 2022 году В. И. Белугин, А. В. Осипов и Е. Г. Пыткеев в работе "О свойствах подклассов слабо диадических компактов" поставили вопрос, можно ли усилить теорему Раухваргер, ослабив условие счетности H до условия $|H| \leq \kappa$ для какого-нибудь кардинала κ, промежуточного между $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$. Мы представляем утверждение, из которого следует отрицательный ответ.

Теорема. *Пусть X — полное метрическое пространство и для множества $H \subseteq X$ выполняется $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. Тогда подпространство $X \setminus H$ невозможно уплотнить на σ-компактное пространство.*

Здесь $w(X)$ обозначается вес пространства X. В частности, для метрических компактов получается

Следствие. *Пусть X — несчетный метрический компакт и для множества $H \subseteq X$ выполняется $\aleph_0 < |H| < \mathfrak{c}$. Тогда подпространство $X \setminus H$ невозможно уплотнить на σ-компактное пространство (и, следовательно, на компакт).*

М. С. Ненашева. О числе компонент связности в локусах Прима для плоских поверхностей рода 5

Плоской поверхностью называют гладкую риманову поверхность с заданным на ней голоморфным дифференциалом. Пространство плоских поверхностей рода g допускает естественное действие группы $GL_2(\mathbb{R})$. Изучение орбит этого действия и их замыканий привлекло интерес широкого круга исследователей в последние несколько десятилетий. В 2000-х годах К. МакМюллен описал бесконечное семейство орбит для поверхностей рода 2, чьи замыкания являются афинными подмногообразиями ранга один. Известными примерами таких многообразий в пространствах старших родов являются *локусы Прима*, представляющие объединения замыканий орбит действия $GL_2(\mathbb{R})$. Они существуют для плоских поверхностей рода не выше 5.

Данный доклад посвящен задаче о подсчете числа компонент связности в локусах Прима для поверхностей старшего возможного рода. Наши результаты продолжают серию работ для младших родов К. МакМаллена, Э. Ланно, Д. Нгуена.

Д. Д. Нигомедьянов. Бесконечная серия компактных гиперболических 3-многообразий с вполне геодезическим краем и каспами и их минимальные триангуляции.

Триангуляционная сложность $c_\Delta(M)$ компактного связного 3-многообразия M с непустым краем равна наименьшему числу тетраэдров среди всех идеальных триангуляций M. Докладчиком совместно с Е. А. Фоминых была получена новая нижняя оценка на триангуляционную сложность: $c_\Delta(M) \geqslant \beta_1(M, \mathbb{Z}_2)$. Доклад будет посвящён классу многообразий, на которых достигается нижняя оценка сложности. Конкретнее, мы обсудим вопрос наличия многообразий из данного класса с заданными характеристиками, такими как край и группы гомологий.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2022–287.

С. С. Николаенко. Топология алгебраически разделимых систем

Одним из методов качественного анализа решений вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы является изучение топологии её лиувиллева слоения, то есть слоения фазового пространства на совместные поверхности уровня первых интегралов системы (регулярные торы Лиувилля и особые слои). А. Т. Фоменко и его школой построена теория топологической классификации интегрируемых систем, одним из основных результатов которой является полное описание топологии лиувиллева слоения на 3-мерном инвариантном подмногообразии невырожденной интегрируемой системы с двумя степенями свободы. Соответствующий классифицирующий инвариант, называемый *меченой молекулой*, или *инвариантом Фоменко–Цишанга*, имеет структуру графа с числовыми метками. Рёбрам этого графа отвечают однопараметрические семейства регулярных слоёв, а вершинам — бифуркации слоения, так называемые *атомы*. Поиск этого инварианта для конкретной интегрируемой системы может оказаться весьма нетривиальной задачей, однако в ряде случаев он может быть выполнен алгоритмически. Одним из таких случаев является класс *алгебраически разделимых систем*. Алгебраическое разделение, как правило, означает, что гамильтоновы уравнения на каждом слое сводятся к системе уравнений Абеля, а фазовые переменные некоторым «хорошим» образом выражаются через переменные разделения (как рациональные функции от радикалов специального вида). В продолжение работ М. П. Харламова, О. Е. Орёл и других авторов построен алгоритм топологической классификации алгебраически разделимых систем. В качестве следствия из этого алгоритма получен полный список простейших бифуркаций (атомов), которые могут возникать в таких системах.

Г. М. Полотовский. Топология распадающихся вещественных алгебраических кривых

Рассматривается относящаяся по тематике к первой части 16-й проблемы Гильберта задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых, распадающихся на несколько неприводимых сомножителей. Даётся обзор полученных в последние три года автором и его учениками результатов о кривых степени 7, распадающихся на три сомножителя, и о кривых степени 8, распадающихся на 2 сомножителя.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

М. В. Прасолов. Алгоритмическое распознавание лежандровых зацеплений

Мы приводим алгоритм, который позволяет сравнить два лежандровых зацепления в трёхмерной сфере, снабжённой стандартной контактной структурой. Два лежандровых зацепления считаются одинаковыми, если их можно включить в одно однопараметрическое семейство лежандровых зацеплений. Доклад основан на совместной работе с И. А. Дынниковым.

Д. В. Талалаев. Положительные матрицы и электрические сети

Полностью положительные матрицы лежат в основе современной бурно развивающейся области кластерных алгебр, имеют приложения в интегрируемых моделях статистической физики, теории представлений квантовых алгебр, диофантовых уравнениях и многих других областях. Вместе с тем возникли они в контексте классической задачи малых колебаний линейных упругих континуумов. Я подробно расскажу о происхождении этих структур, основных характеристических свойствах полностью положительных матриц, об их лагранжевой версии и связи с теорией электрических сетей.

О. Д. Фролкина. Ответ на вопрос Дж. Кэннона и С. Уэймента

Решая проблему Р. Давермана, В. Крушкаль описал “липкие” канторовы множества в R^N для $N > 3$; такие множества не могут быть сняты сами с себя малыми изотопиями пространства R^N. Используя множества Крушкаля, мы отвечаем на вопрос Дж. Кэннона и С. Уэймента (1970). А именно, для $N > 3$ строим в R^N компакты X со свойствами: некоторая последовательность $\{X_i\}$ подмножеств R^N в определенном — довольно сильном — смысле сходится к X, никакое X_i не пересекается с X, однако в R^N не существует несчетного семейства попарно дизъюнктных подмножеств, каждое из которых вложено эквивалентно X. Такие примеры были описаны Кэнноном и Уэйментом для $N = 3$ и $N > 4$. Наше построение работает для любого $N > 3$, тем самым дает ответ для открытого до сих пор случая $N = 4$. В отличие от работы Кэннона и Уэймента, доказательство не требует опоры на сложные результаты Р. Бинга (1957–1961), Дж. Брайента (1968), А. В. Чернавского (1973) и Р. Давермана (1973).

Д. В. Фуфаев. Некоторые экзотические свойства топологических пространств и соответствующих C^*-алгебр

Категория коммутативных C^*-алгебр эквивалентна категории локально-компактных хаусдорфовых топологических пространств, поэтому теорию C^*-алгебр называют некоммутативной топологией. И некоторые результаты о свойствах C^*-алгебр можно получать, даже ограничиваясь только коммутативными, а значит, их можно формулировать в терминах соответствующих топологических пространств. Одним из таких свойств является существование в C^*-алгебре стандартного фрейма — некоторого обобщения ортогонального базиса (для этого C^*-алгебра рассматривается как гильбертов C^*-модуль). Наличие такого фрейма эквивалентно обладанию алгеброй свойства стабилизации типа Каспарова. Оказывается, в топологических терминах наличие стандартного фрейма можно связать с поведением сигма-компактных подмножеств соответствующего топологического пространства. Похожие результаты можно получить и для более общих фреймов (не обязательно стандартных). Описанию этой связи и будет посвящен доклад.

Г. С. Черных. SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов

При изучении теории SU-бордизмов возникает промежуточная теория между ними и комплексными бордизмами — теория c_1-сферических бордизмов W. В докладе я расскажу об общем описании SU-линейных операций на комплексных кобордизмах, об SU-линейных умножениях на теории W и SU-линейных проекторах из теории комплексных бордизмов на неё, а также о комплексных ориентациях на W и некоторых вопросах о соответствующих формальных группах.

И. М. Широков. Hopf-type theorems for f-neighbors

We work within the framework of a program aimed at exploring various extended versions for theorems from a class containing Borsuk–Ulam type theorems, some fixed point theorems, the KKM lemma, Radon, Tverberg, and Helly theorems. In this talk we will present variations of the Hopf theorem concerning continuous maps of a compact Riemannian manifold M of dimension n to $\mathbb{R}^n$. We investigate the case of maps $f\colon M \to \mathbb{R}^m$ with $n < m$ and introduce several notions of varied types of f-neighbors, which is a pair of distinct points in M such that f takes it to a CsmallT set of some type. Next for each type, we ask what distances on M are realized as distances between f-neighbors of this type and study various characteristics of this set of distances. One of our main results is as follows. Let $f\colon M \to \mathbb{R}^m$ be a continuous map. We say that two distinct points a and b in M are visual f-neighbors if the segment in $\mathbb{R}^m$ with endpoints $f(a)$ and $f(b)$ intersects $f(M)$ only at $f(a)$ and $f(b)$. Then the set of distances that are realized as distances between visual f-neighbors is infinite. Besides we generalize the Hopf theorem in a quantitative sense.

5 Действительный и функциональный анализ

А. Р. Алимов. Связность множеств в несимметричных пространствах

Рассматриваются вопросы о соотношении классов связности подмножеств несимметрично нормированных пространств. Множество $M \subset X$ называется P_0-связным (P-связным) если для любого $x \in X$ множество ближайших точек из M для x связно (непусто и связно). Множество $M \subset X$ называется B-связным, ($\mathring{B}$-связным), если его пересечение с любым шаром $B(x,r) := \{y \in X \mid \|y-x\,| \leqslant r\}$ (с любым шаром $B(x,r) := \{y \in X \mid \|y-x\,| < r\}$) связно. В классическом нормированном случае имеется ряд результатов, гарантирующих B- (или $\mathring{B}$-) связность P- (или P_0-) связных множеств. Первые результаты в этом направлении принадлежат Д. Вулберту и Л. П. Власову. К примеру, хорошо известно, что в банаховом пространстве чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией $\mathring{B}$-связно (т.е. его пересечение с любым открытым шаром связно). Среди множества обобщений результатов Вулберта, Власова и других исследователей отметим следующий: в линейном нормированном пространстве P-связное множество с полунепрерывной сверху метрической проекцией $\mathring{B}$-связно. В докладе результаты такого рода будут получены для несимметрично нормированных пространств.

С. В. Асташкин. Об одном свойстве пространств Орлича, лежащих между L^1 и L^2

Напомним, что замкнутое линейное подпространство H пространства $L^p = L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, называют *сильно вложенным*, если на H сходимость в L^p-норме эквивалентна сходимости по мере.

Цель доклада — распространение на класс пространств Орлича следующей классической теоремы Х. П. Розенталя, доказанной в 1973 г.: Для каждого $1 \le p < 2$ и любого (замкнутого линейного) подпространства H пространства L^p следующие условия эквивалентны:

(a) H не содержит подпространств, изоморфных пространству ℓ^p;

(b) H сильно вложено в L^p;

(c) функции единичного шара B_H подпространства H имеют равностепенно непрерывные нормы в L^p.

Сформулируем один из результатов, где α_M^∞, β_M^∞ — индексы Матушевской-Орлича в бесконечности функции M.

Теорема. *Пусть M — такая функция Орлича, что $1 < \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty < 2$, $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$ и $\limsup_{n\to\infty} \frac{M(uv)}{M(v)} \le Ku^{-1/\beta_M^\infty}$ для некоторого $K > 0$ и всех $u \ge 0$. Тогда для каждого подпространства H пространства L_M следующие условия эквивалентны:*

(i) H не содержит подпространств, изоморфных подпространствам L_M, порожденным последовательностями попарно дизъюнктных функций;

(ii) H сильно вложено в L_M;

(iii) нормы функций единичного шара B_H подпространства H равностепенно непрерывны в L_M.

М. В. Балашов. О сильной выпуклости множества достижимости линейной управляемой системы

Пусть $B_R(a)$ — евклидов шар с центром $a \in \mathbb{R}^n$ радиуса $R > 0$. Для выпуклого компакта $Q \subset \mathbb{R}^n$ и единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ определим $Q(p) = \{x \in Q \ : \ (p,x) = \max\limits_{z\in Q}(p,z)\}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ систему $x'(t) \in Ax(t) + U$, $x(0) = 0$. Здесь A — $n \times n$ матрица, $U \subset \mathbb{R}^n$ —

одномерный выпуклый компакт (отрезок). Рассмотрим множество достижимости системы в момент $t > 0$, т.е. интеграл Аумана $\mathcal{R}(t) = \int\limits_0^t e^{As} U\, ds$.

Зафиксируем единичный вектор $p \in \mathbb{R}^n$. В докладе будет обсуждаться следующий вопрос: существует ли число $R > 0$ такое, что

$$\mathcal{R}(t) \subset B_R(\mathcal{R}(t)(p) - Rp)? \tag{1}$$

Ответ зависит от корней квазимногочлена $(e^{A^T s} p, U(p))$ (по переменной $s \in \mathbb{R}$). Если все вещественные корни этого многочлена из промежутка $[0, t]$ имеют кратность 1 (простые корни), то указанное R найдется. Если имеется корень кратности ≥ 2, то никакое $R > 0$ не реализует включение (1).

Выполнение включения (1) важно для сходимости градиентных методов при решении некоторых теоретико-множественных задач со множеством достижимости.

С. И. Безродных. Формулы аналитического продолжения гипергеометрических функций многих переменных

Весьма общий класс гипергеометрических функций, зависящих от N переменных $(z_1, z_2, \ldots, z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, определяется с помощью рядов Горна, имеющих вид:

$$\Phi^{(N)}(\mathbf{z}) = \sum\nolimits_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} \Lambda(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)$ — мультииндекс, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_N^{k_N}$, а коэффициенты $\Lambda(\mathbf{k})$ таковы, что отношение любых двух соседних является рациональной функцией аргументов $k_1, k_2, \ldots, k_N$. Иначе говоря, выполняются соотношения $\Lambda(\mathbf{k} + \mathbf{e}_j)/\Lambda(\mathbf{k}) = P_j(\mathbf{k})/Q_j(\mathbf{k})$, $j = \overline{1, N}$, где P_j и Q_j — некоторые полиномы, а $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ – вектор с единицей на j-м месте.

В докладе излагается подход для построения формул аналитического продолжения ряда (1) по переменным $\mathbf{z}$ во все комплексное пространство $\mathbb{C}^N$ в виде линейных комбинаций $\Phi^{(N)}(\mathbf{z}) = \sum_m A_m u_m(\mathbf{z})$, где $u_m(\mathbf{z})$ — гипергеометрические ряды горновского типа, удовлетворяющие той же системе дифференциальных уравнений в частных производных, что и ряд (1), A_m — некоторые коэффициенты. Реализация этого подхода продемонстрирована на примере функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ — важного для приложений представителя семейства гипергеометрических функций многих переменных. Дано применение формул аналитическскго продолжения функции $F_D^{(N)}$ к решению проблемы "кроудинга", возникающей при вычислении параметров интеграла Кристоффеля–Шварца и построении конформного отображения многоугольников.

А. А. Васильева. Колмогоровские поперечники пересечения двух конечномерных шаров в смешанной норме

Получены порядковые оценки поперечников $d_n(\nu_1 B^{m,k}_{p_1,\theta_1} \cap \nu_2 B^{m,k}_{p_2,\theta_2},\, l^{m,k}_{q,\sigma})$ при $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$ $(i = 1,\, 2)$, $n \leq \frac{mk}{2}$.

А. В. Грешнов. Об оценках в теоремах о точках совпадения на группах Карно

В недавних работах А. В. Арутюнова и А. В. Грешнова было введено и изучено понятие (q_1, q_2)-квазиметрического пространства. Пусть X — некоторое множество, состоящее не менее чем из двух точек. (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством называется пара (X, ρ_X), где $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая (q_1, q_2)-*квазиметрика*, т. е. такая функция, что для нее выполняются *аксиома тождества* $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ и (q_1, q_2)-*обобщенное неравенство треугольника* $\rho_X(x, y) \leq q_1\rho_X(x, z) + q_2\rho_X(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$, где q_1, q_2 — некоторые положительные константы. Эквирегулярные пространства Карно–Каратеодори $\mathcal{M}$ (в частности, группы Карно G), снабженные Box-квазиметриками $\rho_{Box_{\mathcal{M}}}$, являются нетривиальными примерами (q_2, q_2)-квазиметрических пространств. Box-квазиметрики нашли огромное применение в геометрической теории меры и теории функциональных классов и связанных с ними отображений на неголономных многообразиях, развитых С. К. Водопьяновым и его учениками. А. В. Арутюновым и А. В. Грешнова были доказаны теоремы существования точек совпадения двух отображений, действующих из одного (q_1, q_2)-квазиметрического пространства в другое и удовлетворяющих предположению о том, что одно из этих отображений является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица. При этом были установлены оценки отклонения точки совпадения от произвольно заданной и построены примеры (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, показывающих точность полученных оценок. В настоящем докладе мы обсудим результаты, связанные с точностью оценок отклонения точки совпадения от произвольно заданной на группах Карно (G, ρ_{Box_G}).

Т. И. Зайцева. 2-тайлы и растягивающие полиномы

Доклад будет посвящен 2-тайлам — самоподобным компактам, являющимся объединением двух своих сжатий с одинаковой линейной частью. 2-тайлы являются специальным случаем тайлов, на которых основан один из подходов к построению многомерных систем Хаара и многомерных B-сплайнов. Будет рассказано про классификацию 2-тайлов с точностью до аффинного подобия в случае, когда матрица сжатия изотропна (все собственные значения равны по модулю). В анизотропном случае, вопрос сводится к классификации растягивающих полиномов с целыми коэффициентами, старшим коэффициентом 1 и свободным членом $\pm$ 2. Будет рассказано об оценках на число данных полиномов. Для верхней оценки будут использованы результаты Дубицкаса–Конягина о мере Малера. Для нижней оценки будут предъявлены конкретные классы таких полиномов.

А. Н. Карапетянц. Операторы композиции в обобщенных пространствах Гельдера

Исследуются операторы композиции в обобщенных пространствах Гёльдера на единичном диске комплексной плоскости. Именно, в пространствах Гёльдера, построенных по модулю непрерывности и также в классах переменной гёльдеровости. Даются необходимые и достаточные условия, а также приводятся критерии ограниченности и компактности операторов композиции в указанных пространствах. Изучаются также сами обобщенные пространства Гёльдера, доказываются теоремы вложения, строятся примеры функций из этих классов, приводится характеризация функций из этих классов в различных терминах, в том числе в терминах, не использующих дифференцируемость. Доклад основан на трех работах с соавторами — Оскар Бласко (Испания) и Джоэль Рестрепо (Бельгия).

Е. Д. Косов. Новые оценки в задаче дискретизации интегральных норм

В задаче дискретизации интегральных норм по значениям в точках для заданного числа $\varepsilon \in (0,1)$ и N-мерного подпространства $L \subset C(\Omega)$, Ω — компакт с вероятностной борелевской мерой μ, ставится вопрос об оптимальном количестве m точек $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$, для которых

$$(1-\varepsilon)\int_\Omega |f(x)|^p\,\mu(dx) \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \le (1+\varepsilon)\int_\Omega |f(x)|^p\,\mu(dx) \quad \forall f \in L.$$

Ясно, что всегда $m \ge N$, поэтому вопрос состоит в том, при каких условиях на подпространство L количество точек m в описанной задаче может быть выбрано близким по порядку к размерности N. В докладе будет рассказано о недавних продвижениях в данной задаче и о новых оценках количества точек m достаточного для дискретизации интегральной нормы при условии выполнения неравенства типа Никольского для подпространства L. Доклад основан на совместной работе с Ф. Даем и В. Н. Темляковым.

З. А. Кусраева. Порядково-метрические свойства положительных операторов в банаховых решетках

Рассматриваются некоторые классы операторов, выделяемые порядковыми свойствами (положительность, регулярность, порядковая ограниченность). Приводятся примеры, показывающие, что взаимодействие алгебраической структуры и отношения порядка не только интересно, но и продуктивно, так как приводит к решению ряда различных задач анализа, даже если постановка этих задач изначально не была связана с порядком.

Вводятся классы линейных операторов, в определении которых участвует не только порядок, но и норма. Тем самым обозначается обширная область из теории операторов, посвященная исследованию порядково-метрических свойств линейных операторов. Рассматриваются две проблемы: 1) проблема совпадения пространств ограниченных по норме и регулярных операторов; 2) проблема мажорации, т.е. при каких условиях оператор, мажорируемый положительным оператором, наследует какие-нибудь "хорошие" свойства своей мажоранты.

В. В. Лебедев. Большие случайные ± 1 матрицы

Мы рассматриваем $N \times N$ матрицы с коэффициентами ± 1 и при больших N оцениваем вероятность того, что две такие матрицы, выбранные случайным образом, коммутируют. Результаты получены совместно с Э. Ш. Исмагиловым. Предполагается также обсудить некоторые смежные результаты и открытые проблемы.

М. С. Лопушански, Г. М. Иванов. Конструктивный алгоритм построения спрямляемых кривых на проксимально гладких множествах

Хотя существование и единственность геодезической, соединяющей две точки на проксимально гладком множестве в гильбертовом пространстве доказаны, остается неясным, как ее строить. Для приближения к ответу на этот вопрос разработан конструктивный алгоритм построения спрямляемой кривой, соединяющей две точки на проксимально гладком множестве в гильбертовом пространстве. Доказана сходимость данного алгоритма и получена оценка на длину кривой, которая отличается от оценки на длину геодезической в третьем порядке.

Ю. В. Малыхин. Поперечники конечных систем функций

Мы обсудим колмогоровские поперечники конечных множеств функций: $d_n(\{f_1,\dots,f_N\},L_p)$. В пространстве L_2 любая ортонормированная система $\{f_k\}$ является "жёсткой", то есть не приближается маломерными пространствами, соответствующий поперечник отделён от нуля, если n отделено от N. При $p<2$ это уже не так. Мы дадим достаточные условия жёсткости в этом случае, а также рассмотрим примеры систем, для которых возможна хорошая маломерная аппроксимация.

Р. Г. Насибуллин. Неравенства Харди для веса Якоби и их применения

Рассматриваются неравенства типа Харди для весовой функции Якоби. Неравенства содержат дополнительные слагаемые с весовыми функциями, характерными для неравенств Пуанкаре–Фридрихса. Мы применяем их для расширения известных классов однолистных аналитических функций в односвязных областях. Получены условия однолистности в терминах оценки производной Шварца аналитической в единичном круге, во внешности единичного круга и в правой полуплоскости функции.

Т. М. Никифорова. Об одной задаче минимакса на вещественной оси

В докладе будет обсуждаться задача минимакса на вещественной оси для функций специального вида, обобщающего многочлены с весом. Получена характеризация функции, наименее уклоняющейся от нуля, и доказана её единственность. Для отрезка $[0,1]$ и единичного веса аналогичная задача была решена Б. Д. Бояновым в 1979 году. Взвешенную задачу Боянова на отрезке решили венгерские математики Б. Фаркаш, Б. Надь и С. Ревес в 2021 году.

К. А. Оганесян. Оценки числа многомерных разбиений

Речь пойдет об оценках на число $p_d(n)$ всех $(d-1)$-мерных разбиений натурального числа n. Известно, что имеет место двустороннее неравенство $C_1(d)n^{1-1/d}\le\log p_d(n)\le C_2(d)n^{1-1/d}$, где $C_1(d)>1$ при $\log n\gtrsim d$. Мы покажем, что если n достаточно велико по сравнению с d, то и C_2 не зависит от d, а значит, $\log p_d(n)$ есть с точностью до константы $n^{1-1/d}$. Кроме того, мы приведем оценки на $p_d(n)$, дающие асимптотику для $\log p_d(n)$ в зависимости от соотношений между d и n.

М. Г. Плотников. Восстановление и приближение интегрируемых функций

Изучаются вопросы, связанные с восстановлением суммируемых функций из широких классов по их значениям на множествах малой меры (восстанавливающих множествах). Исследуется, насколько точно можно узнать функцию f на p-ичной группе по ее сужению на специальные множества H малой меры в зависимости от поведения коэффициентов Фурье f по системе Виленкина–Крестенсона, а также от групповой структуры и метрических характеристик H.

А. Ю. Попов. Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации

В 1881 году К. Жордан доказал равномерную сходимость ряда Фурье непрерывной 2π-периодической функции ограниченной вариации. В 1952 году С. Б. Стечкин дал оценку скорости сходимости (уточненную впоследствии С. А. Теляковским):

$$\|r_n(f)\| = O\left[\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{V(f)}{\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)}\right)\right],$$

где $r_n(f)$ — n-й остаток ряда Фурье функции f, $\|\quad\|$ — стандартная sup-норма, ω — модуль непрерывности, $V(f)$ — вариация функции f на $[-\pi,\pi]$, постоянная в O — абсолютная. Возникает вопрос о величине этой постоянной. В 1982 году В. В. Жук опубликовал оценку сверху $\|r_n(f)\|$ (f — произвольная непрерывная 2π-периодическая функция), учитывающую "малость" наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами степени $\leq n$ по сравнению с $\omega\left(f,\frac{\pi}{n+1}\right)$, причем все величины в оценке В. В. Жук указал явно. Для функций ограниченной вариации теорема В. В. Жука дает

$$\|r_n(f)\| \leq \omega\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)\left(\frac{2}{\pi^2}\ln\left(1+\frac{3\pi V(f)}{\omega\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)}\right)+9.5\right)$$

(Заметим, что этот результат нигде не был сформулирован; вывод его из теоремы В. В. Жука не вполне тривиален.) Мы уточнили последнюю оценку

$$\|r_n(f)\| \leq \omega_n(f)\left(\frac{2}{\pi^2}\ln\left(\frac{V(f)}{\omega_n(f)}\right)+1.31\right),\ \omega_n(f)=\omega\left(f;\frac{\pi}{1.5(n+0.5)}\right).$$

Мы также показали, что постоянная $2\pi^{-2}$ является точной, а постоянная 1.31 не допускает уменьшения на 1.

Д. В. Руцкий. Экстраполяционные теоремы в решетках измеримых функций

В начале 80-х годов прошлого века Рубио де Франсиа показал, что из оценки

$$\int |Tf|^p w \leqslant c\int |f|^p w$$

с весами Макенхаупта $w \in \mathrm{A}_p$ при каком-то одном значении показателя $1 < p < \infty$ автоматически вытекает её справедливость при всех других значениях показателя и соответствующих весах Макенхаупта. В дальнейшем этот результат многократно обобщался и находил множество применений. В докладе будут представлены некоторые абстрактные экстраполяционные теоремы, сформулированные в терминах поточечных произведений решеток и применимые к широкому классу включений. В предлагаемую схему, помимо ряда классических экстраполяционных теорем, естественным образом укладываются результаты о делимости BMO-регулярности, некоторые утверждения о K-замкнутости и устойчивости интерполяции пространств типа Харди, а также и некоторые результаты о разрешимости теоремы о короне и теорем об идеалах в терминах весовых оценок.

Д. А. Сбоев. Операторы композиции в BV-пространствах на группах Карно

В докладе рассматривается вопрос описания всех гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств BV-функций. Пусть $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ — гомеоморфизм областей Ω, Ω' на группе Карно G, тогда на функцию u, определенную в области Ω', оператор φ^* действует по формуле $\varphi^*(u) = u\circ\varphi$.

Теорема. Гомеоморфизм φ индуцирует ограниченный оператор композиции BV-пространств

$$\varphi^*\colon BV(\Omega')\cap C(\Omega')\to BV(\Omega)$$

тогда и только тогда, когда

1) $\varphi\in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega,\Omega')$ и

2) существует константа $C>0$ такая, что $|D\varphi|(\varphi^{-1}(B))\le C|B|$ для любого борелевского $B\subset\Omega'$.

С. П. Сидоров. Свойства линейных методов формосохраняющего приближения

Будут найдены оценки линейных относительных n-поперечников для линейных операторов, сохраняющих пересечение конусов p-монотонных функций. Кроме того, будут построены примеры линейных операторов, для которых эти оценки будут точны. Однако, результаты показывают, что свойство линейности операторов является негативным в том смысле, что никакое улучшение дифференциальных свойств приближаемых функций не сможет привести к улучшению порядка приближения такими операторами. В связи с этим будут рассмотрены некоторые нелинейные методы формосохраняющего приближения и восстановления сигнала по зашумленным данным, в частности, построения k-монотонных регрессий.

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков. Из теории полиномов Бернштейна

В последнее десятилетие было выявлено много специальных эффектов, связанных с полиномами Бернштейна от кусочно линейных порождающих функций. Среди прочего для таких полиномов исследован вопрос о сходимости в комплексной плоскости и построена завершенная теория аттракторов нулей. Кроме того, для основных модельных примеров

- получен ряд новых алгебраических представлений;
- изучен вопрос о скорости роста возникающих коэффициентов;
- установлены связи полиномов Бернштейна и полиномов Канторовича, что дает новые возможности для изучения последних.

Отдельно поставлена и решена задача о принципиальных отличиях в теории при ее переносе на симметричный отрезок $[-1,1]$. Активное участие в проводимых исследованиях принимали наши коллеги М. А. Петросова, Д. Г. Цветкович, И. В. Окорочков. В докладе будут отражены некоторые наиболее интересные результаты из отмеченного цикла.

А. И. Тюленев. Следы пространств Соболева на регулярных снизу в смысле обхвата по Хаусдорфу подмножествах метрических пространств с мерой

Пусть $\mathrm{X}=(\mathrm{X},\mathrm{d},\mu)$ — полное сепарабельное метрическое пространство с мерой μ, равномерно удовлетворяющей локальному свойству удвоения. Пусть $p\in(1,\infty)$ и пространство X допускает слабое локальное $(1,p)$-неравенство Пуанкаре. Пусть, наконец, S — замкнутое подмножество X, удовлетворяющее при некотором $\theta\in[0,p)$ условию регулярности снизу обхвата Хаусдорфа коразмерности θ. Более точно, пусть существует $\lambda\in(0,1]$ такое, что $\mathcal{H}_{\theta,\infty}(B_r(x)\cap S)\ge\lambda\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}$ при всех $x\in S$ и всех $r\in(0,1]$. Мы приводим точное внутреннее описание пространства следов $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$. Кроме того, мы покажем существование линейного ограниченного оператора продолжения $\mathrm{Ext}_{S,p} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})$, являющегося правым обратным к оператору следа $\mathrm{Tr}\,|_S$. Полученные результаты являются естественным далеко идущим обобщением известных ранее в мировой литературе теорем о следах пространств Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ на регулярных по Альфорсу-Давиду подмножествах метрических пространств с мерой.

К. С. Шкляев. О приближении полугруппой в банаховом пространстве

Аддитивной полугруппой $R(M)$, порожденной подмножеством M банахова пространства X, называется множество всевозможных сумм элементов из M. Вопрос о плотности $R(M)$ в X был поставлен П. А. Бородиным. Им доказано, что если M — спрямляемая, разносторонняя и минимальная кривая, а X — равномерно гладкое и равномерно выпуклое пространство, то $R(M)$ плотно в X. В докладе речь пойдет об обобщении данного результата на случай не минимальных кривых с ослабленным условием спрямляемости. Кроме того, получен аналог данного результата, когда M — образ липшицева отображения из плоского компакта в гильбертово пространство.

