Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Математический центр мирового уровня
«Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук»
(МЦМУ МИАН), г. Москва

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша Российской академии
наук, г. Москва

Институт вычислительной математики
Российской академии наук, г. Москва

НАУКА
И УНИВЕРСИТЕТЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ РОССИИ

ВТОРАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕНТРОВ РОССИИ

7–11 ноября 2022 г.

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022

УДК 51
ББК 22.1
В87

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦФПМ, соглашения № 075-15-2022-283, № 075-15-2022-284, № 075-15-2022-286; грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265)

Программный комитет:

В. В. Козлов (сопредседатель)
В. А. Садовничий (сопредседатель)
Д. О. Орлов (заместитель председателя)
А. П. Солодов (секретарь)

Организационный комитет:

В. А. Садовничий (председатель)
С. О. Горчинский (заместитель председателя)
В. Е. Подольский (заместитель председателя)
А. А. Шкаликов (заместитель председателя)

Вторая конференция Математических центров России
В87 (7–11 ноября 2022 г.) : сборник тезисов. — Москва : Издательство Московского университета, 2022. — 292 с. : ил.

ISBN 978-5-19-011798-1

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-19-011798-1

Содержание

О НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Н.Ф. Абузярова
abnatf@gmail.com

УДК 517.547.2, 517.538.2, 517.984.26

Свойство медленного убывания элемента весового пространства целых функций P характеризует делители этого пространства. С учетом того, что функция $\sin \pi z$ является медленно убывающей во многих важных в приложениях весовых пространств целых функций, рассматривается вопрос: в какой мере можно сдвигать целочисленные точки (нули функции $\sin \pi z$), чтобы возмущенная таким образом последовательность оставалась множеством нулей медленно убывающей функции в P?

Ключевые слова: целая функция, нулевое множество, теорема деления

On zero sets of slowly decreasing functions

Given a weighted space of entire functions P and a function f in P, f is slowly decreasing in P iff it is a divisor of P. It is known that $\sin \pi z$ is slowly decreasing in many spaces of entire functions that are important in applications. To get an information on zero sets of slowly decreasing functions we study the following question: what perturbations of the set of integers preserve the property "to be slowly decreasing" for a function $f \in P$ which zeros are perturbed integers?

Keywords: entire function, zero set, division theorem

Пусть $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *канонический вес*, то есть четная, неотрицательная, неубывающая на $[0; \infty)$ функция, такая, что $\omega(1) = 0$, функция $f(\xi) := \omega(e^{\xi})$ выпукла на $[0; \infty)$, $\ln x = o(\omega(x))$, $\omega(2x) = O(\omega(x))$, $x \to \infty$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{\omega(x)}{x^2} \mathrm{d}x < \infty$.

Канонический вес ν называется *строгим*, если для некоторого $K > 1$ $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{\nu(Kt)}{\nu(t)} < K$ (см. [1, 1.3.5]).

Для любых $a > 0$, $r > 0$ определим банахово пространство целых функций $P_{a,r} = \left\{ \varphi \in H(\mathbb{C}) : \ \|\varphi\|_{a,r} = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp\left(a|\mathrm{Im}\, z| + r\omega(|z|)\right)} < \infty \right\}$.

Положим $P_{(\omega)} = \bigcup\limits_{r>0} \bigcup\limits_{a>0} P_{a,r}$ и наделим это пространство топологией индуктивного предела банаховых пространств $P_{a,r}$. $P_{(\omega)}$ — топологическая алгебра.

Функция $\psi \in P_{(\omega)}$ называется *делителем* алгебры $P_{(\omega)}$, если верна импликация: $\Phi \in P_{(\omega)}$, $\frac{\Phi}{\psi} \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \frac{\Phi}{\psi} \in P_{(\omega)}$.

Аналитический критерий того, что функция $\varphi \in P_{(\omega)}$ является делителем $P_{(\omega)}$ доказан в [2, Теорема 2.6]:

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00026), https://rscf.ru/en/project/22-21-00026/.

Абузярова Наталья Фаирбаховна, к.ф.-м.н., доцент, Башкирский госуниверситет (Уфа, Россия); Natalia Abuzyarova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Теорема B. *Функция* $\varphi \in P_{(\omega)}$ *является делителем пространства* $P_{(\omega)}$ *тогда и только тогда, когда она является медленно убывающей в* $P_{(\omega)}$, *то есть*
$\exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\, \exists x' \in \mathbb{R} : \ |x' - x| \leqslant A\omega(|x|)$ *и* $\ln|\varphi(x')| \geqslant -A\omega(|x'|)$.

Как можно охарактеризовать делители $P_{(\omega)}$ в терминах их нулевых множеств? Заметим, что $\sin \pi z \in P_{(\omega)}$ и нулевое множество этой функции есть $\mathbb{Z}$. При каких условиях на $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, последовательность

$$\{k + \alpha_k\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

будет нулевым множеством делителя алгебры $P_{(\omega)}$?

Пусть функция $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$l(t) - l(s) = O(t^\alpha - s^\alpha), \quad t, s \to \infty, \quad \text{при некотором} \quad \alpha \in (0; 1). \tag{1}$$

Положим $\lambda(t) = t + l(|t|), \quad t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_k = \lambda(k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и определим целую функцию φ формулой

$$\varphi(z) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\lambda_k| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \tag{2}$$

Теорема 1. *Предположим, что существуют дифференцируемая функция* $\mu : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *и строгий вес* ν, *со свойствами:*
$\mu'(t) = O\left(\frac{\mu(t)}{t}\right)$, $t \to \infty$, $\int^{\infty} \frac{\nu(t) l(t)}{t^2} \mathrm{d}t < \infty$;
при этом $l(t) - l(s) = O(\mu(t) - \mu(s)), \quad \mu(t) = O(\nu(t)), \quad t, s \to \infty$.

Тогда для любого канонического веса ω, *такого, что*
$\nu(x) = O(\omega(x)) \quad x \to \infty$, *функция* φ, *определенная формулой* (2), *принадлежит* $P_{(\omega)}$ *и является медленно убывающей в* $P_{(\omega)}$ (*то есть делителем* $P_{(\omega)}$).

Литература

1. *Абанин А.В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. — Москва: Наука, 2007.

2. *Абанин А.В., Абанина Д.А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. матем. журн., **12**:3 (2010), 3-20.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ХОПФА, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

С.В. Агапов

agapov.sergey.v@gmail.com, agapov@math.nsc.ru

УДК 517.938

При поиске дополнительных интегралов многих гамильтоновых систем зачастую удивительным образом возникает уравнение Хопфа (или некоторые близкие к нему уравнения). В докладе будет рассказано о некоторых следствиях этого неожиданного явления.

Ключевые слова: магнитный геодезический поток, уравнение Хопфа, разрушение решений

On Hopf-type equations arising in the problem of integrable geodesic flows

When searching for additional integrals of many Hamiltonian systems, the Hopf equation (or certain similar equations) often arises surprisingly. In the talk we will describe some consequences of this unexpected phenomenon.

Keywords: magnetic geodesic flow, inviscid Burgers' equation, blow up

Задача об интегрируемых геодезических потоках имеет давнюю историю. Как известно, необходимым условием интегрируемости уравнений геодезических является наличие достаточного количества первых интегралов. Наличие таких интегралов эквивалентно существованию решений некоторых квазилинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому при исследовании глобального аспекта этой задачи появляется необходимость следить за поведением решений соответствующих дифференциальных уравнений во всем фазовом пространстве.

В докладе будет рассказано о том, как в задаче об интегрируемых геодезических потоках (в том числе в магнитном поле) на двумерном торе возникают уравнения, близкие к уравнению Хопфа, и о том, какие результаты в исходной задаче позволяет получить анализ поведения решений этих уравнений (см. [1] — [3]).

Литература

1. *Тайманов И.А.* О первых интегралах геодезических потоков на двумерном торе // Совр. пробл. механ. Сборник статей, Труды МИАН, **295** (2016), 241–260.

2. *Agapov, S., Valyuzhenich, A.* Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels // Disc. Cont. Dyn. Syst. - A, **39**:11 (2019), 6565-6583.

3. *Агапов С.В., Валюженич А.А., Шубин В.В.* Некоторые замечания о полиномиальных интегралах высокой степени магнитного геодезического потока на двумерном торе // Сиб. матем. журн., **62**:4 (2021), 715-720.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Агапов Сергей Вадимович, к.ф.-м.н., НГУ, ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия); Sergei Agapov (Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia)

МИРОВОЕ РАЗВИТИЕ И “ПРЕДЕЛЫ РОСТА” В XXI ВЕКЕ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗ

А.А. Акаев, В.А. Садовничий

askarakaev@mail.ru, info@rector.msu.ru

В докладе представлены результаты моделирования мировой динамики за XX век и прогнозирования её дальнейшего развития в XXI веке. В отличие от классических моделей мировой динамики Форрестера – Медоуза, представлявших систему однотипных обыкновенных дифференциальных уравнений системной динамики, авторами разработаны структурные модели, учитывающие эндогенные механизмы взаимодействия основных факторов, определяющих динамику глобальных процессов, составляющих мировую динамику — информационную, демографическую, технологическую, энергетическую и экономическую, а также экологических, климатических и геополитических изменений. Благодаря этому получена система из 10 нелинейных дифференциальных уравнений, достаточно точно описывающих мировую динамику в долгосрочной перспективе. Главная цель авторов, при разработке этой модели, состояла в том, чтобы показать при каких сценариях технологического, энергетического и экономического развития человечество добьётся непременного выполнения Целей устойчивого развития ООН до 2050 года и одновременной стабилизации потепления климата на уровне 1,5–2 градусов Цельсия в соответствии с требованиями Парижского климатического соглашения 2015 года. Общие результаты работы составили основу для доклада Римскому клубу, который в настоящее время печатается издательством Шпрингер.

В докладе подробно будут изложены модели для прогнозных расчётов климатических изменений и сценариев энергетического перехода к преимущественно низкоуглеродным и безуглеродным источникам энергии, позволяющих добиться Целей исторического Парижского соглашения 2015 года. Авторами на основе “больших данных” мирового энергопотребления установлена новая парадигма энергопотребления, что позволяет существенно упростить задачу долгосрочного прогнозного расчёта динамики энергопотребления как развитых, так и развивающихся стран. Расчёт динамики энергопотребления в условиях новой парадигмы сводится к расчёту демографической динамики, для которой авторами разработана весьма эффективная модель с запаздываниями, позволяющая прогнозировать все сценарии роста, а также роста с возвратом к нижележащему стационарному уровню как апериодическим, так и колебательным способом. Далее излагаются модели для расчётов объёмов выбросов в атмосферу парниковых газов и их накопленных частей в атмосфере, вызывающих потепление климата. Затем

Акаев Аскар Акаевич, д.т.н., профессор, иностранный член РАН, главный научный сотрудник ИМИСС МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Askar Akaev (Moscow State University, Institute of Complex Systems Mathematical Research Moscow, Russia)

Садовничий Виктор Антонович, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, ректор МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Victor Sadovnichii (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

решается обратная задача по расчёту сценариев энергоперехода, позволяющих добиться стабилизации потепления климата на уровне 1,5–2 градусов Цельсия.

НОВЫЕ ОЦЕНКИ $d_{2,1}$ и $d_{3,2}$

А.А. Алиев
arkadiy.aliev@gmail.com

УДК 514

В работе [1] доказана гипотеза, поставленная Эндрэ Макаи сорок лет назад: для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ определим $d_{n,n-1}(K)$ как наименьшую плотность несепарабельной решетки трансляций K, тогда $d_{2,1} \leqslant \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$, причем равенство достигается на круге. Так же в работе [1] предложен новый метод получения верхних оценок на $d_{3,2}$ с помощью тел проекций и доказано неравенство $d_{3,2} \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$
Ключевые слова: геометрия чисел, несепарабельные решетки, выпуклая геометрия, тела проекций

New estimates for $d_{2,1}$ and $d_{3,2}$

Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$. Let $d_{n,n-1}(K)$ be the smallest possible density of a non-separable lattice of translates of K. In [1] we prove the estimate $d_{2,1}(K) \leqslant \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$ for $K \subset \mathbb{R}^2$, with equality if and only if K is an ellipse, which was conjectured by E. Makai. Also we prove the estimate $d_{3,2}(K) \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ for $K \subset \mathbb{R}^3$ using projection bodies.
Keywords: geometry of numbers, non-separable lattice, convex geometry, projection bodies

Вначале напомним некоторые определения. Для данного выпуклого тела K рассмотрим все его переносы вдоль некоторой решётки Λ. Полученное множество $K+\Lambda$ называют решеткой трансляций. Если внутренности полученных копий K не пересекаются, то $K+\Lambda$ называют решеточной упаковкой K. Если любая гиперплоскость в пространстве пересекает одну из копий K, то $K+\Lambda$ называется несепарабельной. Плотностью решетки трансляций называется отношения объема тела K к определителю решетки.

Гипотеза Рейнхарта это известный вопрос о нахождении минимума максимальной плотности упаковки центрально симметричного выпуклого тела на плоскости. Предполагается, что минимум достигается на сглаженном восьмиугольнике, константа упаковки которого равна $\frac{8-\sqrt{32}-\ln 2}{\sqrt{8}-1} \approx 0.902414$, что лишь на 0.004 меньше, чем у окружности. Сглаженный восьмиугольник был получен при помощи значительного объема вычислений и решения

Алиев Аркадий Артемович, Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия); Arkadiy Aliev, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

уравнений Эйлера-Лагранжа. К сожалению, этого недостаточно для доказательства гипотезы, ведь нет уверенности в том, что тело с минимальной максимальной плотностью упаковки будет гладким. Лучшей явной оценкой в этой гипотезе на сегодняшний день является оценка П.П. Таммелы: любое центрально симметричное тело на плоскости можно упаковать с плотностью хотя бы 0.8926....

В работе [1] доказывается двойственная гипотеза. Прежде всего можно показать, что достаточно рассматривать центрально симметричные тела. Далее для $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ хорошо известно, что $K + \mathbb{Z}^n$ несепарабельна в том и только том случае когда $\frac{1}{4}(K)^\circ + \mathbb{Z}^n$ является решеточной упаковкой. Соответственно, возникает вопрос, у какого тела наименьшая плотность несепарабельной решетки трансляций будет максимальна. Гипотеза Эндрэ Макаи заключается в том, что максимум достигается на круге и равен $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{8} = 0.68017....$ Из условия двойственности виден естественный подход к решению: упакуем двойственное тело настолько плотно, насколько позволяет оценка П.П.Таммелы, дальше воспользуемся неравенством Сантало-Бляшке и получим верхнюю оценку. Этот метод был предложен Эндрэ Макаи и полученная им оценка очень близка к предполагаемой. К сожалению, даже если доказать гипотезу Рейнхарта, нельзя с ее помощью получить точную оценку, ведь оптимальное тело в гипотезе Рейнхарта это не круг.

Таким образом для доказательства гипотезы Эндре Макаи необходимо оценивать критический определитель для двойственного тела напрямую через объем исходного тела. Такой способ был найден и был получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $d_{2,1}(K)$ - наименьшая плотность несепарабельной решетки трансляций $K \subset \mathbb{R}^2$. Тогда*

$$max\{d_{2,1}(K)|K \text{ – плоское выпуклое тело}\} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} = 0.68017...$$

Кроме того, если $d_{2,1}(K) = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{8}$, то K является эллипсом.

Следствие. *Пусть $\delta_L(K)$ — максимальная плотность упаковок центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^2$. Тогда*

$$\delta_L(K) \geqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}|K||K^\circ|,$$

Кроме того, равенство достигается только если K является эллипсом.

Разумеется, идея использования нижних оценок на плотность упаковки для получения верхних оценок в двойственной задаче может быть применена в любой размерности. В размерности три лучшая оценка принадлежит Эду Смиту: любое центрально симметричное тело в $\mathbb{R}^3$ можно упаковать с плотностью хотя бы 0.53835.... Таким образом, с помощью двойственности можно получить оценку $d_{3,2}(K) \leqslant 0.509251....$

В работе [1] предложена идея использования тел проекций для доказательства верхних оценок на $d_{3,2}$ и получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть* $d_{3,2}(K)$ *- наименьшая плотность несепарабельной решетки трансляций* $K \subset \mathbb{R}^3$. *Тогда*

$$max\{d_{3,2}(K) | K \subset \mathbb{R}^3 \text{ – выпуклое тело}\} \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{3}} = 0.453449...$$

Пример. *Пусть* B *это единичный шар в* $\mathbb{R}^3$. *Тогда*

$$d_{3,2}(B) = \frac{\pi}{6\sqrt{2}} = 0.37024....$$

Литература

1. *Arkadiy Aliev.* New estimates for $d_{2,1}$ and $d_{3,2}$. https://arxiv.org/abs/2207.09552
2. *E. Makai, Jr.,* On the thinnest non-separable lattice of convex bodies. Studia Sci. Math. Hungar. 13 (1978), 19-27. MR 38a:52016
3. *P. Tammela,* An estimate of the critical determinant of a two dimensional convex symmetric domain (in Russian). Izv. Vysh. Uchebn. Zaved. Mat. (1970)
4. *E.H. Smith,* A new packing density bound in 3-space. Discrete Comput. Geom., 34:537–544, 2005.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОГОМОЛОГИЙ КОНФОРМНОЙ АЛГЕБРЫ ЧЕРЕЗ СООТВЕТСТВИЕ МОРСА

Х. Алхуссейн, П.С. Колесников, В.Е. Лопаткин

hassanalhussein2014@gmail.com, pavelsk77@gmail.com, wickktor@gmail.com

УДК 512.664

Хорошо известно, что для «обычной» алгебры Ли $\mathfrak{g}$, действующей на модуле V, группы когомологий $H^n(\mathfrak{g}, V)$ совпадают с группами когомологий Хохшильда универсальной ассоциативной обертывающей $U(\mathfrak{g})$ со значениями в V. Для конформных алгебр картина существенно иная. Мы использовали дискретную алгебраическую теорию Морса для построения метода, позволяющего вычислить когомологии редуцированного комплекса для ассоциативной конформной алгебры. В качестве примера данный метод позволил вычислить все группы когомологий Хохшильда для универсальной ассоциативной обертывающей $U(3)$ конформной алгебры Вирасоро со значениями в скалярном модуле.

Ключевые слова: когомология Хохшильда, конформная алгебра, соответствие Морса

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Алхуссейн Хасан, к.ф.-м.н., ассистент, НГУ (Новосибирск, Россия); Hassan Alhussein (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Колесников Павел Серегеевич, д.ф.-м.н., в.н.с., Институт математики им. С.Л. Соболева (Новосибирск, Россия); Pavel Kolesnikov (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

Лопаткин Виктор Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, ВШЭ (Москва, Россия); Viktor Lopatkin (Higher School of Economics, Moscow, Russia)

Computation of cohomologies of conformal algebras via Morse matching

We apply discrete algebraic Morse theory to the computation of Hochschild cohomologies of associative conformal algebras. As an example, we evaluate the dimensions of the universal associative conformal envelope $U(3)$ of the Virasoro Lie conformal algebra relative to the associative locality $N = 3$ on the generator with scalar coefficients.

Keywords: Hochschild cohomology, conformal algebra, Morse matching

Понятие конформной алгебры было введено в [1] как алгебраический язык для описания свойств сингулярной части разложения операторного произведения (OPE) киральных полей в 2-мерной конформной теории поля. Когомологии конформных алгебр (ассоциативных и лиевых) были введены в [2], когомологии Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр изучались в [3,4].

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\Bbbk$. Хорошо известно, что n-я группа когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определенная при помощи стандартного комплекса Эйленберга, совпадает с n-й группой когомологий Хохшильда универсальной ассоциативной обертывающей алгебры Ли $U(\mathfrak{g})$.

Для конформных алгебр нет общего понятия универсальной ассоциативной обертывающей алгебры. Например, пусть Vir — конформная алгебра Вирасоро. Она представляет собой свободный модуль над кольцом $\Bbbk[\partial]$, порожденный одним элементом v, с операцией

$$[v_{(\lambda)}v] = (\partial + 2\lambda)v.$$

Алгебра Вирасоро является единственной исключительной простой конформной алгеброй Ли конечного типа. У этой алгебры существует семейство «условно универсальных» ассоциативных конформных обертывающих $U(N)$, $N \geqslant 2$, каждая из которых является универсальной в классе ассоциативных обертывающих с условием $\deg_\lambda(v_{(\lambda)}v) < N$. В частности, алгебра $U(2)$ известна как конформная алгебра Вейля.

В отличие от случая обычных алгебр, когомологии Хохшильда «условно универсальной» ассоциативной обертывающей конформной алгебры могут не совпадать с когомологиями исходной конформной алгебры Ли. Например, в работе [4] было показано, что 2-я группа когомологий Хохшильда для $U(2)$ со значениями в любом бимодуле тривиальна, в то время как Vir имеет нетривиальные центральные расширения [2]. В работе [5] было показано, что все когомологии Хохшильда со скалярными коэффициентами для $U(2)$ нулевые.

Появление ассоциативных конформных алгебр в основном мотивировано изучением конечных представлений конформных алгебр Ли — каждое такое представление является представлением подходящей ассоциативной обертывающей. Для конформной алгебры Vir специфика конечных представлений, описанных в [5], такова, что представления универсальной обертывающей $U(3)$ описывают все неприводимые конечные представления Vir. Поэтому исследование алгебры $U(3)$ представляет большой интерес.

Конформная обертывающая $U(3)$ также позволяет более адекватно отразить гомологические свойства конформной алгебры Вирасоро Vir. В работе [5] была вычислена 2-я группа когомологий Хохшильда со скалярными коэффициентами для $U(3)$, которая оказалась 1-мерной.

Мы использовали дискретную алгебраическую теорию Морса для построения метода, позволяющего вычислить когомологии Хохшильда ассоциативной конформной алгебры. Данный метод основан на том, чтобы заменить нередуцированный комплекс алгебры коэффициентов из [2] на комплекс Аника, построенный при помощи соответствия Морса, а затем редуцировать комплекс Аника для получения комплекса, гомотопически эквивалентного комплексу Хохшильда ассоциативной конформной алгебры. Построенный метод позволил вычислить все группы когомологий Хохшильда для $U(3)$ со значениями в скалярном модуле и получить, что

$$\dim H^n(U(3), \Bbbk) = \begin{cases} 1, & n = 2, 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Литература

1. *V. G. Kac*, Vertex Algebras for Beginners // University Lecture Series 2nd ed, (AMS, Providence, PI, 1998), Vol. 10.

2. *B. Bakalov, V. G. Kac, A. Voronov*, Cohomology of conformal algebras // Comm. Math. Phys. 200, 561–589 (1999).

3. *I. A. Dolguntseva* Triviality of the second cohomology group of the conformal algebras Cend_n and Cur_n//St. Petersburg Math. J. 21, 53–63 (2010).

4. *P. S. Kolesnikov, R. A. Kozlov*, On the Hochschild cohomologies of associative conformal algebras with a finite faithful representation // Comm. Math. Phys. 369, no. 1, 351–370 (2019).

5. *H. AlHussein, P. S. Kolesnikov*, On the Hochschild cohomology of universal enveloping associative conformal algebras // J. Math. Phys. 62, 121701 (2021).

6. *S.-J. Cheng, V. G. Kac*, Conformal modules// Asian J. Math. 1, 181-193 (1997).

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МОМЕНТА МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ, ДОСТИГАЮЩЕГО ФИКСИРОВАННОГО УРОВНЯ

М.А. Анохина

anokhina.mary1@gmail.com

УДК 519.214.4

Рассматривается случайное блуждание $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{E}X_1 = 0$. Обозначим τ_{M-} — момент первого достижения максимума блужданием S_n, а $M_n = S_{\tau_{M-}}$. Будет получена асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\tau_{M-}/n \leqslant x | M_n = k)$, $x \in [0, 1]$ для арифметического случайного блуждания в случае нормальных уклонений для случаев конечной и бесконечной дисперсии, а также умеренных и больших уклонений при конечной дисперсии и выполнении правостороннего условия Крамера.

Ключевые слова: случайные блуждания, предельные теоремы, момент максимума

A Limit Theorem for the Moment of Maximum of a Random Walk Reaching a Fixed Level

Consider a random walk $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, where $X_1, X_2, \dots$ are independent identically distributed random variables with $\mathbf{E}X_i = 0$. By τ_{M-} denote the first moment of the maximum of S_n and by M_n denote $S_{\tau_{M-}}$. We get an asymptotic of $\mathbf{P}(\tau_{M-}/n \leqslant x | M_n = k)$, $x \in [0, 1]$ for arithmetic random walk with finite or infinite variance in the case of normal deviations, under right-hand Cramer condition in the case of moderate or large deviations

Keywords: random walks, limit theorems, moment of maximum

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (с.в.). Для этого блуждания хорошо известен закон арксинуса: $\mathbf{P}(\tau_{M-}/n \leqslant x) \to 2\arcsin(\sqrt{x})/\pi$, $n \to \infty$, $x \in [0, 1]$, где τ_{M-} — момент первого достижения максимума блужданием S_n. Нас интересуют такие же результаты, но для $\mathbf{P}(\tau_{M-}/n \leqslant x | M_n = k)$, $x \in [0, 1]$, где $M_n = S_{\tau_{M-}}$.

Следующие четыре теоремы описывают искомое распределение в зоне нормальных уклонений в случаях конечной и бесконечной дисперсии (теоремы 1 и 2), в зоне умеренных уклонений (теорема 3) и зоне больших уклонений. Отметим, что результат теоремы 2, по существу, получен в [1], а результат теоремы 4 — в [2].

Анохина Мария Андреевна, аспирант 1-го года обучения, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mariia Anokhina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Теорема 1. *Пусть* $X_1, X_2, \dots$ *— н.о.р. арифметические с.в. с* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $0 < \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 < \infty$, $0 < a < b < 1$, $\{k_n\}$ *— некоторая последовательность:* $k_n/\sqrt{n} \to y > 0$, $n \to \infty$ *(далее для краткости мы будем опускать индекс* n *у параметра* k*). Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_{M-}}{n} \in [a,b] \middle| M_n = k\right) \to \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_a^b \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)}}{t\sqrt{t(1-t)}}\, dt, \quad n \to \infty.$$

Введем следующие обозначения, чтобы сформулировать результат в случае бесконечной дисперсии. Обозначим $\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| \leqslant 1\} \cup \{\alpha = 1, \beta = 0\} \cup \{\alpha = 2, \beta = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и с.в X будем говорить, что $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, если распределение X принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G_{\alpha,\beta}(t) := \exp\left\{-c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}, \quad c > 0,$$

и, к тому же, $\mathbf{E}X = 0$, если оно существует.

Теорема 2. *Пусть* X_i, $i = 1, \dots, n$, *— н.о.р. арифметические с.в. и* $X_i \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$. *Пусть* $k \in (0, \infty) \cap \mathbb{Z}$, $L(n)$ *— медленно меняющаяся на бесконечности функция,* $c_n = n^{1/\alpha} L(n)$, $k/c_n \to y > 0$, $n \to \infty$, $0 < a < b < 1$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_{M-}}{n} \in [a,b] \middle| M_n = k\right) \to \frac{\int_a^b p_{\alpha,\beta}\left(yt^{-1/\alpha}\right) t^{\rho-1-1/\alpha}(1-t)^{-\rho}\, dt}{\int_0^1 p_{\alpha,\beta}\left(yt^{-1/\alpha}\right) t^{\rho-1-1/\alpha}(1-t)^{-\rho}\, dt},$$

гду $p_{\alpha,\beta}(x)$ *— плотность соответствующего меандра Леви, а*

$$\rho = \begin{cases} 1/2, & \alpha = 1; \\ 1/2 + \arctan(\beta \tan(\pi\alpha/2))/(\pi\alpha), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть* $X_1, X_2, \dots$ *— н.о.р. арифметические с.в. с* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $0 < \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 < \infty$, $\{k_n\}$ *— некоторая последовательность:* $k_n/n^\alpha \to y$, $n \to \infty$, $1/2 < \alpha < 1$, $y > 0$, τ_{M+} *— последний момент достижения максимума случайным блужданием* S_n. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\frac{n - \tau_{M+}}{n^\beta} \leqslant x \middle| M_n = k\right) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{c^2 x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du, \quad n \to \infty, \quad x \geqslant 0,$$

где $M_n = S_{\tau_{M+}}$, $\beta = 2 - 2\alpha$, $c = y/\sqrt{2\sigma^2}$, $o(1)$ *равномерно мало по* $x \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть* $X_1, X_2, \dots$ *— н.о.р. арифметические с.в. с* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $0 < \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 < \infty$, $0 < a < b < 1$, $k/n \in [a,b] \subset (0, m^+)$, *где* m^+

— некоторая константа, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX_1} < \infty$ для $0 < h < h^+$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(n - \tau_{M-} = j \,|\, M_n = k\right) \to \frac{(1 - R(h_{k/n}))R(h_{k/n})^{-j}\mathbf{P}(S_i \leqslant 0, i \leqslant j)}{\exp\left(-\sum\limits_{j=1}^{\infty} R(h_{k/n})^{-j}\mathbf{P}(S_j > 0)\right)},$$

где $j \in \mathbb{Z}_+$, $h_{x/n}$ — некоторая функция.

Литература

1. *Wachtel V.* Local limit theorem for the maximum of asymptotically stable random walks // Probab. Theory Relat. Fields, **152** (2012), 407–424.

2. *Шкляев А.В.* Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума // Теория вероятн. и ее примен., **55**:3 (2010), 590-598.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И.В. Асташова
ast.diffiety@gmail.com

УДК 517.91

Изучается асимптотическая близость на бесконечности решений линейного уравнения высокого порядка с младшими производными и уравнения, полученного из него добавлением нелинейного слагаемого, а также решений полученного уравнения и его возмущения правой частью экспоненциальной или степенной малости на бесконечности.

Ключевые слова: Нелинейное дифференциальное уравнение, малые возмущения, асимптотическая эквивалентность

On asymptotic proximity of solutions to various types of perturbations to high-order nonlinear differential equations

We study asymptotic proximity at infinity of solutions to a high-order linear equation with lower derivatives and the equation obtained from it by adding a nonlinear term, as well as solutions of the resulting equation and its perturbation by a right-hand side exponentially or power-law small at infinity.

Keywords: Nonlinear differential equation, small perturbations, asymptotic equivalence

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20272).

Асташова Ирина Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова; Российский экономический университет имени Г.В.Плеханова (Москва, Россия) Irina Astashova, Dr.Sci, professor, (Lomonosov Moscow State University; Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia)

Изучается асимптотическая близость на бесконечности решений уравнения

$$y^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|y(x)|^k\,\operatorname{sign}y(x)=f(x) \tag{1}$$

и невозмущенного уравнения

$$z^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|z(x)|^k\,\operatorname{sign}z(x)=0, \tag{2}$$

где $n\geqslant 2,\ k>1$, а $p,\ f,\ a_j$ – непрерывные функции. Уравнение (2), в свою очередь, рассматривается как возмущение уравнения

$$u^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)u^{(j)}(x)=0, \tag{3}$$

и для этих уравнений также изучается асимптотическая близость.

Полученные результаты позволяют, в частности, находить асимптотику решений возмущенных уравнений (1) и (2), если известна асимптотика решений невозмущенных уравнений (2) и (3). В [1] доказываются результаты об асимптотической эквивалентности уравнений (1) и (2) при $a_j=0$ в случае возмущений f экспоненциальной или степенной малости; в [2] при $f=0$ изучается вопрос о различных типах асимптотической близости решений уравнения (2) и его частных случаев решениям соответствующих линейных уравнений. Следующая теорема уточняет результат [2, Cor.4].

Теорема 1. *Если непрерывные функции $a_0,\ldots,a_{n-1}$ и p удовлетворяют условиям*

$$\int_{x_0}^{\infty}x^{n-j-1}|a_j(x)|\,dx<\infty \ \textit{для всех}\ j\in\{0,\ldots,n-1\} \tag{4}$$

и, для некоторого целого числа $m\in\{0,\ldots,n-1\}$, условию

$$\int_{x_0}^{\infty}x^{n-1+(k-1)m}\,|p(x)|\,dx<\infty,$$

то для любого $C\neq 0$ существует решение y уравнения (2) удовлетворяющее, при $x\to\infty$, условиям

$$y^{(j)}(x)\sim\frac{C\,m!\,x^{m-j}}{(m-j)!}\quad \textit{для всех}\ j\in\{0,\ldots,m\}$$

и, для всех $j\in\{m+1,\ldots,n-1\}$, условиям

$$y^{(j)}(x)=o\left(x^{m-j}\right)\ \ \textit{и}\ \int^{\infty}s^{j-m-1}\left|y^{(j)}(s)\right|\,ds<\infty.$$

Сформулируем результат об асимптотической эквивалентности решений уравнений (2) с экспоненциально близкими правыми частями.

Теорема 2. *Если $a_0, \dots, a_{n-1}$, p, f_1 и f_2 — непрерывные функции, заданные в окрестности ∞, причем p, f_1 и f_2 ограничены, a_j удовлетворяют неравенствам (4), а y – стремящееся при $x \to +\infty$ к нулю решение уравнения (2), где $f(x) = f_1(x)\, e^{-\gamma x}$, то существует единственное решение z уравнения (2), где $f(x) = f_2(x)\, e^{-\gamma x}$, удовлетворяющее соотношению*

$$|y(x) - z(x)| = O(e^{-\gamma x}), \quad x \to +\infty. \tag{5}$$

Следствие. *Если функция f в уравнении (1) непрерывна и*

$$|f(x)| \leqslant Ce^{-\gamma x},\ C > 0,\ \gamma > 0,$$

функция p непрерывна и ограничена, а функции $a_0, \dots, a_{n-1}$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам (4), то для любого стремящегося на бесконечности к нулю решения y уравнения (1) найдется единственное решение z уравнения (2), удовлетворяющее (5), и наоборот, для любого стремящегося на бесконечности к нулю решения z уравнения (2) найдется единственное решение y уравнения (1), удовлетворяющее (5).

Аналогичный результат справедлив для f степенной малости в уравнении (1) (для $a_j = 0$ см. [1]).

Литература

1. *Astashova I.V.* On the asymptotic behavior at the infinity of solutions to quasilinear differential equations // Math. Bohem., **135**(2010), 373–382.

2. *I. Astashova, M. Bartusek, Z. Dosla, M. Marini.* Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations // Advances in Nonlinear Analysis, **11**(1), (2022), 1598—1613.

УСЛОВНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И ИХ ЛОКАЛЬНЫХ ВРЕМЕН

В.И. Афанасьев

viafan@mail.ru

УДК 519.214

Для остановленных случайных блужданий с нулевым сносом, рассматриваемых при различных условиях, доказаны функциональные предельные теоремы. Соответствующие результаты установлены для локальных времен этих блужданий.

Ключевые слова: случайные блуждания, локальные времена, функциональные предельные теоремы

Работа выполнена в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2019-1614).

Афанасьев Валерий Иванович, д.ф.-м.н., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Москва, Россия); Valeriy Afanasyev (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia)

Conditional limit theorems for random walks and their local times

Functional limit theorems are proved for stopped random walks with zero drift considered under various conditions. The corresponding results are established for the local times of these walks.

Keywords: random walks, local times, functional limit theorems

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковым арифметическим распределением с максимальным шагом 1, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Положим $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbf{N}$. Пусть $T = \min\{i > 0 : S_i \leqslant 0\}$. Введем *остановленное случайное блуждание* $\widetilde{S}_i = S_i$ при $i < T$ и $\widetilde{S}_i = 0$ при $i \geqslant T$. Положим $\widetilde{\xi}(k) = \left|\left\{i \geqslant 0 : \widetilde{S}_i = k\right\}\right|$.

Пусть $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$ – стандартное броуновское движение. Положим $\{\tau_0' = \sup t \in [0,1] : W(t) = 0\}$ и $\tau_0'' = \inf\{t > 1 : W(t) = 0\}$. *Броуновской экскурсией* называется процесс $W_0^+(t) = \left|W\left(\tau_0' + tT_0^+\right)\right| / \sqrt{T_0^+}$, $t \in [0,1]$, где $T_0^+ = \tau_0'' - \tau_0'$. *Броуновской извилиной* называется процесс $W^+(t) = \left|W\left(\tau_0' + t\left(1 - \tau_0'\right)\right)\right| / \sqrt{1 - \tau_0'}$, $t \in [0, T^+]$, где $T^+ = T_0^+ / \left(1 - \tau_0'\right)$. Введем локальное время процесса W^+:

$$l^+(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{T^+} I_{[u, u+\varepsilon]}\left(W^+(s)\right) ds, \qquad u > 0.$$

Пусть символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \widetilde{S}_{\lfloor nt \rfloor} / \left(\sigma\sqrt{n}\right),\ t \geqslant 0 \;\middle|\; T > n \right\} \xrightarrow{D} \left\{W^+(t),\ t \geqslant 0\right\}.$$

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \sigma\widetilde{\xi}\left(\left\lfloor u\sigma\sqrt{n}\right\rfloor\right) / \sqrt{n},\ u \geqslant 0 \;\middle|\; T > n \right\} \xrightarrow{D} \left\{l^+(u),\ u \geqslant 0\right\}.$$

Пусть $\tau_x = \inf\{t > 0 : W(t) = x\}$ при $x \in \mathbf{R}$. Положим

$$\tau_0^{(1)} = \sup\{t \in [0, \tau_1] : W(t) = 0\}, \qquad \tau_0^{(2)} = \inf\{t > \tau_1 : W(t) = 0\}.$$

Броуновским прыжком в высоту называется процесс $W_0^{\uparrow}(t) = W\left(\tau_0^{(1)} + t\right)$, $t \in \left[0, T_0^{\uparrow}\right]$, где $T_0^{\uparrow} = \tau_0^{(2)} - \tau_0^{(1)}$. Введем локальное время процесса $W_0^{\uparrow}$:

$$l_0^{\uparrow}(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{T_0^{\uparrow}} I_{[u, u+\varepsilon]}\left(W_0^{\uparrow}(s)\right) ds, \qquad u > 0.$$

Пусть $T_x = \min\left\{i : \widetilde{S}_i > x\right\}$ при $x > 0$.

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$\left\{\widetilde{S}_{\lfloor nt \rfloor} / \left(\sigma\sqrt{n}\right),\ t \geqslant 0 \;\middle|\; T_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty\right\} \xrightarrow{D} \left\{W_0^{\uparrow}(t),\ t \geqslant 0\right\}.$$

Теорема 4. *При* $n \to \infty$

$$\left\{\sigma^2\widetilde{\xi}\left(\lfloor un \rfloor\right)/n,\ u \geqslant 0 \;\middle|\; T_n < +\infty\right\} \xrightarrow{D} \left\{l_0^{\uparrow}(u),\ u \geqslant 0\right\}.$$

Предположим дополнительно, что распределение случайной величины X_1 является либо нерешетчатым, либо центрально решетчатым.

Теорема 5. *При* $n \to \infty$

$$\left\{S_{\lfloor nt \rfloor} / \left(\sigma\sqrt{n}\right),\ t \geqslant 0 \;\middle|\; T = n\right\} \xrightarrow{D} \left\{W_0^{+}(t),\ t \geqslant 0\right\}.$$

Теорема 1 установлена в [1,2], теорема 2 в [4,5], теорема 3 в [3], теорема 4 в [6], теорема 5 в [7].

Литература

1. *Hooghiemstra G.* Conditioned limit theorems for waiting-time processes of the M | G | 1 queue // J. Appl. Probab, **20**:3 (1983), 675-688.

2. *Афанасьев В.И.* О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде // Дискрет. матем., **11**:4 (1999), 33-47.

3. *Афанасьев В.И.* Функциональная предельная теорема для остановленного случайного блуждания, достигающего высокого уровня // Дискрет. матем., **28**:3 (2016), 3-13.

4. *Афанасьев В.И.* Сходимость к локальному времени броуновской извилины // Дискрет. матем., **29**:4 (2017), 28-40.

5. *Афанасьев В.И.* Функциональная предельная теорема для локального времени остановленного случайного блуждания // Дискрет. матем., **31**:1 (2019), 7-20.

6. *Афанасьев В.И.* О локальном времени остановленного случайного блуждания, достигающего высокого уровня // Труды МИАН, **316** (2022), 11-31.

7. *Афанасьев В.И.* Local invariance principle for a random walk with zero drift // J. Math. Sciences (in print).

О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ ПОКАЗАТЕЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Баландин
balandin-anton@yandex.ru

УДК 517.929

Для экспоненциально устойчивого линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального типа найдена точная оценка показателя экспоненты в зависимости от значения коэффициентов.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, нейтральное уравнение, экспоненциальная устойчивость

On the exact estimation for the exponent of solutions of a linear autonomous differential equation of neutral type

For an exponentially stable linear autonomous differential equation of neutral type, an exact estimate of the exponent is found depending on the value of the coefficients.

Keywords: functional differential equation, neutral equation, exponential stability

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$(I - aS)\dot{x}(t) - b(Sx)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

в следующих предположениях и обозначениях: $a, b \in \mathbb{R}$, I — единичный (тождественный) оператор,

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(t-1), & \text{если } t \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } t < 1, \end{cases}$$

функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально суммируема.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно (см. [1, с. 84, теорема 1.1], [2]), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

Баландин Антон Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия); Anton Balandin (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Функция X называется *фундаментальным решением*, функция Y — *функцией Коши*. Функция Коши и фундаментальное решение уравнения (1) связаны соотношением (см. [2]): $X(t) = (I - S)Y(t)$.

Нас интересует наличие у функции Y экспоненциальной оценки:

$$|Y(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}, \quad M, \gamma > 0. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует выполнение такой же оценки для фундаментального решения и, следовательно, для любого решения уравнения (1).

Обозначим через Γ множество чисел $\gamma \in \mathbb{R}$, для которых справедлива оценка (3). Назовём число $\omega \triangleq \sup\{\gamma \colon \gamma \in \Gamma\}$ *точным показателем* функции Коши.

В системе координат Ouv введем функцию $v = \eta(u)$, заданную параметрически по правилу: $u = \cos\theta, v = \theta\sin\theta; \theta \in (0, \pi)$. Для уравнения (1) известен критерий экспоненциальной устойчивости: функция Коши уравнения (1) имеет оценку (3), если и только если $b < 0$ и $b > \eta(a)$ (см. [3]). Для уравнения (1) мы нашли точную оценку показателя степени экспоненты в зависимости от значений a и b.

Зададим $w = \zeta(u, v)$ следующим образом:

$$u = e^{-w}\left(\cos y - w\frac{\sin y}{y}\right), \quad v = -e^{-w}\left(\frac{w^2}{y} + y\right)\sin y, \quad y \in (0, y_\omega),$$

где y_ω — корень уравнения $y \operatorname{ctg}\frac{y}{2} = \omega$, и $v = (u - e^{-w})w$ при $a \in [-e^{-w}, (1 - w)e^{-w}]$, $w \in [0, 2]$. На рис. 1 изображена поверхность $\omega = \zeta(a, b)$.

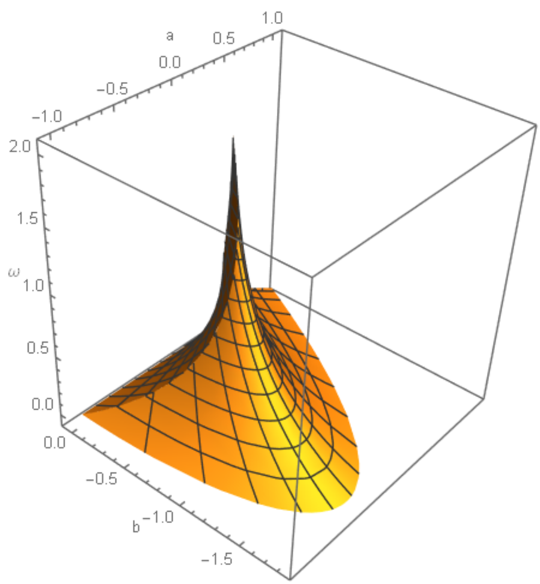

Рис. 1: $\omega = \zeta(a, b)$

Теорема. *Если $\eta(a) < b < 0$, то точный показатель ω функции Коши уравнения (1) определяется равенством $\omega = \zeta(a, b)$.*

Литература

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.

2. *Баландин А.С., Малыгина В.В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнениях нейтрального типа // Изв. вузов. Математика, № 7 (2007), 17–27.

3. *Баландин А.С.* Об асимптотической устойчивости одного класса дифференциально-разностных уравнений // Вестник ПГТУ, №1 (2009), 122–129.

АНОСОВСКИЙ ТОР КАК ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР МНОГОМЕРНОГО А-ДИФФЕОМОРФИЗМА

М.К. Баринова

mkbarinova@yandex.ru

УДК 517.938

В 1971 году Моррис Хирш предположил, что если Λ — компактное гиперболическое множество диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, которое является инвариантным гладким подмногообразием $\Lambda \subset M^n$, то ограничение $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ — диффеоморфизм Аносова. Мы обобщаем проблему Хирша для базисных множеств А-диффеоморфизмов, предполагая, что базисное множество Λ А-диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ принадлежит f-инвариантному замкнутому k-многообразию M^k_Λ, топологически (необязательно гладко) вложенному в M^n.

Ключевые слова: А-диффеоморфизм, гиперболическое множество, аттрактор, базисное множество

Anosov torus as a hyperbolic attractor of a multidimensional A-diffeomorphism

In 1971, Morris Hirsch conjectured that if Λ is a compact hyperbolic set of diffeomorphism $f : M^n \to M^n$ which is an invariant smooth submanifold $\Lambda \subset M^n$, then the restriction $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ is an Anosov diffeomorphism. We generalize Hirsch's problem for basic sets of axiom A-diffeomorphisms (in short, A-diffeomorphisms) assuming that a basic set Λ of A-diffeomorphism $f : M^n \to M^n$ belongs to f-invariant closed k-manifold M^k_Λ topologically (not necessary, smoothly) embedded to M^n.

Keywords: A-diffeomorphism, hyperbolic set, attractor, basic set

---

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101

Баринова Марина Константиновна, к.м.н., Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"(Нижний Новгород, Россия); Marina Barinova, PhD in Mathematics, (HSE University, Nizhny Novgorod, Russia)

Работа выполнена совместно с Вячеславом Зигмундовичем Гринесом, Евгением Викторовичем Жужомой и Ольгой Витальевной Починкой.

Динамические системы, удовлетворяющие аксиоме A (A-системы), были введены Смейлом [1]. По определению неблуждающее множество A-системы является топологическим замыканием периодических орбит и наделено гиперболической структурой. Далее мы будем рассматривать A-диффеоморфизмы, являющиеся A-системами с дискретным временем. Везде ниже предполагается, что M^n – связное замкнутое ориентируемое n-многообразие.

В силу теоремы Смейла о спектральном разложении неблуждающее множество любого A-диффеоморфизма f на замкнутом многообразии M^n представляет собой конечное непересекающееся объединение замкнутых, инвариантных и топологически транзитивных множеств, называемых *базисными множествами* [1].

Индекс Морса i_Λ базисного множества Λ есть размерность неустойчивого многообразия его точки, т.е. $i_\Lambda = \dim W^u_x$, $x \in \Lambda$.

Базисное множество Λ называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества Λ такая, что $f(U) \subset int\ U$ и $\bigcap\limits_{j \geqslant 0} f^j(U) = \Lambda$. Инвариантное множество называется *репеллером*, если оно является аттрактором для f^{-1}.

Назовем базисное множество Λ топологической размерности $k \geqslant 2$ *аносовским тором*, если $f|_\Lambda$ сопряжено гиперболическому алгебраическому автоморфизму k-мерного тора $\mathbb{T}^k$. Как следствие, Λ гомеоморфна $\mathbb{T}^k$. Назовем k-мерное ($2 \leqslant k \leqslant n$) базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ *гиперповерхностным*, если существует f-инвариантное замкнутое k-многообразие $M^k_\Lambda \supset \Lambda$, называемое *носителем*, топологически вложенное в M^n.

Гринес, Медведев и Жужома [2] доказали, что всякий поверхностный (гиперповерхностный при $k = 2$) двумерный связный аттрактор Λ с индексом Морса $i_\Lambda = 1$ A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ – аносовский тор. Следующее утверждение является обобщением [2] для $n > 3$.

Теорема 1. *Пусть $f : M^n \to M^n$, $n > 3$, — A-диффеоморфизм и Λ — связный k-мерный гиперповерхностный аттрактор с индексом Морса $i_\Lambda = k - 1$ ($2 \leqslant k \leqslant n$). Тогда $\Lambda = M^k_\Lambda$ и это аносовский тор.*

Литература

1. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 747-817.

2. *Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В.* О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях // Матем. заметки, **78**:6 (2005), 813–826.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Н.П. Бондаренко

bondarenkonp@info.sgu.ru

УДК 517.984

Доклад посвящен обратным задачам спектрального анализа для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с коэффициентами-распределениями (обобщенными функциями). Будут даны постановки обратных задач, рассмотрены вопросы единственности и конструктивного решения.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, дифференциальные операторы высших порядков, коэффициенты-распределения, конструктивное решение, метод спектральных отображений

Inverse problems for higher-order differential operators with distribution coefficients

This talk is devoted to inverse problems of spectral analysis for differential operators of order $n > 2$ with distribution coefficients (generalized functions). We will give inverse problem statements and consider the issues of uniqueness and constructive solution.

Keywords: inverse spectral problems, higher-order differential operators, distribution coefficients, constructive solution, method of spectral mappings

Рассматриваются обратные спектральные задачи для различных классов дифференциальных операторов, порожденных дифференциальными выражениями вида

$$\begin{aligned}\ell_n(y) :=& y^{(n)} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (\tau_{2k}(x) y^{(k)})^{(k)} \\ &+ \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} \big((\tau_{2k+1}(x) y^{(k)})^{(k+1)} + (\tau_{2k+1}(x) y^{(k+1)})^{(k)} \big), \; x \in (0,1),\end{aligned}$$

к которым применим регуляризационный подход [1]. А именно, мы предполагаем, что уравнение

$$\ell_n(y) = \lambda y, \quad x \in (0,1),$$

Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/).

Бондаренко Наталья Павловна, д.ф.-м.н., доцент, Саратовский государственный университет (Саратов, Россия), Самарский университет (Самара, Россия); Natalia Bondarenko (Saratov State University, Saratov, Russia; Samara National Research University, Samara, Russia)

эквивалентным образом сводится к системе вида

$$Y'(x) = (F(x) + \Lambda)Y(x), \quad x \in (0,1),$$

где $Y(x)$ — вектор-функция (столбец) размера n, λ — спектральный параметр, Λ — матрица размера $(n\times n)$ с элементом λ в позиции $(n,1)$ и нулевыми остальными элементами, $F(x) = [f_{k,j}(x)]_{k,j=1}^n$ — ассоциированная матрица дифференциального выражения $\ell_n(y)$. Коэффициенты $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ могут быть как суммируемыми, так и обобщенными функциями (распределениями).

В докладе будут даны постановки обратных спектральных задач, которые состоят в восстановлении коэффициентов $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ по матрице Вейля-Юрко и по дискретным спектральным данным. Вопросы единственности решения обратных задач рассмотрены в [2,3]. В [4] разработан подход к конструктивному решению обратных задач, основанный на методе спектральных отображений [5].

Литература

1. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки, **99**:5 (2016), 788-793.

2. *Bondarenko N.P.* Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients // Mathematics, **9**:22 (2021), Article ID 2989.

3. *Bondarenko N.P.* Linear differential operators with distribution coefficients of various singularity orders, arXiv:2204.02052 [math.SP].

4. *Bondarenko N.P.* Reconstruction of higher-order differential operators by their spectral data, arXiv:2208.14697 [math.SP].

5. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УСЛОВИЯМИ ТИПА ХЕЛЕ-ШОУ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ КЛЕТКИ

П.О. Буклемишев, В.В. Черник

pavel.buklemishev@gmail.ru, gungho424@gmail.com

УДК 517.518

Механизм подвижности живых клеток является предметом исследования для широкого круга учёных: биологов, физиков, математиков. В работе представлена двумерная модель клетки со свободной границей, движущейся по однородной поверхности. Динамика рассматриваемого актомиозинового комплекса подчиняется закону Дарси, и он определяет подвижность клеточной мембраны, которая в модели является границей двумерной области. Распределение миозина описывается уравнением адвекции-диффузии. Граничные условия включают уравнение Юнга-Лапласа с нелокальным членом, условие непрерывности нормальной составляющей скорости и условие непротекания.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнения с частными производными, задача с подвижной границей, разностные схемы на неравномерных сетках

The numerical solution of the 2D free-boundary cell motility problem with Hele-Shaw type boundary

The cell motility problem is being widely investigated by various scientists: biologists, physicists and mathematicians. A simple 2D-model of a free-boundary cell moving on the homogeneous surface is introduced in this work. The dynamics of the actomyosin complex, whose special properties impact the cell motility, is described by the Darcy's law. The myosin density changes according to the advection-diffusion equation. Boundary conditions include Young-Laplace equation with the non-local term, the velocity of the liquid at the boundary is equal to the normal component of the cell membrane velocity and no flux through the membrane equation.

Keywords: mathematical modeling, partial differential equations, free boundary problems, finite differences, non-uniform grid

Клеточная подвижность - это важнейший биологический феномен, определяющий природу ее жизнедеятельности. С помощью развития математических моделей механизмов такого движения возможно внести неоценимый вклад в изучение феномена. Сегодня существует множество физических моделей [2], которые так или иначе, описывают различные аспекты поведения клетки. Рассмотрим систему, предложенную в [1].

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6), при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ 075-15-2019-1621

Буклемишев Павел Олегович, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Pavel Buklemishev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Черник Виталий Валерьевич, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия); Vitaliy Chernik (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russian Federation, Russia)

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \zeta\varphi - Q(m) \text{ в } \Omega(t) \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \nabla(m\nabla\varphi) = \Delta m \text{ в } \Omega(t) \\ \zeta\varphi = \gamma\kappa + p_{eff}(|\Omega(t)|) \text{ на } \delta\Omega(t) \\ V_\nu = \partial\varphi \text{ на } \delta\Omega(t) \\ \partial_\nu m = 0 \text{ на } \delta\Omega(t) \end{cases}$$

Здесь: ϕ — потенциал скорости актомиозиновой жидкости, m — распределение плотности миозина, t - время, ζ — адгезионная постоянная, γ — коэффициент поверхностного натяжения, κ — кривизна границы, $p_{eff} = p_h + k_e(\frac{|\Omega_0|-|\Omega(t)|}{|\Omega_0|})$, p_h — гомеостатическое давление, k_e — коэффициент упругости, $|\Omega_0|$ — площадь клетки в покое, $|\Omega(t)|$ — площадь клетки в момент времени t, V — скорость движения мембраны, ν — вектор нормали, $Q(m)$ — регуляризирующий член. $\Omega(t)$ и $\delta\Omega(t)$ обозначают внутреннюю область клетки и ее границу.

Указанная система уравнений преобразуется к динамической криволинейной полярной системе координат, в которой краевая задача является задачей с неподвижной границей (аналогично [3]). При этом вводится дополнительная искомая функция $r = \rho(\theta, t)$, описывающая границу области клетки, вместе с условиями периодичности. Построенная разностная схема на неравномерной сетке [4] обладает вторым порядком точности. На языке программирования Python написан программный модуль, реализующий поиск численного решения данной задачи и получены некоторые стабильный решения, которые с расчётной точностью сходятся к аналитическим решениям. Были получены и исследованы решения типа бегущей волны.

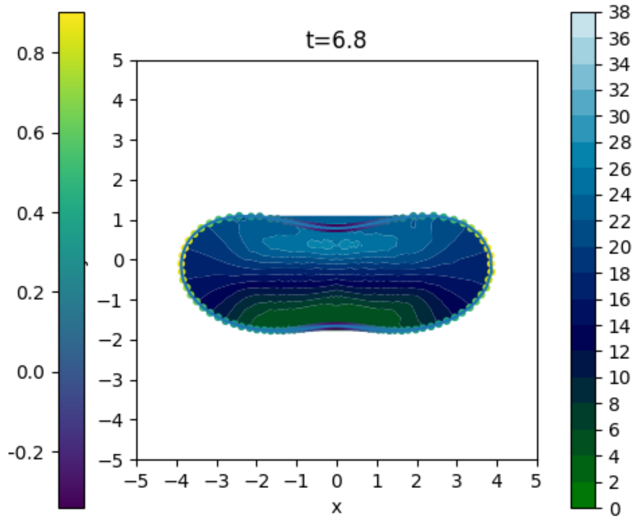

Рис. 1: Пример визуализации подвижной клетки в момент времени t = 6.8

Литература

1. *Berlyand L.* Bifurcation of traveling waves in a Keller-Segel type free boundary model of cell motility // J. Commun. Math. Sci. **16** (2018), 735-762.

2. *Mogilner A.* Mathematics of cell motility: have we got its number?// J. Math Biol **58** (2009) 105–134.

3. *Самарский А.А.* Вычислительная теплопередача // УРСС. Москва. 2003

4. *Тихонов А.Н.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики, **1**(1962), 927–953

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПЕРРОНА ПО РЕШЕНИЯМ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

bar@im.bas-net.by, vvbykov@gmail.com

УДК 517.926.4, 517.925.51

Нижний характеристический показатель решения линейной однородной дифференциальной системы рассматривается как функция начального вектора решения. Получено полное теоретико-множественное описание класса всех таких функций, отвечающих системам с (вообще говоря) неограниченными коэффициентами.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, устойчивость, показатели Ляпунова, показатели Перрона

The distribution of values of the Perron exponent over solutions to a linear system

The lower characteristic exponent of a solution to a linear homogeneous differential system is treated as a function of the initial data. We obtain a complete set-theoretic description of the class of all such functions corresponding to systems with (generally) unbounded coefficients.

Keywords: linear differential system, stability, Lyapunov exponents, Perron exponents

---

Барабанов Евгений Александрович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (Минск, Беларусь); Yauheni Barabanau (Institute of mathematics NASB, Minsk, Belarus)

Быков Владимир Владиславович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Bykov (Lomonosov Moscow State University, Russia)

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, через $\mathcal{M}_n$ — его подкласс, коэффициенты систем которого ограничены на полуоси, а через $x(\cdot;\xi)$ — решение системы (1) с начальным вектором $x(0;\xi) = \xi \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ расширенную числовую прямую с естественным порядком и порядковой топологией.

Нижним показателем (показателем Перрона) ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называется [1] величина

$$\pi[x(\cdot)] = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|, \tag{2}$$

а функция начального вектора $\pi_A \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством $\pi_A(\xi) = \pi[x(\cdot;\xi)]$, — *показателем Перрона* системы (1). Нижний показатель Перрона представляет собой один из примеров многочисленных асимптотических характеристик — функционалов, определённых на решениях дифференциальных систем и отражающих те или иные качественные или асимптотические их свойства. Важнейший из них — характеристический показатель Ляпунова (его определение получается заменой в (2) нижнего предела верхним). Приведём некоторые известные свойства показателя Перрона, показывающие его принципиальные отличия от показателя Ляпунова.

А.М. Ляпуновым установлено, что число различных показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ не превосходит её размерности n. О. Перрон обнаружил [1], что для нижних показателей это утверждение не верно. Для диагональных систем из $\mathcal{M}_n$ количество различных значений показателя Перрона не превосходит $2^n - 1$ [2] и может быть любым таким натуральным числом [3]. У недиагональных систем множество значений показателей Перрона может быть устроено гораздо сложнее: в работе [4] построена система, нижние показатели решений которой заполняют целый отрезок, а в [5] доказано, что множество P является множеством значений показателей Перрона некоторой системы из $\mathcal{M}_n$ в точности тогда, когда P — ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань.

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого натурального n класса функций $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$. Известно, что $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ — подкласс второго, но не первого, класса Бэра [6].

В [7, 8] показано, что для любого $n \geqslant 2$ класс $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ содержит все непрерывные функции $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3}$$

Полное описание класса $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ для любого $n \geqslant 2$ даёт следующая

Теорема. *Функция $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ при $n \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию* (3) *и для любого*

$r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([-\infty, r]\big)$ является G_δ-множеством. Класс $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ состоит из всех постоянных функций $\mathbb{R}^1 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Следствие. *Для любого $n \geqslant 2$ непустое подмножество P расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ является множеством значений показателя Перрона некоторой системы из $\widetilde{\mathcal{M}}_n$, если и только если оно суслинское.*

Литература

1. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr., **31**:5 (1930), 748-766

2. *Изобов Н.А.* О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. **1**:4 (1965), 469-477.

3. *Барабанов Е.А.* Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы // Докл. АН БССР. **26**:12 (1982), 1069-1072.

4. *Изобов Н.А.* О множестве нижних показателей положительной меры // Дифференц. уравнения, **4**:6 (1968), 1147-1149.

5. *Барабанов Е.А.* Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. **22**:11 (1986), 1843-1853.

6. *Барабанов Е.А.* Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона // Докл. АН БССР. **34**:3 (1990), 200-203.

7. *Гаргянц А.Г.* К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. **53**:11 (2017), 1567.

8. *Гаргянц А.Г.* О существовании линейной дифференциальной системы с заданными показателями Перрона // Изв. РАН. Сер. матем. **83**:2 (2019), 21-39.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Н.Ф. Валеев, Я.Т. Султанаев

valeevnf@yandex.ru, sultanaevyt@gmail.com

УДК 517.9

В работе рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача: для заданного матричного потенциала V_0 найти ближайшую к нему матричную функцию $\hat{V}$ такую, чтобы первое собственное значение матричного оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом $\hat{V}$ совпадало с заданным значением $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спектральная теория, выпуклая оптимзация, обратная спектральная задача

Исследования Н.Ф. Валеева поддержаны РНФ (проект № 18-01-00250-а).

Нурмухамет Фуатович Валеев, к.ф.-м.н., ИМ ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nurmukhamet Valeev (Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa, Russia)

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., проф., БГПУ имени М. Акмуллы (Уфа, Россия), Московский математический центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Yaudat Sultanaev (BSPU, Ufa, Russia),(Moscow Mathematical Center of Fundamental and Applied Mathematics)

Optimization inverse spectral problem for the first eigenvalue of the matrix Sturm-Liouville operator

The optimization inverse spectral problem is considered in the paper: for a given matrix potential V_0 find the matrix function $\hat{V}$ closest to it, such that the first eigenvalue of the Sturm – Liouville matrix operator with potential $\hat{V}$ coincides with the given values $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Keywords: differential equations, spectral theory, convex optimization, inverse spectral problem

В пространстве $L^2_n(0,1) = L^2(0,1) \times .. \times L^2(0,1)$ рассматривается самосопряженный оператор Штурма – Лиувилля $\mathcal{L}[V]$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(\vec{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\vec{y}(x) + V(x)\vec{y}(x),\ 0 < x < 1$$

и самосопряженными граничными условиями

$$\vec{y}(0) - h\vec{y}(0) = 0, \vec{y}(1) + H\vec{y}(1) = 0,$$

где λ — спектральный параметр, $V(x) \in \mathcal{M}^2_n(0,1)$ — эрмитова матрица, h, H — самосопряженные матрицы. Пусть

$$\lambda_1(V) \leqslant \lambda_2(V) \leqslant ...\lambda_k(V) \leqslant ...$$

являются собственными значениями оператора $\mathcal{L}[V]$. Работа посвящена исследованию следующей оптимизационной обратной спектральной задачи:

Для заданного вещественного числа λ_1^* и матричного эрмитового потенциала $V_0(x) \in \mathcal{M}^2_n(0,1)$, требуется найти потенциал $\hat{V}(x) \in \mathcal{M}^2_n(0,1)$ такой, что

- $\|V_0 - \hat{V}\|^2_{L^2} = \inf\limits_{V \in \mathcal{M}^2_n(0,1)} \left\{ \|V_0 - V\|^2_{\mathcal{M}^2_n(0,1)} : \lambda_1(\hat{V}) = \lambda_1^* \right\}.$

Справедлива теорема существования и единственности:

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1(V_0) \leqslant \lambda_1^*$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача имеет единственное решение.*

Отметим, что собственные значения рассматриваемой краевой задачи могут быть вырожденными, с кратностью m, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1(V_0) \leqslant \lambda_1^*$ и $\hat{V}$ -решение оптимизационной обратной спектральной задачи. Если $\lambda_1(\hat{V})$ собственное значение кратности m, тогда справедливо представление*

$$\hat{V}(x) = V_0(x) + \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{k,j}\vec{u}_k(x) \otimes \vec{u}_j(x),$$

где $\vec{u}_k(x)$, $k = 1, .., m$- ортонормированная система собственных функций оператора $\mathcal{L}[\hat{V}]$ соответствующих первому собственному значению равному λ_1^*, $\|\alpha_{k,j}\|^m_{k,j=1}$ — эрмитова матрица

В основном результате работы мы показываем, что рассматриваемая оптимизационная обратная спектральная задача тесно связана с системами нелинейных уравнений Шредингера и некоторыми обратными спектральными задачами с неполными данными для скалярного оператора Штурма – Лиувилля.

Литература

1. *Moody T. Chu and Gene H. Golub.* Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford (2005).

2. *Yavdat Ilyasov, Nur Valeev.* Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, Physica D: Nonlinear Phenomena, 426 (2021), 5 pp. 10.1016/j.physd.2021.132985

3. *Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev.* On nonlinear boundary value problem corresponding to N - dimensional inverse spectral problem, J. Diff. Eq., 266 (2019), No. 8, 4533–4543. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.003

4. *V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, N. F. Valeev.* Multiparameter inverse spectral problems and their applications// Doklady Mathematics, 79:3 (2009), 457-460.

5. *M. Möller, A. Zettl* Differentiable dependence of eigenvalues of operators in Banach spaces, Journal of Operator Theory, (1996) 335-355.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, МОДЕЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

В.Б. Васильев

vbv57@inbox.ru

УДК 517.95, 517.983

Рассматривается семейство операторов специального типа, образованное псевдодифференциальными операторами. Такое семейство генерирует один оператор, действующий в некотором функциональном пространстве. Изучаются элементы этого семейства как в непрерывной, так и дискретной ситуациях.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, разрешимость, краевая задача.

Elliptic equations, model domains and boundary value problems

We consider an operator family of a special type which is generated by pseudo-differential operators. Such a family generates single operator acting in a certain functional space. Elements of this family are stutied both in continuous and discrete situations.

Keywords: pseudo-differential equation, solvability, boundary valur problem.

Васильев Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИУ “БелГУ” (Белгород, Россия); Vladimir Vasilyev (Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia)

1. Локальный принцип, примененный для определенных классов операторных уравнений, сводит задачу исследования фредгольмовости такого уравнения к описанию условий обратимости модельного уравнения в специальной канонической области. Такая каноническая область представляет собой конус в m-мерном пространстве, и, следовательно, основной объект – это уравнение в конусе. Абстрактный подход описан в работах [1,2], двумерная ситуация подробно описана в [3].

2. Отправной точкой исследования служит модельное псевдодифференциальное уравнение в конусе $C \subset \mathbb{R}^m$

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad x \in C, \tag{1}$$

где $A : H^s(C) \to H^{s-\alpha}(C)$ – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Конкретный конус C обладает определенными параметрами, например, угол на плоскости $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ имеет "раствор" a, а пространственный конус $C_+^{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + |x_2|, a, b > 0\}$ имеет 2 параметра a, b. Представляется интересным и естественным выяснить, что произойдет с решением уравнения (1) (в том случае, когда оно существует и единственно), когда некоторые параметры стремятся к своим предельным значениям 0 или ∞. Получены ответы на некоторые из этих вопросов [4].

3. Можно рассмотреть дискретный вариант уравнения (1) с помощью следующих конструкций для функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$. Пусть $C_d = h\mathbb{Z}^m \cap C, \hbar = h^{-1}, \mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ и $\tilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция, определенная на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ в дискретном конусе C_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} h^m \int_{\hbar\mathbb{T}^m} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_d,$$

где $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначает дискретное преобразование Фурье функции u_d.

Вводится дискретный аналог H^s-пространств и для специального случая $C = \mathbb{R}_+^m$ получены условия разрешимости для дискретного аналога [5] уравнения (1). Показано, что дискретные решения обладают аппроксимационными свойствами [6] при малых h. Аналогичные результаты получены для дискретного квадранта на плоскости.

Литература

1. *Vasilyev V.* Elliptic operators and their symbols // Demonstr. Math., **52** (2019), 361-369.

2. *Vasilyev V.* Operator symbols and operator indices // Symmetry, **12**:64 (2020), 1-12.

3. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — Москва: КомКнига, 2010.

4. *Vasilyev V., Kutaiba Sh.* Elliptic equations in domains with cuts: certain examples // Int. J. Appl. Math., **34**:2 (2021), 339-351.

5. *Васильев В.Б.* Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **160** (2019),18-27.

6. *Васильев В.Б., Тарасова О.А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **174** (2020), 12-19.

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ШАРОВ В СМЕШАННОЙ НОРМЕ

А.А. Васильева

vasilyeva_nastya@inbox.ru

УДК 517.518.224

Получены порядковые оценки колмогоровских поперечников пересечения двух конечномерных шаров в смешанной норме при некоторых условиях на параметры.

Ключевые слова: колмогоровские поперечники, конечномерные пространства со смешанной нормой.

Kolmogorov widths of an intersection of two balls in a mixed norm

Order estimates for the Kolmogorov widths of an intersection of two finite?dimensional balls in a mixed norm are obtained under some conditions on the parameters.

Keywords: Kolmogorov widths, finite?dimensional spaces with a mixed norm.

Пусть $m,\ k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Через $l^{m,k}_{p,\theta}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk}$ с нормой

$$\|(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant k}\|_{l^{m,k}_{p,\theta}} = \left(\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|x_{i,j}|^p\right)^{\theta/p}\right)^{1/\theta}.$$

Для $p = \infty$ или $\theta = \infty$ определение модифицируется естественным образом.

Через $B^{m,k}_{p,\theta}$ обозначим единичный шар пространства $l^{m,k}_{p,\theta}$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00204).

Васильева Анастасия Андреевна, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anastasia Vasil'eva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Колмогоровским n-поперечником множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|;$$

здесь $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность подпространств в X размерности не выше n.

Задача о колмогоровских поперечниках $d_n(B^{m,k}_{p,\theta}, l^{m,k}_{q,\sigma})$ изучалась в [1–8]. В частности, в [8] порядковые оценки были получены при $2 \leqslant q$, $\sigma < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant q$, $1 \leqslant \theta \leqslant \sigma$, $n \leqslant a(q, \sigma)mk$; этот результат нетрудно распространить на случай $n \leqslant \frac{mk}{2}$.

Здесь получены порядковые оценки величин $d_n(\nu_1 B^{m,k}_{p_1,\theta_1} \cap \nu_2 B^{m,k}_{p_2,\theta_2}, l^{m,k}_{q,\sigma})$ при $2 \leqslant q, \sigma < \infty$, $1 \leqslant p_i \leqslant q$, $1 \leqslant \theta_i \leqslant \sigma$, $i = 1, 2$, $n \leqslant \frac{mk}{2}$. Из-за ограничения на объем тезисов сформулируем результат только для одного из случаев.

Теорема 1. *Пусть* $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$, $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant \frac{mk}{2}$, $2 < q < \infty$, $2 < \sigma < \infty$, $p_1 \in [2, q]$, $\theta_1 \in [2, \sigma]$, $p_2, \theta_2 \in [1, 2]$. *Определим числа* $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$, $\tilde{\mu} \in [0, 1]$, $\tilde{\theta}$ *и* $\tilde{p}$ *равенствами* $\frac{1}{2} = \frac{1-\tilde{\lambda}}{p_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{p_2}$, $\frac{1}{\tilde{\theta}} = \frac{1-\tilde{\lambda}}{\theta_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{\theta_2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1-\tilde{\mu}}{\theta_1} + \frac{\tilde{\mu}}{\theta_2}$, $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1-\tilde{\mu}}{p_1} + \frac{\tilde{\mu}}{p_2}$.

Предположим, что выполнено одно из следующих условий: 1) $\frac{1/p_1 - 1/q}{1/2 - 1/q} < \frac{1/\theta_1 - 1/\sigma}{1/2 - 1/\sigma}$, $\tilde{\mu} > \tilde{\lambda}$, *2)* $\frac{1/p_1 - 1/q}{1/2 - 1/q} > \frac{1/\theta_1 - 1/\sigma}{1/2 - 1/\sigma}$, $\tilde{\mu} < \tilde{\lambda}$.

Определим также числа $\lambda \in [0, 1]$, p *и* θ *равенствами* $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$, $\frac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/q} = \frac{1/\theta - 1/\sigma}{1/2 - 1/\sigma}$. *Тогда*

$$d_n(\nu_1 B^{m,k}_{p_1,\theta_1} \cap \nu_2 B^{m,k}_{p_2,\theta_2}, l^{m,k}_{q,\sigma}) \underset{q,\sigma}{\asymp}$$

$$\asymp \min\{d_n(\nu_1 B^{m,k}_{p_1,\theta_1}, l^{m,k}_{q,\sigma}), d_n(\nu_2 B^{m,k}_{p_2,\theta_2}, l^{m,k}_{q,\sigma}),$$

$$d_n(\nu_1^{1-\tilde{\lambda}} \nu_2^{\tilde{\lambda}} B^{m,k}_{2,\tilde{\theta}}, l^{m,k}_{q,\sigma}), d_n(\nu_1^{1-\tilde{\mu}} \nu_2^{\tilde{\mu}} B^{m,k}_{\tilde{p},2}, l^{m,k}_{q,\sigma}), d_n(\nu_1^{1-\lambda} \nu_2^{\lambda} B^{m,k}_{p,\theta}, l^{m,k}_{q,\sigma})\}.$$

Литература

1. *Галеев Э.М.* Оценка колмогоровских поперечников классов H^r_p периодических функций многих переменных малой гладкости // Теория функций и ее прил. Сб. тр. конф. молодых ученых. — 1986. — 17–24.

2. *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**:2 (1990), 418–430.

3. *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову некоторых конечномерных множеств в смешанной норме // Матем. заметки, **58**:1 (1995), 144–148.

4. *Изаак А.Д.* Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Матем. заметки, **55**:1 (1994), 43–52.

5. *Изаак А.Д.* Поперечники классов Гельдера–Никольского и конечномерных множеств в пространствах со смешанной нормой // Матем. заметки, **59**:3 (1996), 459–461.

5. *Малыхин Ю.В., Рютин К.С.* Произведение октаэдров плохо приближается в метрике $l_{2,1}$ // Матем. заметки, **101**:1 (2017), 85–90.

7. *Dirksen S., Ullrich T.* Gelfand numbers related to structured sparsity and Besov space embeddings with small mixed smoothness // J. Compl., **48** (2018), 69–102.

8. *Vasil'eva A. A.* Kolmogorov and linear widths of the weighted Besov classes with singularity at the origin // J. Approx. Theory, **167** (2013), 1–41.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ БИЛЛИАРДЫ КАК СПОСОБ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЕВ ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко

aivenirra@gmail.com

УДК 517.938.5

Академиком А.Т. Фоменко был открыт новый класс интегрируемых биллиардов, а именно, эволюционные биллиарды. Они представляют собой биллиарды, положение стенок которых зависит от энергии биллиардной частицы, т.е. чем больше скорость, тем больше область, в которую при движении может попасть биллиардный шар. Как оказалось, с помощью нового класса биллиардов удается промоделировать слоение Лиувилля сразу на нескольких изоэнергетических многообразиях разных областей энергии — например, в известных интегрируемых случаев Эйлера и Лагранжа и интегрируемых геодезических потоков на поверхностях постоянной энергии с интегралом малой степени. .

Ключевые слова: интегрируемые системы, биллиард

Evolutionary billiards as a way to model the Euler and Lagrange integrable cases

Academician A.T.Fomenko discovered a new class of integrable billiards, namely, evolutionary billiards. They are billiards, the position of the walls of which depends on the energy of the billiard particle, i.e. the greater the speed, the larger the area into which the billiard ball can fall when moving. As it turned out, with the help of a new class of billiards, it is possible to model the Liouville foliation on several isoenergy manifolds of different energy domains at once, for example, in the well-known integrable cases of Euler and Lagrange and integrable geodesic flows on surfaces of constant energy with an integral of small degree.

Keywords: integrable systems, billiard

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 21-11-00355) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Ведюшкина Виктория Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Viktoria Vedyushkina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Фоменко Анатолий Тимофеевич, д.ф.-м.н., профессор, акад. РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anatoly Fomenko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Назовем носителем силового биллиарда конечный связный двумерный локально-плоский (с евклидовой метрикой внутри 2-клеток) клеточный комплекс X. Его 2-листы L_i гомеоморфны замкнутым односвязным областям R^2 и ограничены дугами софокусных квадрик. Склейка нескольких 2-листов происходит по изометрии их общей гладкой граничной дуги (корешка книжки). Для каждого значения параметра-энергии $H = h \geqslant 0$ рассмотрим в носителе X замкнутый подкомплекс $X(h)$, возможно не связный. Назовем его *состоянием силового биллиарда,* отвечающим значению h. При этом $X(h_1) \subset X(h_2)$ для любых $h_1 < h_2$ и $X = \cup X(h)$ по всем h. Тем самым с ростом h состояние $X(h)$ "разрастается". Конечное количество значений $h = 1...N$ энергии H, при которых меняется топология стола или закон отражения-преломления на ребрах границы, назовем *особыми (сингулярными),* а остальные - *регулярными. Закон отражения-преломления* на ребре-корешке r в состоянии $X(h)$ обозначим через $Z(h,r)$. Он задается циклической перестановкой на n листах, склеиваемых по ребру r и определяет динамику частицы после удара о границу. Пусть $Z(h) = \{Z(h,r)\}$ — набор таких законов - есть кусочно-постоянная функция энергии, изменения которой могут быть лишь при особых значениях h. Разрешим ребрам-корешкам состояния $X(h)$ гладко меняться в классе софокусных квадрик без вырождений.

Как оказалось, введенный класс биллиардов позволяет моделировать известные интегрируемые случаи Эйлера и Лагранжа.

Теорема 1. *Для интегрируемых случаев Эйлера и Лагранжа алгоритмически строятся эволюционные биллиарды E и L, их реализующие (т.е. лиувиллево эквивалентные для всех регулярных 3-поверхностей). Эта реализация происходит сразу на всем фазовом многообразии M^4, т.е. на всех его регулярных изоэнергетических 3-поверхностях для всех регулярных значений интегралов энергии и площадей. В случае Эйлера биллиарды ограничены софокусными эллипсами и гиперболами, в случае Лагранжа – концентрическими окружностями. При стремлении фокусов друг к другу набор регулярных изоэнергетических поверхностей биллиарда E переходит в набор изоэнергетических поверхностей, слоения которых соответствуют всевозможным слоениям биллиарда L. В этом смысле случаи Эйлера и Лагранжа биллиардно эквивалентны.*

Факт биллиардной эквивалентности оказывается верен и для других систем, а именно, геодезических потоков на сфере, обладающих линейными и квадратичными интегралами. Все эти потоки были реализованы в следующем смысле. Для любого линейно интегрируемого потока на сфере алгоритмически строится интегрируемый топологический биллиард, листы которого ограничены концентрическими окружностями. Для любого квадратично-интегрируемого потока на сфере алгоритмически строится интегрируемый топологический биллиард, листы которого ограничены дугами софокусных эллипсов и гипербол. При устремлении фокусов друг к другу такой биллиард переходит в биллиард, моделирующий линейно интегрируемый геодезический поток на двумерной сфере. Следовательно, эти системы биллиардно эквивалентны.

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация // Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.

2. *Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В.* Эволюционные силовые биллиарды // Изв. РАН. Сер. матем., **86**:5 (2022), 116–156.

3. *Козлов В.В., Трещёв Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. — М.: Изд-во МГУ, 1991.

4. *Ведюшкина В.В.* Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов // Матем. сб., **210**:3 (2019), 17–74.

МЕТОД РАССЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

Г.В. Воскресенская

galvosk@mail.ru

УДК 511.334

В докладе будет рассказано об изучении структуры пространств модулярных форм методом рассечения, то есть представления их в виде $f(z)W \oplus U$, где $f(z)$ — некоторая модулярная форма, W — пространство модулярных форм меньшего веса, U — дополнительное пространство. Если $U = \{0\}$, то рассечение называется точным. Доказаны теоремы о точном рассечении и о природе дополнительных пространств.

Ключевые слова: модулярная форма, эта-функция Дедекинда, параболические вершины

The method of cutting in spaces of modular forms

In the report we speak about study of structure of spaces of modular form by the method of cutting. It means that we consider such space as $f(z)W \oplus U$, where $f(z)$ is a modular form, W is a space of modular forms of smaller weight, U is an additional space . If $U = \{0\}$, then the cutting is called the exact one. The theorems about the exact cutting and the nature of additional spaces.

Keywords: modular form, Dedekind eta-function, cusps

Воскресенская Галина Валентиновна, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет имени С.П. Королева (Самара, Россия); (Samara University,Samara, Russia)

Мы используем стандартные обозначения теории модулярных форм [3]. Пусть пространство $V = M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ или $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$.

Основная идея состоит в рассмотрении пространств $f(z)W$, где $f(z)$ — модулярная (в частности, параболическая) форма небольшого веса, а W — пространство модулярных форм меньшего веса того же уровня и дополнительного пространства U. Функция $f(z)$ называется рассекающей функцией. Если $V = f(z)W$, то рассечение называется точным.

Модельным примером для развития этой теории является классический факт — точное рассечение пространства параболических форм уровня 1 функцией $\Delta(z) = \eta^{24(z)}$. Пространства других уровней мало изучены. Автором [4] полностью исследован случай точного рассечения для пространств с тривиальными или квадратичными характерами.При точном рассечении рассекающая функция почти всегда пропорциональна эта-произведению с мультипликативными коэффициентами.

Отметим несколько возникающих здесь задач:

1) Описать пространство U. Размерность U при возрастании веса V становится незначительной по сравнению с размерностью V.

2) Представить V в виде $V = \cup_{j=1}^{s} f_j(z)W$ при небольших s. В частности, изучаются разложения V в прямые суммы рассеченных подпространств.

3) Использовать рассечение для нахождения порождающих систем и базисов (это сложнее) в V. В этом контексте отметим проблему Кена Оно: описать все пространства модулярных форм, порожденные эта-частными.

В следующей теореме доказывается, что базис дополнительного пространства может быть описан с помощью пространства параболических форм малого веса (часто не более чем веса 4).

Теорема 1. *Пусть*

1) N *— такое натуральное число, что сравнения* $x^2+1 \equiv 0 \ (modN)$, $x^2+x+1 \equiv 0 \ (modN)$ *не имеют решений,*

2) k, l *— положительные целые четные числа* , $k \geqslant l+8$,

3) *параболическая форма* $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N))$ *и не имеет нулей в точках римановой поверхности* $(H/\Gamma_0(N))^*$ *, эквивалентных* i *или* ω *относительно* Γ,

4) $\{u_1(z), ..., u_t(z)\}$ *- базис ортогонального дополнения* U_0 *к пространству* $g(z)M_2(\Gamma_0(N))$ *в пространстве* $S_{l+2}(\Gamma_0(N))$.

Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) = f(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \oplus U,$$

где $U = h(z) \cdot U_0$,

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l+2(4), \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l(4). \end{cases}$$

Для нечетного веса можно доказать аналогичную теорему . Рассекающие функции $f(z)$ можно выписать явно в виде эта-произведений. Вес l всегда можно выбрать не превосходящим 12 и часто равным 2.

Литература

1. *Biagioli A.J.F* . The construction of modular forms as products of transforms of Dedekind eta-function // Acta Arithm., **54**:4 (1990), 273-300.

2. *Dummit D., Kisilevsky H., McKay J.* Multiplicative products of η—functions //Contemp.Math., **45** (1985), 89-98.

3. *Ono K.* The web of modularity: Arithmetic of the coefficients of modular forms and q - series . — Providence, Rhode island: Am.Math.Soc.,2004.

4. *Воскресенская Г.В.* Точное рассечение в пространствах параболических форм с характерами // Матем.заметки , **103**:6 (2018), 818-830.

5. *Воскресенская Г.В.* Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техники. Сер.Соврем.мат. и ее прил.Темат.обз., **136** (2017), 103-137.

КРУГОВАЯ СХЕМА ФЛЕЙТАС ДЛЯ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ ПОВЕРХНОСТИ

В.Д. Галкин, Е.В. Ноздринова, О.В. Починка

vgalkin@hse.ru, enozdrinova@hse.ru, olga-pochinka@yandex.ru

УДК 517.9

В настоящей работе получена классификация градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях посредством обобщения круговой схемы Флейтас. В 1975 году она доказала, что такая схема является полным инвариантом топологической эквивалентности для полярных потоков на 2- и 3-многообразиях. В настоящей работе мы обобщаем понятие круговой схемы на произвольные градиентно-подобные потоки на поверхностях. Доказываем, что класс изоморфности таких схем является полным инвариантом топологической эквивалентности. Также в работе исчерпывающим образом решен вопрос реализуемости абстрактной круговой схемы градиентно-подобным потоком на поверхности. Кроме того, построен эффективный алгоритм различения изоморфности круговых схем.

Ключевые слова: математика, динамические системы, градиентно-подобные потоки, классификация потоков

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101

Галкин Владислав Дмитриевич, стажер-исследователь НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Galkin Vladislav (NRU HSE, Nizhny Novgorod, Russia)

Ноздринова Елена Вячеславовна, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Nozdrinova Elena (NRU HSE, Nizhny Novgorod, Russia)

Починка Ольга Витальевна, д.ф.-м.н., профессор, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Olga Pochinka (NRU HSE, Nizhny Novgorod, Russia)

Fleitas circular scheme of gradient-like flows on surface

In this paper, a classification of gradient-like flows on arbitrary surfaces is obtained by generalizing the circular scheme of Flutes. In 1975, she proved that such a scheme is a complete invariant of topological equivalence for polar flows on 2- and 3-manifolds. In this paper, we generalize the concept of a circular circuit to arbitrary gradient-like flows on surfaces. We prove that the isomorphism class of such schemes is a complete invariant of topological equivalence. The paper also exhaustively solves the question of the feasibility of an abstract circular scheme with a gradient-like flow on the surface. In addition, an efficient algorithm for distinguishing the isomorphism of circular schemes is constructed.

Keywords: mathematics, dynamical systems, gradient like flows, flows classification

В данной статье мы будем рассматривать *градиентно-подобные потоки* на поверхностях M^2, то есть потоки с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, инвариантные многообразия седловых точек которого не пересекаются. Обозначим класс таких потоков через G. Потоки рассматриваемого класса имеют наиболее простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности.

В работе [5] доказано, что если $f^t \in G$, тогда множество A_δ является аттрактором потока f^t и обладает захватывающей окрестностью U_δ, границу которой Σ_δ каждая траектория потока $f^t|_{W^s_{\Omega_\delta}\setminus\Omega_\delta}$ пересекает в точности в одной точке. Кроме того, для любого потока $f^t \in G$ существует множество $\delta_* \subset \Omega^1_{f^t}$ такое, что $U_{\delta_*} \cong \mathbb{D}^2$ и $\Sigma_{\delta_*} \cong \mathbb{S}^1$ (см. Теорема 1 [5]). Положим

$$L^s_{\delta_*} = \{W^s_\sigma \cap \Sigma_{\delta_*},\, \sigma \in \delta_*\},\; L^u_{\delta_*} = \{W^u_\sigma \cap \Sigma_{\delta_*},\, \sigma \in (\Omega^1_{f^t} \setminus \delta_*)\}.$$

Каждый элемент множества $L^s_{\delta_*}$ ($L^u_{\delta_*}$) представляет собой пару точек пересечения окружности Σ_{δ_*} с устойчивым (неустойчивым) многообразием седла W^s_σ (W^u_σ), которые помечены спином $+$, если объединение диска U_{δ_*} с трубчатой окрестностью неустойчивого (устойчивого) многообразия W^u_σ (W^s_σ) гомеоморфно кольцу, и спином -, если это объединение гомеоморфно пленке Мёбиуса. Набор

$$S_{\delta_*} = (\Sigma_{\delta_*},\, L^s_{\delta_*},\, L^u_{\delta_*})$$

назовем *круговой схемой* потока $f^t \in G$. Две круговые схемы S_{δ_*} и $S_{\delta'_*}$ назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : \Sigma_{\delta_*} \to \Sigma_{\delta'_*}$, переводящий пары точек множеств $L^s_{\delta_*}$, $L^u_{\delta_*}$ в пары точек множеств $L^s_{\delta'_*}$, $L^u_{\delta'_*}$, соответственно, с сохранением спинов.

Так как выбрать A_{δ_*} можно не единственным способом, то обозначим через S_{f^t} набор всех возможных круговых схем потока $f^t \in G$. Наборы S_{f^t} и $S_{f'^t}$ потоков f^t и f'^t из класса G назовем *эквивалентными*, если круговые схемы в наборах попарно эквивалентны.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Потоки f^t, $f'^t \in G$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда множества их круговых схем S_{f^t}, $S_{f'^t}$ эквивалентны.*

Доказательство теоремы будет следовать из двух нижеследующих лемм.

Лемма 1. *Множества круговых схем топологически эквивалентных потоков f^t, $f'^t \in G$ эквивалентны.*

Лемма 2. *Если для потоков f^t, $f'^t \in G$ множества круговых схем S_{f^t}, $S_{f'^t}$ эквивалентны, то потоки f^t, f'^t топологически эквивалентны.*

Литература

1. *Kosniowski C.* A first course in algebraic topology // CUP Archive (1980).

2. *Pochinka O.V, Zinina S.Kh.* Construction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics. — Springer (2021) —vol. 26 num.4 350–369.

3. *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society (1975). vol. 6 — 155-183.

3. *Medvedev T.V., Pochinka O.V., Zinina S.Kh.* On existence of Morse energy function for topological flows // Elsevier (2021). vol. 378 — 1-15.

4. *Grines, Viacheslav and Medvedev, Timur and Pochinka, Olga* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds // (2016). vol. 46 01

5.*Галкин В.Д., Починка О.В.* Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством // Журнал Средневолжского математического общества (2022). vol. 24, num. 2 — 132-140.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ФЕРМА-ШТЕЙНЕРА В ГИПЕРПРОСТРАНСТВАХ НАД КОНЕЧНОМЕРНЫМИ НОРМИРОВАННЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

А.Х. Галстян

ares.1995@mail.ru

УДК 515.124.4, 519.176

Проблема Ферма–Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ пространства Y минимальна [1]. Мы рассматриваем эту проблему в случае, когда Y — это пространство непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X, наделённое метрикой Хаусдорфа, то есть Y является гиперпространством над X. В данной работе изучается вопрос устойчивости решения проблемы Ферма–Штейнера при переходе от границы из конечных компактов к границе, состоящей из их выпуклых оболочек.

Ключевые слова: проблема Штейнера, проблема Ферма–Штейнера, экстремальные сети, расстояние Хаусдорфа.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 21-11-00355) в МГУ имени М.В.Ломоносова, а также при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (договор № 21-8-3-3-1 от 01.10.2021).

Галстян Арсен Хачатурович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Arsen Galstyan (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Stability of the solution of the Fermat-Steiner problem in hyperspaces

The Fermat–Steiner problem is to find all points of the metric space Y such that the sum of the distances from each of them to points from some fixed finite subset $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ of the space Y is minimal [1]. We consider this problem in the case when Y is the space of non-empty compact subsets of a finite-dimensional normed space X endowed with the Hausdorff metric, i.e. Y is a hyperspace over X. In this paper, we study the question of the stability of the solution of the Fermat–Steiner problem when passing from a boundary consisting of finite compact sets to a boundary consisting of their convex hulls.

Keywords: Steiner problem, Fermat–Steiner problem, extremal networks, Hausdorff distance.

В случае, когда Y является гиерпространством над другим метрическим пространством, изначально заданное множество $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ обычно называют *границей*, все A_i — *граничными множествами*, а подмножества, которые реализуют минимум суммы расстояний до граничных компактов — *компактами Штейнера*. Границу A назовём *устойчивой*, если при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов минимум суммы расстояний до них не изменится.

Мы обозначаем множество всех компактов Штейнера через $\Sigma(A)$. Оно разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, где $d = (d_1, \ldots, d_n)$, а d_i — это расстояние Хаусдорфа от компакта $K \in \Sigma_d(A)$ до A_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$. Множество всех векторов решений $d = (d_1, \ldots, d_n)$, для заданной границы A обозначается через $\Omega(A)$. Известно [2], что каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе единственный компакт K_d, который максимален по включению, а также некоторое количество минимальных по включению компактов. Через $B_r(y) \subset X$ мы обозначаем замкнутый шар с центром в точке y радиуса r. В статье [2] было доказано, что $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$, где $d \in \Omega(A)$. В работе [3] показано, что в случае границы из конечных компактов существует такой граничный компакт A_i и такая точка a_j^i в нём, что $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ является конечным множеством, оно обозначается через $\mathrm{HP}_d(a_j^i)$. Если $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ бесконечно, то полагают для удобства, что $\mathrm{HP}_d(a_j^i) = \emptyset$. Множество $\bigcup\limits_{i,j} \mathrm{HP}_d(a_j^i)$ обозначается $\mathrm{HP}(A)$.

В настоящей работе мы доказываем, что в случае устойчивости решения проблемы Ферма–Штейнера сохраняется не только значение минимума суммы расстояний до граничных компактов, но остаётся неизменным сам вектор расстояний $(d_1, \ldots, d_n)$. Также мы приводим достаточное условие неустойчивости решения проблемы Ферма–Штейнера. Введём отображение

$$\mathrm{Conv} : Y \to Y,$$

которое каждому элементу гиперпространства Y ставит в соответствие его выпуклую оболочку. Обозначим также $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$ через K_d^{Conv}, а внутренность K_d^{Conv} через U_d^{Conv}.

Утверждение 1. *Для всех i выполняется*

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \leqslant d_i.$$

Утверждение 1 говорит о том, что минимум суммы расстояний при переходе к выпуклым оболочкам может лишь уменьшиться, и если он сохранился, то исходный вектор $(d_1, \ldots, d_n)$ будет вектором, реализующим решение проблемы Ферма–Штейнера для границы из выпуклых оболочек изначальных конечных граничных компактов. Более того, в случае устойчивости K_d^{Conv} будет максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ для новой границы из выпуклых компактов.

Теорема 2. [Достаточное условие неустойчивости] *Пусть норма пространства X, над которым было построено гиперпространство Y, строго выпукла, граница A состоит из конечных компактов, все d_i положительны и $U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Тогда граница A является неустойчивой, если существует номер s такой, что*

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \mathrm{HP}_d(A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}},$$

где m_s — количество точек в компакте A_s.

Автор выражает благодарность своим научным руководителям, профессору А. А. Тужилину и профессору А. О. Иванову, за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

Литература

1. *Ivanov A., Tuzhilin A.* Branching Solutions To One-Dimensional Variational Problems // World Scientific, **123**:3 (2001), 364p.

2. *Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A.* Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // Journal of Geom., **108** (2017), 575–590.

3. *A. Kh. Galstyan, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin* The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric // Sb. Math., **212**:1 (2021), 25–56.

О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ НОРМАЛИЗАТОРА МАКСИМАЛЬНОГО ТОРА В ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА

А.А. Гальт
galt84@gmail.com

УДК 512.542

Пусть G — конечная группа лиева типа и T — некоторый максимальный тор группы G. Мы завершаем исследование вопроса о существовании дополнения для тора T в его алгебраическом нормализаторе $N(G,T)$.

Ключевые слова: конечная группа лиева типа, скрученная группа лиева типа, группа Вейля, максимальный тор

On splitting of the normalizer of a maximal torus in groups of Lie type

Let G be a finite group of Lie type and T be a maximal torus of G. We complete the problem of the existence of a complement for the torus T in its algebraic normalizer $N(G,T)$.

Keywords: finite group of Lie type, twisted group of Lie type, Weyl group, maximal torus

Задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса [1]. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ простого поля характеристики p. Пусть σ — эндоморфизм Стейнберга и $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$. Хорошо известно, что все максимальные торы сопряжены в $\overline{G}$ и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\overline{G}$. Возникает естественный вопрос: для каких групп $\overline{G}$ нормализатор $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$. Ответ был независимо получен в работе [2] и, как следствие, в серии работ автора [3–6]. В случае групп Ли данная проблема была решена в работе [7].

Аналогичный вопрос может быть сформулирован для конечных групп лиева типа. Пусть G — конечная группа лиева типа, то есть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leqslant G \leqslant \overline{G}_\sigma$. Пусть $T = \overline{T} \cap G$ — максимальный тор группы G и $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ — алгебраический нормализатор в G тора T. Известно, что в случае конечных групп максимальные торы не обязаны быть сопряженными в группе G. Общая задача заключается в описании таких групп G и их максимальных торов T, что группа $N(G,T)$ расщепляется над T. Данная проблема решена для групп лиевых типов A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8 и F_4 в работах [4–6, 8–10]. Более того, для группы $F_4(q)$ в случае отсутствия дополнения в алгебраическом нормазилаторе для максимального тора найдены добавления минимального порядка.

Доклад выполнен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Гальт Алексей Альбертович, к.ф.-м.н., доцент, НГУ (Новосибирск, Россия); Alexey Galt (Novosibirsk State University, Moscow, Russia)

Дж. Адамс и Х. Хе в работе [2] рассмотрели смежный вопрос: каков порядок поднятия элемента $w \in W$ в группе $N_{\overline{G}}(\overline{T})$? Легко понять, что если порядок элемента w равен d, то минимальный порядок поднятия для w равен либо d, либо $2d$. Очевидно, что если $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$, то минимальный порядок равен d.

Для алгебраических групп $\overline{G}$ лиева типа E_6, E_7, E_8 или F_4 нормализатор тора не расщепляется. Тем не менее, в работах [8, 9] доказано, что в случае конечных групп $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ минимальный порядок поднятия всегда равен d. В частности, минимальный порядок поднятия равен d для соответсвующих алгебраических групп.

Для групп лиева типа F_4 в работе [2] найдены минимальные порядки поднятий для элементов, принадлежащих так называемым регулярным или эллиптическим классам сопряженности группы W. В частности, Дж. Адамс и Х. Хе показали, что существует эллиптический элемент порядка 4 для которого любое его поднятие имеет порядок 8. В работе [10] найдены минимальные порядки поднятий для всех элементов группы Вейля в группе $F_4(q)$.

Мы завершаем исследование поставленного вопроса о расщепляемости нормализатора максимального тора для оставшихся конечных групп лиева типа.

Теорема. *Пусть $G \in \{G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q), {}^2F_4(q), {}^2B_2(q)\}$. Пусть T — максимальный тор группы G и N — алгебраический нормализатор тора T. Тогда N расщепляется над T.*

Литература

1. *Tits J.* Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus // J. Algebra, **4** (1966), 96–116.

2. *Adams J., He X.* Lifting of elements of Weyl groups // J. Algebra, **485** (2017), 142–165.

3. *Гальт А.А.* О расщепляемости нормализатора максимального тора в исключительных линейных алгебраических группах // Изв. РАН. Сер. матем., **81**:2 (2017), 35–52.

4. *Galt A.A.* On splitting of the normalizer of a maximal torus in orthogonal groups // J. Algebra Appl., **16**:9 (2017), 1750174, 23 pp.

5. *Galt A.A.* On splitting of the normalizer of a maximal torus in linear groups // J. Algebra Appl., **14**:7 (2015), 1550114, 20 pp.

6. *Гальт А.А.* О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах // Изв. РАН. Сер. матем., **78**:3 (2014), 19–34.

7. *Curtis M., Wiederhold A., Williams B.* Normalizers of maximal tori // Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **418** (1974), 31–47.

8. *Galt A.A., Staroletov A.M.* On splitting of the normalizer of a maximal torus in $E_6(q)$ // Algebra Colloq., **26**:2 (2019), 329–350.

9. *Гальт А.А., Старолетов А.М.* О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в группах $E_7(q)$ и $E_8(q)$ // Мат. труды, **24**:1 (2021), 52–101.

10. *Гальт А.А., Старолетов А.М.* Минимальные добавления к максимальным торам в их нормализаторах для групп $F_4(q)$ // Изв. РАН. Сер. матем., **86**:1 (2022), 134–159.

О СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ

А.К. Гияси, И.П. Михайлов, В.Н. Чубариков
chubarik2020@mail.ru

УДК 511

В тезисах даны теоремы о разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел, по последовательности Фибоначчи и по целочисленной последовательности, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям и связанной с числами Пизо–Виджаяраргхавана.

Ключевые слова: математика, теория чисел, системы счисления, мультипликативная последовательность чисел, числа Фибоначчи, числа Пизо–Виджаярагхавана

On scales of notation and there generalizations

In this abstracts theorems on the expression of real numbers on multiplicative number system, Fibonacci sequence and integral valued sequences satisfiing recurrent correlations and connected with Pisot–Vidgajraghavan, are given.

Keywords: mathematics, theory of numbers, scales of notation, Fibonacci numbers, Pisot–Vidgajaraghavan numbers

В настоящем сообщении даны обобщения теоремы об однозначном представлении в виде ряда в позиционной системе счисления действительного числа и формулы А.О. Гельфонда с нецелым основанием, большим единицы.

Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $q_k \geqslant 2, r \geqslant 1$. Определим мультипликативную систему натуральных чисел $m_k, k \geqslant 0$, вида

$$m_0 = 1, m_k = m_{k-1}q_k, k \geqslant 1. \tag{1}$$

Пусть a — любое действительное число из полуинтервала $[0, 1)$. Говорят, что a представимо в виде ряда

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{m_k}, 0 \leqslant \bar{a}_k \leqslant q_k - 1, \tag{2}$$

где при $k \geqslant 0$ числа $\bar{a}_k$ — целые и $\bar{a}_0$ могут принимать два значения либо 0, либо 1, причем для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$a - \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{a}_k}{m_k} < m_n^{-1}. \tag{3}$$

Гияси Азар, к.ф.-м.н., Университет имени Алламе Табатабаи (Тегеран, Иран); Ph.D. (Allameh Tabataba'i University, Teheran, Iran)

Михайлов Илья Петрович, Казанский авиационный институт (Лениногорск, Россия); (Tupolev Kazan National Research Technical University, Leninigorsk, Russia)

Чубариков Владимир Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Chubarikov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Теорема 1. *Любое действительное число единственным образом представимо в виде* (2) *и* (3).

Простейшей мультипликативной системой является “факториальная” система $m_n = (n-1)!, q_n = n, 0! = 1, n \geqslant 1$. Используя теорему 1 о единственности разложения числа по обратным значениям m_n, оценим x_n для числа e. Имеем

$$\frac{x_n}{n!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, 1 = \bar{\lambda}_k = [q_k x_{k-1}] = [k x_{k-1}],$$

$$1 \leqslant q_k x_{k-1} < 2, \frac{1}{n+1} \leqslant x_n < \frac{2}{n+1}.$$

Таким образом,

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} + \frac{x_n}{n!}, \frac{1}{n+1} \leqslant x_n < \frac{2}{n+1}.$$

Заметим, что известна более точная оценка сверху: $x_n < \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant x_n < \frac{1}{n}.$$

Пусть задана последовательность чисел Фибоначчи

$$F_0 = F_1 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1} (k \geqslant 1).$$

Будем говорить, что число $a \geqslant 0$ представимо в виде ряда

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, \tag{4}$$

где $a_0 = [a]$ — целая часть числа a, целые числа $\bar{\alpha}_k, k \geqslant 1$, могут принимать всего два значения 0 и 1, и, кроме того, для любого натурального n выполняется неравенство

$$0 \leqslant a - a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} < F_n^{-1}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Любое действительное число единственным образом представимо в виде* (4) *и* (5).

Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая при $n \geqslant 0$ линейному рекуррентному соотношению с целыми постоянными коэффициентами

$$u_{n+r} = a_1 u_{n+r-1} + \cdots + a_r u_n, a_r \neq 0,$$

и пусть характеристический многочлен $f(x) = x^r - a_1 x^{r-1} - \cdots - a_r$ рекуррентного соотношения имеет следующее разложение на линейные множители

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \ldots (x - \alpha_s)^{e^s}, e_1 + \cdots + e_s = r.$$

Тогда u_n как функция от аргумента $n \geqslant 0$ имеет вид

$$u_n = \sum_{k=1}^{s} P_k(n)\alpha_k^n,$$

где степень многочлена $P_k(n)$ не превосходит $e_k - 1$, а его коффициенты определяются начальным отрезком $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$ последовательности $\{u_n\}$. Число $\alpha = \alpha_1 > 1$ называют числом Пизо–Виджаярагхавана (PV-число), если все его сопряженные, отличные от α, лежат внутри единичного круга $|z| < 1$. Предположим, что для любого $n \geqslant 1$ имеет место неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < \alpha$. Любое $a \in [0,1)$ можно представить в виде

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{u_k}, 0 \leqslant \bar{a}_k < \alpha,$$

где $\bar{a}_k, k \geqslant 1,$ — целые числа.

Литература

1. *Гельфонд А. О.* Об одном общем свойстве систем счисления// Изв. АН СССР, сер. матем. 1959, **23** (Избр.тр. с.366-371).

2. *Zeckendorf E.* Reprśentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). 1972, **41**, p. 179-182.

3. *Ghyasi A. H.* A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. 2007, **14,** No.3, p.370.

4. *Гияси А. К., Михайлов И. П., Чубариков В. Н.* О разложении действительных чисел по некоторым последовательностям// Чебышевский сборник. 2022, **23,** No.3, с. 197- 220.

ОПЕРАТОРЫ РОТЫ-БАКСТЕРА НА АЛГЕБРАХ ХОПФА

М.Е. Гончаров

gme@math.nsc.ru

УДК 512

В данном докладе вводится понятие оператора Роты-Бакстера на кокоммутативных алгебрах Хопфа. Данное понятие обобщает понятие оператора Роты-Бакстера на группах и оператора Роты-Бакстера веса 1 на алгебрах Ли. Изучаются основные свойства введенного оператора. Показывается, что произвольный оператор Роты-Бакстера веса 1 на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (на группе G) можно единственным образом продолжить до оператора Роты-Бакстера на универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g})$ (соответственно, на групповую алгебру $F[G]$).

Ключевые слова: оператор Роты-Бакстера, алгебра Хопфа, универсальная обертывающая алгебра, групповая алгебра

Rota-Baxter operator on Hopf algebras

In this talk, we introduce and study the notion of a Rota-Baxter operator on a cocommutative Hopf algebra that generalizes notions of a Rota-Baxter operator on a group and a Rota-Baxter operator of weight 1 on a Lie algebra. We show that every Rota-Baxter operator (of weight 1) on a Lie algebra $\mathfrak{g}$ (resp., on a group G) can be uniquely extended to a Rota-Baxter operator on the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ (resp., on the group algebra $F[G]$).

Keywords: Rota-Baxter operator, Hopf algebra, universal enveloping algebra, group algebra

Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Линейное отображение $R : A \mapsto A$ называется оператором Роты-Бакстера веса $\lambda \in F$, если для любых $a, b \in A$:

$$R(a)R(b) = R(R(a)b + aR(b) + \lambda ab). \qquad (1)$$

С точностью до умножения на скаляр можно выделить два различных случая операторов Роты-Бакстера: случай нулевого веса и веса 1.

Операторы Роты-Бакстера впервые возникли как операторы на ассоциативных алгебрах в работе Г. Бакстера в середине 20-го века как инструмент при изучении интегральных операторов в теории вероятностей и математической статистики [1].

Независимо от этого, операторы Роты-Бакстера возникли в начале 80-х годов прошлого столетия в работах А.А. Белавина, В.Г. Дринфельда и

Доклад подготовлен поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282

Гончаров Максим Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия); Maxim Goncharov (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

М.А. Семёнова-Тян-Шанского при изучении решений классического уравнения Янга-Бакстера. Оказалось, что если на алгебре Ли задана невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма, то кососимметрические решения классического уравнения Янга-Бакстера находятся во взаимно-однозначном соответствии с кососимметрическими относительно данной формы операторами Роты-Бакстера веса 0, а структуры факторизуемых биалгебр Ли находятся во взаимно-однозначном соответствии с операторами Роты-Бакстера веса 1, удовлетворяющим $R + R^* + \lambda id = 0$.

Первым шагом при построении квантовой универсальной обертывающей алгебры для данной биалгебры Ли $(\mathfrak{g}, \delta)$ является продолжение коумножения δ до структуры ко-Пуассоновой коскобки на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$. В это связи естественно возникает вопрос о возможности продолжения оператора Роты-Бакстера R с алгебры Ли $\mathfrak{g}$ до какого-нибудь разумного оператора на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$. К сожалению, невозможно продолжить R до оператора $B : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$, удовлетворяющего (1).

В своей недавней работе Л. Гуо, Х. Ланг и Ю. Шенг [2] дали определение оператора Роты-Бакстера на группах. Данное определение согласуется с обычным понятием оператора Роты-Бакстера на алгебрах следующим образом: если G — это группа Ли и B является оператором Роты-Бакстера на группе G, то отображение, являющееся касательным к B в 1, является оператором Роты-Бакстера веса 1 на соответствующей алгебре Ли группы G.

В данной работе предлагается рассматривать универсальную обертывающую алгебру не просто как алгебру, а как кокоммутативную алгебру Хопфа. В это связи мы даем следующее

Определение. *Пусть $H = (H, \mu, \Delta, \eta, \epsilon, S)$ — кокоммутативная алгебра Хопфа. Линейное отображение $B : H \mapsto H$ называется оператором Роты-Бакстера, если B является морфизмом коалгебр и для любых $x, y \in H$:*

$$B(x)B(y) = B(x_{(1)}B(x_{(2)})yS(B(x_{(3)}))),$$

где $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ — обозначение Свидлера.

В работе доказывается ряд утверждений, являющихся аналогами известных утверждений для операторов Роты-Бакстера на алгебрах и группах. Кроме того, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между операторами Роты-Бакстера на алгебрах (группах) и операторами Роты-Бакстера на соответсвтующих универсальных обертывающих алгебрах(групповых алгебрах), рассматриваемых как кокоммутативные алгебры Хопфа.

Литература

1. *Baxter G.* An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity// Pacific J. Math., 10 (1960), 731–742.

2. *Guo L, Lang H, Sheng Y.* Integration and geometrization of Rota-Baxter Lie algebras// Adv. Math. 387 (2021), 107834.

3. *Goncharov M.* Rota-Baxter operators on cocommutative Hopf algebras// Journal of Algebra, 582 (2021), 39-56.

АКСИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ЙОРДАНОВА ТИПА

И.Б. Горшков
ilygor8@gmail.com

УДК 512.554.1, 512.554.7

Аксиальные алгебры — это класс неассоциативных коммутативных алгебр, свойства которых определяются в терминах закона слияния. Когда этот закон слияния градуирован, алгебра имеет естественно связанную группу автоморфизмов, и, таким образом, аксиальные алгебры неотъемлемо связаны с теорией групп. Примеры аксиальных алгебр включают большинство йордановых алгебр и алгебру Грайса. В этом докладе мы введем понятие аксиальной алгебры и сконцентрируемся на аксиальных алгебрах йорданова типа.

Ключевые слова: неассоциативная алгебра, йорданова алгебра, группа автоморфизмов

Axial algebras of Jordan type

Axial algebras are a class of non-associative commutative algebras whose properties are defined in terms of the fusion law. When this fusion law is graded, the algebra has a naturally associated automorphism group, and thus axial algebras are related to group theory. Examples of axial algebras include most Jordan algebras and the Grice algebra. In this talk, we introduce the notion of axial algebra and concentrate on axial algebras of Jordan type.

Keywords: non-associative algebra, Jordan algebra, automorphism group

Наибольшая простая спорадическая группа M, которую называют Монстром в силу огромного порядка, была построена как группа автоморфизмов алгебры Грисса V – 196884-мерной коммутативной неассоциативной алгебры над полем вещественных чисел. Дж. Конвей доказал, что каждой инволюции из M, лежащей в так называемом классе сопряженности $2A$, можно сопоставить ненулевой идемпотент из V, который называется осью. Позднее Дж. Холл, С. Шпекторов и Ф. Рехрен расширили теорию. Они ввели понятие аксиальной алгебры – коммутативной неассоциативной алгебры, порожденной идемпотентами, с данной таблицей слияния. В отличие от класса лиевых алгебр, благодаря которому возникают алгебраические группы и группы Шевалле, аксиальные алгебры могут нести группы самой разной природы: классические и исключительные группы, многие спорадические группы и группы 3-транспозиций. Таким образом, появляется надежда найти некоторую единую теорию для всех простых групп.

В настоящем докладе мы введем понятие аксиальной алгебры и сконцентрируемся на аксиальных алгебрах йорданова типа.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282

Горшков Илья Борисович, д.ф.-м.н., научный сотрудник НГУ (Новосибирск, Россия); Ilya Gorshkov (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

БИНАРНАЯ АДДИТИВНАЯ ЗАДАЧА С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.А. Гриценко, А.К. Эминян

s.gritsenko@gmail.com, ibhayk@gmail.com

УДК 511.34

Получены верхняя и нижняя оценки для числа решений проблемы делителей Титчмарша с простыми числами специального вида.

Ключевые слова: Бинарные аддитивные задачи теории чисел, проблема делителей Титчмарша, простые числа специального вида.

On the binary additive problems with primes of a special type

Upper and lower estimates for the number of solutions of the divisor problem of Titchmarsh with primes of a special type got in this paper.

Keywords: Binary additive problems of Number Theory, Divisor Problem of Titchmarsh, Primes of a special type.

В 1940 году И.М. Виноградов получил [1] для $\pi_2(N)$ — числа простых чисел, не превосходящих N и лежащих в промежутках $((2n)^2, (2n+1)^2)$ при натуральных n — следующую формулу

$$\pi_2(N) = \frac{\pi(N)}{2} + O(N^{1-0,1+\varepsilon}).$$

Обозначим множество простых чисел из промежутков $((2n)^2, (2n+1)^2)$ буквой V.

В 1980–1990 годах первый автор решил тернарную проблему Гольдбаха и проблему Варинга–Гольдбаха с простыми числами из множества V [2,3].

Перечисленные задачи решаются круговым методом по схеме решения тернарной задачи на основе оценок тригонометрических сумм специального вида.

В докладе будет представлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $I(x)$ — число решений уравнения*

$$p - 1 = uv$$

в простых числах из множества V, не превосходящих x, и натуральных числах u,v.

Тогда при $x > x_0$ справедливы неравенства

$$0,333\frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}x \leqslant I(x) \leqslant 0,666\frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}x$$

Гриценко Сергей Александрович, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergey Gritsenko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Эминян Айк Карапетович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия);Hayk Eminyan (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Литература

1. *Виноградов И.М.* Некоторое общее свойство распределения простых чисел, Математический сборник, 1940, т.7, с. 365–372.

2. *Гриценко С.А.* Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Варинга–Гольдбаха с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида, Успехи матем. наук, 1988, т. 43, вып. 4(262), с. 203–204.

3. *Гриценко С.А.* Три аддитивные задачи, Изв. РАН, сер. матем., 1992, т. 56, вып. 6, с. 1198–1216.

АЛГЕБРЫ РОТЫ — БАКСТЕРА И ДВОЙНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

В.Ю. Губарев

wsewolod89@gmail.com

УДК 512.6

Известная связь между конечномерными двойными алгебрами Ли и операторами Роты — Бакстера нулевого веса на алгебре матриц была обобщена в двух направлениях. Во-первых, она была продлена на бесконечномерный случай, что позволило построить пример простой двойной алгебры Ли. Во-вторых, эта связь была перенесена на случай операторов Роты — Бакстера ненулевого веса. Таким образом, введено новое понятие двойной алгебры Ли ненулевого веса, которое оказалось тесно связано с модифицированными двойными алгебрами Пуассона. В частности, была доказана гипотеза С. Артамонова.

Ключевые слова: оператор Роты — Бакстера, двойная алгебра Ли, двойная алгебра Пуассона

Rota—Baxter algebras and double Lie algebras

We extend the known connection between double Lie algebras and Rota—Baxter operators on the matrix algebra in two directions. Firstly, we adopt it to the infinite-dimensional case, hence, we construct the example of a simple double Lie algebra. Secondly, we generalize the connection to Rota—Baxter operators of nonzero weight. Thus, we define a new notion of a double Lie algebra of nonzero weight, which is deeply connected with modified double Poisson algebras. In particular, we confirm the conjecture of S. Arthamonov.

Keywords: Rota—Baxter operator, double Lie algebra, double Poisson algebra

---

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Губарев Всеволод Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, НГУ (Новосибирск, Россия); Vsevolod Gubarev (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

В 2008 году М. Ван ден Берг в качестве некоммутативного аналога алгебры Пуассона ввёл понятие двойной алгебры Пуассона [6]. По определению двойная алгебра Пуассона снабжена ассоциативным умножением и двойной скобкой Ли, которые связаны аналогом тождества Лейбница. Векторное пространство с заданной на нём двойной скобкой Ли называется двойной алгеброй Ли.

Известно [4], что двойные скобки Ли на конечномерном пространстве V находятся во взаимно однозначном соответствии с кососимметричными операторами Роты — Бакстера веса 0 на алгебре $\mathrm{End}(V)$. Данное соответствие продолжено на бесконечномерный случай. Таким образом, получен первый пример простой двойной алгебры Ли [5].

В совместной работе с М. Е. Гончаровым [3] введено понятие двойной алгебры Ли веса λ, которое при $\lambda = 0$ совпадает с уже известным понятием двойной алгебры Ли. Показано взаимно однозначное соответствие между двойными скобками Ли ненулевого веса λ на пространстве V и λ-кососимметричными операторами Роты — Бакстера веса λ на алгебре $\mathrm{End}(V)$. Установлено, что, как и в случае нулевого веса [4], простых конечномерных двойных алгебр Ли не существует.

В 2015 году С. Артамонов определил понятие модифицированной двойной алгебры Пуассона [1] с ослабленными по сравнению с двойными алгебрами Пуассона версиями антикоммутативности и тождества Якоби. В работе [2] было доказано, что каждая двойная скобка Ли веса λ, заданная на векторном пространстве V, единственным образом продолжается до модифицированной двойной скобки Пуассона на свободной ассоциативной алгебре $\mathrm{As}(V)$. Этот результат, в частности, подтверждает гипотезу С. Артамонова [1].

Литература

1. *Arthamonov S.* Noncommutative inverse scattering method for the Kontsevich system // Lett. Math. Phys., **105**:9 (2015), 1223–1251.

2. *Arthamonov S.* Modified double Poisson brackets // J. Algebra, **492** (2017), 212–233.

3. *Goncharov M., Gubarev V.* Double Lie algebras of a nonzero weight // Adv. Math., **409**:B (2022), 108680.

4. *Goncharov M.E., Kolesnikov P.S.* Simple finite-dimensional double algebras // J. Algebra, **500** (2018), 425–438.

5. *Gubarev V.* An example of a simple double Lie algebra // Sib. Electron. Math. Rep., **18**:2 (2021), 834–844.

6. *Van den Bergh M.* Double Poisson algebras // Trans. Amer. Math. Soc. **360**:11 (2008), 5711–5769.

ПОСТРОЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВЫХ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

М.А. Гузев

guzev@iam.dvo.ru

УДК 517.52

Показано, что для построения неевклидовой модели сплошной среды при расширении модели упругой сплошной среды достаточно ввести единственную дополнительную функцию, которая вычисляется как решение бигармонического уравнения через скалярную кривизну .

Ключевые слова:

Construction of non-Euclidean models of continuum

To construct a non-Euclidean model of a continuum when expanding the model of the elastic continuum, we introduce a single additional function, which is calculated as a solution of the biharmonic equation in terms of the scalar curvature.

Keywords: non-Euclidean model, biharmonic equation, stress function.

Из экспериментальных исследований хорошо известно, что пластическое деформирование твердого тела приводит к возникновению в нем внутреннего напряженного состояния. С физической точки зрения оно определяются наличием в материале дефектных структур, математическое описание которых связано с необходимостью учета неевклидова характера внутренней геометрии материала. С этой целью в моделях сплошной среды вводят дополнительные параметры, характеризующие геометрическую структуру внутренних взаимодействий частиц среды между собой: тензор Римана, тензор кручения и тензор неметричности (см., например, [1]). Для модели упругой сплошной среды эти объекты равны нулю, а варианты построения моделей материалов с учетом неевклидовых характеристик можно найти в [2-3]. Запас вводимых функций достаточно велик, поэтому поставим задачу построения минимального набора таких функций для неевклидовых моделей механики сплошных сред.

Рассмотрим механическое равновесие твердого тела при отсутствии массовых сил внутри объема, тогда справедливы уравнения равновесия Коши:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

Пусть реологическое соотношение между компонентами поля напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} является линейным (закон Гука): $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$, где λ, μ - феноменологические параметры Ламе. Тензор ε_{ij} не порождается

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00447, https://rscf.ru/project/22-19-00447/.

Гузев Михаил Александрович, д-р физ.-мат. наук, академик РАН, профессор, главный научный сотрудник ФГАОУ ВО "Пермский национальный исследовательский политехничекий университет"(Пермь, Россия), директор Института прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, Россия); Mikhail Guzev (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; Institute for Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia).

в общем случае полем смещений, т.е. компоненты ε_{ij} являются несовместными, тогда характеристикой несовместности являются функции

$$S_{ij,kl} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{li}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x^i \partial x^l}.$$

При малых деформациях величины $S_{ij,kl}$ совпадают с компонентами тензора кривизны $R_{ij,kl}$, который в трехмерном евклидовом пространстве определяется через симметричный тензор Риччи.

В [4] показано, что решения σ_{ij} можно представить через поле упругих τ_{ij} и самоуравновешенных напряжений T_{ij}: $\sigma_{ij} = \tau_{ij} + T_{ij}$. Компоненты T_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия Коши и условию, что суммарная сила и момент, действующие на тело, равны нулю (свойство самоуравновешенности). Представим T_{ij} в виде:

$$T_{ij} = \frac{\sigma_0 l^2}{4} \left(\delta_{ij} \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right),$$

где F - функция напряжений, постоянные σ_0 и l имеют размерность напряжения и длины, Δ - оператор Лапласа. Поскольку мы поставили задачу ввести минимальный набор характеристик для неевклидовой модели сплошной среды, то ее решение определяется возможностью параметризовать F через один из инвариантов тензора Риччи. Выберем след R тензора Риччи в качестве такого параметра, тогда при малых деформациях он равен

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Подставляя сюда компоненты ε_{ij}, выраженные через σ_{ij}, получаем неоднородное бигармоническое уравнение для определения функции F:

$$\Delta^2 F = \frac{E}{(1-\nu)\sigma_0 l^2} R, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Таким образом, мы ввели след тензора Риччи в качестве дополнительного параметра для построения решений неевклидовой модели сплошной среды. Получение уравнения для скалярной кривизны можно выполнить вариационным методом при задании внутренней энергии (см., например, [5]).

Литература

1. *Седов Л.И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // УМН, **20**:5(125) (1965), 121–180.

2. *Мясников В. П., Гузев М. А.* Аффинно-метрическая структура упругопластической модели сплошной среды // Черный Г.Г., Мищенко Е.Ф. (ред.) Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Леонида Ивановича Седова, Труды МИАН. — Москва: Наука, 1998. — 30-37.

3. *Мясников В. П., Гузев М. А.* Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // Физ. мезомех., **3**:1 (2000), 5-16.

4. *Мясников В. П., Гузев М. А.* Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах // ДАН, **380**:3 (2001), 627-629.

5. *Гузев М. А.* Структура кинематического и силового поля в Римановой модели сплошной среды // ПМТФ, **52**:3 (2011), 39-48.

ПРИМЕРЫ КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В ПЕРВОЙ АЛГЕБРЕ ВЕЙЛЯ НАД Q

А.Ф. Гундарева
a.gundareva@g.nsu.ru

УДК 517

Группа автоморфизмов первой алгебры Вейля над Q действует на коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами над Q. Мы доказываем, что для фиксированной эллиптической спектральной кривой над Q, имеющей хотя бы одну рациональную точку, множество орбит бесконечно.

Ключевые слова: автоморфизмы первой алгебры Вейля, коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами над Q, эллиптическая спектральная кривая

Examples of commuting operators in the first Weyl algebra over Q

The group of automorphisms of the first Weyl algebra over Q acts on commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients over Q. We prove that for fixed elliptic spectral curve over Q having at least one rational point the set of orbits is infinite.

Keywords: commuting differential operators with polynomial coefficients over Q, automorphisms of the first Weyl algebra, elliptic spectral curve.

Пусть K - поле характеристики 0, $A_1(K) == K[x][\partial_x]$ — первая алгебра Вейля над K. Хорошо известно, что группа автоморфизмов $Aut(A_1(K))$ действует на множестве решений уравнения $f(P,Q)=0$, т. е. если $P,Q \in A_1(K)$, $f(P,Q)=0$ и $\varphi \in Aut(A_1(K))$, то $f(\varphi(P),\varphi(Q))=0$, $f(P,Q)=0$

Интересной задачей является задача исследования множества орбит действия $Aut(A_1(K))$ на $\mathfrak{M}$. Вопрос о существовании уравнения $Q(z,w)=0$, для которого множество орбит конечно, напрямую связан с гипотезой Диксмье ([1]), в которой утверждается, что $End(A_1(K)\backslash\{0\}) = Aut(A_1(K))$. Если такое уравнение существует, то гипотеза Диксмье верна.

В [2] доказано, что для любого g существует спектральная кривая, заданная уравнением

$$w^2 = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + ... + c_1 z + c_0,$$

для которой множество орбит бесконечно. В [3] доказано, что для почти всех спектральных кривых рода 2 число орбит бесконечно.

В случае $A_1(\mathbb{Q})$ и $A_1(\mathbb{Z})$ вопрос о конечности множества орбит становится сложнее, так как сводится к разрешимости диофантовых уравнений над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$.

Доклад подготовлен при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

Гундарева Александра Федоровна, НГУ (Новосибирск, Россия); Alexandra Gundareva (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Мы рассматривали только коммутирующие самосопряженные дифференциальные операторы ранга 2 порядков 4 и 6 с эллиптической спектральной кривой

$$w^2 = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0. \tag{1}$$

Такие операторы были найдены И. М. Кричевером и С. П. Новиковым. Коэффициенты этих операторов выражаются через эллиптические функции, причем коэффициенты зависят от произвольного функционального параметра. С помощью этих операторов построены семейства коммутирующих пар операторов с рациональными коэффициентами с эллиптической спектральной кривой.

Теорема 1. ([4]) *Пусть эллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1) с рациональными коэффициентами $c_i \in \mathbb{Q}$, содержит хотя бы одну точку (z_0, w_0) с рациональными координатами. Тогда существует счетное семейство коммутирующих дифференциальных операторов, параметризованное рациональными числами $\alpha \in \mathbb{Q}$: $\{(L_{4,\alpha}, L_{6,\alpha}) \in \mathbb{Q}[x][\partial_x]\}$ со спектральной кривой (1) такое, что для различных $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}$ пары операторов $(L_{4,\alpha}, L_{6,\alpha})$, $(L_{4,\alpha'}, L_{6,\alpha'})$ не переводятся друг в друга элементами из $Aut(A_1(\mathbb{Q}))$.*

В [2] доказано, что множество орбит действия $Aut(A_1(\mathbb{C}))$ на множестве решений (1) бесконечно, теорема 1 дает ответ в случае $Aut(A_1(\mathbb{Q}))$.

Следствие 1.1. *Множество орбит действия $Aut(A_1(\mathbb{Q}))$ на множестве решений уравнения (1) бесконечно.*

Литература

1. *J. Dixmier* Sur les algebres de Weyl // Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 209–242.

2. *A.E. Mironov, A.B. Zheglov* Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra// Int. Math. Res. Not. IMRN, 2016: **10** (2016), 2974-2993.

3. *В.Н. Давлетшина* О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два// Сиб. электрон. матем. изв., **10** (2013), 109–112.

4. *Гундарева А.Ф.* О коммутирующих элементах в первой алгебре Вейля над $\mathbb{Q}$ // Сиб. матем. журн., **63**:5 (2022), 1052-1063.

О КЛАССИФИКАЦИИ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ СИСТЕМ С МНОГОМЕРНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Е.Я. Гуревич
egurevich@hse.ru

УДК 517.9

В докладе изучается связь между топологическим типом несущего многообразия размерности $n \geqslant 4$ градиентно-подобных потоков и каскадов без гетероклинических пересечений и приводятся результаты о топологической классификации таких систем.

Ключевые слова: градиентно-подобные системы, системы Морса-Смейла, топологическая классификация

On topological classification of gradient-like systems with multidimensional phase space

We study the relationship between the topological type of the carrier manifold of dimension $n \geqslant 4$ of gradient-like flows and cascades without heteroclinic intersections and presents results on the topological classification of such systems.

Keywords: gradient-like systems, Morse-Smale systems, topological classification

Обозначим через $G(M^n)$ класс гладких потоков на замкнутом гладком многообразии M^n, неблуждающее множество которых состоит из гиперболических состояний равновесия и инвариантные многообразиях седловых состояний равновесия не пересекаются. Такие потоки являются структурно-устойчивыми и принадлежат множеству градиентно-подобных потоков. Напомним, что индексом Морса гиперболического состояния равновесия называется число, равное размерности его неустойчивого многообразия. Обозначим через k_{f^t} число состояний равновесия потока f^t, имеющих индекс Морса равный 1 или $(n-1)$, и через l_{f^t} число состояний равновесия, индекс Морса которых равен нулю или n. Положим $g_{f^t} = \frac{k_{f^t} - l_{f^t} + 2}{2}$.

Из работ [1], [2] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f^t \in M^n$.*

1. *если индекс Морса любого состояния равновесия принимает значения $\{0, 1, n-1, n\}$, то M^n гомеоморфно связной сумме $\mathcal{S}^n_{g_{f^t}}$ сферы и g_{f^t} копий многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$;*

2. *если M^n гомеоморфно связной сумме $\mathcal{S}^n_{g_{f^t}}$ сферы и $g \geqslant 0$ копий многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, то индекс Морса любого состояния равновесия принимает значения $\{0, 1, n-1, n\}$ и $g_{f^t} = g$.*

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Гуревич Елена Яковлевна, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Elena Gurevich NRU HSE, Nizhnii Novgorod, Russia)

Каждому потоку $f^t \in G(\mathcal{S}_g^n)$ поставим в соответствие двухцветный граф Γ_{f^t} следующим образом. Обозначим через $\mathcal{L}_{f^t}$ множество всех замыканий инвариантных многообразий седловых состояний равновесия размерности $(n-1)$ и через $\mathcal{D}_{f^t}$ множество компонент связности многообразия, полученного из M^n удалением всех элементов из множества $\mathcal{L}_{f^t}$.

Двуцветным графом потока f^t назовем граф Γ_{f^t} со следующими свойствами:

1) множество $V(\Gamma_{f^t})$ вершин графа Γ_{f^t} находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\mathcal{D}_{f^t}$, множество $E(\Gamma_{f^t})$ ребер графа Γ_{f^t} находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\mathcal{L}_{f^t}$;

2) вершины v_i, v_j инцидентны ребру $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие им области D_i, D_j имеют общую границу;

3) ребро $e_{i,j}$ имеет цвет s (u) если оно соответствует многообразию $cl\, W_p^s \in \mathcal{L}_{f^t}$ $(cl\, W_q^u \in \mathcal{L}_{f^t})$.

Теорема 2 ([3]). *Потоки $f^t, f'^t \in G(\mathcal{S}_g^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f'^t}$ изоморфны посредством изоморфизма, сохраняющего цвет ребер.*

Литература

1. *V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka,* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections// Journal of Mathematical Sciences, **208**:1 (2015), 81-90.

2. *В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич,* Индекс Морса седловых состояний равновесия градиентно-подобных потоков на связной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$// Математические заметки, **111**:4 (2022), 616-619.

3. *В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич,* Топологическая классификация потоков без гетероклинических траекторий на связной сумме многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$// Успехи математических наук, **77**:4 (2022), 201-202.

КВАЗИ-КЭЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ НА ШЕСТИМЕРНОЙ СФЕРЕ

Н.А. Даурцева
n.daurtseva@g.nsu.ru

УДК 514.74

В докладе я расскажу о том, как можно построить семейство квази-кэлеровых структур на 6-мерной сфере, используя структуры инваринатные относительно действия группы $SU(2) \times SU(2)$. А также о том, как эти структуры связаны со структурой Кэли и косимплектическими структурами на сфере.

Ключевые слова: почти эрмитовы многообразия, квази-кэлеровы структуры, структуры коодноросности 1

Quasi-kähler structures on 6-sphere

I will talk how to construct a family of quasi-kähler sturctures on the 6-sphere, using $SU(2) \times SU(2)$-invariant structures. Also I explain how are these structures related to Cayley structure and cosymplectic structure on the sphere.

Keywords: almost hermitian manifolds, quasi-kähler structures, cohomogeneity one structures

Хорошо известно, что на шестимерной сфере определена почти комплексная структура, индуцированная вложением сферы в $\mathbb{R}^7$. Эту структуру часто называют структурой Кэли, она инвариантна относительно действия группы G_2 на S^6 и в паре с метрикой постоянной кривизны (круглой метрикой на сфере) задает приблизительно кэлерову структуру на S^6. Относительно других почти эрмитовых структур на круглой сфере известно, что все они не могут быть эрмитовыми [1]. Более того, эрмитовыми не могут быть структуры, для которых метрика "достаточно близка" к круглой [2]. Последний результат, касающийся свойств почти эрмитовых структур на S^6 получен в 2017 Марком Хаскинсом и Лоренцо Фосколо [3] и утверждает существование неоднородной приблизительно кэлеровой структуры, отличной от структур Кэли. Она строится на множестве почти эрмитовых структур инвариантных относительно действия коодноросности 1 группы $SU(2) \times SU(2)$ на сфере.

В докладе я расскажу о тех классах почти эрмитовых структур которые удается построить на 6-сфере, ограничившись структурами коодноросности 1.

Литература

1. *LeBrun C.* Orthogonal complex structures on S^6 // Proc. Amer. Math. Soc., **101**:1 (1958), 136–138.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

Даурцева Наталия Александровна, к.ф.-м.н., доцент, НГУ (Новосибирск, Россия); Nataliya Daurtseva (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

2. *Bor G., Hernandez-Lamoneda L.* The canonical bundle of hermitian manifold // Bol. Soc. Mat. Mexicana, **5**:3 (1999), 187–198.

3. *Foscolo L., Haskins M.* New G_2-Holonomy Cones and Exotic Nearly Kähler Structures on S^6 and $S^3 \times S^3$ // Ann. of Math.,**185**:1 (2017), 59–130.

ОБ ОЦЕНКАХ БЫКОВСКОГО ДЛЯ МЕРЫ КАЧЕСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.Н. Кормачева, Н.Н. Добровольский, И.Ю. Реброва, Н.М. Добровольский

dobrovol@tsput.ru

УДК 511.3,511.4

В докладе будут даны оценки сверху и снизу меры качества оптимальных коэффициентов через сумму по множеству Быковского. Множество Быковского было определено в 2002 году В. А. Быковским и состоит из минимальных решений линейного сравнения с оптимальными коэффициентами.

Ключевые слова: функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения

On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients

The report will give top and bottom estimates of the quality measures of optimal coefficients through the sum over the Bykovsky set. The Bykovsky set was defined in 2002 by V. A. Bykovsky and consists of minimal solutions of linear comparison with optimal coefficients.

Keywords: quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutionsquality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-710004_р_а. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

Кормачева Антонина Николаевна (Швейцария, Цюрих); Kormacheva Antonina Nikolaevna (Switzerland, Zurich)

Добровольский Николай Николаевич, к.ф.-м.н, ТГПУ имени Л.Н. Толстого (г. Тула, Россия); Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich (Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University of Tula, Russia)

Реброва Ирина Юрьевна, к.ф.-м.н, ТГПУ имени Л.Н. Толстого (г. Тула, Россия); Rebrova Irina Yuryevna (Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University of Tula, Russia)

Добровольский Николай Михайлович, д.ф.-м.н, ТГПУ им. Л.Н. Толстого (г. Тула, Россия); Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich (Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University of Tula, Russia)

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a},p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k=1,2,\ldots,p),$$

имеют простой вид и требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j,p)=1\ (j=1,2,\ldots,s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1,\ldots,a_s)$ набора коэффициентов $(a_1,\ldots,a_s)$. $S_p(z_1,\ldots,z_s)$ выражается через сумму

$$S_p(z_1,\ldots,z_s) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_2}{}' \frac{\delta_p(z_1 m_1+\ldots+z_s m_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s},$$

где z_1, …, z_s – произвольные целые, $\overline{m}=\max(1,|m|)$ для любого вещественного m, $p_1=\left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2=\left[\frac{p}{2}\right]$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b\not\equiv 0 \pmod p, \\ 1, & \text{если} \quad b\equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Количественной мерой качества набора коэффициентов a_0, a_1,…, a_s параллелепипедальной сетки называется величина

$$H(p,\vec{a}) = \frac{3^{s+1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\prod_{j=0}^{s}\left(1-2\cdot\left\{\frac{a_j\cdot k}{p}\right\}\right)^2,$$

которая равна приближенному значению интеграла от функции $h(\vec{x}) = \frac{3^{s+1}}{p}\prod\limits_{j=0}^{s}(1-2x_j)^2$ по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой

$$1 = \int_0^1\ldots\int_0^1 h(\vec{x})d\vec{x} = \frac{3^{s+1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\prod_{j=0}^{s}\left(1-2\cdot\left\{\frac{a_j\cdot k}{p}\right\}\right)^2 - R_p[h],$$

где $R_p[h]$ — погрешность приближенного интегрирования.

Рассмотрим сравнение

$$a_1 m_1+\ldots+a_s m_s \equiv 0 \pmod N \tag{1}$$

относительно целочисленных переменных $m_1,\ldots,m_s$. Его ненулевое решение называется минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m_1',\ldots,m_s')$, для которого

$$|m_1'|\leqslant|m_1|,\ldots,|m_s'|\leqslant|m_s|; \quad |m_1'|+\ldots+|m_s'|<|m_1|+\ldots+|m_s|.$$

Множество всех минимальных решений сравнения (1) будем обозначать через $B_N(a_1,\ldots,a_s)$.

Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\ldots,m_s)\neq(0,\ldots,0)$.

Назовём суммой Быковского выражение вида

$$SB_N(a_1,\dots,a_s)=\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\dots\overline{x_{s\,j}}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\vec{x}_j=(x_{1\,j},\dots,x_{s\,j})$ $(1\leqslant j\leqslant r)$ *— все локальные минимумы из* $B(\Lambda)$, *причём* $\vec{x}_j\in B^*(\Lambda)$ $\quad(j=1,\dots,r^*)$ *и* $\vec{x}_{j+r^*}=-\vec{x}_j\in -B^*(\Lambda)$ $\quad(j=1,\dots,r^*)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$2SB_N(a_1,\dots,a_s)\leqslant S_N(a_1,\dots,a_s)\leqslant 2^s\ln^s N\cdot SB_N(a_1,\dots,a_s).$$

Назовём суммой Быковского второго порядка выражение вида

$$SB_N^{(2)}(a_1,\dots,a_s)=\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{(\overline{x_{1\,j}}\dots\overline{x_{s\,j}})^2}.$$

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\left|H(N,\vec{a})-\left(1+\frac{2}{N^2}\right)^s\right|\leqslant\frac{\pi^{2s}}{2^{s-1}}\cdot SB_N^{(2)}(a_1,\dots,a_s).$$

Литература

1. *А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, Т. А. Морозова* Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4.

О ДВУМЕРНЫХ РЕШЕТКАХ СРАВНЕНИЙ

Н.Н. Добровольский
nikolai.dobrovolsky@gmail.com

УДК 511.3,511.4

В докладе будут даны с помощью теории наилучших приближений второго рода описание множества Быковского, состоящие из локальных минимумов решетки приближений Дирихле для рационального числа. В явном виде описано множество Быковского для двумерной решетки решений линейного сравнения. Получена формула, выражающая гиперболический параметр этой решётки через знаменатели подходящих дробей и скобки Эйлера и позволяющая вычислять его за $O(\ln N)$ арифметических операций.

Ключевые слова: наилучшие приближения второго рода, множества Быковского, решетки приближений Дирихле для рационального числа.

On two-dimensional comparison lattices

The report will give, using the theory of best approximations of the second kind, a description of the Bykovsky set consisting of local minima of the lattice of Dirichlet approximations for a rational number. The Bykovsky set for a two-dimensional lattice of linear comparison solutions is explicitly described. A formula is obtained expressing the hyperbolic parameter of this lattice in terms of denominators of suitable fractions and Euler brackets and allowing it to be calculated in $O(\ln N)$ arithmetic operations.

Keywords: the best approximations of the second kind, the Bykovsky set, the lattice of Dirichlet approximations for a rational number.

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова и Н. С. Бахвалова были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

В работе была решена задача о вычислении гиперболического параметра решётки решений линейного сравнения $m + an \equiv 0 \pmod N$ для случая $(a, N) = 1$. Численные эксперименты показали, что для некоторых решёток, для которых a и N невзаимно просты, получаются хорошие значения гиперболического параметра.