6 Динамические системы и обыкновенные дифференциальные уравнения

С. В. Агапов. Об уравнениях типа Хопфа, возникающих в задаче об интегрируемых геодезических потоках.

При поиске дополнительных интегралов многих гамильтоновых систем зачастую удивительным образом возникает уравнение Хопфа (или некоторые близкие к нему уравнения). В докладе будет рассказано о некоторых следствиях этого неожиданного явления.

Е. А. Асташов. О простых особенностях кососимметричных матричных семейств

Доклад будет посвящен рассмотрению семейств кососимметричных матриц, аналитически зависящих от параметров. Мы рассматриваем такие матрицы как матрицы кососимметричных билинейных форм и считаем эквивалентными матрицы, которые получаются друг из друга с помощью биголоморфной замены параметров и аналитической по параметрам замены базиса.

Будут представлены необходимые условия существования простых (то есть имеющих не более чем конечное число примыканий) семейств такого типа в терминах числа параметров, размера матрицы и ранга 1-струи, а также нормальные формы семейств с 1-струёй коранга 0. Кроме того, будут даны обобщения упомянутых утверждений на случай семейств, чётных либо нечётных по совокупности параметров.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с Н. Т. Абдрахмановой.

И. В. Асташова. Об асимптотической близости решений при различных типах возмущений нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка

Изучается асимптотическая близость на бесконечности решений уравнения

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x) + p(x) \left| y(x) \right|^k \operatorname{sgn} y(x) = f(x) \tag{1}$$

и невозмущенного уравнения

$$z^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x) + p(x) \left| z(x) \right|^k \operatorname{sgn} z(x) = 0, \tag{2}$$

где $n \geq 2,\ k > 1$, а $p,\ f,\ a_j$ – непрерывные функции.

В свою очередь уравнение (2) рассматривается как возмущение уравнения

$$u^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) u^{(j)}(x) = 0 \tag{3}$$

и устанавливается асимптотическая близость решений уравнений (2) и (3).

Полученные результаты позволяют, в частности, находить асимптотику решений возмущенных уравнений (1), (2), если известна асимптотика решений невозмущенных уравнений

(2), (3) соответственно. Приводятся иллюстрирующие примеры и рассматриваются важные частные случаи.

А. С. Баландин. О точной оценке показателя решений линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального типа

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) + bx(t) - cx(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

В работе Баландин А. С., Малыгина В. В. *Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа* (Математические труды. 2020. Т. 23. № 2. С. 3–49.) для уравнения (1) была построена область экспоненциальной устойчивости, границы которой задаются криволинейной поверхностью и тремя плоскостями, а также было изучено поведение решений уравнения (1) в том случае, когда точка (a, b, c) принадлежит границе области экспоненциальной устойчивости. Однако полученный критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (1) утверждает только существование показателя экспоненты и его знак, но не даёт оценки. В данной работе для уравнения (1) изучается точная оценка показателя степени экспоненты в зависимости от значений коэффициентов a, b, c.

М. К. Баринова. Аносовский тор как гиперболический аттрактор многомерного А-диффеоморфизма

В 1971 году Моррис Хирш предположил, что если Λ — компактное гиперболическое множество диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, которое является инвариантным гладким подмногообразием $\Lambda \subset M^n$, то ограничение $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ — диффеоморфизм Аносова. Мы обобщаем проблему Хирша для базисных множеств А-диффеоморфизмов, предполагая, что базисное множество Λ А-диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ принадлежит f-инвариантному замкнутому k-многообразию M^k_Λ, топологически (необязательно гладко) вложенному в M^n.

И. А. Богаевский. Перестройки фронтов и каустик при симплектической редукции

Если в симплектическом пространстве заданы гладкая гиперповерхность (уровень гамильтониана) и гладкое лагранжево подмногообразие (начальное условие), то возникает другое лагранжево подмногообразие, состоящее из всех характеристик уровня гамильтониана, проходящих через начальное условие. Эта конструкция очень часто используется в приложениях и называется симплектической редукцией.

Если начальное условие трансверсально уровню гамильтониана, то получившееся лагранжево многообразие может иметь только самопересечения, если нет — то более сложные особенности. Нормальные формы этих особенностей были найдены В. М. Закалюкиным и О. М. Мясниченко в 1998 г.

Обычно в приложениях условие трансверсальности выполняется и такие особенности не появляются. Однако, в некоторых ситуациях при изменении значения гамильтониана появление простейших из этих особенностей становится типичным, а само лагранжево многообразие при этом перестраивается вместе со своими каустикой и фронтом. Обо всех этих перестройках предполагается рассказать в докладе.

Е. И. Бравый. Условия разрешимости краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений

Представлен метод нахождения достаточных условий разрешимости краевых задач для различных видов линейных функционально-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. Эти достаточные условия оказываются также необходимыми условиями разрешимости данной краевой задачи для всех функционально-дифференциальных уравнений из заданного семейства уравнений. В этом смысле найденные достаточные условия являются неулучшаемыми: если они не выполнены, то в семействе найдется уравнение, для которого краевая задача не является однозначно разрешимой.

Найденные необходимые и достаточные условия, насколько нам известно, не могут быть получены с помощью принципа сжимающих отображений. Семейства функционально-дифференциальных уравнений, для которых находятся условия разрешимости краевых задач, могут быть заданы интегральными или поточечными ограничениями на функциональные операторы. Проверка необходимых и достаточных условий разрешимости краевой задачи для всех уравнений из выбранного семейства сводится к проверке положительности некоторой функции, заданной на конечномерном множестве.

Модификация предложенного метода позволяет находить необходимые и достаточные условия неотрицательности решений краевой задачи для всех уравнений семейства, а также неулучшаемые оценки решений.

В качестве примера рассмотрены периодическая краевая задача и задача Коши.

А. И. Буфетов. Гауссов мультипликативный хаос для синус-процесса

Синус-процесс возникает как скейлинговый предел радиальной части меры Хаара на унитарной группе.Реализации синус-процесса сопоставляется случайная целая функция, аналог Эйлерова произведения для синуса, скейлинговый предел отношения значений характеристического полинома случайной матрицы. Основной результат доклада устанавливает, что квадрат модуля нашей случайной целой функции сходится к гауссову мультипликативному хаосу. Из этого основного результата следует, что реализация синус-процесса с одной удаленной частицей является полным минимальным множеством для пространства Пэли–Винера, а если удалены две частицы, то получающееся множество есть множество нулей функции из класса Пэли–Винера. Квази-инвариантность синус-процесса под действием группы диффеоморфизмов с компактным носителем — аналог теоремы Де Финетти в нашей ситуации — играет главную роль.

Е. А. Барабанов, В. В. Быков. Распределение значений показателя Перрона по решениям линейной дифференциальной системы

Рассматривается линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с непрерывными (не обязательно ограниченными) коэффициентами. Каждому ненулевому вектору $\xi \in \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие показатель Перрона

$$\pi_A(\xi) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t,\xi)|$$

решения $x(\cdot, \xi)$ этой системы, выходящего в момент времени $t = 0$ из вектора ξ. Возникает естественный вопрос: что представляет собой класс функций $\xi \mapsto \pi_A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, когда A пробегает множество всех линейных систем? Оказывается, указанный класс для любого $n \geq 2$ состоит в точности из функций $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $f(c\xi) = f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2) для каждого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([-\infty, r])$ является G_δ-множеством.

А. Н. Ветохин. О бэровской классификации локальной энтропии динамических систем

Рассматривается параметрическое семейство динамических систем, определенных на локально компактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства. Для любого такого семейства локальная энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов. Полносвязные системы сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием

Рассматриваются специальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений – так называемые полносвязные сети нелинейных осцилляторов. Для данного класса систем предлагаются некоторые методы, позволяющие разобраться с вопросами о существовании и устойчивости периодических решений типа бегущих волн и двухкластерной синхронизации. В случае любого из режимов двухкластерной синхронизации множество осцилляторов распадается на два непересекающихся класса. В пределах этих классов наблюдается полная синхронизация колебаний, а каждые два осциллятора из разных классов колеблются асинхронно. Характерной особенностью применяемых нами методов является то, что как при отыскании указанных циклов, так и при анализе их свойств устойчивости используются вспомогательные системы с запаздыванием.

Е. Я. Гуревич. О классификации градиентно-подобных систем с многомерным фазовым пространством

Пусть $f^t(f)$ — гладкий поток (каскад) на замкнутом многообразии M^n, неблуждающее множество которого состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, размерность неустойчивого многообразия которых (индекс Морса) принимает значения $\{0, 1, n-1, n\}$, а инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются. Тогда многообразие M^n гомеоморфно многообразию $\mathcal{S}^n_g$, где $\mathcal{S}^n_g$ — либо сфера $\mathbb{S}^n$ при $g = 0$, либо связная сумма $g > 0$ копий многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Более того, верно и обратное утверждение: пусть $G(\mathcal{S}^n_g)$ класс гладких систем (потоков или каскадов) на $\mathcal{S}^n_g$, не имеющих гетероклинических траекторий, неблуждающее множество которых состоит из гиперболических состояний равновесия. Тогда множество седловых состояний равновесия (периодических точек) исчерпывается точками, индекс Морса которых равен 1 или $(n-1)$. Замыкания инвариантных многообразий седел размерности $(n-1)$ делят фазовое пространство на области с одинаковым асимптотическим поведением траекторий, взаимное расположение которых описывается при помощи комбинаторных инвариантнов. В докладе показывается, что при $n \geq 4$ такие комбинаторные инварианты оказывают полными и определяют классы топологической сопряженности рассматриваемых систем.

А. А. Давыдов. Мягкая потеря устойчивости в блочной модели океанических циркуляций с турбулентными потоками

Для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обеспечивающей качественное описание термохалинных циркуляций локально в верхнем слое воды в океане, анализируется потеря устойчивости стационарного состояния в этой системе для типичного конечно-параметрического семейства разрывных функций переноса. Показано, что задача эквивалентна возникновению нетривиальных неподвижных точек композиции инволюций для типичного семейства пар инволюций вещественной прямой с одной и той же неподвижной точкой. Также описаны соответствующие бифуркационные диаграммы в пространстве параметров.

Исследование выполнено совместно с С. О. Зосимовым при финансовой поддержке РНФ, проект № 19-11-00223.

М. В. Демина. Теория интегрируемости Дарбу для полиномиальных дифференциальных систем на плоскости

В 1878 году Жан Гастон Дарбу обнаружил тесную связь между существованием инвариантных алгебраических кривых и интегрируемостью двумерных полиномиальных дифференциальных систем. В последние годы идеи Дарбу активно развивались и дополнялись, что привело к созданию теории интегрируемости, которая носит название теории интегрируемости Дарбу. Цель доклада — представить некоторые современные аспекты этой теории. Основная трудность при поиске инвариантных алгебраических кривых состоит в том, что их степени заранее не известны. В докладе будет описан метод, который позволяет находить все неприводимые инвариантные алгебраические кривые для широких классов систем. В основе метода лежат свойства асимптотических рядов Пюизе, удовлетворяющих неавтономной редукции исходной системы. Также будут обсуждаться некоторые приложения и обобщения этого метода.

Исследования, представленные в настоящем докладе, выполнены при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-71-10003).

Е. В. Жужома. Базисные множества коразмерности один А-потоков

Динамические системы удовлетворяющие аксиоме А (коротко, А-системы) были введены С. Смейлом в 60-ых годах 20 века. Этот широкий класс систем включает в себя все структурно устойчивые системы (например, системы Морса–Смейла и системы Аносова) и Ω-устойчивые системы. В докладе рассматриваются А-потоки с базисными множествами коразмерности один на замкнутых n-мерных ($n \geq 3$) многообразиях.

Н. И. Жукова. Произведения хаотических групп гомеоморфизмов

Группа гомеоморфизмов G топологического пространства X называется хаотической, если выполняются следующие два условия 1) группа G топологически транзитивна и 2) объединение компактных орбит всюду плотно в X. В случае, когда X — метрическое пространство, определяется чувствительность группы G к начальным условиям. Доказывается, что для метрических пространств Бэра со счетной базой условия 1) и 2) влекут чувствительность группы G к начальным условиям. Следовательно, данное определение хаотичности группы гомеоморфизмов G можно рассматривать как аналог определения хаоса в смысле Дивани для каскадов.

Исследуется взаимосвязь свойств топологической транзитивности, плотности компактных орбит, хаотичности и чувствительности к начальным условиям групп гомеоморфизмов G_i, $i \in J$, топологических пространств X_i и произведений групп $G = \times_{i \in J} G_i$ на тихоновском произведении пространств $X = \times_{i \in J} X_i$. Построены многочисленные примеры хаотических действий групп G на конечномерных и бесконечномерных топологических многообразиях.

С. Х. Зинина. Глобальная динамика регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на многообразиях

Доклад посвящен исследованию динамики регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на замкнутых топологических n-многообразиях M^n, а также топологической классификации таких систем и существованию для них энергетических функций. Актуальность исследования обусловлена прежде всего спецификой изучения динамических систем на многообразиях высокой (большей трех) размерности. В силу возможного отсутствия гладкой структуры на топологических многообразиях, начиная с размерности четыре, динамические системы на таких многообразиях можно рассматривать только в непрерывной категории. Даже если многомерное многообразие допускает гладкую структуру, она может оказаться не единственной, известные подходы к изучению объектов, заданных на таких многообразиях, не используют их гладкость, а, наоборот, сводятся к аппроксимации гладких объектов топологическими. В связи с чем черезвычайно полезным является развитие теории топологических динамических систем на многообразиях.

Разработаны методы изучения динамики регулярных топологических динамических систем, а также подходы к решению проблемы их классификации и построению для них энергетических функций.

Ю. С. Ильяшенко. Теоретико-множественные патологии в проблеме устойчивости по Ляпунову

Задача об устойчивости особых точек по Ляпунову не только аналитически неразрешима, но и представляет патологии на теоретико-множественном уровне, как это было предсказано Арнольдом еще 50 лет назад. А именно, существует однопараметрическое семейство в пространтве 5-струй векторных полей в 5-мерном пространстве, которое пересекает множество устойчивых струй по счетному числу попарно непересекающихся интервалов. Это семейство будет описано в докладе.

А. А. Кащенко. Динамика модели связанных осцилляторов

Будет рассмотрена нелокальная динамика сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, моделирующей связанные осцилляторы. Будет найдена асимптотика решений этой системы, исследован вопрос существования периодических режимов.

С. А. Кащенко, А. О. Толбей. Динамика пространственно–распределенных цепочек логистических уравнений с запаздыванием

Рассматриваются цепочки связанных логистических уравнений с запаздыванием. Основное предположение, открывающее путь к применению специальных асимптотических методов, состоит в том, что количество элементов цепочки достаточно велико. Это дает основание от дискретной системы уравнений перейти к использованию непрерывного аргумента и в качестве исходной модели получить интегродифференциальную краевую задачу. При исследовании поведения всех ее решений в окрестности состояния равновесия возникают бесконечномерные критические случаи в задаче об устойчивости решений. Основные результаты состоят в построении специальных семейств квазинормальных форм — нелинейных краевых задач либо шредингеровского типа, либо типа Гинзбурга–Ландау. Их решения дают возможность определить главные члены асимптотического разложения как регулярных, так и нерегулярных решений исходной системы. Основное внимание уделено изучению цепочек со связями диффузионного типа, адвективного типа и полносвязных цепочек.

И. С. Кащенко. Влияние второго запаздывания на локальную динамику

В докладе будет рассмотрена локальная динамика дифференциального уравнения с двумя запаздываниями вида $\varepsilon\dot{x}(t) + x(t) = f(x(t), x(t-T_1), x(t-T_2))$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Будет показано, что даже при малых ненулевых значениях T_2 поведение решений может существенно отличаться от случая $T_2 = 0$.

А. А. Килин. Динамика двух вихревых колец в конденсате Бозе – Эйнштейна

В данной работе рассматривается динамика двух взаимодействующих вихревых колец в конденсате Бозе–Эйнштейна. Было доказано существование инвариантного многообразия, соответствующего вихревым кольцам. Получены уравнения движения на этом инвариантном многообразии для произвольного числа колец из произвольного числа вихрей. Подробно рассмотрен случай двух вихревых колец, состоящих из двух вихрей каждое. Для этого случая указаны частные решения, проведен полный бифуркационный анализ. Показано, что в зависимости от параметров конденсата Бозе–Эйштейна выделяются три разных типа бифуркационных диаграмм, для каждого типа приведены характерные фазовые портреты.

С. Константину-Ризос. Метод построения решений интегрируемых уравнений в частных разностях.

Предлагается систематический метод для построения автопреобразований Бэклунда и решений уравнений в квад-графах, которые не обязательно обладают свойством трехмерной совместимости. В качестве иллюстративного примера используется система типа Адлера–Ямилова, связанная с нелинейным уравнением Шредингера. В частности, мы строим автопреобразование Бэклунда для этой дискретной системы и ее принцип суперпозиции и используем их для построения одно- и двухсолитонных решений. Обсуждается также связь принципа суперпозиции преобразования Дарбу с отображениями Янга–Бакстера.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 20-71-10110).

Т. А. Корчемкина. О поведении решений уравнений третьего порядка со степенной нелинейностью общего вида

Рассматриваются дифференциальные уравнения третьего порядка с нелинейностями общего вида
$$y''' = p(x, y, y', y'')\, |y|^{k_0} |y'|^{k_1} |y''|^{k_2} \operatorname{sgn}(y\, y'\, y''), \tag{1}$$
где $k_0, k_1, k_2 > 0$, а знакопостоянная функция $p(x, u, v, w)$ ограничена, отделена от нуля, непрерывна по x и липшицева по u, v, w.

При $k_1 = k_2 = 0$ Асташовой И. В. были получены полная качественная и асимптотическая классификация решений. Асимптотическое поведение монотонных знакопостоянных решений уравнения (1) в случае $p(x, u, v, w) = p(x)$ изучалось Евтуховым В. М. и Клопотом А. М.

В докладе будут представлены результаты исследования влияния значений показателей нелинейности k_0, k_1 и k_2 на качественное и асимптотическое поведение решений уравнения со степенными нелинейностями общего вида как в случае положительного, так и в случае отрицательного потенциала $p(x, u, v, w)$.

Л. М. Лерман, К. Н. Трифонов. Симплектические частично-гиперболические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$: динамика и классификация

Изучаются автоморфизмы 6-мерного тора $\mathbb{T}^6$, порожденные целочисленными унимодулярными матрицами. Тор $\mathbb{T}^6$ снабжается симплектической структурой, заданной кососимметрической невырожденной целочисленной матрицей в $\mathbb{R}^6$ и предполагается, что матрица A, задающая автоморфизм f_A, является симплектической относительно симплектической структуры и частично-гиперболической. Последнее означает, что собственные значения матрицы A лежат как внутри и вне единичной окружности, так и на ней. Поэтому могут быть два основных случая: 1) вне единичного круга лежит одно собственное значение и четыре простых собственных значения лежат на единичной окружности и 2) вне единичного круга лежат два собственных значения, действительные или комплексно сопряженные, и пара комплексно сопряженных собственных значений лежат на единичной окружности. В первом случае на торе порождается слоение на одномерные неустойчивые слои (и другое слоение на одномерные устойчивые слои), а во втором случае соответствующие слои двумерны. Основной вопрос исследования – топологическая структура слоения на неустойчивые слои автоморфизма и классификация таких автоморфизмов относительно соотношения топологической эквивалентности. Автоморфизм может порождать либо транзитивное слоение на неустойчивые слои, либо замыкание каждого слоя является тором меньшей размерности (разложимый случай). Классификация дается для всех случаев.

Данное исследование выполнено при поддержке гранта РНФ 22-11-00027.

В. В. Малыгина. Об асимптотических свойствах матрицы Коши дифференциальных уравнений нейтрального типа

Исследуются вопросы устойчивости линейного автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. В основе исследования лежит известное представление решения в явном виде с помощью интегрального оператора, ядром которого является функция Коши исследуемого уравнения. Показано, что определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической и экспоненциальной устойчивости можно без потери общности формулировать в терминах соответствующих свойств функции Коши. Наряду с понятием асимптотической устойчивости вводится новое свойство, которое получило название сильной асимптотической устойчивости.

Основные результаты связаны с устойчивостью по начальной функции из пространств суммируемых функций. С использованием свойств линейных разностных уравнений установлено, что сильная асимптотическая устойчивость при начальных данных из пространства L_1 равносильна экспоненциальной оценке функции Коши и, более того, экспоненциальной устойчивости по начальным данным из пространств L_p для любого $p > 1$.

И. И. Матвеева. Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Рассматриваются классы нелинейных систем дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов, при этом функция, определяющая запаздывание, может быть постоянной, ограниченной или неограниченной. Введены новые функционалы Ляпунова–Красовского, с использованием которых исследована устойчивость для систем с переменными коэффициентами в линейных членах. Указаны условия робастной и экспоненциальной устойчивости, которые формулируются в виде дифференциальных неравенств для самосопряженных матричных функций. Получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, установлены оценки на множества притяжения стационарных решений. Аналогичные результаты установлены для неавтономных нелинейных систем с несколькими запаздываниями, в том числе при наличии сосредоточенного и распределенного запаздываний.

Г. С. Маулешова. О связи между коммутирующими дифференциальными и разностными операторами

В докладе будет рассматриваться одноточечные коммутирующие разностные операторы и их взаимосвязь с обыкновенными коммутирующими дифференциальными операторами.

Е. Н. Махрова. Минимальные множества и топологическая энтропия непрерывных отображений дендритов

Пусть X — дендрит (локально связный континуум, не содержащий дуг, гомеоморфных окружности), $f : X \to X$ — непрерывное отображение.

Непустое множество $M \subset X$ называется *минимальным относительно* f, если оно замкнуто, инвариантно и не содержит собственных подмножеств, удовлетворяющих указанным свойствам.

Минимальное множество M называется *вполне минимальным*, если для любого натурального числа $n \geq 1$ множество M является минимальным для f^n.

Если при некотором натуральном $n \geq 2$ множество M не является минимальным относительно f^n, то найдутся натуральное число k, являющееся делителем числа n, и попарно непересекающиеся компактные множества $M_0, M_1, \dots, M_{k-1} \subset M$ такие, что $M = M_0 \cup M_1 \cup \dots M_{k-1}$, $f(M_i) = M_{i+1(mod\,k)}$, и каждое M_i является минимальным относительно f^k [1]. Минимальное множество M будем называть *относительно вполне минимальным*, если оно не является вполне минимальным, но при некотором натуральном числе

$k \geq 2$ найдется подмножество $M_i \subset M$, которое является вполне минимальным относительно отображения f^k.

В докладе изучается связь между существованием минимальных множеств различного типа, не являющихся периодическими орбитами, и положительностью топологической энтропии.

[1] X. Ye. *D*-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii's theorem to minimal sets, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**(1992), 365-376.

В. Ю. Новокшенов. Дискретное уравнение Пенлеве второго типа и представление симметрической группы

Найдены классы асимптотических решений дискретного уравнения Пенлеве второго типа (dPII)

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{n x_n}{\nu(x_n^2 - 1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при больших значениях независимой переменной n. Изучена асимптотика переходного слоя при $n \approx 2\nu$, отвечающего фазовому переходу в калибровочных теориях поля и теории случайных матриц. Исследовано специальное решение dPII, связанные с представлениями симметрической группы и асимптотикой теплицева детерминанта.

Е В. Ноздринова. Устойчивая изотопическая связность диффеоморфизмов Палиса

В рамках данного доклада рассматривается класс градиентно-подобных диффеоморфизмов f на замкнутой ориентируемой поверхности в предположении, что все неблуждающие точки f неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Основной результат — построение устойчивой дуги, соединяющей два таких диффеоморфизма. Рассматриваемые диффеоморфизмы являются диффеоморфизмами Палиса, который выделяет их как класс поверхностных диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток. Согласно результату С. Ньюхауса, М. Пейшото и Дж. Флейтас, все потоки Морса–Смейла на заданном многообразии соединяются устойчивой дугой. Однако этот факт нельзя использовать непосредственно для построения дуги между диффеоморфизмами, так как диффеоморфизмы Палиса включаются только в топологический поток. Идея построения устойчивой дуги между диффеоморфизмами Палиса основана на построении дуги без бифуркаций, соединяющей диффеоморфизм Палиса с диффеоморфизмом, являющимся сдвигом на единицу времени градиентного потока функции Морса. Для визуализации построенной дуги рассмотрен класс полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном торе $\mathbb{T}^2$.

С. Н. Попова. О задачах назначения асимптотики решений линейных систем

Рассматриваются вопросы о назначении точной асимптотики решений линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

под действием линейного по фазовым переменным управления $u = U(t)x$, то есть замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

для которой функция $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ играет роль матричного управления. Получены достаточные условия на систему (1) и на свободную систему $\dot{x} = A(t)x$, которые гарантируют возможность построения матричного управления $U(\cdot)$, обеспечивающего асимптотическую эквивалентность замкнутой системы (2) и любой наперед заданной линейной системы $\dot{z} = C(t)z$, $z \in \mathbb{R}^n$. Для получения необходимых условий применена концепция оболочки Бебутова системы (1): строится замыкание (в топологии равномерной сходимости на отрезках) $\mathfrak{R}(A, B)$ множества сдвигов $\bigl\{\bigl(A_s(\cdot), B_s(\cdot)\bigr)\colon s \in \mathbb{R}\bigr\}$ коэффициентов системы (1), где $A_s(\cdot) \doteq A(\cdot + s)$, $B_s(\cdot) \doteq B(\cdot + s)$; каждая пара $\bigl(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\bigr)$ из множества $\mathfrak{R}(A, B)$ отождествляется с линейной управляемой системой $\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u$.

В. В. Рогачев. Аналог теоремы Штурма о чередовании нулей решений для нелинейных дифференциальных уравнений

В докладе рассматриваются теоремы о чередовании нулей для дифференциального уравнения произвольного порядка со степенной нелинейностью. Они расширяют полученные Штурмом и Кондратьевым результаты о чередовании нулей для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка — и с такой точки зрения оказывается, что нелинейный случай устроен проще, чем линейный.

Т. Л. Сабатулина. О точной оценке показателя решений линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + b\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{$*$}$$

где $h \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Для уравнения (*) известен критерий экспоненциальной устойчивости: уравнение (*) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $0 < bh^2 < \pi^2/2$. Однако до сих пор для этого уравнения не было найдено точного показателя степени экспоненты. В литературе есть только указания на то, что этот показатель определяется действительной частью корня характеристической функции, ближайшей к мнимой оси. Поскольку точный корень характеристической функции, ближайшей к мнимой оси, можно найти только в исключительных случаях, это указание неконструктивно.

В данной работе для уравнения (*) найдена точная оценка показателя степени экспоненты в зависимости от значения коэффициента b и запаздывания h.

И. Н. Сергеев. Исследование различных видов устойчивости по первому приближению

Исследованию ляпуновской асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть первого метода Ляпунова, посвящено огромное число работ. В докладе изучаются классы линейных приближений, обеспечивающих различные ляпуновские, а также недавно введённые перроновские или верхнепредельные свойства дифференциальных систем: устойчивость, асимптотическую устойчивость, а также глобальную, частичную (условную) и частную устойчивость. Как оказалось, общее число различных непустых классов (эквивалентности), обеспечивающих какие-либо из перечисленных в общей сложности пятнадцати разновидностей устойчивости, весьма незначительно.

Н. В. Станкевич, А. П. Кузнецов, Ю. В. Седова. Сложная динамика трех связанных генераторов квазипериодических колебаний

Квазипериодические колебания представляют собой самостоятельный класс, достаточно широко распространенный в различных областях науки. Наиболее известны и изучены квазипериодические колебания, возникающие при подаче внешнего воздействия или взаимодействии автоколебательных подсистем с периодическими режимами, например, осциллятор ван дер Поля. Введение в рассмотрение автономных осцилляторов квазипериодических колебаний позволило сформулировать достаточно широкий круг задач по исследованию взаимодействия, синхронизации и возникновения сложной динамики и ее особенностей в таких системах. Это позволило продвинуться в формировании представлений о синхронизации квазипериодических колебаний, что образует самостоятельную емкую проблему. В теории синхронизации хорошо известно, что увеличение числа взаимодействующих подсистем заметно обогащает динамику системы, приводит к возникновению новых сложных нелинейных эффектов. В рамках данной работы мы рассмотрим сложное поведение в ансамбле трех связанных в цепочку моделей генераторов квазипериодических колебаний. В этом случае отдельные генераторы могут быть настроены по-разному, демонстрируя как периодические, так и квазипериодические колебания. Мы представим результаты численного моделирования динамики ансамбля для всех случаев, изучим многочастотные квазипериодические колебания, хаотические колебания с различным спектром показателей Ляпунова.

Работа выпонена при поддержке гранта Российского научного фонда (№ 21-12-00121).

А. Х. Сташ. О спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка

Установлено существование двух линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры показателей колеблемости смен знаков, нулей и корней которых совпадают с любым наперед заданным не более чем счетным и суслинским множеством соответственно.

В. А. Тиморин. Динамика на поверхностях, склеенных из полос бумаги

На множестве поверхностей, склеенных из полос бумаги, можно определить многозначное соответствие, моделирующее динамику рациональных функций от одной комплексной переменной. Мы обсудим это соответствие. По мотивам (продолжающегося) совместного проекта с М. Хлющанка.

К. М. Чудинов. Об условиях осцилляции решений уравнений с последействием

Решения автономного уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t-r)$, где $a, r \geqslant 0$, осциллируют, если и только если $ar > 1/e$. Условия осцилляции решений неавтономных уравненений первого порядка с последействием впервые систематически изучал А.Д.Мышкис в середине XX века. Уточнением результов Мышкиса является теорема Р.Г.Коплатадзе и Т.А.Чантурия (1982 г.): все решения уравнения $\dot{x}(t) = -a(t)x(h(t))$, $t \geqslant 0$, где $a(t) \geqslant 0$, $h(t) \leqslant t$ и $h(t) \to \infty$ при

$t \to \infty$, осциллируют, если $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e$. За последние 40 лет опубликованы сотни работ, посвященных обобщениям этого результата, однако при расширении класса уравнений эти обобщения, как правило, теряют красоту и точность.

Доклад посвящен условиям осцилляции решений уравнения $\dot{x}(t) + \int\limits_0^t x(s)\,d_s r(t,s) = f(t)$, $t \geqslant 0$, с естественными условиями на параметры, обеспечивающими единственность решения. В частности, если функция $r(t,\cdot)$ не убывает и для всех $s \geqslant 0$ найдется такое $T(s) > s$, что $\int\limits_0^s d_\tau r(t,\tau) = 0$ для всех $t \geqslant T(s)$ (уравнение устойчивого типа), достаточным условием осцилляции всех решений является неравенство $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_t^{+\infty} \int\limits_0^t d_\tau r(s,\tau)\,ds > 1/e$. В приложении к уравнению с несколькими сосредоточенными запаздываниями это условие осцилляции учитывает все запаздывания в равной мере.

Т. Ыскак. Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Используя функционал Ляпунова–Красовского, установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получены оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности, и оценки на множество притяжения.