Качество оптимальных коэффициентов можно оценивать по величине константы Бахвалова, которую определяют как отношение гиперболического параметра к модулю N: $CB(a, N) = \frac{q(\Lambda(a,q))}{N}$. Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что эта константа не превосходит 0,5.

Цель данной работы — перенести результаты работы на случай решётки решений сравнения $m + dan \equiv 0 \pmod d)N$ для $(a, N) = 1$, $d > 1$ и дать формулу для вычисления константы Бахвалова.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

Добровольский Николай Николаевич, к.ф.-м.н, ТГПУ им. Л. Н. Толстого (г. Тула, Россия); Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich (Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University of Tula, Russia)

Решётка $\Lambda(da, dN)$ имеет простой вид:

$$\Lambda(da, dN) = \{(m_1, m_2) = (xdN - ady, y)|x, y \in \mathbb{Z}\}$$

и задается базисом $\vec{\lambda}_1 = (-ad, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (dN, 0)$. Детерминант решётки $\Lambda(da, dN)$ равен dN: $\det \Lambda(da, dN) = N$.

Все обозначения и определения соответствуют работе [1], в которой приведены необходимые сведения из теории цепных дробей, о скобках Эйлера и о наилучших приближениях второго рода.

Прежде всего установим взаимно-однозначное соответствие между точками решёток $\Lambda(a, N)$ и $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$:

$$\psi : \Lambda(a, N) \longleftrightarrow \Lambda\left(da, dN\right)$$

с помощью равенства

$$\psi((xN - ay, y)) = (d \cdot (xN - ay), y)\,, \quad \psi^{-1}\left(d \cdot (xN - ay), y\right) = (xN - ay, y).$$

Таким образом, взаимно-однозначное соответствие ψ задаётся линейным преобразованием с матрицей Ψ:

$$\Psi = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$(xN - ay, y) \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(d \cdot (xN - ay), y\right).$$

Так как $(a, N) = 1$, то $xN - ay = 0$ только при $y = Nt$, $x = at$. Отсюда следует, что при $d > 1$ множество Быковского $B(da, dN)$ содержит две точки $(0, N)$, $(0, -N)$ и ещё подмножество $B'(da, dN) = \{(dx, y)|(x, y) \in B(a, N)\}$.

Теорема 1. *Для множества Быковского $B(a, N)$ справедливо равенство*

$$B^*(a, N) = \{((-1)^m [q_{m+2}, \ldots, q_n]_{(n-m-1)}, Q_m)|m = 0, \ldots, n-1\},$$

$B(a, N) = B^*(a, N) \cup -B^*(a, N)$. *Кроме этого,* $r(a, N) = 2n$.

Из неё следует, что

$$B^*(da, dN) = \{((-1)^m [q_{m+2}, \ldots, q_n]_{(n-m-1)} d, Q_m)|m = 0, \ldots, n-1\} \bigcup \{(0, N)\}.$$

Теорема 2. *Для гиперболического параметра $q(\Lambda(da, dN))$ двумерной решётки $\Lambda(da, dN)$ решений линейного сравнения справедливо равенство*

$$q(\Lambda(da, dN)) = \begin{cases} dq(\Lambda(a, N)) & \textit{при } d \leqslant \frac{N}{q(\Lambda(a,N))}, \\ N & \textit{при } d > \frac{N}{q(\Lambda(a,N))}. \end{cases}$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(da, dN)) \leqslant da$ для $1 \leqslant a < N$, $(a, N) = 1$.

Из доказанных результатов следует, что для двухмерных параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{ak}{N}\right\}\right)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ допустимо рассмотрение невзаимно простых a и N.

Из теоремы 2 легко следует, что

$$CB(da, dN) = \begin{cases} CB(a, N) & \text{при } d \leqslant \frac{N}{q(\Lambda(a,N))} = \frac{1}{CB(a,N)}, \\ \frac{1}{d} & \text{при } d > \frac{N}{q(\Lambda(a,N))} = \frac{1}{CB(a,N)}. \end{cases}$$

Литература

1. *А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, Т. А. Морозова* Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4.

УСРЕДНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.А. Дородный, Т.А. Суслина

mdorodni@yandex.ru, t.suslina@spbu.ru

УДК 517.955.8

Изучается усреднение решений гиперболических уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$. С помощью теоретико-операторного подхода получены операторные оценки погрешности.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, операторные оценки погрешности, гиперболические уравнения

Homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients

We study homogenization of the solutions of hyperbolic equations with periodic rapidly oscillating coefficients in $\mathbb{R}^d$. Using the operator-theoretic approach, we obtain operator error estimates.

Keywords: periodic differential operators, homogenization, operator error estimates, hyperbolic equations

---

Выполнено при поддержке РНФ, проект 22-11-00092.

Дородный Марк Александрович, к.ф.-м.н., инженер-исследователь, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Mark Dorodnyi (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

Суслина Татьяна Александровна, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Tatiana Suslina (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, Ω — ячейка этой решетки, $\widetilde{\Gamma}$ — двойственная решетка, $\widetilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна двойственной решетки. Для Γ-периодических функций обозначаем $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определенная Γ-периодическая $(m \times m)$-матрица-функция. Далее, $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j — матрицы размера $m \times n$. Предполагается, что $m \geqslant n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ имеет ранг n при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

Мы изучаем поведение оператор-функций $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ и $A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ при малом ε и $\tau \in \mathbb{R}$. Результаты применимы к изучению решения задачи Коши для гиперболического уравнения:

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}),$$

поскольку решение представимо в виде

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \boldsymbol{\varphi} + A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \boldsymbol{\psi}.$$

Введем эффективный оператор $A_0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — положительная *эффективная матрица*. Напомним определение g^0. Пусть матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$. Тогда $g^0 = \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Согласно работам [1], [2], оператор-функции $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ и $A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ сходятся к аналогичным функциям от A_0 в подходящих нормах. Справедливы оценки

$$\left\| \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau A_0^{1/2}) \right\|_{H^2 \to L_2} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon, \tag{1}$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - A_0^{-1/2} \sin(\tau A_0^{1/2}) \right\|_{H^1 \to L_2} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{2}$$

Здесь $H^s = H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \geqslant 0$, — пространства Соболева. В [2] получено также приближение для $A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ в "энергетической" норме при учете корректора:

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - A_0^{-1/2} \sin(\tau A_0^{1/2}) - \varepsilon \widetilde{K}_1(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^2 \to H^1} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{3}$$

Здесь $\widetilde{K}_1(\varepsilon, \tau) = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon A_0^{-1/2} \sin(\tau A_0^{1/2})$, а Π_ε — ПДО, символ которого есть характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}/\varepsilon$.

Новые результаты М.А. Дородного и Т.А. Суслиной (2022) — аппроксимации при учете корректоров для оператора $A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ и для композиции $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$:

$$\bigl\|\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau A_0^{1/2})-\varepsilon K_1(\varepsilon,\tau)\bigr\|_{H^3\to H^1}\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{4}$$

$$\bigl\|\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau A_0^{1/2})-\varepsilon K(\varepsilon,\tau)\bigr\|_{H^4\to L_2}\leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \tag{5}$$

$$\bigl\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})-A_0^{-1/2}\sin(\tau A_0^{1/2})-\varepsilon\widetilde{K}(\varepsilon,\tau)\bigr\|_{H^3\to L_2}\leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2. \tag{6}$$

Корректор $K_1(\varepsilon,\tau)$ имеет вид $K_1(\varepsilon,\tau)=\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\cos(\tau A_0^{1/2})$. Корректоры $K(\varepsilon,\tau)$ и $\widetilde{K}(\varepsilon,\tau)$ имеют более сложную структуру: $K(\varepsilon,\tau)=K_1(\varepsilon,\tau)+K_2(\tau)$, $\widetilde{K}(\varepsilon,\tau)=\widetilde{K}_1(\varepsilon,\tau)+\widetilde{K}_2(\tau)$, где члены $K_2(\tau)$ и $\widetilde{K}_2(\tau)$ не зависят от ε; их описание достаточно громоздко.

Оценки (1)–(6) точны по порядку. В общем случае они точны также по типу операторной нормы и в отношении зависимости от времени τ. Однако, при некоторых дополнительных условиях эти результаты допускают усиление. Исследование точности оценок (1)–(3) проведено в [3], [4]. Работа, посвященная результатам с корректорами, готовится к печати.

Результаты с корректорами применяются к исследованию решений задачи Коши для гиперболического уравнения $\partial_\tau^2\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)=-(A_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau)$ с начальными данными из специального класса.

Литература

1. *Бирман М.Ш., Суслина Т.А.* Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений // Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107.

2. *Meshkova Yu.M.* On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients // J. Spectr. Theory, **11**:2 (2021).

3. *Dorodnyi M.A., Suslina T.A.* Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients // J. Diff. Equ., **264**:12 (2018), 7463–7522.

4. *Дородный М.А., Суслина Т.А.* Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов // Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.

УСРЕДНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

М.А. Дородный, Т.А. Суслина
mdorodni@yandex.ru, suslina@list.ru

УДК 517.955.8

Изучается задача об усреднении в пределе малого периода задачи Коши для нестационарной системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость — быстро осциллирующая матрица-функция, а магнитная проницаемость — постоянная положительная матрица. Получены аппроксимации для магнитных полей. При дополнительных предположениях также получены аппроксимации для электрических полей.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, операторные оценки погрешности, нестационарная система Максвелла

Homogenization of nonstationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability

The homogenization problem in the small period limit for the Cauchy problem for the nonstationary Maxwell system in $\mathbb{R}^3$ is considered. It is assumed that the permittivity is a rapidly oscillating matrix function and the permeability is a constant positive matrix. We obtain approximations for the magnetic fields. We also obtain approximations for the electric fields under some additional assumptions.

Keywords: periodic differential operators; homogenization; operator error estimates; non-stationary Maxwell system

Изучается задача Коши для нестационарной системы Максвелла в случае, когда магнитная проницаемость задана постоянной положительной матрицей μ, а диэлектрическая проницаемость задана быстро осциллирующей (при $\varepsilon \to 0$) матрицей $\eta^\varepsilon(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbf{x},t), & \operatorname{div} \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = 0, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}; \\ \partial_t \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\varepsilon(\mathbf{x},t), & \operatorname{div} \mu \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = 0, \quad\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}; \\ \mathbf{E}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (P_\varepsilon \mathbf{f})(\mathbf{x}),\ \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Здесь симметричная матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ периодична относительно некоторой решётки, положительно определена и ограничена. Далее, $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, $\operatorname{div} \mu\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, и P_ε — ортогональный проектор пространства $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3;\eta^\varepsilon)$ на подпространство

$$\{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) \colon\ \operatorname{div} \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Дородный Марк Александрович, к.ф.-м.н., инженер-исследователь, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Mark Dorodnyi (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)
Суслина Татьяна Александровна, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Tatiana Suslina (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

Хорошо известно, что электрические и магнитные поля $\mathbf{E}_\varepsilon$ и $\mathbf{H}_\varepsilon$ слабо сходятся к полям $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$, которые являются решениями усреднённой системы Максвелла с *постоянной эффективной* проницаемостью η^0.

Обозначим через $\mathbf{D}_\varepsilon = \eta^\varepsilon \mathbf{E}_\varepsilon$, $\mathbf{D}_0 = \eta^0 \mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_\varepsilon = \mu \mathbf{H}_\varepsilon$, $\mathbf{B}_0 = \mu \mathbf{H}_0$ соответствующие векторы электрического смещения и магнитные индукции. Наши основные результаты:

• Пусть $\boldsymbol{\phi}, \mathbf{f} \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и $\operatorname{div} \mu\boldsymbol{\phi} = 0$. Тогда при $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{H}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{H}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant C(1+|t|)\varepsilon(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}),\\
\|\mathbf{B}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{B}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant C(1+|t|)\varepsilon(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}).
\end{aligned}$$

• Пусть $\mathbf{f} \in H^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и $\boldsymbol{\phi} = 0$. Тогда при $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{E}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{E}_\varepsilon(\cdot,0)) - (\mathbf{1} + \Sigma^\varepsilon)(\mathbf{E}_0(\cdot,t) - \mathbf{E}_0(\cdot,0))\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant C|t|(1+|t|)\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^3(\mathbb{R}^3)},\\
&\|(\mathbf{D}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{D}_\varepsilon(\cdot,0)) - (\mathbf{1} + \widetilde{\Sigma}^\varepsilon)(\mathbf{D}_0(\cdot,t) - \mathbf{D}_0(\cdot,0))\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant C|t|(1+|t|)\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Здесь Σ^ε и $\widetilde{\Sigma}^\varepsilon$ — так называемые корректоры нулевого порядка. При дополнительных предположениях эти результаты допускают улучшение:

• Пусть $\boldsymbol{\phi}, \mathbf{f} \in H^{3/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и $\operatorname{div} \mu\boldsymbol{\phi} = 0$. Тогда при $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{H}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{H}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant C(1+|t|)^{1/2}\varepsilon(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)}),\\
\|\mathbf{B}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{B}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant C(1+|t|)^{1/2}\varepsilon(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)}).
\end{aligned}$$

• Пусть $\mathbf{f} \in H^{5/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и $\boldsymbol{\phi} = 0$. Тогда при $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{E}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{E}_\varepsilon(\cdot,0)) - (\mathbf{1} + \Sigma^\varepsilon)(\mathbf{E}_0(\cdot,t) - \mathbf{E}_0(\cdot,0))\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant C|t|(1+|t|)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^3)},\\
&\|(\mathbf{D}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{D}_\varepsilon(\cdot,0)) - (\mathbf{1} + \widetilde{\Sigma}^\varepsilon)(\mathbf{D}_0(\cdot,t) - \mathbf{D}_0(\cdot,0))\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant C|t|(1+|t|)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Результаты работы изложены в [1], [2].

Литература

1. *Дородный М.А., Суслина Т.А.* Усреднение нестационарного модельного уравнения электродинамики // Матем. заметки, **102**:5 (2017), 700-720.

2. *Dorodnyi M.A., Suslina T.A.* Homogenization of a Non-Stationary Periodic Maxwell System in the Case of Constant Permeability // J. Differ. Equ., **307** (2022), 348-388.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОДАВЛЕНИЯ МНЕНИЙ

Ю.А. Дорофеева, А.С. Мамаева
julana2008@yandex.ru, amamaeva186@gmail.com

УДК 519.83

В настоящей работе рассматривается теоретико-игровая модель динамики подавления мнений, основанная на нормальном законе распределения случайных величин. Данный подход обоснован более реалистичным представлением общения в современном мире, позволяющим учитывать влияние большого числа случайных факторов. Нашей главной целью является моделирование формирования усреднённого общественного мнения под влиянием инакомыслящих агентов.

Ключевые слова: теория игр, динамика мнений, социальные сообщества, агенты, инакомыслящие, консенсус

Modeling the dynamics of opinion suppression

In this paper, we consider a game-theoretic model of the dynamics of opinion suppression based on the normal distribution law of random variables. This approach is justified by a more realistic representation of communication in the modern world, which allows taking into account the influence of a large number of random factors. Our main goal is to model the formation of an average public opinion under the influence of dissident agents.

Keywords: game theory, opinion dynamics, social communities, agents, dissenters, consensus

Во многих отраслях науки, таких как социология, политология и философия, активно ведутся исследования по изучению процессов, приводящих к формированию усреднённого мнения людей, согласно установленным правилам. Формирование и изменение мнений – сложный процесс, зависящий от круга общения, внешних информационных источников, средств массовой информации, а также социальных сетей. В качестве результата взаимодействия агентов друг с другом может быть достигнут консенсус, поляризация, либо фрагментация.

Введём в рассмотрение динамику, усредняющую мнения агентов, следующего вида:

$$x_i(t+1) = x_i(t) \cdot \mathrm{e}^{-\beta(x_i(t)-\overline{x}(t))^2} + \overline{x}(t) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta(x_i(t)-\overline{x}(t))^2}\right), \quad i \in N \quad (1)$$

где $N = 1, 2, ..., n$ – множество агентов, $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ – мнение агента i в момент времени t, $\overline{x}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j(t)$ – средневзвешенное мнение всех агентов, начальное мнение агентов $x(0) = x_0$ задано, β – некоторый коэффициент.

Дорофеева Юлия Александровна, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский университет ИТМО (Санкт-Петербург, Россия); Julia Dorofeeva (ITMO University, Saint Petersburg, Russia)

Мамаева Анастасия Сергеевна, магистр, студент, Национальный исследовательский университет ИТМО (Санкт-Петербург, Россия); Anastasia Mamaeva (ITMO University, Saint Petersburg, Russia)

При этом будем полагать, что $x_i(t)$ – независимые случайные величины и динамика распределена по нормальному закону с параметрами $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, где

$$\overline{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(t)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} a \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i(t) - \overline{x}(t)\right)^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sigma^2 \tag{3}$$

Вычисляя вероятность попадания мнения агента в средневзвешенное мнение коллектива, установили, что она стремится к нулю:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(|x_i(t) - \overline{x}_n(t)| < \varepsilon) = \\ &= \mathbf{P}\left(\left|x_i(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1\ldots n,\ j \neq i} x_j(t)\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 = \\ &= \mathbf{P}(|S_n| < \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

где $S_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{n(n-1)}{n^2}\sigma^2\right)$

Исходя из полученных результатов, была установлена необходимость добавления функции управления особого вида для нелинейных систем, которая позволит воздействовать на инакомыслящих агентов и не разрушать установившееся усредненное мнение коллектива.

Литература

1. *Дорофеева Ю.А.* Теоретико-игровые модели динамики мнений // Автореферат, Петрозаводск, 2021.

2. *DeGroot M.H.* Reaching a Consensus // Journal of the American Statistical Association. - 1974. - Vol. 69.- pp.118-121.

3. *Hegselmann R., Krause U.* Opinion Dynamics and bonded confidence models, analysis and simulation // Journal of Artifical Societies and Social Simulation. - 2002. - Vol. 5(3). - pp. 1-33.

СМЕШАННЫЙ ОБЪЕМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

М.К. Досполова

dospolova.maria@yandex.ru

УДК 519.21

Результаты Судакова и Цирельсона устанавливают связь между внутренними объемами выпуклого компактного GB-подмножества K сепарабельного гильбертова пространства H и изонормальным гауссовским процессом на K.

В данной работе мы обобщим теорему Цирельсона на случай *смешанных объемов* бесконечномерных выпуклых GB-компактов в H, предварительно введя понятие смешанного объема для бесконечномерных выпуклых подмножеств H.

Ключевые слова: смешанные объемы, внутренние объемы, теорема Судакова, теорема Цирельсона, GB-множество, изонормальный процесс

Mixed volume of infinite-dimensional convex compact sets.

The results of Sudakov and Tsirelson establish a connection between the intrinsic volumes of a convex compact GB-subset K of a separable Hilbert space H and an isonormal Gaussian process on K.

In this work, we generalize Tsirelson's theorem to the case of *mixed volumes* of infinite-dimensional convex compact GB-subsets of H, first introducing the notion of mixed volume for infinite-dimensional convex subsets of H.

Keywords: mixed volumes, intrinsic volumes, Sudakov's theorem, Tsirelson's theorem, GB-set, isonormal process

Судакову [1] и Цирельсону [2] удалось установить глубокую связь между внутренними объемами $V_k(\cdot), k = 0, 1, \dots$ (см., например, [4, соотношение 4.8]) некоторых выпуклых компактов и гауссовскими процессами.

Будем называть центрированный гауссовский случайный процесс $(\xi(h))_{h\in H}$, параметрическим множеством которого является сепарабельное гильбертово пространство H, *изонормальным*, если его ковариационная функция имеет вид $\mathrm{cov}(\xi(h), \xi(g)) = \langle h, g\rangle$, где через $\langle\ ,\ \rangle$ обозначено скалярное произведение на H.

Пусть $\{\xi_i(h)\colon h \in H\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, обозначают k независимых копий изонормального процесса. Тогда *k-мерный спектр* выпуклого компактного множества $K \subset H$ определяется как следующее случайное множество:

$$\mathrm{Spec}_k K := \{(\xi_1(h), \dots, \xi_k(h))\colon h \in K\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-289).

Досполова Мария Каиржановна, лаборант, Международный математический институт им. Леонарда Эйлера (Санкт-Петербург, Россия); Mariia Dospolova (Leonhard Euler International Mathematical Institute, St Petersburg, Russia)

Подмножество K сепарабельного гильбертова пространства H называется *GB-множеством*, если существует модификация изонормального процесса с параметрическим множеством K, имеющая ограниченные почти наверное по модулю реализации. Известно [1, теорема 1], что свойство выпуклого K быть GB-множеством равносильно тому, что $V_1(K) < \infty$.

Теорема 1. (Судаков) *Для выпуклого компакта $K \subset H$*

$$V_1(K) = \sqrt{2\pi}\,\mathbf{E} \sup_{h \in K} \xi(h).$$

Теорема 2. (Цирельсон) *Для всех выпуклых компактных GB-множеств $K \subset H$ и всех $k = 0, 1, \ldots$*

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K),$$

где $\mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K)$ – средний объем $\mathrm{Spec}_k K$ и κ_k – объем k-мерного единичного шара.

Основная цель работы – получить обобщение теоремы 2 на случай *смешанных объемов.*

Минковский доказал [3], что для произвольных непустых выпуклых компактов $K_1, \ldots, K_s \subset \mathbb{R}^d$ функционал $\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_s K_s)$ при $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geqslant 0$ является однородным многочленом степени d с неотрицательными коэффициентами:

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_s K_s) = \sum_{i_1=1}^{s} \cdots \sum_{i_d=1}^{s} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} \tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}).$$

Коэффициенты $\tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d})$ являются однозначно определенными, если предположить, что они симметричны относительно перестановок $K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}$. Коэффициент $\tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d})$ называется *смешанным объемом* $K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}$. Несложно понять (см., например, [4, параграф 5.1]), что внутренние объемы являются частными случаями смешанных.

Пусть $K_1, \ldots, K_k$– непустые выпуклые подмножества H. Тогда *смешанный объем* $\tilde{V}(K_1, \ldots, K_k)$ множеств $K_1, \ldots, K_k$ определяется как

$$\tilde{V}(K_1, \ldots, K_k) = \sup_{K_i' \subset K_i} \frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}} \tilde{V}_d(K_1', \ldots, K_k', \underbrace{B^d, \ldots, B^d}_{d-k \text{ раз}}),$$

где супремум берется по всем $d \geqslant k$ и всем конечномерным выпуклым компактным подмножествам $K_i' \subset K_i, \dim K_i' \leqslant d, i = 1, \ldots, k$.

Все готово для формулировки основного результата работы.

Теорема 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для выпуклых компактных GB-множеств $K_i \subset H,\ \ i = 1, \ldots, k$ имеем*

$$\tilde{V}(K_1, \ldots, K_k) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\ \mathbf{E}\ \tilde{V}_k(\mathrm{Spec}_k K_1, \ldots, \mathrm{Spec}_k K_k).$$

Литература

1. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений // Труды МИАН, **141** (1976), 3-191.

2. *Цирельсон Б.С.* Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига. II // Теория вероятн. и ее примен., **30**:4 (1985), 772-779.

3. *Minkowski H.* Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs // Gesammelte Abhandlungen, **2** (1911), 131-229.

4. *Schneider R.* Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ФРАКТАЛЬНЫХ КУБОВ

Д.А. Дроздов

d.drozdov1@g.nsu.ru

УДК 514.8, 515.1

В своей работе я изучаю структуру пересечения фрактальных кубов. Цель моей работы — построить граф-ориентированную систему подобий для пересечения фрактальных кубов одного порядка и рассмотреть Размерность и Меру такого пересечения. Я также изучаю условия конечного и одноточечного пересечения копий фрактального куба.

Ключевые слова: фрактальный куб, самоподобное множество, фрактальная геометрия

On the intersections of fractal cubes

In my work I study the structure of the intersection of fractal cubes. The aim of my work is to construct a graph-directed system of similarities for the intersection of fractal cubes of the same order and consider the Dimension and Measure for such intersection. I am also studying the conditions for finite or one-point intersection of the pieces of a fractal cube.

Keywords: fractal cube, self-similar sets, fractal geometry

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

Дроздов Дмитрий Алексеевич, НГУ (Новосибирск, Россия), ИМ имени С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Dmitry Drozdov (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia) (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

Определение. Пусть $D = \{d_1, \ldots, d_r\} \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}^k$, где $n \geqslant 2$, а $1 < \#D < n^k$. Фрактальным k-кубом порядка n с множеством единиц D называют компактное множество $K \subset R^k$, удовлетворяющее

$$K = \frac{K + D}{n}.$$

Пусть $P = [0,1]^k$, тогда любой фрактальный k-куб содержится в P.

Определим грани куба P. Пусть $\alpha \in A = \{-1, 0, 1\}^k$, тогда $P_\alpha = P \cap (P + \alpha)$ есть α-грань куба P. Размерность такой α-грани есть $\dim(P_\alpha) = k - \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|$.

Пусть $\alpha, \beta \in A$, будем говорить, что β подчинено α (обозначим через $\beta \sqsupset \alpha$), если для любого $i = 1, \ldots, k$ неравенство $\alpha_i \neq 0$ влечёт $\alpha_i = \beta_i$.

Для фрактального k-куба K мы определим его грани K_α как $K_\alpha = K \cap P_\alpha$. Грани фрактального куба есть фрактальные кубы.

Пусть $K_1 = \frac{D_1 + K_1}{n}$ и $K_2 = \frac{D_2 + K_2}{n}$ – фрактальные k кубы. Мы доказываем следующую теорему о пересечении фрактальных кубов:

Теорема. *Семейство $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ пересечений $F_\alpha = K_1 \cap (K_2 + \alpha)$ удовлетворяет системе уравнений*

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta \sqsupseteq \alpha} T_{\alpha\beta}(F_\beta), \qquad \alpha \in A,$$

где для любого $\beta \sqsupseteq \alpha$, $T_{\alpha\beta}(F_\beta) = \frac{1}{n}(F_\beta + G_{\alpha\beta})$ и $G_{\alpha\beta} = D_1 \cap (D_2 + n\alpha - \beta)$.

Предложение. *$F_\alpha = \varnothing$ тогда и только тогда, когда для любого $\beta \sqsupseteq \alpha$ и любой конечной последовательности $\alpha = \alpha_0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_p = \beta$ произведение $\#G_{\alpha_0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \ldots \#G_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \cdot \#G_\beta$ равно нулю.*

Мы доказали теоремы о размерности множества F_0 и о признаке бесконечной меры этого множества:

Теорема. *Если $F_0 \neq \varnothing$, то размерность $\dim(F_0) = \log_n m$, где $m = \max\{\#G_\alpha,\ \alpha \in A:$ для любой последовательности $0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_{p-1} \sqsubset \alpha$ произведение $\#G_{0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \#G_{\alpha_{p-1}\alpha} \cdot \#G_\alpha \neq 0\}$.*

Теорема. *Пусть $\#G_0 = \#G_\beta$ и $\log_n \#G_0 = s$. Если существует последовательность $0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_{p-1} \sqsubset \beta$ такая, что $\#G_{0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \#G_{\alpha_{p-1}\beta} \geqslant 1$, то $H^s(F_0) = \infty$.*

ГЛАДКИЕ МОДЕЛИ МОТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И СПЕКТРОВ

А.Э. Дружинин

a.druzhinin@spbu.ru, andrei.druzh@gmail.com

УДК 512.737, 515.143, 512.736

Доклад обсуждает геометрические модели для некоторых мотивных спектров, и их роль для доказательства свойств представимых теорий когомологий в стабильной мотивной гомотопической категории.

Ключевые слова: мотивный спектры, оснащённые соответствия, геметрические модели

Smooth models of motivic spaces and spectra

We discuss geometrical models for some motivic spectra, and their role for the properties of the theories represented in the stable motivic homotopy category.

Keywords: motivic spectra, framed correspondences, geometrical models

Согласно [1] мотивное пространство о отмеченной точкой над схемой B – это симплициальный пучёк Нисневича с отмеченной точкой на категории гладких схем Sm_B. Мотивный спектр – это цепочка мотивных пространств с отмеченной точкой $\mathcal{S} = (S_0, \dots, S_l, \dots)$ снабжённая морфизмами

$$S_l \to \Omega_{\mathbb{P}^1} S_{l+1}. \tag{1}$$

Определение 1.

1) Будем говорить, что спектр $\mathcal{S}$ удовлетворяет свойству $\Omega_{>0}$, если морфизмы (1) *являются мотивными эквивалентностями.*

2) Назовём спектр инд-геометрическим, если его члены являются инд-парами схем, т.е. эквиваленты пространствам $\varinjlim_l X_l/U_l$, для индуктивного семейства открытых вложений схем $U_l \hookrightarrow X_l$ над B.

Теория оснащённых соответствий Воеводского [2] и оснащённых мотивов Гаркуши-Панина [3] позволяет в частности получить гладкую геометрическая модель для надстроичного спектра пары

$$\Sigma^\infty_T (X/U)_+ \simeq ((X/U)_+, (X/U) \wedge (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m), \dots, (X/U) \wedge (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{\wedge l}, \dots),$$

где U – открытая подсхема в X, в следующем виде.

Теорема 1.[4]

Работа выполнена при финансовой поддержке конкурса-гранта Молодая Математика России.

Дружинин Андрей Эдуардович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Лаборатория им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия, научный сотрудник, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия; Andrei Druzhinin (Chebyshev Laboratory, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia) (St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia)

Пусть X – гладкая аффинная схема над полем k, U – открытая подсхема. Имеет место стабильная мотивная эквивалентность спектров

$$\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}(X/U)_+ \simeq ((X/U)^{\mathrm{fr}}, \dots, (X/U \wedge (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^l)^{\mathrm{fr}}, \dots),$$

где правая часть является инд-геометрической и обладает свойством $\Omega_{\geqslant 0}$.

Фундаментом принципа конструкции инд-пар $(X/U)^{\mathrm{fr}}$ является понятие оснащённых соответствий введённых Воеводским [2], которые согласно лемме Воеводского [3, §3] образуют множества изоморфные

$$\varinjlim_n \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{nis}}(k)}(B_+ \wedge (\mathbb{P}^1/\infty)^{\wedge n}, (X/Y)_+ \wedge (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{\wedge l}),$$

где $\mathrm{Sh}_{\mathrm{nis}}(k)$ обозначает категорию пучков Нисневича с отмеченной точкой. Приведём для сравнения стабильные мотивные эквивалентности спектров

$$\begin{array}{rcl} H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^{\infty}_T(X/U)_+ & \simeq & (\mathrm{Sym}^{\infty}(X/U), \dots, \mathrm{Sym}^{\infty}(X/U \wedge T^l), \dots) \\ \widetilde{H\mathbb{Z}} \wedge \Sigma^{\infty}_T(X/U)_+ & \simeq & ((X/U)^{GW}, \dots, (X/U \wedge T^l)^{GW}, \dots) \end{array} \qquad (2)$$

Здесь инд-пары схем $\mathrm{Sym}^{\infty}(X/U) = \mathrm{Sym}^{\infty}(X)/\mathrm{Sym}^{\infty}(U)$, $(X/U)^{GW} = X^{GW}/U^{GW}$ параметризуют Cor-соответствия [5], и GW-соответствия. Правые части (2) обладают свойством $\Omega_{>0}$ и являются инд-геометрическими, однако для гладких X не являются в общем случае гладкими. Свойство гладкости инд-пар схем $(X/U)^{\mathrm{fr}}$ обеспечено тем, что структура оснащённых соответствий является более “объёмной и полной” по сравнению с классическими Cor-соответствиями, а также и GW-соответствиями.

Гипотеза 1.

Всякий спектр $\mathcal{S}$ над полем k, члены которого заданы открытыми парами гладких схем стабильно, мотивно эквивалентен инд-геометрическому спектру $\mathcal{S}^{\mathrm{fr}}$, обладающему свойством $\Omega_{>0}$.

Теорема 1 на наш взгляд пользу при исследовании свойства связности мотивных спектров над кольцами дискретного нормирования. Гипотеза 1 имеет на наш взгляд отношение с гипотезой Герстена.

Гипотеза 3.

Пусть B – спектр кольца дискретного нормирования. X – гладкая проективная схема над B. Тогда теория когомологий на категории гладких схем над B представимая спектром $\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}X_+$ удовлетворяет гипотезе Герстена.

В свою очередь Гипотеза 2 по нашему мнению влечёт случай спектра локального кольца в следующей Гипотезе.

Гипотеза 2.

Пусть B – нётерова регулярная схема конечной размерности Крулля, X – гладкая проективная схема над B. Тогда для спектра $\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}X_+$ выполняется утверждение Теоремы 1.

Литература

1. *Morel F., Voevodsky V.*, A^1-homotopy theory of schemes. — Inst. Hautes ?Etudes Sci. Publ. Math. 90, 1999, — 45–143, 2001.

2. *Voevodsky V.*, Framed correspondences // 2001. — url: https://www.math.ias.edu/vladimir/sites/math.ias.edu.vladimir/ files/framed.pdf.

3. *Garkusha G., Panin I.*, Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky). // J. Amer. Math. Soc. 34.1, 2021, — pp. 261–313.

4. *Druzhinin A.*, Geometric models for fibrant resolutions of motivic suspension spectra. // — arXiv: 1811.11086.

5. *Voevodsky V.*, Triangulated categories of motives over a field. // Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., 143, — 188–238 — Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

ХАОТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ ГРУПП ГОМЕОМОРФИЗМОВ И ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Н.И. Жукова, А.Г. Коротков

nzhukova@hse.ru, koral81@bk.ru

УДК 517.938.5

Исследуются соотношения между хаотичностью групп гомеоморфизмов и тестно связанными с ней свойствами топологической транзитивности, плотности замкнутых орбит и чувствительности, а также свойства счетных произведений групп гомеоморфизмов.

Ключевые слова: хаотичность, топологическая транзитивность, чувствительность к начальным условиям

Chaoticity of homeomorphism groups and their products

The relations between the chaoticity of homeomorphism groups and the test-related properties of topological transitivity, density of closed orbits and sensitivity, as well as the properties of countable products of homeomorphism groups are investigated.

Keywords: chaoticity, topological transitivity, sensitivity to initial conditions

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00304).

Жукова Нина Ивановна, д.ф.-м.н., г.н.с., ВШЭ (г. Нижний Новгород, Россия); Nina Zhukova (HSE University, Nizhny Novgorod, Russia)

Коротков Александр Геннадьевич, ведущий инженер, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Alexander Korotkov (Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia)

Следуя [1], группа гомеоморфизмов G топологического пространства X называется нами хаотической (т.е. G имеет хаотическое поведение) на X, если выполняются следующие два условия:

1) существует всюду плотная орбита группы G в X (*существование плотной орбиты*);

2) объединение замкнутых орбит образует собственное всюду плотное подмножество в X (*плотность замкнутых орбит*).

Напомним, что группа гомеоморфизмов G метрического пространства (X, d) называется *чувствительной к начальным условиям*, если существует такое положительное число c, что для любого открытого множества U найдутся точки x, y и элемент $g \in G$, удовлетворяющие неравенству

$$d(g(x), g(y)) > c.$$

При этом c называется *чувствительной константой* для группы G.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — хаотическая группа гомеоморфизмов локально компактного метрического пространства (X, d). Тогда G чувствительна к начальным условиям.*

Благодаря Теореме 1 определение хаотической группы гомеоморфизмов можно рассматривать как аналог понятия хаотического каскада в смысле Дивани [2].

Следствие 1. *При выполнении условий Теоремы 1 чувствительность группы G к начальным условиям является топологическим свойством и не зависит от выбора метрики d на X.*

Нами доказан следующий критерий хаотичности счетных произведений групп гомеоморфизмов ([3]).

Теорема 2. *Пусть G_i, $i \in \mathbb{N}$, — семейство групп гомеоморфизмов метризуемых топологических пространств X_i, а на тихоновском произведении $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ задано каноническое действие произведения групп $G = \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$. Тогда группа G действует хаотически на X тогда, и только тогда, когда каждая группа G_i действует хаотически на X_i, $i \in \mathbb{N}$.*

В качестве приложения полученных результатов к группам гомеоморфизмов топологических многообразий нами доказано следующее утверждение ([3]).

Теорема 3. *Пусть G_i, $i \in \mathbb{N}$, — семейство групп гомеоморфизмов метризуемых компактных топологических пространств X_i. Предположим, что каждая группа G_i хаотична на X_i. Тогда:*

(1) *каноническое действие произведения групп $G = \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ хаотично на тихоновском произведении пространств $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$;*

(2) *существует всюду плотное подмножество $F \subset X$ континуальных компактных орбит, причем каждая такая орбита является совершенным подмножеством в X;*

(3) *существует всюду плотная континуальная орбита группы G в X;*

(4) *все группы G_i, $i \in \mathbb{N}$, и G — ресидуально конечны;*

(5) *каждая группа G_i, $i \in \mathbb{N}$, и G чувствительна к начальным условиям;*

(6) *если каждая группа G_i имеет неподвижную точку, то объединение конечных орбит группы G всюду плотно в X, кроме того, группа G имеет неподвижную точку.*

Специальное внимание уделено построению примеров хаотических групп гомеоморфизмов. Нами построены примеры счетных произведений различных метризуемых топологических пространств, в том числе бесконечномерных топологических многообразий. Построенные примеры включают хаотические группы гомеоморфизмов на счетных произведениях, сомножителями которых могут быть как незамкнутые топологические поверхности, так и любые замкнутые поверхности [3]. Примеры счетных семейств попарно не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов сферы и плоскости можно найти в [4].

Литература

1. *Bazaikin Y.V., Galaev A.S. and Zhukova N.I.* Chaos in Cartan Foliations // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **30** (2020). — 1–9.

2. *Devaney R.L.* An introduction to chaotic dynamical systems // Menlo Park, CA: The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., 1986.

3. *Zhukova N.I., Korotkov A.G.* Chaotic behavior of countable products of homeomorphism groups // ArXiv/ 4362502 [math. DS], 18 Jun. (2022). — 1–29.

4. *Жукова Н.И., Левин Г.С., Тонышева Н.С.* Хаос в топологических слоениях // Современная математика. Фундаментальные направления. **68**: 3 (2022). — 424–450.

ЯДЕРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ И МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

В.Г. Журавлев

vzhuravlev@mail.ru

УДК 511.41

Обсуждаются пространственные ядерные разбиения, являющиеся естественным языком описания многомерных цепных дробей. Такие разбиения допускают многочисленные симметрии и всевозможные их обобщения. Перекладывающиеся ядра задают динамику разбиений, локальные правила и комбинаторику разбиений.

Ключевые слова: ядерные разбиения тора, классификация, локальные правила, симметрии, комбинаторика

Журавлев Владимир Георгиевич, д.ф.-м.н., профессор, ВлГУ имени А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия); Vladimir Zhuravlev (Vladimir State University, Vladimir, Russia)

Karyon tilings and multidimensional continued fractions

Space karyon tilings, which are a natural language for describing multidimensional continued fractions, are discussed. Such tilings admit numerous symmetries and all possible generalizations of them. Exchange karyons define the dynamics of tilings, local rules and combinatorics of tilings.

Keywords: toric karyon tilings, classification, local rules, symmetries, combinatorics

В [1] построена теория многомерных ядерных цепных дробей на основе разбиений $\mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$ произвольной размерности d. Ядерные разбиения $\mathcal{T}$ представляют собою многомерное обобщение одномерных разбиений Фибоначчи [2] и их двумерного аналога — разбиений Рози [3], [4]. Настоящим же источником появления разбиений $\mathcal{T}$ можно все же считать многомерные множества ограниченного остатка [5]. Каждое разбиение $\mathcal{T}$ содержит ядро $\mathbf{Kr} \subset \mathcal{T}$ (выпуклый перекладывающийся параллелепипед), полностью определяющее все разбиение целиком. Кроме того, ядро $\mathbf{Kr}$ определяет квазинорму — функционал Минковского — для наилучших однородных приближений цепными дробями, а цепные дроби в данном случае — это вершины многогранников, образующих разбиение $\mathcal{T}$.

В [6] были изучены локальные свойства ядерных разбиений $\mathcal{T}$ (локальные правила), знание которых важно при изучении многомерных цепных дробей. Использовался метод квантования звезд, опирающийся на правила максимума для ядерных параллелепипедов и лучей. Суть указанных правил состоит в том, что задача о многогранной звезде в произвольной вершине x_n ядерного разбиения $\mathcal{T}$ эквивалентна попаданию номера вершины n в некоторый явным образом определенный координационный интервал.

Ядерные разбиения $\mathcal{T}$ обладают богатой структурой симметрий [7]. Разбиения $\mathcal{T}$ трансляционно квазиинвариантны (shift-invariant) относительно канонического сдвига S тора $\mathbb{T}^d$ — это фундаментальное свойство ядерных разбиений. Действие сдвига S на разбиение $\mathcal{T}$ сводится к перекладыванию его ядра $\mathbf{Kr}$, состоящего из $d+1$ параллелепипеда. Каждое разбиение $\mathcal{T}$ имеет 2^d центральных симметрий. Множество, состоящее из самого ядра $\mathbf{Kr}$ и соседних с ним многогранников из разбиения $\mathcal{T}$, образует корону $\mathbf{Cr}$ ядра $\mathbf{Kr}$. Доказано, что ядерная корона $\mathbf{Cr}$ содержит все типы многогранных звезд разбиения $\mathcal{T}$.

Литература

1. *Журавлев В. Г.* Ядерные цепные дроби. — Владимир: ВлГУ, 2019.

2. *Журавлев В. Г.* Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН, сер. матем., **71**:2 (2007), 89-122.

3. *Rauzy G.* Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France, **110** (1982), 147-178.

4. *Журавлев В. Г.* Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе // Записки научных семинаров ПОМИ, **322** (2005), 83-106.

5. *Zhuravlev V. G.* Polyhedra of bounded remainder // Sovrem. Probl. Mat., **16** (2012), 82-102.

6. *Журавлев В. Г.* Локальная структура ядерных разбиений// Зап. науч. семин. ПОМИ, **502** (2021), 32-73.

7. *Журавлев В. Г.* Симметрии ядерных разбиений // Зап. науч. семин. ПОМИ, **502** (2021), 74-121.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, ГОМОЛОГИЧНЫЕ НУЛЮ В КОМПЛЕКСИФИКАЦИИ

В.И. Звонилов

zvonilov@gmail.com

УДК 512.77

В 1978 г. В.А. Рохлин получил формулу для комплексных ориентаций неособой плоской вещественной алгебраической кривой чётной степени, разбивающей свою комплексификацию. Доклад посвящён распространению формулы Рохлина на случай пары $2n$- и $(2n-2)$-мерных почти комплексных многообразий $Y \supset X$, на которых действует гладкая инволюция conj, антиголоморфная относительно почти комплексной структуры, причём множество $\mathbb{R}X = \operatorname{fix} \operatorname{conj}|_X$ гомологично нулю как в X, так и в $\mathbb{R}Y$. Приведены примеры вещественных алгебраических многообразий любой размерности, гомологичных нулю в своей комплексификации.

Ключевые слова: почти комплексное многообразие, гомологически нулевая вещественная часть, комплексные ориентации вещественной части, неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность

Real algebraic manifolds homologous to zero in the complexification

In 1978 V.A. Rokhlin obtained a formula for complex orientations of a nonsingular plane real algebraic curve of even degree that divides its complexification. In the talk the formula is extended to the case of a pair of $2n$- and $(2n-2)$-dimensional almost complex manifolds $Y \supset X$ with the action of a smooth involution conj that is antiholomorphic with respect to the almost complex structure, and the set $\mathbb{R}X = \operatorname{fix} \operatorname{conj}|_X$ is homologous to zero both in X and in $\mathbb{R}Y$. There are given examples of real algebraic manifolds of any dimension that are homologous to zero in their complexification.

Keywords: almost complex manifold, real part homologous to zero, complex orientations of the real part, nonsingular real algebraic hypersurface

---

Работа выполнена по теме государственного задания (№ 0729-2020-0055).

Звонилов Виктор Иванович, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Victor Zvonilov (Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia)

Определения

Пусть X – почти комплексное многообразие, размерности $2d$, на котором действует гладкая инволюция conj с непустым ориентируемым *множеством вещественных точек* $\mathbb{R}X = \operatorname{fix}\operatorname{conj}$. Пусть множество $\mathbb{R}X$, наделённое некоторой ориентацией, реализует нулевой класс в $H_d(X)$ (короче, $\mathbb{R}X \sim 0$ в X), и W является $(d+1)$-мерной ориентированной цепью с $\partial W = \mathbb{R}X$. Указанная ориентация многообразия $\mathbb{R}X$ называется *комплексной W-ориентацией.*

Примеры

Вращение. Пусть $C_1 \subset \mathbb{R}P^2$ – неособая вещественная алгебраическая кривая типа I (т.е. разбивающая свою комплексификацию) – задаётся уравнением $f(x_0, x_1, x_2^2) = 0$ чётной степени. Тогда она симметрична относительно прямой $L : x_2 = 0$. Пусть кривая C_1 не имеет вещественных точек пересечения с L и её комплексная ориентация симметрична относительно L. Ясно, что поверхность $C_2 \subset \mathbb{R}P^3$, задаваемая уравнением $f(x_0, x_1, x_2^2 + x_3^2) = 0$, получается вращением кривой C_1 в $\mathbb{R}P^3$ вокруг L и, очевидно, гомологична нулю в комплексификации. Продолжая этот процесс, можно для любого $n \geqslant 1$ получить неособую вещественную n-мерную гиперповерхность $C_n \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ чётной степени гомологичную нулю в комплексификации.

Край трубчатой окрестности. Пусть $A \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \\ g(x_0, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$ – неособое полное пересечение вещественных гиперповерхностей одинаковой степени m, $B \subset P^n : f^2 + g^2 = \varepsilon^2 x_0^{2m}$ и $\tilde{B}$ – неособое многообразие, полученное раздутием особенности $B \cap \{x_0 = 0\}$.

Теорема 1. *Если $\mathbb{R}A \sim 0$ в $\mathbb{C}A$, то $\mathbb{R}\tilde{B} \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$ при малом ε.*

Расслоения. Ясно, что если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$ или $\mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}Y$, то $\mathbb{R}X \times \mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y$.

Более общая ситуация:

Пусть $p : E \to B$ – гладкое сюръективное отображение неособых вещественных алгебраических многообразий с ориентируемыми $\mathbb{R}B$ и $\mathbb{R}E$ и неособыми слоями. Тогда если $\mathbb{R}F \sim 0$ в $\mathbb{C}F$ для каждого слоя F, то $\mathbb{R}E \sim 0$ в $\mathbb{C}E$.

Основные результаты

Абсолютный случай. Пусть X – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj.

Теорема 2. *Если $\mathbb{R}X \neq \varnothing$ ориентировано и $\mathbb{R}X \sim 0$ в X, то эйлерова характеристика $\chi(X_i) = 0$ для любой компоненты X_i множества $\mathbb{R}X$.*

Относительный случай. Пусть B – почти комплексное многообразие размерности $2n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \varnothing$, и $A \subset B$ – его $(2n-2)$-мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj. Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A, причём существует n-мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \operatorname{conj} W = \varnothing$. Обозначим через ξ класс в $H_n(B)$, реализуемый циклом $W - \operatorname{conj} W$. Пусть $B_1, \ldots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Обозначим через b_j класс, определяемый в $H_n(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A)$ множеством B_j, наделённым некоторой ориентацией.

Теорема 3. *Если* $\mathbb{R}A$ *гомологично нулю в* $\mathbb{R}B$*, то существуют такие* $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{Z}$*, что образ класса* $x = \sum x_j b_j$ *при граничном гомоморфизме* $H_n(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A) \to H_{n-1}(\mathbb{R}A)$ *есть фундаментальный класс* $[\partial W]$ *многообразия* $\mathbb{R}A$*, наделённого комплексной* W*-ориентацией, причём* $\sum x_j^2 \chi(B_j) = \xi^2/4$.

Приводятся вычисления правой части равенства теоремы 1 для конкретных неособых нечётномерных проективных вещественных алгебраических гиперповерхностей. При $n = 1$ теорема 3 даёт формулу Рохлина [1] для комплексных ориентаций кривой типа I.

Литература

1. *Рохлин В.А.* Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // Успехи математических наук, **33**:5 (1978), 77–89.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНО–ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

А.В. Звягин

zvyagin.a@mail.ru

УДК 517.957

В работе исследуется проблема существования слабого решения для начально–краевой задачи математической модели, описывающей течение линейно упруго запаздывающей жидкости Фойгта. В данной модели рассматривается среда с нелинейной вязкостью и временем запаздывания среды, зависящим от температуры.

Ключевые слова: теорема существования, вязкоупругие среды, слабое решение

Solvability of one model for nonlinear–viscous fluid

The existence problem of a weak solution for the initial–boundary value problem for the mathematical model describing the flow of a linearly elastically retarded Voigt fluid is investigated in the paper. This model considers a fluid with a nonlinear viscosity and with fluid delay time depending on temperature.

Keywords: existence theorem, viscoelastic media, weak solution

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-00038).

Звягин Андрей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия); Andrey Zvyagin (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$ рассматривается начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\text{Div}\ [\nu\big(I_2(v)\big)\mathcal{E}(v)] - \varkappa(\theta)\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \text{grad}\ p = f; \qquad (1)$$

$$\text{div}\ v = 0 \text{ в } Q_T; \qquad v|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega; \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi\Delta\,\theta = 2\nu\big(I_2(v)\big)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g; \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $v = (v_1(t,x), ..., v_n(t,x))$, $n = 2, 3$, $\theta(t,x)$ и $p(t,x)$ – вектор–функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, f – плотность внешних сил, g – источник внешнего тепла, $\varkappa > 0$ – коэффициент времени ретардации, $\chi > 0$ – коэффициент теплопроводности, $\nu > 0$ – вязкость жидкости; $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ – тензор скоростей деформаций; $I_2(v)$ определяется равенством: $I_2^2(v) = \mathcal{E} : \mathcal{E} = \sum_{i,j=1}^{n} [\mathcal{E}_{ij}(v)]^2$. Символ $A : B = a_{ij}b_{ij}$ для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$; Div C – дивергенция тензора $C = (c_{ij}(t,x))$, то есть вектор Div $C = \Big(\partial c_{1j}(t,x)/\partial x_j, \cdots, \partial c_{nj}(t,x)/\partial x_j\Big)$.

Математическая модель нелинейно-вязкой среды подробно описана в монографии профессора В.Г. Литвинова [1], где приведены естественные ограничения на вязкость рассматриваемой среды через свойства функции $\nu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: $\nu(s)$ должна быть определенная при $s \geqslant 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

a) $0 < C_1 \leqslant \nu(s) \leqslant C_2 < \infty$;

b) $-s\nu'(s) \leqslant \nu(s)$ при $\nu'(s) < 0$;

c) $|s\nu'(s)| \leqslant C_3 < \infty$.

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы. В данной работе изучается математическая модель Фойгта с нелинейной вязкостью и временем запаздывания среды, зависящим от температуры (см. [2], [3]).

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1)–(4) называется пара (v, θ), где $v \in E_1 := \{v : v \in C([0,T], V), v' \in L_2(0,T; V)\}$ и $\theta \in E_2 := \{v : v \in L_p(0,T; W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0,T; W_p^{-1}(\Omega))\}$, удовлетворяющая начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$ и соотношениям

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t}\,\varphi\,dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_{\Omega} \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \varkappa(\theta)\mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t), \varphi\rangle \quad \text{при всех } \varphi \in V \text{ и п.в. } t \in [0,T],$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \phi \, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i \theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \, dx + \chi \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) \, dx =$$

$$= 2 \int\limits_{\Omega} \big(\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi \, dx + 2 \int\limits_{\Omega} \varkappa(\theta)\big(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v)\big) : \phi \, dx + \langle g, \phi \rangle$$

$$\text{при всех } \phi \in C_0^{\infty}(\Omega) \text{ и п.в. } t \in [0,T].$$

Теорема 1. *Пусть функция* $\varkappa(s) \in C^2(-\infty,+\infty)$ *является монотонно возрастающей и* $0 \leqslant \varkappa(s) \leqslant C_4$, $f \in L_2(0,T;V^*)$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$ *и вязкость рассматриваемой среды* ν *удовлетворяет условиям* $a) - c)$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *для* $n = 2$ *и для* $1 < p < 5/4$ *при* $n = 3$ *существует слабое решение начально-краевой задачи* (1)–(4).

Литература

1. *Литвинов В.Г.* Движение нелинейно–вязкой жидкости. — М.: Наука, 1982.
2. *Звягин А.В., Орлов В.П.* Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова // Известия Вузов. Математика, **9** (2014), 69-74.
3. *Звягин А.В., Орлов В.П.* Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта // Математические Заметки, **97**:5 (2015), 681-698.

ГЛОБАЛЬНАЯ ДИНАМИКА РЕГУЛЯРНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ

С.Х. Зинина

suddenbee@gmail.com

УДК 517.938.5

Исследована динамика регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на замкнутых топологических n-многообразиях M^n, доказано существование энергетических функций для регулярных топологических потоков.

Ключевые слова: глобальная динамика, регулярные динамические системы, топологические потоки, гомеоморфизмы

Global dynamics of regular homeomorphisms and topological flows on manifolds

The dynamics of regular homeomorphisms and topological flows on closed topological n-manifolds M^n is investigated, the existence of energy functions for regular topological flows is proved.

Keywords: global dynamics, regular dynamical systems, topological flows, homeomorphisms

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90069).

Зинина Светлана Халиловна, МГУ имени Н.П. Огарева (Саранск, Россия); Svetlana Zinina (Ogarev Mordovia State University, Moscow, Russia)

Предметом настоящего исследования являются регулярные гомеоморфизмы и топологические потоки на топологических многообразиях – динамические системы с топологически гиперболическим цепно рекуррентным множеством, состоящим из конечного числа орбит. Исследована динамика таких систем, получено исчерпывающее описание поведения инвариантных многообразий цепных компонент, как с точки зрения асимптотики, так и с точки зрения топологии их вложения в несущее многообразие.

Актуальность исследования обусловлена прежде всего спецификой изучения динамических систем на многообразиях высокой (большей трех) размерности. В силу возможного отсутствия гладкой структуры на топологических многообразиях, начиная с размерности четыре, динамические системы на таких многообразиях можно рассматривать только в непрерывной категории. Даже если многомерное многообразие допускает гладкую структуру, она может оказаться не единственной, известные подходы к изучению объектов, заданных на таких многообразиях, не используют их гладкость, а, наоборот, сводятся к аппроксимации гладких объектов топологическими. В связи с чем черезвычайно полезным является развитие теории топологических динамических систем на многообразиях.

В работе [1] доказано, что на топологическом многообразии любой размерности для регулярного потока с конечным цепно рекуррентным множеством существует (непрерывная) энергетическая функция Морса. Полученный результат является идейным продолжением работы С. Смейла [2], в которой установлено существование гладкой энергетической функции Морса у любого градиентно-подобного потока на многообразии, и частичным решением проблемы Марстона Морса о существовании непрерывных функций Морса на любых топологических многообразиях. А именно, топологическое многообразие допускает непрерывную функцию Морса тогда и только тогда, когда оно допускает топологический поток с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Этот результат получен в рамках построения непрерывной энергетической функции Морса-Ботта для произвольного непрерывного регулярного потока на топологическом n-многообразии [3] и является аналогом теоремы К. Мейера [4] (см. также обзор [5] по построению энергетических функций для структурно устойчивых систем), в 1968 году построившего энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла на гладком замкнутом n-многообразии.

Литература

1. *Medvedev T. V., Pochinka O., Zinina S. K.* On existence of Morse energy function for topological flow // Advances in Mathematics. - 2021. - V. 378. - 107518.

2. *Smale S.* On gradient dynamical systems. // Ann. of Math. (2). 1961. - V. 74. - P. 199–206.

3. *Починка О. В., Зинина С. Х.* Построение энергетической функции Морса–Ботта для регулярных топологических потоков // Регулярная и хаотическая динамика. - 2021. - Т. 26. - № 4. - С. 350–369.

4. *Meyer K. R.* Energy functions for Morse Smale systems // Amer. J. Math. - 1968. - V. 90. - P. 1031–1040.

5. *Grines V., Pochinka O.* The Constructing of Energy Functions for Ω-stable Diffeomorphisms on 2- and 3-Manifolds// Journal of Mathematical Sciences. - 2020. - Vol. 250. - P. 537-568.

КОРОТКОВОЛНОВАЯ ДИФРАКЦИЯ НА КОНТУРАХ С НЕГЛАДКОЙ КРИВИЗНОЙ

Е.А. Злобина, А.П. Киселев

ezlobina2@yandex.ru, aleksei.kiselev@gmail.com

УДК 517.958

Методом пограничного слоя строятся формулы коротковолновой асимптотики для двух задач дифракции на контурах со скачком кривизны. В обеих задачах падающая волна приходит в особую точку вдоль касательного направления.

Ключевые слова: теория дифракции, коротковолновая асимптотика, уравнение Гельмгольца

Diffraction of short waves by contours with nonsmooth curvature

Short-wave asymptotic formulas for two problems of diffraction by contours with a jumping curvature are found by boundary-layer techniques. In both cases incident wavefield is coming to the singular point tangentially.

Keywords: diffraction theory, short-wave asymptotics, Helmholtz equation

Цикл наших исследований [1-6] посвящен дифракции на кусочно-гладких контурах с изолированными особенностями кривизны, в частности, разрывами. В рамках последовательного метода пограничного слоя мы строим формулы высокочастотной асимптотики. Последние полученные нами результаты относятся к случаям, когда падающая волна приходит в точку негладкости контура вдоль касательного направления.

Основное внимание в докладе уделено задаче Малюжинца—Попова [5,7], в которой плоская волна набегает вдоль прямой C_-, переходящей в точке O, со скачком кривизны, в выпуклую кривую C_+ (предполагается выполненным условие Неймана), см. Рис. 1. Здесь естественно использовать аппарат,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00557).

Злобина Екатерина Андреевна, аспирант, Санкт-Петербургский Государственный Университет (Санкт-Петербург, Россия); Ekaterina Zlobina (St.Petersburg State University, St.Petersburg, Russia)

Киселев Алексей Прохорович, д.ф.-м.н., профессор, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН (Санкт-Петербург, Россия), Санкт-Петербургский Государственный Университет (Санкт-Петербург, Россия), Институт проблем машиноведения РАН (Санкт-Петербург, Россия); Aleksei Kiselev (St.Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS, St.Petersburg State University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, St.Petersburg, Russia)

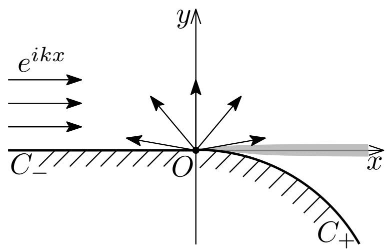

Рис. 1: Задача Малюжинца—Попова

основанный на методе параболического уравнения, применявшегося, начиная с работ Фока, для изучения задачи дифракции на гладком выпуклом препятствии [8]. В нашей задаче в освещенной области вместо отраженной волны возникает цилиндрическая волна, расходящаяся из точки негладкости O, однако структура поля во многом напоминает фоковскую. Переходные зоны (на Рис. 1 выделены серым) вокруг границы свет-тень описываются специальными функциями, напоминающими классические интегралы Фока.

Кроме того рассмотрена в некотором смысле двойственная задача дифракции волны шепчущей галереи, набегающей на точку O скачкообразного распрямления контура вдоль вогнутой его части, см. Рис. 2. Здесь метод

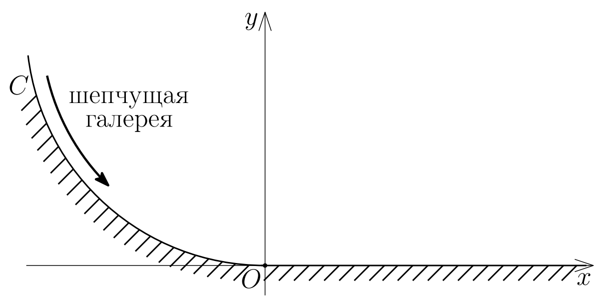

Рис. 2: Задача дифракции волны шепчущей галереи

параболического уравнения приводит к совершенно другим асимптотическим формулам для поля [6].

Литература

1. *Zlobina E.A., Kiselev A.P.* Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature // Wave Motion, **96** (2020), 102571.

2. *Злобина Е.А.* Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Погранслойный подход // Зап. научн. сем. ПОМИ, **493** (2020), 169-185.

3. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* Дифракция коротких волн на контуре с гёльдеровской сингулярностью кривизны // Алгебра и Анализ, **33**:2 (2021), 35-55.

4. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* Переходная зона в высокочастотной задаче дифракции на импедансной границе со скачком кривизны. Метод Кирхгофа и метод пограничного слоя // Радиотехника и Электроника, **67**:2 (2022), 130-139.

5. *Zlobina E.A., Kiselev A.P.* A.V. Popov's diffraction problem revisited // Submitted to Wave Motion.

6. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* Дифракция волны шепчущей галереи при скачкообразном распрямлении границы // Представлено в Акустический Журнал.

7. *Попов А.В.* Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны // Тр. V Всес. симпоз. по дифр. и распр. волн. — Ленинград: Наука, 1971. — 171-175.

8. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения волн. — Москва: Наука, 1975.

СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПОТОКОВ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

А.В. Зорин

andrei.zorine@itmm.unn.ru

УДК 519.21

Демонстрируется применение понятия абстрактной стохастической управляющей системы к моделированию и анализу системы обслуживания m типов заданий по алгоритму с разделением времени на основе динамических приоритетов. Каждое обслуженное задание порождает случайное число заданий-потомков каждого типа. Строится математическая модель в виде многомерной марковской цепи, проводится классификация состояний и изучаются некоторые асимптотические свойства распределений вероятностей.

Ключевые слова: абстрактная стохастическая управляющая система, теория массового обслуживания, обслуживание с разделением времени, вторичные потоки ветвящегося типа

A time-sharing queueing system with branching flows

Demonstration of a notion of an abstract stochastic control system is presented and applied to modeling and analysis of a queueing system with m job classes and time-sharing based on dynamic priorities. Each processed job produces random numbers of child-jobs of each class. A mathematical model is constructed in form of a multivariate discrete Markov chain, state types are identified, and some asymptotic properties of its probability distribution are investigated.

Keywords: abstract stochastic control system, queueing theory, time-sharing service, secondary flows of branching type

---

Зорин Андрей Владимирович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой, ННГУ им. Н.И. Лобачевского (Н. Новгород, Россия); Andrei Zorine (N.I.Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russia)

Современные реальные системы массового обслуживания выполняют также функции управления. Поэтому методы построения адекватных вероятностных моделей должны опираться на понятие абстрактной стохастической управляющей системы [1, 2].

Рассматривается следующея система обслуживания и управления конфликтными потоками. В системе имеется $m < \infty$ узлов обслуживания $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, …, $\Gamma^{(m)}$ и узел консервации $\Gamma^{(m+1)}$. Одновременно обслуживание задания может происходить только на одном из узлов обслуживания. У каждого такого узла разрешена неограниченная очередь. Длительность обслуживания задания r-го типа узлом r, $r = 1, 2, \ldots, m$ — это случайная величина, имеющая функцию распределения $B_r(t)$, а длительность работы узла консервации имеет функцию распределения $B_{m+1}(t)$, при этом $\beta_{r,1} = \int_0^\infty t\,dB_r(t) < \infty$, $r = 1, 2, \ldots, m+1$. Задание, обслуженное узлом r, $r \leqslant m$, порождает случайное число заданий каждого типа с заданным совместным законом распределения $p_r(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathfrak{X} = \{0, 1, \ldots\}^m$.

Число заданий по m различным очередям узлов обслуживания в начальный момент описывается некоторым дискретным распределением. Выбор следующего узла определяется следующим алгоритмом. Если по окончании очередного акта обслуживания, акта консервации или в начальный момент работы системы количество заданий в очередях определяется ненулевым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то немедленно начинается обслуживание задания в узле $r = h(x)$ и включается узел консервации при пустых очередях. Здесь черед $h(\cdot)$ обозначено некоторое заданное отображение множества $\mathfrak{X}$ на множество $\{1, 2, \ldots, m+1\}$, такое что $h(x) = r$ влечет $x_r > 0$ при $r = 1$, 2, …, m и прообразом точки $(m+1)$ является нулевой вектор $\mathbf{0}$. Данная постановка обобщает работу [3], где общее число потомков одного задания могло быть ноль либо один.

Рассматривая данную систему обслуживания конфликтных потоков как абстрактную управляющую систему, в работе строится вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, на котором задаются все рассматриваемые случайные величины и случайные элементы, в том числе τ_i — момент окончания i-го акта обслуживания, $\tau_0 = 0$, $\Gamma_i \in \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(m+1)}\}$ — состояние обслуживающего устройства (внутренней памяти) в момент τ_i, $\kappa_{j,i}$ — число заданий в очереди O_j в момент τ_i, векторы $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \ldots, \kappa_{m,i})$ при $i = 0$, 1, … Стохастическая многомерная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ при заданном распределении случайного вектора (Γ_0, κ_0) будет однородной цепью Маркова.

Пусть $v^x = v_1^{x_1} v_2^{x_2} \times \ldots \times v_m^{x_m}$ для $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ и $|v_j| \leqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $\Psi^{(i)}(\Gamma^{(s)}, v) = \sum\limits_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(\{\Gamma_i = \Gamma^{(s)}, \kappa_i = x\}) v^x$, $\Phi^{(i)}(\Gamma^{(s)}, v) = \sum\limits_{\substack{x \in \mathfrak{X} \\ h(x)=s}} \mathbf{P}(\{\Gamma_i = \Gamma^{(s)}, \kappa_i = x\}) v^x$ для $s = 1, 2, \ldots, m+1$, $R_j(v) = v_j^{-1} \sum\limits_{x \in \mathfrak{X}} v^x p_j(v)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и $R_{m+1}(v) = 1$.

Теорема 1. Имеют место рекуррентные по $i = 0, 1, \ldots$ соотношения $\Psi^{(i+1)}(\Gamma^{(s)}, v) = R_s(v) \Phi^{(i)}(s, v)$.

Теорема 2. *Пусть для всех $j = 1, 2, \ldots, m$ имеет место неравенство $R_j(v) < 1$ в одной точке $v = v^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_m^*)$, такой что $v_1^* > 1$, $v_2^* > 1$, $\ldots$, $v_m^* > 1$. Тогда состояние $(\Gamma^{(m+1)}, \mathbf{0})$ достижимо отовсюду.*

Состояние $(\Gamma^{(m+1)}, \mathbf{0})$ — поглощающее, поэтому стационарное распределение всегда существует. Обозначим через $p_{s,r} = \sum\limits_{x \in \mathfrak{X}} x_r p_s(x)$ среднее число потомков типа r у одного задания типа s, введем матрицу $Q = (p_{s,r})_{s,r=\overline{1,m}}$ и пусть E — единичная матрица размера $m \times m$.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, $\sum\limits_{s=1}^{m+1} \Psi^{(0)}(\Gamma^{(s)}, v^*) < \infty$, $\det(E - Q) \neq 0$ и наибольшее по абсолютной величине собственное число матрицы Q меньше единицы, то цепь Маркова $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ имеет предельное распределение.*

Литература

1. *Ляпунов А.А., Яблонский С.В.* Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1963. Вып. 9. — 5-22.

2. *Федоткин М.А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6: Сборник статей / Под ред. С.В. Яблонского. — М.: Наука. Физматлит, 1996. — 51-70.

3. *Высоцкий А.А., Федоткин М.А.* Предельные свойства и оптимизация процессов с разделением времени // Доклады РАН, **350**:3, 295-297.

ПРОБЛЕМА ФЕРМА–ТОРРИЧЕЛЛИ ДЛЯ ТРЁХ ТОЧЕК В НОРМИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Д.А. Илюхин

daniil.ilukhin@math.msu.ru

УДК 517.518

В статье изучается проблема Ферма–Торричелли: задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до некоторых заданных точек в нормированном пространстве. Целью работы является поиск ответа на следующий вопрос: в каких нормах на плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трёх точек. В работе сформулирован и доказан критерий единственности, кроме того показано применение полученного критерия на нормах, задаваемых правильными многоугольниками, так называемых лямбда-плоскостях.

Ключевые слова: проблема Ферма–Торричелли, нормирующий функционал, лямбда-плоскость

Илюхин Даниил Александрович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Daniil Ilyukhin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes

In the paper the Fermat–Torricelli problem is considered. The problem asks a point minimizing the sum of distances to arbitrarily given points in d-dimensional real normed spaces. The aim of the article is to find an answer to the following question: in what norms on the plane is the solution of the Fermat–Torricelli problem unique for any three points. The uniqueness criterion is formulated and proved in the work, in addition, the application of the criterion on the norms set by regular polygons, the so-called lambda planes, is shown.

Keywords: Fermat–Torricelli, norming functional, lambda-plane

Определение 1. *Точка x_0 называется точкой Ферма–Торричелли для точек $A = \{x_1, ..., x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^{n} |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $ft(A)$.*

Рассмотрим геометрический метод построения решения задачи Ферма–Торричелли.

Теорема 1. *Пусть x_0, x_1, ..., x_n — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, ..., n$. Тогда x_0 — точка Ферма–Торричелли для $A = \{x_1, ..., x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, ..., n$, существует нормируюший функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$.*

Определение 3. *Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим конус $C(x,\ \varphi) = x - \big\{a:\ \varphi(a) = \|a\|\big\}$.*

Теорема 2. *Пусть $A = \{x_1,\ ...,\ x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in ft(A) \setminus A$. По теореме 1 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, ..., n$, существует нормируюший функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$. Тогда $ft(A) = \cap_{i=1}^{n} C(x_i,\ \varphi_i)$.*

Пусть на нормированной плоскости задано множество из трёх точек $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Отвечая на вопрос, какой вид имеет множество решений задачи Ферма–Торричелли $ft(A)$ при этих условиях, можно получить три случая: невырожденный выпуклый многоугольник, отрезок и точка.

Определение 4. *Будем говорить, что единичная окружность на нормированной плоскости состоит из элементов нулевого типа, которыми являются точки, не лежащие внутри уплощений, а также элементов первого типа, которыми являются внутренние точки уплощений.*

Определение 5. *Возьмём три элемента единичной окружности. Для каждого из них выберем опорную прямую так, чтобы для элемента нулевого типа она пересекала единичную окружность только в одной точке, то есть в самом элементе. По выбранным опорным прямым построим функционалы, линии уровня $\varphi_i = 1$ которых совпадают с этими прямыми. Если найдётся набор опорных прямых такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такую тройку будем называть согласованной.*

Теорема 3. *В нормированной плоскости найдутся три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда существует согласованная тройка элементов единичной* *окружности такая, что размерность аффинной оболочки входящих в неё элементов нулевого типа равна* 1*.*

На практике критерий применить нелегко, так как ответ для заданной нормы даётся путём перебора уплощений единичной окружности. Если рассматривать его как алгоритм, то его сложность напрямую зависит от их количества. Если применить критерий на семействе λ-плоскостей, то получим теорему, классифицирующую нормы данного семейства относительно единственности решения задачи Ферма–Торричелли:

Определение 6. *λ-нормированной плоскостью называется плоскость, норма на которой задана правильным 2λ-угольником.*

Теорема 4. *В λ-нормированной плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трех точек, если и только если $\lambda \not\equiv 0 \mod 3$.*

Литература

1. *Martini H., Swanepoel K.J., Weis G.* The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces // (2002) Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.

ГИПОТЕЗА ЗАРЕМБЫ И КРУГОВОЙ МЕТОД

И.Д. Кан

igor.kan@list.ru

УДК 511.321, 511.31

В настоящей работе рассматривается множество $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}$ несократимых знаменателей рациональных чисел, представимых конечными цепными дробями, все неполные частные которых принадлежат некоторому конечному числовому алфавиту $\mathbf{A}$. Пусть множество бесконечных цепных дробей с неполными частными из этого алфавита имеет хаусдорфову размерность $\Delta_{\mathbf{A}}$, удовлетворяющую неравенству $\Delta_{\mathbf{A}} > (\sqrt{40}-4)/3 = 0.7748\ldots$. Тогда $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}$ содержит почти все натуральные числа, причем остаточное слагаемое этой формулы имеет степенное понижение по отношению к главному.

Ключевые слова: цепная дробь, тригонометрическая сумма, гипотеза Зарембы, хаусдорфова размерность.

Кан Игорь Давидович, к.ф.-м.н., доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (Москва, Россия); Kan Igor Davidovich, Ph.D., Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University, Moscow, Russia)

The Zaremba hypothesis and the circular method

In this paper, we consider plenty $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}$ irreducible denominators of rational numbers represented by finite continued fractions, all of whose incomplete quotients belong to some finite numerical alphabet $\mathbf{A}$. Let the set of infinite continued fractions with incomplete quotients from this alphabet have Hausdorff dimension $\Delta_{\mathbf{A}}$ satisfying the inequality $\Delta_{\mathbf{A}} > (\sqrt{40}-4)/3 = 0.7748\ldots$. Then $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}$ contains almost all natural numbers, and the residual term of this formula has a power decrease with respect to the main one.

Keywords: chain fraction, trigonometric sum, hypothesis Zaremba, Hausdorff dimension.

Гипотеза Зарембы [1]:
каждое натуральное число представимо в виде континуанта (знаменателя цепной дроби) от элементов, не превосходящих числа 5.

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторое конечное подмножество натуральных чисел (алфавит). Положим

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{A}} = \left\{ \frac{y}{Y} \;\middle|\; \begin{array}{c} y, Y \in \mathbb{N},\ y/Y = [d_1, d_2, \ldots, d_k],\ \gcd(y, Y) = 1,\ y \leqslant Y, \\ d_j \in \mathbf{A} \text{ для } j = 1, 2, \ldots, k \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} = \left\{ d \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists\, b \in \mathbb{N} :\ \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{A}} \right\}.$$

Через $\Delta_{\mathbf{A}}$ обозначим *хаусдорфову размерность* множества действительных чисел, представимых бесконечными цепными дробями с неполными частными из алфавита $\mathbf{A}$. Ж. Бургейн и А. Конторович в 2011 году доказали [2,3] следующую теорему:

для каждого алфавита $\mathbf{A}$, удовлетворяющего условию

$$\Delta_{\mathbf{A}} > \frac{307}{312} = 0.9839\ldots \tag{1}$$

справедливо неравенство

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \geqslant N(1 - o(1)). \tag{2}$$

Усиление теоремы Бургейна — Конторовича состоит в следующем [4].

Теорема 2. Пусть алфавит $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию

$$\Delta_{\mathbf{A}} > (\sqrt{40} - 4)/3 = 0.7748\ldots. \tag{3}$$

Тогда выполнена формула (1).

Можно доказать также более сильное утверждение.

Теорема 3. Пусть алфавит $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (3). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C = C_{\mathbf{A},\varepsilon} > 0$, такое что выполнена формула

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \geqslant N - CN^{1+\varepsilon - \frac{\Delta_{\mathbf{A}} - (\sqrt{40}-4)/3}{100}}.$$

Идейно метод Бургейна — Конторовича восходит к И. М. Виноградову: получение верхней оценки модуля тригонометрической суммы начинается с возведения этой суммы в квадрат и затем сводится к оценке числа решений системы, состоящей из неравенств и сравнений по некоторым модулям. Результаты этой последней оценки сводятся к верхним и нижним ограничениям на параметр M_1, отвечающий за норму квадратных матриц второго порядка. По мере уменьшения величины $\Delta_{\mathbf{A}}$ верхние ограничения на M_1 также уменьшаются, а нижние — увеличиваются, так что для выбора M_1 остается все меньше возможностей. Наконец, при некотором еще меньшем значении $\Delta_{\mathbf{A}}$ интервал выбора M_1 стягивается в точку — это значение $\Delta_{\mathbf{A}}$ и есть минимально возможное.

Одна из важных идей здесь состоит в том, чтобы действительные числа из интервала $(0,1)$ приблизить рациональными с некоторой точностью, после чего представить результаты всевозможных таких приближений в виде объединения специальных конечных множеств Z, напоминающих параллелепипеды. Область изменения параметров, связанных с Z, в дальнейшем делится на несколько подмножеств, для каждого из которых ограничения на параметр M_1 выводятся индивидуально. Дополнительное усиление первого шага доказательства состоит в предварительном сдвиге (добавлении аддитивной константы) перед применением теоремы Дирихле.

Литература

1. *S. K. Zaremba.* La méthode des "bons treillis" pour le calcul des intégerales multiples. // Applications of number theory to numerical analysis (Montreal, Canada, 1971), pp. 39 — 119, Academic Press, New York, 1972.

2. *J. Bourgain, A. Kontorovich.* On Zaremba's conjecture. // Annals of Math., **180**: pp. 137 — 196, 2014.

3. *J. Bourgain, A. Kontorovich.* On Zaremba's conjecture, preprint available at arXiv:1107.3776(2011).

4. *И. Д. Кан.* Усиление метода Бургейна — Конторовича: три новых теоремы. // Математический сборник. Том **212**, № 7. С. 39 — 83. 2021.

О ДИНАМИКЕ ПОЛНОСВЯЗНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО–РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ЦЕПОЧКИ ИЗ ЛОГИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.А. Кащенко, А.О. Толбей

kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

УДК 517.9

Рассматриваются цепочки связанных логистических уравнений с запаздыванием. Основное предположение, открывающее путь к применению специальных асимптотических методов, состоит в том, что количество элементов цепочки достаточно велико. Это дает основание от дискретной системы уравнений перейти к использованию непрерывного аргумента и в качестве исходной модели получить интегро-дифференциальную краевую задачу.

Ключевые слова: динамика, логистическое уравнение, цепочка, запаздывание

Dynamics of fully connected spatially distributed chain of logistic equations with delay

Chains of coupled logistic equations with delay are considered. The main assumption that opens the way to the use of special asymptotic methods is that the number of elements in the chain is sufficiently large. This gives grounds to move from a discrete system of equations to the use of a continuous argument and obtain an integro-differential boundary value problem as the initial model.

Keywords: dynamics, logistic equation, chain, delay

Рассмотрим полносвязную цепочку логистических уравнений

$$\dot{u}_j = -ru_j(t-T,x)(1+u_j) + r\gamma\Big[\frac{2\pi}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i(t-h)-u_j(t-h))\Big]. \qquad (1)$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Кащенко Сергей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, Региональный научно-образовательный математический центр «Центр интегрируемых систем», ЯрГУ имени П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Sergey Kashchenko (Regional Scientific and Educational Mathematical Center «Centre of Integrable Systems», P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Толбей Анна Олеговна, к.ф.-м.н., доцент, Региональный научно-образовательный математический центр «Центр интегрируемых систем», ЯрГУ имени П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Anna Tolbey (Regional Scientific and Educational Mathematical Center «Centre of Integrable Systems», P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Здесь все коэффициенты положительны и имеют конкретный биологический смысл. В предположении, что количество элементов цепочки N достаточно велико, естественно от системы (1) перейти к рассмотрению краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -ru(t-T,x)(1+u) + r\gamma\Big[(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} u(t-h,s)ds - u(t-h,x)\Big], \quad (2)$$

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t,x). \quad (3)$$

Исследуем локальную – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамику краевой задачи (2), (3). Сначала рассмотрим ситуацию, когда параметр γ является малым

$$\gamma = \mu\gamma_1 \ \text{ и } \ 0 < \mu \ll 1. \quad (4)$$

Пусть реализуется критический случай, когда при некоторых положительных r_0 и T_0 выполнены условия

$$r_0T_0 = \frac{\pi}{2}, \ \ r = r_0 + \mu r_1, \ \ T = T_0 + \mu T_1, \ \gamma = \mu\gamma_1. \quad (5)$$

Этот критический случай имеет бесконечную размерность, поскольку бесконечно много корней характеристического уравнения стремятся к нулю при $\mu \to 0$. Основной результат состоит в том, что квазинормальная форма

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b\xi + \gamma_0\big(M(\xi) - \xi\big) + \beta\xi|\xi|^2, \quad \xi(\tau, x+2\pi) \equiv \xi(\tau,x) \quad (6)$$

определяет локальную динамику исходной краевой задачи (2), (3).

Здесь $M(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(\tau,x)dx$. Явный вид коэффициентов b, γ_0, β не приводим. Положим $A = -\exp(-ir_0)\big(2(i+\exp(-2iT_0))\big)^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4) *и* (5) *и пусть краевая задача* (6) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$ *решение* $\xi(\tau,x)$. *Тогда функция*

$$u(t,x,\mu) = \mu^{1/2}\Big(\xi(\tau,x)\exp\big(i\pi(2T_0)^{-1}t\big) + \bar{c}\bar{c}\Big) + \mu\big(A\xi^2(\tau,x)\exp(i\pi(T_0)^{-1}t) + \bar{c}\bar{c}\big)$$

удовлетворяет краевой задаче (2), (3) *с точностью до* $O(\mu^{3/2})$.

В случае «средних» значений параемтра γ характеристическое уравнение распадается на два: $\lambda = -r\exp(-\lambda T)$, $\lambda = -r(1+\gamma)\exp(-\lambda T)$.

Пусть выполнено неравенство $rT < \pi/2$. Тем самым каждая изолированная популяция не совершает колебаний численности в окрестности положительного состояния равновесия. Предполагаем, что в задаче об устойчивости стационара в (2), (3) имеет место критический случай: при некоторых $r = r_0, \gamma = \gamma_0$ и $T = T_0$ верны соотношения

$$r_0(1+\gamma_0)T_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Введем малый параметр $\mu : 0 < \mu \ll 1$. Положим в (2), (3)

$$r = r_0 + \mu r, \ \gamma = \gamma_0 + \mu\gamma, \ T = T_0 + \mu T_1.$$

Основной результат состоит в том, что краевая задача

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = b_1\xi + \beta_1(\xi|\xi^2| - M(\xi|\xi^2|)) + \beta_2\bar{\xi}M(\xi^2), \tag{8}$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad M(\xi(\tau, s)) = 0. \tag{9}$$

играет роль квазинормальной формы.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (7) *и пусть краевая задача* (8), (9) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$ *решение* $\xi(\tau, x)$. *Тогда функция*

$$u(t, x, \mu) = \mu^{1/2}\Big(\xi(\tau, x)\exp\big(i\omega_0 t\big) + \bar{cc}\Big)$$

удовлетворяет краевой задаче (2), (3) *с точностью до* $O(\mu)$.

Для краевых задач (6) и (8), (9) можно в явном виде определить семейства периодических по t и 2π-периодических кусочно-непрерывных по x решений.

НЕКОМПАКТНЫЕ СЛОЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПСЕВДО-ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А. Кибкало

slava.kibkalo@gmail.com

УДК 517.938.5

Для псевдо-евклидовых аналогов интегрируемых волчков классической механики изучаются свойства их слоений Лиувилля. В указанных системах обнаружены некомпактные слои и некритические бифуркации.

Ключевые слова: интегрируемость, слоение Лиувилля, псевдо-евклидово пространство, динамика твердого тела

Noncompact foliations of mechanical systems in pseudo-Euclidean space

For pseudo-Euclidean analogues of integrable tops from classical mechanics, the properties of their Liouville foliations are studied. Non-compact fibers and non-critical bifurcations are discovered.

Keywords: integrability, Liouville foliation, pseudo-Euclidean space, rigid body dynamics

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-11-00355) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

Кибкало Владислав Александрович, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladislav Kibkalo, PhD, Assistant (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Топологический подход к описанию поведения интегрируемых гамильтоновых систем был развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы [1]. С его помощью удалось проанализировать многие известные интегрируемые системы из геометрии, механики и математической физики, например, волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Были классифицированы возникающие в таких системах невырожденные особенности и построены инварианты, классифицирующие эти системы на неособых трехмерных уровнях энергии $Q^3 : H = h$ с точностью до послойной гомеоморфности их слоений Лиувилля. Отметим, что почти все слои слоения являются замыканиями фазовых траекторий системы. Вычисление таких инвариантов для различных систем позволило обнаружить нетривиальные и априори неочевидные эквивалентности разных систем в некоторых зонах энергии.

При построении классификации особенностей и слоений важную роль играет компактность слоя: из нее следует как полнота потоков, так и наличие у каждой бифуркации слоения критических точек на особом слое. Классификация произвольных систем с некомпактными слоениями представляется необозримой. На первом этапе естественно выделить некоторый "разумный" подкласс таких систем и изучить возникающие в нем слоения. Обзор ряда известных систем с некомпактными слоениями представлен в работе Д.А.Федосеева и А.Т.Фоменко [2]. В таких системах возможны бифуркации слоения, происходящие без падения ранга отображения момента. Их классификация в настоящее время отсутствует, а обнаружение как численными, так и аналитическими методами оказывается непростым.

А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым была построена [3] серия аналогов систем классической механики, сохраняющая интегрируемость. Для этого фазовое пространство $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ рассматривается как подпространство в $\mathbb{C}^6$. Линейное преобразование сохраняет вещественность скобки Ли-Пуассона алгебры Ли $e(3)$:

$$\tilde{J}_1 = J_1/i, \quad \tilde{J}_2 = J_2/i, \quad \tilde{J}_3 = J_3, \qquad \tilde{x}_1 = x_1/i, \quad \tilde{x}_2 = x_2/i, \quad \tilde{x}_3 = x_3.$$

Функции Казимира полученной "псевдо-евклидовой" скобки имеют вид

$$f_1 = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = a, \qquad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b.$$

Для многих систем механики получаемые гамильтониан и дополнительный интеграл остаются многочленами с вещественными коэффициентами, теряя при этом свойство положительной определенности. Для псевдо-евклидова аналога волчка Эйлера приведем формулы гамильтониана H_e и первого интеграла F_e, а для такого аналога системы Ковалевской — только гамильтониана H (формула интеграла Ковалевской K не изменится)

$$H = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} - \frac{J_3^2}{2A_3}, \quad F_e = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2, \qquad H_k = \frac{1}{2}\left(J_1^2 + J_2^2 - 2J_3^2\right) + x_1.$$

В докладе мы опишем свойства слоений Лиувилля для аналогов волчков Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Приведем ниже два утверждения о них.

Теорема 1. (Кибкало [4]) *Пусть интеграл площадей $f_2 = b$ отличен от нуля. Совместный уровень $f_1 = a$, $f_2 = b$, $H_e = h$, $K = k$ псевдоевклидовой системы Ковалевской некомпактен тогда и только тогда, когда $-\sqrt{k} \leqslant 2h \leqslant \sqrt{k}$, $k \geqslant 0$. Иначе он компактен или пуст. Парабола $k = 4h^2$ является бифуркационой, и содержит в прообразе своих точек некомпактные некритические бифуркации.*

В системе Эйлера все интегралы системы имеют степень 2, а энергия и первый интеграл зависят только от импульсов J_1, J_2, J_3. Для ее псевдоевклидова аналога случай $a \cdot b \neq 0$ был изучен автором, а случай $a \cdot b = 0$ — им же вместе с М.К.Алтуевым [5]. В этих слоениях встретились, в частности, известная бифуркация конических сечений (эллипс-парабола-гипербола) и перестройка семейства эллипсов в семейство гипербол через пару параллельных прямых.

Теорема 2. *Для любых значений $f_1 = a, f_2 = b$, отличных от пары $(0,0)$, и любого набора различных $A_1, A_2, A_3 > 0$ определены класс гомеоморфности слоев слоения Лиувилля псевдо-евклидовой системы Эйлера, описаны их типичные бифуркации (включая некомпактные некритические) и построены грубые молекулы, т.е. классифицирующий инвариант базы слоения вместе с ее поднятием в окрестности точки.*

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.. — Ижевск: Удмуртский университет, 1999.

2. *Fedoseev D.A., Fomenko A.T.* Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // J. Math. Sc., **248** (2020), 810-827.

3. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. of Math. Phys., **23**:4 (2016), 431-454.

4. *Kibkalo V.A.* Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras // Moscow University Mathematics Bulletin, **75**:6 (2020), 263-267.

5. *Алтуев М.К., Кибкало В.А.* Топологический анализ псевдо-евклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров // Матем. сб., 2023 (в печати).

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОЙ БАЗИРУЕМОСТИ ТОЖДЕСТВ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И СОВПАДЕНИЯ T- И L-ИДЕАЛОВ

А.В. Кислицин
kislitsin@altspu.ru

УДК 512.552.4

В работе найдены новые условия, влекущие конечную базируемость тождеств мультипликативного векторного пространства. Также изучен вопрос о совпадении T-идеала свободной ассоциативной алгебры с L-идеалом, порожденным теми же многочленами.

Ключевые слова: мультипликативное векторное пространство, базис тождеств, L-идеал, L-многообразие, шпехтовость

Conditions for finite based of identities of multiplicative vector spaces and conditions for the equality of T- and L-ideals

Conditions are found in the paper that imply that the identities of a multiplicative vector space are finitely based. We also study the question of the coincidence of the T-ideal of a free associative algebra with its L-ideal, which is generated by the same polynomials.

Keywords: multiplicative vector space, basis of identities, L-ideal, L-variety, Specht property

Везде в работе A — ассоциативная алгебра над полем F, E — подпространство алгебры A, порождающее A как алгебру. Алгебра A в этом случае называется *обертывающей алгеброй* пространства E, а пространство E называется *мультипликативным векторным пространством* или просто *L-пространством.* Свободную ассоциативную алгебру от множества свободных образующих X обозначим через $F\langle X\rangle$.

Ю. П. Размыслов в книге [1] ввел понятие ассоциативно лиевой пары (A, L), где L — алгебра Ли, A — ассоциативная обертывающая для L, а также рассмотрел тождества таких пар. Введенные понятия можно перенести на случай пары (A, E), где E — мультипликативное векторное пространство, A — ассоциативная обертывающая алгебра пространства E.

Под *тождеством пары* (A, E) будем понимать такой многочлен из $F\langle X\rangle$, который равен нулю в алгебре A при подстановке вместо переменных элементов пространства E. В этом случае также будем говорить о *тождестве векторного пространства* E.

Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$. Класс всех пар, в которых выполняются все тождества $g = 0$, где $g \in G$, называется *многообразием мультипликативных векторных пар* или просто *L-многообразием, заданным множеством тождеств* G и обозначается $\mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00745).

Кислицин Алексей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского (Омск, Россия); Алтайский государственный педагогический университет (Барнаул, Россия); Alexey Kislitsin (Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia; Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia)

Идеал алгебры $F\langle X\rangle$, замкнутый относительно линейных подстановок переменных, будем называть *L-идеалом.* Минимальный L-идеал, содержащий множество $G \subseteq F\langle X\rangle$, будем называть *$L$-идеалом, порожденным множеством G.* Ясно, что множество тождеств мультипликативного векторного пространства образует L-идеал.

Скажем, что тождество $f = 0$ пространства E *следует из тождеств* $f_1, f_2, \ldots$ этого пространства, если $f \in L(f_1, f_2, \ldots)$. Множество тождеств L-пространства E, из которых следуют все тождества этого пространства, назовем *базисом тождеств E.* В случае, если базис L-пространства E конечен, скажем, что *E конечно базируемо.* В противном случае будем говорить, что *E не конечно базируемо* (НКБ-пространство).

В работах [2, 3] показано, что любое L-пространство над бесконечным полем, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]z = 0$, либо тождеству $x[y, z] = 0$, имеет конечный базис тождеств. В настоящей работе исследован вопрос конечной базируемости тождеств L-пространства, удовлетворяющего либо тождеству $[x, y]zt = 0$, либо тождеству $xy[z, t] = 0$.

Теорема 1. *Мультипликативное векторное пространство над полем нулевой характеристики, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]zt = 0$, либо тождеству $xy[z, t] = 0$, имеет конечный базис тождеств.*

L-многообразие $\mathcal{M}$ называется *шпехтовым*, если любое его L-подмногообразие может быть задано конечным набором тождеств. В терминах шпехтовости теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1′. *L-многообразия $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x, y]zt = 0\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \mathrm{Var}_L\langle xy[z, t] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем нулевой характеристики являются шпехтовыми.*

Отметим, что многообразие $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ не задается конечным набором тождеств.

Обозначим через $L(E)$ множество всех тождеств мультипликативного векторного пространства E, а через $T(E)$ — T-идеал, порожденный $L(E)$. Ясно, что $L(E) \subseteq T(E)$ для любого пространства E. Обратное же включение выполняется не всегда. В [2] показано, что если E — мультипликативное векторное пространство над бесконечным полем, удовлетворяющее одному из тождеств $[x, y]z = 0$ или $x[y, z] = 0$, то $T(E) = L(E)$. Следующая теорема дает ответ на вопрос о совпадении $T(E)$ и $L(E)$ для тождества $[x, y]zt = 0$.

Теорема 2. *Пусть F — бесконечное поле и $E = \langle e_{11} + e_{12}, e_{13} + e_{23}\rangle_F$ — мультипликативное векторное пространство. Тогда $[x, y]zt \in L(E)$ и $T(E) \neq L(E)$.*

Очевидно, что в пространстве E выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. В этом случае можно показать, что $x[y, z]t \in T(E)$, но $x[y, z]t \notin L(E)$.

Литература

1. *Размыслов Ю.П.* Тождества алгебр и их представлений. — Наука. Гл. ред физ.-мат. лит.: Москва, 1989.

2. *Кислицин А.В.* О шпехтовости L-многообразий векторных пространств // Алгебра и логика, **56**:5 (2017), 548-558.

3. *Кислицин А.В.* О шпехтовости L-многообразий векторных пространств над произвольным полем // Алгебра и логика, **57**:5 (2018), 556-566.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ РЕГРЕССИОННЫХ ОСТАТКОВ ПРИ МНОЖЕСТВЕННОМ УПОРЯДОЧЕНИИ РЕГРЕССОРОВ

А.П. Ковалевский, М.Г. Чебунин

artyom.kovalevskii@gmail.com, chebuninmikhail@gmail.com

УДК 519.233

Мы доказываем теоремы о гауссовой асимптотике эмпирического моста, построенного из регрессоров линейной модели с множественным упорядочением регрессоров. Разработан алгоритм проверки гипотезы о линейной модели для компонент случайного вектора, согласно которой одна из компонент является линейной комбинацией других с точностью до ошибки, не зависящей от остальных компонент случайного вектора.

Ключевые слова: конкомитанты, копула, слабая сходимость, регрессионные остатки

Limit theorems for sums of regression residuals under multiple ordering

We prove theorems on the Gaussian asymptotic behavior of an empirical bridge built from regressors of a linear model with multiple ordering of regressors. An algorithm for testing the hypothesis of a linear model for the components of a random vector has been developed.

Keywords: concomitants, copula, weak convergence, regression residuals

Полезным методом анализа многомерных наблюдений является изучение линейных отношений между компонентами. Этот анализ позволяет строить линейный прогноз одной переменной на основе других. Само существование зависимостей проверяется путем расчета выборочных корреляций и разработки статистических тестов на их основе. Этот класс тестов является предметом корреляционного анализа.

Построение моделей линейной зависимости одной переменной (отклика) от других переменных (регрессоров), оценка параметров линейной зависимости и проверка их значимости являются предметом исследования регрессионного анализа. Однако стандартные методы регрессионного анализа не

Работа выполнена при финансовой поддержке Математического центра в Академгородке в соответствии с соглашением No. 075-15-2019-1675 с Минобрнауки России.

Ковалевский Артем Павлович, д.ф.-м.н., доцент, НГТУ, НГУ (Новосибирск, Россия); Artyom Kovalevskii (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Чебунин Михаил Георгиевич, к.ф.-м.н., Институт технологий в Карлсруэ (Карлсруэ, Германия), НГУ (Новосибирск, Россия); Mikhail Chebunin (Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

включают методы обнаружения того, что предложенная линейная модель полностью неверна. Если модель неверна, то она должна быть либо полностью отброшена, либо существенно изменена.

Широкий класс методов анализа соответствия данных и регрессионной модели основан на анализе процесса сумм регрессионных остатков, см. Shorack and Wellner (1986). Для временных рядов MacNeill (1978) предложил первый тест такого рода, а Bishoff (1998) существенно ослабил лежащие в его основе вероятностные предположения. Анализ результатов в этом направлении можно найти в книге Csorgo and Horváth (1997, главы 2 и 3) и в работе MacNeill et al. (2020). Для массивов данных, упорядоченных по одному регрессору, такие тесты предложены в работах Kovalevskii and Shatalin (2015, 2016), Kovalevskii (2020). Мы предлагаем тест, использующий упорядочения массива данных по нескольким регрессорам (Chebunin, Kovalevskii, 2021). Доказательство основано на переносе на многомерный случай результатов Davydov and Egorov (2000).

Пусть $(\mathbf{X}_i, \xi_i, \eta_i) = (X_{i1}, \ldots, X_{id_1}, \xi_{i1}, \ldots, \xi_{i,d_2-1}, \eta_i)$ — независимые и одинаково распределенные вектор-строки, $i = 1, \ldots, n$. Все компоненты строки могут быть зависимы, и $X_{i1}, \ldots, X_{id_1}$ образуют копулу (то есть их маргинальные распределения равномерны на $[0, 1]$) с некоторой совместной плотностью рапределения. Строки $(\mathbf{X}_i, \xi_i, \eta_i)$ образуют матрицу (X, ξ, η).

Будем предполагать выполнение гипотезы H_0 о линейной регрессии:

$$\eta_i = \xi_i \theta + \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{d_2-1} \xi_{ij} \theta_j + \varepsilon_i,$$

$\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ и $\{(\mathbf{X}_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ независимы, $\mathbf{E}\,\varepsilon_1 = 0$, $\mathbf{Var}\,\varepsilon_1 > 0$.

Рассмотрим d_1 упорядочиваний строк матрицы (X, ξ, η) в порядке возрастания элементов столбцов матрицы X. Результатом этих d_1 упорядочиваний будет последовательность из d_1 матриц $(X^{(j)}, \xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ со строками $(\mathbf{X}_i^{(j)}, \xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)}) = (X_{i1}^{(j)}, \ldots, X_{id_1}^{(j)}, \xi_{i1}^{(j)}, \ldots, \xi_{i,d_2-1}^{(j)}, \eta_i^{(j)})$, $j = 1, \ldots, d_1$. Пусть $\widehat{\theta}$ — стандартная оценка методом наименьших квадратов, $h^{(j)}(x) = \mathbf{E}\{\xi_1 | X_{1j} = x\}$, $L^{(j)}(x) = \int\limits_0^x h^{(j)}(s)\,ds$, $G = \mathbf{E}\xi_1^T \xi_1$. Пусть $\widehat{\varepsilon}_i^{(j)} = \eta_i^{(j)} - \xi_i^{(j)} \widehat{\theta}$ — регрессионные остатки, $\widehat{\Delta}_k^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^k \widehat{\varepsilon}_i^{(j)}$ — их частичные суммы, $\widehat{\Delta}_0^{(j)} = 0$.

Обозначим $\widehat{Z}_n = (\widehat{Z}_n^{(1)}, \ldots, \widehat{Z}_n^{(d_1)})$, где $\widehat{Z}_n^{(j)} = \{\widehat{Z}_n^{(j)}(t),\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — кусочно линейные случайные функции с узлами в точках

$$\left(\frac{k}{n},\ \frac{\widehat{\Delta}_k^{(j)}}{\sqrt{n \mathbf{Var} \varepsilon_1}} \right), \quad k = 0,\ 1, \ldots,\ n.$$

Теорема 1. *Если матрица G существует и невырождена, и гипотеза H_0 выполнена, то $\widehat{Z}_n \Longrightarrow \widehat{Z}$. Здесь $\widehat{Z}$ — это центрированный d_1-мерный гауссовский процесс с непрерывными п.н. траекториями и ковариационной матрицей функций* $\widehat{K}(s,t) = \left(\widehat{K}_{ij}(s,t) \right)_{i,j=1}^{d_1}$,

$$\widehat{K}_{ij}(s,t) = \mathbf{P}(X_{1i} \leqslant s, X_{1j} \leqslant t) - L^{(i)}(s) G^{-1} (L^{(j)}(t))^T, \quad s,t \in [0,1].$$

Литература

1. *Bischoff W.*, 1998. A functional central limit theorem for regression models // Ann. Stat. **26**, 1398–1410.

2. *Chebunin M. G., Kovalevskii A.P.*, 2021. Asymptotics of sums of regression residuals under multiple ordering of regressors // Siberian Electronic Mathematical Reports **18**:2, 1482–1492.

3. *Csorgo M., Horváth L.*, 1997. Limit Theorems in Change-Point Analysis. — NY: Wiley.

4. *Davydov Y., Egorov V.*, 2000. Functional limit theorems for induced order statistics // Mathematical Methods of Statistics **9**:3, 297–313.

5. *Kovalevskii A. P., Shatalin E. V.*, 2015. Asymptotics of Sums of Residuals of One-Parameter Linear Regression on Order Statistics // Theory of Probability and its Applications **59**:3, 375–387.

6. *Kovalevskii A., Shatalin E.*, 2016. A limit process for a sequence of partial sums of residuals of a simple regression on order statistics // Probability and Mathematical Statistics **36**:1, 113–120.

7. *Kovalevskii A. P.*, 2020. Asymptotics of an empirical bridge of regression on induced order statistics // Siberian Electronic Mathematical Reports **17**, 954–963.

8. *MacNeill I. B.*, 1978. Limit processes for sequences of partial sums of regression residuals, Ann. Prob. **6**, 695–698.

9. *MacNeill I.B., Jandhyala V.K., Kaul A., Fotopoulos S.B.*, 2020. Multiple change-point models for time series // Environmetrics **31**:1, e2593.

10. *Shorack G., Wellner J.*, 1986. Empirical processes with applications to statistics. — NY: Wiley.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ, ЦЕЛЫХ И НЕЦЕЛЫХ

Д.В. Коледа

koledad@rambler.ru

УДК 511.35, 511.48, 511.75

Доклад посвящён статистическому поведению алгебраических чисел на вещественной оси. Мы поговорим об асимптотике количества алгебраических чисел фиксированной степени, лежащих в заданном промежутке вещественной оси, когда верхняя граница их высот неограниченно растёт. Будут обсуждаться сходства и различия в поведении целых алгебраических чисел и алгебраических чисел общего вида.

Ключевые слова: распределение алгебраических чисел, целые алгебраические числа, числа Перрона

Коледа Денис Владимирович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (Минск, Беларусь); Denis Koleda (Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus)

On the distribution of real algebraic numbers: integers and non-integers

The talk is devoted to the statistical behaviour of algebraic numbers on the real line. We will consider the asymptotic count of algebraic numbers of fixed degree in a given interval of the real line as the upper bound of their heights grows to infinity. There will be discussed similarities and differences in the behaviour of algebraic integers and general algebraic numbers.

Keywords: distribution of algebraic numbers, algebraic integers, Perron numbers

Мы обсудим, насколько часто алгебраические числа попадают в произвольный интервал вещественной прямой, и сравним распределения целых алгебраических чисел и алгебраических чисел общего вида.

Под степенью $\deg\alpha$ и высотой $H(\alpha)$ алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}$ мы понимаем степень и высоту минимального многочлена этого числа, т.е. многочлена $p_\alpha(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ наименьшей степени n с целыми взаимно простыми коэффициентами a_k и старшим коэффициентом $a_n > 0$, такого что $p_\alpha(\alpha) = 0$. ***Высотой*** многочлена p_α (т.н. ***обычной высотой***) мы называем величину $H(p_\alpha) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$. Алгебраическое число называется ***алгебраическим целым***, если его минимальный многочлен (над $\mathbb{Z}$) унитарен, т.е. имеет старший коэффициент $a_n = 1$. Количество элементов в конечном множестве M будем обозначать как $\#M$.

Нас будет интересовать поведение считающих функций

$$\Phi_n(Q,S) = \#\left\{\text{алгебраические } \alpha \in S : \deg\alpha = n,\ H(\alpha) \leqslant Q\right\},$$
$$\Omega_n(Q,S) = \#\left\{\text{целые алгебраические } \alpha \in S : \deg\alpha = n,\ H(\alpha) \leqslant Q\right\},$$

где множество $S \subseteq \mathbb{R}$ и верхняя граница высот $Q > 0$.

Оказывается, что при $Q \to \infty$ можно говорить о плотности распределения алгебраических чисел степени n, что выражается следующей теоремой.

Теорема 1 ([1]). *Пусть $n \geqslant 1$ фиксированное целое. Для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ верно*

$$\left|\frac{\Phi_n(Q,I)}{(2Q)^{n+1}} - \frac{1}{2\zeta(n+1)}\int_I \rho_n(t)\,dt\right| \leqslant \begin{cases} c_n Q^{-1}, & n \geqslant 3,\\ c_n Q^{-1}\ln Q, & n = 1,2,\end{cases}$$

где постоянная $c_n > 0$ зависит только от степени n; $\zeta(\cdot)$ — дзета-функция Римана; ρ_n — положительная непрерывная функция, заданная формулой

$$\rho_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \int\limits_{G_n(t)} \left|\sum_{k=1}^{n} k\xi_k t^{k-1}\right| d\xi_1\ldots d\xi_n$$

с областью интегрирования

$$G_n(t) = \left\{(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k| \leqslant 1,\ \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k t^k\right| \leqslant 1\right\}.$$

С некоторыми оговорками целые алгебраические числа степени n статистически похожи на алгебраические числа степени $n-1$. Например, верна такая теорема.

Теорема 2 ([2]). *Пусть целое $n \geqslant 2$. Для любого фиксированного конечного промежутка $I \subset \mathbb{R}$ выполняется предельное равенство*

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\Omega_n(Q,I)}{\Phi_{n-1}(Q,I)} = 2\zeta(n). \tag{1}$$

Однако в общем случае, когда I бесконечен или меняется с ростом Q, равенство (1) *может нарушаться. В частности,*

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\Omega_n(Q,\mathbb{R})}{\Phi_{n-1}(Q,\mathbb{R})} = 2\zeta(n) \left(1 + \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_{n-1}(t)\,dt\right)^{-1}\right). \tag{2}$$

При этом в распределении вещественных алгебраических целых обнаруживаются две симметричные “равнины”, образованные в основном числами Перрона, т.е. алгебраическими целыми α, у которых алгебраически сопряжённые меньше чем $|\alpha|$. С ростом верхней границы высот Q “равнины” отодвигаются от начала координат и растягиваются. А именно, для любого промежутка $I \subset (-Q-1, -Q^{1/2}) \cup (Q^{1/2}, Q+1)$ верно соотношение

$$\left|\frac{\Omega_n(Q,I)}{(2Q)^{n-1}} - |I|\right| \leqslant \begin{cases} \kappa_n, & n \geqslant 3, \\ \kappa_2 \ln Q, & n = 2, \end{cases}$$

где постоянная $\kappa_n > 0$ зависит только от степени n. Отметим, что именно эти две “равнины” и дают прирост правой части предельного равенства (2) в сравнении с (1).

Литература

1. *Koleda D.V.* On the density function of the distribution of real algebraic numbers // J. Théor. Nombres Bordeaux, **29**:1 (2017), 179–200.

2. *Koleda D.V.* Distribution of real algebraic integers // J. Number Theory, **210** (2020), 333–372.

АНАЛИЗ СИСТЕМ ОСКОЛКОВА В МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ

А.О. Кондюков
k.a.o_leksey999@mail.ru

УДК 517.518

Исследуются первые начально-краевые задачи для систем, которые моделируют поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта различных порядков в магнитном поле Земли. Указанные задачи, исследуются с помощью теории полулинейных уравнений соболевского типа. Описано фазовое пространство и получена теорема существования и единственности решения для соответствующих начально-краевых задач.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, квазистационарные полутраектории, фазовое пространство, магнитогидродинамика.

Analysis of Oskolkov systems in magnetohydrodynamics

The first initial boundary value problems for systems that simulate the flow of incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluid of various orders in the Earth's magnetic field are investigated. These problems are investigated using the theory of semi-linear equations of the Sobolev type. The phase space is described and a theorem of the existence and uniqueness of the solution for the corresponding initial boundary value problems is obtained.

Keywords: Sobolev type equations, quasi-stationary semi-trajectories, phase space, magnetohydrodynamics.

Система

$$\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t=\nu\nabla^2 v-(v\cdot\nabla)v+\sum_{m=1}^{M}\sum_{q=0}^{n_{m-1}}A_{m,q}\nabla^2 w_{m,q}-\frac{1}{\rho}\nabla p-2\Omega\times v+\frac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b,\\
&\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t}=v+\alpha_m w_{m,0},\quad \alpha_m\in\mathbb{R}_-,,\quad m=\overline{1,\ M},\\
&\frac{\partial w_{m,q}}{\partial t}=qw_{m,p-1}+\alpha_m w_{m,q},\quad q=\overline{1,\ n_m-1},\quad \alpha_m<0,\quad A_{m,q}>0\\
&\nabla\cdot v=0,\quad \nabla\cdot b=0,\quad b_t=\delta\nabla^2 b+\nabla\times(v\times b),
\end{aligned}\tag{1}$$

моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта высшего порядка $K(K=n_1+\ldots+n_M)$[1] в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функции $v=(v_1(x,t),v_2(x,t),\ldots,v_n(x,t))$ и $b=(b_1(x,t),b_2(x,t),\ldots,b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p=p(x,t)$ – давление, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, параметры $A_{m,q}$ определяют время ретардации давления. Заметим, что указанная система обобщает систему, приведенную в [2],[3] при $\varkappa=0$ для модели нулевого порядка.

Кондюков Алексей Олегович, к.ф.-м.н., доцент, НовГУ имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия); Aleksey Kondyukov (Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russia)

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (1)

$$
\begin{array}{l}
v(x,0) = v_0(x), \quad w_{m,q}(x,0) = w^0_{m,q}(x), \\
b(x,0) = b_0(x), \quad \forall x \in D, \\
v(x,t) = 0, \quad w_{m,q}(x,t) = 0, \\
b(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+, \\
m = \overline{1,\ M}, \quad q = \overline{0,\ n_{m-1}}.
\end{array} \tag{2}
$$

Здесь $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4,$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Задача (1), (2) в случае $K = 0$ и $\varkappa \neq 0$ исследовалась в [4]. При $K \neq 0$ и $\varkappa \neq 0$ исследовалась в [5]. В случае $K \neq 0$ и $K(K = n_1 + \ldots + n_M)$ исследуется в [6]. Исследование задачи проводится в рамках теории задачи Коши для полулинейных уравнений соболевского типа [7] , [8]. Исходя из этого, в первой части работы изложена абстрактная задача Коши для полулинейного автономного уравнения соболевского типа. Во второй части задача (1), (2) рассматривается как конкретная интерпретация абстрактной задачи. В третьей части установливается существование квазистационарных полутраекторий указанной задачи и описано ее фазовое пространство.

Литература

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта/А.П. Осколков/ Тр. МИ АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126 – 164.

2. *Хенри Д.* Геомерическая теория полулинейных параболических уравнений /Д. Хенри/ – М: Мир, 1985.

3. *Hide R.* On planetary atmospheres and interiors/R.Hide/Mathematical Problems in the Geophisical Sciences, 1, W.H.Raid, ed. Am. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

4. *Сукачева Т.Г.* Фазовое пространство одной задачи магнитогидродинамики /Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков/ Дифф. уравнения., 2015, т. 51, № 4, с. 495-501.

5. *Kondyukov A. O.* A non-stationary model of the incompressible viscoelastic Kelvin–Voigt fluid of non-zero order in the magnetic field of the Earth/A. O. Kondyukov, T. G. Sukacheva/ Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.,2019, V. 12, № 3, P. 42–51.

6. *Кондюков А.О.* Обобщенная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли / А. О. Кондюков/ Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 2016, т. 8, № 3, с. 13–21

7. *Свиридюк Г.А.* Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

8. *Матвеева О.П.* Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.

МЕТОД РЕШЕНИЯ 3D УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

А.В. Коптев

alex.koptev@mail.ru

УДК 517.95, 532.5

Предложен метод построения решений 3D уравнений Навье — Стокса для движения несжимаемой среды. Метод позволяет свести задачу решения исходных уравнений к совокупности более простых задач. Важным этапом является введение новых ассоциированных неизвестных. В результате появляется возможность построить интеграл исходных уравнений и генератор решений.

Ключевые слова: уравнения Навье – Стокса, нелинейность, интеграл, генератор решений, точное решение

Method for Solving 3D Navier – Stokes Equations

A method for constructing solutions of the 3D Navier — Stokes equations for the motion of an incompressible medium is proposed. The method allows reducing the problem of solving initial equations to a set of simpler problems. An important step is the introduction of new associated unknowns. As a result, it becomes possible to construct an integral of the original equations and a solution generator.

Keywords: Navier – Stokes equations, nonlinearity, integral, solution generator, exact solution

1. Уравнения Навье – Стокса. Уравнения Навье – Стокса описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Эти уравнения интересны и с чисто математической точки зрения и имеют приложения к практическим задачам [1]. Для 3D движения несжимаемой среды уравнения Навье – Стокса имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x}+\frac{1}{Re}\Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y}+\frac{1}{Re}\Delta v,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial z}+\frac{1}{Re}\Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Где u, v, w, p представляют основные неизвестные;
Δ оператор Лапласа, Φ потенциал внешних сил; Re число Рейнольдса.

Коптев Александр Владимирович, к.ф.-м.н., профессор, ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова (Санкт-Петербург, Россия);
Alexander V. Koptev (Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, Russia)

2. Метод решения. Предлагаемый подход предполагает свести задачу решения исходных уравнений к совокупности более простых математических задач. Требуется последовательное решение пяти таких задач [2-3].

Каждое из исходных уравнений нужно представить в дивергентном виде

$$\frac{\partial P_i}{\partial x}+\frac{\partial Q_i}{\partial y}+\frac{\partial R_i}{\partial z}+\frac{\partial S_i}{\partial t}=0.$$

Где P_i, Q_i, R_i, S_i, некоторые комбинации основных неизвестных и первых производных по координатам. Существенно, что всякое уравнение такого вида допускает интегрирование

$$P_i=\frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial y}-\frac{\partial \Psi_{4,i}}{\partial z}-\frac{\partial \Psi_{6,i}}{\partial t},\ \ Q_i=-\frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial x}+\frac{\partial \Psi_{5,i}}{\partial z}-\frac{\partial \Psi_{3,i}}{\partial t},$$

$$R_i=\frac{\partial \Psi_{4,i}}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_{5,i}}{\partial y}+\frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial t},\ \ S_i=-\frac{\partial \Psi_{6,i}}{\partial x}+\frac{\partial \Psi_{3,i}}{\partial y}-\frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial t}.$$

Где $\Psi_{k,i}$, $k=1,2,...,6$ дважды дифференцируемые функции четырех переменных. Четвертое уравнение исходной системы не содержит производной по времени и в результате его интегрирования имеем три уравнения, содержащие три функции $\Psi_{k,j}$. Таким образом, в результате интегрирования суммарное число соотношений равно 21.

Полученные соотношения нужно преобразовать так, чтобы по возможности исключить нелинейные и недивергентные члены и снова интегрировать. В результате приходим к девяти основным соотношениям связывающим основные неизвестные u, v, w, p и новые ассоциированные неизвестные $\Psi_i, (i=1,2,...,15)$. Эти девять соотношений, рассмотренные в совокупности, представляют интеграл исходных 3D уравнений Навье – Стокса.

Пять из полученных девяти уравнений содержат квадратичные нелинейные члены типа $uv, uw, vw, u^2-v^2, v^2-w^2$. Данные уравнения можно разрешить относительно шести неизвестных Ψ_j, $(j=10,11,...,15)$, только если выполнены два условия совместности. В простейших обозначениях их можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_5}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f_6}{\partial x\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f_5}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_6}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_6}{\partial z^2}=0.$$

Каждое из этих уравнений представляет уравнение пятого порядка относительно Ψ_i, где $i=1,2,...,9$. Всякое решение этих уравнений приводит к точному решению исходных уравнений Навье – Стокса. Таким образом, эти два уравнения можно рассматривать, как генератор решений.

Далее нужно определить оставшиеся шесть ассоциированных неизвестных Ψ_j, $(j=10,11,...,15.)$ Три из них можно задать произвольно, а три другие находятся как решения линейных неоднородных уравнений

$$F_4=-\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x\partial y},\quad F_5=\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x\partial z},\quad F_6=-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y\partial z},$$

Таким образом, для завершения решения задачи осталось определить последнее из основных неизвестных p. Эта задача не представляет затруднений, поскольку все величины через которые выражается p, уже найдены. В результате все основные неизвестные u, v, w, p, найдены и задача построения решения уравнений Навье – Стокса решена.

Примеры точных решений, построенных указанным методом, приведены в [4-5].

Литература

1. Lodizhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid — New York: Gordon and Breach, 1969.

2. Koptev A.V. Integrals of Motion of an Incompressible medium Flow. From Classic to Modern. – Handbook on Navier — Stokes Equations. Theory and Applied Analysis — New York: Nova Science Publishers, 2017, 443-460.

3. *Koptev A.V.* Method for Solving the Navier – Stokes and Euler Equations of Motion for Incompressible Media // Jour. of Mathematical Sciences — New York: Springer, **250**(1), (2020), 254-382.

4. *Koptev A.V.* Exact solutions of 3D Navier — Stokes equations // Jour. of Siberian Federal Univ., Math. and Phys., **13**(3), (2020), 306-313.

5. *Koptev A.V.* Constructive Method to Solving 3D Navier — Stokes equations// 8-th European Congress of Mathematics. Book of Abstracts, — Portorozh: Univ. of Primorska Press, 2021 — 638-639.

О НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ДРОБЕЙ ФАРЕЯ

М.А. Королёв

korolevma@mi-ras.ru, hardy_ramanujan@mail.ru

УДК 511.35

Рядом Фарея порядка Q называется множество рациональных несократимых дробей a/b с условиями $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant Q$, упорядоченных по возрастанию. Дроби Фарея возникают естественным образом в различных задачах аналитической теории чисел. Они представляют собой полезный инструмент исследования (как, скажем, в круговом методе) и одновременно являются интересным объектом для изучения. В частности, имеется большое число результатов о статистических и арифметических свойствах таких дробей. Пожалуй, самым известным из последних является «модулярное соотношение» $a'b - ab' = 1$, которое справедливо для любых двух соседних дробей Фарея $a/b < a'/b'$. В докладе мы расскажем о других, более тонких свойствах дробей, доказательства которых основаны на изучении одного геометрического преобразования половинки единичного квадрата в себя, именуемого преобразованием Бока-Кобели-Захареску.

Ключевые слова: ряд Фарея, дроби Фарея, преобразование Бока-Кобели-Захареску.

Королёв Максим Александрович, д.ф.-м.н., Математический институт имени В.А. Стеклова (Москва, Россия); Maksim Korolev (Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia)

Some arithmetical properties of Farey fractions

Farey series of order Q is the increasing sequence of all reduced rational fractions a/b, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant Q$. Such fractions arise in many problems of analytic number theory. They both are useful analytical tool (for example, in the circle method) and quite interesting subject of study. There are many results concerning the statistical and arithmetical properties of these fractions. The most famous is the "modular equation" $a'b-ab'=1$ which holds true for any pair $a/b<a'/b'$ of consecutive Farey fractions. In the talk, we will speak about more delicate properties of Farey series. Their proofs are based on one geometric transform of a half of unit square into itself, which is called Boca-Cobeli-Zaharescu transform.

Keywords: Farey series, Farey fractions, Boca-Cobeli-Zaharescu transform.

Пусть $Q \geqslant 1$. Рядом Фарея Φ_Q порядка Q называется множество упорядоченных по возрастанию дробей вида

$$a/q, \text{ где } 0 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q, \ (a,q)=1.$$

Ряд Фарея возникает в самых разных задачах теории чисел и давно стал объектом всестороннего исследования.

Большой интерес представляют статистические закономерности, связанные с этим рядом. Примером служит задача о распределении в Φ_Q дробей a/q, знаменатели которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям с разностью $d \geqslant 2$. Именно, пусть $r \geqslant 1$ - фиксированное целое число, $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_r)$ - целочисленный набор с условиями $0 \leqslant c_1,\ldots,c_r \leqslant d-1$. Обозначим через $N_r(Q;d,\mathbf{c})$ количество наборов из r последовательных дробей ряда F_Q вида

$$\frac{a_1}{q_1}<\frac{a_2}{q_2}<\ldots<\frac{a_r}{q_r} \quad \text{с условиями} \quad q_s \equiv c_s \pmod{d}, \quad s=1,2,\ldots,r,$$

а через $N(Q)$ — число дробей в F_Q.

В 2012 г. К. Кобели, М. Выжийту и А. Захареску [1] доказали, что при любых фиксированных r,d и $\mathbf{c}$ существует предел

$$\varrho_r(d,\mathbf{c})=\lim_{Q\to+\infty}\frac{N_r(Q;d,\mathbf{c})}{N(Q)}$$

и указали общую формулу для него.

Основным инструментом при выводе такой формулы стало преобразование T треугольника $\mathcal{T}=\{(x,y): 0<x,y\leqslant 1, x+y>1\}$ в себя, заданное формулой

$$T(x,y)=\left(y, \left[\frac{1+x}{y}\right]y-x\right)$$

(треугольник $\mathcal{T}$ часто именуется треугольником Фарея, а преобразование T - преобразованием Бока-Кобели-Захареску, по именам авторов, впервые его рассмотревших, см. [2]).

Задавшись целым $k \geqslant 1$, определим $\mathcal{T}_k$ как множество точек (x, y) в $\mathcal{T}$ с условием $\bigl[(1+x)/y\bigr] = k$. Далее, имея целые числа $k_1, \ldots, k_r \geqslant 1$, определим область

$$\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r) = \mathcal{T}_{k_1} \cup T^{-1}(\mathcal{T}_{k_2}) \cup T^{-2}(\mathcal{T}_{k_3}) \cup \ldots \cup T^{-(r-1)}(\mathcal{T}_{k_r})$$

(можно показать, что $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ — либо пусто, либо выпуклый многоугольник). Упомянутая выше формула для величины $\varrho_r(d, \mathbf{c})$ содержит сумму (вообще говоря, бесконечную) площадей фигур $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$, распространённую на все целочисленные наборы, удовлетворяющие некоторой системе сравнений. Её использование для вычисления значений доли $\varrho_r(d, \mathbf{c})$ для конкретных значений r, d и $\mathbf{c}$ весьма затруднительно.

Цель доклада — рассказать о выводе явной формулы для частного случая рассматриваемой задачи, отвечающего $d = 3$. Именно, обозначим через $N_r(Q)$ число наборов из $(r+2)$ последовательных дробей ряда F_Q вида

$$\frac{a}{q} < \frac{a_1}{q_1} < \ldots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a'}{q'},$$

таких, что $q, q' \equiv 0 \pmod 3$, и $q_1, \ldots, q_r \not\equiv 0 \pmod 3$. Положим, далее, $N(Q)$ равным числу всех дробей в F_Q, знаменатели которых кратны трём, и рассмотрим отношение $\nu_r(Q) = N_r(Q)/N(Q)$. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\nu_1 = 6 - 2\biggl(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\biggr), \quad \nu_2 = 4\biggl(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\biggr) - \frac{87}{35}, \quad \nu_3 = 12\ln 3 - \frac{53\,132}{4095},$$
$$\nu_4 = \frac{528\,904}{45\,045} - 4\biggl(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\biggr), \quad \nu_5 = 2\biggl(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\biggr) - \frac{4\,164\,383}{3\,063\,060}, \quad \nu_6 = \frac{3\,089}{85\,085}.$$

Теорема 2. *Пусть $m \geqslant 1$, $0 \leqslant i \leqslant 4$ - целые числа, $r = 5m + i \geqslant 8$. Тогда справедливы равенства*

$$\nu_r = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(m), \quad \text{\textit{в которых}} \quad n = n(i) = \begin{cases} 3, & \text{\textit{если} } i = 3, \\ 2, & \text{\textit{в остальных случаях},} \end{cases}$$

а $P_{ij}(m)$ *- рациональные функции из следующего списка:*

$$P_{01}(m) = \frac{6(8m-1)}{(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)},$$
$$P_{02}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m-1)},$$
$$P_{11}(m) = \frac{6(8m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)},$$
$$P_{12}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m+1)},$$
$$P_{21}(m) = \frac{6(4m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)},$$
$$P_{22}(m) = \frac{2(9m+4)}{3(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)},$$
$$P_{31}(m) = \frac{6(2m+1)}{(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)},$$
$$P_{32}(m) = \frac{2}{3(2m+1)(6m+1)(12m+5)},$$
$$P_{33}(m) = \frac{2}{3(2m+1)(6m+5)(12m+7)},$$
$$P_{41}(m) = \frac{6(4m+3)}{(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)},$$
$$P_{42}(m) = \frac{2(9m+5)}{3(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}.$$

Литература

1. *Cobeli C., Vâjâitu M., Zaharescu A.* The distribution of rationals in residue classes // Math. Reports **14**(64):1 (2012), 1–19.

2. *Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A.* A conjecture of R.R. Hall on Farey points // J. reine angew. Math. **535** (2001), 207-236.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.П. Косарев

ruterminals@gmail.ru

УДК 517.518

Для систем первого порядка с большим параметром получены асимптотики в некоторых секторах λ-плоскости, коэффициенты разложения выписаны явно. Выделен класс нормальных спектральных задач с носителем в точках 0 и 1, для которых доказывается дискретность спектра и полнота системы собственных и присоединенных функций.

Ключевые слова: линейные дифференциальные операторы, асимптотические формулы, полнота собственных и присоединенных функций

Spectral problems for first-order ODE systems

We obtain explicit asymptotics of solutions for first-order systems with a large parameter in some sectors of λ-plane. Using these formulas, we distinguish the class of normal spectral problems, for which we find the asymptotics of the eigenvalues and prove the completeness of the system of eigen and associated functions.

Keywords: linear differential operators, asymptotics, spectral analysis

Рассматривается $n \times n$ система дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{y}' - B(x)\mathbf{y} = \lambda A(x)\mathbf{y}, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(x) = \mathrm{diag}\{a_1(x), \ldots, a_n(x)\}$, $a_i(x) \neq 0$, $a_i(x) \neq a_j(x)$ при $i \neq j$, λ - комлексный большой (спектральный) параметр. Перед формулировкой основного результата определим матрицы

$$E(x,\lambda) = \mathrm{diag}\{e^{\lambda\int_0^x a_1 dt}, \ldots, e^{\lambda\int_0^x a_n dt}\}, \quad M(x) = \mathrm{diag}\{e^{\int_0^x b_{11} dt}, \ldots, e^{\int_0^x b_{nn} dt}\}.$$

Теорема 1. *Пусть элементы матриц $A(x), B(x)$ принадлежат пространству $W_1^k[0,1]$, $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ $(W_1^0 \equiv L_1)$. Тогда в каждом секторе Π, в котором все величины $Re\{\lambda(a_j(x) - a_i(x))\}$ сохраняют свой знак для всех $\lambda \in \Pi$, $x \in [0,1]$, существует фундаментальная матрица $Y(x,\lambda)$ системы (1), имеющая представление*

$$Y(x,\lambda) = M(x)\left(I + \frac{R^1(x)}{\lambda} + \cdots + \frac{R^k(x)}{\lambda^k} + o(1)\lambda^{-k}\right)E(x,\lambda),$$

где $\|o(1)\|_{C[0,1]} \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Pi$.
Матриц-функции R^m последовательно вычисляются по формулам

$$q_{ij} := b_{ij} e^{\int_0^x b_{jj}(t) - b_{ii}(t) dt}, \quad p_{ij}^l := \sum_{s=1,\, s\neq i}^{n} q_{is}(t) r_{sj}^l(t), \quad l = 1, \ldots, k,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-11-20261).

Косарев Алексей Павлович, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexey Kosarev, Lomonosov Moscow State University, (Moscow, Russia)

$$r_{ij}^1 = \frac{q_{ij}}{\gamma_j - \gamma_i}, \quad i \neq j, \quad r_{ii}^1 = \int_0^x p_{ii}^1(t)dt,$$

$$r_{ij}^{m+1} = \frac{-\frac{d}{dx} r_{ij}^m + p_{ij}^m}{\gamma_j - \gamma_i}, \quad i \neq j, \quad r_{ii}^{m+1} = \int_0^x p_{ii}^{m+1}(t)dt, \quad m = 1, \ldots, k-1.$$

Такие асимптотические разложения находят свое применение в следующей краевой задаче для 2×2 системы.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ a_1, a_2 > 0, \ x \in [0,1], \quad (2)$$

$$y_1(1) = 0, \quad y_2(0) = 0. \quad (3)$$

Введем обозначения для функций и операторов

$$a(x) = a_1(x) + a_2(x), \quad b(x) = e^{\int_0^x b_{11}(t) - b_{22}(t)dt},$$

$$(I_1 f)(x) = \int_0^x b_{12}(t) b^{-1}(t) f(t)\, dt, \quad (I_2 f)(x) = \int_0^x b_{21}(t) b(t) f(t)\, dt;$$

$$(Df)(x) = \frac{1}{a(x)} f'(x), \quad J_1 = \frac{b_{21} b}{a} I_1, \quad J_2 = -\frac{b_{12} b^{-1}}{a} I_2,$$

тогда формулы для вычисления матрицы R^{m+1} примут более простой вид

$$r_{11}^{m+1} = I_1 r_{21}^{m+1}, r_{12}^{m+1} = (D+J_2)^m r_{12}^1, \ r_{21}^{m+1} = (-D+J_1)^m r_{21}^1, r_{22}^{m+1} = I_2 r_{12}^{m+1}.$$

Теорема 2. *Пусть матрицы $A(x), B(x)$ принадлежат пространству $W_1^k[0,1]$, $k \in \mathbf{N}$, и числа n_1, $n_2 \leqslant k$ таковы, что*

$$\gamma_m^1 = 0, \ m = 1, \ldots, n_1 - 1, \ \gamma_{n_1} \neq 0, \qquad \gamma_m^2 = 0, \ m = 1, \ldots, n_2 - 1, \ \gamma_{n_2} \neq 0,$$

$$\gamma_m^1 := (-D + J_1)^{m-1} r_{21}^1(0), \qquad \gamma_m^2 := (D + J_2)^{m-1} r_{12}^1(1), \qquad m = 1, \ldots, k.$$

Тогда собственные значения задачи (2)-(3), *то есть нули характеристического определителя* $\Delta(\lambda)$, *определяются (с точностью до* $o(1)$*) нулями*

$$\Delta_0(\lambda) = e^{\lambda A_1} + \gamma \lambda^{-(n_1+n_2)} e^{-\lambda A_2}, \qquad \gamma = \gamma_{n_1}^1 \gamma_{n_2}^2,$$

где $A_1 = \int_0^1 a_1(t)dt$, $A_2 = \int_0^1 a_2(t)dt$, *и имеют асимптотику*

$$\lambda_n^{\pm} = \frac{1}{A_1 + A_2} \left(\pm 2\pi i n - (n_1 + n_2) \ln \frac{2\pi n}{A_1 + A_2} + i \ln \frac{\gamma}{i^{n_1+n_2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n} \right) \right).$$

Система СПФ задачи (2)-(3) *полна в пространстве* $L_p[0,1] \times L_p[0,1]$.

Оказывается, что задача (2)-(3) относится к почти регулярным (см. определение в [2]), поэтому здесь нельзя применить результаты известные в регулярном случае. Используя полученные асимптотические формулы для фундаментальных решений, мы явно выписываем характеристический определитель и строим функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ задачи (2)-(3). Она оценивается константой в правой λ-полуплоскости, а в левой полуплоскости растет не быстрее, чем многочлен некоторой степени вне кругов фиксированного радиуса с центрами в собственных значениях. Дальнейшее доказательство теоремы проводится стандартным путем.

Доклад основан на совместной работе с А. А. Шкаликовым.

Литература

1. *Shkalikov A.A.* Regular Spectral Problems of Hyperbolic Type for a System of First-Order Ordinary Differential Equations // Math. Notes, **110**:5 (2021), 796-800.

2. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // Math. Notes, **71**:5(431) (2016), 113-174.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

Е.И. Костенко

ekaterinalarshina@mail.ru

УДК 517.518

Изучается существование по крайней мере одного слабого решения одной модели движения вязкоупругой среды с бесконечной памятью вдоль траекторий движения частиц жидкости, определяемых полем скоростей. При нахождении скорости, которая понимается под решением рассматриваемой задачи, используются теории регулярных Лагранжевых потоков, топологической степени уплотняющих векторных полей, а также аппроксимационно–топологический подход изучения гидродинамических задач.

Ключевые слова: Теорема существования, слабое решение, вязкоупругая жидкость.

Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory

The existence of at least one weak solution of one model of the motion of a viscoelastic medium with infinite memory along the trajectories of motion of fluid particles determined by the velocity field is investigated finding the velocity for which is understood as the solution of the problem under consideration, the theories of regular Lagrangian flows, the topological degree of condensing vector fields, as well as the approximation-topological approach to studying hydrodynamic problems are used.

Keywords: Existence theorem, weak solution, viscoelastic fluid

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00103).

Костенко Екатерина Игоревна, аспирант, Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия); Ekaterina Kostenko (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

В $Q=(-\infty,T]\times\Omega$, где $T>0$, а $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается задача (см. [1]–[3])

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_0\triangle v-$$

$$-\mu_1\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{Div}\int_{-\infty}^{t}e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds+$$

$$+\nabla p=f(t,x),\qquad (t,x)\in Q; \tag{1}$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_{t}^{\tau}v(s,z(s;t,x)),\quad t,\tau\in(-\infty,T],x\in\bar{\Omega}; \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\ v(t,x)=0,\quad (t,x)\in Q;\quad v(t,x)\mid_{(-\infty,T]\times\partial\Omega}=0. \tag{3}$$

Здесь $v(t,x)$ и $p(t,x)$ искомые скорость и давление рассматриваемой среды, $z(\tau;t,x)$ – траектория движения частицы среды, $\varepsilon(v)=\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – тензор скоростей деформации, являющийся матрицей с элементами $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, $\mu_0>0,\mu_1\geqslant 0$, $0<\alpha<1$, $\lambda>0$. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов–столбцов матрицы.

Введем следующие функциональные пространства:

$$W_1=\{v:v\in L_2(-\infty,T;V^1),v'\in L_2(-\infty,T;V^{-1})\};$$

$$W_2=\{v:v\in L_2(-\infty,T;V^1),v'\in L_{4/3,loc}(-\infty,T;V^{-1})\}.$$

Здесь $L_{p,loc}(-\infty,T;V^{-1})$ — пространство, состоящее из функций v, определённых почти всюду на $(-\infty,T]$ и принимающих значение в V^{-1}, сужение которых на любой отрезок $[r,T]\in(-\infty,T]$ принадлежит $L_p(r,T;V^{-1})$. При $n=2$ пусть $W=W_1$, а при $n=3$ пусть $W=W_2$.

Определение 1. *Пусть $f\in L_2(-\infty,T;V^{-1})$. Слабым решением задачи (1)–(3) называется функция $v\in W$, удовлетворяющая при любой $\varphi\in V$ и п.в. $t\in(-\infty,T]$ тождеству*

$$\langle v',\varphi\rangle-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}v_iv\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\mu_0\int_{\Omega}\nabla v:\nabla\varphi\,dx+\mu_1\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\times$$

$$\times\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{t}e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds\,\mathcal{E}(\varphi)dx=\langle f,\varphi\rangle,$$

где z – регулярный Лагранжевый поток, порожденный v.

Теорема 1. *Пусть $f\in L_2(-\infty,T;V^{-1})$. Тогда задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно слабое решение $v\in W$.*

Литература

1. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A, **38**:12 (2018), 6327-6350.

2. *Звягин А.В.* О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа–модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Успехи математических наук, **74**:3 (2019), 189-190.

3. *Звягин А.В.* Исследование слабой разрешимости дробной альфа–модели Фойгта // Известия Российской академии наук. Серия математическая. **85**:1 (2021), 66-97.

ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕНИ И ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

А.В. Костин

kostin_ andrei@mail.ru

УДК 514.13

Задача о тени в постановке Г.Худайберганова является частным случаем задачи о принадлежности точки обобщенно-выпуклой оболочке множеств. С задачей о принадлежности точки обобщённо-выпуклой оболочке оришаров оказывается косвенно связанной задача о вложении в евклидово пространство псевдосферических поверхностей вращения, найденных Ф.Миндингом. Все три типа псевдосферических поверхностей вращения получают общее истолкование в пространстве Лобачевского, связанное с касательными конусами к орисферам.

Ключевые слова: задача о тени, орисфера, оришар, псевдосферическая поверхность

Generalizations of the shadow problem and surfaces of constant curvature

The shadow problem as formulated by Gulmirza Khudaiberganov is a particular case of the problem of whether a point belongs to a generalized convex hull of sets. The problem of whether a point belongs to the generalized convex hull of horoballs is indirectly related to the problem on the embedding in the Euclidean space of pseudospherical surfaces of revolution found by F. Minding. All three types of pseudospherical surfaces of revolution receive a common interpretation in Lobachevsky space, associated with tangent cones to horospheres.

Keywords: problem of shadow, horosphere, horoball, pseudospherical surface

---

Работа выполнена за счет средств программы академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета("ПРИОРИТЕТ-2030")

Костин Андрей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета (Елабуга, Россия); Andrey Kostin (Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia)

Задача о тени поставлена Г.Худайбергановым в 1982 г. в статье [1] в следующей формулировке: какое минимальное число непересекающихся шаров с центрами на единичной сфере евклидова пространства и радиусами, меньшими единицы, достаточно для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекалась хотя бы с одним из этих шаров. Решение этой задачи в размерностях, больших двух, получено в 2015 г. Ю.Б. Зелинским, И.Ю. Выговской и М.С. Стефанчук [2]. Задача о тени является частным случаем задачи о принадлежности точки обобщённо-выпуклой оболочке множеств. Задача о тени в пространстве Лобачевского и различные ее обобщения рассмотрены в статьях [3-4]. В данной работе рассматриваются задачи о принадлежности точки обобщённо-выпуклой оболочке семейства непересекающихся оришаров в пространстве Лобачевского. С этой задачей косвенно оказывается связанной задача о вложении в евклидово пространство псевдосферических поверхностей вращения. Все три типа поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны, найденных Миндингом, могут быть единообразно истолкованы в трёхмерном пространстве Лобачевского как касательные конусы к орисферам.

Теорема 1. *Пусть точка M не принадлежит оришару Ω в трёхмерном пространстве Лобачевского. Построим конус с вершиной в точке M, касающийся оришара Ω. Обозначим через γ линию касания конуса и ограничивающей оришар орисферы. Тогда часть конуса от вершины до линии γ глобально изометрична евклидовой конической поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны.*

Для псевдосферы вершина касательного конуса располагается на абсолюте, для катушки Миндинга – в идеальной области расширенного гиперболического пространства. В последнем случае в часть конуса, расположенную в собственной области, вписываются две орисферы. Катушка Миндинга будет глобально изометрична сегменту поверхности между двумя линиями касания с орисферами.

Литература

1. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г., № 1772,85 деп.

2. *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Стефанчук М.В.* Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр.мат.журн., **67**:12 (2015), 1658-1666.

3. *Костин А.В.* Задача о тени в пространстве Лобачевского// Укр.мат.журн., **70**:11 (2018), 1525-1532.

4. *Kostin A.V.* Some Generalizations of the Shadow Problem in the Lobachevsky Space//Ukrainian Mathematical Journal, **73**:1 (2021), 67-75.

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ ФУРМАНА

А.В. Костин, Н.Н. Костина
kostin_andrei@mail.ru, natnikost@mail.ru

УДК 514.13

В теореме Фурмана однородным полиномиальным соотношением связываются длины сторон и "больших"диагоналей вписанного шестиугольника на евклидовой плоскости. В работе рассматриваются обобщения этой теоремы для шести окружностей, касающихся одной окружности, для шестиугольника, вписанного в сферу нулевого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, а также различные аналоги и обобщения этих теорем в пространствах постоянной кривизны.

Ключевые слова: теорема Фурмана, вписанный многоугольник, пространство постоянной кривизны

On generalizations of Fuhrman's theorem

In Fuhrman's theorem, the lengths of the sides and "large" diagonals of an inscribed hexagon on the Euclidean plane are related by a homogeneous polynomial relation. The work deals with generalizations of this theorem for six circles tangent to one circle, for a hexagon inscribed in a sphere of zero radius in pseudo-Euclidean space, as well as various analogues and generalizations of these theorems in spaces of constant curvature.