7 Комбинаторика, дискретная геометрия, случайные структуры

А. А. Валюженич. Минимальные носители собственных функций в графе Хэмминга

В данной работе рассматривается следующая экстремальная проблема для собственных функций графов:

Проблема 1. Для данного графа G и его фиксированного собственного значения λ найти минимальную мощность носителя произвольной λ-собственной функции графа G.

Проблема 1 тесно связана с проблемой пересечения комбинаторных объектов и проблемой поиска минимальной мощности комбинаторных трейдов и нуль дизайнов. Во многих случаях такие задачи могут быть рассмотрены как специальный случай Проблемы 1 для соответствующих графов с некоторыми дискретными ограничениями на функции.

В данном докладе мы обсудим последние результаты по Проблеме 1 и ее обобщениям для графа Хэмминга.

К. В. Воробьёв. О полностью регулярных кодах в графах Джонсона

Доклад посвящен вопросу существования полностью регулярных кодов в графах Джонсона $J(n, w)$. В частности, этот вопрос включает в себя гипотезу Дельсарта о несуществовании нетривиальных совершенных кодов в этих графах. Будут представлены новые результаты характеризации полностью регулярных кодов при $w = 3$ и $w = 4$, и кроме того, для $w > 4$ при некоторых спектральных ограничениях на матрицу пересечений кода.

Часть представленных результатов получена в совместных работах с И. Могильных, а также с А. Гаврилюком, С. Горяиновым и Р. Эвансом (см. https://arxiv.org/abs/2206.15341).

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

В. А. Воронов. Разбиения множеств на части меньшего диаметра в четырехмерном евклидовом пространстве

Для размерностей $4 \le n \le 63$ на данный момент неизвестно, верна ли гипотеза Борсука, утверждающая, что любое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n+1$ часть строго меньшего диаметра. В размерности 4 было доказано лишь то, что существует разбиение на 9 частей, удовлетворяющее условию. По-видимому, доказательство того, что существует разбиение на 8 частей, находится в пределах досягаемости, однако требует большого объема компьютерных расчетов. Кроме того, представляют интерес минимальных значений $d_{4,k}$, определяемых следующим образом: любое множество единичного диаметра $M \subset= \mathbb{R}^4$ заведомо может быть разбито на k частей диаметра не более $d_{4,k}$.

В докладе будет представлены оценки $d_{4,k}$, основанные на результатах В. В. Макеева об универсальных покрывающих множествах. Из некоторого симметричного 14-гранника, описанного около единичной сферы, получено семейство множеств, каждое из которых разбивается на заданное число частей минимального диаметра при помощи оптимизационного алгоритма.

А. И. Голованов. Множества с нечётными расстояниями и равноудалённые вправо последовательности в чебышёвской и манхеттенской метриках

Мы рассматриваем две связанные задачи экстремальной геометрии в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$ с максимальной метрикой. В первой задаче мы показываем, что максимальный размер *равноудалённой вправо* последовательности точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ есть $2^{n+1}-1$. Здесь последовательность называется *равноудалённой вправо*, если каждая точка равноудалена от всех последующих. Во второй задаче мы доказываем, что наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с попарно нечётными расстояниями есть 2^n. Также получены частичные результаты для обеих задач в $\mathbb{R}^n_1$.

Г. А. Кабатянский. Кодово-комбинаторный подход к задаче двоичных сжатых измерений или поиск со лжецом

Начнем с выпуклых многогранников, вершины которых берутся из булева куба $B^d = \{0,1\}^d \subset \mathbb{R}^d$, т.е. будем рассматривать выпуклые оболочки

$$< A >= \{\sum_{\mathbf{a}\in A} \lambda_a \mathbf{a} : \sum_{\mathbf{a}\in A} \lambda_a = 1,\ \lambda_a \geq 0\}$$

множеств $A \subset B^d$ мощности не более t. Множество $\mathcal{C}$ вершин d-мерного булева куба B^d будем называть t-независимым, если для любых двух его непересекающихся подмножеств $A, B \subset \mathcal{C}$ таких, что $|A|, |B| \leq t$, их выпуклые оболочки не пересекаются.

Вопрос. Чему равна максимально возможная мощность $m_t(d)$ t-независимого множества в B^d?

Ответ: $m_t(d) = 2^{c_t d}$, где $c_t = \Omega(t^{-1}\log t)$.

Эта задача является частным случаем задачи о поиске фальшивых монет на точных весах, когда веса фальшивых монет могут быть различны и априори неизвестны. А последняя задача может рассматриваться как задача о нахождения носителя неизвестного t-разреженного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ по результатам линейных измерений, что, в свою очередь, является подзадачей задачи сжатых измерений.

Мы предлагаем новый подход построения *двоичных* матриц измерений, основанный на разделяющих кодах и отличный от RIP-матриц, который позволяет решать перечисленные выше задачи.

Д. В. Карпов. K-планарные графы

Граф называется *k-планарным*, если его можно так изобразить на плоскости, что каждое ребро пересекает не более чем k других. Наверное, впервые появилось такое обобщение планарных графов в работе Рингеля в 1965 году — там были рассмотрены 1-планарные графы и доказано, что любой такой граф имеет правильную раскраску вершин в 7 цветов. Позже были определены k-планарные графы для всех натуральных k. В работах Рингеля, Паха, Тота, Оре, Бородина и других исследовались вопросы об оценке на количество ребер в таких графах, оценке хроматического числа, различные вопросы об их изображениях на плоскости. В докладе будет рассказано о классических и современных результатах из этой области.

В. С. Кожевников. Максимальные индуцированные подграфы в биномиальном случайном графе $G(n, p)$

При $p = const$ в случайном графе Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ наблюдается эффект двухточечной концентрации наибольшего размера индуцированного подграфа заданного класса для множества различных классов графов: независимых множеств, лесов, деревьев, циклов, графов ограниченной степени, графов с ограниченным числом рёбер и др. При $p \to 0$ для тех же классов графов имеет место асимптотика наибольшего размера. В нашей работе рассмотрены новые классы графов, а именно, леса и деревья ограниченной степени, для которых также оказывается верна двухточечная концентрация.

Д. А. Колупаев. Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях для случая почти совершенных паросочетаний

Задача состоит в нахождении наибольшего числа рёбер в k-однородном гиперграфе на n вершинах, не содержащем $s + 1$ попарно непересекающихся рёбер. Нас будет интересовать случай, когда n довольно близко к $(s + 1)k$. Конкретно, будет показано, что для n, удовлетворяющих неравенству $n < (s + 1)(k + \frac{0.01}{k})$, ответ равен $\binom{(s+1)k-1}{k}$.

Е. В. Константинова. ГрафыНоймайера и их конструкции

Исследование симметричных графов является одним из направлений алгебраической теории графов.В 80-х годах прошлого века при изучении дизайнов АрнольдНоймайер поставил вопрос о существовании рёберно-регулярного неполного графа, содержащего регулярные клики. Положительный ответ на этот вопрос был получен в 2018 году, когда первые две конструкции таких графов были найдены. ГрафыНоймайера, не являющиеся сильно регулярными графами, называют точными графамиНоймайера. Первая конструкция таких графов, предложенная в 2019 году, вызвала бурный всплеск интереса к этим графам. В данном докладе делается обзор по существующим конструкциям точных графовНоймайера с упором на новые результаты, полученные совместно с Р. Дж. Эвансом, С. В. Горяиновым и А. Д. Медных. В частности, в новой работе удалось обобщить полученные ранее конструкции, а также построить новые графы Ноймайера из бесконечной треугольной решётки и других геометрических объектов.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

Ф. А. Носков. Осьминоги в булевом кубе: семейства с малыми попарными пересечениями

Мы изучаем следующую проблему. Даны семейства $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_\ell$ подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$ и мы предполагаем, что для различных k, k' и произвольных $F_1 \in \mathcal{F}_k$, $F_2 \in \mathcal{F}_{k'}$ имеем $|F_1 \cap F_2| \leq m$, где m — некоторая константа. Чему равен максимум произведения мощностей этих семейств? Какова структура экстремального примера?

В этой работе мы находим асимптотику этого произведения и некоторый структурный результат при n стремящемся к бесконечности для константного количества семейств и константного m, а также получаем аналогичный результат и для чуть более общей задачи, где для каждой пары семейств своё максимальное разрешённое пересечение.

Решив эту задачу, мы даём ответ и на следующий вопрос. Пусть дан равномерный гиперграф, ребра которого раскрашены в ℓ цветов. Чему может быть равно произведение числа клик разного цвета?

Ф. В. Петров. Степени вершин двудольного графа и разброс когерентных независимых распределений.

Если A — случайное событие, то условные математические ожидания X, Y его индикатора относительно некоторых подалгебр называются когерентными. Пусть X, Y — когерентные и независимые случайные величины. К. Бурди и Дж. Питман выдвинули гипотезу о максимально возможном разбросе $f(\delta) := \mathrm{prob}\,(|X - Y| \geqslant \delta)$ таких случайных величин: $f(\delta) = 1$ при $\delta \leqslant 1/2$ и $f(\delta) = 2\delta(1 - \delta)$ при $\delta \in (1/2, 1]$. Комбинаторно эта задача по существу эквивалентна такой: каково наибольшее возможное количество пар вершин из разных долей двудольного графа, имеющего по n вершин в каждой доле, степени которых отличаются не менее чем на k. В недавней работе С. Цихомского и докладчика этот вопрос был решён развитием идей из работы Эрдёша, Чена, Руссо и Шелпа о разбросе степеней в произвольном графе.

А. А. Полянский. Оптимизация помогает Твербергу

Ставшая классической знаменитая теорема Тверберга (1966) утверждает, что для любого множества из $(r-1)(d+1)+1$ точки в $\mathbb{R}^d$ найдётся такое разбиение на r подмножеств, что выпуклые оболочки этих подмножеств пересекаются. Одно из доказательств было предложено Рудневым (2001) и основано на оптимизации некоторой функции.

Есть много вариацией теоремы Тверберга. В частности, можно заменять оператор выпуклой оболочки на другие. На докладе будет предложено несколько новых результатов типа Тверберга, которые могут быть доказаны, используя оптимизационный подход.

Доклад основан на двух совместных работах: одна в соавторстве с А. Василевским и О. Пирахмадом, вторая — с П. Барабанщиковой.

Д. С. Протасов, А. Д. Толмачев. Разбиения поверхности тора на части меньшего диаметра

Рассмотрим (X, ρ) — метрическое пространство, где X — некоторое множество, а ρ — метрика, определенная на $X \times X$. Для ограниченного произвольного множества $F \subset X$ и натурального числа $n \in \mathbb{N}$ определим следующую величину:

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \ldots, F_n \subset X : F \subseteq F_1 \cup \ldots \cup F_n,\ \forall i\ \mathrm{diam}(F_i) \leqslant x\}.$$

Другими словами, среди всех покрытий множества F некоторыми n множествами $F_1, \ldots, F_n$ мы хотим выбрать покрытия, состоящие из множеств как можно меньшего диаметра.

Будем рассматривать поверхность двумерного тора как фактор-пространство $T = \mathbb{R}_2/\mathbb{Z}_2$. Неформально говоря, рассмотрим тор как квадрат со стороной 1, пары противоположных сторон которого "склеены". Определим метрику ρ_T на поверхности тора так:

$$\rho_T\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(\min(|x_1 - x_2|, 1 - |x_1 - x_2|))^2 + (\min(|y_1 - y_2|, 1 - |y_1 - y_2|))^2},$$

что является кратчайшим расстоянием между точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ по поверхности тора (здесь и далее считаем, что $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [0, 1]$).

Далее для метрического пространства (T, ρ_T) будем рассматривать величины $d_n(T)$, т.к. поверхность тора есть ограниченное множество.

Оценка величины $d_n(T)$ при различных $n \in \mathbb{N}$ является естесственным обобщением и развитием задачи об оптимальных разбиениях плоских множеств, однако в случае тора используется метрическая функция ρ_T, а не стандартная Евклидова метрика, поэтому необходимо применять новые подходы для оценок величин $d_n(T)$.

Авторами получены новые верхние и нижние оценки $d_n(T)$ для различного количества частей разбиения. Кроме того, доказана точная оценка для разбиения поверхности тора на три части. Отдельно отметим, что в данной работе величина $d_n(T)$ исследуется впервые.

А. А. Тараненко. Совершенные раскраски гиперграфов и их спектры

Совершенной k-раскраской гиперграфа назовем такую раскраску его вершин в k цветов, что цвет вершины однозначно задает раскраску инцидентных ей гиперребер. Одним из наиболее простых примеров совершенных раскрасок является трансверсаль в однородном регулярном гиперграфе. Другой важный пример — это накрытия одного гиперграфа другим, сохраняющие отношения инцидентности между вершинами и гиперребрами. В то время как теория совершенных раскрасок графов уже достаточно обширна, аналогичные вопросы для гиперграфов практически не изучены. В этом докладе мы покажем, что многие хорошие алгебраические свойства совершенных раскрасок графов остаются верными и для гиперграфов.

Прежде всего будет получено многомерное матричное уравнение на совершенные раскраски гиперграфов и их параметры. Затем докажем, что собственные числа многомерной матрицы параметров совершенной раскраски обязаны быть собственными числами матрицы смежности гиперграфа. Кроме того, будет доказан аналог теоремы о существовании общего накрытия для гиперграфов. Наконец, в качестве примеров мы вычислим параметры совершенных 2-раскрасок 3-однородных гиперграфов, установим параметры кратных трансверсалей как совершенных раскрасок и найдем все совершенные 2-раскраски для 3-однородного гиперграфа, заданного плоскостью Фано.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00202.

Д. А. Шабанов. О сильном хроматическом числе случайного гиперграфа

Доклад посвящен задаче о сильном хроматическом числе случайного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, k, p)$. Напомним, что сильным хроматическим числом гиперграфа H, $\chi_{str}(H)$, называется такое наименьшее число q, что существует раскраска множества вершин гиперграфа в q цветов, в которой в каждом ребре все его вершины покрашены в разные цвета (сильная раскраска). Сильное хроматическое число для плотного случая, т.е., когда $pn^{k-1} \to +\infty$, было хорошо изучено в работе М. Кривелевича и Б. Судакова (1998). Мы же концентрируемся на так называемом разреженном случае, когда $p\binom{n}{k} = cn$ и $c > 0$ не зависит от n. Известно, что в такой ситуации сильное хроматическое число $H(n, k, p)$ ограничено. В докладе будут представлены новые оценки пороговой вероятности для свойства сильной q-раскрашиваемости случайного k-однородного гиперграфа и, как следствие, получение результатов о концентрации его значений в одном или двух соседних значениях. Доклад основан на совместной работе с Т. Г. Матвеевой и А. Э. Хузиевой.

8 Комплексный анализ

Н. Ф. Абузярова. О нулевых множествах медленно убывающих функций

Пусть P — некоторое весовое пространство целых функций, $\varphi \in P$. Качественно свойство медленного убывания φ в P можно описать таким образом: функции $\ln|\varphi|$ и $-\ln|\varphi|$ должны удовлетворять сравнимым оценкам сверху на некоторых подмножествах комплексной плоскости, зависящих от пространства P. Свойство медленного убывания функций в P возникло как одна из возможных характеризаций делителей этого пространства. Для приложений оказывается полезной информация о структуре нулевых множеств медленно убывающих функций. Мы рассматриваем этот вопрос в следующей постановке.

Известно, что модуль функции $\sin \pi z$ ограничен сверху и снизу на любом подмножестве фиксированной горизонтальной полосы, удаленном от $\mathbb{Z}$ на положительное расстояние. Поэтому $\sin \pi z$ является медленно убывающим элементом многих важных в приложениях весовых пространств целых функций. Нулевое множество функции $\sin \pi z$ — это множество $\mathbb{Z}$. В какой мере можно сдвигать целочисленные точки, чтобы возмущенная таким образом последовательность оставалась множеством нулей медленно убывающей функции в P?

Р. Р. Акопян. Аналог теоремы о двух константах и восстановление голоморфной в поликруге функции по приближенным значениям на части остова

Обсуждаются несколько взаимосвязанных экстремальных задач для голоморфных функций в поликруге $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Получено точное неравенство

$$|f(z)| \leqslant \mathcal{C} \|f\|^{\alpha_1}_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)} \|f\|^{\alpha_0}_{L^{p_0}_{\phi_0}(G_0)}, \qquad 0 < p_0, p_1 \leqslant \infty,$$

между значением голоморфной функции в $\mathbb{D}^m$ и нормами ее предельных значений на двух измеримых подмножествах G_1 и $G_0 = \mathbb{S}^m \setminus G_1$ остова $\mathbb{S}^m$, являющееся аналогом теоремы братьев Неванлинна о двух константах. Изучено, когда неравенство дает значение модуля непрерывности функционала голоморфного продолжения функции в заданную точку поликруга с части остова G_1. В этих случаях решены соответствующие задачи оптимального восстановления функции по приближенно заданным значениям на G_1 и наилучшего приближения функционала продолжения функции в поликруг с части остова G_1.

Ю. С. Белов. Пространства Пэли–Винера для двух интервалов, базисность, полнота биортогональных систем

Доклад посвящен изучению экспоненциальных систем в пространстве $L^2(E)$, где E — объединение двух интервалов. Мы докажем аналог теоремы Юнга для таких систем и получим (отдельно) необходимые и достаточные условия для того чтобы экспоненциальная система была базисом Рисса. В частности, наши результаты позволяют продемонстрировать эффект лишней точки в сравнении с одним интервалом длины $|E|$. Доклад основан на совместных работах с А. Барановым, А. Кузнецовым и М. Мироновым.

Р. В. Бессонов. Осцилляционные свойства решений нелинейного уравнения Шредингера

Изучаются осцилляционные свойства решений нелинейного уравнения Шредингера

$$\begin{cases} i\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2|q|^2 q, \\ q\big|_{t=0} = q_0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказано, что соболевская норма $\|q(\cdot,t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R})}$ решения уравнения с начальными данными $q_0 \in L^2(\mathbb{R})$ эквивалентна интегралу движения с константами, зависящими лишь от величины $\|q_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Применяются методы обратной задачи теории рассеяния для одномерного оператора Дирака, в частности, спектральный вариант теоремы Сегё. Результаты получены совместно с С. А. Денисовым (Висконсинский университет в Мэдисоне). Автор поддержан грантом РНФ 19–71–30002.

А. Б. Богатырёв. Компоненты пространства уравнений Пелля–Абеля с примитивным решением данной степени

Н. Х. Абель в 1826 году рассмотрел диофантово уравнение Пелля в кольце многочленов от одной переменной для решения одной задачи редукции абелевых интегралов. Сегодня оно широко используется в теории аппроксимации, алгебраической геометрии, эллиптических бильярдах и проч. Мы находим число связных компонент в пространстве уравнений Пелля–Абеля, допускающих примитивное решение заданной степени.

Совместная работа с Quentin Gendron (IM UNAM).

В. И. Буслаев. Необходимые и достаточные условия продолжимости функции до функции Неванлинны

Пусть $\{e_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ и $\{h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ — два множества точек, лежащих соответственно в $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ и $\overline{\mathbb{H}}$, и пусть точки множества $\{e_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ попарно различны. Известная теорема Крейна–Рехтман утверждает, что для существования функции Неванлинны $f(z)$ (т.е. функции, голоморфной в $\mathbb{H}$ и принимающей значения в $\overline{\mathbb{H}}$), удовлетворяющей условиям $f(e_p) = h_p$, $p \in \mathcal{P}$, необходимо и достаточно, чтобы все формы

$$\sum_{j,k=0}^{n} \frac{h_{p_j} - \overline{h}_{p_k}}{e_{p_j} - \overline{e}_{p_k}} \xi_j \overline{\xi}_k$$

были ненегативны. Если какая-либо из этих форм сингулярна, то функция $f(z)$ единственна и является действительной рациональной дробью.

Пусть $e_1, e_2, \dots$ — последовательность точек, лежащих в $\mathbb{H}$, и пусть $F(z)$ — функция, определенная с учетом кратностей в точках $e_1, e_2, \dots$, т.е. если ν_n — кратность точки e_n в множестве $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$, то с учетом ранее определенных значений производных порядка меньше $(\nu_n - 1)$ в точке e_n определено значение $F^{(\nu_n-1)}(e_n)$ производной функции $F(z)$ порядка $(\nu_n - 1)$. В докладе будут указаны необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование функции Неванлинны $f(z)$ такой, что $f^{(\nu_n-1)}(e_n) = F^{(\nu_n-1)}(e_n)$ при всех значениях $n = 1, 2, \dots$.

С. К. Водопьянов. Пространства Соболева и теория отображений

Пространство Соболева $L^1_p(D)$, $p \in [1,\infty)$, на области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, состоит из локально суммируемых на D функций, имеющих первые обобщенные производные, суммируемые в степени p. Полунорма функции $v \in L^1_p(D)$ равна норме в $L_p(D)$ ее обобщенного градиента ∇v. Если $\varphi\colon D \to D'$ — гомеоморфизм двух областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, возникает естественный вопрос: при каких условиях оператор композиции $\varphi^*\colon L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, где $u = \varphi^*(v) = v \circ \varphi$, будет ограниченным. Мы получим более общую задачу, если вместо пространства $L^1_p(D')$ будем рассматривать весовое пространство Соболева $L^1_p(D', \omega)$. Мы приведем решение задачи в обобщенной постановке, и покажем, что при некоторых показателях суммируемости q и p полученные классы отображений совпадают с отображениями, изучаемыми в более ранних работах.

В рамках обобщенной теории получены результаты, которые являются новыми даже для классической теории квазиконформных отображений. Например, норма оператора композиции $\varphi^*\colon L^1_n(D') \to L^1_n(D)$ равна $K^{1/n}$, где $K = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in D} \dfrac{|D\varphi(x)|^n}{|\det D\varphi(x)|}$ — коэффициент квазиконформности.

Будет показано также применение новой шкалы отображений к задачам нелинейной теории упругости.

Д. Н. Даутова. Метрики и квазиметрики, порожденные функцией пары точек

Мы изучаем функцию пары точек

$$p_G(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{|x-y|^2 + 4d_G(x)d_G(y)}},$$

где $d_G(x)$ — расстояние от точки области до границы этой области, в подобластях $\mathbb{R}^n$. Мы доказываем, что для любой подобласти $\mathbb{R}^n$ эта функция является квазиметрикой с константой меньшей или равной $\sqrt{5}/2$. Более того, для $n \geqslant 0$ эта функция является метрикой в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Мы также рассматриваем обобщения функции $p_G(x,y)$, зависящие от параметра $\alpha > 0$, и показываем, что в некоторых областях эти обобщения являются метриками тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant 12$.

Е. С. Дубцов. Меры Кларка и операторы композиции для нескольких переменных

Пусть B_n обозначает единичный шар из $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Для каждой непостоянной голоморфной функции $\varphi\colon B_n \to B_1$ и числа $\alpha \in \partial B_1$ канонически определяется мера Кларка $\sigma_\alpha[\varphi]$, заданная на единичной сфере ∂B_n. Многочисленные приложения таких мер хорошо известны в одномерном случае. В докладе обсуждаются свойства мер Кларка при $n \geqslant 2$. В качестве приложения для стандартного пространства Харди $H^2(B_n)$ вычисляется существенная норма оператора композиции $C_\varphi\colon H^2(B_1) \to H^2(B_n)$ в терминах семейства $\sigma_\alpha[\varphi]$, $\alpha \in \partial B_1$. Доклад основан на совместных работах с А. Б. Александровым.

А. В. Дьяченко. О совершенстве систем комплексных мер

Доклад будет посвящён доказательству совершенства некоторых систем классических мер методом, позволяющим параметрам мер быть комплексными.

С. И. Калмыков. Об открывающих отображениях и связанных с ними вопросах

В докладе будут рассматриваться прямые и обратные задачи, связанные с нахождением рациональных функций, обратные к которым осуществляют так называемые однолистные открывающие отображения дополнений заданных наборов Жордановых дуг до комплексной плоскости.

Доклад основан на совместных работах с В. Лысовым, B. Nagy и O. Séte.

М. А. Комаров. Об оценках типа Ньюмана для $L_p[-1,1]$-норм наипростейших дробей с полюсами на единичной окружности

Наипростейшими дробями (НД) принято называть логарифмические производные алгебраических полиномов. В докладе рассматриваются НД с полюсами z_k, лежащими на единичной окружности, то есть рациональные функции вида $g_n(z) = (z - z_1)^{-1} + \dots + (z - z_n)^{-1}$, $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$.

Как известно, величина $g_n(z)$ (с точностью до постоянного множителя и операции комплексного сопряжения) показывает напряженность электростатического поля, порождаемого n точечными единичными зарядами, помещенными в точках z_k. Ч. К. Чуи (1971) высказал предположение, что средняя напряженность такого поля в открытом единичном круге D, равная $\|g_n\| = \iint_D |g_n(z)|\,dxdy$, отделена от нуля некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от n (и тем самым, дроби g_n неплотны в пространстве $A(D)$ аналитических в круге D функций f, для которых $\|f\| < \infty$). В 1972 году Д. Ньюман доказал справедливость этой гипотезы, установив оценку $\|g_n\| > \pi/18$.

Для случая отрезка близкая задача была поставлена С. Р. Насыровым (2014): плотны ли дроби g_n в (комплексном) пространстве $L_2[-1,1]$. Отрицательное решение этой задачи получено автором в работе 2019 года, где доказана оценка $\|g_n\|_{L_2} = \int_{-1}^{1} |g_n(x)|^2\,dx > 1/64$. В докладе будет показано, что на самом деле нормы $\|g_n\|_{L_2}$ неограниченно возрастают с ростом n. Более того, будет предъявлен точный по n порядок роста норм $\|g_n\|_{L_p}$ с любым $p \geqslant 1$. Техника, развитая при доказательстве оценок, применяется и к недавней задаче П. А. Бородина о плотности НД g_n в весовых пространствах L_2 на отрезке с весом $(1 - x^2)^\alpha$.

М. Я. Мазалов. О емкостях, соизмеримых с гармоническими

Пусть L — однородный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, с постоянными комплексными коэффициентами. В терминах емкостей γ_L описываются устранимые особенности L^∞-ограниченных решений уравнений $Lf = 0$, причем емкости γ_Δ совпадают с классическими гармоническими емкостями теории потенциала.

Возникает естественный вопрос соизмеримости емкостей γ_L и γ_Δ (с положительным множителем, зависящем от L), в какой-то степени аналогичный соизмеримости аналитических емкостей γ и γ_+. Для класса регулярных компактов, включающего канторовы множества, на него дается положительный ответ при всех L и соответствующих N. В доказательстве используются некоторые идеи Х. Толсы.

А. Д. Медных. Методы комплексного анализа в теории узлов

В докладе обсуждаются различные методы вычисления объемов узлов и зацеплений, моделируемых в пространствах постоянной кривизны. В случаях, когда моделирование ведется в гиперболическом или сферическом пространствах, объем выражается в виде комплексного интеграла от явно выписанной аналитической функции. В евклидовом пространстве, для вычисления объемов в качестве единицы масштаба берется длина моделируемого узла. Вычисленный таким образом объем всегда является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

И. А. Медных. Спектральные инварианты циркулянтных графов

В последнее время возник заметный интерес к исследованию различных дискретных объектов, обладающих свойствами, схожими с римановыми поверхностями. В таком качестве можно рассматривать конечные связные графы. Для них построена теория, подобная классической теорией римановых поверхностей. В частности, был введен дискретный аналог многобразия Якоби или якобиана для графов. Это приводит к задаче нахождения структуры конечной абелевой группы, порожденной потоками на графе, с системой соотношений, соответствующих первому и второму закону Кирхгофа. В рамках доклада рассматривается вопрос о структуре группы якобиана графа для семейства циркулянтных графов и их естественных обобщений.

И. Х. Мусин. Теоремы типа Пэли–Винера–Шварца для ультрараспределений. Применения

Будут рассматриваться пространства ультрадифференцируемых функций в выпуклых областях и на неограниченных замкнутых выпуклых множествах с непустой внутренностью многомерного вещественного пространства. Для них будет дано описание сильного сопряженного в терминах преобразования Фурье–Лапласа функционалов. Будут приведены примеры их применения в теории операторов. Ряд результатов примыкает к исследованиям В. С. Владимирова и Роевера (J. W. De Roever), посвященным пространствам функций, голоморфных в трубчатых областях.

П. В. Парамонов. Критерии равномерной приближаемости рациональными функциями и старые задачи

В докладе планируется сформулировать и обсудить основные критерии равномерной приближаемости функций рациональными функциями комплексного переменного (А. Г. Витушкин, М. С. Мельников, П. В. Парамонов), связанные с ними результаты о метрическом описании аналитической емкости (К. Толса), а также напомнить и обсудить ряд интересных задач в этой тематике, оставшихся нерешенными.

Р. В. Романов. О нулях и полюсах дзета-функции Хелсона

Исследованы особенности аналитического продолжения дзета-функции Хелсона $\zeta_\chi(s) = \sum \chi(n)n^{-s}$, отвечающей вполне мультипликативной функции χ. Основной результат состоит в том, что на множества нулей и полюсов функции ζ_χ в критической полосе нет никаких нетривиальных ограничений. Дано два различных доказательства этого факта. Одно из предложенных доказательств конструктивно — указано явное построение искомого характера χ. Все ранее известные утверждения об особенностях ζ_χ доказывались вероятностными методами.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с И. Бочковым (Санкт-Петербург).

А. С. Садуллаев. Вещественно-аналитическое продолжение вдоль фиксированного направления

В докладе дается обзор результатов по аналитическим продолжениям функций многих переменных являющихся $\mathbb{R}$-аналитическими (вещественно-аналитическими) вдоль фиксированного направления. В нем будут рассмотрены наиболее весомые результаты, полученные в последние годы в этом направлении польскими и узбекскими математиками. По характеру, приведенные результаты имееют непосредственное отношение к известной теореме Хартогса об аналитичности сепаратно-аналитических функций в многомерном комплексном анализе. Однако методы исследования указанных задач существенно отличаются друг от друга, хотя основным методом исследования $\mathbb{R}$-аналитических функций в наших работах является богатые свойства аналитических функций многих переменных и теория плюрипотенциала, основанная на операторах Монжа–Ампера $(dd^c u)^n$.

Доклад основан на работах: 1) A. Sadullaev, Real analyticity of a C^∞- germ at a origin, Annales Polonici Mathematici, 2022, v. 128, 87–97; 2) A. Atamuratov, Dj. Tishabaev, T. Tuychiev, An analogue of the Hartogs lemma for $\mathbb{R}$-analytic functions, J. Sib. Fed. Univ.–Math. Phys., 2022, v. 15, no. 2, 196–200; 3) S. Imomkulov, Continuation of $\mathbb{R}$-analytic functions along parallel lines, JTWMS, to appear.

А. Г. Сергеев. Спинорная геометрия и уравнения Зайберга–Виттена

Уравнения Зайберга–Виттена, найденные в конце прошлого века, остаются одним из главных открытий в гладкой топологии и дифференциальной геометрии 4-мерных римановых многообразий. Также, как уравнения Янга–Миллса, они являются предельным случаем более общей суперсимметричной теории Янга–Миллса. В отличие от известных в геометрии SU(2)-уравнений Янга–Миллса, эти уравнения абелевы, однако они не инварианты относительно изменения масштаба.