Keywords: Fuhrman's theorem, inscribed polygon, spaces of constant curvature

На евклидовой плоскости для выпуклого шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вписанного в окружность, имеет место обобщающее теорему Птолемея соотношение:

$$A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 = A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 +$$

$$+ A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6.$$

Это утверждение называют теоремой Птолемея для шестиугольника или теоремой Фурмана. Другим обобщением теоремы Птолемея является теорема Кези (Кейси), в которой вершины вписанного четырёхугольника заменяются на четыре окружности, касающиеся одной окружности, а расстояния между точками заменяются на длины отрезков общих касательных к соответствующим окружностям. Гиперболический аналог теоремы Кези получен в работе [1]. Аналогичное соотношение имеет место для шести

Работа выполнена за счет средств программы академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета("ПРИОРИТЕТ-2030")

Костин Андрей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета (Елабуга, Россия); Andrey Kostin (Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia)

Костина Наталья Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета (Елабуга, Россия); Natalya Kostina (Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia)

окружностей, касающихся одной окружности. Теорему о шести окружностях, касающихся одной фиксированной окружности на евклидовой плоскости, можно интерпретировать как теорему о шестиугольнике, вписанном в изотропную сферу трёхмерного псевдоевклидова пространства [2-3]. В работе доказываются аналоги теоремы Фурмана для шестиугольников, вписанных в одну из линий постоянной кривизны на плоскости Лобачевского, а также доказаны аналоги теоремы для шести окружностей или шести орициклов, касающихся окружности, орицикла или ветви эквидистанты. Кроме того, доказывается утверждение, в некотором смысле связывающее евклидовы и гиперболические версии теорем такого рода.

Литература

1. *Абросимов Н.В., Микайылова Л.А.* Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сибирские электронные математические известия, **12** (2015), 354-360.

2. *Костин А.В., Костина Н.Н.* Интерпретации теоремы Кези и её гиперболического аналога // Сибирские электронные математические известия, **13** (2016), 242-251.

3. *Костин А.В.* Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сибирские электронные математические известия, **19**:1 (2022), 404-414.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ КОНФОРМНЫХ ОБЕРТЫВАЮЩИХ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ КОНФОРМНЫХ АЛГЕБР

Р. А. Козлов

KozlovRA.NSU@yandex.ru

УДК 512.55

Мы доказываем, что любая квадратичная конформная алгебра Ли, построенная по специальной алгебре Гельфанда–Дорфман, инъективно вкладывается в универсальную обертывающую ассоциативную конформную алгебру с ограничением на функцию локальности $N = 3$.

Ключевые слова: конформные алгебры Ли, ассоциативные конформные обертывающие, алгебры Гельфанда–Дорфман, Пуассоновы обертывающие

On universal conformal envelopes for quadratic conformal algebras

We prove that every quadratic Lie conformal algebra constructed on a special Gel'fand–Dorfman algebra embeds into the universal enveloping associative conformal algebra with a locality function bound $N = 3$.

Keywords: Lie conformal algebras, associative conformal envelopes, Gel'fand–Dorfman algebras, Poisson algebras

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Козлов Роман Александрович, НГУ (Новосибирск, Россия); Roman Kozlov (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Алгебры Новикова возникли в [1] как помощник в построении некоторых Гамильтоновых операторов в вариационном исчислении. Формально, это алгебры с одной операцией – умножением Новикова – которая является левосимметрической и правокоммутативной. Класс более сложных структур, называемых алгебрами Гельфанда-Дорфман, впервые возник при тех же обстоятельствах. Алгебра Гельфанда–Дорфман — это векторное пространство V с двумя билинейными операциями $[\cdot\ ,\ \cdot]$ и $(\cdot\ \circ\ \cdot)$, относительно которых мы получаем алгебры Ли и Новикова, соответственно. Также на V должно выполняться тождество согласования:

$$[a \circ b, c] + [a, b] \circ c - a \circ [b, c] - [a \circ c, b] - [a, c] \circ b = 0, \quad \text{для всех } a, b, c \in V.$$

Если алгебра Гельфанда–Дорфман V естественным образом вкладывается в алгебру Пуассона P с дифференцированием d, т. е.

$$a \cdot d(b) = a \circ b, \quad \text{для всех } a, b \in V,$$

то она называется специальной.

Конформная алгебра – это левый модуль C над алгеброй полиномов $H = [\partial]$, снабжённый операцией умножения $C \otimes C \ \to C[\lambda]$ (т.е. результат умножения – это полином от формальной переменной λ со значениями в C) и набором аксиом. В некотором смысле, конформные алгебры продолжают структуру обычных алгебр, и, аналогично, формируют классы в зависимости от постулированных аксиом. Данные объекты оказываются очень полезны как инструмент по изучению структуры вертексных алгебр (см. [2]). А также могут быть полезны при классификации скобок Пуассона гидродинамического типа (см. [3]). Алгебры Гельфанда–Дорфман находятся во взаимно-однозначном соответствии (см. [4], [5]) с квадратичными конформными алгебрами Ли, весьма широким классом, содержащим в себе большинство классических примеров: конформная алгебра Гейзенберга, Вирасоро, Навье–Шварца, Вирасоро–Шрёдингера и т.д. Для обычных алгебр Ли хорошо известна и очень полезна конструкция универсальной ассоциативной обёртывающей. Способ превращения ассоциативной алгебры в алгебру Ли продолжается и на конформный случай. Однако, в отличие от классического результата, не всякая конформная алгебра Ли инъективно вкладывается в некоторую ассоциативную (см. [6]). Это обусловлено "многозначностью" умножения, а именно, локальностью. Тем не менее, если квадратичная конформная алгебра Ли построена по специальной алгебре Гельфанда–Дорфман, то удаётся привести явную конструкцию для построения универсальной ассоциативной конформной обёртывающей алгебры с локальностью не выше $N = 3$.

Литература

1. *Гельфанд И.М., Дорфман И.Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. **13**:4 (1979), 13-30.

2. *V. G. Kac*, Vertex Algebras for Beginners. University Lecture Series, 10, 2nd edn — Providence: American Mathematical Society, 1998.

3. *Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G.* Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. **162** (2001), 1-140.

4. *Hong Y., Wu Z.* Simplicity of quadratic Lie conformal algebras // Comm. Algebra **45**:1 (2017), 141-150.

5. *Xu X.* Quadratic Conformal Superalgebras // J. Algebra **231** (2000), 1-38.

6. *M. Roitman* Universal enveloping conformal algebras // Sel. Math., New Ser. **6** (2000), 319-345.

СПЕКТР ТРАНСПОЗИЦИОННОГО ГРАФА

Е.В. Константинова, А.В. Кравчук

e_konsta@math.nsc.ru, a.kravchuk@g.nsu.ru

УДК 519.1

Транспозиционный граф T_n определяется как граф Кэли на симметрической группе Sym_n относительно порождающего множества транспозиций. В этом докладе будут рассказаны результаты в изучении спектра графа T_n, которых уже удалось добиться, а так же о сложностях, которые возникают при попытке точно описать спектр T_n.

Ключевые слова: транспозиционный граф, целочисленный граф, спектр графа

Spectrum of the Transposition graph

The *Transposition graph* T_n is defined as a Cayley graph over the symmetric group Sym_n generated by all transpositions. This report will describe the results in the study of the spectrum of the graph T_n, which have already been achieved, as well as the difficulties which arise when trying to accurately describe the spectrum of T_n.

Keywords: transposition graph, integral graph, graph spectrum

В этой работе исследуются собственные значения транспозиционного графа Кэли T_n, $n \geqslant 2$, который определяется на симметрической группе Sym_n относительно порождающего множества всех транспозиций. Известно, что все собственные значения этого графа являются целыми числами [1, 2]. Кроме этого, в работе [1] доказано, что наибольшее собственное значение $\frac{n(n-1)}{2}$ имеет кратность 1, второе собственное значение $\frac{n(n-3)}{2}$ имеет кратность $(n-1)^2$, и для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, значение $\frac{n(n-2k+1)}{2}$ является собственным значением с кратностью не менее $\frac{n!}{n(n-k)!(k-i)!}$. Поскольку транспозиционный граф является двудольным, то для любого его собственного значения λ верно, что $-\lambda$ также является собственным значением с

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

Константинова Елена Валентиновна, к.т.н., Институт Математики имени С. Л. Соболева (Новосибирск, Россия); Elena Konstantinova (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

Кравчук Артём Витальевич, Институт Математики имени С. Л. Соболева, (Новосибирск, Россия); Artem Kravchuk (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

той же кратностью, что и λ. Таким образом, имеется некоторое представление о том, как устроен спектр $Spec(T_n)$ транспозиционного графа T_n, где под спектром понимается множество всех различных собственных значений графа вместе с их кратностями. Однако точное описание спектра для этого графа неизвестно.

Следующий результат даёт описание спектра около значения ноль.

Теорема 1. *Для любого целого $k \geqslant 0$, существует n_0 такое, что для любого $n \geqslant n_0$ и любого $m \in \{0, \ldots, k\}$, выполняется $m \in Spec(T_n)$.*

Таким образом, для достаточно больших n этот результат показывает существование всех целых значений в спектре $Spec(T_n)$ вплоть до некоторой верхней оценки. Доказательство этого результата опирается на основные факты из теории представлений симметрической группы для графов Кэли [3], а также некоторые новые утверждения о соответствии между собственными значениями графа T_n и разбиениями числа n. В частности, эти новые результаты позволяют доказать, что ноль является собственным значением T_n для любого $n \neq 2$, а один является собственным значением этого графа для любого нечётного $n \geqslant 7$ и любого чётного $n \geqslant 14$. Вычисление кратностей этих двух собственных значений является достаточно сложной задачей. Точные значения кратностей получены для третьего и четвёртого по величине собственных чисел в следующих двух теоремах.

Теорема 2. *Третьим наибольшим собственным значением графа $T_n, n \geqslant 4$, является значение $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$, кратность которого равна $\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)^2$.*

Теорема 3. *Четвёртым наибольшим собственным значением графа $T_n, n > 6$, является значение $\frac{n(n-5)}{2}$, кратность которого равна $\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^2$.*

Доказательство представленных в докладе результатов можно найти в работе [4].

Литература

1. *K. Kalpakis, Y. Yesha*, On the bisection Width of the Transposition network, *Networks*, **29** (1997) 69–76.

2. *E. V. Konstantinova, D. V. Lytkina*, Integral Cayley graphs over finite groups, *Algebra Colloquium*, **27**(1) (2020) 131–136.

3. *P.-H. Zieschang*, Cayley graphs of finite groups, *Journal of Algebra*, **118** (1988) 447–454.

4. *Elena V. Konstantinova, Artem Kravchuk*, Spectrum of the Transposition graph, *Linear Algebra and its Applications*, **654** (2022) 379–389

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ COVID-19 В РЕГИОНАХ РФ: ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ, РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС

О.И. Криворотько
krivorotko.olya@mail.ru

УДК 51-76

В работе построена и проанализирована комплексная математическая модель распространения COVID-19 в регионах Российской Федерации с учетом административных и фармацевтических мер, основанная на комбинации SEIR-HCD и агентных моделей, анализе данных, идентифицируемости и решении возникающих обратных задач. На основе демографических, статистических данных, информации по количеству проведенных ПЦР-тестов построены сценарии распространения COVID-19 в регионах РФ на 45 дней вперед.

Ключевые слова: SEIR-HCD модель, агентно-ориентированная модель, обратная задача, оптимизация, анализ чувствительности

Mathematical modeling of COVID-19 propagation in RF

The combined mathemtical model of COVID-19 propagation in Russian Federation regions based on SEIR-HCD and agent models, data analysis, identifiability and inverse problems is built and analyzed. The scenarios of COVID-19 propagation based on demographic and statistical data, number of daily PCR tests in considered region are proposed on 45 days.

Keywords: SEIR-HCD model, agent-based model, inverse problem, optimization, sensitivity-based identifiability analysis

Для построения совмещенной модели комбинируются два основных подхода математического моделирования в эпидемиологии: компартментный, описываемый дифференциальными уравнениями на основе действующих масс, и агентно-ориентированный подход, основанный на элементах теории игр, мультиагентных систем, эволюционного программирования и методе Монте-Карло. В компартментном подходе (детерминированная SEIR-HCD модель) вся популяция разделена на 7 однородных групп, соединенных между собой вероятностями перехода [1]. Такие модели действительны в случае закрытой системы (для регионов с небольшим притоком населения, отдаленных районов) и в случае, когда население практически бесконечно (например, континенты, страны). Агентные модели представляют схему возможных контактов в виде динамического или статического графа, в котором вершины – объекты с набором индивидуальных свойств, детализировано описывающие состояние отдельных индивидов в зависимости от возраста и структуры контактов (домохозяйства, образовательные учреждения, рабочие и общественные места) [2]. При усложнении SEIR-HCD

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10044-П).

Криворотько Ольга Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, ИВМиМГ СО РАН (Новосибирск, Россия); Olga Krivorotko (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia)

модели, вводя возрастные разграничения в популяции и пространственные перемещения, получим первое приближение агентной модели.

Модели характеризуются набором параметров (заразность вируса, длительность бессимптомного и инфицированного состояния в зависимости от штамма, вероятности быть протестированным, тяжелого течения заболевания, смертности и др.). Проведен анализ чувствительности параметров моделей к измерениям количества выявленных, критических и умерших случаев [3], в результате которого были уменьшены интервалы изменения параметров заразности в более чем 2 раза по сравнению с литературными данными, среднее время инфицирования – до 6 дней, пребывания в критическом состоянии – до 12 дней, длительность частичного иммунитета – от 2х до 4х месяцев.

Совмещение моделей устроено следующим образом (цикл 1 дня): на основе обработанных статистических данных уточняются параметры SEIR-HCD модели для рассматриваемого региона комбинацией глобального и градиентного подходов, которые потом передаются в агентную модель. Параметр передачи инфекции (см. Рисунок 1) является наиболее чувствительным к измеряемым данным и определяется в ходе решения обратной задачи в агентной модели. На основе усвоения данных цикл 1 дня повторяется.

Рис. 1: Изменение параметра заразности в Новосибирской области с 15.04.2020 по 06.08.2022. Красные пунктирные линии – даты появления штаммов SARS-CoV-2 в РФ, черная пунктирная линия – отмена масочного режима в регионе с 24.02.2022.

Отмена масочного режима 24.02.2022 повлекла за собой рост выявленных случаев COVID-19. Увеличение параметра заразности в конце июля 2022 свидетельствует о функционировании штамма «Кентавр».

Литература

1. *Krivorotko O.I., Zyatkov N.Y.* Data-driven regularization of inverse problem for SEIR-HCD model of COVID-19 propagation in Novosibirsk region // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, **10**:1 (2022), 51-68.

2. *Krivorotko O., Sosnovskaia M., Vashchenko I., Kerr C., Lesnic D.* Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: Parameter identification algorithm // Infectious Disease Modelling, **7**:1 (2022), 30-44.

3. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Сосновская М.И., Андорная Д.В.* Анализ чувствительности и идентифицируемости математических моделей распространения эпидемии COVID-19 // Вавиловский журнал генетики и селекции, **25**:1 (2021), 82-91.

АЛГОРИТМЫ РАЗЛИЧЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ

В.Е. Круглов

kruglovslava21@mail.ru

УДК 517.938, 519.173

В работе рассмотрены основные инварианты топологической эквивалентности для градиентно-подобных потоков на поверхностях, для таких инвариантов построены эффективные алгоритмы различения изоморфизмов.

Ключевые слова: топологическая классификация, градиентно-подобный поток, алгоритм

Algorithms distinguishing topological invariants for surface gradient-like flows

The paper considers the main invariants of topological equivalence for gradient-like flows on surfaces; for such invariants, efficient algorithms for distinguishing isomorphisms are constructed.

Keywords: topological classification, gradient-like flow, alogrithm

Пусть Γ_{f^t} – ориентированный граф потока f^t такой, что вершины графа Γ_{f^t} соответствуют неподвижным точкам потока f^t, а рёбра соответствуют ориентированным седловым сепаратрисам. Оснастим граф Γ_{f^t} подграфами, соответствующими границам компонент связности дополнения несущей поверхности до замыкания инвариантных многообразий всех седловых точек (*ячеек*). Получим *граф Пейшото* $\Gamma^P_{f^t}$ [1].

Теорема 1. *Пусть f^t и f'^t – градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности S рода g, и $\Gamma^P_{f^t}$, $\Gamma^P_{f'^t}$ – их n-вершинные графы Пейшото. Тогда*

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Круглов Владислав Евгеньевич, научный сотрудник, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики” (Нижний Новгород, Россия); Vladislav Kruglov (National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russian Federation)

изоморфность графов $\Gamma^P_{f^t}$ *и* $\Gamma^P_{f'^t}$ *можно проверить за время* $O(n^{O(g)})$ *для* $g > 0$ *и за время* $O(n)$ *для* $g = 0$.

В 2011 году В.З. Гринес и О.В. Починка [2] модифицировали граф Пейшото. Именно, вместо различающих множеств они оснастили ориентированный граф Пейшото Γ_{f^t} порядками рёбер, инцидентных вершинам, соответствующим стокам.

Теорема 2. *Пусть* f^t, f'^t *– градиентно-подобные потоки на поверхности* S *рода* g, *и* $\Gamma^{GP}_{f^t}$, $\Gamma^{GP}_{f'^t}$ *– их модифицированные* n*-вершинные графы Пейшото. Тогда изоморфизм графов* $\Gamma^{GP}_{f^t}$ *и* $\Gamma^{GP}_{f'^t}$ *может быть проверен за время* $O(n^{O(g)})$, *если* $g > 0$, *и за время* $O(n)$, *если* $g = 0$.

Вершины графа Вонга [3] $\Gamma^W_{f^t}$ соответствуют ячейкам потока f^t, его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по соответствующим рёбрам сепаратрисам. Рёбра, инцидентные одной вершине, разбиваются на пары, содержащие по одному ребру, соответствующему устойчивой и неустойчивой сепаратрисе, соседствующим друг с другом в границе ячейки.

Теорема 3. *Пусть* f^t, f'^t *– градиентно-подобные потоки на ориентируемой поверхности* S *рода* g, *и* $\Gamma^W_{f^t}$, $\Gamma^W_{f'^t}$ *– их* n*-вершинные графы Вонга. Тогда изоморфизм графов* $\Gamma^W_{f^t}$ *и* $\Gamma^W_{f'^t}$ *проверяется за время* $O(n^{O(g)})$, *если* $g \neq 0$ *и за время* $O(n)$, *если* $g = 0$.

Граф Флейтас [4] $\Gamma^F_{f^t}$ для полярного потока f^t строится следующим образом. Выберем вокруг источника окружность S, трансверсальную траекториям потока f^t в бассейне источника. Обозначим через D диск, который эта окружность ограничивает в бассейне источника. Присвоим всем пересечениям окружности S с седловыми сепаратрисами *метки* так, чтобы пересечения с сепаратрисами одного и того же седла были с одинаковыми метками. Каждой паре точек с одинаковыми метками присвоим *спин* $+$ $(-)$, если объединения диска D с трубчатой окрестностью устойчивого многообразия седловой точки, пересекающего окружность S по данной паре точек, является кольцом (плёнкой Мёбиуса).

Теорема 4. *Пусть* f^t *и* f'^t *– полярные потоки на поверхности* S *рода* g, *и* $\Gamma^F_{f^t}$, $\Gamma^F_{f'^t}$ *– их* n*-вершинные графы Флейтас. Тогда изоморфизм графов* $\Gamma^F_{f^t}$ *и* $\Gamma^F_{f'^t}$ *проверяется за время* $O(n^{O(g)})$, *если* $g > 0$, *и за время* $O(n)$, *если* $g = 0$.

Обозначим через J_{f^t} множество всех ячеек потока f^t. Выберем по одной траектории θ_J (t*-кривой*) в каждой ячейке $J \in J_{f^t}$. Положим $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{J \subset \tilde{S}} \theta_J$, $\bar{S} = \tilde{S} \backslash \mathcal{T}$. Назовём u*-кривыми* неустойчивые седловые сепаратрисы и s*-кривыми* – устойчивые седловые сепаратрисы. Компонента связности Δ множества $\bar{S}$ является криволинейным треугольником [1], ограниченным одной s-, одной u- и одной t-кривой, поэтому мы будем называть Δ *треугольной областью.* Обозначим через Δ_{f^t} множество всех треугольных областей потока f^t.

У *трёхцветного графа* $\Gamma^{OS}_{f^t}$ *Ошемкова-Шарко* [5] вершины графа $\Gamma^{OS}_{f^t}$ взаимно однозначно соответствуют треугольным областям потока; две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u, если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s-, t- или u-сторону.

Теорема 5. *Пусть f^t, f'^t – градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности рода g, и $\Gamma^{OS}_{f^t}$, $\Gamma^{OS}_{f'^t}$ – их n-вершинные трёхцветные графы. Тогда изоморфизм графов $\Gamma^{OS}_{f^t}$ и $\Gamma^{OS}_{f'^t}$ проверяется за время $O(n^{O(g)})$ при $g \neq 0$ и за время $O(n)$ при $g = 0$.*

Результаты получены в соавторстве с Починкой О.В. и Малышевым Д.С.

Литература

1. *Peixoto M.M.* On the classification of flows on 2-manifolds. Dynamical systems. - Salvador: Univ. Bahia. - 1971. New-York: Academic Press. - 1973. - 389–419.

2. *Grines V.Z., Medvedev T.V.*, Pochinka O. V. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Dev. Math. - V. 46. - Cham: Springer. - 2016. - xxvi+295 p.

3. *Wang X.* The C^*-algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam Sytems, **10**:4 (1990), 565-597.

4. *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Bol. Soc. Brasil. Mat. **6** (1975), 155-183.

5. *Ошемков А.А., Шарко В.В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник, **189**:8 (1998), 93-140.

АСИМПТОТИКА МОМЕНТОВ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ЧАСТИЦ В ВЕТВЯЩЕМСЯ СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДАНИИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

В.А. Куценко

vlakutsenko@ya.ru

УДК 519.218.23, 519.218.25

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с непрерывным временем в случайной среде. Случайная среда в каждой точке решетки определяется неотрицательными, независимыми и одинаково распределенными случайными интенсивностями деления и гибели частиц. Случайное блуждание полагается простым и симметричным. Ветвящееся случайное блуждание описывается при помощи моментов численности частиц в каждой точке решетки. Получены результаты о предельном поведении усредненных по среде моментов для случайного потенциала, хвостовая функция которого имеет асимптотическое гумбелевское распределение.

Ключевые слова: случайные процессы, ветвящиеся случайные блуждания, перемежаемость

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

Куценко Владимир Александрович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Kutsenko Vladimir (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Asymptotics of the moments of particle numbers in a branching random walk in a random medium

We consider a branching random walk over a multidimensional lattice with continuous time in a random medium. The random medium at each point of the lattice is determined by non-negative, independent and equally distributed random intensities of splitting and death of particles. The random walk is assumed to be simple and symmetric. Branching random walk is described using the moments of the number of particles at each point of the lattice. Results are obtained on the limit behavior of medium-averaged moments for a random potential whose tail function has an asymptotic Gumbelian distribution.

Keywords: random processes, branching random walks, intermittency

Пусть в каждой точек решетки $\mathbb{Z}^d$ определен процесс рождения и гибели частиц в непрерывном времени. Предполагается, что в начальный момент времени на решетке находится одна частица, которая за малое время может переместиться в соседний узел решетки, произвести потомство или погибнуть. Случайная среда определяется интенсивностями деления и гибели частиц в каждой точке решетки, которые являются неотрицательными случайными величинами $\xi_+(x) = \xi_+(x, \omega)$ и $\xi_-(x) = \xi_-(x, \omega)$. На пары $(\xi_+(x), \xi_-(x))$ накладывается условие об одинаковой распределенности и независимости в различных точках решетки. Блуждание описывается простым симметричным случайным блужданием, однородным по времени. Эволюция частиц происходит независимо друга от друга и от всей предыстории. Подобная система частиц называется ветвящимся случайным блужданием (ВСБ) в случайной среде.

Случайным потенциалом называется величина $V(x) = V(x, \omega) := \xi_+(x) - \xi_-(x)$. Математическое ожидание по вероятностному пространству, соответствующему $V(x)$ будем обозначать при помощи угловых скобок $\langle \cdot \rangle$. ВСБ полностью описывается числом частиц в точках $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времеми t, обозначаемым $\mu_y(t, \omega)$. Эту величину предлагается описывать при помощи замороженных моментов $m_n(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x \mu_y(t, \omega)$, где $\mathbb{E}_x$ — математическое ожидание при условии старта ВСБ в точке x. Величина $m_n(t, x, y, \omega)$ является случайной относительно среды и для ее изучения вновь предлагается использовать метод моментов и ввести «отожженные» моменты $\langle m_n(t, x, y, \omega) \rangle$.

Цель работы — описать зависимость асимптотического поведения $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$ при $t \to \infty$ от распределения потенциала $V(x)$. Через $f(x) \sim g(x)$ будем обозначать, что $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

В работе [1] показано, что, если для функции распределения $F(x)$ потенциала $V(x)$ верно $\ln(1 - F(x)) \sim -cx^\alpha$, $c > 0$, $\alpha > 1$, $x \to \infty$, то

$$\ln \langle m_1(t, x, y) \rangle \sim t^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad t \to \infty.$$

Для доказательства утверждения похожего типа в случае потенциалов с гумбелевским хвостом понадобятся два утверждения, приведенные ниже.

Лемма 1. *Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Пусть верно:* $\ln(1-F(x)) \sim -ce^{\alpha x}$, $c>0$, $\alpha \geqslant 1$, $x \to \infty$. *Тогда верно:*

$$\ln \mathbb{E}e^{\xi t} \sim \alpha^{-1} t \ln(t), \quad t \to \infty.$$

Лемма 2. *Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, такие, что $f_i(t) \sim at\ln t$, $t \to \infty$, $i=1,2$. Тогда для их свертки $W(t) = f_1 * f_2(t)$ верно:*

$$W(t) \sim at\ln t, \quad t \to \infty.$$

Следуя схеме доказательств из [1], на основе лемм 1 и 2 получаем следующий результат.

Теорема 1. *Рассмотрим ВСБ в случайной среде со случайным потенциалом $V(x)$. Пусть для его функции распределения $F(x)$ верно:* $\ln(1-F(x)) \sim -ce^{\alpha x}$, $c>0$, $\alpha \geqslant 1$, $x \to \infty$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \langle m_1(t,x,y)\rangle}{\alpha^{-1} t \ln t} = 1.$$

Литература

1. *S.A. Albeverio, L.V. Bogachev, S.A. Molchanov, E.B. Yarovaya.* Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment // Markov Processes Relat. Fields, **6** (2000), 473.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В.Л. Литвинов
vladlitvinov@rambler.ru

УДК 534.11

Используя метод Канторовича – Галеркина находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях консоли с движущейся границей, лежащей на упругом основании. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Решение получено для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на движущейся границе.

Ключевые слова: колебания систем с движущимися границами, упругое основание, резонансные свойства, амплитуда колебаний

Литвинов Владислав Львович, к.т.н., доцент, зав. кафедрой СФ СамГТУ (Самара, Россия); Vladislav Litvinov (Samara State Technical University, Samara, Russia)

Transverse vibrations of a console of variable length on elastic base

Using the Kantorovich-Galerkin method, an approximate solution of the problem of transverse vibrations of a console with a moving boundary lying on an elastic base is found. The results obtained for the oscillation amplitude corresponding to the n-th dynamic mode are presented. The phenomenon of steady resonance and passage through resonance is investigated. The solution is obtained for the most common case in practice, when external perturbations act on a moving boundary.

Keywords: oscillations of systems with moving boundaries, elastic foundation, resonant properties, amplitude of oscillations

Одномерные колебательные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике: изгибные колебания валов, балок и стержней с подвижными закреплениями [1-–3]. Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем.

Рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс для поперечных колебаний балки переменной длины на подпружиненной подложке.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки, имеет вид:

$$U_{tt}(x,t)+\alpha^2U_{xxxx}(x,t)+\frac{k_0}{\rho}U(x,t)=0. \tag{1}$$

Граничные условия:

$$U_{xxxx}(0,t)=0; \quad U_{xxx}(0,t)=0; \tag{2}$$

$$U\big(l_0(t),t\big)=B\cos W_0\big(\omega_0 t\big); \quad U_x\big(l_0(t),t\big)=0. \tag{3}$$

В (1)–(3) используются следующие обозначения: $U(x,t)$ — поперечное смещение точки балки; k_0 — жесткость подложки; $\alpha^2=\dfrac{El}{\rho}$; $l_0(t)=L_0-v_0t$ — закон движения правой границы; L_0 — начальная длина балки; v_0 — скорость движения границы; $W_0(z)$ — функция класса C^2; B, ω_0 — постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения ω_0 является частотой этого возмущения).

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям [1] и используя метод малого параметра [3], получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau)=E_n^2(\tau)\left\{\left[\int\limits_0^{\tau}F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int\limits_0^{\tau}F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{0,25}{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}; \quad F_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta); \quad w_n(\tau) = \int\limits_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\tau)d\zeta;$$

$$F_n(\tau) = \frac{0,12k_n^3}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l^7(\varepsilon\tau)}}.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если скорость изменения функции $F_n(\zeta)$ равна нулю, т.е.:

$$W(\tau) = w_n(\tau) + \gamma,$$

где γ — постоянная величина.

Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)\int\limits_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)d\zeta.$$

Если $W(\tau) = \tau$, то в области, содержащей точку $\tau_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{k_n}{\sqrt[4]{1-\eta}} - 1\right)$ наблюдается явление прохождения через резонанс.

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает задача (1)–(3).

Литература

1. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.,* Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, **2** (2018), 70-77.

2. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, **1** (1970), 159-161.

3. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. — М.: Физматлит, 2001.

О СТРУКТУРЕ СПЕКТРА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

А.С. Макин
alexmakin@yandex.ru

УДК 517.984.5

Исследуется спектральная задача для несамосопряженного оператора Дирака с двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым по норме L_2 потенциалом $V(x)$. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять целая функция, чтобы являться характеристической функцией рассматриваемой краевой задачи. В случае регулярности краевых условий устанавливаются необходимые и достаточные условия на спектр указанного оператора.

Ключевые слова: оператор Дирака, краевая задача, спектр

On the structure of the spectrum of non-self-adjoint boundary value problems problems for the Dirac operator

We study the spectral problem for a non-self-adjoint Dirac operator with two-point boundary conditions and arbitrary L_2-summable potential $V(x)$. Necessary and sufficient conditions are established that an entire function must satisfy in order to be the characteristic determinant of the indicated operator. If the boundary conditions are regular we also find necessary and sufficient conditions for a set of complex numbers to be the spectrum of the considered boundary value problem.

Keywords: Dirac operator, boundary value problem, spectrum

В настоящей работе мы изучаем спектральную задачу для системы Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x), y_2(x))$, комплекснозначные функции $p, q \in L_2(0,\pi)$, с краевыми условиями

$$\begin{aligned} a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты a_{ij} являются произвольными комплексными числами, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МИРЭА (Москва, Россия); Alexander Makin (MIREA, Moscow, Russia)

линейно независимы. Основной целью является изучение строения спектра задачи на собственные значения для системы (1) с краевыми условиями типа (2).

Обозначим через J_{jk} определитель, составленный из j-го и k-го столбцов матрицы A. Обозначим $J_0 = J_{12} + J_{34}$, $J_1 = J_{14} - J_{23}$, $J_2 = J_{13} + J_{24}$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ, таких что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$.

В настоящей работе мы будем изучать задачу (1), (2) при выполнении условий

$$J_{13} \neq J_{24}, \quad J_{14} = 0, \quad J_{13} \neq 0, \quad J_{24} \neq 0. \tag{3}$$

Соотношениям (3) удовлетворяет широкий класс краевых условий, например, условия, задаваемые матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1 d_1 b_2 c_2 \neq 0, \quad b_2 d_1 \neq -a_1 c_2$.

Рассмотрим систему Дирака (1), (2), (3). Хорошо известно, что характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ этой задачи может быть приведена к виду

$$\Delta(\lambda) = J_0 - J_{23} c_1(\lambda) - J_{13} s_2(\lambda) - J_{24} s_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + f(\lambda), \tag{4}$$

где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристическая функция задачи (1), (2), (3) при $V(x) \equiv 0$, $\Delta_0(\lambda) = J_0 - (J_{13} + J_{24}) \sin \pi\lambda - J_{23} \cos \pi\lambda$, $f \in PW_\pi$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in PW_\pi$ существует потенциал $V \in L_2(0, \pi)$ такой, что для характеристической функции $\Delta(\lambda)$ задачи* (1), (2), (3) *с потенциалом $V(x)$ справедливо равенство* (4).

Дополнительно предположим, что краевые условия (2) регулярны, стало быть, имеет место неравенство

$$(J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) \neq 0.$$

Теорема 2. *Для того, чтобы множество комплексных чисел Λ являлось спектром оператора Дирака* (1), (2), (3) *с комплекснозначным потенциалом $V \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из двух последовательностей собственных значений $\lambda_{n,j}$, удовлетворяющих условию*

$$\lambda_{n,j} = 2n + \frac{\ln z_j}{i\pi} + \varepsilon_{n,j}, \tag{5}$$

где z_j являются корнями уравнения

$$(J_1 + iJ_2) z^2 + 2J_0 z + (J_1 - iJ_2) = 0,$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\mathrm{Im}\lambda \in (-\pi, \pi]$, $\{\varepsilon_{n,j}\} \in l_2$, $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Необходимость условия (5) была установлена в [1].

Литература

[1] *Djakov P. and Mityagin B.* Unconditional Convergence of Spectral Decompositions of 1D Dirac operators with Regular Boundary Conditions. // Indiana Univ. Math. J., **61** (2012), 359-398.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В.В. Малыгина

mavera@list.ru

УДК 517.929

Исследуются вопросы устойчивости линейного автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. В основе исследования лежит известное представление решения в явном виде с помощью интегрального оператора, ядром которого является функция Коши исследуемого уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения нейтрального типа, функция Коши, устойчивость

On stability of differential equations of neutral type

We investigate questions of stability for a linear autonomous functional differential equation of neutral type. The study is based on the well-known representation of a solution in explicit form using an integral operator whose kernel is the Cauchy function of the equation under study.

Keywords: neutral differential equation, the Cauchy function, stability

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k \dot{x}\,(t-kh) = \sum_{j=0}^{J} b_j x\,(t-jh), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $h > 0$, $K \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}_0$, $a_k, b_j \in \mathbb{R}$.

При отрицательных значениях аргумента доопределим x и $\dot{x}$ начальными функциями φ и ψ соответственно (не предполагая непрерывной стыковки» $x(0) = \varphi(0)$ и условия $\psi = \dot{\varphi}$).

Обозначим через S_h оператор сдвига на величину $h > 0$, действующий в пространствах функций, заданных на полуоси $\mathbb{R}_+$, введем операторы S и T равенствами

$$Sy = \sum_{k=1}^{K} a_k (S_h^k y), \quad Ty = \sum_{j=0}^{J} b_j (S_h^j y)$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSNM-2020-0028).

Малыгина Вера Владимировна, д.ф.-м.н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия); Vera V. Malygina (Perm National Reserch Polytechnic University, Perm, Russia)

и наряду с уравнением (1) рассмотрим неоднородное операторное уравнение

$$(I-S)\,\dot{x} = Tx + f. \tag{2}$$

Уравнение (1) с заданными φ и ψ можно переписать в виде (2), положив

$$f(t) = \sigma(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \psi(t-kh)\chi_k(t) + \sum_{j=1}^{J} b_j \varphi(t-jh)\chi_j(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\chi_n(t)$ — характеристическая функция множества $(-\infty, nh)$.

Уравнение (2) с произвольными значением $x(0) \in \mathbb{R}$ и локально суммируемым внешним возмущением f однозначно разрешимо в пространстве локально абсолютно непрерывных функций, и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где функция $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (2).

Пусть $\mathbb{X} \subseteq L_1[0,\omega]$ — банахово пространство измеримых на промежутке $[0,\omega]$ функций. Определим семейство $\{K_t\}_{t\geqslant 0}$ линейных непрерывных на пространстве $\mathbb{X}$ функционалов формулой

$$K_t(\sigma) = \int\limits_0^t Y(t-s)\sigma(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Определение. Назовем уравнение (1)

- *$\mathbb{X}$-устойчивым*, если $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| < \infty$ и $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|K_t\| < \infty$;
- *асимптотически $\mathbb{X}$-устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} K_t(\sigma) = 0$ при любом $\sigma \in \mathbb{X}$;
- *сильно асимптотически $\mathbb{X}$-устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$ и при этом $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$;
- *экспоненциально $\mathbb{X}$-устойчивым*, если существуют такие $N, \gamma > 0$, что для всех $t \geqslant 0$ справедливы оценки $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$ и $\|K_t\| \leqslant Ne^{-\gamma t}$.

Исследуем устойчивость уравнения (1) для случая $\mathbb{X} = L_p[0,\omega]$.

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leqslant \infty$. Уравнение (1) L_p-устойчиво тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds < \infty$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Теорема 2. *Уравнение (1) L_1-устойчиво тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{t\geqslant 0} |Y(t)| < \infty$.*

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$. *Уравнение* (1) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво, если и только если* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds = 0$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Теорема 4. *Уравнение* (1) *сильно асимптотически* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0$.

Теорема 5. *Функция Коши уравнения* (1) *тогда и только тогда обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0$, *когда она имеет оценку*

$$|Y(t)| \leqslant N e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Уравнение* (1) *экспоненциально* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда для функции Коши справедлива оценка* (3).

ОПИСАНИЕ АЛГЕБР ДЛИНЫ 1

О.В. Маркова

ov_markova@mail.ru

УДК 512.554.1

В работе описаны алгебры (не обязательно ассоциативные) над полями произвольной характеристики, длина которых равна 1.

Ключевые слова: конечномерные алгебры, системы порождающих, функция длины

Description of algebras of length 1

Algebras (not necessarily associative) over fields of arbitrary characteristic having length equal to 1 are determined.

Keywords: finite-dimensional algebras, generating sets, length function

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Маркова Ольга Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия), Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Olga Markova (Lomonosov Moscow State University and Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Представленные в данном сообщении результаты получены коллективом авторов: К. Мартинес (Овьедо, Испания), Р. Родригес (Сан-Паулу, Бразилия), О. В. Маркова (Москва). Доклад основан на работе [1].

Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная, не обязательно ассоциативная, алгебра с единицей над полем $\mathbb{F}$, $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — её конечное порождающее множество. Каждое произведение конечного числа элементов $\mathcal{S}$ назовем *словом* в алфавите $\mathcal{S}$. *Длиной* слова назовем число букв соответствующего произведения. Единицу 1 алгебры будем считать словом *нулевой длины* в алфавите $\mathcal{S}$. Заметим, что в общем случае неассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ различные расстановки скобок в слове задают различные слова. *Длиной конечной системы $\mathcal{S}$ порождающих* алгебры $\mathcal{A}$ полем называется наименьшее натуральное число $l(\mathcal{S})$, такое что слова длины не большей $l(\mathcal{S})$ порождают данную алгебру как векторное пространство. *Длиной алгебры* называется максимум длин её систем порождающих, обозначим ее $l(\mathcal{A})$.

Длина является важной числовой характеристикой алгебры, трудность вычисления которой даже для классических алгебр обусловлена необходимостью рассмотрения всех систем образующих в данной алгебре. Общая задача исследования функции длины ассоциативной алгебры была впервые поставлена К. Паппаченой в [2]. В недавней работе [3] А.Э. Гутерманом и Д.К. Кудрявцевым впервые введена и исследована длина неассоциативных алгебр, найдена точная верхняя граница длины произвольной неассоциативной алгебры и изучены некоторые её свойства.

Вопрос оценки длины является не только важной открытой задачей относящейся к чистой алгебре, но и актуален для целого ряда прикладных вопросов. Обычно функция длины служит мерой сложности проверки тех или иных алгебраических условий. Поэтому алгебры минимальной возможной длины представляют отдельный интерес. Очевидно, что минимальное нетривиальное значение функции длины есть единица.

Ранее в работе [4] автором были описаны с точностью до сопряжения матричные подалгебры длины 1 над произвольными полями. Затем, основываясь на этих результатах, в работе [5] получено описание ассоциативных алгебр длины 1 с точностью до изоморфизма.

В общем случае в работе [1] описание алгебр длины 1 удалось получить в терминах существования базиса с известной таблицей умножения.

Основной результат данного сообщения — следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики отличной от 2 и $\mathcal{A}$ — конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра с единицей. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ в том и только в том случае, когда у алгебры $\mathcal{A}$ есть такой базис $\mathcal{B} = \{1_{\mathcal{A}}, a_2, \ldots, a_n\}$, что $a_i^2 = \mu_i 1_{\mathcal{A}}$ для некоторых $\mu_i \in \mathbb{F}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, и*

$$a_i a_j = \alpha_{ij} 1_{\mathcal{A}} + \beta_j a_i - \beta_i a_j$$

$\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{F}$, для всех $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Как следствие этого результата удаётся получить описание Йордановых и гибких алгебр длины 1, а также определять, является ли алгебра ассоциативной.

Над полями характеристики 2 приведём описание для алгебр размерности не менее 4. В случае размерности 3 описание различается для поля из

2-х элементов и его расширений. В следующем утверждении для произвольных элементов a, b алгебры $\mathcal{A}$ обозначение $a \equiv b$ означает, что $a - b \in \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *поле характеристики* 2 *и* $\mathcal{A}$ — *конечномерная* $\mathbb{F}$-*алгебра с единицей размерности* $\dim \mathcal{A} \geqslant 4$. *Тогда* $l(\mathcal{A}) = 1$ *в том и только в том случае, когда у алгебры* $\mathcal{A}$ *есть такой базис* $\mathcal{B}^* = \{a_1^* = 1_{\mathcal{A}}, a_2^*, \dots, a_n^*\}$, *таблица умножения которого удовлетворяет одному из следующих условий:*

(I) $a_i^{*2} \equiv 0$, *для* $i = 2, \dots, n$, $a_i^* a_j^* \equiv a_j^* a_i^* \equiv \beta_{ij} a_i^* + \beta_{ji} a_j^*$,

(II) $a_i^{*2} \equiv a_i^*$, *для* $i = 2, \dots, n$, $a_i^* a_j^* \equiv \beta_{ij} a_i^* + (1 + \beta_{ji}) a_j^*$,

$\beta_{ij} \in \mathbb{F}$, *для всех* $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$. *Заметим, что во втором случае* $a_i^* a_j^* + a_j^* a_i^* \equiv a_i^* + a_j^*$.

Литература

1. *Markova O.V., Martinez C., Rodrigues R.L.* Algebras of length one// J. Pure Appl. Algebra, **226**:7 (2022), 106993.

2. *Pappacena C.J.* An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra// J. Algebra, **197** (1997), 535-545.

3. *Guterman A.E., Kudryavtsev D.K.* Upper bounds for the length of non-associative algebras// J. Algebra, **544** (2020), 483-497.

4. *Маркова О.В.* Классификация матричных подалгебр длины 1// Фундамент. и прикл. матем., **17**:1 (2012), 169-188.

5. *Маркова О.В.* Описание алгебр длины 1// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех., **1** (2013), 54-56.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.И. Матвеева

matveeva@math.nsc.ru

УДК 517.929

Рассматриваются классы нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Исследуются асимптотические свойства решений этих систем.

Ключевые слова: функционалы Ляпунова – Красовского, экспоненциальная устойчивость, оценки решений, множества притяжения

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

Матвеева Инесса Изотовна, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Inessa Matveeva (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

Stability of solutions to nonlinear time-delay differential equations

We consider classes of nonlinear nonautonomous systems of time-delay differential equations. Asymptotic properties of solutions to these systems are studied.

Keywords: Lyapunov–Krasovskii functionals, exponential stability, estimates for solutions, attraction sets

Рассматриваются классы нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов, при этом функция, определяющая запаздывание, может быть постоянной, ограниченной или неограниченной. Введены функционалы Ляпунова – Красовского, с использованием которых исследована устойчивость для систем с переменными коэффициентами в линейных членах. Указаны условия робастной и экспоненциальной устойчивости, которые формулируются в виде дифференциальных неравенств для самосопряженных матричных функций. Получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, установлены оценки для множеств притяжения стационарных решений. Аналогичные результаты установлены для нелинейных неавтономных систем с несколькими запаздываниями, в том числе при наличии сосредоточенного и распределенного запаздываний. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–7]).

Литература

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал, **48**:5 (2007), 1025–1040.

2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал, **55**:5 (2014), 1059–1077.

3. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференциальные уравнения, **53**:6 (2017), 730–740.

4. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики, **22**:3 (2019), 96–103.

5. *Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electronic Journal of Differential Equations, **2020**:20 (2020), 1–12.

6. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики, **60**:4 (2020), 612–620.

7. *Матвеева И. И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал, **62**:3 (2021), 583–598.

МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ УЗЛОВ

А.Д. Медных
smedn@mail.ru

УДК 517.53

В докладе обсуждаются различные методы вычисления объемов узлов и зацеплений, моделируемых в пространствах постоянной кривизны. В случаях, когда моделирование осуществляется в гиперболическом или сферическом пространствах, объем выражается в виде комплексного интеграла от явно выписанной аналитической функции. В евклидовом пространстве, для вычисления объемов в качестве единицы масштаба берется длина моделируемого узла. Вычисленный таким образом объем всегда является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Ключевые слова: узел, зацепление, гиперболический объем, сферический объем, евклидов объем

Some application of complex analysis to the knot theory.

The report is devoted to various methods for calculating the volumes of knots and links modeled in spaces of constant curvature. In cases where modeling is carried out in the hyperbolic or spherical spaces, the volume is expressed as a complex integral of an explicitly written analytical function. In the Euclidean space, to calculate volumes, the length of the knot is taken as the unit of scale. The volume thus calculated is always the root of an algebraic equation with integer coefficients.

Keywords: knot, link, hyperbolic volume, spherical volume, Euclidean volume

Мы рассматриваем узел или зацепление как подмножество трехмерной сферы. В дополнении к нему вводится (не обязательно полная) метрика постоянной секционний кривизны $K = 0, \pm 1$. Пополнение этой метрики, как метрического пространства, приводит к построению конического многообразия, подлежащим пространством которого является трехмерная сфера, а сингулярным множеством – заданный узел или зацепление. При этом, метрика вдоль узла или зацепления вырождается, но позволяет вычислить его длинну и конический угол обхода вдоль каждой из его компонент. Мы приводим тригонометрические соотношения, подобные школьным теоремам синусов, косинусов и тангенсов, связывающие между собой длины узлов и их конические углы. Далее, используя каноническое уравнение Шлефли и интегрируя его, с использованием полученных тригонометрических соотношений, мы приходим к интегральным формулам, выражающих объем в гиперболической и сферической геометриях. Евклидова геометрия представляется более трудной. Она возникает на дополнении узла в результате

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер №075-15-2022-281.

Медных Александр Дмитриевич, д.ф.-м.н., г.н.с., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Alexander Mednykh (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

предельного перехода из гиперболической или сферической геометрий. При этом, если в качестве единицы масштаба выбрать длину узла, то соответсвующий объем можно найти как корень алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Для двумостовых узлов этот результат был установлен в работе автора [1]. В более общем случае, это совместный результат с Н. В. Абросимовым и А. А. Колпаковым [2]. В качестве иллюстрации основных результатов приведем следующие теоремы.

Напомним, что узел 5_2 с коническим углом α моделируется в гиперболической геометрии если $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$, в евклидовой если $\alpha = \alpha_0$ и в сферической — если $\alpha_0 < \alpha < 2\pi - \alpha_0$, где $\alpha_0 \simeq 2.40717...$ — корень уравнения $\cot(\frac{\alpha_0}{2}) = \sqrt{1/23(-17 - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{-235 + 344\sqrt{2}})}$.

Теорема 1. *Рассмотрим узел 5_2 с коническим углом α, где $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$. Тогда его гиперболический объем находится по формуле*

$$\mathrm{Vol}\,(5_2(\alpha)) = i \int_{\bar{z}}^{z} \log\left[\frac{8(\zeta^2 + A^2)}{(1 + A^2)(1 - \zeta)(1 + \zeta)^2}\right] \frac{d\zeta}{\zeta^2 - 1},$$

где $A = \cot(\frac{\alpha}{2})$ и z, $\Im z > 0$ — это корень уравнения

$$8(z^2 + A^2) = (1 + A^2)(1 - z)(1 + z)^2.$$

Аналогичный результат имеет место и в сферической геометрии. Приведенный евклидов объем узла 5_2 задается следующей теоремой.

Теорема 2. *Рассмотрим узел 5_2 с коническим углом $\alpha_0 = 2.40717\ldots$. Тогда его приведенный евклидов объем $v_0 = \frac{\mathrm{Vol}\,(5_2(\alpha_0))}{\ell^3_{\alpha_0}}$ находится по формуле*

$$v_0 = 1/\Big(6\sqrt{-6 + 68\sqrt{2} + 4\sqrt{983 + 946\sqrt{2}}}\Big) = 0.00990963\ldots.$$

Литература

1. *Mednykh A.D.* Volumes of two-bridge cone manifolds in spaces of constant curvature // Transformation Groups **26** (2021), 601–629.

2. *Abrosimov N.V., Kolpakov A.A., Mednykh A.D.* Euclidean volumes of hyperbolic knots // arXiv:2107.03275 [math.GT], https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.03275.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

И.А. Медных

ilyamednykh@mail.ru

УДК 517.53

В последнее время возник заметный интерес к исследованию различных дискретных объектов, обладающих свойствами, схожими с римановыми поверхностями. В таком качестве можно рассматривать конечные связные графы. Для них построена теория, подобная классической теорией римановых поверхностей. В частности, был введен дискретный аналог многобразия Якоби или якобиана для графов. Это приводит к задаче нахождения структуры конечной абелевой группы, порожденной потоками на графе, с системой соотношений, соответствующих первому и второму закону Кирхгофа. В рамках доклада рассматривается вопрос о структуре группы якобиана графа для семейства циркулянтных графов и их естественных обобщений.

Ключевые слова: спектральная теория, абелева группа, многообразие Якоби, полиномы Чебышева

Spectral invariants of circulant graph

In recent years, a large interest appeared in investigation of objects with properties similar to that of the Riemann surfaces. In particular, one can consider finite connected graphs. For such graphs, the theory quite similar to the theory of Riemann surfaces was established. The discrete analogue of Jacobi manifolds, namely Jacobian of a graph, was introduced. This leads to problem: How to find the structure of the Abelian group generated by flows on a graph satisfying the first and the second Kirchhoff lows? Sometimes, it is possible to find the answer using the properties of the corresponding Laplacian matrix. Current report devoted to the question of the structure of Jacobian group for the family of circulant graphs and their generalizations.

Keywords: spectral theory, Abelian group, Jacobi manifold, Tchebyshev polynomials

Цель настоящего доклада – изучение инвариантов циклических накрытий графов. При этом, накрываемый граф предполагается фиксированным, а циклическая группа накрытия имеет сколь угодно большой порядок. Классическим примером таких накрытий являются циркулянтные графы. Они накрывают одновершинный граф с заданным числом петель. Более сложными представителями семейства циклических накрытий являются

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер №075-15-2022-281.

Медных Илья Александрович, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Ilya Mednykh (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

I-, Y-, H-графы, обобщенные графы Петерсена, сэндвич-графы, дискретные торы и многие другие. Будут приведены аналитические формулы, позволяющие вычислять число отмеченных остовных лесов и деревьев в циклических накрытиях, найдена их асимптотика и изучены арифметические свойства этих чисел. Указанные инварианты являются спектральными – их значения определяются спектром оператора Лапласа.

Особое место будет отведено якобианам графов, которые, с нашей точки зрения, являются дискретным версиями якобианов римановых поверхностей. Якобиан графа представляет из себя максимальную абелеву группу, порожденную потоками на графе, удовлетворяющими первому и второму законам Кирхгофа. По классической теореме Кирхгофа, ее порядок совпадает с числом остовных деревьев в графе. Эта группа, которую также называют песочной группой, группой Пикара, критической группой, долларовой группой или группой компонент, была независимо введена многими авторами. В докладе будут приведены структурные формулы для вычисления якобианов циркулянтных графов и их простейших аналогов. Основаная техника вычисления всех указанных выше инвариантов базируется на использовании полиномов Чебышева и их свойствах.

Основные результаты опубликованы в работах [1–3].

Проиллюстрируем полученные результаты следующими теоремами.

Теорема 1. *Якобиан циркулянтного графа $C_n(1,2)$ изоморфен группе $\mathbb{Z}_{(n,F_n)} \oplus \mathbb{Z}_{F_n} \oplus \mathbb{Z}_{\{n,F_n\}}$, где (a,b) и $\{a,b\}$ — наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a и b, а F_n — числа Фибоначчи.*

Было бы замечательно, если бы все теоремы формулировались таким образом. Однако, уже для графа $C_n(1,3)$ сложность резко возрастает.

Теорема 2. *Рассмотрим две периодические последовательности $\mu(n)$ и $\eta(n)$, определенные по формулам*

$$\mu(n) = \begin{cases} 4, & \text{если } n \equiv 3 \mod 6 \\ 2, & \text{если } n \equiv 0 \mod 6 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{и} \quad \eta(n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 0 \mod 6 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Пусть также $2T_n(\frac{-1+i}{2}) - 2 = s + i\,t$, и $U_{n-1}(\frac{-1+i}{2}) = u + i\,v$. Заметим, что все числа s,t,u,v — целые. Положим $\Delta_1 = \gcd(n,s,t,u,v)$, $\Delta_2 = \gcd(s,t,nu,nv)$, $\Delta_3 = \gcd(ns,nt,su+tv,sv-tu)$, $\Delta_4 = \gcd(s^2+t^2, n(su+tv), n(sv-tu))$, $\Delta_5 = n(s^2+t^2)/10$. Тогда якобиан циркулянтного графа $C_n(1,3)$ изоморфен группе $\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \mathbb{Z}_{d_3} \oplus \mathbb{Z}_{d_4} \oplus \mathbb{Z}_{d_5}$, где

$$d_1 = \frac{\Delta_1}{\mu(n)},\ d_2 = \frac{\eta(n)\Delta_2}{\Delta_1},\ d_3 = \frac{\Delta_3}{\eta(n)\Delta_2},\ d_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta_3},\ d_5 = \frac{\mu(n)\Delta_5}{\Delta_4}.$$

Литература

1. *Медных А.Д., Медных И.А.* О структуре группы якобиана циркулянтных графов // Доклады Академии Наук **469**:5 (2016), 539–543; англ. пер.:

Mednykh A. D., Mednykh I.A. On the Structure of the Jacobian Group for Circulant Graphs // Dokl. Math. **94**:1 (2016), 445–449.

2. *Mednykh I.A.* On Jacobian group and complexity of I-graph $I(n,k,l)$ through Chebyshev polynomials // Arc Math. Contemp. **15**:2 (2018), 467–485.

3. *Медных А.Д., Медных И.А.* О строении критической группы циркулянтного графа с непостоянными скачками // УМН, **75**:1 (2020), 197–198; англ. пер.: *Mednykh A.D., Mednykh I.A.* On the structure of the critical group of a circulant graph with non-constant jumps // Russian Math. Surveys, **75**:1 (2020), 190–192.

ЛАКУНАРНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНУЛЛИ И ЭЙЛЕРА

К.А. Мирзоев

mirzoev.karahan@mail.ru

УДК 517.927.25+512.622.64

В настоящей работе средствами спектральной теории дифференциальных операторов получены лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины 4 для многочленов Бернулли и Эйлера. Эти соотношения таковы, что из них следуют известные и некоторые новые лакунарные соотношения для чисел Бернулли и Эйлера.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения, многочлены и числа Бернулли и Эйлера

Lacunary recurrent relations for Bernoulli and Euler polynomials

In this paper, by means of the spectral theory of differential operators, lacunar recurrence relations with gaps of length 4 are obtained for Bernoulli and Euler polynomials. These relations are such that known and some new lacunar relations for Bernoulli and Euler numbers follow from them.

Keywords: recurrent relations, Bernoulli and Euler polynomials and numbers

Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из разложений

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad \frac{2e^{tx}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t|<2\pi$, а второе — при $|t|<\pi$, а символами B_n и E_n — числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами $B_n=B_n(0)$ и $E_n=2^nE_n(1/2)$ $(n=0,1,\ldots)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Karakhan Mirzoev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Рассмотрим самосопряжённый оператор S_α, порождённый в $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ выражением $l_2[y] = -y'' - 2aiy' + 2a^2y$ и граничными условиями $y^{(j)}(0) = e^{\pi i\alpha}y^{(j)}(\pi)$ $(j = 0,1)$, где a — некоторое вещественное число. Спектр этого оператора состоит из собственных чисел $\mu_{\alpha,k} = (2k+\alpha)^2 - 2a(2k+\alpha) + 2a^2$, а собственному значению $\mu_{\alpha,k}$ соответствует собственная функция $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-i(2k+\alpha)x}$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$. Если a не совпадает ни с одним из чисел $\mu_{\alpha,k}$, то число $\mu = 0$ не принадлежит спектру оператора S_α. Поэтому он имеет резольвенту R_α. Резольвента этого оператора является интегральным оператором с ядром — функцией Грина задачи $l_2[y] = f$, $y^{(j)}(0) = e^{\pi i\alpha}y^{(j)}(\pi)$ $(j = 0,1)$, для которой хорошо известна процедура её построения. С другой стороны, для оператора R_α и, следовательно, для функции Грина справедлива теорема о разложении в ряд по собственным функциям. В данной работе полученные таким образом тождества используются для вывода рекуррентных соотношений с пропусками длины 4 для многочленов Бернулли и Эйлера. А именно, справедливы следующие теоремы и следствие из них.

Теорема 1. *При $n = 0,1,\ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 4^{n-k} C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k}(z) = (n+1)\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+n}C_{2n+1}^{2m}(2z-1)^{2m},$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 4^{n-k+1} C_{2n+3}^{4k+2} B_{2n-4k+1}(z) = (2n+3)\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+n}C_{2n+2}^{2m+1}(2z-1)^{2m+1}.$$

Теорема 2. *При $n = 0,1,\ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 4^{n-k} C_{2n}^{4k} E_{2n-4k}(z) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+n}C_{2n}^{2m}(2z-1)^{2m},$$

$$2\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 4^{n-k} C_{2n+1}^{4k} E_{2n-4k+1}(z) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+n}C_{2n+1}^{2m+1}(2z-1)^{2m+1}.$$

Следствие 1. *При $n = 0,1,\ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 2^{n-2k} C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{[n/2]}(n+1),$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k \left(2^{2n-2k} - 2^{2k+1}\right) C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{n+1}(n+1),$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 2^{n-2k+1}(2^{2n-4k+2}-1) C_{2n+2}^{4k} B_{2n-4k+2} = (-1)^{[(n+1)/2]}(n+1),$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 2^{2k} C_{2n}^{4k} E_{2n-4k} = (-1)^n.$$

Хорошо известны классические линейные неоднородные рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k(x) = nx^{n-1}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k(x) + E_n(x) = 2x^n, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

в то время как лакунарные рекуррентные соотношения из теорем 1 и 2 для них, по-видимому, получены здесь впервые. С другой стороны, лакунарные рекуррентные соотношения для чисел B_n и E_n изучаются с конца XIX века и, в частности, такие соотношения для B_n с пропусками длины 4, 6, 8 и 10 были найдены С. Рамануджаном в начала XX века. Первое равенство из следствия 1 совпадает с полученным им тождеством для чисел B_n с пропусками длины 4.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ СООТВЕТСТВИЯ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

А.О. Мокроусова

mokrousovaalexa@gmail.com

УДК 519.2

Доклад посвящен исследованию двух критериев, проверяющих основную гипотезу о соответствии линейной модели регрессии с двумя параметрами против одной из четырех альтернатив, которые описывают различные нарушения в непрерывности, линейности и постоянности этой модели. В роли статистик критериев выступают интегральный и супремальный функционалы от эмпирического моста, построенного по регрессионным остаткам. Целью данной работы было сравнить вышеупомянутые критерии в смысле асимптотической относительной эффективности (АОЭ) по Питмену. Была получена формула, позволяющая вычислять АОЭ для таких критериев.

Ключевые слова: асимптотическая относительная эффективность по Питмену, линейная регрессия

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Мокроусова Александра Олеговна, инженер, НГУ (Новосибирск, Россия); Aleksandra Mokrousova (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Asymptotic relative efficiency of tests for checking correspondence to the regression model

The report is devoted to the study of two tests checking the basic hypothesis about correspondence to linear regression model with two parameters against one of four alternatives which describe different violations in the continuity and linearity in the model. Statistics of tests are integral and supremal functionals of the empirical bridge built on regression residuals. The purpose of this work was to compare the aforementioned tests in the sense of Pitman asymptotic relative efficiency (ARE). A formula for culculating the ARE for such tests was obtained.

Keywords: Pitman asymptotic relative efficiency, linear regression

В докладе представлена работа по исследованию двух критериев согласия для проверки соответствия регрессионной модели. В ней было впервые проведено сравнение критериев такого типа в смысле асимптотической относительной эффективности (АОЭ) по Питмену (см. [2], [3]).

Критерии проверяют основную гипотезу о соответствии линейной регрессионной модели вида $Y_i = a + \theta X_i + \varepsilon_i$, где X_i и ε_i, $i = 1, \dots, n$, образуют взаимно независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, против одной из четырех альтернатив, которые описывают различные нарушения основной гипотезы: скачок функции на константу, скачок на константу и изменение параметра регрессии (с нарушением непрерывности и без), нелинейность зависимости. Статистиками критериев являются два функционала от эмпирического моста $Z_n^0(t)$, построенного по регрессионным остаткам и определенного в [1] . Первый функционал — супремальный $\sup_{t\in[0,1]} \left|Z_n^0(t)\right|$, второй — интегральный $\left|\int_0^1 Z_n^0(t)\,dt\right|$.

В результате была получена формула для вычисления АОЭ по Питмену для данных критериев и показано, что при равномерном на $[0,1]$ распределении X_i лучше использовать супремальный критерий.

Литература

1. *Ковалевский А.П., Шаталин Е.В.* Асимптотика сумм остатков однопараметрической линейной регрессии, построенной по порядковым статистикам // Теория вероятностей и ее применения, 2014, том 59, выпуск 3, 452–467.

2. *Никитин Я.Ю.* Асимптотическая эффективность непараметрических критериев // Наука, Физмалит, 1995.

3. *Wieand H.S.* A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide // Ann. Statist. 4 (5) 1003 - 1011, September, 1976.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ НА СКОРОСТЬ ШРЕДИНГЕРОВСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ ПОДПРОСТРАНСТВ

А.К. Мотовилов

motovilv@theor.jinr.ru

УДК 517.983, 530.145

Под квантовым ограничением скорости понимается нижняя оценка на время, необходимое для перехода квантовой системы из одного ее состояния в другое состояние. В противоположность классической оценке Мандельштама-Тамма мы следим за эволюцией не отдельного состояния, а целого подпростростанства состояний, возможно, бесконечномерного. Используя понятие максимального угла между подпространствами, мы устанавливаем оптимальные оценки на скорость эволюции такого подпространства. Наше исследование включает случай неограниченных гамильтонианов.

Ключевые слова: эволюция подпространств, квантовое ограничение скорости, неравенство Мандельштама-Тамма

Optimal bounds on the speed of the Schrödinger evolution of subspaces

By a quantum speed limit one understands a lower bound for the time necessary for a quantum system to pass from one state to another one. In contrast to the basic Mandelstam-Tamm inequality, we are concerned not with a single state but with a (possibly infinite-dimensional) subspace which is subject to the Schrödinger evolution. By using the concept of maximal angle between subspaces we establish optimal bounds on the speed of such a subspace evolution. Our present study include the case of unbounded Hamiltonians.

Keywords: subspace evolution, quantum speed limit, Mandelstam-Tamm inequality

Мы будем считать справедливым следующее предположение.

Предположение 1. *Пусть H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с областью определения* $\mathrm{Dom}(H)$. *Предположим, что подпространство $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{H}$, $\mathfrak{P}_0 \neq \{0\}$ таково, что*

$$P_0 \ \mathrm{Dom}(H) \subset \mathrm{Dom}(H), \tag{1}$$

где P_0 — ортогональный проектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{P}_0$.

Отметим, что инвариантность (1) области определения $\mathrm{Dom}(H)$ относительно P_0 влечет плотность пересечения $\mathfrak{P}_0 \cap \mathrm{Dom}(H)$ в $\mathfrak{P}_0$.

Оператор H рассматривается как гамильтониан некоторой квантовой системы. Гамильтониан H порождает сильно непрерывную унитарную эволюционную группу $U_t = \exp(-\mathrm{i}Ht)$, $t \in \mathbb{R}$. Нашей целью является исследование семейства подпространств

$$\mathfrak{P}_t = \mathrm{Ran}(P_t), \quad t \in \mathbb{R},$$

Мотовилов Александр Константинович, д.ф.-м.н., нач. сектора, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ (Дубна, Россия); Alexander K.Motovilov (Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR, Dubna, Russia)

где $P_t := U_t P_0 U_t^*$, $t \in \mathbb{R}$ — (сильно непрерывный) путь во множестве ортогональных проекторов в $\mathfrak{H}$, возникающий как результат шрёдингеровской эволюции проектора P_0.

В качестве метрики на множестве всех подпространств гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ мы используем максимальный угол. Напомним, что если $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{R}$ — подпространства в $\mathfrak{H}$, являющиеся образами $\mathfrak{Q} = \mathrm{Ran}(Q)$ и $\mathfrak{R} = \mathrm{Ran}(R)$ ортогональных проекторов Q и R, соответственно, то максимальный угол $\vartheta(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ между ними определяется равенством

$$\vartheta(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}) := \arcsin(\|Q - R\|).$$

Теорема 2. *Пусть справедливо Предположение 1. Кроме того, предположим, что коммутатор* $[H, P_0]$ *операторов* H *и* P_0*, рассматриваемый на* $\mathrm{Dom}\big([H, P_0]\big) := \mathrm{Dom}(H)$*, является ограниченным оператором, т.е.*

$$V_{H,P_0} := \sup_{f \in \mathrm{Dom}(H),\ \|f\|=1} \|HP_0 f - P_0 H f\| < \infty.$$

Тогда

$$\vartheta\big(\mathfrak{P}_s, \mathfrak{P}_t\big) \leqslant V_{H,P_0}\, |t - s|, \quad \text{для любых } s, t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Следствие 3. *Предположим, что* T_θ *— момент времени, когда максимальный угол между начальным подпространством* $\mathfrak{P}_0$ *и некоторым подпространством на пути* $\mathfrak{P}_t$, $t \geqslant 0$, *достигает величины* θ, $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, *т.е.* $\vartheta\big(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_{T_\theta}\big) = \theta$. *Тогда, при ненулевом* V_{H,P_0}*, непременно*

$$T_\theta \geqslant \frac{\theta}{V_{H,P_0}}. \tag{3}$$

Теорема 4. *Пусть справедливо Предположение 1. Кроме того, предположим, что дисперсия энергии на подпространстве* $\mathfrak{P}_0$ *конечна, т.е.*

$$\Delta E_{\mathfrak{P}_0} := \sup_{f \in \mathfrak{P}_0 \cap \mathrm{Dom}(H),\ \|f\|=1} \big(\|Hf\|^2 - \langle Hf, f\rangle^2\big)^{1/2} < \infty.$$

Тогда

$$\vartheta\big(\mathfrak{P}_s, \mathfrak{P}_t\big) \leqslant \Delta E_{\mathfrak{P}_0}\, |t - s| \quad \text{для любых } t, s \in \mathbb{R} \tag{4}$$

и, при ненулевом $\Delta E_{\mathfrak{P}_0}$,

$$T_\theta \geqslant \frac{\theta}{\Delta E_{\mathfrak{P}_0}}\,, \tag{5}$$

где θ *и* T_θ *— величины, введенные в Следствии 3.*

Поскольку мы имеем лишь одностороннее неравенство $V_{H,P_0} \leqslant \Delta E_{\mathfrak{P}_0}$ (и конечность скорости V_{H,P_0}, вообще говоря, не означает конечность дисперсии $\Delta E_{\mathfrak{P}_0}$), оценки (2) и (3) являются более сильными нежели соответствующие оценки (4) и (5). Оценка (5), однако, по своему виду очень близка к известным неравенствам Мандельштама-Тамма и Мандельштама-Тамма-Флеминга. Более того, последние являются ее частными случаями при $\dim(\mathfrak{P}_0) = 1$. Все оценки (2)–(5) являются оптимальными в том смысле, что имеется пример гамильтониана H и подпространства $\mathfrak{P}_0$, для которого неравенства в этих оценках превращаются в равенства.

Результаты, представленные в настоящем докладе, были получены в совместной работе с Сержио Альбеверио [1].

Литература

1. *Albeverio S., Motovilov A.K.* Optimal bounds on the speed of subspace evolution // J. Phys. A: Math. Theor. **55** (2022), 235203; DOI: 10.1088/1751-8121/ac6bcf; arXiv:2111.05677.

СВОЙСТВА ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

А.О. Мыслюк

sanya.mysliuk@mail.ru

УДК 519.212.2, 519.212.3

Асимптотические свойства случайных множеств точек (при устремлении числа точек к бесконечности) активно исследуются с 60-х годов 20 века. Основной целью данной работы является обобщение комбинаторной леммы Бакстера (1961) и следствие из этого обобщения, позволяющее получить асимптотики различных характеристик выпуклой оболочки случайного блуждания с дискретным временем в $\mathbb{R}^d$.

Ключевые слова: математика, теория вероятностей, случайные блуждания, выпуклая оболочка

Properties of convex hulls of random walks

Mathematicians have been actively studying asymptotic properties of random sets of points (when the number of points tends to infinity) since the sixties of the 20th century. The main purpose of this paper is to generalize the combinatorial lemma of Baxter (1961) and the consequence of this generalization, which can be applied to obtain the asymptotics of various characteristics of the convex hull of a random walk with discrete time in $\mathbb{R}^d$.

Keywords: mathematics, probability theory, random walks, convex hull

---

Мыслюк Александр Олегович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mysliuk Aleksandr (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

В 1961 году была опубликована ([1]) комбинаторная лемма. Для её формулировки нам потребуется условие, налагаемое на конечное множество векторов. Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ — векторы на плоскости. $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$. $Z_A := \sum\limits_{j=1}^{k} Z_{i_j}$. Если из коллинеарности Z_A и Z_B следует, что $A = B$, то будем говорить что наша система векторов удовлетворяет условию (**B**). Комбинаторная лемма Бакстера формулируется следующим образом:

Теорема 1. Пусть векторы $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют (**B**), $S_0 := 0$, $S_k := \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$. Тогда существует ровно одна циклическая перестановка векторов $Z_1, \ldots, Z_n$, такая что $S_1, \ldots, S_{n-1}$ лежат справа (слева) относительно прямой $S_0 S_n$.

Применение комбинаторной леммы к плоским случайным блужданиям, скачки которых удовлетворяют (**B**) для всякого n с вероятностью 1, даёт асимптотику для математического ожидания числа вершин E_n границы выпуклой оболочки точек $S_0, \ldots, S_n$:

$$E_n = 2 \ln n + O(1).$$

Теперь обобщим условие (**B**) на случай произвольной размерности d. Пусть $B_1, \ldots, B_{d-1}$ — подмножества индексов $\{1, \ldots, n\}$, для которых $B_1 \subset \cdots \subset B_{d-1}$. Будем говорить, что векторы $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют условию (**K**), если:

1) векторы $Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы;

2) для всякого подмножества индексов A, отличного от $B_1, \ldots, B_{d-1}$, верно, что $Z_A \neq Z_{B_i} - Z_{B_j}$ ни для каких $j \leqslant i$, причём векторы Z_A, $Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы.

Обобщение комбинаторной леммы формулируется следующим образом:

Теорема 2. Пусть множество векторов $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ удовлетворяет (**K**), $B = \{0, i_1, \ldots, i_{d-2}, n\}$ — некоторый упорядоченный поднабор индексов. $A := \{Z_{i_k+1}, \ldots, Z_{i_{k+1}}\}$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant d-2$. Тогда существует ровно одна циклическая перестановка σ векторов из A, такая что ломанная, соединяющая точки S_{i_k} и $S_{i_{k+1}}$ будет полностью лежать в правом (левом) полупространстве относительно гиперплоскости Ω, проходящей через точки $\{0, S_{i_1}, \ldots, S_{i_{d-2}}, S_{i_n}\}$.

Следствием этого обобщения является результат, позволяющий считать асимптотики математических ожиданий некоторых характеристик выпуклых оболочек. Пусть $g(x_1, \ldots, x_{d-1})$ — симметрическое отображение $d-1$ переменных. Пусть набор индексов $i_0 < \cdots < i_{d-1}$ определяет некоторую грань D выпуклой оболочки H_n. Рассмотрим случайную величину $G_n = \sum\limits_{D \in \partial H_n} g(S_{i_1} - S_{i_0}, S_{i_2} - S_{i_1}, \ldots, S_{i_{d-1}} - S_{i_{d-2}})$. Тогда соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема 3. Пусть скачки $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ удовлетворяют условию ($\mathbf{K}$) для всякого n, тогда

$$\mathsf{E}(G_n) = \sum_{1 \leqslant M_1 < \cdots < M_{d-1} \leqslant n} \frac{2\,\mathsf{E}(g(S_{M_1}, S_{M_2} - S_{M_1}, \ldots, S_{M_{d-1}} - S_{M_{d-2}}))}{M_1 \cdot (M_2 - M_1) \cdots (M_{d-1} - M_{d-2})}.$$

Литература

1. *Baxter G.* A combinatorial lemma for complex numbers // Ann. Math. Statist., **32** (1961), 901-904.

2. *Vysotsky V., Zaporozhets D.* Convex hulls of multidimensional random walks // Trans. Amer. Math. Soc., **370**:11 (2018), 7985-8012.

УСТОЙЧИВАЯ ИЗОТОПИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПАЛИСА

Е.В. Ноздринова

maati@mail.ru

УДК 517.938

В рамках данного доклада рассматривается класс градиентно-подобных диффеоморфизмов f на замкнутой ориентируемой поверхности в предположении, что все неблуждающие точки f неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Основной результат — построение устойчивой дуги, соединяющей два таких диффеоморфизма. Рассматриваемые диффеоморфизмы являются диффеоморфизмами Палиса, который выделяет их как класс поверхностных диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток. Согласно результату С. Ньюхауса, М. Пейшото и Дж. Флейтас, все потоки Морса – Смейла на заданном многообразии соединяются устойчивой дугой. Однако этот факт нельзя использовать непосредственно для построения дуги между диффеоморфизмами, так как диффеоморфизмы Палиса включаются только в топологический поток. Идея построения устойчивой дуги между диффеоморфизмами Палиса основана на построении дуги без бифуркаций, соединяющей диффеоморфизм Палиса с диффеоморфизмом, являющимся сдвигом на единицу времени градиентного потока функции Морса.

Ключевые слова: Устойчивая дуга, диффеоморфизмы Палиса, седлоузел

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101

Ноздринова Елена Вячеславовна, к.м.н., Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"(Нижний Новгород, Россия); Elena Nozdrinova, PhD in Mathematics, (HSE University, Nizhny Novgorod, Russia)

Stable isotopy connection of Palis diffeomorphisms

In this talk, a class of gradient-like diffeomorphisms f on a closed orientable surface is considered, under the assumption that all non-wandering points of f are fixed and have a positive orientation type. The main result is a construction of a stable arc joining two such diffeomorphisms. The diffeomorphisms under the consideration are Palis diffeomorphisms, who highlights their as only surface diffeomorphisms included in topological flows. By S. Newhouse, M. Peixoto, and J. Fleitas result, all Morse–Smale flows on a given manifold are joined by a stable arc. However, this fact cannot be used directly to construct an arc between cascades, since Palis diffeomorphisms are included only in the topological flow. An idea of a stable arc construction between Palis diffeomorphisms is based on the construction of a bifurcation-free arc joining a Palis diffeomorphism with a diffeomorphism that is a one-time shift of a generic gradient flow of a Morse function.

Keywords: Stable arc, Palis diffeomorphisms, saddle-node

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса – Смейла) на многообразиях вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [9] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [4] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В том же году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [6] доказали существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса – Смейла. Из результата работы Ж. Флейтас [2] вытекает, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото всегда можно заменить на устойчивую [5].

Для диффеоморфизмов Морса – Смейла, заданных на многообразиях любой размерности известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. Препятствия появляются уже для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1, которые соединяются устойчивой дугой только в случае совпадения чисел вращения [7].

В размерности два появляются дополнительные препятствия к существованию устойчивых дуг между изотопными диффеоморфизмами. Они связаны с наличием периодических точек [1], [8] и гетероклинических пересечений [3].

В рамках доклада рассматривается класс $G(M^2)$ градиентно-подобных диффеоморфизмов f, заданных на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, в предположении, что все неблуждающие точки f неподвижны и имеют положительный тип ориентации.

Теорема 1. *Любые диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^2)$ соединяются устойчивой дугой с конечным числом типично проходящих некритических седло-узловых бифуркаций.*

Доказательство данного результата основано на построении дуги без бифуркаций соединяющей диффеоморфизм $f \in G(M^2)$ с диффеоморфизмом

$\phi_f \in G(M^2)$, который является сдвигом на единицу времени типичного градиентного потока ϕ_f^τ некоторой функции Морса. В силу работ [6], [2], [5] любые два таких потока соединяются дугой с конечным числом седло-узловых бифуркаций.

Литература

1. *Blanchard P.* Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces // Duke Mathematical Journal, **47**:1 (1980), 33-46.

2. *Fleitas G.* Replacing tangencies by saddle-nodes// Bol. Soc. Brasil. Mat., **8**:1 (1977), 47-51.

3. *Matsumoto S.* There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs // Inventiones mathematical, **51** (1979), 1-7.

4. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Stable arcs of diffeomorphisms //Bull. Amer. Math. Soc., **82**:3 (1976), 499-502.

5. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications mathematiques de l' I.H.E.S, **57** (1983), 5-71.

6. *Newhouse S., Peixoto M.* There is a simple arc joining any two Morse-Smale fows // Asterisque, **31** (1976), 15-41.

7. *Nozdrinova E.* Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle// Russian Journal of Nonlinear Dynamics, **14**:4 (2018), 543-551.

8. *Nozdrinova E., Pochinka O.* Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere// Discrete and Continuous Dynamical Systems, **41**:3 (2021), 1101-1131.

9. *Palis J., Pugh C.* Fifty problems in dynamical systems // Lecture Notes in Math., **468** (1975), 345-353.

МГНОВЕННОЕ РАЗРУШЕНИЕ VERSUS ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.А. Панин, М.О. Корпусов, И.К. Каташева

a-panin@yandex.ru

УДК 517.957

Для уравнения $\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 u+\sigma_1\Delta_2 u+\sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = |u|^q$ в зависимости от начальных данных и параметров уравнения получены результаты об: отсутствии решения, локальной разрешимости (с оценкой времени разрушения) и глобальной разрешимости.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, разрушение, мгновенное разрушение, локальная разрешимость, глобальная разрешимость

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-11-00042).

Панин Александр Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Panin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Maxim Korpusov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Каташева Индира Куатовна, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Indira Katasheva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Instantaneous blow-up versus local solvability of the Cauchy problem...

For the equation $\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 u + \sigma_1\Delta_2 u + \sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = |u|^q$, we establish instantaneous blow-up, local solvability (with the blow-up time estimate), and global solvability, depending on initial data and equation parameter.

Keywords: nonlinear differential equations, blow-up, instantaneous blow-up, local solvability, global solvability

Рассмотрим задачу Коши, классическая постановка которой имеет вид

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 u + \sigma_1\Delta_2 u + \sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = |u|^q \tag{1}$$

при $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ с начальным условием $u(x,0) = u_0(x)$. При некоторых предположениях она описывает нелинейные процессы в полупроводнике во внешнем постоянном магнитном поле с вектором индукции вдоль оси Ox_3.

При $1 < q \leqslant 3$ нами установлено отсутствие даже локального слабого решения задачи (1) для достаточно широкого класса начальных данных.

Теорема 1. *Пусть $u_0(x) \in U$. Тогда для $1 < q \leqslant 3$ не существует локального слабого решения задачи (1), или, как говорят, имеет место мгновенное разрушение.*

Здесь класс U состоит из всех функций $u_0(x)$ таких, что $u_0 \in H^2(O(x_0,R_0)) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ для некоторого шара $O(x_0,R_0) \subset \mathbb{R}^3$ и $\Delta_3 u_0(x) \neq 0$ на некотором подмножестве положительной меры шара $O(x_0,R_0)$.

Для $q > 3$ рассматриваемая задача имеет по крайней мере локальное по t решение.

Определение 1. Под классическим решением задачи (1) мы понимаем функцию $u(x,t)$ класса $\mathbb{C}_t^1([0,T];\mathbb{C}_x^2(\mathbb{R}^3))$ для некоторого $T > 0$, регулярную на бесконечности в следующем смысле:

$$\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right| \leqslant \frac{A_1(T)}{|x|}, \ \left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{A_2(T)}{|x|^2}, \quad |\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)| \leqslant \frac{A_3(T)}{|x|^q}$$

при $|x| \to +\infty$ равномерно по $t \in [0,T]$, $q > 3$, $k = 0,1$, и удовлетворяющую в классическом смысле уравнению

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u] \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 u + \sigma_1\Delta_2 u + \sigma_2 u_{x_3x_3} = |u|^q$$

и начальному условию $u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{C}_x^2(\mathbb{R}^3)$.

С помощью метода функции Грина и метода сжимающих отображений доказана следующая теорема о разрешимости:

Теорема 2. *Пусть $q > 3$. Тогда для любой функции $u_0(x) \in \mathbb{C}_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0,1]$ такой, что*

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{A_1}{(1+|x|^2)^{1/2}}, \ \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{A_2}{1+|x|^2}, \ |\Delta_3 u_0(x)| \leqslant \frac{A_3}{(1+|x|^2)^{q/2}},$$

найдётся такое $T_0 = T_0(u_0) > 0$, *что для всякого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение задачи Коши* (1) *в классе* $u(x,t) \in \mathbb{C}^1_t([0,T]; \mathbb{C}^2_x(\mathbb{R}^3))$, *причём либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и (в последнем случае) имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \sup_{x\in\mathbb{R}^3,\ t\in(0,T)} \left|(1+|x|^2)^{1/2}u(x,t)\right| = +\infty.$$

С помощью метода априорных оценок нами установлено, что при дополнительном условии $\frac{q-1}{\min\{\sigma_1,\sigma_2\}}B^{q-1} < 1$, где

$$B := \sup_{x\in\mathbb{R}^3,\ t\geqslant 0} (1+|x|^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y,t)|\Delta_3 u_0(y)|\, dy,$$

решение существует глобально. Здесь

$$\mathcal{E}(x,t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi|x|} \exp\left(-\frac{\sigma_1+\beta(x)}{2}t\right) I_0\left(\frac{\sigma_1-\beta(x)}{2}t\right)$$

— фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}$,

$$\beta(x) := \left(\sigma_2(x_1^2+x_2^2)+\sigma_1 x_3^2\right)/(x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

С другой стороны, если в условиях теоремы 2

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{\sigma_1}{2}\|\nabla_2 u_0\|_2^2 + \frac{\sigma_2}{2}\|u_{0x_3}\|_2^2 \leqslant \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^q u_0\, dx,$$

то классическое решение задачи (1) не существует глобально и время его существования удовлетворяет неравенству $T_0 \leqslant 1/(q-1)$. Мы доказываем это модифицированным методом Х. А. Левина.

О РАСПОЗНАВАНИИ ГРУПП ПО МНОЖЕСТВУ РАЗМЕРОВ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННОСТИ

В.В. Паньшин

v.pansh1n@yandex.ru

УДК 512.542

Для конечной группы G обозначим через $N(G)$ ее множество размеров классов сопряженности. Недавно был сформулирован следующий вопрос: верно ли, что для любой неабелевой конечной простой группы S и для любого $n \in \mathbb{N}$ равенство $N(G) = N(S^n)$ влечет изоморфизм $G \simeq S^n$ для любой конечной группы G с тривиальным центром? В докладе мы покажем, что ответ на этот вопрос положительный при $S \simeq A_5$ и $n = 3$; $S \simeq A_6$ и $n = 2$.

Ключевые слова: конечная группа, размеры классов сопряженности.

On recognition of groups by the set of conjugacy class sizes

For a finite group G denote by $N(G)$ the set of conjugacy class sizes of G. Recently the following problem was posed: Is it true that for each nonabelian finite simple group S and each $n \in \mathbb{N}$, if the equality $N(G) = N(S^n)$ implies an isomorphism $G \simeq S^n$, for a finite group G with trivial center? In the talk we show that there is a positive answer to this question, when $S \simeq A_5$ and $n = 3$; $S \simeq A_6$ and $n = 2$.

Keywords: finite group, conjugacy class sizes.

Для конечной группы G обозначим через $N(G)$ множество размеров классов сопряженных элементов этой группы, а через $Z(G)$ — ее центр. В 1987 году Дж. Томпсон сформулировал следующую гипотезу: пусть L — неабелева простая группа, G — конечная группа такая, что $Z(G) = 1$ и $N(G) = N(L)$, тогда $G \simeq L$. Позже А.С. Кондратьев добавил эту гипотезу в *Коуровскую тетрадь* [1, Вопрос 12.38]. Над доказательством этой гипотезы работал целый ряд математиков, а окончательный шаг был сделан И.Б. Горшковым в [2].

В докладе мы рассмотрим один из способов обобщить гипотезу Томпсона. Через G^n обозначим прямое произведение n копий группы G. Недавно Горшков поставил следующий

Вопрос [1, 20.29]. *Верно ли, что для любой неабелевой конечной простой группы S и для любого $n \in \mathbb{N}$ равенство $N(G) = N(S^n)$ влечет изоморфизм $G \simeq S^n$ для любой конечной группы G с тривиальным центром?*

На сегодняшний день вопрос остается открытым. При $n > 1$ было известно лишь, что ответ на этот вопрос положителен, если $S \simeq A_5$ и $n = 2$ [3]. В докладе будут представлены следующие результаты.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

Паньшин Виктор, Новосибирский государственный университет, ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия); Viktor Panshin (Novosibirsk State University, IM SB RAS, Novosibirsk, Russia)

Теорема 1 [4]. *Пусть G — конечная группа такая, что $Z(G) = 1$ и $N(G) = N(A_6 \times A_6)$, тогда $G \simeq A_6 \times A_6$.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа такая, что $Z(G) = 1$ и $N(G) = N(A_5 \times A_5 \times A_5)$, тогда $G \simeq A_5 \times A_5 \times A_5$.*

Литература

1. *E.I. Khukhro, V.D. Mazurov eds.* Unsolved problems in Group Theory: the Kourovka Notebook // arXiv:1401.0300 [math.GR] (https://kourovka-notebook.org) (2022).

2. *I.B. Gorshkov* On Thompson's conjecture for finite simple groups // Commun. Algebra, **47**:12 (2019), 5192-5206.

3. *I.B. Gorshkov* On characterization of a finite group by the set of conjugacy class sizes // J. Algebra Appl., https://doi.org/10.1142/S0219498822502267 (2021).

4. *V.Panshin.* On recognition of $A_6 \times A_6$ by the set of conjugacy class sizes // arXiv:2204.03368 [math.GR] (2022).

О ДИОФАНТОВЫХ СИСТЕМАХ С КВАДРАТИЧНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ ФОРМАМИ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ КОНГРУЭНЦИАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ

У.М. Пачев

urusbi@rambler.ru

УДК 511.5

Рассматривается вопрос об асимптотике числа решений диофантовых систем с квадратичной и линейной формами, удовлетворяющих конгруэнциальному условию, причём число неизвестных больше четырёх.

Ключевые слова: диофантова система, квадратичная и линейная формы, конгруэнциальное условие, особый ряд, асимптотическая формула.

On diophantine systems with quadratic and linear forms satisfying the congruential condition

Asymptotics of the number of solutions for diophantine systems with quadratic and linear forms satisfying the congruential condition is considered when the number of unknowns is greater than four.

Keywords: diophantine systems, quadratic and linear forms, congruential condition,

Пачев Урусби Мухамедович, д.ф.-м.н., профессор, с.н.с., Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова (Нальчик, Россия); Pachev Urusbi M. (Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nal'chik, Russia)

Аналитическая теория диофантовых уравнений берёт своё начало с проблемы Варинга — задачи о разрешимости диофантова уравнения $n = x_1^k + \cdots + x_s^k$ в целых неотрицательных числах.

В дальнейшем стали рассматривать системы диофантовых уравнений (см., например, И. М. Виноградов [1]).

Мы рассматриваем диофантову систему с квадратичной и линейной формами, удовлетворяющие конгруэнциальному уравнению (см. [2]).

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_s) = m, \\ l(x_1, \ldots, x_s) = n, \\ (x_1, \ldots, x_s) \equiv (b_1, \ldots, b_s) \pmod g, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

— целочисленная положительная квадратичная форма от s переменных, причём $s \geqslant 5$;

$$l(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{s} l_i\, x_i$$

— целочисленная линейная форма; $m > 0$, n — целые числа.

В проведённых ранее исследованиях, за исключением работы [2], по диофантовым системам конгруэнциальное условие не рассматривалось (см., например, [3]).

Нас интересует число решений $r_{g;\, b_1,\ldots,b_s}(f,\, m; l,\, n)$ этой системы. Для этой величины получена следующая асимптотическая при $N \to \infty$ формула.

Теорема 1. *Для числа решений $r_{g;\, b_1,\ldots,b_s}(f,\, m; l,\, n)$ диофантовой системы с квадратичной формой f и линейной формой l, удовлетворяющий конгруэнциальному условию по модулю g справедлива асимптотическая при $N \to \infty$ формула*

$$r_{g;\, b_1,\ldots,b_s}(f,\, m; l,\, n) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}} N^{\frac{s-3}{2}}}{\Delta^{\frac{s}{2}-1}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot H_{g;\, b_1,\ldots,b_s}(F,\, m_1'; l,\, n_1) + O\Big(\Delta^{2s-\frac{5}{4}+\frac{\varepsilon}{2}} N^{\frac{s-2}{4}+\varepsilon}\Big),$$

где $N = \frac{m_1'\,\Delta - g\, n_1'\, D}{g}$; $m_1' = m_1 - g\, a_{ss}\, n_1^2 - 2\, c_s\, n_1$; $\Delta = \overline{f}(l_1, \ldots, l_s)$;

$$c_s = \sum_{j=1}^{s} a_{sj}\, b_j,$$

$\overline{f}$ — алгебраически взаимная форме f; $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Вторая часть доклада относится к диофантовой системе вида:

$$\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_s^2 = m, \\ l_1\, x_1 + \cdots + l_s\, x_s = n, \\ (x_1, \ldots, x_s) \equiv (l_1, \ldots, l_s) \pmod g, \end{cases} \tag{2}$$

имеющий более специальный вид.

Отдельное рассмотрение такой системы обусловлено тем, что для неё удаётся вычислить особый ряд.

Пользуясь теоремой 1 в случае $f = x_1^2 + \cdots + x_s^2$, получаем следующий результат для числа решений системы (2).

Теорема 2. *При чётном s для числа решений системы* (2) *справедлива формула*

$$r_{g;\, b_1,\ldots,b_s}(m,\, l,\, n) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}} g^{s-1} N^{\frac{s-3}{2}}}{(g^{s-1}\Delta)^{\frac{s}{2}-1}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot H_{g;\, l_1,\ldots,l_s}(a,\, l,\, n) + O\Big(g^{s-1}\, N^{\frac{s-2}{4}+\varepsilon}\Big),$$

где $a = \frac{m-2n+\sum_{i=1}^{s} l_i^2}{g^2}$.

Замечание.

Особый ряд $H_{g;\, l_1,\ldots,l_s}(a,\, l,\, n)$ может быть точно выражен через число решений сравнения $y_1^2 + \cdots + y_s^2 \equiv a \pmod{p^t}$, которое даётся в [4].

Литература

1. Виноградов И.М. Об одном классе совокупных диофантовых уравнений//Изв. АН СССР, 1929, с.355-376.

2. Пачев У.М., Халилова Л.А. Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием // Матем. заметки, 111:5 (2022), с.726-737.

3. Walfisz A.A., Ü berdie similtane Darstellung zweier ganze Zahlen durch quadratische und lineare Formen // Acta Arithmetica XXXV (1979), s.289-301.

4. Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. Симметрические билинейные формы. -М.: «Наука». 1986. 176с.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ e^{-itH}, где $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V$

М.В. Платонова

mariyaplat@gmail.com

УДК 519.216

Предложен способ построения вероятностной аппроксимации в смысле сильной операторной сходимости оператора e^{-itH}, где $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V$. Аппроксимирующие операторы имеют вид математических ожиданий функционалов от некоторого точечного случайного поля.

Ключевые слова: Эволюционные уравнения, пуассоновские случайные меры, формула Фейнмана–Каца, уравнение Шрёдингера

Платонова Мария Владимировна, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН (Санкт-Петербург, Россия); Mariia Platonova (St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia)

Probabilistic approximation of the evolution operator e^{-itH}, where $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V$

We suggest a method for constructing a probabilistic approximation of the operator e^{-itH}, where $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V$ in the strong operator topology. The approximating operators take the form of expectations of functionals of a certain random point field.

Keywords: evolution equations, Poisson random measures, Feynman–Kac formula, Schrödinger equation

Хорошо известно, что для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности ($\sigma \in \mathbf{R}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sigma^2 V(x)u,\ u(0,x) = \varphi(x)$$

справедливо вероятностное представление

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi\big(x + \sigma w(t)\big)\exp\Big(-\sigma^2\int\limits_0^t V(x+\sigma w(s))\,ds\Big), \tag{1}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Начальная функция φ и потенциал V при этом предполагаются непрерывными и ограниченными.

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении число σ является комплексным, именно $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$. В этом случае уравнение имеет вид

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(x)u$$

и носит название уравнение Шрёдингера. Представление (1) в этом случае теряет смысл, так как мы должны подставить комплексную переменную в функцию вещественного аргумента.

В работе [1] был предложен метод построения аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с вещественным ограниченным потенциалом средними значениями функционалов от стохастических процессов. Аппроксимирующие операторы имели вид математических ожиданий функционалов от некоторого точечного случайного поля. Именно, перепишем формулу Фейнмана-Каца в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E}\int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}_0(dX)\prod_{\tau\in\mathcal{X}\cap(0,t)} U\big(x+\sigma w(\tau)\big)\varphi\big(x+\sigma w(t)\big), \tag{2}$$

где $U(x) = -iV(x)$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbf{R}_+)$ – пространство конфигураций на $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{P}_0$ – пуассоновская мера на $\mathcal{X}$, мера интенсивности которой есть мера Лебега. Каждая точка X пространства $\mathcal{X}$ представляет из себя некоторую строго возрастающую локально конечную последовательность положительных чисел $0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$.

Заметим, что регуляризацию невозможно построить путем аппроксимации функций φ, U целыми аналитическими функциями. Действительно, если предположить, что функции φ, U могут быть продолжены на всю комплексную плоскость до целой функции, то возникнут проблемы с существованием математического ожидания в (2), так как функция U ограничена на вещественной оси и, значит, в комплексной плоскости растет по крайней мере экспоненциально.

Для построения регуляризации вместо винеровского процесса использовалось семейство $\xi_\varepsilon^{(1)}(t)$ центрированных скачкообразных процессов Леви, с мерой Леви специального вида, сосредоточенной на положительной оси. Данное семейство процессов Леви при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к винеровскому процессу. Было показано, что построенная аппроксимация приближает e^{-itH} по норме в $L_2(\mathbf{R})$.

Мы построим аналогичную вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши для эволюционного уравнения

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\,\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + V(x)u, \quad u(0,x) = \varphi(x),$$

где потенциал V – вещественнозначная ограниченная функция. Аппроксимирующие операторы также имеют вид математических ожиданий функционалов от точечного случайного поля. В случае отсутствия потенциала ($V \equiv 0$), такая вероятностная аппроксимация решения была построена в работе [2].

Литература

1. *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* Вероятностная аппроксимация оператора эволюции // Функц. анализ и его прил., **52**:2 (2018), 25–39.

2. *Платонова М.В., Цыкин С.В.* Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка // Теор. вероятн. и ее примен., **65**:4 (2020), 710–724.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

М.Г. Плотников

mgplotnikov@gmail.com

УДК 517.518

Изучаются вопросы, связанные с восстановлением интегрируемых функций по их значениям на множествах малой меры. Исследуется, насколько точно можно узнать интегрируемую функцию f, заданную на p-ичной группе $\mathbb{G}_p$, по ее сужению на специальные множества $H \subset \mathbb{G}_p$ малой меры. Результат зависит от поведения интегральных модулей непрерывности функции f, а также от групповой структуры и метрических характеристик H.

Ключевые слова: гармонический анализ, p-ичные группы, системы Виленкина, модули непрерывности, восстановление функций

Recovery and approximation of integrable functions

Questions related to recovery of integrable functions from their values on sets of small measure are studied. We investigate how accurately a function f defined on a p-adic group $\mathbb{G}_p$ can be found by its restriction to special sets $H \subset \mathbb{G}_p$ of small measure. The result depends on the behavior of the integral modulus of continuity of the function f, as well as on the group structure and metric characteristics of H.

Keywords: harmonic analysis, p-adic groups, Vilenkin systems, modulus of continuity, function recovery

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с неатомической мерой μ. Обозначим $L^1(X, \mu)$ пространство интегрируемых по X относительно меры μ функций, факторизованное по множеству нулевых μ-почти всюду функций. Для $\delta > 0$ говорим, что множество $H \subset X$ является *δ-восстанавливающим множеством* для класса $\Lambda \subset L^1(X, \mu)$ если $\mu(H) < \delta$ и отображение $\mathrm{Compr}\colon \Lambda \to L^1(H, \mu)$, $\mathrm{Compr}(f) := f|_H$, инъективно. Здесь $f|_H$ — сужение функции $f \in L^1(X, \mu)$ на множество $H \subset X$. Другими словами, $H \subset X$ — δ-восстанавливающее множество для класса $\Lambda \subset L^1(X, \mu)$, если $\mu(H) < \delta$ и каждая функция $g \in L^1(H, \mu)$ может быть продолжена (восстановлена) до функции из класса Λ не более чем одним способом.

В [1] показано, что для любого класса интегрируемых функций, коэффициенты Фурье которых мажорирутся заранее заданной стремящейся к нулю последовательностью, существуют δ-восстанавливающие множества при любом $\delta > 0$. В [2] подобный результат был получен для классов, в которых коэффициенты Фурье рассматриваются относительно системы функций Виленкина (см. [3], [4]).

Обычно функции Виленкина рассматриваются на p-ичных группах; здесь мы приводим результаты в $[0, 1)$-настройках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Плотников Михаил Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Mikhail Plotnikov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Теорема 1 ([1]). *Пусть* $A := \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, $A_n \downarrow 0$,

$$L_A^1[0,1) := \big\{ f \in L^1[0,1)\colon |\widehat{f}_n| \leqslant A_n,\ n = 0,\,1,\,\ldots \big\},$$

$\widehat{f}_n$ *— коэффициенты Фурье–Виленкина функции* f. *Тогда для каждого* $\delta > 0$ *найдется* δ*-восстанавливающее для класса* $L_A^1[0,1)$ *множество* H.

Пусть $G_{q,k} := \bigcup \left[\frac{m}{p^k},\ \frac{m+1}{p^k}\right)$, объединение берется по всем m таким, что $m \in \{0,\ldots,p^k-1\}$ и $m = 0 \ \big(\mathrm{mod}\ p^{k-q}\big)$. Тогда множества H из теоремы 1 могут иметь вид

$$H = \bigcup_{s=t}^{\infty} G_{q(s),k(s)} \tag{1}$$

при подходящем выборе зависящих от A возрастающих последовательностей натуральных чисел $\{q(s)\}$ и $\{k(s)\}$, а также натурального t.

Возникает вопрос: насколько точно можно предсказать значение функции интегрируемой f на $[0,1)$, зная ее значения лишь на H? Чтобы ответить на него, для функции f мы строим ее прогноз $\widetilde{f}$ и оцениваем в интегральных нормах $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ возможное отклонение f от $\widetilde{f}$.

Зададим целые неотрицательные $r \leqslant q < k$. Каждой функции $f \in L^1[0,1)$ поставим в соответствие функцию $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x,r,q,k)$, равную при заданном x среднему значению функции f на множестве $G_{q,k} \cap \Delta_r(x)$, где $\Delta_r(x)$ — (единственный) полуинтервал вида $\left[\frac{m}{p^r},\ \frac{m+1}{p^r}\right)$, содержащий точку x. Функция $\widetilde{f}$ есть полином Виленкина степени не выше p^r и полностью определяется значениями функции f на множестве $G_{q,k}$.

Пусть $\overset{*}{\omega}_1$ и $\overset{*}{\omega}_2$ означают p-ичные интегральные модули непрерывности, соответствующие интегральным нормам $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ (см., напр. [3], § 2.3).

Теорема 2. *Если* $f \in L^1[0,1)$, *то*

$$\big\| f - \widetilde{f} \big\|_1 \leqslant C_p \bigg(\overset{*}{\omega}_1\Big(\frac{1}{p^r}, f\Big) + p^{-q+r} \sum_{j=q+1}^{k} p^j \overset{*}{\omega}_1\Big(\frac{1}{p^j}, f\Big) \bigg).$$

Для $f \in L^2[0,1)$ *верна оценка*

$$\big\| f - \widetilde{f} \big\|_2 \leqslant D_p \bigg(\overset{*}{\omega}_2\Big(\frac{1}{p^r}, f\Big) + p^{-q+r/2} \sum_{j=q+1}^{k} p^j \overset{*}{\omega}_2\Big(\frac{1}{p^j}, f\Big) \bigg).$$

Здесь величины C_p *и* D_p *зависят от* p *и не зависят от* f, r, q *и* k.

Теорема 3. *Для всякой функции* $f \in L^1[0,1)$ *найдутся последовательности натуральных чисел* $\{r(s)\}$, $\{q(s)\}$ *и* $\{k(s)\}$ *такие, что* $r(s) \leqslant q(s) < k(s)$ *для всех* s, $\sum\limits_s p^{q(s)-k(s)} < \infty$ *и* $\lim\limits_{s\to\infty} \big\| f(x) - \widetilde{f}(x, r(s), q(s), k(s)) \big\|_1 = 0$.

Все значения $\widetilde{f}(x, r(s), q(s), k(s))$ полностью определяются значениями функции f на множестве H из (1), а условие $\sum\limits_s p^{q(s)-k(s)} < \infty$ означает, что H имеет сколь угодно малую меру при достаточно больших t.

Литература

1. *Плотников М.Г.* Задачи восстановления интегрируемых функций и тригонометрических рядов // Матем. сб., **212**:6 (2021), 109-125.

2. *Плотников М.Г., Асташонок В.С.* Восстановление функций на p-ичных группах // Матем. заметки, **112**:6 (2022) (в печати).

3. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение —М.: Наука, 1987.

4. *Schipp F., Wade W.R., Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis — Budapest: Academiai Kiado, 1990.

ТОПОЛОГИЯ РАСПАДАЮЩИХСЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Г.М. Полотовский

polotovsky@gmail.com

УДК 512.772, 515.165.4

Рассматривается относящаяся по тематике к первой части 16-й проблемы Гильберта задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых, распадающихся на неприводимые сомножители. Даётся обзор полученных в последние три года автором и его учениками результатов о кривых степени 7, распадающихся на три сомножителя, и о кривых степени 8, распадающихся на два сомножителя.

Ключевые слова: 16-я проблема Гильберта, распадающиеся плоские вещественные алгебраические кривые

Topology of decomposable real algebraic curves

The problem of isotopic classification of plane real algebraic curves decomposing into irreducible factors, which belongs to the first part of Hilbert's 16th problem, is in consideration. A review of the results obtained in the last three years by the author and his students about curves of degree 7 decomposing into three factors, and about curves of degree 8 decomposing into two factors is given.

Keywords: Hilbert's 16th problem, decomposable plane real algebraic curves

---

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Полотовский Григорий Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Grigory Polotovskiy (National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia)

Плоской вещественной алгебраической кривой (ниже – кривая) C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, где $(x_0 : x_1 : x_2)$ – координаты в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$; $\mathbb{R}C_m = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 | C_m(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ называется множеством вещественных точек кривой C_m.

Вопрос о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ в случае неособой кривой, включённый Д. Гильбертом в первую часть его 16-й проблемы, был решён Д.А. Гудковым [1] в 1969 г. В предисловии к [1] Гудков поставил задачу о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ для случая, когда кривая C_6 распадается в произведение двух M-кривых (неособая кривая C_m называется M-кривой, если $\mathbb{R}C_m$ имеет максимально возможное для данной степени m число компонент связности, равное $(m-1)(m-2)/2+1$ согласно теореме Харнака). Эта задача была решена в [2], а затем для случая, когда число сомножителей больше двух – в [3]. Начиная с середины 1980-х годов рассматривается аналогичная задача о кривых C_7, распадающихся в произведение двух M-кривых, решение которой благодаря усилиям многих авторов близко к завершению; также была найдена классификация взаимных расположений M-кривой степени 5 и пары прямых (библиография работ этого периода приведена в [4]).

В докладе даётся обзор полученных в последнее время результатов (частично опубликованных в [4] – [8]) в аналогичных классификационных задачах: а) о кривых C_7, распадающихся в произведение пары M-коник и M-кубики; б) о кривых C_8, распадающихся в произведение двух M-кривых: б1) коники и секстики; б2) кубики и квинтики; б3) двух квартик. Без наложения дополнительных условий все эти задачи труднообозримы, поэтому всюду предполагаются выполненными условия максимальности и общего положения: каждые две кривые-сомножители пересекаются трансверсально в максимально возможном по теореме Безу числе точек, и все эти точки расположены на одной компоненте связности каждой из кривых-сомножителей. Но и при этих предположениях задача остаётся слишком объёмной, поэтому рассматриваемые случаи делятся на серии, выделяемые условиями комбинаторного характера.

Схема исследования во всех случаях следующая: сначала перечисляются топологические модели кривых данной серии, удовлетворяющие наложенным условиям, топологическим следствиям теоремы Безу и следствиям известных результатов о топологии неособых алгебраических кривых. Затем для каждой модели из полученного списка делается попытка либо доказать её нереализуемость алгебраической кривой данной степени с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, либо построить её алгебраическую реализацию с помощью различных вариантов метода малого параметра, включая предложенный О.Я. Виро patchworking и его обобщения.

Результаты имеют вид списков попарно различных топологических моделей построенных расположений и расположений, для которых доказана их нереализуемость алгебраическими кривыми данной степени. Привести здесь эти результаты невозможно из-за недостатка места. В качестве примера приведём статистику результатов для подслучая задачи а), рассмотренного в [6]: из подлежащих изучению 62 топологических моделей 9 моделей реализованы, для 49 моделей доказана их нереализуемость, вопрос о реализуемости 5 оставшихся моделей пока открыт.

Литература

1. *Гудков Д.А., Уткин Г.А.* Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Уч. зап. Горьков. ун-та. Вып.87 (1969), 1-214.

2. *Полотовский Г.М.* Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. **236**:3 (1977), 548–551.

3. *Kuzmenko T.V., Polotovskii G.M.* Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // Translations of the American Mathematical Society. Series 2. Vol.173 (1996), 165-178.

4. *Борисов И.М., Полотовский Г.М.* О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. Т.176 (2020), 3-18.

5. *Горская В.А., Полотовский Г.М.* О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал СВМО. Т.22. №1 (2020), 24-37.

6. *Горская В.А.* О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник. Т.23, вып.3(84) (2022), 61-76.

7. *Борисов И.М.* Построение некоторых взаимных расположений M-кубики и M-квинтики // Чебышевский сборник. Т.22, вып.1 (2021), 76-91.

8. *Пучкова Н.Д.* О взаимных расположениях двух M-кривых степени 4 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. (2022, в печати).

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А.Ю. Попов, Т.Ю. Семенова

station@list.ru

УДК 517.5

Уточняется оценка скорости сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации.

Ключевые слова: функции ограниченной вариации, ряд Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Попов Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., внс, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Anton Popov, Lomonosov Moscow State University and Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics, (Moscow, Russia)

Семенова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Tatiana Semenova, Lomonosov Moscow State University and Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics, (Moscow, Russia)

Refinement of the estimate for the rate of uniform convergence of the Fourier series of a continuous periodic function of bounded variation

An estimate for the rate of convergence of the Fourier series of a continuous periodic function of bounded variation is refined.

Keywords: functions of bounded variation, Fourier series.

Введём обзначения: $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| \bigm| x \in \mathbb{R}\}$; $CV_{2\pi}$ – подпространство $C_{2\pi}$, состоящее из всех функций, имеющих ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$, $V(f)$ – значение этой вариации; модуль непрерывности

$$\omega(f;\, h) = \max_{0 \leqslant |\, t\,| \leqslant h} \|\Delta_t f\|, \text{ где } \Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x). \tag{1}$$

Через $r_n(f)$ обозначим разность между f и её n-й частичной суммой ряда Фурье по тригонометрической системе.

В 1881 году К. Жордан [1] для любой $f \in CV_{2\pi}$ доказал стремление к нулю $\|r_n(f)\|$ при $n \to \infty$. В 1952 году С.Б. Стечкин [2] (его результат уточнил С.А. Теляковский [3]) дал оценку скорости сходимости:

$$\|r_n(f)\| = O\left[\omega\left(f;\, \frac{\pi}{n}\right) \ln\left(\frac{V(f)}{\omega(f;\, \frac{\pi}{n})}\right)\right], \ \ f \in CV_{2\pi}, \ f \not\equiv const.$$

В.В. Жук ([4], стр. 241) вывел оценку сверху $\|r_n(f)\|$ для произвольной функции $f \in C_{2\pi}$, учитывающую "малость" наилучших приближений $E_{n,p}(f)$ функции f по L^p-норме тригонометрическими полиномами порядка не выше n. Результат получен В.В. Жуком для модулей непрерывности произвольных порядков. Мы приведём его оценку в частном случае, когда рассматривается модуль непрерывности (1).

Пусть $f \in C_{2\pi}, f \not\equiv const$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (1, +\infty)$. Тогда верно неравенство

$$\|r_n(f)\| \leqslant \omega\left(f;\, \frac{\pi}{n+1}\right) \left[\frac{2}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{2E_{n,p}(f)}{\omega(f;\, \frac{\pi}{n+1})}\right)^p\right) + C(p)\right], \tag{2}$$

в котором

$$C(p) = 2R_2 + 2.5 + \tfrac{\pi}{4}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty} \left(\tfrac{u - \sin u}{u^2}\right)^q du\Bigg)^{1/q}, \quad q = p/(p-1),$$

а R_2 – оптимальная константа в оценке сверху приближения функции средними Рисса порядка 2 через её второй модуль непрерывности (см. [4], стр. 236). Значение $p = 1$ В.В. Жук не рассмотрел, однако переход в (2) к значению $p = 1$ возможен. Анализ доказательства неравенства (2) и численная оценка сверху R_2, согласно имеющимся в [4] рассуждениям, дают

$$\|r_n(f)\| \leqslant \omega\Big(f;\, \frac{\pi}{n+1}\Big) \left[\frac{2}{\pi^2} \ln\left(1 + \frac{2nE_{n,1}(f)}{\omega(f;\, \frac{\pi}{n+1})}\right) + 9.5\right].$$

А так как согласно теореме С.Б. Стечкина [5] об оценке $E_{n,p}$ через интегральный модуль непрерывности и оценке последнего через вариацию функции ([4], стр. 110)

$$2nE_{n,1}(f) \leqslant 3\pi V(f) \quad \forall f \in C_{2\pi}, \quad f \not\equiv const, \quad n \in \mathbb{N},$$

то получаем неравенство

$$\|r_n(f)\| \leqslant \omega\Big(f;\ \frac{\pi}{n+1}\Big) \left[\frac{2}{\pi^2} \ln\left(1 + \frac{3\pi V(f)}{\omega(f;\ \frac{\pi}{n+1})}\right) + 9.5\right].$$

Именно это следствие из результатов В.В. Жука, нигде в математической литературе нам не встретившееся, мы и уточняем. Нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $f \in CV_{2\pi}$*,* $f \not\equiv const$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Тогда верно неравенство*

$$\|r_n(f)\| < \omega_n(f) \left[\frac{2}{\pi^2} \ln\left(\frac{V(f)}{\omega_n(f)}\right) + 1.31\right], \text{ где } \omega_n(f) = \omega\Big(f;\ \frac{\pi}{1.5(n+0.5)}\Big).$$

Теорема 2. *Для любых чисел* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geqslant 2$*, и* $\omega_n \in [1/n,\ 1/2]$ *существует функция* $\varphi_n \in CV_{2\pi}$*, обладающая следующими свойствами:* $\omega_n(\varphi) = \omega_n$*,* $|r_n(\varphi,\ 0)| > \omega_n \left(\frac{2}{\pi^2} \ln\left(\frac{V(\varphi)}{\omega_n}\right) + 0.31\right)$*.*

Величина $\omega_n(f)$ была введена С.Б. Стечкиным и В.Т. Гаврилюк [6] в связи с доказанным ими неравенством

$$\|r_n(f)\| \leqslant \omega_n(f)\ \frac{L_n + 1}{2} \quad \forall f \in C_{2\pi}, \quad f \not\equiv const, \quad n \in \mathbb{N},$$

в котором L_n — n-я константа Лебега тригонометрической системы.

Литература

1. *C. Jordan.* C. r. Acad. sci. 1881, t. 92, p. 228-230.

2. *С.Б. Стечкин.* О приближении непрерывных функций суммами Фурье // УМН, 1952, том 7, выпуск 4, с. 139-141.

3. *С.А. Теляковский.* О работах С.Б. Стечкина по приближению периодических функций полиномами // Фундаментальная и прикладная математика, 1997, том 3, выпуск 4, с. 1059-1068.

4. *В.В. Жук.* Аппроксимация периодических функций, Ленинград: издательство ЛГУ, 1982.

5. *С.Б. Стечкин.* Замечание к теореме Джексона // Приближение функций в среднем, Сборник работ, Труды МИАН СССР, 1967, том 88, с. 17–19.

6. *В.Т. Гаврилюк, С.Б. Стечкин.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Труды МИАН СССР, 1985, том 172, с. 107-127.

О ЗАДАЧАХ НАЗНАЧЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С.Н. Попова

udsu.popova.sn@gmail.com

УДК 517.926, 517.977

Рассматривается задача назначения спектра показателей Ляпунова линейной управляемой системы под действием линейного по фазовым переменным управления. Получены достаточные условия, которые гарантируют возможность построения управления, обеспечивающего совпадение спектра показателей замкнутой системы с произвольным допустимым набором чисел. Для получения необходимых условий применена концепция оболочки Бебутова управляемой системы, то есть замыкания (в топологии равномерной сходимости на отрезках) множества сдвигов этой системы.

Ключевые слова: линейная управляемая система, показатели Ляпунова, оболочка Бебутова

On the problems of assigning the asymptotics of solutions of linear systems

We consider the problem of assignment of the Lyapunov spectrum of a linear control system under the action of a linear in phase variables control. We obtain sufficient conditions that guarantee the possibility of constructing a control that ensures the coincidence of the Lyapunov spectrum of a closed-loop system with an arbitrary admissible set of numbers. To obtain the necessary conditions we apply the concept of the Bebutov hull of a control system, i.e. the closure (in the topology of uniform convergence on segments) of the shift set of this system.

Keywords: linear control system, Lyapunov spectrum, Bebutov hull

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова [1] свободной системы (то есть системы (1) с нулевым управлением)

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

обозначим $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. Управление $u(\cdot)$ в системе (1) выберем в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, получим замкнутую систему вида

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20–01–00293) и Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010 “Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем”).

Попова Светлана Николаевна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет (Ижевск, Россия); Svetlana Popova (Udmurt State University, Izhevsk, Russia)

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3). Будем говорить, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (3), если матрица $U(\cdot)$ кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$. Пусть зафиксировано некоторое допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для замкнутой системы (3) с выбранным управлением $U(\cdot)$ определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU)$.

Определение 1 [2]. Будем говорить, что система (3) обладает свойством: *локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого набора чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, удовлетворяющих неравенству $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |\mu_i - \lambda_i(A)| \leqslant \delta$, существует допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\| \leqslant \varepsilon$ и

$$\lambda_i(A+BU) = \mu_i,\ i = 1,\ldots,n; \tag{4}$$

глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова, если для любого набора чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ существует допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что выполнены равенства (4).

Теорема 1. *Пусть $n = 2$. Если система* (1) *равномерно вполне управляема* [3]*, то полный спектр показателей Ляпунова системы* (3) *локально управляем и глобально управляем.*

Теорема 2. *Пусть полный спектр показателей Ляпунова системы* (2) *устойчив* [1]*. Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то полный спектр показателей Ляпунова системы* (3) *локально управляем.*

Заметим, что утверждения, обратные теоремам 1 и 2, в общем случае неверны. Для доказательства необходимых условий управляемости полного спектра показателей Ляпунова введем понятие оболочки Бебутова линейной управляемой системы (1). Систему (1) отождествим с функцией $t \mapsto \sigma(t) \doteq \big(A(t), B(t)\big) \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$. Обозначим $\sigma_s(t) \doteq \sigma(t+s)$ — сдвиг σ на $s \in \mathbb{R}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma)$ — замыкание множества $\{\sigma_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{N}\}$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Метрика в $\mathfrak{R}(\sigma)$ может быть задана равенством $\rho(\widetilde{\sigma}, \widehat{\sigma}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\{\|\widetilde{\sigma}(t) - \widehat{\sigma}(t)\|, |t|^{-1}\}$. Пространство $(\mathfrak{R}(\sigma), \rho)$ компактно. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы σ. Каждую функцию $\widehat{\sigma}(\cdot) = \big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma)$ отождествим с линейной управляемой системой $\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, и рассмотрим соответствующую замкнутую систему

$$\dot{x} = \big(\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Теорема 3. *Если для каждой функции $\widehat{\sigma}(\cdot) = \big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma)$ замкнутая система* (5) *обладает свойством глобальной управляемости спектра Ляпунова, то система* (1) *равномерно вполне управляема.*

Теорема 4. *Пусть полный спектр показателей Ляпунова системы* (2) *устойчив. Если для каждой функции $\widehat{\sigma}(\cdot) = \big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma)$ замкнутая система* (5) *обладает свойством локальной управляемости спектра Ляпунова, то система* (1) *равномерно вполне управляема.*

Литература

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.

2. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. — Мн.: Белорусская наука, 2012.

3. *Kalman R.E.* Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana, **5**:1 (1960), 102-119.

НЕОСОБЫЕ ПОТОКИ МОРСА – СМЕЙЛА С ТРЕМЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ 3-МНОГООБРАЗИЯХ

О.В. Починка, Д.Д. Шубин

olga-pochinka@yandex.ru, schub.danil@yandex.ru

УДК 517.518

Топологической эквивалентности неособых потоков Морса – Смейла в предположениях различной общности посвящен целый ряд статей. Однако, в случае малого числа орбит известные инварианты можно значительно упростить и, главное, довести задачу классификации до реализации, описав допустимость полученных инвариантов. В недавней работе была получена исчерпывающая классификация потоков с двумя орбитами на произвольных замкнутых n-многообразиях. В настоящей статье полная топологическая классификация получена для потоков с тремя периодическими орбитами, заданных на ориентируемых 3-многообразиях.

Ключевые слова: потоки Морса – Смейла, неособые потоки, топологическая классификация

Non-singular morse-smale flows with three periodic orbits on orientable 3-manifolds

The topological equivalence of non-singular Morse-Smale flows under assumptions of various generalities is considered in a number of papers. However, in the case of a small number of orbits, the known invariants can be significantly simplified and, most importantly, the classification problem can be brought to realization by describing the admissibility of the obtained invariants. In a recent paper, an exhaustive classification of flows with two orbits on arbitrary closed n-manifolds was obtained. In this talk, a complete topological classification is obtained for flows with three periodic orbits given on orientable 3-manifolds.

Keywords: Morse-Smale flows, nonsingular flows, topological classification

---

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101.

Починка Ольга Витальевна, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород, Россия); Olga Pochinka (National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia)

Шубин Данила Денисович, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород, Россия); Danila Shubin (National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia)

В настоящей работе рассматриваются, так называемые *НМС-потоки* f^t, то есть *неособые* (без неподвижных точек) потоки Морса – Смейла, заданные на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3. Неблуждающее множество такого потока состоит из конечного числа периодических гиперболических орбит.

Рассмотрим класс $G_3^-(M^3)$ НМС-потоков $f^t\colon M^3 \to M^3$ с единственной седловой орбитой, в предположении, что она является скрученной. Поскольку несущее многообразие M^3 является объединением устойчивых (неустойчивых) многообразий всех своих периодических орбит, то поток $f^t \in G_3^-(M^3)$ необходимо имеет хотя бы одну притягивающую и хотя бы одну отталкивающую орбиты. Мы устанавливаем следующий факт.

Далее не уменьшая общности будем полагать, что трубчатые окрестности V_S, V_A, V_R седловой, притягивающей и отталкивающей орбит попарно не пересекаются. Пусть $\mathcal{O} \in \{S, A, R\}$. Выберем на торе $T_{\mathcal{O}} = \partial V_{\mathcal{O}}$ *меридиан* $M_{\mathcal{O}}$ (кривую, гомотопную нулю на $V_{\mathcal{O}}$ и существенную на $T_{\mathcal{O}}$) и параллель $L_{\mathcal{O}} \subset T_{\mathcal{O}}$ (кривую, гомологичную орбите $\mathcal{O}$). Будем считать, что меридиан $M_{\mathcal{O}}$ ориентирован так, что пара ориентированных кривых $M_{\mathcal{O}}, L_{\mathcal{O}}$ задает внешнюю сторону границы полнотория. Таким образом, гомотопические типы $\langle L_{\mathcal{O}}\rangle = \langle 1, 0\rangle$, $\langle M_{\mathcal{O}}\rangle = \langle 0, 1\rangle$ узлов $L_{\mathcal{O}}$, $M_{\mathcal{O}}$ являются образующими гомотопических типов $\langle K\rangle$ ориентированных узлов K на торе $T_{\mathcal{O}}$:

$$\langle K\rangle = \langle l_{\mathcal{O}}, m_{\mathcal{O}}\rangle = l_{\mathcal{O}}\langle L_{\mathcal{O}}\rangle + m_{\mathcal{O}}\langle M_{\mathcal{O}}\rangle, \tag{1}$$

где $l_{\mathcal{O}}$, $m_{\mathcal{O}} \in \mathbb{Z}$ – число оборотов ориентированного узла K вокруг параллели и меридиана, соответственно.

Поскольку тор T_A является секущей для всех траекторий потока, кроме траекторий множества $A \cup W^s_S \cup R$ и секущей для траекторий $W^u_S \setminus S$ является окружность, то множество $K_A = W^u_S \cap T_A$ является узлом на торе T_A, который мы полагаем ориентированным согласованно с ориентацией на седловой орбите. Запишем гомотопический тип узла K_A на торе T_A в виде

$$\langle K_A\rangle = \langle l_A, m_A\rangle.$$

Аналогичным образом множество $K_R = W^s_S \cap T_R$ является ориентированным узлом на торе T_R с гомотопическим типом

$$\langle K_R\rangle = \langle l_R, m_R\rangle.$$

Кроме того, каждая траектория потока f^t, проходящая через точку $x_{_R} \in (T_R \setminus K_R)$ пересекает множество $T_A \setminus K_A$ в единственной точке $x_{_A}$, порождая *потраекторный гомеоморфизм* $\psi_{_{RA}} : T_R \setminus K_R \to T_A \setminus K_A$.

Узлы K_A, K_R либо оба стягиваемы, либо оба существенны. По потоку $f^t \in G_3^-(M^3)$ определим четверку целых чисел

$$C_{f^t} = (l_1, m_1, l_2, m_2)$$

следующим образом:

- если узлы K_A, K_R существенны, то,

$$C_{f^t} = (l_A, m_A, l_R, m_R);$$

- если узлы K_A, K_R стягиваемы и диск, ограниченный узлом K_A на торе T_A остается справа (слева) при его обходе, то

$$C_{f^t} = (0, 0, a, b),$$

где $\langle a, b\rangle = \psi_{_{RA*}}\langle 0, 1\rangle$ ($\langle a, b\rangle = \psi_{_{RA*}}\langle 0, -1\rangle$)

Заметим, что непосредственно из определения набора $C_{f^t} = (l_1, m_1, l_2, m_2)$ следует, что l_i, m_i, $i \in \{1, 2\}$ – взаимно простые числа, если $|l_i| + |m_i| \neq 0$.

В настоящей работе установлен топологический тип ориентируемых многообразий M^3, допускающих потоки класса $G_3^-(M^3)$.

Теорема 1. *Пусть поток $f^t \in G_3^-(M^3)$ имеет инвариант $C_{f^t} = (l_1, m_1, l_2, m_2)$, тогда*

- *если $l_1 \cdot l_2 = 0$, то M^3 гомеоморфно линзовому пространству L_{l_2,m_2};*
- *если $l_1 \cdot l_2 \neq 0$, то M^3 гомеоморфно многообразию Зейферта $M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l_1, \beta_1), (l_2, \beta_2))$, где β_i — решение сравнения $\beta_i m_i \equiv 1 \pmod{l_i}$, $i = 1, 2$. Ни одно из этих многообразий не является линзовым пространством.*

Литература

1. *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse-Smale flows //Annals of Mathematics. – 1975. – Т. 102. – №. 1. – С. 41-54.

2. *Pochinka O. V. and Shubin D. D.* Non-singular Morse–Smale flows on n-manifolds with attractor–repeller dynamics //Nonlinearity. – 2022. – Т. 35. – №. 3. – С. 1485.

3. *Ya. L. Umanskii.* Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories //Matematicheskii Sbornik. – 1990. – Т. 181. – №. 2. – С. 212-239.

4. *Шубин Д. Д.* Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 29. – №. 6. – С. 863-868.

5. *Починка О. В., Шубин Д. Д.* Неособые потоки Морса–Смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях //Математические заметки. – 2022. – Т. 112. – №. 3. – С. 426-443.

СТАБИЛЬНОСТЬ И НЕСТАБИЛЬНОСТЬ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С МЕХАНИЗМОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОДПИТКИ

А.В. Резлер, М.Г. Чебунин
rezlers123@gmail.com, chebuninmikhail@gmail.com

УДК 519.21

В статье изучается обобщение модели классической синхронизированной системы случайного множественного доступа с одним передающим прибором, управляемой протоколом передачи данных ALOHA и дополнительно снабженной механизмом энергетической подпитки. Основное обобщение состоит в предположении, что сообщения могут принимать неограниченное количество энергии.

Ключевые слова: цепи Маркова, протоколы ALOHA, обобщенный критерий Фостера, эргодичность, невозвратность

Stability and instability of a random multiple access system with an energy harvesting mechanism

We introduce a generalisation of the model of the classical synchronised multiple access system with a single transmission channel controlled by a randomised transmission protocol (ALOHA) and additionally equipped with an energy harvesting mechanism. The generalisation is the assumption that messages may receive an unlimited amount of energy.

Keywords: Markov chains, ALOHA algorithm, energy harvesting, generalised Foster criterion, ergodicity, transience

В данной работе мы изучаем обобщение модели, исследованной в работе С.Г. Фосса, Д.К. Кима и А.М. Тюрликова [1]. Доклад основан на результатах работы А.В. Резлера и М.Г Чебунина [2]. В статье [1] были получены условия стабильности и нестабильности для классической синхронизированной системы случайного множественного доступа с одним передающим прибором, управляемой протоколом передачи данных ALOHA и дополнительно снабженной механизмом энергетической подпитки. Основное отличие модели, рассмотренной в статье [2], заключается в том, что каждое сообщение имеет аккумулятор неограниченной вместимости, тогда как в работе [1] аккумулятор имеет только одну ячейку для хранения энергии. Основной результат работы [2] заключается в том, что области стабильности и нестабильности системы не зависят от вместимости аккумуляторов.

Приведем математическое описание модели. Время слотировано. Пусть ξ_n — случайная величина, определяющая количество сообщений, поступивших в накопитель системы в течении интервала времени $[n-1, n)$. Далее

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Резлер Александр Вадимович, НГУ (Новосибирск, Россия); Alexandr Rezler (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Чебунин Михаил Георгиевич, к.ф.-м.н., технологический институт Карлсруэ (Карлсруэ, Германия); Chebunin Michail (Karlsruhe Institute of Technology, Germany)

предполагаем, что $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ образует последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) неотрицательных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием $\lambda \in (0,1)$. Каждое сообщение снабжено батареей с неограниченным количеством ячеек для хранения энергии и прибывает в накопитель системы с пустой батареей. Механизм энергетической подпитки в каждый временной слот можно описать следующим образом: каждое сообщение, имеющее в начале временного слота батарею, заряженную на i ячеек будет передано на передающий прибор с вероятностью $1-p^i$ или останется в системе с вероятностью p^i, а также, после передачи, каждое сообщение, независимо от остальных параметров системы, получит одну единицу энергии с вероятностью $\mu > 0$. Затем, если в заданный временной интервал на передающий прибор поступило только одно сообщение, то оно покидает систему. Если на передающий прибор поступило два или более сообщений, то происходит наложение (конфликт) и передававшиеся сообщения возвращаются в систему, но теряют одну ячейку энергии. Пусть q_n — сообщения, которые уже находились в накопителе системы и $v_n^{(i)}$ — сообщения, имеющие i единиц энергии к началу данного временного слота. Заметим, что $\sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} \leqslant q_n$ п.н.

Пусть $B_n^{(j)}(k,1-p)$ и $\widetilde{B}_n^{(j)}(k,1-p)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, $j \geqslant 1$, два взаимно независимых семейства случайных величин, имеющих биномиальное распределение и независимых от остальных параметров системы. Обозначим через $D_n^{(j)}(k,p) = k - B_n^{(j)}(k,1-p)$. Пусть $I_p^n = I\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_n^{(i)}\left(v_n^{(i)}, 1-p^i\right) = 1\right)$, то есть I_p^n — индикатор события, состоящего в том, что в n-ый момент времени произошла успешная передача сообщения. Мы изучаем следующую стохастическую последовательность.

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p(n) + \xi_n, \\ \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p) + \widetilde{B}_n^{(1)}(q_n - \sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} + \xi_n, \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}_n^{(2)}(v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p), \mu(q_n)) + B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2)\cdot(1-I_p(n)) \\ \\ v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)} - B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2) + \widetilde{B}_n^{(2)}(v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p), \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}_n^{(3)}(v_n^{(2)} - B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2), \mu(q_n)) + B_n^{(3)}(v_n^{(3)}, 1-p^3)\cdot(1-I_p(n)) \\ \ldots \end{cases}$$

Не трудно понять, что последовательность образует цепь Маркова. Для нее доказана следующая

Теорема. *Если, для некоторой константы $c > 0$, $\mu(q)$ имеет вид*

$$\mu(q) = \begin{cases} \min(c/q, 1), & q \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{0\} \\ 1, & q = 0 \end{cases}$$

тогда цепь Маркова стабильна при входной интенсивности $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильна при $\lambda > ce^{-c}$.

Литература

1. *S. Foss, D. Kim, A. Turlikov*, Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting, Siberian Electronic Mathematical Reports, 13 (2016), 16–25. MR3506879

2. *Rezler A., Chebunin M.*, Stability and instability of a random multiple access system with an energy harvesting mechanism, Siberian Electronic Mathematical Reports, 19:1 (2022), pp. 1-17.

ПРОЦЕССЫ КОНЦЕНТРАЦИИ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Ю.Г. Рыков

yu-rykov@yandex.ru

УДК 517.956

Характерным свойством обобщенных решений системы уравнений газовой динамики без давления в многомерном случае является возникновение сильных особенностей на многообразиях разной размерности. Это свойство обозначим как существование иерархии особенностей. Оказывается, что в двумерном случае иерархию особенностей можно описать единообразно, в форме вариационного принципа. Предлагаемое построение является прямым обобщением известного вариационного принципа в одномерном случае.

Ключевые слова: газовая динамика без давления, концентрация вещества, иерархия особенностей, вариационный принцип

Concentration processes in a two-dimensional system of pressureless gas

A characteristic property of generalized solutions of the system of pressureless gas in the multidimensional case is the occurrence of strong singularities on manifolds of different dimensions. We denote this property as the existence of a hierarchy of singularities. It turns out that in the two-dimensional case, the hierarchy of singularities can be described uniformly, in the form of a variational principle. The proposed construction is a direct generalization of the well-known variational principle in the one-dimensional case.

Keywords: pressureless gas dynamics, substance concentrations, hierarchy of singularities, variational principle

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-30004).

Рыков Юрий Германович, к.ф.-м.н., ИПМ имени М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Yuri Rykov (Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia)

Пусть $\mathbf{x} \equiv (x, y)$, $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, тогда двумерная система уравнений газовой динамики без давления выглядит следующим образом

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \varrho \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = 0 \ , \tag{1}$$

где $\varrho > 0$ имеет смысл плотности вещества, $\mathbf{u} \equiv (u, v)$ – вектор скорости, а $\otimes$ обозначает тензорное произведение. Пусть $\varrho(0, \mathbf{x}) = \varrho_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

Вследствие нестрогой гиперболичности (1) ее решения понимаются в смысле мер, см., например, [1]. Система (1) допускает формирование сильных особенностей в виде разрывов скорости и одновременной концентрации вещества (т.е. формирование δ-функций) на кривых в координатах Эйлера. Кроме того, допустима ситуация взаимодействия таких кривых и формирования особенности плотности в виде δ-функции в точке, [2]. Ниже сформулируем утверждение, дающее несколько иную интерпретацию положений из [3] и подчеркивающее связь с вариационным принципом в одномерном случае.

Обозначим $\mathbf{a} \equiv (a, b)$, $\mathbf{X} \equiv (\chi, \gamma)$, $\mathbf{S} \equiv (s^x, s^y)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим в пространстве $(t, \mathbf{x})$ две поверхности Γ_i, которые задаются параметрически как $\mathbf{x} = \mathbf{X}_i(t, l) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ и пересекаются по кривой L, параметрически заданной как $\mathbf{x} = \mathbf{S}(t) \in C^1(\mathbb{R}^+)$. В каждый момент времени t на кривые Γ_i приходит две характеристики вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\tau, \mathbf{a}) \equiv \mathbf{a} + \tau \mathbf{u}_0(\mathbf{a}) \ , \ 0 < \tau \leqslant t \ . \tag{2}$$

Отображение (2) ставит в соответствие каждой кривой Γ_i некоторую площадь A_i в координатах $\mathbf{a}$, которая параметризуется величинами τ, l, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i(\tau, l)$.

Для каждого i определим вектор-функционал

$$\mathbf{J}_i \equiv \int\int_{A_i} \left[\mathbf{u}_0(\mathbf{a}) - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{t} \right] \varrho_0(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \, . \tag{3}$$

Функционал (3) определен, вообще говоря, для любой параметризованной площади A и может рассматриваться, как функционал на множестве односвязных областей, имеющих площадь. Определим вариацию площади δA как вариацию координат $\delta \mathbf{a}$, такую что $\delta \mathbf{a} \parallel \partial \mathbf{a}_i / \partial l$.

Теорема 1. *Пусть имеет место описанная выше конфигурация поверхностей Γ_i и кривой L, а A_i и D обозначают соответствующие площади. Пусть выполнено*

$$\delta \mathbf{J} / \delta A|_{A = A_i} = 0 \ ; \ \mathbf{J}(D) = 0 \tag{4}$$

и $A_1 \bigcup A_2 \bigcup D$ представляет собой односвязную область. Тогда вдоль поверхностей выполняются соотношения Ренкина-Гюгонио, см. [1], а вдоль кривой справедливы законы сохранения массы и импульса.

Отметим, что условия (4) аналогичны условиям вариационного принципа для случая одной пространственной переменной, [4], если рассматривать соответствующий функционал

$$J(y; t, x) \equiv \int_0^y \left[u_0(a) - \frac{x - a}{t} \right] \varrho_0(a) da \, ,$$

как функционал на отрезках $[y_1, y_2]$ из $\mathbb{R}$.

Литература

1. *Rykov Yu.G.* The propagation of shock waves in 2-D system of pressureless gas // International series of numerical mathematics, **130** (1999), 813-822.

2. *Аптекарев А.И., Рыков Ю.Г.* Возникновение иерархии особенностей в средах без собственного перепада давления. Двумерный случай // Матем. заметки,**112**:4 (2022), 486-499.

3. *Аптекарев А.И., Рыков Ю.Г.* Детализация механизма образования особенностей в системе уравнений газовой динамики без давления // Докл. РАН, **484**:6 (2019), 655-658.

4. *Weinan E., Rykov Yu.G., Sinai Ya.G.* Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Comm.Math.Phys. **177** (1996), 349-380.

О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ ПОКАЗАТЕЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Л. Сабатулина

tlsabatulina@list.ru

УДК 517.929

Рассматривается линейное автономное дифференциальное уравнение с распределенным запаздыванием. Для этого уравнения известен критерий экспоненциальной устойчивости, однако до сих пор для него не было найдено точного показателя степени экспоненты. В данной работе получена точная оценка показателя степени экспоненты в зависимости от значения коэффициента и запаздывания.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, распределённое запаздывание, экспоненциальная устойчивость

On the exact estimation for the exponent of solutions of a linear autonomous differential equation with distributed delay

A linear autonomous differential equation with a distributed delay is considered. The exponential stability criterion is known for this equation, but so far no exact exponent has been found for it. In this paper, the exact estimation for the exponent is obtained depending on the value of the coefficient and the delay.

Keywords: functional differential equation, distributed delay, exponential stability

---

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

Сабатулина Татьяна Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия); Tatyana Sabatulina (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + b\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $h \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально суммируема.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно [1, с. 84, теорема 1.1], уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t X(t-s)f(s)\,ds, \tag{2}$$

где $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением* уравнения (1). В силу представления (2) фундаментальное решение не зависит ни от начального условия $x(0)$, ни от внешнего возмущения f, также функция X определяет любое решение уравнения (1). На отрицательной полуоси функцию X положим равной нулю.

Уравнение (1) называется *экспоненциально устойчивым*, если существуют $N, \gamma > 0$, такие что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедлива оценка:

$$|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}. \tag{3}$$

Обозначим через Γ множество чисел $\gamma \in \mathbb{R}$, для которых справедлива оценка (3). Назовём число $\omega \triangleq \sup\{\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$ *точным показателем* фундаментального решения.

Для уравнения (1) известен критерий экспоненциальной устойчивости: уравнение (1) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $0 < bh^2 < \pi^2/2$ (см. [2]). Однако до сих пор для этого уравнения не было найдено точного показателя степени экспоненты. В данной работе для уравнения (1) найдена точная оценка показателя степени экспоненты в зависимости от значений b и h.

Пусть ζ_0 — положительный корень уравнения $e^{-\xi} = 1 - \frac{\xi}{2}$, $\zeta_0 \approx 1.5936243$. На промежутке $(0, \zeta_0]$ зададим функцию $\zeta = \varphi_1(\eta)$, заданную соотношением $\eta = \frac{\zeta^2}{e^{\zeta}-1}$. Функция φ_1 монотонно возрастает от 0 до η_0, $\eta_0 \approx 0.647610$. При $\eta \in [\eta_0, \pi^2/2]$ введём функцию $\zeta = \varphi_2(\eta)$, заданную следующим образом:

$$\eta = -\frac{\zeta e^{-\zeta}\left(\theta^2+\zeta^2\right)}{\zeta e^{-\zeta} - \zeta\cos\theta - \theta\sin\theta},$$
$$2\theta\zeta\left(e^{-\zeta} - \cos\theta\right) + \left(\zeta^2 - \theta^2\right)\sin\theta = 0, \quad \theta \in [0, \pi].$$

На рис. 1 изображены графики функций φ_1 и φ_2.

Теорема 1. *Если* $bh^2 \in \left(0, \pi^2/2\right)$, *то точный показатель* ω *определяется следующими равенствами:*
1) $\omega = \varphi_1(bh^2)$ *при* $bh^2 \in (0, \eta_0)$;

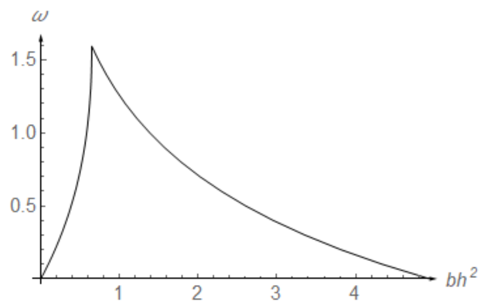

Рис. 1: Графики функций φ_1 and φ_2.

2) $\omega = \varphi_2(bh^2)$ *при* $bh^2 \in (\eta_0, \pi^2/2)$;
3) $\omega = \zeta_0$ *при* $bh^2 = \eta_0$.

Теорема 2. *Если* $bh^2 \in \left(0, \pi^2/2\right)$ *и* $bh^2 \neq \eta_0$, *то для фундаментального решения уравнения* (1) *справедлива оценка* $|X(t)| \leqslant Ne^{-\omega t}$, *где* ω *определена в случаях* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

Теорема 3. *Если* $b = \eta_0$, *то для некоторых* M, $\nu > 0$ *справедлива оценка* $\left|X(t)e^{\zeta_0 t} - \frac{\zeta_0}{\zeta_0 - 1}t - \frac{\zeta_0^2 - 3\zeta_0 + 3}{(\zeta_0 - 1)^2}\right| \leqslant Me^{-\nu t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Литература

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.