Поэтому для того, чтобы извлечь «полезную информацию» из этих уравнений, приходится вводить в них масштабный параметр λ и затем переходить к пределу $\lambda \to \infty$. Этот предел называется адиабатическим и его исследованию на компактных комплексных кэлеровых поверхностях и 4-мерных симплектических многообразиях посвящен наш доклад.

Б. Н. Хабибуллин. Теоремы типа Лиувилля с ограничениями вне исключительных множеств

По классической теореме Лиувилля всякая целая или субгармоническая функция, ограниченная сверху на всей комплексной плоскости, постоянна. Такой же вывод возможен и в предположении ограниченности сверху таких функций вне некоторого достаточно малого исключительного множества при дополнительном ограничении на скорость роста функции. При этом взаимосвязь между малостью исключительного множества и скоростью роста функции должна быть взаимно обратной. Количественные аспекты последнего и будут обсуждаться, включая и многомерные случаи на пространстве или шаре.

А. К. Цих. Нестандартные интерполяции в $\mathbb{C}^n$

В алгебраической интерполяционной теории узлы интерполяций $\{z^{(j)}\}$ трактуются в виде множества решений систем $P(z) = 0$ алгебраических уравнений. В стандартной постановке задача состоит в построении аналитической функции $f(z)$ по данным действиям

$$a_{jl} = \mathcal{L}_{jl}[f]|_{z^{(j)}}$$

нётеровских операторов $\mathcal{L}_{jl}$ идеала, порожденного системой полиномов P. В случае $n = 1$ получается задача Эрмита о восстановлении полинома f по значениям подходящих производных f в интерполяционных узлах.

Недавно D. Alpay и A. Yger предложили «нестандартную» постановку алгебраической интерполяционной задачи. Она состоит в двойственном подходе построения f по заданным значениям $\{c_{jl}, c\}$ со свойством

$$\sum_{j,l} c_{jl}\mathcal{L}_{jl}[f]|_{z^{(j)}} = c.$$

Основной результат состоит в построении f на основе двойственности Гротендика для локальных вычетов, ассоциированных с регулярной последовательностью полиномов. С этой целью обобщается известная теорема О. Гельфонда и А. Хованского о вычислении сумм локальных вычетов через интегралы по торам. Для этого используются кобордизмы, связанные с аналитическими полиэдрами Вейля.

9 Математическая логика и теоретическая информатика

Н. А. Баженов. On spectrally universal classes of structures

For a countable algebraic structure S, the degree spectrum of S is the set of Turing degrees of all isomorphic copies of S. A class of structures K is *spectrally universal* if for every countable structure S, there exists a structure M from K such that the degree spectra of M and S are the same. The talk discusses recent results on spectral universality for some familiar algebraic classes: modal algebras, contact Boolean algebras, Heyting algebras with distinguished atoms and coatoms.

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2022-281 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

И. И. Батыршин. Счетная строгая обратная математика

Строгая обратная математика — это предложенная Х. Фридманом программа исследований, целью которой является изучение логической силы математических теорем с помощью строго математических аксиом и без использования кодирования. В качестве базовой теории для счетной строгой обратной математики Фридманом была предложена элементарная теория функций ETF. В докладе предполагается обсудить подсистемы ETF и их эквивалентные аксиоматизации. Краткая аннотация доклада.

Б. Ф. Л. Баувенс. Fast dynamic matching in bipartite lossless expanders

We consider bipartite graphs, and refer to the 2 parts as left and right nodes. Hall's theorem states that if every set S of left nodes has at least $\#S$ neighbors, then the graph has a matching that saturates all the left nodes. We say that a graph has e-expansion up to K elements, then if every left set S of size at most K has at least $e\#S$ neighbors. Thus Hall's theorem implies that if a graph has 1-expansion up to K, then every left set of size K has a saturating matching. We consider a dynamic variant of this problem and present a strategy that can be solved in time O(D polylog N) in graphs with N left nodes and left degree at most D. However, the algorithm only works in graphs with (2D/3)-expansion. Such graphs can be computed using with known constructions.

Application 1: 1-bit probes. Such probes are datastructures to store a set S and in which a membership query is answered probabilistically by reading only a single bit from the memory. Our construction reduces the size of the smallest such probes. Moreover, our probes are dynamic: one can add and remove elements in S.

Application 2: connector graphs. Such graphs model the connection problem on old telephone networks in which input and output nodes need to be connected using node disjoint paths. Our algorithm gives an almost double exponential speed up of the path finding algorithm in constant depth connectors, and this solves an open question by Feldman, Friedman and Pippenger from 1988.

М. В. Волков. Synchronizing quantum automata

In the literature, there exists many definitions of quantum automata (QA). Their common feature is that the role of a state set is played by a finite-dimensional Hilbert space H while the role of a finite input alphabet is played by a bunch Σ of linear transformations of H. QA are mostly studied from the viewpoint of language recognition.

In the talk, I treat QA as protocols rather than recognizers and suggest the notion of synchronizing QA. The model of QA I consider is similar to the well-known measure-once model by Moore and Crutchfield with the only difference that the measurement is partial and the computation continues after the measurement. Such an automaton is said to be synchronizing if there is a word w over Σ such that the result of the consecutive application of transformations forming w does not depend on the outcome of the measurement step.

I will present a few examples and discuss open questions.

С. С. Гончаров. Логический подход к проблемам управления и ИИ в рамках семантического моделирования

В докладе будут изложены идеи и результаты предложенного Ю. Л. Ершовым, С. С. Гончаровым и Д. И. Свириденко логического подхода в рамках семантического моделирования для построения математических методов доверительного ИИ и построения управления сложными объектами на основе теоретико-модельных конструкций построения наследственно конечных списочных расширений абстрактных моделей и логического языка для определения вычислимости над абстрактными моделями. Исходные идеи для данного подхода базируются как на теории вычислимости и теории моделей, так и на развитии идей теории допустимых множеств. Исследования посвящены алгоритмическим свойствам языка и его семантики, включая проблемы полиномиальности строящихся алгоритмов как над языковыми конструкциями, так и над моделями, а также теоретико-модельным свойствам и связям различных конструкций. Важным элементом данных исследований являются и методы реализации в практических реализациях и возникающих при этом новых проблемах и задачах.

С. М. Дудаков. On properties of subsets algebras

Any operation over any domain can be generalized on arbitrary subsets of the domain. So for any universe we can consider algebras of subsets with the same operations. It can be algebra of all subsets or some subsets, for example, finite subsets. We investigate subsets algebras for various original universes. We have established results on elementary equivalence, algorithmic decidability, definability, and other properties.

We pay special attention to semigroups. The free semigroup is the algebra of all words with concatenation. So the subsets algebras is the corresponding algebras of languages. Another examples are subsets of natural numbers or unity-coefficient polynomials over any idempotent semiring with unity.

Another universes we consider are unars with an injective function. Then the subsets algebras are of the same kind. We have established structure of its theory.

А. А. Запрягаев. Interpretations of Buchi arithmetics in themselves

Buchi arithmetics BA_n, $n \geqslant 2$, are extensions of Presburger arithmetic with an unary functional symbol $V_n(x)$ denoting the largest power of n that divides x. These theories were introduced by J. Buchi in order to describe the recognizability of sets of natural numbers by finite automata through definability in some arithmetical language. As shown by V. Bruyere, the definability of a set of natural numbers in BA_n is equivalent to its recognizability by a finite automaton receiving

m-tuples of natural numbers in the form of m-tuples of their last, then penultimate, etc. digits of their n-ary expansion.

A. Visser has asked the following question: given an weak arithmetical theory T without ability to encode syntax but with full induction, does it hold that each interpretation (one-dimensional or multi-dimensional) of T into itself is isomorphic to the trivial one, and, if it is, is the isomorphism always expressible by a formula of T? This question was previously answered positively for Presburger arithmetic PrA in the author's joint work with F. Pakhomov.

We show that each interpretation of BA_n itself in its own standard model N and show that each such interpretation is isomorphic to the trivial one. Furthermore, we obtain this result already for the interpretations of Presburger Arithmetic in BA_n. The proof is based on the contradiction between a condition on automatic torsion-free abelian groups given by Braun and Strungmann and the description of the order types of non-standard models of Buchi arithmetics. This gives a partial positive answer to the question of Visser.

М. В. Зубков. Well-orders realized by CE equivalence relations

A structure A is realized by an equivalence relation E if there exists a structure B such that B/E is isomorphic to A. We will describe sets of ordinals that can be realized by one fixed computably enumerable equivalence relation, provided that this equivalence relation can realize an ordinal less than ω^ω.

(Joint work with N. A. Bazhenov.)

В. Г. Кановей. О существенности параметров в схеме аксиом свертки в арифметике второго порядка

Построена модель арифметики второго порядка, в которой аксиома свертки верна в беспараметрическом варианте но не верна в полном варианте с параметрами.

К. А. Ковалев. Analogues of Shepherdson's Theorem for the arithmetical language with exponentiation

We investigate the following expansions of IOpen (Robinson arithmetic Q with quantifier-free induction):

- IOpen(exp): Q with axioms $\exp(0) = 1$ and $\exp(Sx) = exp(x) + exp(x)$ and quantifier-free induction in the expanded language;
- IOpen(x^y): Q with axioms $x^0 = 1$ and $x^(Sy) = (x^y) \cdot x$ and quantifier-free induction in the expanded language.

In 1964 Shepherdson proved the following theorem characterizing models of IOpen: For every discretely ordered ring M, the nonnegative part M^+ is a model of IOpen iff M is an integer part of the real closure $R(M)$ of the fraction field of M (i.e. for every $r \in R(M)$ exists $m \in M$ such that $m \leqslant r < m + 1$).

Our purpose is to generalize this theorem to the expanded theories IOpen(exp) and IOpen(x^y). We obtain some partial results for these theories and a full analogue of the Shepherdson's theorem for the theory IOpen + T_{x^y}, where the latter is some finite set of the natural properties of exponentiation.

М. В. Коровина. Automated reasoning with continuous data

In this talk we report on ongoing research on solving non-linear constraints over the reals occurring in a wide range of applications, starting with program verification, ranging over verification of real-world designs all the way to automation of formally verified proofs of mathematical statements.

In our framework methods from Computable Analysis and Automated Reasoning are combined to meet efficiency and expressiveness. This approach is applicable to a large number of constraints involving computable non-linear functions, piecewise polynomial splines, transcendental functions and solutions of polynomial differential equations.

We give an introduction to the ksmt calculus for checking satisfiability of non-linear constraints in a CDCL style way inspired by advances in SAT solving. Along proof search ksmt resolves two types of conflicts: linear and non-linear. Linear conflicts are delegated to a decision procedure for linear real arithmetic and non-linear conflicts are resolved by local linearisations separating the solution set and the current conflict. We show that the ksmt calculus is a δ-complete decision procedure for bounded problems.

И. А. Михайлин. Полиномиальные формулировки как барьер для доказательств сложности

Теория сложности пытается ответить на вопросы о минимальном количестве ресурсов необходимых на решение алгоритмической задачи. В классическом варианте ответ на такой вопрос представляется в виде отнесение задачи к какому-то сложностному классу, например к классу P — задачам решаемым за полиномиальное время. При этом решается задача за n^2 или за n^{100} уже неважно. В последние годы активно развивается другой подход известный как теория высокоточных оценок, где сложность решение задач пытаются измерить наоборот максимально точно. Поскольку у нас пока нет примеров безусловных оценок на сложность задач, эта теория оперерует нижними оценками в предположении различных гипотез. В этом докладе мы поговорим о том как такие оценки доказываются в предположении Strong exponential time hypothesis и почему для каких-то задач такие нижние оценки будут иметь невероятно сильные последствия для других областей теории сложности. Доклад будет состоять из обзорной части и краткого разговора о нашей последней статье “Polynomial formulations as a barrier for reduction-based hardness proofs”.

А. А. Оноприенко. On topological models of intuitionistic epistemic logic

The intuitionistic logic H4 with the modality of knowledge is in some way dual to the classical modal logic S4. I will talk about two types of topological models of the logic H4: models with a dense distinguished subset, as well as bitopological models.

В. Н. Ореховский. О логических и топологических классификациях регулярных омега-языков

В работе рассматриваются два подхода к классификации ω-языков: логический и топологический. При первом подходе ω-слова рассматриваются как структуры сигнатуры $\sigma = \{\leqslant, Q_a, ...\}$ или $\tau = \sigma \cup \{p, s\}$. Получим иерархии Σ_n^σ и Σ_n^τ, индуцируемые иерархиями предложений сигнатур σ и τ по числу перемен кванторов в предваренной нормальной форме. При втором подходе на множестве A^ω вводится канторовская топология и рассматривается борелевская иерархия $\mathbf{\Sigma}^0_n$. Также рассматриваются тонкие иерархии (Selivanov 1998) $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathbf{\Sigma}_\alpha$. Последняя на множестве регулярных ω-языков совпадает с иерархией Вагнера (Wagner 1979). Известно, что $\bigcup_{\alpha<\omega^\omega} \mathcal{S}_\alpha = BC(\Sigma^\sigma_2)$ и $\bigcup_{\alpha<\omega^\omega} \mathbf{\Sigma}_\alpha = BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

Основным результатом данной работы является полное описание соответствия между логическими и топологическими классификациями.

Т. Г. Пшеницын. Commutative Lambek grammars are not context-free

In 1993, Mati Pentus proved that Lambek grammars are equivalent to context-free grammars in the sense that they generate the same set of languages (disregarding the empty word). We prove that a similar result does not hold for grammars over the Lambek calculus with permutation (LP), which can also be called commutative Lambek grammars. More precisely, we show that there is a language that can be generated by a commutative Lambek grammar such that it is not a permutation closure of a context-free language. To prove this, we present a formalism equivalent to commutative Lambek grammars, which we call linearly-restricted branching vector addition systems with states; it is simpler to establish the desired result for them.

В. В. Рыбаков. Temporal multi-agent logics, problems satisfiability, decidability and admissibility

In our research we investigate temporal multi-agent logics with various possible non-transitive temporal accessibility relations. Main idea of this choice consists in attempts more precisely model and describe behavior, reasoning and computation agents (distinct acting computational threads) when they cooperate and acts mutually. In particular, we consider non-transitive logics, where elements of interval logics are applied. In this case the time accessibility relations are non-transitive and chopped into intervals of bounded time. In definition of models, we consider logics with only one objective valuation of propositional states and logics with multi-valuations — the case when the agents have separated own valuations' relations for propositions.

Looking at the case when the time accessibility relations may be affected by events and alter during computation we study logics which have dynamic accessibility relations — the case when any state (world) generates (and hence have) its own accessibility relation. Mathematical problems we are dealing with are problems of satisfiability, decidability and admissibility. Found computational algorithms to be reported.

Supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Grant No. 075-02-2020-1534/1) and by Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University) Moscow.

М. Н. Рыбаков. Undecidability of modal and superintuitionistic logics of a single unary predicate in languages with two variables

We consider the issues concerning algorithmic complexity of non-classical predicate logics in restricted languages. In 1962, S. Kripke suggested how to simulate a binary predicate letter of a classical first-order formula with a modal first-order formula containing two unary letters. Building on Kripke's idea, we simulate a binary precidate letter with a single unary letter in modal formulas and with two unary letters in superintuitionistic formulas. This immediately gives us the undecidability of numerous modal logics in languages with one unary letter, and superintuitionistic logics with two unary letters, and three variables, since the classical logic of a binary predicate is undecidable with three variables. In addition, we show how to simulate any number of unary letters with a single unary letter (both in modal and intuitionistic languages). Due to the well-known results on the undecidability of many non-classical logics in languages with two variables (D. Gabbay, V. Shehtman (1993), R. Konchakov, A. Kurucz, M. Zakharyaschev (2005)), we obtain the undecidability of many modal and superintuitionistic predicate logics in languages with a single unary predicate letter and two variables. The proposed encoding enables us to obtain the non-enumerability and even non-arithmeticity of the corresponding fragments of a number of logics of Kripke frames. Our results extend to polymodal logics, such as predicate counterparts of CTL*, CTL, LTL, epistemic logics, logics with universal modality, etc.

В. Л. Селиванов. Boole vs Wadge: comparing basic tools of descriptive set theory

We systematically compare omega-Boolean classes (obtained from open sets (or other classes) by applying omega-Boolean operations), the reducibility by continuous functions (known as Wadge reducibility), and the recent extension of Wadge hierarchy to non-zero-dimensional spaces. E.g., we complement the result of W. Wadge that the collection of non-self-dual levels of his hierarchy coincides with the collection of classes generated by Borel omega-ary Boolean operations from the open sets in the Baire space. Namely, we characterize the operations, which generate any given level in this way, in terms of the Wadge hierarchy in the Scott domain. As a corollary we deduce the non-collapse of the latter hierarchy. Also, the effective version of this topic is discussed.

А. А. Семенов, С. Е. Кочемазов. Using Backdoors to estimate the hardness of Boolean formulas w.r.t. SAT solving algorithms

The Boolean satisfiability problem (SAT) is a classical combinatorial problem which is NP-complete in the decision variant and NP-hard in the search variant. Nevertheless, during the recent 20 years there have been developed a lot of applied algorithms that successfully tackle SAT for formulas of large dimension (tens of thousands of variables and hundreds of thousands of clauses). These algorithms called SAT solvers are routinely used in such areas as symbolic verification, program testing, cryptanalysis, bioinformatics, combinatorics, etc. Despite the impressive effectiveness of modern SAT solvers, it is often important to know in advance their approximate runtime on particular formulas. It is a typical situation that a SAT solver has been working for an hour or a day or a month, and it is not known whether it will finish anytime soon. The question then is whether it is possible to construct some meaningful upper bounds on the runtime of a particular SAT solver on a particular SAT instance? In the report we will present several results in this direction. The presented approach is based on the idea to evaluate the hardness of a formula via some decomposition or, in a more general case, via a so-called SAT partitioning of a formula. In order to construct such a partitioning we choose a set called Backdoor and decompose an original formula into sub-formulas by substituting all possible combinations of values of backdoor variables to a formula. Then, under certain assumptions we can use the Monte Carlo method to estimate the runtime of a solver on the original formula via its runtimes on formulas from a constructed decomposition. On the level of ideas, the proposed estimations are quite close to the hardness estimations that are constructed based on the knowledge of the so-called Strong Backdoor Sets. In the report we will show the interconnection between Strong Backdoors and the proposed notions, and present the results of computational experiments which demonstrate the practical applicability using backdoors to estimate the hardness of Boolean formulas. We will also briefly describe the basic algorithms and techniques used in state-of-the-art SAT solvers.

А. Л. Семёнов, С. Ф. Сопрунов. Recent results on definability lattices of numerical structures

Definability is one of the central concepts of mathematical logic and is one of the important concepts of all mathematics. At the same time, it is still relatively little studied.

The report will discuss the latest results related to definability lattices (reduct lattices) for numerical structures, such as, for example, the addition of rational numbers.

It is remarkable that a number of these results were obtained by high-school students at the May 2022 Program in "Sirius".

М. Х. Файзрахманов. Generalized computable numberings and fixed points

The talk considers generalized computable numberings from the point of view of uniform enumerability of numbered families relative to arbitrary oracles. The results presented are aimed at classifying oracles such that all (principal) families computable in them have generalized computable numberings that satisfy the Kleene fixed point theorem with different degrees of uniformity: complete and precomplete numberings, weakly precomplete numberings, and also numberings that satisfy the Recursion theorem and the Recursion theorem with parameters.

С. Хетцль. Logical analysis of automated inductive theorem proving

Automating the search for proofs by induction is an imporant topic in computer science with a history that stretches back decades. A variety of different approaches and systems has been developed. Typically, these systems have been evaluated empirically and thus very little is known about their theoretical limitations.

In this talk I will show how to use mathematical logic to understand the theoretical power and limits of methods for automated inductive theorem proving. A central tool are translations of proof systems that are intended for automated proof search into (very) weak arithmetical theories. Thus unprovability results can be transferred from theories to methods of automated deduction.

I will describe concrete such analyses of two methods of automated inductive theorem proving including practically relevant unprovability results: 1. adding explicit induction axioms to a saturation theorem prover and 2. clause set cycles.

(Joint work with Jannik Vierling.)

М. В. Швидефски. Dualities for categories of partially ordered structures

We present recent categorical duality results for certain categories of partially ordered sets (lattices) and certain categories of topological spaces endowed with some additional structure. Some of these results extend classical duality results by M.H. Stone. (Supported by the Mathematical Center in Akademgorodok, agreement with Ministry of Science and Higher Education of Russia № 075-15-2022-282.)

В. Б. Шехтман. How to axiomatize boxing of a modal predicate logic?

Boxing of a modal predicate logic L is defined as the minimal logic containing all formulas $\Box A$, where A is a theorem of L. For axiomatization of boxing it is usually insufficient just to add $\Box$ to axioms of L. The general problem of axiomatization of boxing was put in our talk "Boxing modal logics" at Logical Perspectives 2021. This problem is solved in the paper "On Kripke completeness of modal predicate logics around quantifed K5" (forthcoming in APAL).

The recipe is the following: take all possible shifts of the axioms, then take their universal closures with $\Box$ added. An n-shift of a predicate formula A is obtained by increasing arities of all predicate letters by n and adding fixed n new parameters to all atoms occurring in A. In general this yields infinitely many axioms, but in many cases (described in the same talk and paper) 1-shifts are sufficient, so boxing preserves finite axiomatizability.

Our conjecture is that boxing of the finitely axiomatizable logic QKAlt_1 (where Alt_1 is the axiom of unique successor) is not finitely axiomatizable. The proof of this conjecture probably requires a nontrivial model-theoretic technique. In the talk we describe the first step on the way to the proof: 1-shifts are insufficient in this case.

10 Математическая физика и спектральная теория

Г. А. Агафонкин. Восстановление оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом на полупрямой по наперёд заданному существенному спектру

В. Е. Бобков. Об эллиптических уравнениях с субоднородной нелинейностью неопределённого знака

Мы обсудим вопросы существования и множественности, а также некоторые качественные свойства неотрицательных решений нулевой задачи Дирихле для квазилинейного параметрического уравнения $-\Delta_p u - \lambda|u|^{p-2}u = a(x)|u|^{q-2}u$ в ограниченной области, где $1 < q < p$ и функция a знакопеременна. Отличительной особенностью данной задачи является тот факт, что неотрицательные решения не обязаны удовлетворять строгому принципу максимума. Как следствие, множество решений имеет, вообще говоря, богатую структуру. Мы покажем, что для некоторых $p \neq 2$ наблюдаются нетривиальные эффекты, которые невозможны в линейном случае.

Н. П. Бондаренко. Обратные задачи для дифференциальных операторов высших порядков с коэффициентами-распределениями

Доклад посвящен обратным задачам спектрального анализа для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с коэффициентами-распределениями (обобщенными функциями). Будут даны постановки обратных задач, рассмотрены вопросы единственности и конструктивного решения.

М. Ш. Бурлуцкая. Расходящиеся ряды в смешанных задачах для волнового уравнения

Рассматриваются начально-краевые задачи для волнового уравнения на отрезке и на геометрическом графе. Применяются новые подходы, позволяющие получать необходимые и достаточные условия существования классических и обобщенных решений в случаях суммируемых потенциалов и начальных функций, тем самым расширяя границы применения метода Фурье. Рассматриваемая модификация метода Фурье приводит к представлению решения в виде быстросходящегося ряда. Дальнейшее развитие этих подходов опирается на привлечение расходящихся рядов.

С. А. Бутерин. Функционально-дифференциальные операторы с сингулярными коэффициентами

В последние два десятилетия активно развивается спектральная теория для сингулярных дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями из негативных соболевских пространств, тогда как функционально-дифференциальные операторы с отклоняющимся аргументом и такими коэффициентами, насколько нам известно, пока не рассматривались. В докладе вводятся квазипроизводные для операторов второго порядка с постоянным запаздыванием и так называемым замороженным аргументом, позволяющие определить такие операторы в случае коэффициентов-распределений. При этом установлена связь с классическим векторным уравнением Штурма–Лиувилля с сингулярным матричным потенциалом.

Также получено решение обратной задачи типа Штурма–Лиувилля с постоянным запаздыванием и сингулярным потенциалом, включающее единственность, характеризацию спектральных данных и равномерную устойчивость. Последняя демонстрирует одно принципиальное отличие от классической обратной задачи.

Н. Ф. Валеев, Я. Т. Султанаев. Оптимизационная обратная спектральная задача для матричного оператора Штурма–Лиувилля

В работе рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача: для заданного матричного потенциала $Q_0(x)$ найти ближайшую к нему матричную функцию $\hat{Q}(x)$ такую, чтобы первое собственное значение матричного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $\hat{Q}(x)$ совпадало с заданным значением $\lambda_1^* \in \mathbb{R}$. Основной результат работы устанавливает новый тип связи между указанной линейной спектральной задачей и системами нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка известными в математической физике, как система нелинейных уравнений Шредингера. Это позволяет найти решение обратной спектральной задачи путем решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Кроме того, мы показываем связь рассматриваемой задачи с оптимизационной обратной спектральной задачей для скалярного оператора Штурма–Лиувилля.

Я. А. Гранильщикова. Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией

Основное содержание доклада связано с изучением спектральных свойств следующего дифференциального оператора с инволюцией

$$Ly = \alpha(x)y''(x) + y''(-x) + \\ g_1(x)y'(x) + r_1(x)y'(-x) + +g_2(x)y(x) + r_2(x)y(-x), \qquad x \in [-1; 1],$$

с краевыми условиями, порожденными линейными формами с носителями в концевых точках отрезка. Эта задача изучалась при $\alpha(x) \equiv const$ причем разными методами. Но ни один из методов не проходит в случае непостоянной функции α. Мы введем понятие регулярности для рассматриваемого класса задач и приведем схему доказательства спектральности по Данфорду соответствующих регулярных операторов.

Доклад основан на совместной работе с А. А. Шкаликовым. Работа поддержана грантом РНФ No 20–11–20261.

В. Г. Данилов. Метод слабых асимптотик для описания взаимодействия нелинейных волн

В докладе будет изложена схема метода слабых асимптотик и приведены примеры взаимодействия нелинейных волн, в том числе, по новому механизму, сочетающему свойства взаимодействия солитонов и ударных волн.

С. Ю. Доброхотов. Новые формулы для канонического оператора Маслова и приложения

Обсуждаются новые конструктивные формулы для канонического оператора Маслова, полученные в работах С. Ю. Доброхотова, В. Е. Назайкинского и А. И. Шафаревича, основанные на интегральных представлениях в окрестности каустик (лагранжевых сингулярностей) в виде интегралов по координатам на соответствующих лагранжевых многообразиях. Такие представления позволяют во-первых существенно упростить асимптотики решений многих задач для линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений и во-вторых расширить класс задач, в которых можно применить канонический оператор. Для ряда задач асимптотика эффективно выражается через специальные функции, например функции Эйри, Бесселя и др. В качестве примеров рассматриваются задача о Кеплеровых траекториях в рассеянии на отталкивающем кулоновском потенциале, задачи Коши с локализованными начальными данными и др.

Доклад основан на совместных работах с В. Е. Назайкинским, А. И. Шафаревичем, А. Ю. Аникиным, А. А. Толченнниковым, А. В. Цветковой, А. И. Клевиным.

М. А. Дородный. Усреднение нестационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости

Изучается задача об усреднении в пределе малого периода задачи Коши для нестационарной системы Максвелла во всём пространстве. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость — быстро осциллирующая положительно-определённая матрица-функция, а магнитная проницаемость — постоянная положительная матрица. Получены аппроксимации для магнитных полей. В случае, когда начальное данное для магнитной напряжённости равно нулю, также получены аппроксимации для электрических полей.

Доклад основан на совместной работе с Т. А. Суслиной.

Е. А. Злобина. Коротковолновая дифракция на контурах с негладкой кривизной

Цикл совместных с А. П. Киселевым исследований посвящен дифракции на кусочно-гладких контурах с изолированными особенностями кривизны, в частности, разрывами. В рамках последовательного метода пограничного слоя мы строим формулы высокочастотной асимптотики. Последние полученные нами результаты относятся к случаям, когда падающая волна приходит в точку негладкости контура вдоль касательного направления.

Основное внимание в докладе уделено задаче Малюжинца–Попова, в которой плоская волна набегает вдоль прямой, переходящей, со скачком кривизны, в выпуклую кривую (предполагается выполненным условие Неймана). Здесь естественно использовать аппарат, основанный на методе параболического уравнения, применявшегося, начиная с работ Фока, для изучения задачи дифракции на гладком выпуклом препятствии. В нашей задаче в освещенной области вместо отраженной волны возникает цилиндрическая волна, расходящаяся из точки негладкости, однако структура поля во многом напоминает фоковскую. Переходные зоны вокруг границы свет-тень описываются специальными функциями, напоминающими классические интегралы Фока. Кроме того рассмотрена в некотором смысле двойственная задача дифракции волны шепчущей галереи, набегающей на точку скачкообразного распрямления контура вдоль вогнутой его части. Здесь метод параболического уравнения приводит к совершенно другим асимптотическим формулам для поля.

Исследование поддержано грантом РНФ 22–21–00557.

А. И. Клевин. Асимптотика решений трехмерного уравнения Гельмгольца в двухслойной среде с локализованной правой частью

Рассматривается область $(x, z) \in \mathbb{R}^2 \times [z_-, z_+]$, разделенная границей в виде графика функции $z = D(x)$, $z_- < D(x) < z_+$, на две среды с зависящими от x плотностями $\rho_\pm(x)$. В данной области рассматривается асимптотика с малым параметром $h \to +0$ уравнения Гельмгольца с локализованной в окрестности точки (x^0, z^0) правой частью, заданной гладкими быстро убывающими функциями F, G:

$$h^2\Delta_x u + u_{zz} + k^2(x,z)u = F\Big(\frac{x-x^0}{h}\Big)G\Big(\frac{z-z^0}{h}\Big).$$

Показатель $k(x,z) > 0$ равен $k_-(x)$ в слое $z \in [z_-, D(x))$ и $k_+(x)$ в слое $z \in (D(x), z_+]$. Функция $u(x,z)$ должна удовлетворять условиям $u|_{z=z_-} = u|_{z=z_+} = 0$ на границе области и следующим условиям на границе двух сред:

$$u|_{z=D(x)-0} = u|_{z=D(x)+0}, \qquad \rho_- u_z|_{z=D(x)-0} = \rho_+ u_z|_{z=D(x)+0}.$$

Данное уравнение возникает в задачах акустики при изучении распространения звуковых волн в океане (среда жидкость–дно), порожденных точечным источником.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 21–11–00341).

Ю. А. Кордюков. Квазиклассические асимптотики спектральной функции магнитного оператора Шредингера на многообразии ограниченной геометрии

В докладе мы обсудим асимптотическое поведение спектра магнитного оператора Шредингера на римановом многообразии ограниченной геометрии в квазиклассическом пределе. Мы опишем полное асимптотическое разложение сглаженной спектральной функции данного оператора. В качестве следствий получаются квазиклассическая формула следа на компактном многообразии и асимптотическая локализация спектральной функции на диагонали в случае, когда магнитное поле имеет максимальный ранг.

А. П. Косарев. Асимптотики решений и условия полноты корневых векторов для $n \times n$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассматривается $n \times n$ система дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{y}' = \lambda A(x)\mathbf{y} + B(x)\mathbf{y}, \ \ x \in [0,1]$$

с коэффициентами из пространства $W_1^k[0,1]$, $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ ($W_1^0 \equiv L_1$), λ - комплексный большой параметр. При таких условиях гладкости в работе доказано существование фундаментальной матрицы решений с асимптотикой вида

$$Y(x,\lambda) = M(x)(I + \frac{R^1(x)}{\lambda} + \cdots + \frac{R^k(x)}{\lambda^k} + o(1)\lambda^{-k})E(x,\lambda), \ \ \lambda \to \infty,$$

$$E(x,\lambda) = diag\{e^{\lambda\int_0^x a_1 dt}, \ldots, e^{\lambda\int_0^x a_n dt}\}, \ \ M(x) = diag\{e^{\int_0^x b_{11} dt}, \ldots, e^{\int_0^x b_{nn} dt}\}.$$

в наиболее широких секторах для λ и явными формулами для элементов матриц $R^m(x), m = 1, \ldots, k$. Необходимость применения таких формул возникает в почти регулярных спектральных задачах. В работе рассмотрена почти регулярная задача для 2×2 системы с обращающимися в 0 на концах отрезка коэффициентами разложения. Получена асимптотика собственных значений задачи, и сформулированы достаточные условия полноты системы корневых функций. Доклад основан на совместной работе с А. А. Шкаликовым и поддержан грантом РФФИ No 20-11-20261.

М. А. Лялинов. Асимптотика собственных функций и обобщенных собственных функций в некоторых канонических задачах для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом

В работе изучается асимптотика по расстоянию для собственных функций оператора Шрёдингера с сингулярным дельта-потенциалом с носителем, сосредоточенным на одном или нескольких лучах на плоскости (или на конической поверхности в трехмерном случае). Изучаются собственные функции дискретного и существенного (непрерывного) спектра.

Операторы такого типа встречается в задачах рассеяния трёх одномерных квантовых частиц с точечным парным взаимодействием при некоторых дополнительных ограничениях, в квантовых моделях о распаде частиц с точечным парным взаимодействием, а также в задачах дифракции волн в клиновидных и конусовидных областях с краевыми условиями типа Робэна. С помощью так называемых представлений Конторовича–Лебедева или Ватсона–Бесселя задачи построения собственных функций оператора сводятся к изучению однородных функционально-разностных уравнений с характеристическим (спектральным) параметром. В работе исследованы свойства решений таких функционально-разностных уравнений второго порядка с потенциалом из специального класса. В зависимости от значений характеристического параметра в уравнениях описаны их нетривиальные решения, собственные функции дискретного или существенного (непрерывного) спектра. Исследование этих решений основано на сведении системы к интегральным уравнениям с самосопряженным ограниченным оператором, который является вполне непрерывным возмущением оператора Мёлера.

На основе интегральных представлений построена асимптотика собственных (и обобщенных собственных) функций по расстоянию.

А. С. Макин. О структуре спектра несамосопряженных краевых задач для оператора Дирака.

Исследуется спектральная задача для оператора Дирака с двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым по норме L_2 потенциалом $V(x)$. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять целая функция, чтобы являться характеристической функцией рассматриваемой краевой задачи. В случае регулярности краевых условий устанавливаются необходимые и достаточные условия на спектр указанного оператора.

М. М. Маламуд. К теории Бирмана–Крейна–Вишика. О проблеме Бирмана.

Дополняются результаты Бирмана и Крейна о самосопряженных расширениях положительно определенного симметрического оператора A. Дополняется теорема Крейна о редуцированном крейновском расширении A'_K оператора A. В частности, показывается, что обратные к этим операторам компактны лишь одновременно и при некоторых ограничениях имеют одинаковые степенные асимптотики. Обсуждается полное решение проблемы Бирмана о дискретности расширении Фридрихса оператора A при условии компактности обратного A^{-1}.

К. А. Мирзоев. Лакунарные рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера

В докладе методами спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля найдены новые рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера.

А. К. Мотовилов. Оптимальные оценки на скорость шредингеровской эволюции подпространств

Под квантовым ограничением скорости обычно понимается нижняя оценка на время, необходимое для перехода квантовой системы из одного ее состояния в другое состояние. Наиболее известным квантовым ограничением скорости эволюции состояний является знаменитое неравенство Мандельштам–Тамма, дающее оптимальную оценку для минимального времени, необходимого для перехода системы в состояние, ортогональное ее начальному состоянию. В свою очередь, неравенство Мандельштама–Тамма–Флеминга дает точную нижнюю оценку для времени, необходимого для поворота вектора состояния системы на произвольный угол. В противоположность классическим оценкам Мандельштама–Тамма и Мандельштама–Тамма–Флеминга в настоящем исследовании мы следим за временной эволюцией не отдельного состояния, а целого подпространства состояний, возможно, бесконечномерного. Используя понятие максимального угла между подпространствами, мы устанавливаем оптимальные оценки на скорость эволюции такого подпространства. Наше исследование включает случай неограниченных гамильтонианов.

Настоящий доклад основывается на результатах совместной работы с С.Альбеверио [1].

[1] S.Albeverio and A.K.Motovilov. Optimal bounds on the speed of subspace evolution, J. Phys. A: Math. Theor. 55 (2022), 235203; DOI: 10.1088/1751-8121/ac6bcf; arXiv:2111.05677.

А. И. Назаров. Спектр дробного лапласиана в области с цилиндрическими выходами на бесконечность

Описана структура спектра суженного дробного лапласиана Дирихле в мульти-трубах, т.е. областях с цилиндрическими выходами на бесконечность. Доклад основан на совместной работе с Ф. Л. Бахаревым.

Э. А. Назирова. Об одном подходе к исследованию асимптотики решений уравнения Штурма–Лиувилля с осциллирующим потенциалом

Цель доклада — демонстрация нового метода построения асимптотических формул для уравнения Штурма–Лиувилля для широкого класса уравнений Ш–Л с быстро осциллирующими коэффициентами.

В. А. Пчелинцев. О частотах свободных неоднородных мембран в областях, допускающих продолжения функций классов Соболева

Доклад посвящен оценкам основных частот свободных неоднородных мембран в невыпуклых областях, используя теорию квазиконформных отображений и операторы продолжения для пространств Соболева. Предложенный метод базируется на взаимосвязи между эллиптическими операторами в дивергентной форме и квазиконформными отображениями. Установлена связь между резонансными частотами колебаний свободных неоднородных мембран и задачей о минимальном покрывающем круге.

Н. В. Растегаев. Исследование допустимости неклассических волн методом исчезающей вязкости и их зависимость от малых параметров в задаче Римана для модели химического заводнения

А. Ю. Савин. О нелокальных эллиптических краевых задачах, отвечающих бесконечным группам преобразований

В ряде задач математической физики, некоммутативной геометрии и теории дифференциальных уравнений возникают нелокальные эллиптические краевые задачи, в которых нелокальность определяется операторами сдвига, отвечающими некоторой группе диффеоморфизмов. Наибольшую сложность представляет случай, когда диффеоморфизмы не сохраняют область, в которой рассматривается нелокальная задача, а группа диффеоморфизмов является бесконечной. В докладе даются постановки таких задач как ограниченных операторов в пространствах Соболева, приводятся критерии фредгольмовой разрешимости задач. Указываются конкретные примеры.

Т. А. Сафонова. Вокруг теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках

В докладе методами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов найдены новые интегральные представления для дигамма-функции Эйлера и родственных с ней функций в рациональных точках. При этом получаются аналоги и ещё одно доказательство известной теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках.

Н. Н. Сеник. Об усреднении локально периодической стационарной системы Максвелла в трехмерном пространстве и с постоянной магнитной проницаемостью

Теория усреднения изучает асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Мы рассмотрим подобную задачу усреднения стационарной системы Максвелла в трехмерном пространстве для случая, когда магнитная проницаемость постоянна, а диэлектрическая проницаемость задается быстро осциллирующей локально периодической матрицей-функцией. Мы обсудим приближения операторного типа для физических полей по норме в L_2 или H^1.

Исследование было проведено при поддержке гранта РНФ 22–11–00092.

А. Л. Скубачевский. Некоторые свойства решений уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем

Рассмотрена смешанная задача для системы уравнений Власова–Пуассона, описывающая кинетику высокотемпературной плазмы в термоядерном реакторе при воздействии внешнего магнитного поля. Получена априорная оценка для решения данной смешанной задачи с компактными по пространственным переменным носителями функций плотности распределения заряженных частиц.

В. А. Слоущ. Усреднение нелокального оператора сверточного типа: операторные оценки погрешности при учете корректора

Речь пойдет об аппроксимации нелокального самосопряженного оператора с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами в пределе малого периода. Используя подходящую модификацию теоретико-операторного подхода, мы дадим старший член аппроксимации, а также подходящие «корректоры», позволяющие приблизить резольвенту исследуемого оператора с точностью до членов второго порядка.

Т. А. Суслина. Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами

Доклад относится к теории усреднения (гомогенизации) дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами в пределе малого периода. Будет дан обзор результатов об операторных оценках погрешности при усреднении гиперболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами.

А. А. Толченников. Решение двумерного безмассового уравнения Дирака с линейным потенциалом и локализованной правой частью

Асимптотическое решение этой задачи, удовлетворяющее принципу предельного поглощения, устроено следующим образом. Вне особой прямой асимптотическое решение выражается через функцию Эйри и ее производную. Вдоль особой прямой решение осциллирует и локализовано в окрестности этой прямой.

С. Н. Туманов. Точные решения модели Сквайра уравнения Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта и аналитическое исследование спектра

Краевая задача Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта приближенно описывает течение вязкой жидкости между параллельными пластинами, одна из которых движется. При малых числах Рейнольдса ее собственные значения чисто мнимые, отрицательные, но с его ростом выходят попарно в комплексную плоскость и асимптотически приближаются к так называемому спектральному галстуку.

Модель Сквайра — задача второго порядка, обладает схожим поведением спектра, более того, главные члены формул распределения собственных значений обеих задач совпадают.

Модель Сквайра и более общие спектральные задачи исследовались многими авторами на предмет описания асимптотического поведения собственных значений с ростом параметров типа числа Рейнольдса, но методы, применяемые авторами по этой тематике, не раскрывают динамику спектра при конечных значениях этих параметров. Интересны моменты ухода собственных значений с мнимой оси в комплексную плоскость, их динамика до момента ухода и после, возможность возврата обратно на мнимую ось, а также явный вид собственных функций для кратных собственных значений.

И хотя это крайне сложно в случае задачи Орра–Зоммерфельда, нам удалось достигнуть продвижения для модели Сквайра.

А. А. Федотов. Перенормировки: гауссовы экспоненциальные суммы и почти периодические операторы

Известно, что гауссовы экспоненциальные суммы из теории чисел обладают свойством самоподобия: суммы с большим числом слагаемых выражаются через суммы с меньшим числом слагаемых и новыми параметрами. Это приводит к необычному и красивому поведению экспоненциальных сумм с большим числом слагаемых и определяет типичную скорость их роста. Аналогичными свойствами обладают и одномерные двухчастотные разностные и дифференциальные почти периодические уравнения. Теперь свойством самоподобия обладают их решения и спектры соответствующих операторов. В докладе будут обсуждаться гауссовы суммы и почти периодический оператор, предложенный физиками (мэрилендская модель).

А. В. Цветкова. Асимптотики пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса в виде функций Эйри и Бесселя

Мы рассматриваем пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса, являющиеся решением трехмерного уравнения Гельмгольца (которое в параксиальном приближении можно заменить на уравнение Шредингера). Рассматриваемые пучки представляют собой произведение гауссовой экспоненты на соответственно полиномы Эрмита и Лагерра. В докладе обсуждается подход, основанный на квазиклассическом приближении и изучении динамики лагранжевых многообразий, позволяющий получить глобальную асимптотику рассматриваемых пучков в виде функций Эйри и Бесселя сложного аргумента, которая дает хорошее приближение даже при небольших степенях соответствующих полиномов.

Доклад основан на совместной работе с С. Ю. Доброхотовым и В. Е. Назайкинским.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 21-11-000341).

Е. Б. Шаров. Спектральные свойства задачи для обобщенной струны со знакопеременным весом

Рассматривается уравнение колебания обобщенной струны с дискретным весом, порожденным самоподобным n-звенным мультипликатором в пространство Соболева с отрицательным показателем гладкости. Показано, что в случае некомпактного мультипликатора задача для струны равносильна спектральной задаче для периодической матрицы Якоби. Если вес струны является знакопостоянным, то период матрицы Якоби будет $n-1$, а в задаче со знакопеременным весом период будет $2n-1$.

И. А. Шейпак. Оценки производных высокого порядка в пространствах Соболева

Для функций f из вещественного пространства Соболева $\mathring{W}^n_\infty[0;1]$, удовлетворяющих условиям Дирихле, изучаются наименьшие возможные величины $A_{n,k}(a)$ в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k}(a)\|f^{(n)}\|_{L_\infty[0;1]}, \quad k=0,1,\dots,n-1, \quad a\in(0;1)$$

Основной интерес представляет задача о нахождении точек глобального максимума величин $A_{n,k}(a)$, при этом число

$$\Lambda_{n,k} := \max_{a\in(0;1)} A_{n,k}(a)$$

равно точной константе вложения пространства $\mathring{W}^n_\infty[0;1]$ в пространство $\mathring{W}^k_\infty[0;1]$, $k=0,1,\dots,n-1$.

Основной результат заключается в следующем утверждении.

Теорема. *Точки локальных максимумов функций* $A_{n,n-1,\infty}(a)$ *на отрезке* $[0;1]$ *равны* $a_j = \sin^2 \frac{\pi j}{2(n+1)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Значения в этих точках равны*

$$A_{n,n-1,\infty}(a_j) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} \sqrt{a_j - a_j^2}. \qquad (4)$$

При нечетном n *точкой глобального максимума функции* $A_{n,n-1,\infty}$ *является точка* $a = 1/2$, *при четном* n *точками глобального максимума функции* $A_{n,n-1,\infty}$ *являются ближайшие к* $1/2$ *точки локального максимума, равные* $\sin^2 \frac{\pi n}{4(n+1)}$ *и* $\sin^2 \frac{\pi(n+2)}{4(n+1)}$. *Таким образом*

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad \text{\textit{если } } n \quad \text{\textit{нечетно,}}$$

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} \sin \frac{\pi n}{2(n+1)}, \quad \text{\textit{если } } n \quad \text{\textit{четно.}}$$

Доклад основан на совместной работе с Т. А. Гармановой.

11 Прикладная математика и математическое моделирование

А. А. Алиханов. Устойчивость и сходимость разностных схем второго порядка аппроксимации для диффузионно-волновых уравнений

На базе дискретного аналога дробной производной Капуто построены разностные схемы второго порядка аппроксимации начально-краевых задач для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка по времени. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки решений как дифференциальных так и для разностных задач. Док азаны устойчивость и сходимость предложенных разностных схем. Проведены расчеты тестовых задач подтверждающие эффективность разработанных алгоритмов.

А. Б. Богатырев. Математические задачи синтеза многополосных фильтров

Разработка современных электронных устройств часто приводит к содержательным математическим постановкам. Будут рассмотрены две задачи, традиционно возникающие п ри синтезе многополосных электрических фильтров: (1) задача аппроксимации, т.е. нахождение амплитудно-частотной характеристики нужной спецификации и (2) задача реализации – синтез архитектуры и нахождение значений структурных элементов прибора, реализующего эту характеристику. Обе проблемы привлекали внимание ведущих м атематиков своего времени.

П. Н. Вабищевич. Численное решение нестационарных задач с памятью

Рассматриваются вопросы численного решения задачи Коши для эволюционного уравнения с памятью, когда ядро интегрального члена является разностным. Рассматриваема я нелокальная задача преобразуется в локальную, при этом решается слабо связанная система уравнений с дополнительными обыкновенными дифференциальными уравнениям и. Данный подход основан на аппроксимации разностного ядра суммой экспонент.

Ю. В. Василевский. Математические технологии и модели в задачах медицины

В докладе будут рассмотрены классы медицинских задач, поставленных математикам, а также примеры математических моделей, востребованных в двух клинических приложениях. Первое приложение – коррекция врожденных пороков сердца – требует построения персонализированной модели кровообращения Фонтена с полным кавапульмональным соединением (ПКПС), при котором правое сердце изолируется. Двухмасштабная модель объединяет квази-одномерную гемодинамическую модель в сети сосудов и трехмерную модель кровотока в ПКПС, при этом использует данные компьютерной и магнитно-резонансной томографий. Второе приложение – реконструкция аортального клапана – требует построения персонализированной модели закрытого аортального клапана, в котором патологически измененные створки заменены на створки, вырезанные из обработанного перикарда пациента (операция Озаки).

С. А. Герасимова. Математические и физические модели динамических мемристивных нейросистем

Благодаря прогрессу в таких областях науки, как твердотельная микроэлектроника, молекулярная биология, нелинейная динамика применительно к нейронаукам стала воз можна разработка, прототипирование и исследование живых нейронных систем, сопряженных с искусственными динамическими системами, а также с устройствами стимуляци и и контроля нейронной активности. В этой работе представлено несколько физических и математических моделей нейроноподобных и нейрогибридных систем на базе мемр истивного устройства. Простейшая система состоит из математической модели ФитцХью-Нагумо и её электрической схемы и мемристивного устройства типа «металл-оксид- металл». Было исследовано, что изменение амплитуды сигнала ведущего генератора приводит к переключению мемристивного устройства благодаря внутренней настройке п араметров мемристивного устройства. Это обеспечивает адаптивную модуляцию нейроноподобных сигналов ведомого генератора в системе сопряженных аналоговых нейронов . Отметим, что при изучении взаимной связи нейроноподобных генераторов через мемристивное устройство, был получен хаотический режим. На базе полученных данных б ыла разработана и протестирована нейрогибридная система, которую мы определяем как комбинацию искусственного нейрона ФитцХью-Нагумо и клеток среза гиппокампа мо зга крысы в замкнутом контуре. Разработанная замкнутая система может быть использована для повышения гибкости нейронных связей при решении нейропротезных задач.

М. А. Гузев. Построение неевклидовых моделей сплошной среды

Показано, что классическая модель упругой сплошной среды содержит «скрытые» параметры, характеризующие неевклидову геометрическую структуру внутренних взаи модействий частиц среды между собой: тензор Римана, тензор кручения и тензор неметричности. Предлагаются различные схемы конструирования неевклидовых моделей сп лошной среды, в которых «скрытые» параметры являются дополнительным набором переменных для внутренней энергии. В качестве приложения теории рассматривается пост роение решений для неевклидовой модели в случае плоско-деформированного состояния сплошной среды, для исследования которого применяется метод функции напряжений Эйри. Показано, что функция напряжений неевклидовой модели удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению, правая часть которого совпадает со скалярной кривизной. При этом внутренние напряжения складываются из классического поля упругих напряжений и неевклидова поля напряжений, определяемого через скалярную кр ивизну. Теоретические результаты работы использованы для анализа различных экспериментальных данных и выбора феноменологических параметров неевклидовой модели и сследуемого материала.

Е. А. Данилкин. Исследование влияния геометрии несимметричного уличного каньона на структуру течения и концентрацию примеси

Базовым элементом архитектуры современного города является уличный каньон, поэтому он часто выступает в качестве объекта экологических исследований посвященных, как изучению распространения вредных выбросов в городских кварталах, так и микроклимата города в целом. В рамках данной работы усилия были сосредоточены на про ведении параметрических расчетов с использованием, разработанного в Томском государственном университете, программного комплекса M2U и выявлении неблагоприятных сценариев проветривания уличного каньона.

Математическая модель, реализованная в программном комплексе M2U, включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, Навье-Стокса и переноса при меси.

Замыкание системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска и двухпараметрической k-e модели. При дискретизации пр именяется метод конечного объема, неравномерные структурированные сетки и метод фиктивных областей.
Выполнено исследование влияния различной высоты зданий, образующих уличный каньон, на концентрацию примеси в каньоне и зоне дыхания. При выполнении расчетов выб иралась постоянная высота основного (более высокого) здания, например 40 метров, а высота второго здания уменьшалась от высоты основного здания до нуля с шагом 10 метров. В результате исследования для каждого рассмотренного варианта собраны и проанализированы следующие данные: максимальная концентрация в каньоне, миним альная концентрация в каньоне и зоне дыхания, средняя концентрация в каньоне и зоне дыхания.
Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884).

Ю. А. Дорофеева. Динамика мнений в социальных сообществах (на основе нормального распределения)

В докладе будет представлена новая модель динамики мнений в социальных сообществах, основанная на нормальном распределении. Коллектив участников взаимодействует с учетом порога "доверия". Влияние на отдельно взятого агента оказывают только те участники, мнение которых расходится с его собственным на заданную величину.

Рассматриваются основные вопросы взаимодействия агентов: достижение консенсуса в сообществе, поляризация мнений и т.д.

Один из участников коллектива, являясь лидером, приводит мнения остальных к пороговому значению. В связи с этим, решается вопрос оптимального управления для да нной закономерности.

Приведены результаты численного моделирования, наглядно иллюстрирующих различные сценарии взаимодействия в отдельно взятом коллективе.

С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин, Н. С. Новиков. Дискретная регуляризация нелинейных некорректных задач

Рассматриваются два метода регуляризации нелинейных некорректных задач — дискретизация и сведение к линейным задачам. Первый метод (дискретизация) обоснован для широкого круга задач (прямых и обратных), которые могут быть сведены к нелинейным операторным уравнениям Вольтерра с ограниченно липшиц-непрерывным ядром. К этим задачам относятся прямые и обратные задачи для квазилинейных гиперболических уравнений и систем. Второй метод — сведение дискретной нелинейной задачи к системе линейных алгебраических уравнений — является распространением известного метода обратной задачи рассеяния на многомерные задачи. В качестве примеров рассмотрены нелинейное уравнение Шредингера и многомерная обратная задача акустики.

О. И. Криворотько. Математическое моделирование распространения COVID-19 в регионах РФ: идентифицируемость, регуляризация и программный комплек с

В работе построена и проанализирована комплексная математическая модель распространения COVID-19 в регионах Российской Федерации (Новосибирская, Омская области, Алтайский край, Санкт-Петербург) с учетом административных и фармацевтических мер, основанная на комбинации SEIR-HCD и агентных моделях. Параметры моделей, характеризующие особенности распространения инфекции в конкретном регионе, как правило, неизвестны, что приводит к необходимости решать совмещенные обратные задачи.

Проведен анализ чувствительности параметров моделей к данным обратной задачи (количество ежедневных ПЦР-тестов, выявленных и умерших в результате COVID-19 случаев), с помощью которого уменьшены границы изменения неизвестных параметров. Адаптированы алгоритмы решения обратных задач эпидемиологии: стохастическая оптимизация, природоподобные алгоритмы (генетический, дифференциальной эволюции, роя частиц), методы усвоения, анализа больших данных и машинного обучения. Создан программный комплекс для анализа и расчета сценариев развития эпидемиологической ситуации в Новосибирской области на 45 дней вперед с учетом ограничительных мер, вакцинации и влияния пассажиропотоков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-71-10044-П).

Е. А. Крупенников. О решении обратных задач теории управления с помощью гамильтоновых конструкций

Доклад посвящен решению задачи динамической реконструкции неизвестного управления и порожденной им траектории динамической системы по неточным дискретным замера м реализованного наблюдаемого движения.

Рассматриваются детерминированные динамические системы, аффинные по управлениям. Значения допустимых управлений ограничены известным компактом. Вводится понятие допустимых обобщенных управлений со значениями из множества регулярных вероятностных борелевских мер на выпуклой оболочке, натянутой на этот компакт. Введение обобщенных управлений позволяет восстанавливать управления со скользящим режимом.

Предлагается новый подход к решению задачи динамической реконструкции. Особенность подхода — использование гамильтоновых конструкций из вспомогательных задач на поиск стационарных точек выпукло-вогнутых функционалов.

Предложен численный алгоритм решения задачи динамической реконструкции, сходимость которого обоснована при условии выполнения определенных условий согласования параметров аппроксимации. Эффективность алгоритма обеспечивается сведением задачи динамической реконструкции к интегрированию линейных ОДУ.

И. М. Куликов. Использование кусочно-параболической реконструкции физических переменных для уменьшения диссипации метода Годунова

Будет представлен одна модификация метода Годунова на основе кусочно-параболической реконструкции физических переменных для уменьшения диссипации численного реш ения. Полученный численный метод был подробно верифицирован на классических гидродинамических тестах. Проведено исследование порядка точности численного метода на воспроизведении разрывных и дифференцируемых решениях. Исследована эффективность параллельной реализации численного метода. В дополнении, производительность метода продемонстрирована на модельной задаче о многослойном взрыве термоядерной сверхновой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00044).

Г. Г. Лазарева. Математическое моделирование переноса вещества в спиральном магнитном поле в установке СМОЛА

В качестве удерживающего устройства выступают магнитные ловушки, в которых формируется самоподдерживающиеся конфигурация плазмы и магнитного поля, способные сущ ествовать какое-то время, достаточно длительного по масштабам плазменных процессов. Открытые магнитные системы для удержания плазмы рассматриваются в качестве в озможных конфигураций для термоядерного реактора с первых дней исследований термоядерного синтеза. Достигнут большой прогресс в понимании физики открытых магнит ных конфигураций и достигнутых параметров плазмы. Установка Спиральная Магнитная Открытая Ловушка (СМОЛА) разработана и построена в 2017 году в Институте ядерно й физики СО РАН им. Будкера. Экспериментально доказана возможность удержания за счет спирального магнитного поля. Новая математическая модель переноса вещества в винтовом магнитном поле построена на основе уравнений из Беклемишева А.Д. и параметров установки СМОЛА. В докладе представлены результаты развития математической модели удержания плазмы в спиральном магнитном поле. Полученное расчетное распределение плотности в по перечном сечении сопоставлено с экспериментальными данными. Цель математического моделирования состоит в нахождении оптимальных параметров удержания и в дальнейшем в определении основных масштабов эффективности этого про цесса.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

В. Л. Литвинов. Поперечные колебания консоли переменной длины, лежащей на упругом основании

Одномерные колебательные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике: изгибные колебания валов, балок и стержней с подвижными закреплениями. Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств. Результатами такого анализа могут стать: повышение надежности работы технических объектов с переменными во времени границами, повышение точности расчетов конструкций на динамическую прочность. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича-Галеркина, который позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления среды, изгибную жесткость, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта, а также жесткость подложки. Используя метод Канторовича-Галеркина находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях консоли с движущейся границей, лежащей на упругом основании. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Решение получено для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на движущейся границе.

А. А. Ломов. Устойчивость вычислительных решений в обратных задачах идентификации коэффициентов линейных разностных уравнений.

Обсуждаются известные и новые результаты по условиям сходимости вычислительных алгоритмов в обратных вариационных задачах типа Прони идентификации коэффициентов разностных уравнений в малую окрестность глобального минимума целевой функции.

Приводятся теоретические оценки локальной устойчивости точек минимума вариационной целевой функции к возмущениям в наблюдениях в сравнении с результатами вычисл ительных экспериментов; отмечается жесткость (вплоть до практической неприменимости) условий известных теорем с гарантированными оценками устойчивости.

Предлагаются к обсуждению простые примеры наличия областей глобальной неустойчивости идентификации коэффициентов разностного уравнения при «больших» возмущени ях в наблюдениях. Близость наблюдений к области глобальной неустойчивости в этих примерах не обнаруживается локальными функциями чувствительности.

А. В. Неверов. Численное решение одной обратной задачи для модели игры среднего поля

Рассматривается задача восстановления Гамильтониана в модели игры среднего поля (ИСП) по заданному распределению плотности вероятности большого числа однородных игроков в дифференциальной игре под действием внешнего управления за некоторый промежуток времени. Задача сводится к решению системы двух уравнений в частных п роизводных, причем одно из которых решается в прямом времени (Колмогорова-Фоккера-Планка), а второе (Гамильтона-Якоби-Беллмана) – в обратном. В предположении в ыпуклости функции стоимости управления необходимо определить коэффициенты функции стоимости, описываемая гамильтонианом.

Разработан численный алгоритм решения прямой задачи игры среднего поля на основе метода коллокаций, позволяющего решать получаемую систему уравнений во всей рас четной области одновременно в прямом и обратном времени. Разработан алгоритм решения обратной задачи на основе минимизации целевого функционала в смысле наимень ших квадратов, выражающего разницу между измерениями заданной и моделируемой плотностью распределения игроков при полученных приближениях параметров. Алгоритм о снован на применении метода градиентного спуска, в котором получено выражение градиента, связанное с решением сопряженной задачи к модели ИСП. Приведены результ аты численных расчетов для простейшей SIR модели, описывающей распространение инфекционного заболевания в популяции.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 18-71-10044-П).

А. Н. Нуриев. Асимптотическая теория машущего крыла. Оценка эффективности движения

В работе рассматривается движение круглого цилиндрического крыла, совершающего поперечно-вращательные колебания, в вязкой несжимаемой жидкости. Для описания гидродинамики крыла используется уравнение Навье-Стокса. Решение задачи строится с помощью метода асимптотических разложений по малому параметру, в качестве которого выбирается безразмерная амплитуда колебаний. Ограничений на частоту колебаний при этом не налагается. Исследуется случай движения крыла с крейсерской скоростью, в условиях нулевой средней силы, действующей за период колебаний. Крейсерская скорость при этом определяется из решения задачи. По результатам исследования аналитически определено два первых члена разложения решения: первый член описывает первичные нестационарные потоки, формирующиеся в результате колебаний, второй – стационарное (вторичное) течение, образующееся в результате нелинейного взаимодействия временных гармоник. Показано, что именно в результате взаимодействия временных гармоник вращательного и поступательного колебаний появляется ненулевая средняя скорость движения. Представлены точные и приближенные формулы для расчета крейсерской скорости в зависимости от параметров колебания. В заключении работы проведена апробация результатов с помощь прямого численного моделирования, которая подтвердила широкий диапазон применимости теории. Полученные результаты показывают, что крейсерская скорость цилиндрического крыла в оптимальных режимах движения сопоставима со скоростью поперечных колебаний, кроме того рассматриваемый тип движителя имеет высокую эффективность по относительным энергозатратам в диапазоне чисел Ренольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2 - 10^3$.

В. М. Садовский. Математическое моделирование неустойчивого состояния жидкого кристалла в неоднородном электрическом поле

Моделируется эффект переориентации молекул в протяженном жидкокристаллическом слое, находящемся в неоднородном электрическом поле конденсатора с короткими перио дически расположенными обкладками. Определяющие уравнения модели представляют собой нелинейные вариационные уравнения Эйлера для электрического потенциала и угла ориентации молекул в задаче миним изации функционала потенциальной энергии. Для численного решения уравнений построена вариационно-разностная схема, алгоритмическая реализация которой основана на методе прямых и итерационном процессе, на каждом шаге которого строится решение уравнения Пуассона с помощью быстрого преобразования Фурье.

Программная реализация алгоритма выполнена по технологии CUDA для вычислительных систем с графическими ускорителями. Алгоритм и программа верифицированы на точн ом решении задачи для однородного электрического поля с постоянным начальным углом ориентации молекул жидкого кристалла. В серии расчетов получены результаты, и митирующие процесс образования больших доменов сориентированных молекул (роев) при потере устойчивости равновесия центров.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 07 5-02-2022-873).