2. *Oliveira J.C.F. de, Carvalho L.A.V.* A Lyapunov functional for a retarded differential equation // SIAM. J. Math. Anal., 16 (1985), 1295–1305.

РАЗМЕРНОСТЬ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ И УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ

Ю.В. Садовничий, С.Д. Илиадис

sadovnichiy.yu@gmail.com, s.d.iliadis@gmail.com

Теория размерности это большая область топологии, в которой рассматриваются различные аспекты размерностей ind, Ind, dim, когомологических размерностей и их модификаций. Особое место в этой области занимают вопросы, связанные с определением размерности произведения пространств, зная размерности сомножителей. Основной вопрос в этом плане

Садовничий Юрий Викторович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Sadovnichii Yu.V. (Lomonosov Moscow State University, Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Илиадис Ставрос Димитрис, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Iliadis S.D. (Lomonosov Moscow State University, Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia)

следующий: при каких ограничениях на пространства X и Y справедлив логарифмический закон т.е. когда выполняется соотношение

$$dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y).$$

Однако нас интересуют также примеры пространств X и Y для которых логарифмический закон не верен. Эти примеры будут показывать, что многие из рассматриваемых нами классов пространств не пусты. Я отмечу здесь только некоторые результаты, связанные с такими пространствами.

Первый такой результат был получен Л. Понтрягиным в начале 30х годов. Из его результата, следует, что существуют двумерные метрические компакты X и Y для которых $dim(X) = dim(Y) = 2$ и $dim(X \times Y) = 3$. Так как для метрических компактов $dim = ind$ мы можем написать, что $ind(X) = ind(Y) = 2$ и $ind(X \times Y) = 3$.

С другой стороны, В. Филиппов (1971) построил примеры (неметризуемых) компактов X и Y, для которых

$$Ind(X) = ind(X) = 1, \;\; Ind(Y) = ind(Y) = 2 \;\text{ и}$$

$$Ind(X \times Y) \geqslant ind(X \times Y) > 3.$$

Из результатов Б. Пасынкова (1998) и А. Карасева и К. Козлова (2015) следует, что на самом деле для этих пространств справедливо равенство

$$Ind(X \times Y) = ind(X \times Y) = 4.$$

Б. Пасынковым доказано также, что при определенных ограничениях на пространства из конечномерности сомножителей по Ind следует конечномерность их произведения.

Существования ряда примеров компактных метрических пространств, для которых не выполнен логарифмический закон вытекает из следующего результата А. Дранишникова (1988): *для любых натуральных $n \leqslant m$ и любого $r : m < r \leqslant n + m$ существуют такие (метрические) компакты X_n и X_m, что*

$$dim(X_n) = n, \;\; dim(X_m) = m \;\text{ и }\; dim(X_n \times X_m) = r.$$

В этих формулах размерность dim можно заменить на размерность ind.

Основным результатом нашего доклада является следующая теорема.

Теорема. *Для любого пространства Y веса τ, любых ординалов α и β и любого насыщенного класса $\mathbb{S}$ пространств веса τ в непустом классе всех элементов $X \in \mathbb{S}$, для которых $ind(X) = \alpha$ и $ind(Y \times X) = \beta$ существует универсальный элемент.*

Понятие насыщенного класса пространств определяется с помощью так называемых Содержащих Пространств. Здесь, отметим только, что класс сепарабельных метризуемых пространств, класс вполне регулярных пространств, класс регулярных пространств и многие другие классы являются насыщенными классами.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОГО СОСТОЯНИЯ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА В НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В.М. Садовский, О.В. Садовская

sadov@icm.krasn.ru, o_sadov@icm.krasn.ru

УДК 519.63, 539.37

На основе определяющих уравнений Озеена–Франка моделируется эффект переориентации молекул в протяженном слое жидкого кристалла, находящемся в неоднородном электрическом поле конденсатора с короткими периодически расположенными обкладками. Для численного решения уравнений построена вариационно-разностная схема, алгоритмическая реализация которой основана на методе прямых и итерационном процессе, на каждом шаге которого строится решение уравнения Пуассона с помощью быстрого преобразования Фурье.

Ключевые слова: уравнения Озеена–Франка, жидкий кристалл, электрическое поле, технология CUDA

Modelling of the unstable state of a liquid crystal in an electric field

We use the Oseen–Frank constitutive equations to simulate the effect of reorientation of molecules in an extended layer of a liquid crystal located in a non-uniform electric field of a capacitor with short periodically arranged plates. For numerical solution of equations the variational difference scheme is proposed, the algorithmic implementation of which is based on the method of straight lines and an iterative process, at each step of which the solution of Poisson's equation is constructed using the fast Fourier transform).

Keywords: Oseen–Frank equations, liquid crystal, electric field, CUDA technology

Основные уравнения теории Озеена–Франка, используемой при моделировании статики жидких кристаллов, вытекают из вариационного принципа минимума потенциальной энергии. Распределение углов ориентации молекул жидкого кристалла под воздействием электрического поля, создаваемого зарядами на обкладках конденсатора, удовлетворяет условию стационарности функционала потенциальной энергии:

$$J = \iint\limits_{\Omega} \Big(F - \frac{1}{2}\, D \cdot E \Big) dx\, dy\,.$$

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2022-873).

Садовский Владимир Михайлович, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, ИВМ СО РАН (Красноярск, Россия); Vladimir Sadovskii (Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia)

Садовская Оксана Викторовна, к.ф.-м.н., ИВМ СО РАН (Красноярск, Россия); Oxana Sadovskaya (Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia)

Здесь $E = -\nabla\varphi$ и $D = \varepsilon_0 \, \varepsilon \cdot E$ – векторы электрического поля и электрической индукции, $F = \gamma\left(|\nabla \cdot n|^2 + |\nabla \times n|^2\right)/2$ – свободная энергия Франка, φ – электрический потенциал, ε – тензор диэлектрической проницаемости, $n = \big(\cos(\theta - \theta_0)\,, \sin(\theta - \theta_0)\big)$ – вектор–директор относительно начального положения молекул, θ – угол ориентации.

Из вариационных уравнений $\delta_\theta \, J(\theta, \varphi) = 0$ и $\delta_\varphi \, J(\theta, \varphi) = 0$ получим:

$$-\frac{2\,\varepsilon^{\perp}}{\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}}\,\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\Big(2\,\varphi_x \cos^2\theta + \varphi_y \sin 2\theta\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\varphi_x \sin 2\theta + 2\,\varphi_y \sin^2\theta\Big),$$

$$-\frac{2\,\gamma}{\varepsilon_0\left(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}\right)}\,\Delta\big(\theta - \theta_0\big) = 2\,\varphi_x\,\varphi_y \cos 2\theta - \big(\varphi_x^2 - \varphi_y^2\big)\sin 2\theta,$$

где $\varepsilon^{\parallel}$ и $\varepsilon^{\perp}$ – диэлектрические проницаемости вдоль и поперек молекул, φ_x и φ_y – частные производные потенциала по пространственным переменным.

Эти уравнения решаются численно с помощью вариационно-разностной схемы. При нахождении электрического поля и распределения углов ориентации молекул используются два вложенных друг в друга итерационных процесса, трехточечная прогонка, прямое и обратное преобразования Фурье, метод прямых. Программная реализация выполнена по технологии CUDA для вычислительных систем с графическими ускорителями.

С применением разработанного алгоритма и параллельной программы проводились расчеты переориентации молекул жидкого кристалла 5ЦБ в неоднородном электрическом поле при различных положениях обкладок конденсатора. Получены результаты расчетов для ЖК слоя с горизонтальной начальной ориентацией молекул, с постоянным начальным углом ориентации θ_0 (см. рис. 1) и с неравномерным s-образным (по толщине слоя) начальным распределением углов.

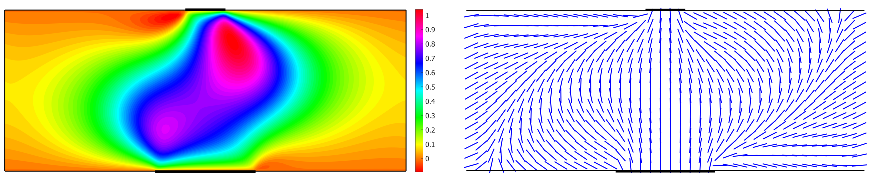

Рис. 1: Воздействие электрическим полем на ЖК слой (начальный угол ориентации молекул $\theta_0 = 45^0$): линии уровня углов ориентации $\theta - \theta_0$ (слева) и распределение направлений электрического поля (справа)

Результаты расчетов показали, что центрами больших доменов сориентированных молекул (роев) в жидком кристалле служат локализованные группы молекул, начальная ориентация которых перпендикулярна направлению поля, и что в зависимости от числа таких центров может образовываться один или несколько роев. Это означает, что формирование роев происходит за счет потери устойчивости равновесия локализованных групп.

Более подробное описание вычислительного алгоритма приведено в [1]. Упрощенная математическая модель динамики жидкого кристалла как акустической микронеоднородной среды, позволяющая учитывать термомеханические и электростатические воздействия на ЖК, представлена в [2].

Литература

1. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Mathematical modeling of inhomogeneous electric field impact on a liquid crystal layer // Z Angew Math Mech (2022), e202200248.

2. *Sadovskii V., Sadovskaya O.* Acoustic approximation of the governing equations of liquid crystals under weak thermomechanical and electrostatic perturbations. In: Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures, chapt. 17. — Cham: Springer, 2018. — 297-341.

ИМПУЛЬСНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ ВОЛЬТЕРРЫ

С.А. Саженков

sazhenkovs@yandex.ru

УДК 517.955, 517.958

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности с младшим интегральным членом, моделирующим немгновенное импульсное воздействие с эффектом памяти. Длительность воздействия является в задаче малым положительным параметром. Проводится предельный переход при стремлении этого параметра к нулю с сохранением при этом суммарного импульса. Как результат конструируется предельная модель с мгновенным (инфинитезимальным) ударным переходным слоем, структура которого наследует профиль немгновенного импульсного воздействия.

Ключевые слова: параболическое уравнение Вольтерра, немгновенный импульс, ударный слой

The impulsive heat equation with Volterra's infinitesimal transition layer

We consider the Cauchy problem for the heat equation containing the minor integral term, which models a non-instantaneous impulsive impact with memory effect. Duration of the impact is a small positive parameter in the problem. As this parameter tends to zero, we fulfill the limiting transition, assuming at the same time that the integral impulsive momentum remains unchanged. As the result, we construct the limit model incorporating the infinitesimal shock transition layer, whose structure inherits the form of the non-instantaneous impulsive profile.

Keywords: parabolic Volterra equation, non-instantaneous impulse, shock layer

---

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2020-23) (гос. задание FZMW-2020-0008 от 24.01.2020).

Саженков Сергей Александрович, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия); Sergey Sazhenkov (Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia)

Доклад посвящен асимптотическому анализу при $\varepsilon \to 0+$ семейства решений $\{u = u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ задачи Коши для полулинейного параболического интегро-дифференциального уравнения Вольтерра

$$\partial_t u(\mathbf{x},t) = \Delta_x u(\mathbf{x},t) + \int_0^t K_\varepsilon^\tau(t) K_\varepsilon^\tau(s) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x},s))\, ds \ \text{ в } \ \mathbb{R}_x^d \times (0,T), \qquad (1)$$

в котором $K_\varepsilon^\tau(\cdot)$ — это кусочно-гладкое неотрицательное ядро с носителем на сегменте $[\tau, \tau+\varepsilon]$ и со средним, равным единице, слабо* сходящееся (при $\varepsilon \to 0+$) в пространстве мер Радона на $(0,T)$ к односторонней дельта-функции Дирака $\delta_{(\,\cdot\,=\tau+0)}$, $T > 0$ и $\tau = \mathrm{const} \in (0,T)$ — два фиксированных момента времени и β — заданная сублинейная по u и достаточно гладкая вещественная функция. Начальная функция (данные Коши)

$$u|_{t=0} = u_0 \qquad (2)$$

является 1-периодической и принадлежит пространству Соболева $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}_x^d)$.

Можно заметить, что уравнение (1) вытекает из системы

$$\begin{aligned} &\partial_t u(\mathbf{x},t) = \Delta_x u(\mathbf{x},t) + K_\varepsilon^\tau(t) V(\mathbf{x},t), \\ &\frac{d}{dt} V(\mathbf{x},t) = K_\varepsilon^\tau(t) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x},t)), \end{aligned}$$

моделирующей управление с обратной связью, в котором функция управления V определяется по функции состояния u посредством неявного механизма, выражаемого обыкновенным дифференциальным уравнением.

Для фиксированных значений $\varepsilon > 0$ в случае, когда $p > d$, существование и единственность слабого решения задачи (1)-(2) гарантируются хорошо известными теоретическими положениями [1].

Основной результат работы состоит в следующем.

Установлено, что при $\varepsilon \to 0+$ семейство $\{u = u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ слабых решений задачи (1)-(2) и семейство $\{\bar u_\varepsilon \colon \mathbb{R}_x^d \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}\}$ определенных по формуле $\bar u_\varepsilon(\mathbf{x}, \bar t) \overset{\mathrm{def}}{=} u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau + \varepsilon \bar t)$ ($\bar t \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$) перемасштабированных слабых решений задачи (1)-(2) сходятся к паре функций $(u, \bar u)$, которая служит единственным сильным решением двухмасштабной задачи

$$\begin{aligned} &\partial_t u = \Delta_x u \quad \text{при } (\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}_x^d \times \big((0,T) \setminus \{t=\tau\}\big), \\ &\partial_{\bar t} \bar u = \int_0^{\bar t} 4K(\bar t) K(\bar s) \beta(\mathbf{x}, \bar u(\mathbf{x}, \bar s))\, d\bar s \quad \text{при } (\mathbf{x}, \bar t) \in \mathbb{R}_x^d \times (0,1), \\ &u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^d, \\ &\bar u(\mathbf{x}, 0+) = u(\mathbf{x}, \tau-0), \quad u(\mathbf{x}, \tau+0) = \bar u(\mathbf{x}, 1-0) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^d, \\ &u(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i, t) = u(\mathbf{x},t) \quad \text{при } (\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}_x^d \times \big((0,T) \setminus \{t=\tau\}\big), \\ &\bar u(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i, \bar t) = \bar u(\mathbf{x}, \bar t) \quad \text{при } (\mathbf{x}, \bar t) \in \mathbb{R}_x^d \times (0,1). \end{aligned}$$

Здесь через $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \ldots, d$) обозначены векторы стандартного декартова базиса в $\mathbb{R}_x^d$. Отметим, что предельные соотношения $u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u$ и $\bar u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \bar u$ выполняются сильно в пространствах $L^2((0,1)^d \times (0,T))$ и $L^2((0,1)^d \times (0,1))$, соответственно.

Представленное исследование проведено совместно с Иваном Владимировичем Кузнецовым (ИГиЛ СО РАН) и в полном виде опубликовано в статье [2].

Литература

1. *Heard, M.L., Rankin, S.M., III.* Weak solutions for a class of parabolic Volterra integrodifferential equations // J. Math. Anal. Appl. **139** (1989), 78-109.

2. *Kuznetsov I., Sazhenkov S.* The impulsive heat equation with the Volterra transition layer // J. Elliptic Parabol. Equ. (2022) (doi:10.1007/s41808-022-00182-9).

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ГАУССА О ЗНАЧЕНИЯХ ДИГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА В РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ

Т.А. Сафонова

t.Safonova@narfu.ru

УДК 517.927.25+517.589

В работе найдены представления производящих функций для значений дзета-функции Римана в нечётных точках и родственных с ними чисел в терминах определённых интегралов, зависящих от параметра a. Возникающие интегралы таковы, что если a является правильной рациональной дробью, то они явно вычисляются в терминах значений некоторых элементарных функций. При этом получаются разнообразные аналоги теоремы Гаусса о значениях функции $\psi(a)$ в рациональных точках и, в частности, ещё одно её доказательство.

Ключевые слова: Теорема Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера, интегральные представления сумм рядов.

Around the Gauss theorem on the values of Euler's digamma function at rational points

In this paper, we find representations of generating functions for the values of the Riemann zeta function at odd points and related numbers in terms of definite integrals depending on the parameter a. The resulting integrals are such that if a is a proper rational fraction, then they are explicitly calculated in terms of the values of some elementary functions. In this case, various analogues of the Gauss theorem on the values of the function $\psi(a)$ at rational points and, in particular, one more proof of it are obtained.

Keywords: the Gauss theorem on the values of Euler's digamma, integral representations for sums of series

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия), Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Tatyana Safonova (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Символом $\psi(a)$ обозначим дигамма-функцию Эйлера, т.е. логарифмическую производную от Г-функции Эйлера. Приведём известную теорему Гаусса о значениях этой функции в рациональных точках.

Теорема Гаусса. *Пусть p, $q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда справедливо равенство*

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \ln(2q) - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{p\pi}{q}\right) + 2\sum_{k=1}^{[q/2]} \cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q},$$

где γ - постоянная Эйлера.

Нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление некоторых степенных рядов и специальных функций. Приведём формулировку одной из теорем, справедливость которой можно установить этим методом.

Теорема 1. *При $-1 < a < 1$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}dx, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(ax)-\cos(a\pi/2)}{\cos x}dx, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k^2-a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^2\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}\sin(2ax)\operatorname{ctg} x dx, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} + \frac{1}{a^2\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}(\sin(2ax)-\sin(a\pi))\operatorname{tg} x dx. \tag{4}$$

Для функции $\psi(a)$ справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *При $0 < a < 1$ для функции $\psi(a)$ справедливы тождества*

$$\psi(a) = -\gamma - \ln 2 - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi) - \frac{1}{\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}(\sin(2ax)-\sin(a\pi))\operatorname{tg} x dx =$$

$$-\gamma - 2\ln 2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi) + \frac{1}{\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(a\pi)-\cos(2a-1)x}{\cos x}dx.$$

Если a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = p/q$, где p, $q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$, то интегралы, стоящие в правых частях равенств (1) – (5), сводятся к определённым интегралам от тригонометрических функций, и явно вычисляются в терминах элементарных функций, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $a = p/q$, *где* p, $q \in \mathcal{N}$ *и* $0 < p < q$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left(\ln(2q) - \frac{q}{2p} - 2\sum_{k=1}^{[q/2]} \cos\frac{2pk\pi}{q} \ln\sin\frac{k\pi}{q}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2 - a^2} = \frac{q}{2p} + 2\sum_{k=1}^{[q/2]} \cos(2k-1)\frac{p\pi}{q} \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{2q}.$$

Кроме того, если p *и* q *— нечётные числа, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{q}{p}\sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q} \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{2q},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\ln\frac{q}{2} - \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \cos\frac{pk\pi}{q} \ln\sin\frac{k\pi}{q}\right).$$

Отметим, что аналогичные формулы справедливы, когда числа p и q имеют разную чётность.

Представление функции $\psi(a)$ из следствия 1, позволяет этим же способом получить ещё одно доказательство сформулированной выше теоремы Гаусса.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с профессором К. А. Мирзоевым.

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ BV-ПРОСТРАНСТВ НА ГРУППАХ КАРНО

Д.А. Сбоев
dnlsboev@gmail.com

УДК 517.98

Получено эквивалетное описание гомеоморфизмов, индуцирущих ограниченный оператор композиции пространств BV-функций на группах Карно. Кроме того, были доказаны следующие свойства для BV-функций и отображений на группах Карно: характеризация на интегральных линиях, оценки при замене переменной.

Ключевые слова: операторы композиции, функции и отображение ограниченной вариации, группы Карно

Bounded composition operators in BV-spaces on Carnot groups

We consider the problem on description of homeomorphisms which induce bounded composition operator in BV-spaces on Carnot groups. We have got a criterion for such homeomorphisms. Moreover, we proved the following properties of BV functions and mappings: characterization on the integral lines, inequality in a "chain-rule".

Keywords: composition operators, functions and mappings of bounded variation, Carnot groups

Пусть $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ – гомеоморфизм областей Ω, Ω' на группе Карно G. Мы рассматриваем ситуацию, когда φ индуцирует ограниченный оператор композиции BV-пространств:

$$BV(\Omega') \cap C(\Omega') \ni u \mapsto \varphi^*(u) = u \circ \varphi \in BV(\Omega).$$

Основной результат заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Допустим, что гомеоморфизм φ индуцирует ограниченный оператор*

$$\varphi^*\colon BV(\Omega') \cap C(\Omega') \to BV(\Omega).$$

Тогда

1) $\varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$*;*

2) *существует $C > 0$ такая, что $|D\varphi|(\varphi^{-1}(A)) \leqslant C|A|$ для произвольного борелевского множества $A \subset \Omega'$.*

Обратно, если для гомеоморфизма φ выполнены условия 1, 2, то он индуцирует ограниченный оператор композиции BV-пространств.

При доказательстве теоремы установлены следующие свойства BV-функций и отображений на группах Карно:

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

Сбоев Данил Алексеевич, лаборант, ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия); Danil Sboev, (IM SB RAS, Novosibirsk, Russia)

Теорема 2. *Пусть* $\varphi\colon G \to G$ – *непрерывное отображение класса* $L^1_{\mathrm{loc}}(G,G)$.

Отображение $\varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(G,G)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_K \operatorname{ess} \mathrm{V}_{\gamma_g^k(a,b)} f \, d\gamma^k(g) < \infty$$

для любых $k = 1,\ldots,n$, $a < b$ *и компактного множества* $K \subset S^k$.

Аналогичный критерий имеет место для BV_{loc}-функций.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ – *гомеоморфизм класса* BV_{loc} *и* $u\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ — *функция класса* $C^1(\Omega')$. *Тогда* $v = u \circ \varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *и справедливо неравенство*

$$|Dv|(U) \leqslant C \int_U |\nabla u(\varphi(x))| \, d|D\varphi|$$

для любого борелевского множества $U \Subset \Omega'$. *При этом константа* C *зависит только от структуры группы* G.

Литература

1. *Вольперт А.И.* Пространства BV и квазилинейные уравнения // Матем. сб. — 1967. — **73(115)**:2, 255-302.

2. *Фередер Г.* Геометрическая теория меры / Витушкин А.Г. (ред.). — М.: Наука, 1987.

3. *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-classe Di Scienze, **17**, 439-478.

4. *Folland G.B., Stein E.M.* Hardy spaces on homogeneous groups. — Princeton University Press, 1982.

5. *Garofalo N., Nhieu D.M.* Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Caratheodory spaces and the existence of minimal surfaces // Communications on Pure and Applied Mathematics, **49**, 1081-1144

РЕШЕТО ВИНОГРАДОВА И КОРОТКИЕ СУММЫ КЛООСТЕРМАНА

Н.К. Семенова

snkone132@mail.ru

УДК 511.32

Уточняется оценка короткой "неоднородной" суммы Клоостермана по простому модулю m. Уточнение происходит за счет применения так называемого решета Виноградова.

Ключевые слова: короткие суммы Клоостермана, решето Виноградова, метод Карацубы

Семенова Наталья Кирилловна, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Natalia Semenova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Vinogradov's sieve and short Kloosterman sums

The estimation of the short "non-uniform" Kloosterman sum with the prime modulus m is refined. The refinement occurs due to the use of the so-called Vinogradov sieve.

Keywords: short Kloosterman sum, Vinogradov's sieve, Karatsuba's method

Полной суммой Клоостермана называется тригонометрическая сумма вида

$$S(m;a,b) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,m)=1}}^{\nu=m} \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\Big), \tag{1}$$

где m, a, b — целые числа, а через $\overline{\nu}$ обозначается вычет, обратный к ν по модулю m. Данные суммы естественным образом возникли в работе Х.Д. Клоостермана [1] при выводе асимптотической формулы для числа решений диофантового уравнения $Ax^2+By^2+Cz^2+Dt^2=n$, где A, B, C, D, n — натуральные числа. Оценкам таких сумм при различных условиях на a, b, m посвящены работы Х.Д. Клоостермана [1], Г. Дэвенпорта [2], А. Вейля [3]. В случае $b \neq 0$ будем называть суммы неоднородными.

Наряду с оценками полных сумм Клоостермана (1) представляют интерес оценки коротких сумм Клоостермана, т.е. сумм у которых длина промежутка суммирования не превосходит $\sqrt{m}$:

$$S(m;a,b) = \sum_{\substack{\nu\leqslant x \\ (\nu,m)=1}}^{\nu=m} \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\Big). \tag{2}$$

В начале 1990-х гг. А.А. Карацубой [4] был разработан принципиально новый метод, позволяющий получать нетривиальные оценки коротких сумм Клоостермана не только длины $x \leqslant \sqrt{m}$, но и сумм с длинной $x \leqslant m^{\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое число. В основе метода лежит лемма о числе решений симметричного сравнения $\overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k \equiv \overline{p}_{k+1}+\ldots+\overline{p}_{2k} \pmod m$ в простых числах $p_1, \ldots, p_{2k}$. Применение метода А.А. Карацубы нашло отражение в его работах [5, 6] и работах М.А. Королёва [7, 8]. В 2014 году Ж. Бургейн и М.З. Гараев в [9] модифицировали лемму, что позволило улучшить полученные ранее оценки.

В настоящей работе в дополнение к методу А.А. Карацубы и его модификации было использовано так называемое решето Виноградова [10], что дало уточнение существующей оценки неоднородной суммы (2) в случае простого модуля m.

Теорема 1. *Пусть $m \geqslant m_0$ — достаточно большое простое число, $(a,m)=1$, и пусть*

$$\exp(c(\log m)^{5/6}(\log\log m)^{1/6}) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}, \quad c>0.$$

Тогда имеет место оценка

$$\Big|\sum_{\nu\leqslant x}\exp\Big(2\pi i\frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\Big)\Big| \ll x\Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{(\log m)^{5/4}(\log\log m)^{1/4}}{(\log x)^{3/2}},$$

а постоянная в знаке Виноградова — абсолютная.

Следствие. *В случае $x \asymp q^{\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число, верна оценка:*

$$\Big|\sum_{\nu\leqslant x}\exp\Big(2\pi i\frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\Big)\Big| \ll_{\varepsilon} x\Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = \sqrt[4]{\frac{\ln\ln m}{\ln m}}.$$

Литература

1. *Kloosterman H.D.* On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta Math., **49** (1926), 407-464.

2. *Davenport H.* On certain exponential sums // J. reine angew. Math., **49** (1933), 158-176.

3. *Weil A.* On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **34** (1948), 204–207.

4. *Карацуба А.А.* Дробные доли специального вида функций // Изв. РАН. Сер. матем., **59**:4 (1995), 61–80.

5. *Карацуба А.А.* Аналоги сумм Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем., **59**:5 (1995), 93–102.

6. *Карацуба А.А.* Суммы дробных долей специального вида функций // Докл. РАН., **349**:3 (1996), 541.

7. *Королёв М.А.* Неполные суммы Клоостермана и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем., **64**:6 (2000), 41-64.

8. *Королёв М.А.* Короткие суммы Клоостермана с весами //Матем. заметки., **8**:3 (2010), 415-427.

9. *Бургейн Ж., Гараев М.З.* Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем., **78**:4 (2014), 19–72.

10. *Виноградов И.М.* Новая оценка одной суммы, содержащей простые числа // Матем. сборник, **2(44)**:5 (1937), 783–792.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

И.Н. Сергеев

igniserg@gmail.com

УДК 517.926.4

Изучаются классы линейных приближений, обеспечивающих различные ляпуновские, перроновские или верхнепредельные свойства дифференциальных систем: устойчивость, асимптотическую устойчивость, а также глобальную, частичную и частную устойчивость. Различных непустых классов, обеспечивающих какие-либо из перечисленных 15 разновидностей устойчивости, оказалось всего 2.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, первое приближение

Study of various types of stability in the first approximation

Classes of linear approximations are studied that provide various Lyapunov, Perron or upper-limit properties of differential systems: stability, asymptotic stability, as well as global, partial and particular stability. As it turned out, there are only two different non-empty classes that provide any of the fifteen varieties of stability listed.

Keywords: Lyapunov stability, Perron stability, first approximation

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(\cdot,0) \equiv 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty). \tag{1}$$

Обозначим через S_* и S_δ множества *непродолжаемых* решений x системы (1) с начальными условиями $|x(0)| \neq 0$ и $0 < |x(0)| < \delta$ соответственно.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что система (1) обладает *перроновской* или *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$;

2) *частичной устойчивостью*, если для каждых $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию (2);

3) *частной устойчивостью*, если для каждого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_*$ удовлетворяет требованию (2);

4) *асимптотической устойчивостью*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию (2) при $\varepsilon = 0$;

5) *глобальной устойчивостью*, если все решения $x \in S_*$ удовлетворяют требованию (2) при $\varepsilon = 0$.

Сергеев Игорь Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor Sergeev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Перроновские и верхнепредельные свойства являются аналогами соответствующих *ляпуновских* свойств (см., к примеру, [3, гл. II, §1]), для описания которых достаточно в пп. 1)–3) заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon,$$

после чего в пп. 4) и 5), конкретно с правым требованием (2), дополнительно потребовать наличие у системы (1) ляпуновской устойчивости из п. 1).

Определение 2. Скажем, что система (1) имеет *линейное приближение*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

если выполнены условия

$$A(\cdot) \equiv f'_x(\cdot, 0) \in C(\mathbb{R}_+), \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \to 0.$$

Множество всевозможных линейных приближений для систем вида (1) обозначим через $\mathcal{M}^n$. Скажем, что линейное приближение (3) *обеспечивает* данное свойство, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением. Образуем *перроновские классы* линейных приближений

$$\mathcal{S}^b_\pi,\ \mathcal{S}^c_\pi,\ \mathcal{S}^d_\pi,\ \mathcal{S}^a_\pi,\ \mathcal{S}^g_\pi,$$

обеспечивающие перроновские свойства устойчивости соответственно из пп. 1–5 определения 1. В аналогичных обозначениях для *верхнепредельных* и *ляпуновских классов* заменим нижние индексы π на σ и λ соответственно.

Исследованию ляпуновской асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть *первого метода Ляпунова*, посвящено огромное число работ (см. [4, §11]).

Между классами из определения 2 действует естественная иерархия по включению, обусловленная логическими связями между свойствами из определением 1. Однако, как показывают следующие теоремы (частично доказанные в работе [5]), подавляющее число этих включений обращаются в равенства. Общее же число различных непустых классов, обеспечивающих всевозможные разновидности устойчивости, равно всего лишь двум, а в одномерном случае — вообще одному. Совпадения этих классов как раз и обеспечивают корректность обозначений ниже.

Теорема 1. *Имеют место следующие совпадения*

$$\mathcal{S}^g_\varkappa \equiv \mathcal{S}^g, \quad \mathcal{S}^a_\varkappa = \mathcal{S}^b_\varkappa \equiv \mathcal{S}^{ab}, \quad \mathcal{S}^c_\varkappa = \mathcal{S}^d_\varkappa \equiv \mathcal{S}^{cd}, \quad \varkappa = \pi, \sigma, \lambda. \tag{4}$$

Теорема 2. *Классы* (4) *удовлетворяют цепочке соотношений*

$$\varnothing = \mathcal{S}^g \subsetneq \mathcal{S}^{ab} \subseteq \mathcal{S}^{cd} \subsetneq \mathcal{M}^n.$$

Теорема 3. *При $n = 1$ и при $n > 1$ имеют место соотношения*

$$\mathcal{S}^{ab} = \mathcal{S}^{cd} \equiv \mathcal{S}^{abcb} \quad \textit{и, соответственно,} \quad \mathcal{S}^{ab} \subsetneq \mathcal{S}^{cd}.$$

Литература

1. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения, **54**:6 (2018), 855-856.

2. *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения, **56**:11 (2020), 1556-1557.

3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

4. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. — Минск: БГУ, 2006.

5. *Сергеев И.Н.* Исследование свойств перроновской и ляпуновской устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения, **56**:1 (2020), 84-93.

LP-АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

А.С. Смирнова

smirnovaas@hse.ru

УДК 517.956.4, 517.988.8

В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения с частными производными в римановом многообразии ограниченной геометрии. Приводится формула, выражающая сколь угодно точные (в Lp-норме) аппроксимации к решению задачи Коши через параметры - коэффициенты уравнения и начальное условие. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова об аппроксимации операторных полугрупп.

Ключевые слова: параболическое уравнение на многообразии, задача Коши, представление решений, аппроксимация решений, многообразие ограниченной геометрии, полугруппа операторов

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Смирнова Анна Сергеевна, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород, Россия); Anna Smirnova (Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia)

Lp-approximations of solutions of parabolic differential equations on manifolds

The paper considers the Cauchy problem for a parabolic partial differential equation in a Riemannian manifold of bounded geometry. A formula is given that expresses arbitrarily accurate (in the Lp-norm) approximations to the solution of the Cauchy problem in terms of parameters - the coefficients of the equation and the initial condition. The presented approximation method is based on Chernoff theorem on approximation of operator semigroups.

Keywords: parabolic equation on manifold, Cauchy problem, representation of solutions, approximation of solutions, manifold of bounded geometry, semigroup of operators

Дифференциальные уравнения на многообразиях находят все больше приложений в современной науке и технике, как в прикладных аспектах, так и в теоретических. Например, в термодинамике (жидкие кристаллы [1]) и механике (гранулярный поток [2]), биофизике (биомембраны [3]) и компьютерной графике (визуализация мозга [4], восстановление поврежденных структур [5]) и других прикладных науках требуется найти решение уравнения в частных производных на многообразии или на поверхности. Уравнения на многообразиях естественным образом возникают в современной математической физике, см., например, [6] и ссылки там. Вот почему теоретические работы, посвященные численному и аналитическому решению уравнений в частных производных на многообразиях, привлекают все больше внимания [7], [8].

В настоящей работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения (типа диффузии) второго порядка в римановом многообразии M ограниченной геометрии, допуская в том числе и то, что многообразие может не быть компактным. Условие ограниченной геометрии многообразия необходимо для того, чтобы гарантировать полноту любого гладкого ограниченного векторного поля на таком многообразии. Это свойство важно для техники сдвига вдоль интегральных кривых векторного поля, которую мы используем: векторные поля являются коэффициентами уравнения, затем мы используем их для создания операторнозначной функции (называемой функцией Чернова), которая определена на $[0,+\infty)$ — вот почему нам нужно, чтобы интегральные кривые векторных полей существовали для всех положительных значений времени $t > 0$ (на компактных многообразиях это выполняется автоматически). После этого мы используем функцию Чернова и начальное условие для создания аппроксимаций Чернова $u_n(t,x)$, которые сходятся к решению $u(t,x)$ задачи Коши в L_p-норме: $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L_p(M)} = 0$. Таким образом, решение выражается в виде явной формулы, содержащей в качестве параметров коэффициенты уравнения и начальное условие. Этот результат можно рассматривать как следующий логический шаг после статьи [9], где такого рода формулы были опубликованы впервые, но в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности. В настоящей работе область применимости формул расширяется на пространство L_p: решения принадлежат $L_p(M)$, а аппроксимации сходятся в $L_p(M)$. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова [10], [11].

Определение 1. Символом $\gamma_{x,A_j}\colon [0,+\infty) \to M$ обозначим интегральную кривую векторного поля A_j, берущую начало при времени 0 в точке $x \in M$ и являющуюся решением начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_{x,A_j}(t) = A_j(\gamma_{x,A_j}(t)), \\ \gamma_{x,A_j}(0) = x. \end{cases} \tag{1}$$

Постановка задачи.

Пусть (M, g) — риманово многообразие ограниченной геометрии размерности d. Предположим, что дано число $r = 1, 2, 3, \dots$ и заданы $r + 1$ гладких и C^2-ограниченных векторных полей A_j на M, где $j = 0, 1, 2, \dots, r$. Также задано ограниченное измеримое скалярное поле $c\colon M \to \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую задачу Коши для эволюционного уравнения относительно неизвестной функции $u\colon [0,+\infty) \times M \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = Lu(t,x), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

где L — дифференциальный оператор второго порядка, значение Lf которого на каждой гладкой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ задаётся следующим образом:

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(A_jA_jf)(x) + A_0f(x) + c(x)f(x), \quad x \in M. \tag{3}$$

Мы приведем формулу, выражающую решение задачи (2) через параметры A_0, $A_1, \dots, A_r$, c, u_0, причём в эту формулу будут входить интегральные кривые векторных полей A_j. Поэтому разумно предположить, что эти интегральные кривые также известны, в противном случае нам нужно найти их, решив задачу (1) каким-либо способом.

Основной результат работы выражается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть функция $c\colon M \to \mathbb{R}$ измерима и ограничена. Пусть даны числа $p \in [1,+\infty)$ и $r = 1, 2, 3, \dots$ Пусть также заданы $r+1$ гладких и C^2-ограниченных векторных полей A_j на M, $j = 0, 1, \dots, r$, и для всех j выполняется $divA_j(\alpha_s^*(x)) = 0$. По определению для всех $f \in L_p(M)$, $x \in M$ и $t \geqslant 0$ положим*

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{r}\left(f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{2rt})\right) + f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{2rt})\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}f(\gamma_{x,A_0}(2t)) + tc(x)f(x), \tag{4}$$

где $\gamma_{x,A_j}\colon [0,+\infty) \to M$ это интегральная кривая (определенная в (1)) векторного поля A_j, берущая начало при времени, равном 0 в точке $x \in M$. Мы также предполагаем, что оператор L является генератором C_0-полугруппы $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$ в пространстве $L_p(M)$ с его естественной нормой $\|f\| = \left(\int\limits_M |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Тогда:

1. *Решение задачи Коши* (2) *с оператором* L, *заданным в* (3), *существует и даётся равенством* $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$.

2. *Решение при всех* $t \geqslant 0$ *и почти всех* $x \in M$ *представимо в виде*

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x),$$

где предел существует в $L_p(M)$, *а* $u_n(t,x)$ *– черновские аппроксимации, задаваемые следующим образом:*

$$u_n(t,x) = \left(\lim_{n\to\infty} S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x),$$

где $S\left(\frac{t}{n}\right)$ *получается из* (4) *заменой* t *на* t/n, *а* $S\left(\frac{t}{n}\right)^n = \underbrace{S\left(\frac{t}{n}\right)\dots S\left(\frac{t}{n}\right)}_{n}$ *это композиция* n *копий линейного ограниченного оператора* $S\left(\frac{t}{n}\right)$.

3. *Сходимость в* $L_p(M)$ *локально равномерная по* t, *т.е. для каждого* $T > 0$ *верно, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \int_M |u_n(t,x) - u(t,x)|^p dx = 0.$$

Таким образом, используя средства дифференциальной геометрии и теории C_0-полугрупп (в том числе теорему Чернова), мы нашли решение задачи Коши для параболического уравнения второго порядка на многообразии не предполагая, что многообразие компактно, но при условии, что оно имеет ограниченную геометрию. Использовалась функция Чернова, предложенная в [9], поэтому найденные аппроксимации Чернова совпадают с приведенными в [9]. Однако решения, их приближения и сходимость в [9] рассматривались в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности (с равномерной нормой), между тем выше мы доказали, что такая же ситуация имеет место, если решения, их приближения и сходимость рассматриваются в L_p.

Это позволяет рассматривать решения в более широком смысле (например, начальное условие и решение могут быть разрывными). Также мы разработали несколько лемм, которые могут быть полезны при изучении подобных уравнений в пространстве $L_p(M)$ на некомпактных многообразиях M, эти леммы будут опубликованы в более подробной работе позже.

Литература

1. *Virga E. G.* Variational theories for liquid crystals — CRC Press, 2018

2. *Rauter M., Tuković Ž.* A finite area scheme for shallow granular flows on three-dimensional surfaces — Computers and Fluids, 2018. — 166 — 184-199.

3. *Elliott C. M., Stinner B.* Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements — Journal of Computational Physics, 2010 — 229(18) — 6585-6612.

4. *Mémoli F., Sapiro G., Thompson P.* Implicit brain imaging — NeuroImage, 2004 — 23 — 179-188.

5. *Macdonald C. B., Ruuth S. J.* The implicit closest point method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces — SIAM Journal on Scientific Computing, 2010 — 31(6) — 4330-4350.

6. *Volkov B. O.* Levy Laplacians and instantons on manifolds — Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 2020 — 23:2 — 20.

7. *Zhang QI S.* Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds — Duke mathematical journal, 1999 — 97(3).

8. *Yan Q., Jiang S. W., Harlim J.* Kernal-based methods for solving time-dependent advection-diffusion equations on manifolds — https://arxiv.org/abs/2105.13835v1.

9. *Mazzucchi S., Moretti V., Remizov I., Smolyanov O.* Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds — https://arxiv.org/abs/2002.06606.

10. *Chernoff P. R.* Note on product formulas for operator semigroups — J. Functional Analysis, 1968 — 2 — 238-242.

11. *Butko Ya.A.* The method of Chernoff approximation — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020 — 325.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЯДЕР НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н.В. Смородина

smorodina@pdmi.ras.ru

УДК 519.2

Мы доказываем существование ядер у случайных операторов, возникающих при построении вероятностного представления резольвенты оператора $\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(b^2(x)\frac{d}{dx}\right) + V(x)$.

Ключевые слова: резольвента, локальное время, случайные оператор

On existence of kernels os some random operators.

We study random operators arising when one constructs a probabilistic representation of the resolvent of an operator $\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(b^2(x)\frac{d}{dx}\right)+V(x)$.

Keywords: resolvent, local time, random operator

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 22-21-00016.

Смородина Наталия Васильевна, д.ф.-м.н., Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН (Санкт-Петербург, Россия); Natalya Smorodina (St. Petersburg Department of V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia)

Пусть $\xi_x(t)$ – решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_x(t) = b(\xi_x(t))b'(\xi_x(t))\,dt + b(\xi_x(t))\,dw(t), \qquad \xi_x(0) = x.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим самосопряженный оператор

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\big(b^2(x)\frac{d}{dx}\big) + V(x),$$

заданный на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Относительно функций $b(x), V(x)$ мы будем предполагать выполнение следующих условий:

1. $V \to 0$ при $x \to \infty$
2. $\int(1+x^2)|V(x)|\,dx < \infty$
3. $b \in C_b^2$ и отделена от нуля.
4. Существует $b_0 > 0$ такое что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = b_0$.
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} b''(x) = 0$.
6. $\int_{\mathbb{R}} x^2(|b(x)-b_0| + |b'(x)|)\,dx < \infty$.

Из условий 1-6 вытекает ([1], §XIII.3), что спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из интервала $[0,\infty)$ и, возможно, нескольких отрицательных однократных собственных значений. Через $H_a \subset L_2(\mathbb{R})$ обозначим абсолютно непрерывное подпространство оператора $\mathcal{A}$, а через P_a – ортогональный проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на H_a. Через $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}P_a$ обозначим сужение оператора $\mathcal{A}$ на H_a.

Для каждого λ, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ определим случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, полагая

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau}(P_a f)(\xi_x(\tau))e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau.$$

Теорема 1. *1. С вероятностью 1 оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ является ограниченным интегральным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ вида*

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y)f(y)\,dy,$$

причем при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ последнее равенство справедливо также для $t=\infty$.

2. Для любых λ, t, x функция $r_\lambda(t,x,\cdot) \in W_2^\alpha$ для любого $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$.

Теорема 2. *1. Если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено*

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f.$$

2. Если $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f. \tag{1}$$

При $\lambda = 0$ равенство (1) выполнено для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}$.

Литература

1. *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики, т.4. Москва: Мир, 1977.

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ ГРУПП

Е.В. Соколов
ev-sokolov@yandex.ru

УДК 512.543

В докладе описывается подход, позволяющий доказывать аппроксимируемость фундаментальной группы графа групп не каким-то конкретным, а произвольным классом групп, принадлежащим некоторому потенциально бесконечному семейству.

Ключевые слова: аппроксимационные свойства, фундаментальные группы графов групп, свободные конструкции групп.

On the approximability of the fundamental groups of some graphs of groups

The report describes an approach that makes it possible to prove that the fundamental group of a graph of groups is residually a $\mathcal{C}$-group, where $\mathcal{C}$ is not some specific, but an arbitrary class of groups belonging to a potentially infinite family.

Keywords: residual properties, fundamental groups of graphs of groups, free constructions of groups.

Значительная часть результатов об аппроксимируемости фундаментальных групп графов групп получена с помощью так называемого *фильтрационного метода*, изначально предложенного в [1] для изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп. Исследования, использующие данный метод, до недавнего времени всегда начинались с выбора некоторой свободной конструкции (того или иного частного случая фундаментальной группы графа групп) и конкретного аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$. Затем доказывались *а*) критерий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости выбранной конструкции в случае, когда все ее вершинные группы принадлежат классу $\mathcal{C}$, и *б*) общее достаточное условие $\mathcal{C}$-аппроксимируемости той же конструкции (называемое, как и метод, *фильтрационным*), используемое в случае произвольных вершинных групп. Последующая работа состояла в поиске различных дополнительных ограничений, при наложении которых на выбранную конструкцию условие из пункта *б* оказывалось бы выполненным. Описанная схема долгие годы успешно применялась при изучении аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений классами всех конечных групп и конечных p-групп (где p — некоторое простое число). Для других аппроксимирующих классов критерии из пункта *а* получались лишь при тех или иных дополнительных требованиях, накладываемых на свободную конструкцию. Доказательство отдельного фильтрационного условия в каждом из таких

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00166).

Соколов Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент, Ивановский государственный университет (Иваново, Россия); E. V. Sokolov (Ivanovo State University, Ivanovo, Russia)

случаев, поиск возможностей его применения (и все это — для конкретного аппроксимирующего класса групп) представлялись слишком трудоемким делом. Вместе с тем, несмотря на существенную попарную взаимосвязь формулировок известных критериев и условий из пп. *а* и *б*, становилось все более очевидным, что доказательства указанных условий и некоторые способы их использования имеют много общего. В результате возникла задача отыскания единого фильтрационного условия, справедливого для фундаментальной группы произвольного графа групп и для целого семейства аппроксимирующих классов. Одно из возможных решений этой задачи было получено в [2].

Далее будем предполагать, что Γ — некоторый граф групп, $\pi_1(\Gamma)$ — его фундаментальная группа и $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп (т. е. класс, содержащий неединичные группы и замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$). Оказалось, что для доказательства универсальной фильтрационной теоремы вместо критерия из пункта *а* нужно предполагать известным достаточное условие существования гомоморфизма группы $\pi_1(\Gamma)$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующего инъективно на всех вершинных группах (конкретная формулировка такого условия роли не играет). Отметим, что из наличия гомоморфизма с указанными свойствами следует $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\Gamma)$ и что обратное верно, если граф Γ и все его вершинные группы конечны. Поэтому найденное в [2] универсальное фильтрационное условие обобщает все полученные ранее результаты такого типа. Более важно, однако, то, что оно позволяет изменить последовательность действий при изучении аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп. Первой и основной задачей становится теперь поиск ограничений, которые достаточно наложить на группу $\pi_1(\Gamma)$ для того, чтобы она обладала гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-группу, инъективным на всех вершинных группах. Отыскание очередного набора таких ограничений практически сразу приводит к появлению соответствующих ему достаточных условий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\Gamma)$, справедливых уже без предположения о принадлежности вершинных групп классу $\mathcal{C}$. По сравнению с описанным выше традиционным подходом экономия сил здесь достигается, во-первых, за счет применения готового фильтрационного условия и, во-вторых, вследствие получения результатов об аппроксимируемости не каким-то конкретным, а произвольным (ну, или почти) корневым классом групп. Новая последовательность рассуждений была использована в статье [3], посвященной изучению фундаментальных групп графов групп с центральными реберными подгруппами. Наиболее свежий пример ее применения содержится в [4], где речь идет об HNN-расширениях и обобщенных свободных произведениях, только одна из реберных подгрупп которых лежит в центре соответствующей вершинной группы.

Литература

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc., **106**:2 (1963), 193-209.

2. *Соколов Е.В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. матем. журн., **62**:4 (2021), 878-893.

3. *Соколов Е.В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. матем. журн., **62**:6 (2021), 1382-1400.

4. *Соколов Е.В., Туманова Е.А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений // Направлена в Сиб. матем. журн.

ГРУППЫ ЙОРДАНОВА ТИПА

А.М. Старолетов

staroletov@math.nsc.ru

УДК 512.542

Аксиальные алгебры йорданова типа – коммутативные алгебры, порождённые идемпотентами, для которых выполнен аналог разложения Пирса. Каждому порождающему идемпотенту можно сопоставить инволютивный автоморфизм алгебры, называемый инволюцией Миямото. В данной работе мы классифицируем группы, которые порождаются тремя инволюциями Миямото и являются группами 4-транспозиций.

Ключевые слова: аксиальные алгебры, йордановы алгебры, группы 4-транспозиций

Groups of Jordan type

Axial algebras of Jordan type are commutative algebras generated by idempotents for which an analog of the Peirce decomposition holds. For each generating idempotent one can associate an involutive automorphism of the algebra called the Miyamoto involution. In this paper, we classify groups that are generated by three Miyamoto involutions and are 4-transposition groups.

Keywords: axial algebras, Jordan algebras, 4-transposition groups

---

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

Старолетов Алексей Михайлович, к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и математической логики, НГУ (Новосибирск, Россия); Alexey Staroletov (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Аксиальные алгебры йорданова типа были определены в 2015 г [1]. Они являются неассоцитивными коммутативными алгебрами, порождёнными идемпотентами. Порождающие идемпотенты называются осями, для них выполнено разложение аналогичное разложению Пирса для идемпотентов в йордановых алгебрах.

В силу существования разложения Пирса с каждой осью можно связать инволютивный автоморфизм алгебры, называемый инволюцией Миямото. Назовём группу, порождённую некоторым множеством инволюций Миямото, группой йорданова типа.

Пусть $n \geqslant 2$ – натуральное число. Группа n-транспозиций – это пара (G, D), где G – группа, порождённая нормальным множеством инволюций D, удовлетворяющая условию $|cd| \leqslant n$ для всех $c, d \in D$. Известно, что группы 3-транспозиций являются группами йорданова типа. Общая задача звучит так – какие (конечные) группы являются группами йорданова типа?

Наиболее актуальная проблема о классе аксиальных алгебр йорданова типа на данный момент – их классификация в случае конечной порождённости. Недавние исследования показывают, что один из краеугольных случаев в классификации – когда группа, порождённая инволюциями Миямото, является группой 4-транспозиций. Недавно были классифицированы 3-порождённые аксиальные алгебры йорданова типа [2]. Используя эту классификацию, мы описали все 3-порождённые группы 4-транспозиций среди групп йорданова типа.

Теорема 1. *Предположим, что группа G порождена тремя инволюциями Миямото τ_a, τ_b, τ_c некоторой аксиальной алгебры йорданова типа. Обозначим $D = \tau_a^G \cup \tau_b^G \cup \tau_c^G$ – объединение классов сопряжённости для τ_a, τ_b, τ_c. Тогда (G, D) является группой 4-транспозиций тогда и только тогда, когда G принадлежит множеству*

$$\{1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, S_3, S_4, D_8, D_{12}, L_2(7), ((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2, (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2\},$$

а множество D выбирается естественным образом.

Литература

1. *Hall J.I., Rehren F., Shpectorov S.*, Universal axial algebras and a theorem of Sakuma // J. Algebra, **421** (2015), 394-424.

2. *Gorshkov I., Staroletov A.*, On primitive 3-generated axial algebras of Jordan type // J. Algebra, **563** (2020), 74-99.

О СПЕКТРАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Х. Сташ

aidamir.stash@gmail.com

УДК 517.926

Установлено существование двух линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры показателей колеблемости смен знаков, нулей и корней которых совпадают с любым наперед заданным не более чем счетным и суслинским множеством соответственно.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, показатели Ляпунова

On the spectra of the exponents of oscillation of linear homogeneous differential equations of the third order

Established existence of two linear homogeneous differential equations of the third order with coefficients continuous on the time semiaxis, the spectra of exponents of oscillation of sign changes, zeros and roots of which coincide with any given in advance at most countable and Suslin sets, respectively.

Keywords: differential equations, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Lyapunov exponents

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых непрерывными функциями $a \equiv (a_1, \dots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$.

Определение 1[1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит смена знака функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2[2–3]. Фиксируем произвольное решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$. Для момента $t > 0$, ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ обозначим через $\nu^-(y, m, t)$, $\nu^0(y, m, t)$ и $\nu^+(y, m, t)$ число смен знаков, нулей и корней соответственно скалярного произведения $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$.

Определение 3[2–4]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости смен знаков*, *нулей* и *корней* произвольного решения $y \in$

Сташ Айдамир Хазретович, к.ф.-м.н., доцент, Адыгейский государственный университет (Майкоп, Россия); Aydamir Stash (Adyghe State University, Maikop, Russia)

$\mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ при $\alpha \in \{-,0,+\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\bullet(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(y) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\circ(y) \equiv \underline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right).$$

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) показатели равны между собой [3].

В работе [5] построены примеры двух линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры частот Сергеева смен знаков и нулей одного из которых состоят из множества рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а другого - из множества иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ и числа ноль. В [6] построено линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры частот Сергеева смен знаков которого совпадают с любым наперед заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим ноль. Основные результаты указанных работ [5,6] перенесены в настоящей заметке и на показатели колеблемости смен знаков, нулей и корней.

Теорема 1. *Для любого не более чем счетного множества неотрицательных чисел S существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, что при любом $\alpha \in \{-,0,+\}$ справедливо равенство*

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = S \cup \{0\}.$$

Следствие. *Существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, для которого при любом $\alpha \in \{-,0,+\}$ выполняются равенства*

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Теорема 2. *Для произвольного содержащего ноль суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, удовлетворяющее при любом $\alpha \in \{-,0,+\}$ равенствам*

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}.$$

Автор выражает благодарность профессору И.Н. Сергееву за обсуждение результатов настоящей работы.

Литература

1. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды сем. им. И. Г. Петровского, Вып. 25. (2006), 249-294.

2. *Сергеев И.Н.* Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения, **44**:11 (2008), 1577.

3. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы// Известия РАН. Сер. математ., **76**:1 (2012), 149-172.

4. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем //Труды сем. им. И. Г. Петровского, Вып. 31. (2016), 177-219.

5. *Войделевич А.С.* Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений//Известия НАН Беларуси. Серия физико-матем. наук, № 3 (2015), 17–23.

6. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Доклады НАН Беларуси, **60**:1 (2016), 24–31.

О РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ГАМИЛЬТОНОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Н.Н. Субботина, Е.А. Крупенников

subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

УДК 517.518

Доклад посвящен решению задачи динамической реконструкции неизвестного управления и порожденной им траектории динамической системы по неточным дискретным замерам реализованного наблюдаемого движения. Предлагается новый подход к решению таких задач. Особенность этого подхода — использование гамильтоновых конструкций из вспомогательных задач на поиск стационарных точек невыпуклых функционалов. Эффективность алгоритма обеспечивается сведением задачи динамической реконструкции к интегрированию линейных ОДУ.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, вариационное исчисление, гамильтоновы системы

To solving inverse problems of control theory by Hamiltonian constructions

The talk is devoted to the problem of dynamic reconstruction of an unknown control and the trajectory of a dynamic system by known inaccurate discrete measurements of the realized observed motion. A new approach to solving such problems is proposed. A feature of this approach is the use of Hamiltonian constructions from auxiliary problems for finding stationary points of non-convex functionals. The efficiency of the algorithm is ensured by reducing the problem of dynamic reconstruction to integrating linear ODEs.

Keywords: dynamical reconstruction, calculus of variations, Hamiltonian systems

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00362).

Субботина Нина Николаевна, чл.-корр. РАН, профессор, ИММ УрО РАН, УрФУ (Екатеринбург, Россия); Nina Subbotina (IMM UrB RAS, UrFU, Ekaterinburg, Russia)

Крупенников Евгений Александрович, ИММ УрО РАН, УрФУ (Екатеринбург, Россия); Evgenii Krupennikov (IMM UrB RAS, UrFU, Ekaterinburg, Russia)

В докладе представлен новый метод решения задачи динамической реконструкции (ЗДР) для динамических управляемых систем. Рассматриваются детерминированные аффинно-управляемые системы. Под ЗДР понимается задача построения аппроксимаций неизвестного управления по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории динамической системы, которая порождается этим управлением. Допустимые управления — измеримые функции, значения которых ограничены известным компактом.

В общем случае геометрические ограничения на управления невыпуклые, что может привести к возникновению так называемых скользящих управлений [1]. Для описания таких режимов работы динамической системы вводятся обобщенные управления [1].

Предложенный авторами доклада новый подход [2,3] к решению ЗДР опирается на вспомогательные вариационные задачи для регуляризованных интегральных функционалов невязки. Отличительная особенность подхода — использование невыпуклых функционалов. При этом во вспомогательных задачах ищутся лишь стационарные точки функционалов, а не экстремум. Такой подход обеспечивает устойчивость решений по отношению к возмущению входных данных.

На основание этого подхода разработан и обоснован алгоритм [2,3], позволяющий строить аппроксимации неизвестного управления, сходящиеся к искомому при условии выполнения определенных условий согласования параметров аппроксимации. Эффективность алгоритма обусловлена сведением решения ЗДРУ к интегрированию линейных ОДУ.

Недостатком алгоритма, опубликованного в работах [2,3], является тот факт, что предложенные аппроксимации решения ЗДР являются функциями, ограниченными равномерно по параметрам аппроксимации, однако не гарантируется, что эти функции удовлетворяют известным геометрическим ограничениям на допустимые управления. В докладе предлагается развитие подхода, позволяющее строить аппроксимации искомого управления в форме кусочно-постоянных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям на управления, в том числе и для случая невыпуклых ограничений. Работа алгоритма апробирована на ряде модельных задач.

Литература

1. *Гамкрелидзе Р.В.* Сопряженные операторы обобщенного сдвига // Основы оптимального управления. — Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1977.

2. *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т.27, № 2, 208-220.

3. *N.N. Subbotina, E.A. Krupennikov* Reconstruction of Sliding Controls // MATEC Web of Conferences. 2022. 362. Art. no. 01030. 9 p.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕКОЭРЦИТИВНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

М.Д. Сурначёв
peitsche@yandex.ru

УДК 517.956

Для некоэрцитивной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме со сносом обсуждаются оценки типа М. Чикко.

Ключевые слова: уравнения эллиптического типа, задача Дирихле, некоэрцитивные задачи

Estimates of solutions to noncoercive elliptic problems

We discuss M. Chicco type estimates for noncoercive Dirichlet problem for second order elliptic equation of divergent type

Keywords: elliptic equations, Dirichlet problem, noncoercive problems

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, рассматриваются задачи Дирихле

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{1}$$

и

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u + \mathbf{b}(x)u) = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{2}$$

где матрица $\mathbf{A} \in (L^\infty(\Omega))^{n\times n}$ симметрическая и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi \leqslant M|\xi|^2, \quad M,\nu > 0,$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Пространство $W_0^{1,2}(\Omega)$ есть замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, а $W^{-1,2}(\Omega)$ — сопряжённое к нему пространство. Предположим, что $|\mathbf{b}|^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ и выполняется неравенство типа Харди:

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^2\varphi^2\,dx \leqslant C_H^2 \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Определим на $W_0^{1,2}(\Omega)$ билинейную форму

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega (\mathbf{A}\nabla u\cdot\nabla v + \mathbf{b}v\cdot\nabla u)\,dx.$$

Эта форма ограничена:

$$|a(u,v)| \leqslant (M + C_H)\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Сурначёв Михаил Дмитриевич, д.ф.-м.н., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Mikhail Surnachev (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Функцию $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ будем называть решением задачи (1) (соотв. задачи (2)), если $a(u,v) = \langle f, v\rangle$ (соотв. $a(v,u) = \langle f, v\rangle$) для всех $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

В случае малости величины C_H форма $a(\cdot,\cdot)$ коэрцитивная,

$$a(u,u) \geqslant (\nu - C_H)\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

откуда по лемме Лакса-Мильграма следует однозначная разрешимость задач (1), (2) вместе с оценкой

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant (\nu - C_H)^{-1}\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}.$$

Без условия малости, для решения задачи (1) в случае $\mathbf{b} \in (L^n(\Omega))^n$ оценка вида

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant K\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \tag{3}$$

с константой K, зависящей лишь от n, ν, $\|\mathbf{b}\|_{(L^n(\Omega))^n}$, была установлена в работе М. Чикко [1], см. также работы [2]–[4]. Используя метод двойственности, эту оценку можно перенести и на решение задачи (2).

В докладе будут обсуждаться различные варианты оценок типа Чикко (–Боттаро–Марина) для задач (1), (2) для $\mathbf{b}$ из классов Лебега, Лоренца и Като, а также теоремы существования и единственности задач (1), (2).

Сформулируем простой вариант оценок такого рода. Пусть для некоторого $\varepsilon \in (0,1]$ имеет место

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}'', \quad \text{где} \quad \mathbf{b}' \in (L^n(\Omega))^n \quad \text{и}$$
$$|\mathbf{b}''(x)| \leqslant (n-2)(1-\varepsilon)\nu|x|^{-1}/2 \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega.$$

Пусть $S = S(n)$ — константа в теореме вложения С.Л. Соболева из $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^{2n/(n-2)}(\Omega)$:

$$\|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega} \leqslant S\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Пусть m — наибольшее число из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что

$$m \leqslant \left(\frac{2S}{\varepsilon\nu}\right)^n \int\limits_{\Omega} |\mathbf{b}'|^n\,dx.$$

Теорема 1. *Для решений задач* (1), (2) *справедлива оценка* (3) *с константой* $K = (2/\varepsilon)^{m+2}\nu^{-1}$.

Для решения задачи (1) оценка получается методом [1]. Для решений задачи (2) оценки получаются прямым методом без использования двойственности, что позволяет рассматривать также нелинейные уравнения такого типа.

Литература

1. *Chicco M.* An apriori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type // Matematiche (Catania), **26** (1971), 173–182.

2. *Bottaro G., Marina M.E.* Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati // Boll. Unione Mat. Ital. (4), **8** (1973), 46–56.

3. *Bottaro G.* Problema al contorno misto per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (8), **55**:3–4 (1973), 187–193.

4. *Bottaro G.* Alcune condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione di una disequazione variazionale non coerciva // Ann. Mat. Pura Appl. (4), **106** (1975), 187—203.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

Д.В. Талалаев

dtalalaev@yandex.ru

УДК 512, 519.17

Полностью положительные матрицы лежат в основе современной бурно развивающейся области кластерных алгебр, имеют приложения в интегрируемых моделях статистической физики, теории представлений квантовых алгебр, диофантовых уравнениях и многих других областях. Вместе с тем возникли они в контексте классической задачи малых колебаний линейных упругих континуумов. В докладе пойдет речь о происхождении этих структур, основных характеристических свойствах полностью положительных матриц, об их лагранжевой версии и связи с теорией электрических сетей.

Ключевые слова: кластерные алгебры, осцилляторные матрицы, электрические сети

Positive matrices and electrical networks

Completely positive matrices underlie the modern rapidly developing field of cluster algebras, have applications in integrable models of statistical physics, representation theory of quantum algebras, diophantine equations and many other fields. At the same time, they arose in the context of the classical problem of small oscillations of linear elastic continuums. The report is focused on the origin of these structures, the main characteristic properties of completely positive matrices, their Lagrangian version and their connection with the theory of electrical networks

Keywords: cluster algebras, oscillatory matrices, electrical networks

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-71-10110).

Талалаев Дмитрий Валерьевич, д.ф.-м.н., с.н.с, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Dmitry Talalaev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Определение. Вещественная матрица называется полностью положительной (неотрицательной) если все ее миноры положительны (неотрицательны).

Определение. Полностью неотрицательным грассманианом $G_{\geqslant 0}(n,k)$ называется подмножество грассманиана, состоящее из подпространств, координаты Плюккера которых могут быть выбраны неотрицательными.

Основные структурные вопросы теории полностью положительных матриц включают способы их параметризации, в том числе выбор минимальных достаточных наборов миноров, положительность которых гарантирует положительность всех миноров. Например, полностью положительные матрицы 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

можно параметризовать двумя способами: в одной карте достаточными минорами являются $\{a, b, c, Det(A)\}$, а в другой - $\{d, b, c, Det(A)\}$. Положительность миноров в одной карте влечет положительность в другой.

Теория электрических сетей имеет много общего с задачей параметризации полностью положительных матриц и полностью положительных грассманианов. Прежде всего напомним, что электрическая сеть представляет собой граф Γ с набором вершин, в котором выделено подможество внешних вершин $V_B \subset V = \{1, \ldots, n\}$, функция веса ребра $c : E \to \mathbb{R}^+$, представляющая собой его проводимость. Матрицей Кирхгофа сети называется матрица

$$T_{ij} = \begin{cases} -c_{ij} & \text{если} \quad i \neq j \\ \sum_{k \neq i} c_{ik} & \text{если} \quad i = j \end{cases}$$

Классическим вопросом относительно электрической сети является определение токов, протекающих через граничные точки $I : V_B \to \mathbb{R}$, при заданных потенциалах $U : V_B \to \mathbb{R}$. Если представить матрицу Кирхгофа в блочной форме:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

то связь токов и потенциалов задается матрицей отклика

$$I = M_R U,$$

которая определяется как дополнение Шура

$$M_R = A - BC^{-1}B^T.$$

Замечания. Множество матриц отклика сетей с заданным количеством граничных точек обладает многими свойствами полностью положительных матриц. Они характеризуются условием положительности специальных миноров, называемых циркулярными. Эти матрицы имеют параметризации, родственные тому, как параметризуются полностью положительные матрицы. Приведем один из результатов, полученный в работах [1], [2].

Пусть $M_R = (x_{ij})$ — матрица отклика электрической сети с n граничными точками. Определим точку $\mathrm{Gr}(n-1, 2n)$ как пространство, порожденное строками матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \cdots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Теорема. *Пространство строк* Ω *определяет точку лагранжева полностью неотрицательного Грассманиана* $\mathrm{LG}_{\geqslant 0}(n-1, V)$ *для некоторого симплектического пространства* V.

Литература

1. *Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D.* Сопряженные операторы обобщенного сдвига // Принято к публикации в Московском математическом журнале.

2. *Талалаев Д. В.*, Вершинная электрическая модель: лагранжевы и неотрицательные свойства // ТМФ, 210:2 (2022), 250–258

РАССТОЯНИЕ НРОМОВА – ХАУСДОРФА МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ ВЕРШИН ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ВПИСАННЫХ В ОДНУ ОКРУЖНОСТЬ

Т.К. Талипов

talipovtalant.live@gmail.com

УДК 517.518

В работе вычислено расстояние Громова – Хаусдорфа между множествами вершин правильных n- и m-угольников, наделенных метрикой, индуцированной с окружности, когда m нацело делится на n. Также вычислены все расстояния до 2- и 3-угольников.

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Громова – Хаусдорфа, метрическое пространство.

Gromov – Hausdorff distance between the vertex sets of regular polygons inscribed in a given circle

We calculate the Gromov – Hausdorff distance between vertex sets of regular polygons endowed with the round metric. We give a full answer for the case of n- and m-gons with m divisible by n. Also, we calculate all distances to 2-gons and 3-gons.

Keywords: metric geometry, Gromov – Hausdorff distance, metric space.

Талипов Талант Камбарович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Talant Talipov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $d(x, y)$ или $|xy|$. Для непустых $A, B \subset X$ определим

$$d_H(A,B) = \max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\bigr\}.$$

Определение. Величина $d_H(A, B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа* между A и B.

Определение. Для множеств X, Y *соответствием* между X и Y называется $R \subset X \times Y$ такое, что для любого $x \in X$ существует $y \in Y$, для которых $(x, y) \in R$ и, обратно, для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, для которых $(x, y) \in R$. Если X, Y — метрические пространства, то определим *искажение соответствия* R следующим образом:

$$\operatorname{dis} R = \sup\Bigl\{\bigl||x_1x_2| - |y_1y_2|\bigr| : (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R\Bigr\}.$$

Множество всех соответствий между X и Y будем обозначать $\mathcal{R}(X, Y)$.

Теорема 1 ([1]). *Для произвольных метрических пространств X и Y выполняется*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

В работе [2] рассматривалось следующее преобразование метрики. Для метрического пространства (X, d_X) рассмотрим псевдометрическое пространство (X, u_X), где $u_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$ определено следующим образом:

$$u_X\ (x,y) \mapsto \inf\bigl\{\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d_X(x_i,x_{i+1}) : x_0 = x, ..., x_n = y\bigr\}.$$

Метрическое пространство $\mathbf{U}(X)$ определим как факторпространство (X, u_X) по следующему отношению эквивалентности:

$$x \sim y \iff u_X(x,y) = 0.$$

Теорема 2 ([2]). *Для любых метрических пространств X и Y выполняется следующее неравенство*:

$$d_{GH}(X,Y) \geqslant d_{GH}\bigl(\mathbf{U}(X),\mathbf{U}(Y)\bigr).$$

Для каждого натурального $n \geqslant 2$ обозначим через P_n множество вершин правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность S^1. Отметим, что P_2 — пара диаметрально противоположных точек. Наделим множества P_n метрикой, индуцированный с окружности. Для $m, n \geqslant 2$ положим $p_{m,n} = d_{GH}(P_m, P_n)$.

Предложение 1 ([2]). *Для любого* $m \geqslant 2$ *выполняется*

$$d_{GH}(S^1, P_m) = \frac{\pi}{m};$$

$$d_{GH}(P_m, P_{m+1}) = \frac{\pi}{m+1}.$$

Перейдем к основным результатам работы.

Теорема 3. *Пусть* $2 \leqslant n \leqslant m$ *и* m *делится на* n *без остатка, тогда*

$$p_{n,m} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}.$$

Теорема 4. *Пусть* $m \geqslant 2$*, тогда*

$$p_{2,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}, & \text{если } m \text{ — нечетное;} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } m \text{ — четное.} \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть* $m \geqslant 3$*, а* r *— остаток от деления* m *на* 3*, тогда*

$$p_{3,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } r = 0; \\ \frac{\pi}{3} - \frac{r\pi}{3m}, & \text{если } r \neq 0. \end{cases}$$

Литература

1. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии // Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

2. *Lim S., Memoli F., Smith Z.* The Gromov–Hausdorff distance between spheres // ArXiv e-prints, arXiv:2105.00611v5, 2022.

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ГИПЕРГРАФОВ И ИХ СПЕКТРЫ

А.А. Тараненко
taa@math.nsc.ru

УДК 519.179.1, 519.174.7, 519.177

Совершенной k-раскраской гиперграфа назовем такую раскраску его вершин в k цветов, что цвет вершины однозначно определяет раскраску инцидентных ей гиперребер. Мы покажем, что многие хорошие алгебраические свойства совершенных раскрасок графов остаются верными и для гиперграфов.