П. С. Сурнин. Определение параметров математической модели иммунного ответа на ВИЧ-инфекцию

Вирус иммунодефицита человека (ВИЧ) остается одной из основных проблем глобального общественного здравоохранения. ВИЧ поражает иммунную систему и ослабляет защи ту от многих инфекций и некоторых типов рака, с которыми может справиться иммунитет здорового человека. Не существует метода, позволяющего вылечить ВИЧ-инфекцию . Однако благодаря расширению доступа к эффективным средствам профилактики, диагностики и лечения ВИЧ и оппортунистических инфекций, а также ухода за пациентами , ВИЧ-инфекция перешла в категорию поддающихся терапии хронических заболеваний. Для предупреждения наихудшего сценария прогрессирования инфекции применяется математическое моделирование. Для описания патогенеза ВИЧ-инфекции сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений. Модель состоит из восьми уравнений, описывающих четыре состояния CD4+ Т-клеток и два вида CD8+ Т-клеток, которые относятся к клеточному иммунитету человека. Особенность данной модели в том, что CD4+ клетки служат ос новным резервуаром латентно инфицированных клеток. Вирусная нагрузка на организм человека суммируется из воздействия инфекционного и неинфекционного свободного вируса. Для описанной математической модели приведено решение задачи Коши вычислительными методами, а также проведен анализ идентифицируемости и анализ чувствительности от входных данных для параметров. Поставлена и решена обратная задача оптимизационными методами.

А. Е. Суроегина. Анализ и прогнозирование COVID-19

11 марта 2020 года Всемирная организация здравоохранения объявила, что болезнь COVID-19 переросла в глобальную и теперь является одним из важных объектов прогно за, поскольку почти все на планете испытали на себе тяжесть ее воздействия на организм. Целью настоящей работы является анализ и прогнозирование динамики развития COVID-19 с помощью логистического уравнения и модели Гомперца со сдвигом. Данные о заболеваемости коронави русом в России взяты с сайта Всемирной организации здравоохранения. По скользящим данным за пять дней были построены аппроксимации данных моделей, которые позво ляют сделать прогноз на несколько дней вперед. Обе модели с хорошей точностью приближаются к действительным показателям.

А. А. Сущенко. Анализ обратных задач акустического зондирования

Рассмотрены теоретические результаты о корректности начально-краевых задач для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границах раздела сред. Доказаны теоремы о существовании, единственности и стабилизации решения начально-краевой задачи с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела в ограниченных и неограниченных областях. Построена модель импульсного зондирования морского дна гидролокатором бокового обзора и решены обратные задачи, заключающиеся в определение коэффициента донного рассеяния и функции, описывающей малые отклонения донной поверхности от некоторого среднего уровня. Разработан и апробирован на реальных данных ГБО алгоритм фильтрации объемного рассеяния в океанической среде.

Е. Е. Тыртышников. Известные и неизвестные свойства тензорных рангов

Канонические тензорные разложения — это пример алгебраической реализации идеи разделения переменных. Они являются классическим объектом теоретической математики и в то же время имеют много очень полезных приложений. Их свойства в d-мерном случае при $d \geq 3$ существенно отличаются от матричного случая $d = 2$. Одно из радикальных отличий связано с понятием граничного ранга, которое отсутствует в матричном случае. Мы рассмотрим некоторые открытые вопросы, связанные с этим понятием, в том числе вопрос о незамкнутости ранговых множеств. Для прояснения этого вопроса предлагается гипотеза об увеличения ранга любого тензора, ранг которого меньше главного ранга, с помощью прибавления какого-то тензора ранга один. Доказывается теорема о справедливости этой гипотезы почти всюду.

С. П. Царев. Методы sparce recovery для обнаружения скачков в фазовых измерениях навигационных приемников

Доклад основан на совместной работе с А. С. Пустошиловым. В докладе дается обзор разработанных авторами новых методах нахождения малых разрывов сильно зашумленных измерительных данных, основанных на методах Sparse recovery. Показано, что по сравнению с ранее применявшимися методами вероятность обнаружения разрыва (как частный случай решения "задачи о разладке" временного ряда) новые метода позволяют с высокой вероятностью обнаруживать разрывы, по величине меньшие, чем уровень шума в данных.

О. Ю. Цидулко. О задаче размещения с дополнительными ограничениями на графах древесного вида.

В классической сетвой задаче размещения (Facility Location Problem, FLP) требуется разместить предприятия в вершинах заданного графа сети так, чтобы с минимальн ыми затратами на открытие предприятий и транспортировку продукта единовременно удовлетворить спросы всех клиентов, находящихся в вершинах сети. Естественным обо бщением классической задачи являются задачи с дополнительными ограничениями на объемы производства предприятий (Capacitated FLP, CFLP), а также с ограничениями на пропускные способности коммуникаций сети (Restricted FLP, RFLP). В докладе рассматриваются задачи RFLP и однородная CFLP на простейших типах графов таких ка к пути, звезды, деревья, графы с ограниченной древовидной шириной. Приводятся недавние результаты, полученные совместно с соавторами, по уточнению сложностного статуса и построению точных полиномиальных (и даже линейных), а также псевдополиномиальных алгоритмов решения для частных случаев рассматриваемых задач.

А. С. Челнокова. Классические и квантовые модели проницаемости нанопористых структур

Задача газоразделения и выделения определенных компонент из смеси актуальна для химической и добывающей отраслей промышленности. С развитием вычислительных мощн остей компьютеров развиваются методы молекулярной динамики, в том числе применительно к задачам фильтрации и очистки газа и жидкостей с использованием функциона льных мембран.

В качестве материала для мембран можно рассматривать графеноподобные структуры – более тонкие мембраны, как правило, обладают более высокой селективностью. В п оследние годы появилась возможность получать графеноподобные материалы с регулярными порами. Однако составные мембраны из крупных наночастиц – фуллеренов и нано трубок также представляют интерес, ввиду наличия вращательных степеней свободы этих частиц.

В докладе будут представлены результаты исследования по моделированию взаимодействия газовых компонет с молекулами нанопористых мембран. Получены численные резу льтаты по микросостояниям системы из атомов/молекул газа и атомов/молекул мембраны. Рассчитаны проницаемости нанопористых структур кристаллов фуллерита C_{60} и C_{36}, плотной укладки закрытых углеродных нанотрубок, гибридных структур из закрытых нанотрубок и графенов, слоев графена и нитрида бора. Построена модел ь определения поворотов неизменяемой молекулярной конструкции.

В. В. Черник, П. О. Буклемишев. Численное решение двумерной задачи с подвижной границей и условиями типа Хеле-Шоу для моделирования активного движения клетки.

Механизм подвижности живых клеток является предметом исследования для широкого круга учёных. Сегодня биологи, физики и математики ищут новые инструменты для мод елирования этого процесса. В данной работе представлена простая двумерная модель клетки со свободными границами, движущейся по однородной и изотропной поверхнос ти. В ней описывается динамика сложной актомиозиновой жидкости, свойства которой влияют на динамику границ и подвижность клетки. Система уравнений в частных про изводных в области со свободной границей содержит нелокальный член. Закон Дарси описывает поток актомиозиновой жидкости, а распределение миозина в клетке изменя ется в соответствии с уравнением адвекции-диффузии. Граничные условия написаны в предположении, что растяжение клеточной мембраны описывается уравнением Юнга-Ла пласа. Также присутствуют условие непрерывности нормальной составляющей скорости жидкости на границе и условие непротекания.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \zeta\varphi - Q(m) \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \nabla(m\nabla\varphi) = \Delta m \\ \zeta\varphi = \gamma\kappa + p_{eff}(|\Omega(t)|) \\ V_\nu = \partial\varphi \\ \partial_\nu m = 0 \end{cases}$$

Для получения приближенного решения задача была сведена к краевой задаче со смешанными условиями на постоянной границе, разработана специальная разностная схема второго порядка точности и реализована в виде программного модуля на языке Python. Получены устойчивые решения, в том числе сходящиеся к некоторым аналитически м со вторым порядком точности.

Е. В. Чижонков. О двух моделях для плазменных колебаний: постановки задач и численный анализ

Рассматривается возбуждение плазменных колебаний с помощью короткого мощного лазерного импульса. Физический процесс моделируется на основе двух подходов: кинетического и гидродинамического. Начальные условия выбираются для их максимально возможного согласования. Уравнения Власова – Максвелла численно решаются двумя идейно различными алгоритмами; аналогичным образом получаются приближенные решения гидродинамических урав нений. Целью исследований является установление сходства и различия моделей в рамках рассматриваемой задачи. Особое внимание уделяется температурным эффектам.

М. А. Шишленин, С. И. Кабанихин, Н. С. Новиков. Цифровой двойник электроакустического томографа

В работе представлена математическая модель электроакустической томографии на основе законов сохранения, которая не только описывает такие эффекты, как дифракци я, преломление, реакция и акустическое поглощение неоднородных сред на физическом уровне, но и позволяет моделировать диаграммы направленности источников и прие мников. Гиперболическая система первого порядка позволяет нам предложить более реалистичную модель с физической точки зрения. Эти уравнения получены непосре дственно из законов сохранения механики сплошных сред, что позволяет нам контролировать сохранение основных инвариантов при решении прямых и обратных задач, что является важным при решении неустойчивых задач, так как законы сохранения основных инвариантов являются критерием правильности решения.

Исследована математическая модель распространения волн в однородных и гетерогенных областях с неотражающими граничными условиями.

Разработан метод решения коэффициентной обратной задачи восстановления основных электрромагнитных и акустических параметров среды по дополнительной информации о давлении, измеряемом на границе исследуемой среды. Обратная задача сводится к минимизации целевого функционала, которая решается методом градиентного спуск а. Приведены результаты численных расчетов. Проведен сравнительный анализ двух подходов для вычисления градиента функционала.

Работа выполнена при поддержке проекта РНФ 19-11-00154.

К. А. Шишмарев, Т. И. Хабахпашева, А. А. Коробкин. Исследование напряженно-деформированного состояния ледового покрова в замороженном канал е

Рассматриваются гидроупругие волны, распространяющиеся вдоль замороженного канала. Канал имеет прямоугольное сечение и заполнен жидкостью. Жидкость покрыта тонк им ледовым покровом. Изучается два класса задач: реакция льда на движение внешней нагрузки и исследование характеристик периодических гидроупругих волн, распрос траняющихся вдоль канала с постоянной скоростью. Задачи об определении прогибов льда и максимальных деформаций в ледовом покрове формулируются в рамках линейной теории гидроупругости. Жидкость невязкая и несжимаемая. Ледовый покров моделируется тонкой упругой или вязкоупругой пластиной в рамках теории Кельвина–Фойгта. Течение, вызванное прогибами пластины, считается потенциальным. Рассматривается лед, примороженный к стенкам канала. Внешняя нагрузка движется вдоль канала с по стоянной скоростью и моделируется гладким локализованным пятном давления, движущимся по верхней поверхности ледового покрова, или подводным телом, моделируемым трехмерным диполем с использованием метода зеркальных отображений. Задача решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала и разложением профиля колебаний л ьда поперек канала на нормальные моды колебаний упругой балки. Последним результатом является разработанный метод построения нормальных мод с учетом произвольно й толщины льда поперек канала. Область по ширине канала разбивается на малые отрезки, на которых профиль толщины ледовой пластины аппроксимируется линейными фун кциями. На каждом отрезке определяются функции, описывающие профиль волн поперек канала. Полученные моды построены таким образом, что прогибы льда, наклон, моменты и перерезывающие силы непрерывны вдоль всей ширины канала. В докладе приводятся эти и другие рез ультаты исследования рассмотренной задачи.

Работа авторов поддержана проектом РФФИ СТ_а 20-58-46009 “Нагрузки на инженерные сооружения в морском льду”. Работа К. А. Шишмарева поддержана государственным заданием Министерства науки и высшего образования РФ по теме “Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики” (номер темы: FZMW-2020-0008).

12 Теория вероятностей

И. А. Алексеев. Критерий квази-безграничной делимости для некоторого класса случайных векторов

В данном докладе рассматриваются случайные векторы, функция распределения которых имеет следующий вид:

$$F(x) = \alpha F_{\text{disc}}(x) + (1-\alpha)F_{\text{abs}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5}$$

где $\alpha \in (0,1]$, а $F_{\text{disc}}(x)$, $F_{\text{abs}}(x)$ обозначают дискретную и абсолютно непрерывные части соответственно:

$$F_{\text{disc}}(x) = \sum_{x_k \in (-\infty,x)} p_{x_k}, \quad \text{и} \quad F_{\text{abs}}(x) = \int_{(-\infty,x)} p(u)du, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

Здесь $x_k \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ – различные векторы с весами $p_{x_k} \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} = 1$; $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – плотность распределения, $p(u) \geqslant 0$, $u \in \mathbb{R}^d$ и $\int_{\mathbb{R}^d} p(u)du = 1$. Через $(-\infty, x)$, где $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ обозначим $(-\infty, x^{(1)}) \times \ldots \times (-\infty, x^{(d)}) \subset \mathbb{R}^d$.

Для векторов с функцией распределения вида (5) будет получен критерий принадлежности к классу квази-безгранично делимых распределений. Все результаты будут сформулированы для общего случая – суммы ненулевой почти-периодической функции и преобразования Фурье некоторой плотности, то есть рассматривается функция $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ такая, что

$$h(t) = h_{\text{disc}}(t) + h_{\text{abs}}(t), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где

$$h_{\text{disc}}(t) = \sum_{y \in Y} q_y e^{i\langle t,y \rangle}, \quad \text{и} \quad h_{\text{abs}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} q(y) e^{i\langle t,y\rangle} dy, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где $Y \subset \mathbb{R}^d$ непустое не более чем счетное множество, $q_y \in \mathbb{C}$ для всех $y \in Y$ и $0 < \sum_{y \in Y} |q_y| < \infty$, функция $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ удовлетворяет $\int_{\mathbb{R}^d} |q(y)|dy < \infty$.

М. А. Анохина. Предельная теорема для момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в.). Для этого блуждания хорошо известен закон арксинуса:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x\right) \to \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad n \to \infty, \quad x \in [0,1],$$

где τ_M — момент первого достижения максимума блужданием S_n. Нас интересуют такие же результаты, но для

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x \,\middle|\, M_n = k\right), \quad x \in [0,1],$$

где $M_n = S_{\tau_M}$. В докладе будет получена асимптотика данной вероятности для арифметического случайного блуждания в случае нормальных уклонений для случаев конечной и бесконечной дисперсии, а также умеренных и больших уклонений при конечной дисперсии и выполнении правостороннего условия Крамера.

Планируется рассмотреть случай $k \sim n^{\alpha}$, $n \to \infty$, при $0 < \alpha < 1/2$ для арифметического случайного блуждания.

В. И. Афанасьев. Условные предельные теоремы для случайных блужданий и их локальных времен

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковым арифметическим распределением с максимальным шагом 1, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Положим $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbf{N}$. Пусть $T = \min\{i > 0 : S_i \leq 0\}$. Введем *остановленное случайное блуждание* $\widetilde{S}_i = S_i$ при $i < T$ и $\widetilde{S}_i = 0$ при $i \geq T$. Положим $\widetilde{\xi}(k) = \left|\left\{i \geq 0 : \widetilde{S}_i = k\right\}\right|$.

Пусть $\{W^+(t),\ t \geq 0\}$ – броуновская извилина и $l^+(u)$ – ее локальное время, т.е. $l^+(u) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} I_{[u,u+\varepsilon]}(W^+(s))\, ds$ при $u > 0$.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\left\{\sigma\widetilde{\xi}\left(\left\lfloor u\sigma\sqrt{n}\right\rfloor\right)/\sqrt{n},\ u \geq 0 \;\middle|\; T > n\right\} \xrightarrow{D} \left\{l^+(u),\ u \geq 0\right\},$$

где символ $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0, +\infty)$ *с топологией Скорохода.*

Пусть $\left\{W_0^{\uparrow}(t),\ t \geq 0\right\}$ – броуновский прыжок в высоту и $l_0^{\uparrow}(u)$ – его локальное время, т.е. $l_0^{\uparrow}(u) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} I_{[u,u+\varepsilon]}\left(W_0^{\uparrow}(s)\right) ds$ при $u > 0$. Положим $T_x = \min\left\{i \in \mathbf{N} : \widetilde{S}_i > x\right\}$ при $x > 0$.

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$\left\{\sigma^2\widetilde{\xi}\left(\lfloor un\rfloor\right)/n,\ u \geq 0 \;\middle|\; T_n < +\infty\right\} \xrightarrow{D} \left\{l_0^{\uparrow}(u),\ u \geq 0\right\}.$$

Г. А. Бакай. Большие уклонения для случайного блуждания в случайном сценарии

Пусть случайные величины $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ являются независимыми и одинаково распределеными (н.о.р.). Положим

$$W_0 := 0, \quad W_n := \sum_{i=1}^{n} \kappa_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

где случайные величины $\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \ldots$ так же являются н.о.р. и имеют распределение

$$p := \mathbf{P}(\kappa = 1) > 1/2, \quad q := 1 - p = \mathbf{P}(\kappa = -1) > 0.$$

Введем моменты достижения уровня n блужданием $\{W_k\}_{k \geq 0}$: $\tau_n := \min\{k \in \mathbb{N} : W_k = n\}$ и положим

$$S_n := \sum_{i=0}^{\tau_n - 1} \zeta_{W_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В докладе будут представлены результаты исследования вероятностей больших уклонений для последовательности величин $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, которую называют *остановленным случайным блужданием в случайном сценарии.*

С. В. Гришин. Алгебраические кривые в задачах случайного блуждания

Будет рассмотрена задача нахождения времени первого достижения положительной полуоси при однородном дискретном целочисленном случайном блуждании на прямой. Показано, что производящая функция указанной величины удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению. Это уравнение в каждом конкретном случае может быть выписано явно, и соответствующая кривая допускает исследование на рациональность. Будет приведено несколько результатов такого исследования.

М. К. Досполова. Смешанный объем бесконечномерных выпуклых компактов

Пусть K – выпуклое компактное GB-подмножество сепарабельного гильбертова пространства H. Обозначим через $\mathrm{Spec}_k K$ множество $\{(\xi_1(h),\ldots,\xi_k(h))\colon h\in K\}\subset\mathbb{R}^k$, где $\xi_1,\ldots,\xi_k$ – независимые копии изонормального гауссовского процесса. Цирельсон показал, что в этом случае для внутренних объемов K верна формула

$$V_k(K)=\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K),$$

где $\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K)$ – средний объем $\mathrm{Spec}_k K$ и κ_k – объем k-мерного единичного шара.

В данном докладе мы обобщим теорему Цирельсона на случай *смешанных объемов* бесконечномерных выпуклых GB-компактов в H, предварительно введя понятие смешанного объема для бесконечномерных выпуклых подмножеств H.

Кроме того, с помощью полученного результата мы вычислим смешанный объем замкнутых выпуклых оболочек двух ортогональных спиралей Винера.

Д. Н. Запорожец. Выпуклые оболочки случайных блужданий.

Мы покажем, как можно изучать выпуклые оболочки многомерных случайных блужданий используя свойства многогранных конусов. В частности, мы обсудим некоторые неожиданные следствия конической версии формулы Гаусса–Бонне. Доклад основан на совместной работе с Федором Петровым и Жюльеном Рандоном-Фурлингом.

А. И. Зейфман. Некоторые подходы к оцениванию скорости сходимости для марковских цепей с непрерывным временем

Рассматриваются (неоднородные) марковские цепи с непрерывным временем. Предполагается, что вектор вероятностей состояний цепи описывается прямой системой Колмогорова

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)=A(t)\mathbf{p}(t),$$

которую можно рассматривать как дифференциальное уравнение с ограниченной оператор-функцией в пространстве последовательностей l_1.

Изучается задача получения оценок скорости сходимости, то есть скорости стремления к нулю разности $\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)$ в случае слабой эргодичности цепи, и описываются возможные подходы к ее решению для различных классов цепей, приведенные, в частности, в статьях:

A. Zeifman, Y. Satin, I. Kovalev, R. Razumchik, V. Korolev. Facilitating numerical solutions of inhomogeneous continuous time Markov chains using ergodicity bounds obtained with logarithmic norm method. Mathematics, 2021. 9(1), 42.

A. Zeifman, Y. Satin, A. Sipin. Bounds on the Rate of Convergence for $M_t^X/M_t^X/1$ Queueing Models. Mathematics, 2021 9(15), 1752.

И. А. Ковалёв, Я. А. Сатин, А. В. Синицина, А.И. Зейфман. Об одном подходе к оцениванию скорости сходимости нестационарных марковских моделей систем обслуживания. Информатика и ее применения, 2022, том 16, вып. 3, 75–82.

А. В. Зорин. Система обслуживания ветвящихся потоков с разделением времени

В докладе демонстрируется применение понятия абстрактной стохастической управляющей системы к анализу одной модели системы обслуживания. Имеются m типов требований, для каждого типа требований своя очередь ожидания. В каждый момент времени обслуживается не более одного требования. Заданы законы распределения длительностей обслуживания требований каждого типа. Каждое обслуженное требование порождает случайное число требований-потомков каждого типа (“ветвящиеся вторичные потоки”). Выбор следующего требования для обслуживания зависит от длин очередей в момент решения (“динамические приоритеты”). Строится математическая модель в виде многомерной марковской цепи, проводится классификация состояний и изучаются некоторые асимптотические свойства распределений вероятностей.

А. П. Ковалевский, М. Г. Чебунин. Предельные теоремы для сумм регрессионных остатков при множественном упорядочении регрессоров

Мы доказываем теоремы о гауссовой асимптотике эмпирического моста, построенного из регрессоров линейной модели с множественным упорядочением регрессоров. Разработан алгоритм проверки гипотезы о линейной модели для компонент случайного вектора: одна из компонент является линейной комбинацией других с точностью до ошибки, не зависящей от остальных компонент случайного вектора. Результаты наблюдений за независимыми копиями случайного вектора последовательно упорядочиваются по возрастанию нескольких его компонент. Результатом является последовательность векторов более высокой размерности, состоящая из индуцированных порядковых статистик, соответствующих разным упорядочиваниям. Для этой последовательности векторов без предположения о линейной модели для компонент мы доказываем лемму о слабой сходимости распределений соответствующим образом центрированного и нормированного процесса к центрированному гауссовскому процессу с почти наверное непрерывными траекториями. В предположении о линейной взаимосвязи компонентов используются стандартные оценки методом наименьших квадратов для вычисления остатков регрессии — разностей между значениями отклика и значениями, предсказанными линейной моделью. Доказана теорема о слабой сходимости процесса сумм остатков регрессии при необходимой нормировке к центрированному гауссовскому процессу.

Исследование поддержано Математическим центром в Академгородке в соответствии с соглашением No. 075-15-2019-1675 с Минобрнауки России.

В. А. Куценко. Асимптотика моментов численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании в случайной среде

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с непрерывным временем в случайной среде. Предполагается, что в начальный момент времени на решетке находится одна частица, которая за малое время может переместиться в произвольный узел решетки, произвести потомство или погибнуть. Случайная среда определяется интенсивностями деления $\xi_+(x)$ и гибели $\xi_-(x)$ частиц в каждой точке решетки, при этом интенсивности являются неотрицательными случайными величинами $\xi^+(x) = \xi^+(x, \omega)$ и $\xi^-(x) = \xi^-(x, \omega)$. На пары $(\xi_+(x), \xi_-(x))$ накладывается условие об одинаковой распределенности и независимости в различных точках решетки. Блуждание описывается симметричным, однородным по времени случайным блужданием с конечной дисперсией скачков. Эволюция частиц происходит независимо друга от друга и от всей предыстории. В докладе будут представлены стандартные подходы, которые используются для изучения ветвящихся случайных блужданий в случайной среде. Особое внимание уделяется применению формулы типа Фейнмана-Каца для исследования моментов численностей частиц. Для некоторых случаев асимптотического поведения распределения $\xi_+(x) - \xi_-(x)$ получены результаты о предельном поведении случайных моментов при больших временах. Также будет обсуждаться ряд свойств описанных систем, в частности, скорость роста моментов, усредненных по среде, а также эффект перемежаемости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

Ю. Ю. Линке. Универсальные ядерные оценки в непараметрической регрессии.

В докладе будут обсуждаться новые оценки ядерного типа в непараметрической регрессии, равномерно состоятельные при близких к минимальным и наглядных условиях на точки дизайна. Оценки универсальны в том смысле, что дизайн может быть как фиксированным и не обязательно удовлетворяющим традиционным условиям регулярности, так и случайным, при этом не обязательно состоящим из независимых или слабо зависимых случайных величин. Относительно элементов дизайна предполагается лишь в некотором смысле плотное заполнение области определения регрессионной функции. Результаты, представленные в докладе, являются частью совместных исследований с Е. Б. Яровой (МГУ), В .А. Куценко (МГУ), И. С. Борисовым (ИМ СО РАН), П. С. Рузанкиным (ИМ СО РАН) и С. А. Шальновой (НМИЦ терапии и профилактической медицины).

В. А. Макаренко. Деликатное сравнение центральной и нецентральной ляпуновских дробей с приложением к неравенству Берри–Эссеена для составных пуассоновских распределений

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F и $\mathbb{E}|X|^3 < +\infty$, N_λ – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda > 0$. Обозначим

$$S_\lambda = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_\lambda}, \quad \widetilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - \mathbb{E}S_\lambda}{\sqrt{\mathbb{D}S_\lambda}},$$

$$\Delta_\lambda(F) = \sup_x \left| \mathbb{P}(\widetilde{S}_\lambda < x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \right|,$$

$$L_0(F) = \frac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^3}{(\mathbb{D}X)^{3/2}}, \quad L_1(F) = \frac{\mathbb{E}|X|^3}{(\mathbb{E}X^2)^{3/2}}.$$

Функционалы L_0 и L_1 называются соответственно центральной и нецентральной ляпуновскими дробями.

В докладе при каждом $t \in (-1, 1)$ представлены значения функций

$$H(t) = \sup_{\substack{F:\mathbb{E}X=t,\\ \mathbb{E}X^2=1}} \frac{\mathbb{E}|X|^3}{\mathbb{E}|X - t|^3}, \quad H(t)(1-t^2)^{3/2} = \sup_{\substack{F:\mathbb{E}X=t,\\ \mathbb{E}X^2=1}} \frac{L_1(F)}{L_0(F)}$$

и указаны соответствующие (двухточечные) экстремальные распределения, а также показано, что

$$\sup_F \frac{L_1(F)}{L_0(F)} = \sup_{t\in(-1,1)} H(t)(1-t^2)^{3/2} = \frac{\sqrt{17 + 7\sqrt{7}}}{4} = 1.48997\ldots.$$

Также показано, что из неравенства Берри–Эссеена с нецентральной ляпуновской дробью для составных пуассоновских случайных сумм

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} \cdot L_1(F), \quad \lambda > 0, \quad \text{(Ротарь, 1972, 1976)}$$

где $C_1 \in [0.266013, 0.3031]$ (Шевцова, 2014) – абсолютная константа, вытекает неравенство Берри–Эссеена с центральной ляпуновской дробью

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant \frac{C_0\left(\frac{\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathbb{E}X^2}}\right)}{\sqrt{\lambda}} \cdot L_0(X), \quad \lambda > 0,$$

$$C_0(t) = C_1 \cdot H(t)(1-t^2)^{3/2} \leqslant C_1 \cdot 1.48998, \quad t \in (-1, 1).$$

Т. Д. Мосеева. Интегральные тождества для границы выпуклого тела

Полученное в 1956 году Плейелем интегральное тождество позволяет выразить среднее значение функции от длины случайной хорды плоского выпуклого тела K, перейдя к интегрированию по границе K. С помощью тождества Плейеля легко можно выразить дефект в изопериметрическом неравенстве на плоскости и показать, что он неотрицателен.

Амбарцумяном в 1990 году была получена версия тождества Плейеля для выпуклых плоских многоугольников, также известная как тождество Амбарцумяна–Плейеля. Существует также аналог тождества Плейеля для выпуклых тел с гладкой границей в трёхмерном пространстве.

Доклад посвящён обобщениям тождеств Плейеля и Амбарцумяна–Плейеля на случай большей размерности пространства, а также другим интегральным тождествам, связанным с границей выпуклого тела.

М. В. Платонова. Вероятностная аппроксимация оператора эволюции e^{-itH}, где $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V$

Предложен способ построения вероятностной аппроксимации в смысле сильной операторной сходимости оператора e^{-itH}, где

$$H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V.$$

Заметим, что полугруппа e^{-itH} переводит начальную функцию $\varphi(x)$ в решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = Hu, \quad u(0, x) = \varphi(x).$$

Аппроксимирующие операторы имеют вид математических ожиданий функционалов от некоторого точечного случайного поля.

А. О. Мокроусова. Асимптотическая относительная эффективность статистических критериев проверки соответствия регрессионной модели

Доклад посвящен исследованию двух критериев, проверяющих основную гипотезу о соответствии линейной модели регрессии с двумя параметрами против одной из четырех альтернатив, которые описывают различные нарушения в непрерывности, линейности и постоянности этой модели. В роли статистик критериев выступают интегральный и супремальный функционалы от эмпирического моста, построенного по регрессионным остаткам.

Целью данной работы было сравнить вышеупомянутые критерии в смысле асимптотической относительной эффективности (АОЭ) по Питмену. Была получена формула, позволяющая вычислять АОЭ для таких критериев.

Е. И. Прокопенко. Подход multi-normex для аппроксимации суммы случайных векторов с тяжелыми хвостами

Мы рассмотрим точную аппроксимацию распределения суммы н.о.р. случайных векторов с тяжелыми хвостами, комбинируя среднее и экстремальное поведение. Данных подход обобщает так называемый подход «Normex» с одномерной модели на многомерную. Мы предложим два возможных распределения, названные d-Normex и MRV-Normex. Оба основываются на нормальном распределение для описания среднего поведения через ЦПТ, в то время как разница между двумя версиями заключается в использовании точного распределения или экстремальной теоремы для максимума. Поговорим о скорости сходимости для каждого распределения к распределению суммы, предполагая, что норма случайного вектора является правильно-меняющейся случайной величиной второго порядка. Приведем численные иллюстрации с использованием квантиль-квантиль графиков на основе геометрических квантилей. Работа выполнена совместно с Marie Kratz.

А. В. Резлер. Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки

Доклад основан на результатах статьи А.В. Резлера и М.Г. Чебунина «Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки». В работе были получены условия стабильности и нестабильности модели классической синхронизированной системы случайного множественного доступа с одним передающим прибором, управляемой протоколом передачи данных ALOHA и дополнительно снабженной механизмом энергетической подпитки. В отличие от стандартной системы ALOHA, в данной модели предполагается, что у каждого сообщения есть батарея, принимающая неограниченное количество ячеек заряда, и при том только сообщения с заряженной батареей могут быть переданы на передающий прибор. Помимо практических приложений, снабжение системы механизмом энергетической подпитки позволяет расширить ее область стабильности. В 2016 году в статье С.Г. Фосса, Д.К. Кима и А.М. Тюрликова «Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting» были получены условия стабильности и нестабильности для случая, когда каждое сообщение снабжено батареей, принимающей только одну единицу заряда. Результатом нашей работы является теорема о сохранении условий стабильности и нестабильности обобщенной модели.

Также мы исследовали условия стабильности и нестабильности модели, которая учитывает эффект саморазрядки, то есть потери заряда батарей в периоды простоя. Актуальность исследования возникла из практических приложений изучаемых систем.

Д. Б. Рохлин. О ценообразовании ресурсов на основе выявленных предпочтений

Рассматривается задача назначения цен на ресурсы с целью максимизации суммарной полезности агентов (производителей). Функции полезности агентов предполагаются неизвестными. Определение цен происходит итеративно на основе лишь информации о реакциях агентов на предложенные цены. Рассмотрены случаи асинхронных реакций и случайных функций полезности, порожденных последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Анализ опирается на теорию выпуклой онлайн оптимизации: мы применяем алгоритм SOLO FTRL (Orabona, Pal, 2018) к двойственно задаче. Для задачи с асинхронными реакциями производителей получены оценки в среднем и с большой вероятностью для отклонения целевой функции от оптимального значения и для невязок в ограничениях. Эти оценки имеют порядок $O(T^{-1/4})$ по числу T итераций и справедливы как в среднем, так и с большой вероятностью. Для задачи со случайными полезностями получены оценки такого же характера для среднего сожаления относительно лучшей последовательности цен.

Сформулируем данный результат более формально. Пусть $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}$: вектор объемов товаров, производимых k-м агентом, $A^{(k)}_{ij}$ — количество i-го ресурса, которое требуется для производства j-го товара, $b \in \mathbb{R}^m_{++}$ — вектор объемов имеющихся ресурсов, $a^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}_{++}$ — вектор максимальных объемов выпуска товаров k-м агентом, $f_k(x^{(k)}; \xi_t)$ — случайные функции полезности агентов, $(\xi_t)_{t=1}^T$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в компактном множестве. Функции f_k предполагаются сильно вогнутыми по первому аргументу. Пусть x^*_t — оптимальная кооперативная стратегия:

$$x^*_t \in \arg\max_{x \in S} F(x; \xi_t), \quad S = \{x : Ax := \sum_{k=1}^n A^{(k)} x^{(k)} \le b;\ 0 \le x^{(k)} \le a^{(k)},\ k = 1, \dots, n\},$$

$F(x; \xi_t) = \sum_{k=1}^n f_k(x^{(k)}; \xi_t)$. Не приводя несложных явных формул упомянутого алгоритма SOLO FTRL для λ_t, укажем оценки сожаления и невязок в среднем:

$$\frac{1}{T} \max \left\{ \mathsf{E} \sum_{t=1}^T (F(x^*_t; \xi_t) - F(\widetilde{x}(\lambda_t); \xi_t)), \sum_{t=1}^T \| \mathsf{E}(b - A\widetilde{x}(\lambda_t)) \| \right\} \le C T^{-1/4}.$$

Здесь $\widetilde{x}^{(k)}(\lambda) = \arg\min_{0 \le x^{(k)} \le a^{(k)}} (f_k(x^{(k)}; \xi_t) - \langle A^{(k)} x^{(k)}, \lambda \rangle)$ — реакции агентов. Последовательность цен λ_t зависит только от этих реакций.

Н. В. Смородина. О существовании ядер некоторых случайных операторов

Доказывается существование ядер у случайных операторов, возникающих при построении вероятностного представления резольвенты самосопряженного строго эллиптического оператора второго порядка с ограниченным быстро убывающим потенциалом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-21-00016.

В. В. Ульянов. Предельные теоремы для взвешенных сумм и их применения

В докладе рассматриваются асимптотические разложения для симметричных функций от многих переменных. Это дает возможность разработать общий подход к построению неасимптотических оценок точности приближений для нелинейных форм от случайных элементов в терминах отношений ляпуновского типа. Обсуждается основное приложение общих результатов к центральной предельной теореме для взвешенных сумм, позволяющее получить скорость сходимости порядка O(1/n), а также рассмотреть рандомизацию широкого класса статистик, улучшающую их асимптотические свойства.

Е. М. Филичкина. Ветвящиеся случайные блуждания с одним центром генерации частиц и бесконечным числом поглощающих источников.

В последние годы активно развивается теория ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам. В докладе рассматривается новая модель таких процессов, когда, блуждая по решетке, начальная частица может поглотиться в каждой точке решетки и только в одной из них, например, в нуле она может также произвести потомство. Предполагается, что случайное блуждание, лежащее в основе процесса, симметрично, однородно по пространству и неприводимо, а все частицы-потомки эволюционируют по тому же закону независимо друг от друга. Выведены уравнения для производящих функций и моментов всей популяции частиц и численностей частиц в каждой точке решетки. Формально в правой части эволюционных уравнений для первых моментов возникает самосопряженный оператор с бесконечномерным точечным возмущением. Однако несложным преобразованием удается свети рассматриваемую задачу к задаче с одноточечным возмущением, которая детально изучена, например, в монографии Яровой (2007). Для нового оператора изучаются условия существования изолированного положительного собственного значения, но в отличие от всех проведенных ранее исследований, экспоненциальный рост численностей частиц в ВСБ будет наблюдаться, если полученное собственное значение будет превышать интенсивность поглощения частиц, которая в рассматриваемой модели предполагается равной в каждой точке решетки. В этом случае происходит регулярный рост моментов и доказывается слабая сходимость численностей частиц к некоторой случайной величине. Именно в такой ситуации можно говорить о “сильном” центре, в котором скорость размножения частиц позволяет достигнуть экспоненциального роста численности частиц на больших временах, несмотря на возможное поглощение в каждой точке.

А. А. Хартов. Квазибезгранично делимые распределения

Новый класс так называемых квазибезгранично делимых законов является естественным и очень значительным расширением класса безгранично делимых законов. Согласно определению вероятностный закон на вещественной прямой называется *квазибезгранично делимым*, если его характеристическая функция допускает представление Леви-Хинчина с некоторым вещественным параметром сдвига и с некоторой необязательно монотонной спектральной функцией, имеющей ограниченную вариацию на всей вещественной прямой. Несложно показать, что закон является квазибезгранично делимым в точности тогда, когда он *рационально безгранично делим*, т.е. его характеристическая функция есть отношение характеристических функций некоторых двух безгранично делимых распределений. Примеры таких законов встречались в хорошо известных классических монографиях Гнеденко и Колмогорова, Линника и Островского. Однако, определение и соответствующий класс были введены только в 2011 г. в одной работе Линднера и Сато в рамках некоторых задач теории случайных процессов. Недавно в статье Линднера, Пэна и Сато (Trans. Amer. Math. Soc., 370, 2018) был сделан первый большой анализ класса квазибезгранично делимых законов на основе представлений Леви-Хинчина. Сейчас данный класс активно изучается и находит свои приложения в других областях. В докладе будет сделан обзор основных определений и фактов связанных с этим классом, а также представлены некоторые новые результаты о критериях принадлежности к нему и о слабой сходимости.

И. Г. Шевцова. Дифференциальные преобразования характеристических функций и их свойства

В развитие идей Лукача (1970, Глава 12) вводятся некоторые интегральные преобразования конечных борелевских зарядов на прямой со смешивающими бета-распределениями и их суперпозиции. Эти преобразования определяются в терминах преобразований Фурье–Стилтьеса (характеристических функций) и обобщают хорошо известные преобразования смещения размера, квадрата, нулевого смещения, равновесное и симметричное равновесное преобразования вероятностных мер, причем не только за счет снятия ограничений на знакопостоянство меры, но и в части снятия моментных условий и ограничений на носитель. Изучаются свойства введенных преобразований, в частности, неподвижные точки и приводятся соответствующие предельные теоремы. Также приводятся возможные приложения полученных результатов к оценкам скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин методом Стейна и методом характеристических функций.

А. В. Шкляев. Сопровождающие блуждания для рекуррентных последовательностей

Рассмотрим последовательность

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n,\ n \geq 0,$$

где A_i – н.о.р. положительные случайные величины. Если бы мы потребовали независимость пар (A_i, B_i), то это была бы классическая модель, однако, в случае зависимых и разнораспределенных B_i мы сможем описать большие уклонения данной последовательности при достаточно широких условиях, связав их с уклонениями сопровождающего случайного блуждания $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, где $\xi_i = \ln A_{i-1}$, $i \geq 1$.

В докладе будут изложены основные результаты о такой связи. Упор будет сделан на применения к частным случаям: процессам в ветвлением в случайной среде. В этот обзор включены несколько классических моделей (в частности, ветвящийся процесс в случайной среде), несколько малоизвестных (в частности, двуполый ветвящийся процесс в случайной среде и максимальный ветвящийся процесс в случайной среде), а также приведем ряд моделей, которые, насколько нам известно, не вводились ранее (в частности, двуполый ветвящийся процесс со случайным механизмом паросочетания). Для данных моделей мы введем понятие сопровождающего случайного блуждания. В части моделей (в частности, однополом и двуполом ветвящемся процессе в случайной среде) такое блуждание вполне естественно, тогда как в моделях максимального ветвящегося процесса такого рода блуждание выглядит достаточно неожиданно. Основной упор будет сделан на асимптотику вероятностей больших уклонений, однако, в рамках того же подхода описываются и предельные теоремы в области нормальных уклонений.

Е. Б. Яровая. О методах исследования ветвящихся случайных блужданий

Доклад посвящен стохастическим процессам с непрерывным временем, которые могут быть описаны в терминах размножения, гибели и транспорта частиц. Такие процессы на многомерных решетках называют ветвящимися случайными блужданиями, а точки решетки, в которых может происходить рождение и гибель частиц — источниками ветвления. Особое внимание уделено анализу асимптотического поведения численностей частиц в каждой точке решетки и их моментов для ветвящихся случайных блужданий, в основе которых лежит симметричное, однородное по пространству, неприводимое случайное блуждание по решетке. Поведение моментов численностей частиц во многом определяется структурой спектра эволюционного оператора средних численностей частиц и требует для исследования ряда моделей привлечения спектральной теории операторов в банаховых пространствах. Будут рассмотрены два способа доказательства предельных теорем, один из которых основан на проверке условий, гарантирующих единственность определения предельного вероятностного распределения численностей частиц своими моментами, а другой — на аппроксимации нормированного числа частиц в точке решетки некоторым неотрицательным мартингалом (см., Н. В. Смородина и Е. Б. Яровая, 2022), позволяющий доказать сходимость этих величин к пределу в среднеквадратическом в достаточно общих предположениях на характеристики процесса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

П. А. Яськов. О теореме Марченко–Пастура для случайной тензорной модели

В докладе будут описаны неулучшаемые достаточные условия в теореме Марченко–Пастура для выборочных ковариационных матриц, отвечающих симметричным случайным тензорам, образованным $\binom{n}{d}$ различными произведениями d переменных, выбранных из n независимых стандартизированных случайных величин. Доказательства результатов будут основаны на новом неравенстве концентрации для квадратичных форм от симметричных случайных тензоров и новом законе больших чисел для элементарных симметрических случайных многочленов.

13 Теория чисел

Д. В. Адлер. Формы Якоби, эллиптический род и дифференциальные уравнения

Классические формы Якоби, изученные в известной книге Эйхлера и Загье, являются частным случаем форм Якоби, ассоциированных с системами корней. Они отвечают простейшей системе корней A_1. Известно, что эллиптический род многообразия Калаби–Яу является формой Якоби веса 0.

В своём докладе я расскажу о дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют эти формы, а также об аналогах уравнений Канеко–Загье для степеней тета-функций. Оказалось, что простейшее квазимодулярное дифференциальное уравнение выполняется для эллиптического рода трёхмерного многообразия Калаби–Яу. Помимо этого я расскажу о дифференциальных уравнениях базовых форм Якоби от многих переменных в случае систем корней D_n. Доклад основан на совместных работах с В. А. Гриценко.

Р. К. Ахунжанов. О критерии плохо приближаемых векторов

Сформулировано и доказано обобщение на многомерный случай критерия плохо приближаемых чисел.

Э. Р Бигушев. Диофантовы экспоненты решёток и рост многомерных аналогов неполных частных

Если число θ иррационально, оно раскладывается в бесконечную (обыкновенную) цепную дробь вида $\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ При этом его мера иррациональности есть величина

$$\mu(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall n_0 > 0 \;\exists\, n > n_0 : \left|\theta - p_n/q_n\right| \le |q_n|^{-\gamma}\right\}.$$

Существует классическое соотношение, связывающее $\mu(\theta)$ с ростом неполных частных:

$$\mu(\theta) = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}$$

(здесь $q_0, q_1, q_2, \dots$ - последовательность знаменателей подходящих дробей θ).

Если рассмотреть решётку

$$\Lambda = A\mathbb{Z}^2,$$

где $A = \begin{pmatrix} \theta_1 & -1 \\ \theta_2 & -1 \end{pmatrix}$ с различными действительными θ_1 и θ_2, то можно заметить, что мера иррациональности этих чисел в данном случае тесно связана с диофантовой экспонентой решётки, а именно:

$$\max\big(\mu(\theta_1), \mu(\theta_2)\big) = 2 + 2\omega(\Lambda).$$

Напомним, что *диофантовой экспонентой* решётки полного ранга называется величина

$$\omega(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, \infty\, \vec{x} \in \Lambda : \, |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n|^{1/n} \le |\vec{x}|^{-\gamma}\right\}.$$

Таким образом, получим:

$$\omega(\Lambda) = \frac{1}{2} \max\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log a^{\theta_1}_{n+1}}{\log q^{\theta_1}_n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a^{\theta_2}_{n+1}}{\log q^{\theta_2}_n}\right).$$

В данном докладе будет показана геометрическая интерпретация аналога неполных частных a_n, а основная часть будет посвящена трёхмерной вариации неравенства

$$\omega(\Lambda) \leqslant \frac{1}{2} \max\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}^{\theta_1}}{\log q_n^{\theta_1}}, \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}^{\theta_2}}{\log q_n^{\theta_2}} \Big).$$

К. М. Бобков. Двоичные записи чисел, свободных от k-ых степеней

В докладе мы установим существование чисел, свободных от k-ых степеней и имеющих большую долю единиц в двоичной записи. Мы будем использовать результаты о интервалах между свободными от k-ых степеней числами, включая результаты М. Филасеты и О. Трифонова о существовании свободных от k-ых степеней числах в коротких промежутках и результаты Р. М. Нуньеса о моментах распределения свободных от k-ых степеней чисел на коротких интервалах.

Г. В. Воскресенская. Эта-функция Дедекинда: три направления исследований

В докладе планируется рассказать о проблемах и результатах исследований, использующих свойства эта-функций Дедекинда. Существенную роль в них играют описанные в 1985 году эта-произведения с мультипликативными коэффициентами (функции МакКея).

Первое направление - это изучение структуры пространств модулярных форм методом рассечения, то есть представления их в виде $f(z)W \oplus U$, где $f(z)$ — некоторая модулярная форма, W — пространство модулярных форм меньшего веса, U — дополнительное пространство. Если $U = \{0\}$, то рассечение называется точным. Доказаны теоремы о точном рассечении и о природе дополнительных пространств.

Второе направление - исследование фрейм-соответствия, то есть сопоставление элементам конечной группы эта-произведений с помощью линейных представлений. Основы этой теории заложены Дж Мейсоном . Основные результаты касаются описания конечных групп, ассоциированных с функциями МакКея.

Третье направление связано с арифметической интерпретацией коэффициентов эта - произведений. Особое внимание мы уделим суммам Шимуры.

М. Р. Габдуллин. Числа, удалённые от простых

Обозначим через $F(n)$ расстояние от натурального n до ближайшего простого числа. В 2015 г. К. Форд, Д.Р. Хизбраун и С.В. Конягин ввели понятие «удалённости от простых чисел»: число n называется удалённым от простых с константой c, если

$$F(n) \geqslant c\frac{(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln\ln\ln n)}{(\ln\ln\ln n)^2}.$$

В работе трёх авторов доказано, что для любого натурального k существуют постоянная $c = c(k) > 0$ и бесконечно много точных k-х степеней, являющихся удалёнными от простых с постоянной c. Позднее Х. Майер и М. Рассиас распространили этот результат на точные k-е степени простых чисел, при этом улучшив по порядку оценку снизу на расстояние до простых.

Используя метод из недавней прорывной работы К. Форда, С. В. Конягина, Дж. Мэйнарда, К. Померанса и Т. Тао о последовательных составных значениях многочленов, мы доказываем следующую теорему.

Каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде $N = n_1 + n_2$, где

$$F(n_i) \geqslant (\ln N)(\ln\ln N)^{1/325565}, \quad i = 1, 2.$$

А. С. Гаспарян. Многомерные определители над значениями дзета-функции Римана

Вводится понятие полиганкелевой матрицы и рассматриваются полиганкелевы определители, составленные из значений кратных рядов Дирихле. Получены общие формулы для названных многомерных определителей. В частном случае ряда Дирихле от одной переменной $F(s) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m)m^{-s}$ имеем многомерные ганкелевы определители той или иной сигнатуры $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \{0, 1\}^p$:

$$H^{\sigma}_{p,n,r}(F) = |F(i_1 + \cdots + i_p + r)|^{\sigma}$$

Например, при $p = 2k$ и $\sigma = (1, \ldots, 1)$ имеет место формула

$$H^{(1,\ldots,1)}_{2k,n,r}(F) = \frac{1}{n!} \sum_{m_1,\ldots,m_n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{f(m_i)}{m_i^{2kn+r}} \prod_{i<j} (m_i - m_j)^{2k}.$$

Случай $k = 1$ принадлежит Monien (2009).

О. Н. Герман. Аналог теоремы переноса Малера для мультипликативных диофантовых приближений

Для каждого параллелепипеда

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |z_i| \leqslant \eta_i,\ i = 1, \ldots, d \right\}$$

с положительными $\eta_1, \ldots, \eta_d$ определён его *псевдоприсоединённый* параллелепипед как

$$\mathcal{P}^* = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |z_i| \leqslant \frac{1}{\eta_i} \prod_{j=1}^{d} \eta_j,\ i = 1, \ldots, d \right\}.$$

Знаменитая теорема Малера о билинейной форме, из которой следуют многие классические неравенства переноса в теории диофантовых приближений, допускает следующую довольно компактную переформулировку: *для любой решётки* Λ *с определителем* 1 *справедливо*

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies (d-1)\mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\},$$

где Λ^* *обозначает двойственную решётку, а* $\mathbf{0}$ *— начало координат.*

Доклад посвящён формулировке аналога этой теоремы, который позволяет доказывать неравенства переноса для *мультипликативных* диофантовых приближений.

С. А. Гриценко, А. К. Эминян. Бинарная аддитивная задача с простыми числами специального вида

В 1940 г. И.М. Виноградов получил для $\pi_2(N)$ — числа простых чисел, не превосходящих N и лежащих в промежутках $((2n)^2,\, (2n+1)^2)$ при натуральных n — следующую формулу

$$\pi_2(N) = \frac{\pi(N)}{2} + O(N^{1-0,1+\varepsilon})$$

(И.М. Виноградов, *Некоторое общее свойство распределения простых чисел*, Матем. сб., 1940, т.7, с. 365–372).

Обозначим множество простых чисел из промежутков $((2n)^2,\, (2n+1)^2)$ буквой V. В 1980–1990 гг. первый автор решил тернарную проблему Гольдбаха и проблему Варинга–Гольдбаха с простыми числами из множества V (С.А. Гриценко, *Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Варинга–Гольдбаха с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида*, УМН, 1988, т. 43, вып. 4(262), с. 203–204; С.А. Гриценко, *Три аддитивные задачи*, Изв. РАН. Сер. матем., 1992, т. 56, вып. 6, с. 1198–1216). Перечисленные задачи решаются круговым методом по схеме решения тернарной задачи на основе оценок тригонометрических сумм специального вида.

В докладе будет представлено решение проблемы делителей Титчмарша с простыми числами из множества V. Указанная задача не является тернарной и не может быть решена по схеме решения тернарной задачи.

Н. М. Добровольский. Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов

В докладе будут даны оценки сверху и снизу меры качества оптимальных коэффициентов через сумму по множеству Быковского. Множество Быковского было определено в 2002 г. В. А. Быковским и состоит из минимальных решений линейного сравнения с оптимальными коэффициентами.

Н. Н. Добровольский. О двумерных решётках сравнений

В докладе с помощью теории наилучших приближений второго рода описано множество Быковского, состоящее из локальных минимумов решётки приближений Дирихле для рационального числа. В явном виде описано множество Быковского для двумерной решётки решений линейного сравнения. Получена формула, выражающая гиперболический параметр этой решётки через знаменатели подходящих дробей и скобки Эйлера и позволяющая вычислять его за $O(\ln N)$ арифметических операций.

В. Г. Журавлёв. Разбиения и цепные дроби

Обсуждаются пространственные ядерные разбиения, являющиеся естественным языком описания многомерных цепных дробей. Такие разбиения допускают многочисленные симметрии и всевозможные их обобщения. Перекладывающиеся ядра задают динамику разбиений, локальные правила и комбинаторику разбиений, что позволяет выявить неизвестные свойства целого класса диофантовых приближений.

А. А. Илларионов. Гиперэллиптические последовательности и асимметричные криптосистемы

Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле (возможно конечное). Мы рассматриваем вопрос о существовании последовательностей $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{F}$, удовлетворяющих разложениям вида

$$A_{m+n}A_{m-n} = a_1(m)b_1(n) + a_2(m)b_2(n),$$
$$A_{m+n+1}A_{m-n} = \tilde{a}_1(m)\tilde{b}_1(n) + \tilde{a}_2(m)\tilde{b}_2(n),$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}$. Полученные результаты используются для построения аналогов алгоритмов Диффи–Хеллмана и Эль-Гамаля, в которых задача дискретного логарифмирования ставится в группе $(S, +)$, где множество S состоит из четверок вида $S(n) = (A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2})$, $n \in \mathbb{Z}$, а $S(n) + S(m) = S(n+m)$.

А. Б. Калмынин. Простые делители сдвинутых полиномиальных последовательностей

Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Мы обсудим свойства функции

$$j_f(N) = \max_m\{m : \text{Для некоторого } x \in \mathbb{N} \text{ неравенство } (x + f(i), N) > 1 \text{ выполнено для всех } i \le m\},$$

являющейся обобщением функции Якобсталя. Будет доказана нижняя оценка

$$j_f(P(y)) \gg y(\ln y)^{\ell_f - 1} \left(\frac{\ln\ln^2 y}{\ln\ln\ln y}\right)^{h_f} \left(\frac{\ln y \ln\ln\ln y}{\ln\ln^2 y}\right)^{M(f)},$$

где $P(y)$ — произведение всех простых $p \le y$, ℓ_f — количество различных линейных делителей $f(x)$, h_f — число различных неприводимых нелинейных делителей $f(x)$, а $M(f)$ — величина, зависящая от свойств f как отображения $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$.

И. Д. Кан. Гипотеза Зарембы и круговой метод

В настоящей работе рассматривается множество $\mathfrak{D}_\mathbf{A}$ несократимых знаменателей рациональных чисел, представимых конечными цепными дробями, все неполные частные которых принадлежат некоторому конечному числовому алфавиту $\mathbf{A}$. Пусть множество бесконечных цепных дробей с неполными частными из этого алфавита имеет хаусдорфову размерность $\Delta_\mathbf{A}$, удовлетворяющую неравенству

$$\Delta_\mathbf{A} > (\sqrt{40} - 4)/3 = 0.7748\ldots.$$

Тогда $\mathfrak{D}_\mathbf{A}$ содержит почти все натуральные числа, причём остаточное слагаемое этой формулы имеет степенное понижение по отношению к главному.

Д. В. Коледа. О распределении вещественных алгебраических чисел, целых и нецелых

Доклад посвящён статистическому поведению алгебраических чисел на вещественной оси. Мы поговорим об асимптотике количества алгебраических чисел фиксированной степени, лежащих в заданном промежутке вещественной оси, когда верхняя граница их высот неограниченно растёт. Будут обсуждаться сходства и различия в поведении целых алгебраических чисел и алгебраических чисел общего вида.

П. А. Кучерявый. О числах, не представимых в виде суммы $n + w(n)$

Пусть $w(n)$ – аддитивная неотрицательная арифметическая функция, такая, что $w(p) = 1$ для всех простых чисел p. Рассмотрим $\Xi(N)$ — количество чисел меньших N, не представимых в виде $n + w(n)$. Будет получена оценка

$$\Xi(N) \gg \frac{N}{\log\log N}.$$

Для этого изучается распределение $n+w(n)$ по модулю простого числа p методом комплексного интегрирования.

Ю. В. Нестеренко. Алгебраическая независимость и квазимодулярные формы

Практически каждое доказательство в теории трансцендентных чисел использует исключение переменных. Это относится к классическим результатам о трансцендентности e (Ш. Эрмит), к алгебраической независимости значений так называемых E-функций (К. Зигель и А.Б. Шидловский), к решению 7-й проблемы Гильберта (А. О. Гельфонд, Т. Шнейдер). Все эти утверждения использовали либо исключение переменных с помощью однородных линейных форм, либо исключение одной переменной с помощью двух многочленов от неё. Ещё в начале 50-х гг. прошлого века А. О. Гельфонд указывал на необходимость развития общей теории исключения применительно к задачам о трансцендентности и алгебраической независимости чисел. Цель настоящего доклада — привлечь внимание слушателей к реализации этого пожелания Гельфонда, а также к некоторым результатам, полученным в последующие годы с его помощью.

Пусть K – конечное расширение поля рациональных чисел. Для каждого однородного несмешанного идеала I кольца $R = K[x_0, x_1, \dots, x_m]$ с помощью формы Чжоу этого идеала можно определить ряд его характеристик: *размерность* (проективная размерность $\dim I$ многообразия $V(I)$ нулей идеала I), *степень* $\deg\,(I)$ идеала (количество точек пересечения многообразия нулей I с общим линейным пространством дополнительной размерности), *логарифмическую высоту* $h(I)$ и *проективное расстояние* $\varrho(\omega, I)$ от произвольной точки ω проективного m-мерного пространства над полем комплексных чисел до многообразия $V(I)$. Три последние характеристики аналогичны соответствующим характеристикам для многочленов. В частности, они ведут себя почти линейно при разложении I в пересечение примарных компонент. Процесс исключения переменных можно реализовать как индуктивную оценку снизу в зависимости от величин $\dim\, I$, $\deg\,(I)$, $h(I)$ величины расстояния $\varrho(\omega, I)$. Индукция проводится по размерности идеала. В частности, получаемая в конце индукции, такая оценка для главных идеалов позволяет получить оценку снизу для многочленов — их образующих и доказать, что эти многочлены в точке ω отличны от нуля. Другими словами, координаты точки ω однородно алгебраически независимы над K. Мы укажем ряд конкретных примеров, связанных с такой схемой рассуждений в случае квазимодулярных форм.

У. М. Пачев. О диофантовых системах с квадратичной и линейной формами удовлетворяющих конгруэнциальному условию

Доклад состоит из двух частей. В первой из них рассматривается вопрос о представлении пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэциальным условием. Точнее, речь идёт об асимптотике числа решений диофантовой системы:

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_s) = m, \\ l(x_1, \dots, x_s) = n, \\ (x_1, \dots, x_s) \equiv (b_1, \dots, b_s) \pmod{g}, \end{cases}$$

где

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i,j=-1}^{s} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

— целочисленная положительная квадратичная форма от s переменных, причём $s \geqslant 5$;

$$l(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=-1}^{s} l_i\, x_i$$

— целочисленная линейная форма; $m > 0$, n —целые числа.

Нас интересует число решений $r_{g;\, b_1,\dots,b_s}(f,\, m; l,\, n)$ этой системы.

Вторая часть доклада относится к диофантовой системе вида:

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_s^2 = m, \\ l_1\, x_1 + \dots + l_s\, x_s = n, \\ (x_1, \dots, x_s) \equiv (l_1, \dots, l_s) \pmod{g}, \end{cases}$$

содержащей сумму квадратов переменных и при этом конгруэнциальное условие имеет специальный вид. Отдельное рассмотрение такой системы обусловлено тем, что для неё удаётся вычислить особый ряд. Завершается доклад постановкой нерешённых вопросов по данной теме и списком литературы.

Н. К. Семёнова. Решето Виноградова и короткие суммы Клоостермана

Неполной взвешенной суммой Клоостермана называется тригонометрическая сумма вида

$$S(x, m; a, b) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu, m)=1}} f(\nu) \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu} + b\nu}{m}\Big), \quad 1 < x < m,$$

где $1 < x < m$, m, a, b – целые числа, а через $\overline{\nu}$ обозначается вычет, обратный к ν по модулю m: $\nu\overline{\nu} \equiv 1 \pmod{m}$. Оценкам таких сумм при различных условиях на m, x, a, b посвящены работы А. А. Карацубы, М. А. Королёва, М. З. Гараева, Ж. Бургейна.

В докладе будет рассказано об уточнении оценки неполной суммы Клоостермана за счёт применения так называемого решета Виноградова. Полученная оценка справедлива для простого модуля $m \geqslant m_0$ и целого a, $(a, m) = 1$, в случае, когда длина суммы x удовлетворяет неравенствам

$$\exp(c(\log m)^{5/6}(\log\log m)^{1/6}) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}, \quad c > 0.$$

И. А. Тлюстангелов. Циклические симметрии многомерных цепных дробей

Для понятия классической цепной дроби действительного числа известно несколько обобщений, одно из которых основывается на геометрической интерпретации цепной дроби, предложенной Ф. Клейном. А именно, пусть $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Объединение выпуклых оболочек точек $\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ внутри этих симплициальных конусов называется $(n-1)$-мерной цепной дробью. Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах любая $(n-1)$-мерная алгебраическая цепная дробь, соответствующая вполне вещественному расширению поля $\mathbb{Q}$ степени n, обладает богатой группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрий, действие которой сохраняет каждое из подпространств $l_1, \ldots, l_n$. Однако, у $(n-1)$-мерной алгебраической цепной дроби могут существовать и дополнительные $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрии, называемые палиндромическими. Такие симметрии нетождественным образом переставляют подпространства $l_1, \ldots, l_n$. В данном докладе показывается, что для любого целого $n > 1$ существует $(n-1)$-мерная алгебраическая цепная дробь, обладающая палиндромическими симметриями.

А. В. Устинов. Тропические последовательности Сомоса

Для целого $k \geq 4$ последовательностью *Сомос–k* называется последовательность, задаваемая квадратичным рекуррентным соотношением

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j s_{n+k-j}s_{n+j},$$

где α_j — константы, s_0, …, s_{k-1} — начальные условия. Оказывается, что некоторые последовательности Сомоса являются целочисленными. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты последовательности Сомос–k при $k = 4, 5, 6, 7$ оказываются полиномами от начальных условий. При попытке изучать свойства этих полиномов, например, рост степеней, возникает необходимость рассматривать тропические аналоги последовательностей Сомоса. О них и пойдёт речь в докладе.

В. Н. Чубариков. О системах счисления и их обобщениях

В сообщении формулируются теоремы о разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел, по последовательности Фибоначчи и по целочисленной последовательности, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям и связанной с числами Пизо–Виджаяраргхавана. Особое внимание обращено на «явные формулы» и условия единственности таких представлений. Отметим, что единственность разложения действительного числа по обратным значениям мультипликативной системы позволяет получить оценку остатка для некоторых значений показательной функции.

Разложения чисел по последовательности обратных чисел Фибоначчи существенно использует их представление через степени «золотого сечения». Системы чисел, связанные с числами Пизо–Виджаяраргхавана рассмотрены менее подробно, поскольку требуется конкретизировать свойства рассматриваемых чисел.

Ю. Н. Штейников. О некоторых задачах связанных с произведением и частных числовых множеств

Пусть имеется множества $A, B \subset [1, Q]$. Мы рассматриваем задачи, связанные с оценками на размер множества произведений AB и частных A/B. Будет дан обзор имеющихся и некоторых современных результатов и их приложений.

А. В. Шутов. О числах с заданным окончанием разложения в обобщённые системы счисления Фибоначчи

Каждое натуральное число можно разложить в систему счисления Фибоначчи:

$$n = \sum_k \varepsilon_k F_k, \quad \text{где} \quad \varepsilon_k \in \{0, 1\} \quad \text{и} \quad \varepsilon_k \varepsilon_{k+1} = 0.$$

Данное разложение можно обобщить, заменив последовательность Фибоначчи на более общую линейную рекуррентную последовательность, либо на последовательность знаменателей подходящих дробей к некоторому иррациональному числу (второй вариант часто называют разложением Островского).

В докладе будут рассмотрены множества натуральных чисел с заданным окончанием подобных разложений. Среди рассматриваемых задач: плотности этих множеств, разности между соседними элементами таких множеств, распределение простых в этих множествах.

Основным инструментом доказательства служит связь между данными множествами и распределением дробных долей линейной функции на торе.

В. В. Юделевич. Проблема делителей Карацубы и родственные задачи (по совместной работе с С. В. Конягиным и М. Р. Габдуллиным.)

В докладе пойдёт речь о доказательстве оценок

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{\tau(p-1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \sum_{n \le x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}},$$

и их обобщений. Здесь значок $\asymp$ обозначает символ Харди, $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ — количество делителей числа n, а суммирование в первой сумме ведётся по подряд идущим простым числам.

14 Уравнения с частными производными

Ю. В. Авербух. Аппроксимация решений уравнения Беллмана для задач управления средним полем

В докладе рассматривается задача управления средним полем, моделирующая движение большой группы агентов с динамикой

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), m(t), u(t)), \quad t \in [0, T], x(t) \in \mathbb{T}^d, m(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), \quad u \in U.$$

Здесь $\mathbb{T}^d$ обозначает d-мерный тор, $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ – пространство вероятностей на торе, снабженное метрикой Канторовича. Также $m(t)$ обозначает распределение всех агентов в момент времени t. Подход управления средним полем предполагает, что агенты выбирают свое управление независимо, но действуют кооперативно, стремясь минимизировать величину $\sigma(m(T))$.

Отметим, что в данном случае в качестве позиции выступает вероятность, описывающая распределение агентов.

Основным объектом исследования является функция цены $\mathrm{Val}(t_0, m_0)$, которая сопоставляет начальному моменту времени t_0 и начальному распределению агентов m_0 значение $\sigma(m(T))$ при оптимальном управлении. Эта функция должна удовлетворять уравнению Беллмана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(t, m, \nabla_m \varphi) = 0,$$

где $\nabla_m \varphi$ – производная функции φ по m.

В докладе рассматривается построение приближений функции цены решениями конечномерных уравнений типа Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + \mathcal{H}(t, \mu, \nabla_\mu \phi) = 0,$$

где μ — элемент некоторого конечномерного симплекса Σ, $\phi : [0, T] \times \Sigma \to \mathbb{R}$. Отметим, что конечномерное уравнение Гамильтона–Якоби возникает как уравнение Беллмана в некоторой конечномерной задаче управления, интерпретируемой как задача управления средним полем с конечным числом состояний.

Х. Али. Отсутствие нетривиальных решений Комплекснозначных полулинейных эллиптических неравенств 2-порядка

Данный доклад посвящён проблеме отсутствия решения для полулинейных неравенств второго порядка с ограниченными коэффициентами и комплексными значениями. Также в данном докладе рассматривается частный случай их.

Актуальность данной темы заключается в том, что мы расширим результаты для n-мерного вещественного пространства на n-мерное комплексное пространство.

В результате получаем условие отсутствия глобального нетривиального слабого решения данной задачи. Полученные результаты доказаны методом пробных функций.

В. Б. Васильев. Эллиптические уравнения, модельные области и краевые задачи

Отправной точкой исследования служит модельное псевдодифференциальное уравнение в конусе $C \subset \mathbb{R}^m$

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad x \in C, \tag{1}$$

где $A : H^s(C) \to H^{s-\alpha}(C)$ – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Конкретный конус C обладает определенными параметрами, например, угол на плоскости $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ имеет "раствор" a, а пространственный конус $C_+^{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + |x_2|, a, b > 0\}$ имеет 2 параметра a, b. Представляется интересным и естественным выяснить, что произойдет с решением уравнения (1) (в том случае, когда оно существует и единственно), когда некоторые параметры стремятся к своим предельным значениям 0 или ∞. Получены ответы на некоторые из этих вопросов.

Можно рассмотреть дискретный вариант уравнения (1) с помощью следующих конструкций для функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$. Пусть $C_d = h\mathbb{Z}^m \cap C$, $\hbar = h^{-1}$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ и $\tilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция, определенная на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ в дискретном конусе C_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} h^m \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_d,$$

где $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначает дискретное преобразование Фурье функции u_d.

Можно определить дискретный аналог H^s-пространств и для специального случая $C = \mathbb{R}_+^m$ получить условия разрешимости для дискретного аналога уравнения (1). Показано, что дискретные решения обладают аппроксимационными свойствами при малых h. Аналогичные результаты получены для дискретного квадранта на плоскости.

Л. В. Гаргянц. О локально ограниченных решениях одномерных законов сохранения с несимметричной функцией потока

В полосе $\Pi_T = \{(t,\, x) \mid t \in (0,\, T),\ x \in \mathbb{R}\}$, где $0 < T \le +\infty$, рассматривается задача Коши

$$u_t + (f(u))_x = 0,\ (t,\, x) \in \Pi_T, \qquad u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Функция потока $f(u)$ предполагается строго выпуклой вверх на отрицательной полуоси и выпуклой вниз — на положительной.

Строятся локально ограниченные решения задачи (7) со счетным числом линий сильного разрыва. Полуплоскость $t > 0$ делится гладкими непересекающимися кривыми $\Gamma_n = \{x = \gamma_n(t), t > 0\}$ на счетное число областей. Функциональная последовательность $\gamma_n(t)$ является неограниченно монотонно убывающей, а также $\lim_{t\to+0} \gamma_n(t) = -\infty$. В областях $D_n = \{\gamma_{n-1}(t) > x > \gamma_n(t)\}$ между этими кривыми решение является классическим, а каждая из кривых Γ_n является линией сильного разрыва, причем со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n при $n \in \mathbb{N}$. Для $n = 0$ лишь часть ударной волны Γ_0 образуется как огибающая семейства характеристик, идущих от начальных условий.

А. А. Дончак. Математическая модель Гамма–Грек опциона на основе уравнения реакции-диффузии

С помощью краевой задачи для уравнения диффузии-реакции, рассматриваемого в четырехмерной ограниченной области, строится математическая модель Гамма–Грек опциона, содержащего четыре актива. Доказывается разрешимость краевой задачи, устанавливается принцип максимума и минимума. Доказывается разрешимость задачи мультипликативного управления. В случае, когда функционал качества дифференцируем по Фреше, выводится система оптимальности. На основе ее анализа устанавливается стационарный аналог принципа bang-bang. Исследуется полулинейный аналог модели, предполагающий зависимость понижающего коэффициента от решения краевой задачи.

А. В. Звягин. Разрешимость одной модели нелинейно–вязкой среды

В работе исследуется проблема существования слабого решения начально–краевой задачи для математической модели, описывающей течение линейно упруго–запаздывающей жидкости Фойгта. В данной модели рассматривается среда с нелинейной вязкостью и временем запаздывания среды, зависящим от температуры. На основе аппроксимационно-топологического подхода доказывается существование слабого решения изучаемой задачи.

А. Л. Казаков. Решения типа диффузионных волн для нелинейных параболических уравнений и систем

Рассматриваются нелинейные эволюционные параболические уравнения и системы, общий вид которых

$$\mathbf{U}_t = [\boldsymbol{\Xi}_1(\mathbf{U})]_{xx} + \boldsymbol{\Xi}_0(\mathbf{U}). \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ – вектор искомых функций; t, x – независимые переменные (t – время, x – пространственная координата); $\boldsymbol{\Xi}_0, \boldsymbol{\Xi}_1$ – заданные n-компонентные вектор-функции, которые предполагаются достаточно гладкими, причем $\Xi_{1,i} = \Xi_{1,i}(u_i)$, т.е. система в главной части покомпонентно распадается. Система (8) является обобщенной математической моделью ряда тепловых, фильтрационных и диффузионных процессов. Так, ее частными случаями являются известное уравнение нелинейной теплопроводности (porous medium equation), системы реакции-диффузии и некоторые другие уравнения математической физики.

Для вырождающейся системы (8) и ее частных случаев строятся и исследуются решения, имеющие тип тепловой (диффузионной, фильтрационной) волны, распространяющейся с конечной скоростью нулевому (абсолютно покоящемуся) фону вдоль некоторой достаточно гладкой кривой, именуемой фронтом волны. Здесь тип уравнений (систем) вырождается, решения теряют гладкость (при сохранении непрерывности). В докладе будут представлены теоремы существования и единственности решений рассматриваемого вида, а также получены и изучены точные решения, построение которых сводится к интегрированию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

А. В. Коптев. Метод решения 3D уравнений Навье–Стокса

Рассматриваются 3D уравнения Навье–Стокса для движения несжимаемой среды. Предложен метод построения решений. Метод основан на приведении уравнений системы к дивергентному виду и последующим интегрированием каждого из них. В результате появляются соотношения связи между основными и новыми ассоциированными неизвестными, преобразуя которые приходим к промежуточным этапам при реализации метода. Первый это интеграл исходных уравнений и второй — генератор решений. Генератор решений позволяет строить новые решения 3D уравнений Навье–Стокса, априори удовлетворяющие дополнительным условиям.

Е. И. Костенко. Исследование слабой разрешимости одной дробной модели с бесконечной памятью

В области $Q = (-\infty, T] \times \Omega, T > 0$, Ω — ограниченная область с гладкой границей рассматривается задача, описывающая движения вязкоупругой среды с бесконечной памятью вдоль траекторий частиц жидкости, определяемых полем скоростей. Уравнение движения среды представляет собой уравнение Навье-Стокса с добавлением интегрального члена, отвечающего за память среды. Основным результатом работы является доказательство существования по крайней мере одного слабого решения рассматриваемой задачи, где в качестве решения понимается скорость рассматриваемой среды. При доказательстве основного результата возникают трудности, поскольку поле скоростей, вообще говоря, не определяет траекторию движения частиц жидкости в данном случае. Для их преодоления была использована теория регулярных Лагранжевых потоков и регуляризация $S_{\frac{1}{m}}$. А для доказательства существования решения применялся аппроксимационно-топологический метод для уравнений гидродинамики, теория топологической степени уплотняющих векторных полей.

П. А. Кузнецов. Об одной краевой задаче для нелинейной вырождающейся параболической системы «хищник-жертва»

В докладе исследована разрешимость краевой задачи вида

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1(uv_{xx} + v_x u_x) + f(u, v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x) + g(v, u). \tag{9}$$

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \tag{10}$$

Здесь u, v — искомые функции, f, g, a — известные достаточно гладкие функции, причем $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ и $a'(0) \neq 0$.

Система (9) лежит в основе модели «хищник-жертва». Параболический тип системы вырождается при $u, v = 0$, при этом становится возможным существование решений с нулевыми фронтами (границами ореолов обитания хищников и жертв), имеющими конечную скорость распространения. Краевые условия (10) подразумевают, что границы ореолов обитания известны и изменяются по закону $x = a(t)$. Для задачи (9), (10) доказана теорема существования и единственности аналитического решения. Решение построено в виде ряда по степеням $z = x - a(t)$, коэффициенты определяются рекуррентно. Сходимость доказывается методом мажорант. Также представлены некоторые точные решения задачи (9), (10), полученные с помощью редукции ее к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, наследующей вырождение системы (9).

Е. В. Мартынов. Обратная задача, для обобщенного уравнения Кавахары

В работе рассматривается обратная начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары:

$$u_t - u_{xxxxx} + \sum_{j=0}^{4} a_j \partial_x^j u + (F(u))_x = f(t,x), \tag{11}$$

$u = u(t,x)$, $a_j, b \in \mathbb{R}$, на прямоугольнике $Q_T = (0,T) \times (0,R)$, где $T, R > 0$. с начальным условием:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,R], \tag{12}$$

и граничными условиями:

$$\begin{gathered} u(t,0) = \mu(t), \quad u(t,R) = \nu(t), \\ u_x(t,0) = \theta(t), \quad u_x(t,R) = h(t), \\ u_{xx}(t,R) = \sigma(t), \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{13}$$

Функция $F(u) \in C^1(\mathbb{R})$ удавлетворяет условию ограничения роста:

$$\mid F(u) \mid \leq c \mid u \mid^q, \tag{14}$$

где $c > 0$ и $1 < q < 6$.

Условие переопределения заданно в интегральном виде:

$$\int_0^R u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

где ω и φ некоторые заданные функции. В качестве управления выбирается либо функция σ, либо правая часть уравнения f специального вида.

Основной результат работы: условия разрешимости двух задачь управляемости:

Задача 1.При известных функциях $u_0, \mu, \nu, \theta, h, f$, необходимо найти функцию σ такую, чтобы решение задачи (11)-(13) удовлетворяло условию (15).

Задача 2. При известных функциях $u_0, \mu, \nu, h, \theta, \sigma, g$, необходимо найти функцию $\widetilde{f}$, такую, чтобы решение задачи (11)-(13) удовлетворяло условию (15).

А. А. Панин, М. О. Корпусов, И. К. Каташева. Мгновенное разрушение versus локальная разрешимость задачи Коши для уравнения полупроводника в магнитном поле

Для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 u + \sigma_1 \Delta_2 u + \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = |u|^q$$

в зависимости от начальных данных и параметров уравнения получены результаты об: отсутствии решения, локальной разрешимости (с оценкой времени разрушения) и глобальной разрешимости.

Е. Ю. Панов. Об автомодельных решениях многофазной задачи Стефана

Рассматривается задачи Стефана для уравнения $u_t = (a(u)u_x)_x$ с кусочно-постоянным коэффициентом диффузии $a(u) \equiv a_k^2 > 0$ при $u_k < u < u_{k+1}$, $k =$

$0, \ldots, n$, где $u_- = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < u_{n+1} = u_+$. Задаётся начальное условие Римана $u(0,x) = \begin{cases} u_-, & x < 0 \\ u_+, & x > 0 \end{cases}$ и условие Стефана на линиях $x = x_k(t)$ раздела фаз (где $u = u_k$):

$$d_k \dot{x}_k + (a(u)u_x)(t, x_k(t)+) - (a(u)u_x)(t, x_k(t)-) = 0, \quad d_k \geq 0, \ k = 1, \ldots, n.$$

Решение указанной задачи автомодельно: $u = v(x/\sqrt{t})$ и функция $v(\xi)$ имеет вид

$$v(\xi) = u_k + (u_{k+1} - u_k)(F(\xi/a_k) - F(\xi_k/a_k))/(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)), \ \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}), k = 0, \ldots, n,$$

где $-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \xi_{n+1} = +\infty$, а $F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-s^2/4} ds$ – функция ошибок. Считаем, что $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Условия Стефана на линиях $x = \xi_k \sqrt{t}$ раздела фаз сводится к требованию, что вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является критической точкой функции

$$E(\bar{\xi}) = -\sum_{k=0}^{n} (a_k)^2 (u_{k+1} - u_k) \ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) + \sum_{k=1}^{n} d_k \xi_k^2/4$$

в области $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n$. Нетрудно проверить, что множества $E \leq \mathrm{const}$ компактны и что функция E строго выпукла. Поэтому, существует точка минимума функции $E(\bar{\xi})$, являющаяся единственной её критической точкой. Нахождение точки минимума позволяет однозначно восстановить свободные границы $\xi = \xi_k$ и, тем самым, эффективно решить нашу задачу.

Е. М. Рудой. Многомасштабный анализ стационарных колебаний термоупругого композитного материала

Изучается задача о стационарных колебаниях термоупругого волокнистого композита в рамках двухмерной теории упругости. Задача содержит два малых положительных параметра δ и ε, которые описывают толщину волокна и расстояние между двумя соседними волокнами, соответственно. Опираясь на вариационную формулировку проблемы, с помощью современных методов асимптотического анализа, исследуется поведение решений при стремлении указанных параметров к нулю. В результате строятся две модели для каждого предельного случая. А именно, сначала, при $\delta \to 0$ мы получаем предельную модель, в которой включения являются тонкими (нулевой ширины). Затем, на основе первой предельной модели, при $\varepsilon \to 0$ мы получаем гомогенизированную модель, которая описывает эффективное поведение в макроскопической шкале, то есть в масштабе, где нет необходимости принимать во внимание каждое отдельное включение.

Работа выполнена совместно с С. А. Саженковым, И. В. Фанкиной и А. И. Фурцевым и поддержана Российским научным фондом (грант № 22-21-00627).

Ю. Г. Рыков. Процессы концентрации в двумерной системе уравнений газовой динамики без давления

Характерным свойством обобщенных решений системы уравнений газовой динамики без давления в многомерном случае является возникновение сильных особенностей на многообразиях разной размерности. Это свойство обозначим как существование иерархии особенностей. Оказывается, что в двумерном случае иерархию особенностей можно описать единообразно, в форме вариационного принципа. А именно, существует такой вектор-функционал на множестве областей в координатах Лаграгнжа, что равенство нулю определенной особым образом вариации приводит к построению решения в форме концентрации вещества (δ-функции) на кривых в координатах Эйлера. Совпадение значений функционала для, например, случая существования двух “тяжелых” кривых, ведет к образованию точечной особенности (δ-функции в точке). Данное построение является прямым обобщением известного вариационного принципа в одномерном случае.

С. А. Саженков. Импульсное уравнение теплопроводности с инфинитезимальным переходным слоем Вольтерра

Изучается задача Коши для уравнения теплопроводности с нелокальным по времени интегральным младшим членом, который моделирует эффект затухающей памяти и имеет вид свертки нелинейной функции от решения с гладким ядром релаксации. Ядро релаксации содержит малый параметр $\varepsilon > 0$ и при стремлении этого параметра к нулю слабо* сходится к дельта-функции Дирака, сконцентрированной в некотором моменте времени $t = \tau$. В свою очередь, дельта-функция Дирака моделирует ударное (импульсное) усилие в момент $t = \tau$. Мы устанавливаем, что при $\varepsilon \to 0$ формируется переходный импульсный слой, ассоциированный с дельта-функцией Дирака, и что семейство слабых решений рассматриваемой задачи сходится к решению двухмасштабной модели, которая состоит из двух уравнений, начального условия и условий согласования, так что «внешнее» макроскопическое решение за пределами переходного слоя определяется на макроскопической («медленной») временной шкале и является решением классического однородного уравнения теплопроводности, в то время как решение в переходном слое определяется на микроскопической («быстрой») временной шкале и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Вольтерры, наследующему в своей форме структуру профиля релаксации.

Доклад основан на совместной работе с И. В. Кузнецовым (ИГиЛ СО РАН). В полном виде работа опубликована в Journal of Elliptic and Parabolic Equations (doi.org/10.1007/s41808-022-00182-9). Исследование выполнено при финансовой поддержке проекта «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2020-23) (гос. задание FZMW-2020-0008 от 24.01.2020).

А. С. Смирнова. L_p-аппроксимации решений параболических уравнений второго порядка на многообразиях ограниченной геометрии

В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения с частными производными в римановом многообразии ограниченной геометрии. Класс многообразий ограниченной геометриии содержит в себе все компактные многообразия, а также широкий класс некомпактных многообразий, что создаёт значительные технические трудности. Например, интегралы по многообразию становятся несобственными в случае, когда многообразие имеет бесконечный объём. При этом условие ограниченной геометрии многообразия гарантирует полноту любого гладкого ограниченного векторного поля на таком многообразии. В таком случае мы можем использовать технику сдвига вдоль интегральных кривых векторного поля: векторные поля будут являться коэффициентами уравнения, затем мы используем их для создания операторнозначной функции (называемой функцией Чернова), которая определена на $0, \infty$. Вот почему нам нужно, чтобы интегральные кривые векторных полей существовали для всех положительных значений времени $t > 0$ (на компактных многообразиях это выполняется автоматически). После этого мы используем функцию Чернова и начальное условие для создания аппроксимаций Чернова $u_n(t,x)$, которые сходятся к решению $u(t,x)$ задачи Коши в L_p-норме: $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L_p(M)}=0$. Таким образом, решение выражается в виде явной формулы, содержащей в качестве параметров коэффициенты уравнения и начальное условие. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова об аппроксимации операторных полугрупп.

М. Д. Сурначёв. Оценки решений некоэрцитивных эллиптических задач.

В области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, рассматриваются сопряжённые задачи Дирихле

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u)+\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u=f,\quad f\in W^{-1,2}(\Omega),\quad u\in W_0^{1,2}(\Omega),\tag{16}$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u+\mathbf{b}(x)u)=f,\quad f\in W^{-1,2}(\Omega),\quad u\in W_0^{1,2}(\Omega),\tag{17}$$

где матрица $\mathbf{A}\in(L^\infty(\Omega))^{n\times n}$ симметрическая и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности $\nu|\xi|^2\leq\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi\leq M|\xi|^2$, $M,\nu>0$, для почти всех $x\in\Omega$ и всех $\xi\in\mathbb{R}^n$. Пространство $W_0^{1,2}(\Omega)$ есть замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}=\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, а $W^{-1,2}(\Omega)$ — сопряжённое к нему пространство. Предположим, что $|\mathbf{b}|^2\in L^1_{loc}(\Omega)$ и выполняется неравенство типа Харди: $\|\,|\mathbf{b}|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\leq C_H\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ для всех $\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Определим на $W_0^{1,2}(\Omega)$ билинейную форму $a(u,v)=\int\limits_\Omega(\mathbf{A}\nabla u\cdot\nabla v+\mathbf{b}v\cdot\nabla u)\,dx$, тогда $|a(u,v)|\leq(M+C_H)\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$. Функцию $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ будем называть решением задачи (16) (соотв. задачи (17)), если $a(u,v)=\langle f,v\rangle$ (соотв. $a(v,u)=\langle f,v\rangle$) для всех $v\in W_0^{1,2}(\Omega)$. В случае малости величины C_H форма $a(\cdot,\cdot)$ коэрцитивная, $a(u,u)\geq(\nu-C_H)\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, откуда по лемме Лакса-Мильграма следует однозначная разрешимость задач (16), (17) вместе с оценкой $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\leq(\nu-C_H)^{-1}\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}$.

Без условия малости, для решения задачи (16) в случае $\mathbf{b}\in(L^n(\Omega))^n$ оценка вида $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\leq K\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}$ с константой K, зависящей лишь от n, ν, $\|\mathbf{b}\|_{(L^n(\Omega))^n}$, была установлена в работе M. Chicco, “An apriori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type,” *Matematiche (Catania)* **26**, 173–182 (1971), см. также G. Bottaro, M.E. Marina, “Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati,” *Boll. Unione Mat. Ital. (4)* **8**, 46-56 (1973).

В докладе будут обсуждаться различные варианты оценок типа Чикко (-Боттаро-Марина) для задач (16), (17) для $\mathbf{b}$ из классов Лебега, Лоренца и Като.

А. В. Фаминский. Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары–Захарова–Кузнецова

Для обобщенного уравнения Кавахары–Захарова–Кузнецова

$$u_t-u_{xxxxx}+u_{xxx}+u_{xyy}+bu_x+g'(u)u_x=0,$$

рассматриваются начально-краевые задачи на полуполосе $\Sigma_L=\{(x,y):x>0,0<y<L\}$, L – произвольное положительное число. Кроме начального условия $u\big|_{t=0}=u_0(x,y)$, ставятся краевые условия на левой границе $u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=0}=0$ и различные однородные краевые

условия на горизонтальных границах, в частности, Дирихле $u\big|_{y=0} = u\big|_{y=L} = 0$ или Неймана $u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=L} = 0$.

На функцию g накладываются условия ограничения роста, которым удовлетворяют квадратичные и кубичные нелинейности.

Устанавливаются результаты о глобальной корректности в классах слабых и сильных решений, причем здесь результаты не зависят от типа краевых условий на горизонтальных границах.

Начальная функция u_0 предполагается лежащей в весовых пространствах L_2 в случае слабых решений и H^1 в случае сильных решений со степенными или экспоненциальными весами при $x \to +\infty$.

Также для случая краевых условий Дирихле и применения экспоненциальных весов устанавливаются результаты об экспоненциальном убывании при $t \to +\infty$ слабых и сильных решений при малых начальных данных.

И. В. Филимонова. Об асимптотическом поведении положительных решений полулинейного параболического уравнения в цилиндре

Во время доклада планируется рассказать результаты об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ положительных решений полулинейного параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + f(u),$$

определенных в цилиндрической области $\Omega \times (0,\infty)$, удовлетворяющих условию Неймана на $\partial\Omega \times (0,\infty)$, где область $\Omega \subset R^n$ ограничена. Цель - сформулировать условия на функцию $f(u)$, чтобы результат был аналогичен случаю $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$, в котором положительные решения $u(x,t)$ эквивалентны некоторому решению обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{u} = u^q$, т.е. являются неограниченными функциями вида $u(x,t) = [(1-q)(t+t_0)]^{1/(1-q)} + O(e^{-\delta t})$ при $t \to \infty$.

А. В. Филиновский. О краевых задачах Робена с большим параметром

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей $\Gamma \in C^2$ рассмотрим задачу Робена

$$\begin{aligned} &\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega,\\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ, α — вещественный параметр. Изучается асимптотическое поведение собственных значений данной задачи как функции параметра при $\alpha \to \pm\infty$.

В. В. Чепыжов. Об усреднении аттракторов систем реакции-диффузии в пористой области

Рассматривается общая система реакции-диффузии в области с периодической перфорацией, которая содержит быстро осциллирующие члены в уравнениях системы и в граничных условиях 3-го рода. В изучаемой задаче малый параметр ε характеризует диаметр отверстий перфорации, а величина ε^{-1} – скорость осцилляции коэффициентов. Нелинейные члены, входящие в уравнения, могут не удовлетворять условию Липшица, поэтому теорема единственности для соответствующей смешанной краевой задачи может не выполняться. Изучается асимптотическое поведение траекторных аттракторов рассматриваемой задачи, когда $\varepsilon \to 0+$. Доказано, что траекторные аттракторы рассматриваемой системы реакции-диффузии сходятся в сильной топологии при $\varepsilon \to 0+$ к траекторному аттрактору соответствующей усредненной системы реакции-диффузии, которая содержит некоторый дополнительный "странный" член (потенциал). Работа выполнена совместно с К.А. Бекмаганбетовым и Г.А.Чечкиным.

А. С. Шамаев. Управляемость в системах интегро-дифференциальных уравнений

В работе рассматриваются задачи управления для некоторого класса интнгродифференциальных уравнений с интегральным запаздыванием. Устанавливаются "препятствия"для полной управляемости системами с помощью как граничных, так и распределенных сил. Эти "препятствия"формулируются в терминах спектров соответствующих краевых задач и в терминах аналитических свойств ядер сверток, входящих в нелокальные члены систем интегродифференциальных уравнений.

А. Е. Шишков. Суперсингулярные и большие решения полулинейных эллиптических уравнений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, — ограниченная область и $f(\cdot,\cdot)$ - неотрицательная непрерывная функция в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1$ такая,что $f(x,0) = 0 \; \forall \, x \in \overline{\Omega}$. Мы рассматриваем так называемые большие решения уравнения

$$-\Delta u + f(x,u) = 0 \text{ in } \Omega, \tag{18}$$

то есть решения $u(x)$ уравнения (18), удовлетворяющие граничному условию

$$\lim_{d(x)\to 0} u(x) = \infty, \quad d(x) := dist(x, \partial\Omega). \tag{19}$$

Если $f = f(u)$ является монотонной функцией, то существование большого решения связано с хорошо известным условием Келлера-Оссермана на рост функции $f(u)$ при $u \to \infty$ и с соответствующими обобщенными условиями Келлера-Оссермана для различных классов общих неотрицательных немонотонных нелинейностей $f(x,u)$ (S. Dumont, L. Dupaigne, O. Goubet, V. Radulescu (2007), J. Lopez-Gomez (2000) и др.).

Принципиально более сложной является проблема единственности большого решения. В случае области Ω с гладкой границей и $f(u) = u^p$, $p = \frac{n+2}{n-2}$, $n > 2$, единственность была впервые доказана в работе C. Loewner, L. Nirenberg (1974). При $f(u) = u^p$, $p > 1$, указанная единственность была установлена в работе C. Bandle, M. Marcus (1992). Что касается общей нелинейности $f(x,u)$, M. Marcus и L. Veron (2003) доказали единственность большого решения для C^2–гладкой ограниченной Ω если:

$f(x,u) \geqslant c_0 d(x)^\alpha u^p \; \forall \, x \in \Omega, \; \forall \, u \geqslant 0, \; p > 1, \; \alpha > 0, \; c_0 = const > 0.$

Наконец, в [1] была высказана гипотеза,что достаточным условием единственности является:

$f(x,u) \geqslant c_0 \exp\left(-c_1 d(x)^{-\alpha}\right) u^p \; \forall \, x \in \Omega, \; \forall \, u \geqslant 0, \; p > 1, \; 0 < \alpha < 1, \; c_1 > 0.$

Мы установили справедливость этой гипотезы. Более того,единственность доказана даже при при более слабых ограничениях на вырождение нелинейности $f(x,u)$ на границе области Ω:

$f(x,u) \geqslant c_0 h_\omega\left(d(x)\right) u^p \; \forall\, x \in \Omega,\ p > 1$, где $h_\omega(s) = \exp\left(-s^{-1}\omega(s)\right)$ и неубывающая непрерывная функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Дини:

$$\int_0^c s^{-1}\omega(s)ds < \infty, \quad \forall\, c > 0. \tag{20}$$

ВОПРОС: является ли (20) также и необходимым условием для единственности большого решения?

В [3] было доказано, что условие (20) является достаточным условием для существования так называемого суперсингулярного решения $u_a(x)$ уравнения (18) с произвольной точкой $a \in \partial\Omega$, то есть неотрицательного решения (18), удовлетворяющего граничному условию $u_a(x) = 0 \; \forall\, x \in \partial\Omega \setminus \{a\}$ с сингулярностью в точке $\{a\}$ более сильной, чем сингулярность соответствующего ядра Пуассона. Нами показано в [2], что условие (20) является также и необходимым условием существования суперсингулярного решения $u_a(x)$ уравнения (18) с произвольной точкой $a \in \partial\Omega$. Этот факт может рассматриваться также как косвенный аргумент в пользу позитивного ответа на поставленный выше вопрос.

Список литературы

[1] Lopez-Gomez J., Mair L., Veron L., General uniqueness results for large solutions. *Z. Angew. Math. Phys.*, **71:109** (2020), 14 p.

[2] Shishkov A. E., Large and very singular solutions to semilinear elliptic equations. *Calc. Var. PDE*, **61:102**(2022), 28p.,https://doi.org/10.1007/s00526-022-02214-7

[3] Shishkov A. E., Veron L., Diffusion versus absorption in semilinear elliptic equations. *J. Math. Anal. Appl.* **352** (2009), 206–217.