Ключевые слова: совершенная раскраска, собственные числа гиперграфов, накрытия гиперграфов, многомерная матрица смежности

Perfect colorings of hypergraphs and their spectra

A perfect k-coloring of a hypergraph is a coloring of its vertices into k colors such that the color of a vertex uniquely defines the color ranges of incident hyperedges. We show that many nice algebraic properties of perfect colorings of graphs remain true for hypergraphs.

Keywords: perfect coloring; eigenvalues of hypergraphs; coverings of hypergraphs; multidimensional adjacency matrix

Пусть $\mathcal{G}(X,E)$ – гиперграф с множеством вершин X и множеством гиперребер E. Функцию $f : X \to \{1,\dots,k\}$ будем называть раскраской $\mathcal{G}$ в k цветов (k-раскраской). Цветовой состав $f(e)$ гиперребра – это множество цветов всех инцидентных ему вершин: $f(e) = \{f(x)|x \in e\}$.

Раскраску f гиперграфа $\mathcal{G}$ назовем совершенной, если любые вершины x и y одного цвета имеют одинаковый цветовой состав инцидентных гиперребер.

Каждой k-раскраске f гиперграфа $\mathcal{G}(X,E)$ на n вершинах можно сопоставить матрицу раскраски P размеров $n \times k$ такую, что $p_{x,i} = 1$, если $f(x) = i$, и $p_{x,i} = 0$ иначе.

Пусть $[n] = \{1,\dots,n\}$. d-мерной матрицей $\mathbb{A}$ порядка n назовем массив (a_α), $a_\alpha \in \mathbb{R}$, где $\alpha \in [n]^d$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$. d-мерная матрица $\mathbb{A}$ порядка n является матрицей смежности d-однородного гиперграфа $\mathcal{G} = (X,E)$ на n вершинах, если ее элементы a_α для $\alpha = (x_1,\dots,x_d) \in E$ равны $(d-1)!^{-1}$, а все остальные элементы a_α равны 0.

Предположим, что $\mathbb{A}$ – d-мерная матрица порядка n и $\mathbb{B}$ – t-мерная матрица того же порядка. Определим произведение $\mathbb{A}\circ\mathbb{B}$ как $((d-1)(t-1)+1)$-мерную матрицу $\mathbb{C}$ порядка n с элементами

$$c_{i,\beta^2,\dots,\beta^d} = \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_d=1}^{n} a_{i,i_2,\dots,i_d} \cdot b_{i_2,\beta^2} \cdots b_{i_d,\beta^d},$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00202.
Тараненко Анна Александровна, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт математики имени С.Л. Соболева (Новосибирск, Россия); Anna Taranenko (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

где индексы $\beta^2, \ldots, \beta^d \in [n]^{t-1}$, $i \in [n]$.

Будем говорить, что $\lambda \in \mathbb{C}$ – собственное число d-мерной матрицы $\mathbb{A}$ порядка n, если существует вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $A \circ x = \lambda \mathbb{I} \circ x$. Здесь $\mathbb{I}$ обозначает d-мерную единичную матрицу порядка n, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы нулевые. Вектор x называется собственным вектором для собственного числа λ.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{G}$ – d-однородный гиперграф с d-мерной матрицей смежности $\mathbb{A}$. Тогда раскраска P гиперграфа $\mathcal{G}$ в k цветов является совершенной тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}$. Более того, элементы s_γ матрицы $\mathbb{S}$ равны*

$$s_\gamma = v_{\gamma_1,\gamma} \cdot \binom{d-1}{d_1, \ldots, d_k}^{-1},$$

где $v_{\gamma_1,\gamma}$ – число гиперребер цветового состава γ, инцидентных вершине цвета γ_1, цвет l входит в мультимножество $\{\gamma_2, \ldots, \gamma_d\}$ ровно d_l раз, $\binom{d-1}{d_1,\ldots,d_k}$ – мультиномиальный коэффициент.

Матрица $\mathbb{S}$, определенная в Теореме 1, называется матрицей параметров совершенной раскраски P.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{G}$ – d-однородный гиперграф с матрицей смежности $\mathbb{A}$ и P – его совершенная раскраска с матрицей параметров $\mathbb{S}$. Если λ и x – собственные число и вектор для матрицы $\mathbb{S}$, то λ и Px – собственные число и вектор для матрицы $\mathbb{A}$.*

Будем говорить, что гиперграф $\mathcal{G}$ накрывает гиперграф $\mathcal{H}$, если существует отображение (накрытие) $\varphi : X(\mathcal{G}) \to X(\mathcal{H})$ такое, что для любого гиперребра $e \in E(\mathcal{G})$ множество $\{\varphi(x) | x \in e\}$ образует гиперребро в $\mathcal{H}$ и φ сохраняет отношение инцидентности между гиперребрами и вершинами.

Утверждение 1. *Отображение $\varphi : X(\mathcal{G}) \to X(\mathcal{H})$ является накрытием гиперграфа $\mathcal{H}$ гиперграфа $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда φ – это совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ равной матрице смежности $\mathbb{A}_H$ гиперграфа $\mathcal{H}$.*

Теорема 3. *Предположим, что однородный гиперграф $\mathcal{G}$ накрывает гиперграф $\mathcal{H}$. Тогда для любой совершенной раскраски $\mathcal{H}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ существует совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с той же матрицей параметров $\mathbb{S}$.*

Теорема 4. *Если связные гиперграфы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ имеют совершенные раскраски с одинаковыми матрицами параметров $\mathbb{S}$, то существует гиперграф $\mathcal{G}$ который накрывает и $\mathcal{H}$, и $\mathcal{H}'$.*

Подмножество вершин гиперграфа $\mathcal{G}$, которое протыкает каждое его гиперребро ровно k раз, назовем k-трансверсалью. 2-раскраска вершин однородного регулярного гиперграфа по их принадлежности k-трансверсали является совершенной.

Теорема 5. *Пусть $\mathbb{S}$ – матрица параметров совершенной раскраски, построенной по k-трансверсали в d-однородном r-регулярном гиперграфе $\mathcal{G}$. Тогда собственные числа $\mathbb{S}$ есть $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_j = r\xi^{jk}$, где ξ – примитивный корень из единицы степени d.*

ИЗ ТЕОРИИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков

ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.518.82

Дан краткий обзор результатов, полученных авторами за последние десять лет по теории классических полиномов Бернштейна. Основное внимание уделено специальному случаю кусочно линейных порождающих функций. Приведен подробный список литературы.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, кусочно линейные функции, алгебраические соотношения, распределение нулей.

From the theory of Bernstein polynomials

A brief review of the authors' results on the theory of classical Bernstein polynomials is given. The main attention is paid to the specific case of piecewise linear generating functions. The bibliography lists all major publications.

Keywords: Bernstein polynomials, piecewise linear functions, algebraic relations, distribution of zeros.

В последнее десятилетие был выполнен большой цикл исследований, связанных с полиномами Бернштейна в специальных ситуациях. Основные публикации в их хронологическом порядке представлены в списке литературы [1–17]. Среди прочего для полиномов Бернштейна от кусочно линейных порождающих функций рассмотрен вопрос о характере сходимости в комплексной плоскости и построена завершенная теория аттракторов нулей (см. [6–9, 13–15, 17]). Для основных модельных примеров

- получен ряд новых алгебраических представлений (см. [1, 2, 5, 13]);
- указаны точные оценки скорости роста возникающих коэффициентов (см. [1–3, 10, 11]);
- установлены связи полиномов Бернштейна с полиномами Канторовича, что дает новые возможности для изучения последних (см. [16, 17]).

Работа подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Тихонов Иван Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Ivan Tikhonov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Шерстюков Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Vladimir Sherstyukov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Отдельно поставлена и решена задача о принципиальных отличиях в теории при ее переносе на симметричный отрезок $[-1, 1]$ (см. [4, 5, 10–12]). Активное участие в проводимых исследованиях приняли наши коллеги, молодые математики М. А. Петросова, Д. Г. Цветкович, И. В. Окорочков.

Литература

1. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика, **15**:26 (2012), 6-40.

2. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — 126-175.

3. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Некоторые актуальные проблемы совр. матем. и матем. образ. Материалы научн. конф. «Герценовские Чтения — 2015». СПб. Изд-во: РГПУ им. А.И. Герцена, 2015. — 115-121.

4. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **15**:3 (2015), 288-300.

5. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А.* Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **16**:4 (2016), 425-435.

6. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.* Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы совр. матем. и матем. образ. Материалы научн. конф. «Герценовские Чтения — 2016». СПб. Изд-во: РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. — 139-145.

7. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.* Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундам. и прикл. матем., **21**:4 (2016), 151-174.

8. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.* Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференц. уравнения и процессы управления, 2 (2017), 59-73.

9. *Цветкович Д.Г.* Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челяб. физ.-матем. журн., **3**:1 (2018), 58-89.

10. *Петросова М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* О росте коэффициентов в полиномах Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Уфимск. матем. журн., **10**:3 (2018), 60-78.

11. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А.* Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной матем. и их прилож. Вып. 19. Материалы XIX межд. научн. конф., посв. 100-летию физ.-матем. ф-та Смоленского гос. ун-та. Смоленск. Изд-во: СмолГУ, 2018. — 336-347.

12. *Петросова М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке и связанные с ней комбинаторные соотношения // Владикавк. матем. журн., **21**:3 (2019), 68-86.

13. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техн. Сер. Совр. матем. и ее прилож. Темат. обзоры ВИНИТИ, **170** (2019), 71-117.

14. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.* О скорости сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области на классе кусочно линейных порождающих функций // Некоторые актуальные проблемы совр. матем. и матем.

образ. Материалы научн. конф. «Герценовские Чтения — 2019». СПб. Изд-во: РГПУ им. А.И. Герцена, 2019. — 116-121.

15. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна: новые продвижения и возможные обобщения // Совр. проблемы теории функций и их прилож.: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2020. — 409-414.

16. *Окорочков И.В., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* О связи полиномов Бернштейна и Канторовича для симметричного модуля // Владикавк. матем. журн., **24**:1 (2022), 87-99.

17. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г., Окорочков И.В.* Использование компьютерной математики для визуализации областей, связанных со сходимостью полиномов Бернштейна и Канторовича // Системы компьютерной матем. и их прилож. Вып. 23. Материалы XXIII межд. научн. конф. Смоленск. Изд-во: СмолГУ, 2022. — 298-307.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ МНОГОМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

И.А. Тлюстангелов

ibragim-tls@yandex.ru

УДК 511.48

Данный доклад посвящен доказательству утверждения о существовании в произвольной размерности палиндромичных цепных дробей. В качестве многомерного обобщения цепных дробей рассматриваются полиэдры Клейна.

Ключевые слова: полиэдры Клейна, циклические расширения

Cyclic symmetries of multidimensional continued fractions

This talk is devoted to the proof of the statement about the existence of palindromic continued fractions in an arbitrary dimension. As a multidimensional generalization of continued fractions, we consider Klein polyhedra.

Keywords: Klein polyhedra, cyclic extensions

Тлюстангелов Ибрагим Асланович, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия), Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Ibragim A. Tlyustangelov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Для понятия классической цепной дроби действительного числа известно несколько обобщений, одно из которых основывается на геометрической интерпретации цепной дроби, предложенной Ф. Клейном (см. [1]). А именно, пусть $l_1, \dots, l_n$ — одномерные подпространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Объединение выпуклых оболочек точек $\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ внутри этих симплициальных конусов называется $(n-1)$-мерной цепной дробью. Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах (см. [2]) любая $(n-1)$-мерная алгебраическая цепная дробь, соответствующая вполне вещественному расширению поля $\mathbb{Q}$ степени n, обладает богатой группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрий, действие которой сохраняет каждое из подпространств $l_1, \dots, l_n$ (см., например, [3]). Однако, у $(n-1)$-мерной алгебраической цепной дроби могут существовать и дополнительные $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрии, называемые палиндромическими. Такие симметрии нетождественным образом переставляют подпространства $l_1, \dots, l_n$. В данном докладе показывается, что для любого целого $n > 1$ существует $(n-1)$-мерная алгебраическая цепная дробь, обладающая палиндромическими симметриями (см. [4]).

Литература

1. *Klein F.* Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung. — Nachr. Ges. Wiss., Gottingen., **1895** (1895), 357–359.

2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел — Наука, 1964.

3. *Герман О.Н., Тлюстангелов И.А.* Симметрии двумерной цепной дроби — Изв. РАН. Сер. матем., **85**:4 (2021), 666–680.

4. *Тлюстангелов И.А.* Собственные циклические симметрии многомерных цепных дробей — Матем. сб., **213**:9 (2022), 138–166.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В.В. Ульянов

vulyanov@cs.msu.ru

УДК 519.214

Доклад состоит из трех частей. В первой части описан общий подход, приводящий к оценкам точности приближений для распределений статистик. Далее обсуждается использование общего подхода в ЦПТ для взвешенных сумм случайных элементов. При этом новые результаты в многомерной ЦПТ позволяют с помощью рандомизации заметно улучшить асимптотические свойства статистик.

Ключевые слова: неасимптотические оценки, взвешенные суммы, рандомизированные статистики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Ульянов Владимир Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Ulyanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Limit theorems for weighted sums and its applications

The report consists of three parts. The first part describes a general approach leading to estimates of the accuracy of approximations of distributions of statistics. The following discusses the use of the general approach in CLT for weighted sums of random elements. At the same time, new results in the multivariate CLT make it possible to improve the asymptotic properties of statistics using randomization.

Keywords: non-asymptotic estimates, weighted sums, randomized statistics.

В первой части доклада дан краткий обзор недавних результатов по неасимптотическим оценкам точности приближений для распределений нелинейных форм от случайных элементов. Как правило, рассматриваются нелинейные формы, встречающиеся в многомерной статистике, см., напр., [1–3].

Для получения указанных выше результатов используются различные методы. Вместе с тем в работе [4] предложен подход, позволяющий в достаточно общем случае доказывать неасимптотические результаты для нелинейных форм, включая случаи, когда в качестве приближений используются асимптотические разложения, а оценки точности приближений даются в терминах ляпуновских отношений. В [4] рассмотрен класс действительных функций $h_n(\varepsilon, ..., \varepsilon_n), n \geqslant 1$, на $\mathbb{R}^n$, симметричных относительно всевозможных перестановок своих аргументов, и таких, что $h_{n+1}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j, 0, \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n) = h_n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n)$ и

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} h_n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j, ..., \varepsilon_n)\Big|_{\varepsilon_j=0} = 0$$

для всех $j = 1, ..., n$.

Если рассмотреть последовательность независимых случайных элементов X_j с общим распределением P, то можно взять $h_n = \mathrm{E}F(\varepsilon_1(\delta_{X_1} - P) + \ldots + \varepsilon_n(\delta_{X_n} - P))$, т.е., h_n есть среднее гладкого функционала F от *взвешенного* эмпирического процесса с мерами Дирака в $X_1, \ldots, X_n$. Иными словами, h_n можно рассматривать как совокупность «вкладов» случайных элементов X_j. В общем случае зависимость F от этих мер нелинейна. В докладе показано (см.доказательства в [4]), что при выполнении «естественных» моментных условий на рапределение X_1 для указанного класса функций h_n существует «предельная» функция, а также можно выписать асимптотические разложения типа Чебышева–Эджворта. При этом ошибка приближения дается в терминах $|\varepsilon|^d := \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|^d$.

В докладе обсуждаются возможные приложения и уточнения общего подхода, в частности в центральной предельной теореме (ЦПТ) для взвешенных сумм случайных величин или случайных векторов, когда с большой вероятностью относительно меры на $(n-1)$-мерном единичном шаре распределения взвешенных сумм приближаются нормальным распределением с точностью порядка $O(n^{-1})$, см.[5].

В заключительной части доклада показано, что новые результаты в многомерной ЦПТ для взвешенных сумм позволяют с помощью рандомизации заметно улучшить асимптотические свойства статистик из широкого класса статистик критериев согласия со степенными мерами расхождения (примеры: статистика отношения правдоподобия, статистика Фримана–Тьюки, статистика Кресси–Рида) и ранговых статистик (примеры: статистика Фридмана, статистика Брауна–Муда), см.[6].

Литература

1. *Prokhorov Y.V., Ulyanov V.V.* Some approximation problems in statistics and probability// In Limit Theorems in Probability, Statistics and Number Theory. Editors: P. Eichelsbacher et al., Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **42** (2013), 235–249.

2. *Fujikoshi Y., Ulyanov V.V. Shimizu R.* Multivariate statistics: High-dimensional and large-sample approximations. — Hoboken, NJ.: John Wiley and Sons, 2011.

3. *Fujikoshi Y., Ulyanov V.V.* Non-Asymptotic Analysis of Approximations for Multivariate Statistics. — Singapore: Springer, 2020.

4. *Götze F., Naumov A.A., Ulyanov V.V.* Asymptotic analysis of symmetric functions// Journal of Theoretical Probability, **30**:3 (2017), 876–897.

5. *Ayvazyan S., Ulyanov V.* A Multivariate CLT for “Typical” Weighted Sums with Rate of Convergence of Order O(1/n) // arXiv: 2112.05815. (2021).

6. *Puchkin N., Ulyanov V.* Inference via Randomized Test Statistics // arXiv: 2112.06583. (2021).

ТРОПИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОМОСА

А.В. Устинов

ustinov.alexey@gmail.com

УДК 511

Для целого $k \geqslant 4$ последовательностью *Сомос–k* называется последовательность, задаваемая квадратичным рекуррентным соотношением

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j s_{n+k-j} s_{n+j},$$

где α_j — константы, $s_0, \ldots, s_{k-1}$ — начальные условия. Оказывается, что некоторые последовательности Сомоса являются целочисленными. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты последовательности Сомос–k при $k = 4, 5, 6, 7$ оказываются полиномами от начальных условий. При попытке изучать свойства этих полиномов, например, рост степеней, возникает необходимость рассматривать тропические аналоги последовательностей Сомоса. О них и пойдёт речь в докладе.

Ключевые слова: теория чисел

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-41-05001).

Устинов Алексей Владимирович, д.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва; Alexey Ustinov (National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia)

Tropical Somos sequences

For integer $k \geqslant 4$ Somos–k sequence is a sequence generated by quadratic recurrence relation of the form

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j s_{n+k-j}s_{n+j},$$

where α_j are constants and $s_0, \ldots, s_{k-1}$ are initial data. It turns out that some Somos sequences are integer. Under some additional conditions on the coefficients of the Somos–k-sequences at $k = 4, 5, 6, 7$ will be polynomials of initial conditions. When one tries to study properties of these polynomials, e.g. growth of powers, it becomes necessary to consider tropical analogues of Somos sequences. Such sequences will be discussed in the talk.

Keywords: number theory

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

И.В. Филимонова
filimi@yandex.ru

УДК 517.956

Изучается асимптотическое поведении при $t \to \infty$, определенных и положительных в цилиндрической области $\Omega \times (0, \infty)$, решений полулинейного параболического уравнения вида $u_t = Lu + f(u)$, где L(u) - дивергентного вида равномерно эллиптический оператор. Предполагается, что решение u удовлетворяет условию Неймана на $\partial\Omega \times (0, \infty)$, область $\Omega \subset R^n$ ограничена. Условия на функция $f(u)$ таковы, чтобы им удовлетворяла функция $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$.

Ключевые слова: полулинейное уравнение, асимптотическое поведение, цилиндрическая область

The asymptotic behavior of positive solutions of a semilinear parabolic equation in a cylinder

We study the asymptotic behavior for $t \to \infty$, solutions of a semilinear parabolic equation of the form $u_t = Lu + f(u)$, where L(u) where L is a uniformly elliptic divergent operator. It is assumed that the solution u satisfies the Neumann condition on $\partial\Omega \times (0, \infty)$, $\Omega \subset R^n$ is a bounded domain. The conditions on the function $f(u)$ are such that they are satisfied by the function $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$.

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory

Филимонова Ирина Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Irina Filimonova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

В работе изучаются положительные решения полулинейного параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + f(u). \qquad (1)$$

определенные в цилиндрической области $\Omega \times (0,\infty)$ и удовлетворяющие условию Неймана на $\partial\Omega \times (0,\infty)$. Предполагается, что область $\Omega \subset R^n$ ограничена, коэффициенты $a_{i,j}(x,t)$ — ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие по x условию равномерной эллиптичности

$$\lambda_1|\xi|^2 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j < \lambda_2|\xi|^2,$$

постоянные $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ не зависят от t. Под решением уравнения (1) понимается функция из $W^{1,1}_{2,loc}$, удовлетворяющая уравнению (1) в смысле интегрального тождества.

В работе [1] рассматривались положительные решения уравнения (1) с функцией $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$. Для решений, удовлетворяющих условию Неймана,в [1] получена формула

$$u(x,t) = [a_0(1-q)(t+t_0)]^{1/(1-q)} + O(e^{-\delta t}),$$

где $\delta > 0$ не зависит от $u(x,t)$, а постоянная t_0 однозначно определяется решением $u(x,t)$. Цель настоящей работы сформулировать такие условия на функцию $f(u)$, что бы для решения была верна аналогичная формула.

В работах [2], [3] были получены условия на нелинейный член, при которых для решений будут иметь место формулы, которые верны для $f(u) = -u^q$, $q > 1$. Точнее в работах [2], [3] рассматривалось уравнение $u_t = Lu - a(x)f(u)$ с коэффициентами оператора L, не зависящими от t, $a(x) > 0$, и были получены условия на $f(u)$, что для положительных решений, удовлетворяющих условию Неймана, при $t \to \infty$ имеет место формула $u(x,t) = \alpha(t)(1+o(t))$, где $\alpha(t)$ — некоторое решение обыкновенного дифференциального уравнения $\dot\alpha = -a_0 f(\alpha)$, с постоянной $a_0 > 0$, не зависящей от $u(x,t)$.

Перейдем к результатам настоящей работы.

Пусть $f(u) > 0$ при $u \in (0,\infty)$ и $f(u)/u \to 0$ при $u \to \infty$ тогда для любых $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ положительных при $t > t_0$ решений уравнения $\dot\beta(t) = f(\beta)$ имеет место $\beta_1(t)/\beta_2(t) = 1$ и $\beta_1(t) = \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f(u) > 0$ для $u \in (0,\infty)$, $f(u)/u \to 0$ при $u \to \infty$, $f'(u)$ монотонно убывает по u на $(0,\infty)$. Пусть $\beta(t)$ решение уравнения $\dot\beta(t) = f(\beta)$ такое, что $\beta(0) = 1$, и выполнено $f(\beta(t))/\beta(t) = O(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Тогда положительное в $\Omega \times (0,\infty)$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию Неймана, стремится к ∞ при $t \to \infty$ и имеет место формула*

$$u(x,t) = \beta(t+t_0) + O(e^{-\delta t}),$$

где $\delta > 0$ *не зависит от* $u(x,t)$, *постоянная* t_0 *однозначно определяется решением* $u(x,t)$.

Литература

1. *Filimonova I.V.* Asymptotic Behaviour of Positive Solutions of a Semilinear Parabolic Equation // Russian Journal of Mathematical Physics, **10**:2 (2003), 234-237.

2. *Филимонова И.В.* О поведении решений полулинейного параболического или эллиптического уравнения, удовлетворяющих нелинейному краевому условию, в цилиндрической области// Труды семинара им. И. Г. Петровского, **26**, (2007), 369–390.

3. *Кондратьев В.А.* Об асимптотическом поведении решений нелинейных параболических уравнений второго порядка // Труды МИАН, **260**, (2008), 180–192.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ РОБЕНА С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

А.В. Филиновский

flnv@yandex.ru

УДК 517.956.226

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей $\Gamma \in C^2$ рассматривается краевая задача Робена на собственные значения для оператора Лапласа с параметром в граничном условии. Изучается асимптотическое поведение собственных значений задачи при больших вещественных значениях параметра.

Ключевые слова: оператор Лапласа, задача Робена, собственное значение, параметр, асимптотика

On Robin boundary value problems with a large parameter

In a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, with boundary $\Gamma \in C^2$, we consider Robin's boundary eigenvalue problem for the Laplace operator with a parameter in the boundary condition. We study the asymptotic behavior of the eigenvalues of the problem for large real values of the parameter.

Keywords: Laplace operator, Robin problem, eigenvalue, parameter, asymptotics

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20272).

Филиновский Алексей Владиславович, д.ф.-м.н., профессор, МГТУ имени Н.Э. Баумана, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexey Filinovskiy, Dr. Sc. (Phys. - Math.), Professor, (Bauman Moscow State Technical University, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей $\Gamma \in C^2$ рассмотрим краевую задачу Робена на собственные значения:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\right)\bigg|_{x \in \Gamma} = 0, \tag{2}$$

где α — вещественный параметр. В этой же области рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{x \in \Gamma} = 0,$$

обозначая через λ_1^D её первое собственное значение, а через $u_1^D(x)$ — соответствующую нормированную собственную функцию ($\|u_1^D\|_{L_2(\Omega)} = 1$).

Рассмотрим теперь неоднородную задачу Дирихле

$$\Delta v + \lambda_1^D v = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds\, u_1^D, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$v|_{x \in \Gamma} = -\left.\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right|_{x \in \Gamma}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Задача (3) — (4) имеет единственное решение $v \in H^1(\Omega)$ удовлетворяющее условию*

$$\int_\Omega v u_1^D dx = 0.$$

Обозначим через $\lambda_1^R(\alpha)$ первое собственное значение задачи Робена (1) — (2).

Теорема 2. *Справедливо асимптотическое разложение*

$$\lambda_1^R(\alpha) = \lambda_1^D - a_1\alpha^{-1} - a_2\alpha^{-2} + o\left(\alpha^{-2}\right), \quad \alpha \to +\infty,$$

где

$$a_1 = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds, \quad a_2 = \int_\Gamma \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} ds.$$

В ([1], [2]) получены следующие оценки.

Теорема 3. *Если $\Omega \subset B_{R_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_0\}$ и $\boldsymbol{b}(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x)) \in C^1(\overline{\Omega})$ — вектор-функция, то справедливы неравенства:*

$$\frac{2\lambda_1^D}{R_0} \leqslant a_1 \leqslant 4n \inf_{\substack{\boldsymbol{b} \in C^1(\overline{\Omega}) \\ \boldsymbol{b}|_\Gamma = \nu}} \max_{i,j=1,\ldots,n} \|(b_i)_{x_j}\|_{C(\overline{\Omega})} \lambda_1^D, \tag{5}$$

$$\|f(x)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|.$$

Определение 1. *Поверхность* Γ *называется строго звездной, если для всех* $x \in \Gamma$ *выполнено неравенство* $(\nu, x) > 0$.

Теорема 4. *Если* Γ *— строго звездная поверхность, то справедлива оценка:*

$$a_1 \leqslant \frac{2\lambda_1^D}{\inf\limits_{x\in\Gamma}(\nu, x)}. \tag{6}$$

Замечание 1. Для $\Omega = B_{R_0}(0)$ из оценок (5), (6) следует, что $a_1 = \frac{2\lambda_1^D}{R_0}$.

Замечание 2. В работе [3] получены асимптотические разложения по параметру собственных значений краевых задач для эллиптических уравнений с возмущением при не зависящих от параметра граничных условиях.

Литература

1. *Филиновский А.В.* О коэффициентах асимптотического представления первого собственного значения задачи Робена // Дифф. уравнения, **56**:11 (2020), 1564–1565.

2. *Filinovskiy A.V.* On some bounds for coefficients of the asymptotics to Robin eigenvalue // International workshop on the qualitative theory of differential equations, QUALITDE-2020, December 19-21, — A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University Tbilisi, Georgia, — P. 75–77.

3. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // Успехи мат. наук, **15**:3 (1960), 3–80.

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ С ОДНИМ ЦЕНТРОМ ГЕНЕРАЦИИ ЧАСТИЦ И БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОГЛОЩАЮЩИХ ИСТОЧНИКОВ

Е.М. Филичкина

elena.filichkina1999@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматривается новая модель ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам, когда, блуждая по решетке, частица может погибнуть в каждой точке и только в одной из них, например, в нуле, также может произвести потомство. Получена классификация асимптотического поведения целочисленных моментов общего числа частиц и числа частиц в каждой точке решетки в зависимости от соотношения между параметрами модели. В случае существования изолированного положительного собственного значения у эволюционного оператора средних численностей частиц получена предельная теорема об экспоненциальном росте численностей частиц.

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, эволюционный оператор, функция Грина

Филичкина Елена Михайловна, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Elena Filichkina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Branching random walks with one particle generation center and an infinite number of absorbing sources

A new model of branching random walks on multidimensional lattices is considered, when, walking along the lattice, a particle can die at any point and only at one of them, for example, at zero, can also produce offspring. A classification of the asymptotic behavior of the integer moments of the total number of particles and the number of particles at every lattice point is obtained depending on the relation between the model parameters. In the case of the existence of an isolated positive eigenvalue of the evolution operator of average particle numbers, a limit theorem on the exponential growth of particle numbers is obtained.

Keywords: branching random walks, evolution operator, Green's function

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, такое, что во всех точках решетки находятся источники, называемые *поглощающими*, в которых частица может только погибнуть, за исключением начала координат, где возможно также размножение частицы. Предполагается, что случайное блуждание, лежащее в основе процесса, удовлетворяет условиям регулярности, симметричности, однородности и неприводимости, а все частицы-потомки эволюционируют по тому же закону независимо друг от друга. В начальный момент времени система состоит из одной частицы, расположенной в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Основной целью исследования является асимптотический анализ числа частиц на всей решетке и численности частиц в каждой точке, а также асимптотический анализ их целочисленных моментов. Установлено, что первые моменты числа частиц в каждой точке и общего числа частиц удовлетворяют задаче Коши: $\dfrac{dm_1}{dt} = \mathcal{E}m_1$ с начальными условиями $m_1(0,x,y) = \delta_y(x)$ или $m_1(0,x) \equiv 1$ соответственно, где эволюционный оператор средних численностей частиц имеет вид $\mathcal{E} = \mathcal{A} + \beta\Delta_0 - b_0\mathcal{I}$, здесь $\mathcal{A} : l^p(\mathbb{Z}^d) \to l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — оператор блуждания, определенный в [1], параметр β определяется по формуле $\beta := \sum\limits_{n>1}(n-1)b_n$, где b_n — интенсивность появления у частицы $n > 1$ потомков, включая саму частицу, $\Delta_x = \delta_x\delta_x^T, \delta_x = \delta_x(\cdot)$ — вектор-столбец на решетке, принимающий единичное значение в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ и значение ноль в остальных точках решетки, $b_0 > 0$ — интенсивность гибели частиц в каждой точке решетки, а $\mathcal{I}$ — единичный оператор. Пусть параметр β_c определяется по формуле $\beta_c := 1/G_0(0,0)$, где $G_\lambda(x,y)$ — функция Грина случайного блуждания, а λ_0 — решение уравнения $\beta G_\lambda(0,0) = 1$. Получено, что поведение моментов зависит от размерности решетки, соотношения между параметрами β и β_c, а также от соотношения между λ_0 и b_0. Для всех случаев соотношения между параметрами β и β_c, а также для всех случаев соотношения между параметрами λ_0 и b_0 при $\beta > \beta_c$, получена классификация асимптотического поведения целочисленных моментов числа частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ $m_1(t,x,y)$ и общего числа частиц $m_1(t,x)$ для произвольных d-мерных решеток при $t \to \infty$. В случае, когда $\beta > \beta_c$ и $\lambda_0 > b_0$ происходит регулярный рост моментов и доказывается слабая сходимость численностей частиц к некоторой случайной величине, способ доказательства этой теоремы повторяет метод доказательства предельной теоремы, предложенный в [2]. Будем обозачать численность частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ как $\mu(t,y)$, общую численность (популяцию частиц) как $\mu(t)$, $\beta^{(r)} := f^{(r)}(1)$, где $f(u)$ — инфинитезимальная производящая функция процесса.

Теорема 1. *Пусть $\beta > \beta_c$ и $\lambda_0 > b_0$. Если $\beta^{(r)} = O(r!r^{r-1})$ для всех $r \in \mathbb{N}$, то в смысле сходимости по распределению справедливы соотношения*

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t,y)e^{-(\lambda_0-b_0)t} = \xi\psi(y), \quad \lim_{t\to\infty} \mu(t)e^{-(\lambda_0-b_0)t} = \xi,$$

где $\psi(y)$ — некоторая неотрицательная функция, а ξ — невырожденная случайная величина.

В случае $\lambda_0 = b_0$ получено, что целочисленные моменты имеют степенной рост при $t \to \infty$, при этом первые моменты асимптотически ведут себя как константы. В остальных случаях, то есть при $\lambda_0 < b_0$ и при отсутствии у оператора $\mathcal{E}$ изолированного собственного значения ($\beta \leqslant \beta_c$), получено, что целочисленные моменты численностей частиц экспоненциально убывают. Рассмотрен также случай, когда выполнено предположение, обеспечивающее бесконечную дисперсию скачков, такие случайные блуждания принято называть в литературе случайными блужданиями с тяжелыми хвостами. Оказывается, что все результаты, полученные для случая $\beta > \beta_c$, остаются верны. В случае же $\beta \leqslant \beta_c$ классификация асимптотического поведения моментов отличается от случая конечной дисперсии скачков, наблюдается более быстрое экспоненциальное убывание.

Литература

1. *Яровая Е. Б.* Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде, Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007.

2. *Христолюбов И. И., Яровая Е. Б.* Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности // Теория вероятн. и ее примен., 64:3, 2019. — 456-480. Theory Probab. Appl., 64:3, 2019. — 365-384.

ОТВЕТ НА ВОПРОС ДЖ. КЭННОНА И С. УЭЙМЕНТА

О.Д. Фролкина

olga-frolkina@yandex.ru

УДК 515.1

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение N 075-15-2022-284).

Фролкина Ольга Дмитриевна, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова и Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Olga Frolkina (Lomonosov Moscow State University and Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia)

В работе получен ответ на вопрос о дизъюнктных семействах компактов, поставленный в 1970 г.

Ключевые слова: математика, топология, ручные и дикие вложения

An answer to a question of J.W. Cannon and S.G. Wayment

We answer the question about disjoint families of compact sets, posed in 1970.

Keywords: mathematics, topology, tame and wild embeddings

Для любого непустого компакта X пространство $Emb(X, \mathbb{R}^N)$ вложений $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, наделенное метрикой $\rho(f,g) = \sup\{d(fx, gx) | x \in X\}$, является сепарабельным. Отсюда непосредственно вытекает известный результат: Пусть $\mathcal{F}$ — несчетное семейство взаимно непересекающихся гомеоморфных копий компакта X в $\mathbb{R}^N$; тогда существует такая последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{F}$, что $X_i \neq X_0$ для каждого $i > 0$ и $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно сходится к X_0.

Определение 1. *Последовательность множеств $X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ гомеоморфно сходится к множеству $X_0 \subset \mathbb{R}^N$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число n, что при $i \geqslant n$ имеется гомеоморфизм $h_i : X_0 \cong X_i$, перемещающий точки не более, чем на ε.*

В 1970 г. Дж. Кэннон и С. Уэймент поставили вопрос [1]: Пусть $X_0, X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ — последовательность попарно непересекающихся континуумов, гомеоморфно сходящаяся к X_0. Верно ли, что существует несчетное семейство попарно непересекающихся гомеоморфных копий X_0 в $\mathbb{R}^N$? (По теореме ван Дауэна, это эквивалентно вопросу о вложимости $X_0 \times \mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^N$, где $\mathcal{C}$ — канторово множество [2]; а согласно результату Тодорчевича [3], это эквивалентно вопросу о вложимости $X_0 \times \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}^N$.)

Этот вопрос до сих пор открыт. В работе [1] Кэннон и Уэймент получили положительный ответ при дополнительном предположении: если $X_0, X_1, X_2, \ldots$ вложены в $\mathbb{R}^N$ эквивалентно друг другу.

Определение 2. *Два подмножества $X, X' \subset \mathbb{R}^N$* объемлемо гомеоморфны*, или* эквивалентно вложены*, если существует такой гомеоморфизм h пространства $\mathbb{R}^N$ на себя, что $h(X) = X'$. В этом случае пишем $h : (\mathbb{R}^N, X) \cong (\mathbb{R}^N, X')$.*

Но даже при этом предположении не всегда удается найти такое искомое несчетное семейство, что все его элементы вложены эквивалентно предельному пространству $X_0 \subset \mathbb{R}^N$. Это подтверждается примерами.

Для $N = 2$ см. [4, примеры 3, 4], [5, пример 2]; пространства X_0 имеют довольно сложную структуру. Для $N = 3$ или $N \geqslant 5$ Кэннон и Уэймент построили такую последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots$ попарно непересекающихся диких $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$, что: $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно сходится к X_0; $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, X_0)$ для каждого i; но нет возможности найти несчетное семейство попарно непересекающихся $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$, каждая из которых вложена эквивалентно X_0 [1, с. 568–570].

Определение 3. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}^N$, гомеоморфное $(N-1)$-сфере, называется* плоским*, если оно объемлемо гомеоморфно стандартной единичной сфере, и* диким *в противном случае.*

(О диких вложениях см. книги [6], [7], [8].)

Случай $N = 4$ не был охвачен примерами Кэннона-Уэймента и оставался открытой проблемой [1, с. 569–570].

Мы строим новые серии вложений для каждого $N \geqslant 4$. Тем самым получаем ответ для открытого до сих пор случая $N = 4$; кроме того, мы рассматриваем более общие компакты, а не только $(N-1)$-сферы. В нашем построении использованы "липкие" канторовы множества В.Крушкаля [9]. В отличие от работы Кэннона и Уэймента, доказательство не требует опоры на сложные результаты Р.Бинга (1957-1961), Дж.Брайента (1968), А.В.Чернавского (1973) и Р.Давермана (1973).

Теорема. *Пусть* $N \geqslant 4$; $X \subset S^{N-1}$ *— такой компакт, что для некоторой точки* $q \in X$, *некоторой открытой окрестности* U *точки* q *в* S^{N-1} *и некоторого целого числа* $k \in \{1, \dots, N-1\}$ *выполнено* $(U, U \cap X) \cong (\mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{R}^k)$. *Тогда существуют такие вложение* $e : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ *и последовательность попарно непересекающихся компактов* $X_1, X_2, \dots \subset \mathbb{R}^N \setminus e(X)$, *что*

1) $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ *гомеоморфно сходится к* $e(X)$;

2) $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, e(X))$ *для каждого* $i \in \mathbb{N}$; *и*

3) если $\mathcal{F}$ *— такое дизъюнктное семейство множеств* $Y_\alpha \subset \mathbb{R}^N$, *что* $(\mathbb{R}^N, Y_\alpha) \cong (\mathbb{R}^N, e(X))$ *для каждого* α, *то* $\mathcal{F}$ *содержит не более чем счетное число элементов.*

Кэннон и Уэймент ограничили свой вопрос связными множествами, но он нетривиален и для канторовых множеств; мы рассмотрим и этот случай. Подробности см. в работе [10].

Литература

1. *Cannon J.W., Wayment S.G.* An imbedding problem // Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 566-570.

2. *van Douwen E.K.* Uncountably many pairwise disjoint copies of one metrizable compactum in another // Topol. Appl. **51** (1993), 87-91.

3. *Todorčević S.* Embeddability of $K \times C$ into X // Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math., **114**:22 (1997), 27-35.

4. *Bing R.H.* Snake-like continua // Duke Math. J. **18** (1951), 653-663.

5. *Roberts J.H.* Concerning atriodic continua // Monatshefte f. Math., **37** (1930), 223-230.

6. *Келдыш Л.В.* Топологические вложения в евклидово пространство // Тр. МИАН СССР **81** 1966, 3-184.

7. *Moise E.E.* Geometric Topology in Dimensions 2 and 3 — Springer-Verlag, 1977.

8. *Daverman R.J., Venema D.A.* Embeddings in Manifolds — Providence, RI: American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics 106. 2009.

9. *Krushkal V.* Sticky Cantor sets in $\mathbb{R}^d$ // J. Topol. Anal. **10** (2018), 477-482.

10. *Frolkina O.* An answer to a question of J.W. Cannon and S.G. Wayment // https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.02457

НЕКОТОРЫЕ ЭКЗОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ C^*-АЛГЕБР

Д.В. Фуфаев

denis.fufaev@math.msu.ru, fufaevdv@rambler.ru

УДК 515.122, 517.986.32

Исследуются свойства (коммутативных) C^*-алгебр с точки зрения теории фреймов в терминах поведения сигма-компактных подмножеств соответствующего топологического пространства.

Ключевые слова: C^*-алгебра, гильбертов C^*-модуль, фрейм, сигма-компактность

Some exotic properties of topological spaces and corresponding C^*-algebras

We study the properties of (commutative) C^*-algebras from the point of view of frame theory in terms of the behavior of sigma-compact subsets of the corresponding topological space.

Keywords: C^*-algebra, Hilbert C^*-module, frame, σ-compactness

Гильбертов C^*-модуль — это обобщение понятия гильбертова пространства для случая, когда вместо поля комплексных чисел рассматривается произвольная C^*-алгебра A (для этого вводится аналог скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$, которое принимает значения в этой алгебре). Точно так же, как и для случая гильбертовых пространств, в этом случае можно рассмотреть понятие фрейма.

Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов гильбертова C^*-модуля N называется стандартным фреймом в N, если найдутся такие положительные постоянные c_1, c_2, что для любого $x \in N$ ряд $\sum\limits_j < x, x_j >< x_j, x >$ сходится по норме в A и справедливо следующее неравенство:

$$c_1 < x, x > \leqslant \sum_j < x, x_j >< x_j, x > \leqslant c_2 < x, x > .$$

Важность существования фрейма для гильбертова C^*-модуля состоит в том, что в случае унитальной алгебры A его существование аналогично наличию свойства стабилизации типа Каспарова: гильбертов C^*-модуль N над C^*-алгеброй A можно представить в виде ортогонального прямого слагаемого в стандартном модуле некоторой мощности $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} A$ тогда и только тогда, когда в N существует стандартный фрейм.

“Стандартный” означает, что ряд сходится по норме — наряду со стандартным, можно рассматривать и “просто” фреймы. В этом случае сходимость подразумевается в ультраслабой топологии к некоторому элементу

Фуфаев Денис Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Denis Fufaev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

универсальной обертывающей алгебры фон Неймана. Но есть и более простое описание фреймов: семейство $\{x_j\}_J$ является фреймом в N тогда и только тогда, когда существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что для любого $x \in N$ и любого состояния φ на A (т.е. положительного линейного функционала нормы 1) имеют место следующие неравенства:

$$c_1\varphi(< x, x >) \leqslant \sum_j \varphi(< x, x_j >< x_j, x >) \leqslant c_2\varphi(< x, x >)$$

Простейшим примером гильбертова C^*-модуля является сама C^*-алгебра A с умножением $< a, b >= a^*b$. Оказывается, даже в этом случае вопрос существования фреймов является интересным, причем даже в случае коммутативной алгебры A. Тогда алгебра изоморфна алгебре $C_0(K)$ непрерывных функций на локально-компактном пространстве K, обращающихся в ноль на бесконечности. Здесь можно проследить связь между существованием фреймов в C^*-алгебре и поведением сигма-компактных подмножеств K. Для этого введем некоторую классификацию топологических пространств:

K_I — сигма-компактные пространства (т.е. пространства, которые можно покрыть счетным семейством компактных подмножеств);

K_{II} — не сигма-компактные пространства, имеющие плотное сигма-компактное подмножество;

K_{III} — пространства, в которых ни одно сигма-компактное подмножество не является плотным, т. е. дополнение к любому сигма-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, но бесконечно удаленная точка (в одноточечной компактификации) может не быть внутренней для дополнения; это эквивалентно тому, что найдется сигма-компактное не предкомпактное подмножество;

K_{IV} — пространства, в которых дополнение к любому сигма-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, а (в одноточечной компактификации) бесконечно удаленная точка всегда является внутренней для дополнения; это эквивалентно тому, что всякое сигма-компактное подмножество предкомпактно.

Оказывается, что классы K_I и K_{IV} "противоположны" друг другу — для пространств из первого класса в соответствующих алгебрах всегда есть стандартный фрейм, для пространств же из последнего класса никогда нет и простых фреймов. Для промежуточных же классов описание более сложное, однозначного ответа нет, но при этом там находятся примеры с довольно интересными свойствами — например, можно построить пример C^*-алгебры, у которой не существует стандартного фрейма, но найдется простой.

Литература

1. *Фуфаев Д.В.* Гильбертов C^*-модуль с экстремальными свойствами // Функц. анализ и его прил., **56**:1 (2022), 94-105.

2. *Fufaev D.V.* Topological and Frame Properties of Certain Pathological C^*-Algebras // Russian Journal of Mathematical Physics, **29**:2 (2022), 170-182.

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ВНЕ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Б.Н. Хабибуллин
khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.53, 517.574, 517.547

По классической теореме Лиувилля всякая целая или субгармоническая функция, ограниченная сверху на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, постоянна. Такой же вывод возможен и в предположении ограниченности сверху таких функций вне некоторого достаточно малого исключительного множества при дополнительном ограничении на скорость роста функции. При этом взаимосвязь между малостью исключительного множества и скоростью роста функции должна быть взаимно обратной. Количественные аспекты последнего и будут обсуждаться, включая и многомерные случаи.

Ключевые слова: целая функция, субгармоническая функция, функция конечного порядка, теорема Лиувилля

Liouville-type theorems with constraints outside exceptional sets

According to the classical Liouville theorem, every entire or subharmonic function bounded from above on the complex plane $\mathbb{C}$ is constant. The same conclusion is possible under the assumption that such functions are limited from above outside of some sufficiently small exceptional set with an additional restriction on the growth rate of the function. In this case, the relationship between the smallness of the exceptional set and the growth rate of the function should be mutually inverse. Quantitative aspects of the latter will be discussed, including multidimensional cases.

Keywords: entire function, subharmonic function, finite order function, Liouville's theorem

Голоморфная на *евклидовом комплексном пространстве* $\mathbb{C}^n$ размерности $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ с обычной евклидовой нормой-модулем $|\cdot|$, т.е. *целая*, функция f называется *функцией конечного порядка*, если

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{\ln \max\bigl\{\ln|f(z)|, 1\bigr\}}{\ln|z|} < +\infty.$$

В 2018 г. в [1; лемма 4.2] была установлена и нашла полезные применения в [1]–[2] и ряде других работ следующая

Теорема 1. *Если целая функция конечного порядка на $\mathbb{C}$ ограничена вне $E \subset \mathbb{C}$, а площади пересечений E с кругами радиуса $r \in \mathbb{R}^+$ с центром в нуле — величины порядка $o(r^2)$ при $r \to +\infty$, то она постоянная.*

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00026, https://rscf.ru/project/22-21-00026/

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., проф., Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre of the Ufa Federal Research Centre of the RAS, Ufa, Russia)

Краткое доказательство теоремы 1 из нашей статьи [3; теорема 2] 2020 г., отражённое и в [2; теорема 3.1], охватывает также и многомерный случай.

Теорема 2. *Если целая функция конечного порядка на* $\mathbb{C}^n$ *ограничена сверху вне множества* $E \subset \mathbb{C}^n$*, а объёмы пересечений множества* $E \subset \mathbb{C}^n$ *с шарами радиуса* $r \in \mathbb{R}^+$ *с центром в нуле — величины порядка* $o(r^{2n})$ *при* $r \to +\infty$*, то она постоянная.*

В следующей нашей работе [4] ограничения на рост функции даются в более общей ситуации лишь на расширяющихся последовательностях окружностей или сфер вне асимптотически малых множеств на этих окружностях или сферах при стремлении их радиусов к бесконечности. Так, в одномерном случае [4, теорема 4′] имеет место

Теорема 3. *Пусть множества* $E_k \subset \mathbb{C}$ *при* $k \in \mathbb{N}$ *лежат на окружностях* $S(r_k)$ *с центрами в нуле и возрастающими радиусами* r_k*, для которых* $\limsup_{k\to\infty} r_{k+1}/r_k < +\infty$*, а предел линейных мер Лебега множеств* $\{\arg z\colon z \in E_k\} \bigcap [0, 2\pi)$ *равен нулю. Если целая функция конечного порядка ограничена сверху на объединении* $\bigcup_k S(r_k) \setminus E_k$*, то она постоянная.*

Один из многомерных вариантов теоремы 3 — это

Теорема 4. *Пусть для каждой точки* s *на сфере в* $\mathbb{C}^n$ *единичного радиуса с центром в нуле на комплексной прямой-плоскости* $\mathbb{C}_{\mathsf{s}} := \{z\mathsf{s}\colon z \in \mathbb{C}\}$ *в* $\mathbb{C}^n$ *найдутся последовательность* $\bigl(r_k(\mathsf{s})\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$ *на* $\mathbb{R}^+$ *и множества* $E_k(\mathsf{s})$ *на окружностях* $S\bigl(r_k(\mathsf{s})\bigr) \subset \mathbb{C}_{\mathsf{s}}$*, для которых выполнены все условия теоремы 3. Если для целой функции* f *на* $\mathbb{C}^n$ *её сужение на каждую комплексную прямую* $\mathbb{C}_{\mathsf{s}}$ *— функция конечного порядка, ограниченная сверху на* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S\bigl(r_k(\mathsf{s})\bigr) \setminus E_k(\mathsf{s})$*, то функция* f *постоянная на* $\mathbb{C}^n$*.*

Аналогичные результаты установлены в [4] и для выпуклых, (плюри)субгармонических, (плюри)гармонических функций на плоскости или многомерном пространстве, а также, с заключением лишь об ограниченности сверху, для таких же функций в круге или шаре.

Предполагается обсудить возможности развития подобных теорем типа Лиувилля с ограничениями вне малых исключительных множеств в четырёх направлениях: 1) при росте функций быстрее чем конечного порядка; 2) при нулевом порядке роста функций; 3) при более точных ограничениях на величину типа или даже индикатора роста при заданном конечном порядке; 4) при замене классических площадей и объёмов частей исключительных множеств на более общие или тонкие метрические характеристики их, как-то: меры и обхваты Хаусдорфа в духе [5]–[6] или различные емкости.

Литература

1. *Baranov A., Belov Yu., Borichev A.* Summability properties of Gabor expansions // J. Funct. Anal. **274**:9 (2018), 2532–2552.

2. *Anton Baranov* Cauchy-de Branges spaces, geometry of their reproducing kernels and multiplication operators // https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.02175, 5 Jun 2022, 35 pages.

3. *Хабибуллин Б.Н.* Теоремы типа Лиувилля для функций конечного порядка // Уфим. матем. журнал, **12**:4 (2020), 117–121.

4. *Хабибуллин Б.Н.* Глобальная ограниченность функций конечного порядка, ограниченных вне малых множеств // Матем. сб., **212**:11 (2021), 116–127.

5. *Хабибуллин Б.Н.* Характеристика Неванлинны и интегральные неравенства с максимальной радиальной характеристикой для мероморфных функций и разностей субгармонических // Алгебра и анализ, **34**:2 (2022), 152–184.

6. *Хабибуллин Б.Н.* Интегралы от разности субгармонических функций по мерам и характеристика Неванлинны // Матем. сб., **213**:5 (2022), 126–166.

ОТСУТСТВИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ 2-ПОРЯДКА В $\mathbb{C}^N$

А. Ханан

1042205064@pfur.ru

УДК 517.956.2

Статья посвящена проблеме отсутствия решения для полулинейных неравенств второго порядка с ограниченными коэффициентами и распространению соответсвующих результатов с n-мерного вещественного пространства на n-мерное комплексное пространство.

Ключевые слова: отсутствие решения, полулинейные эллиптические уравнения, комплекснозначные.

Nonexistence of nontrivial solutions for semilinear elliptic equations and inequalities in $\mathbb{C}^n$

This paper is devoted to extending the results of the absence of solutions to second-order semilinear inequalities with bounded coefficients from an n-dimensional real space to an n-dimensional complex space.

Keywords: Nonexistence of solutions, semilinear elliptic equations, complex-valued.

Будем рассмотреть эллиптические задачи вед

$$-\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_j} a_{k,j}(z,u) \geqslant |u|^q \qquad z \in \mathbb{C}^n \tag{1}$$

Здесь $a_{k,j} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad i,j = 1,...,n,$ суть каратеодориевы функции, удовлетворяющие условию:

$$|a_{k,j}(z,u)| \leqslant a_0 |u|^p, \quad (z,u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \tag{2}$$

с постоянной $a_0 \geqslant 0$ и некоторым $p > 0$ и $q > p$

Где $u \in \mathbb{C}^n$ -решение задачи определяется по следующему:

Али Ханан, Аспирант, Математический институт им. С.М. Никольского РУДН (Москва, Россия); Ali Hanan, PhD Student, (S.M. Nikol'skii Mathematical Institute PFUR, Moscow, Russia)

definition 1.[6] $u(z) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ называются слабым решением если для любой функции $\varphi \geqslant 0$ есть

$$-\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi dz \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \varphi dz \tag{3}$$

Теорема 1. Задача (1) не имеет глобального нетривиального слабого решения, когда

$$q \geqslant \frac{n}{n-1}p, \qquad q > p$$

где

$$\Delta\varphi = L_{\rho,\theta}(\varphi) = \sum_{k,j=1}^{n} e^{-i(\theta_k+\theta_j)} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_k\partial\rho_j} - \frac{1}{\rho_k\rho_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_k\partial\theta_j} - i(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{\rho_j})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_k\partial\theta_j} \right)$$

Отметим также, что если

$$a_{k,j} = \begin{cases} u & k = j, \\ 0 & k \neq j. \end{cases} \qquad k, j = 1, 2, ...n.$$

,то

Теорема 2. $u = R(\rho)e^{i\theta}$ решение задача (1) где:

$$R(\rho) = \frac{\mu}{\rho^{2/(q-1)}}; \quad \mu = \left(\frac{(q+1)n}{2}\right)^{1/(q-1)} \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда $n > \frac{2q}{q-1}$ и $q > 1$.

Замечание 1 теория (2) доказать, что когда

$$n \leqslant \frac{2q}{q-1}$$

и когда

$$n > \frac{2q}{q-1}, q < 1$$

Тогда задача (1) не имеет глобального нетривиального слабого решения,

Литература

1. *Глахов Е. И., Салиева О. А.* Разрушение решений некотрых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах// Мат. заметки. — 2015. — 98. — С. 187–195.

2. *Коврижных А.Ю.* Дифференциальные и разностные уравнения: уч. пос. / А.Ю. Коврижных, О.О. Коврижных. - Екатеринбург: Изд-во Урал, ун-та, 2014. - 148 с.

3. *Салиева О. А.* Отсутствие решений некоторых нелинейных неравенств с дробными степенями оператора Лапласа// Мат. заметки. - 2017. - 101, № 4. - С. 699-703.

4. *Э. Митидиери, С. И. Похожаев* Априорные оценки и отсутствие решенийнелинейных уравнений и неравенств в частных производных, Тр. МИАН, 2001,том 234, 3–383

5. *Li X., Li F.* Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity// Nonlinear Anal. - 2012. - 75, № 2. - C. 2812-2822.

6. *Yarur C.* Nonexistence of positive singular solutions for a class of semilinear elliptic systems // Electron. J.Diff. Equat. 1996. V. 8. P. 1–22.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЛОЖЕННЫХ РЕГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ НА НОРМИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЯХ

В.Р. Хачатуров

vladimir.khachaturov@math.msu.ru

УДК 514

Классическая задача Штейнера состоит в построении связного графа минимальной длины, соединяющего данные точки плоскости. В общем случае такая задача является NP-полной. Однако можно показать, что при достаточно плотном расположении граничных точек на регулярной кривой, последовательная вдоль кривой ломаная на этих точках будет кратчайшим деревом Штейнера. Данный факт упрощает построение кратчайших деревьев на регулярных кривых и является предметом данного исследования.

Ключевые слова: математика, минимальные деревья Штейнера, регулярные кривые, выпуклые гладкие нормы

Stabilization of embedded regular curves in normed planes

The classical Steiner problem consists in constructing a connected graph of minimal length connecting given points on the plane. In general, the problem is NP-complete. However, it can be shown that with a sufficiently dense arrangement of boundary points on a regular curve, a polyline consecutive along the curve at these points will be the minimal Steiner tree. This fact simplifies the construction of minimal trees on regular curves and is the subject of this work.

Keywords: mathematics, Steiner minimal trees, regular curve, strictly convex smooth norm

---

Владимир Рубенович Хачатуров, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Khachaturov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

На плоскости рассматриваются линейные деревья, у которых углы между смежными ребрами не меньше величины, большей $\frac{\Pi}{2}$. В частности, у таких деревьев степени вершин не превосходят 3. У каждого из этих деревьев выделяется подмножество вершин, содержащее все вершины степени 1 и 2 (и, возможно, некоторые вершины степени 3). Это подмножество называется границей дерева, а входящие в него вершины — граничными.

Предполагается также, что в каждом пути, соединяющем граничные вершины дерева, длины ребер не превосходят расстояния между концами этого пути. Рассматриваемые деревья называются допустимыми.

Будем рассматривать на плоскости со строго выпуклой гладкой всюду вне нуля нормой вложенную регулярную кривую в качестве локуса граничных точек. При достаточно плотном разбиении кривой угол между соседними точками такого разбиения будет больше некоторого наперёд заданного. Ломаная, построенная последовательно на точках этого разбиения, будет локально минимальным деревом. Хотелось бы понять, при каких условиях эта ломаная будет кратчайшим деревом.

Оказывается, при достаточно плотном расположении вершин ломаной на кривой и, соответственно, достаточно маленьких рёбрах этой ломаной, она будет кратчайшим деревом Штейнера. Доказательству этого факта и посвящена данная работа, в которой, в частности, разрабатывается процесс *стабилизации* кривой, сходный с процессом стабилизации локально минимального дерева и позволяющий построить нужную нам ломаную. Данная работа обобщает и углубляет идеи, предложенные ранее М.Полоновской для случая евклидовой нормы.

Теорема 1. Пусть $\gamma\,[a,b] \to \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая, вложенная в двумерное пространство со строго выпуклой гладкой всюду вне нуля нормой. Пусть дано разбиение $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ отрезка $[a,b]$. Обозначим L ломаную $\gamma(t_0)\gamma(t_1)\cdots\gamma(t_n)$. Тогда существует $p_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $p \geqslant p_0, p \in \mathbb{N}$, p-измельчение L^p является *единственным* кратчайшим деревом в данной норме для своей границы $V(L^p)$.

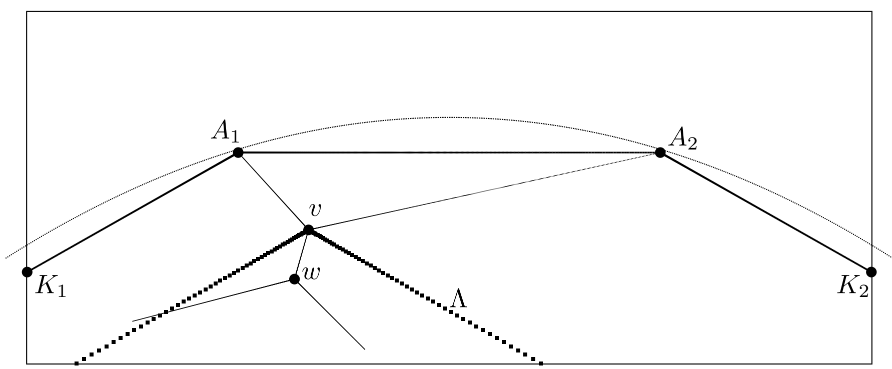

Рис. 1: Участок кривой со схематическим доказательством от противного.

Литература

1. *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Теория экстремальных сетей. Москва-Ижевск:

Институт компьютерных исследований, 2003, с. 424.

2. *M.R. Garey, R. L. Graham, and D. S. Johnson*, The Complexity of Computing Steiner Minimal Trees, SIAM Appl. Math., 32 (1977), 835–859.

3. *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Стабилизация локально минимальных деревьев, Матем. заметки, 2009, т. 86, N 4, с. 512–524.

4. *Иванов А.О., Съедина О.А, Тужилин А.А.* Структура минимальных деревьев Штейнера в окрестностях лунок их ребер. Матем. заметки, 2012, т. 91, N 3, с. 353–370.

ОБ УСРЕДНЕНИИ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ ОБЛАСТИ

В.В. Чепыжов

chep@iitp.ru

УДК 517.957+517.955.8

Рассматривается система реакции-диффузии в области с периодической перфорацией, которая содержит быстро осциллирующие члены в уравнениях системы и в граничных условиях. Нелинейные члены, входящие в уравнения, могут не удовлетворять условию Липшица. Доказано, что траекторные аттракторы рассматриваемой системы реакции-диффузии сходятся в сильной топологии к траекторному аттрактору соответствующей усредненной системы, которая содержит дополнительный “странный” член (потенциал).

Ключевые слова: траекторный аттрактор, усреднение, система реакции-диффузии

On homogenization of attractors for reaction-diffusion systems in porous domain

We consider a reaction–diffusion system in a perforated domain with rapidly oscillating terms in the equation and in the boundary conditions. A nonlinear function in the equations may not satisfy the Lipschitz condition. It is proved that the trajectory attractors of this system converge in the corresponding strong topology to the trajectory attractors of the homogenized reaction–diffusion system with a “strange term” (potential).

Keywords: trajectory attractor, homogenization, reaction-diffusion system

---

Исследование было поддержано грантом Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP14869553).

Чепыжов Владимир Викторович, д.ф.-м.н., гл.н.с., Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН (Москва, Россия); Vladimir Chepyzhov (Institut for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia)

Усреднение аттракторов систем реакции-диффузии изучалось авторами этих тезисов в недавних работах [1,2,3], где можно также прочитать обзор результатов, исторические справки, а также обширную литературу по данной теме. В частности в работах [1,3] рассматривалось скалярное уравнение реакции-диффузии в области с периодической перфорацией.

Аттракторы описывают поведение решений изучаемых диссипативных нелинейных эволюционных уравнений, когда время стремится к бесконечности. Аттракторы включают в себя наиболее важные предельные инвариантные объекты динамических систем, т.е., семейства траекторий, которые отражают финальную эволюцию модели с этими эволюционными уравнениями.

Теория траекторных аттракторов для диссипативных уравнений с частными производными была развита в книге [4]. Этот подход особенно эффективен при изучении долговременного поведения решений эволюционных уравнений, для которых не доказаны теоремы о единственности решений соответствующих смешанных краевых задач или задач Коши (например, для трехмерной системы Навье-Стокса) или эти теоремы не выполнены (например, для общей системы реакции-диффузии, рассмотренной в данной публикации, если нелинейные функции, входящие в систему не удовлетворяют условию Липшица).

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, G_0 – область, принадлежащая кубу $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$ и диффеоморфная шару. Для целочисленных векторов $j \in \mathbb{Z}^3$ определим точки $P_\varepsilon^j = \varepsilon j$ и области $G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^3 G_0$. Ведем область $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{3}\,\varepsilon\} \subset \Omega$ и множество допустимых мультииндексов $\Upsilon_\varepsilon = \left\{ j \in \mathbb{Z}^3 : G_\varepsilon^j \cap \overline{\widetilde{\Omega}}_\varepsilon \neq \emptyset \right\}$.

В перфорированной области $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G}_\varepsilon$ где $G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j$ изучается следующая смешанная краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^3 B\Big(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^3}\Big) u_\varepsilon = 0, & x \in \partial G_\varepsilon^j, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^N)^\top$ – неизвестная вектор-функция, $f = (f^1, \dots, f^N)^\top$ – нелинейная вектор-функция, a – скалярная функция, $g = (g^1, \dots, g^N)^\top$ – вектор-функция правых частей, и λ – положительная $N \times N$-матрица, ν – вектор единичной внешней нормали к границам областей G_ε^j.

В изучаемой задаче малый параметр ε характеризует диаметр полостей перфорации G_ε^j, а величина ε^{-1} – скорость осцилляции коэффициентов системы. Нелинейная вектор-функция $f(u)$ может не удовлетворять условию Липшица по переменной u, поэтому теорема единственности для соответствующей смешанной краевой задачи может не выполняться.

Предполагается, что функции $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеют средние при $\varepsilon \to 0+$ в пространствах $L_{\infty,*w}(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)^N$, соответственно.

В граничных условиях на границах полостей ∂G_ε^j стоит диагональная матрица $B = B(x,y)$ с положительными ограниченными элементами, которые являются 1-периодическими функциями по переменной y.

Рассматриваемая система имеет слабое решение (траекторию) $u(x,t)$, $t \geqslant 0$, при любом начальном условии $u_0(x) \in L_2(\Omega_\varepsilon)^N$. На пространстве всех траекторий рассматривается трансляционная полугруппа $\{T(h),\ h \geqslant 0\}$, действующая по формуле: $T(h)u(t,x) = u(t+h,x),\ t \geqslant 0$. Известно, что при любом ε построенная полугруппа имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в соответствующей сильной топологии (см. [2,4]).

Доказано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ рассматриваемой системы реакции диффузии в перфорированной области сходится в сильной топологии при $\varepsilon \to 0+$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ соответствующей усредненной системы реакции диффузии в области Ω без перфорации, которая содержит некоторый дополнительный "странный" член (потенциал).

Работа выполнена совместно с К.А. Бекмаганбетовым и Г.А. Чечкиным.

Литература

1. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* Attractors and a "strange term" in homogenized equation // C.R. Mécanique **348**:5 (2020), 351–359.

2. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* Strong convergence of trajectory attractors for reaction-diffusion systems with random rapidly oscillating terms // Commun. Pure Appl. Anal. **19**:5 (2020), 2419–2443.

3. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* "Strange term" in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain // Chaos Solitons Fractals **140** (2020), Article 110208.

4. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics, Am. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗЕЙФЕРТА С ПОМОЩЬЮ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДИАГРАММ

М.М. Чернавских

mike.chernavskikh@gmail.com

УДК 515.162.8

Приводится алгоритм построения прямоугольной диаграммы поверхности Зейферта для произвольного зацепления, заданного прямоугольной диаграммой зацепления. Оценивается сложность диаграммы, полученной в результате применения алгоритма.

Ключевые слова: прямоугольная диаграмма зацепления, прямоугольная диаграмма поверхности, поверхность Зейферта

Investigation Seifert surfaces using rectangular diagrams.

We present an algorithm for constructing a rectangular diagram of a Seifert surface for any link, represented by a rectangular diagram. We estimated complexity of a resulting diagram of a surface.

Keywords: rectangular diagram of a link, rectangular diagram of a surface, Seifert surface

---

Чернавских Михаил Михайлович, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mikhail Chernavskikh (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Прямоугольные диаграммы зацеплений широко используются в изучении узлов. Например, решается задача монотонного упрощения [2]. Также на языке прямоугольных диаграмм комбинаторно определяются гомологии Хегора-Флоера [5, 6]. В работе Дынникова–Прасолова [3, 4] было впервые введено понятие прямоугольной диаграммы поверхности, где с помощью данной техники были изучены Лежандровы узлы.

Известно, что любой класс изотопии компактной поверхности (с краем и без) в трехмерной сфере можно представить с помощью прямоугольной диаграммы. Эффективный алгоритм для построения прямоугольной диаграммы поверхности Зейферта был построен в работе [1]:

Теорема 1. *Существует алгоритм, который по произвольной прямоугольной диаграмме зацепления R сложности m строит ориентированную прямоугольную диаграмму Π поверхности Зейферта для этого зацепления сложности не выше $2m^4$, причем $\partial\Pi$ получается из R не более чем $\frac{m^2}{2}$ стабилизациями.*

Для выполнения алгоритма требуется не более $O(m^6)$ арифметических операций, операций сравнения и присваивания.

Литература

1. *M. M. Chernavskikh* An Algorithm for Constructing the Rectangular Diagrams of a Seifert Surface. Sib Math J 63, 583–594 (2022). https://doi.org/10.1134/S003744662203017X

2. *I. Dynnikov.* Arc-presentations of links: Monotonic simplification, Fund.Math. 190 (2006), 29–76; arXiv:math/0208153

3. *I. Dynnikov, M. Prasolov.* Rectangular diagrams of surfaces: representability, Matem. Sb. 208 (2017), no. 6, 55–108; translation in Sb. Math. 208 (2017), no. 6, 781–841, arXiv:1606.03497.

4. *I. Dynnikov.* Transverse-Legendrian links, Siberian Electronic Mathematical Reports, 16 (2019), 1960–1980.

5. *C. Manolescu, P. Ozsv?th, S. Sarkar.* A combinatorial description of knot Floer homology. Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 2, 633–660.

6. *P. S. Ozsvath, Z. Szabo.* Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. Ann. of Math. (2), 159(3):1027–1158, 2004.

О ДВУХ МОДЕЛЯХ ДЛЯ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ: ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Е.В. Чижонков

chizhonk@mech.math.msu.su

УДК 519.63

Проводится сравнение кинетической и гидродинамических моделей на примере задачи о возбуждении плазменных колебаний и волн мощным коротким лазерным импульсом. Показано, что рассмотренные гидродинамические модели не дают хороших приближений к решению кинетического уравнения Власова: одна приводит к разрывным решениям, а вторая имеет существенное качественное отличие. При небольшой температуре плазмы влияние неизотермичности процесса невелико, но оно может привести к существенным искажениям решения при дальнейшем нагреве.

Ключевые слова: плазменные колебания и волны, кинетическая и гидродинамические модели, численное моделирование

On two models for plasma oscillations: problem statements and numerical analysis

The kinetic and hydrodynamic models are compared on the example of the problem of excitation of plasma oscillations and waves by a powerful short laser pulse. It is shown that the considered hydrodynamic models do not give good approximations to the solution of the kinetic Vlasov equation: one leads to discontinuous solutions, and the second has a significant qualitative difference. At a low plasma temperature, the effect of non-isothermicity of the process is minor, but it can lead to significant distortions of the solution during further heating.

Keywords: plasma oscillations and waves, kinetic and hydrodynamic models, numerical modeling

Теоретическим фундаментом современного моделирования плазменных процессов является уравнение Власова [1]. Однако, как и большинство кинетических уравнений, оно требует не только нетривиальных алгоритмов для получения приближенного решения, но и весьма значительных объемов вычислений для их реализации [2]. Поэтому на практике трудоемкое численное решение уравнения Власова часто заменяют решением тесно связанных с ним более простых моделей. Среди таких моделей — известный метод „частиц в ячейке“, фактически использующий характеристики уравнения Власова для моделирования динамики отдельных частиц [3]. Также популярными упрощениями уравнения Власова являются различные гидродинамические модели, основанные на последовательности моментов функции распределения, которая „обрезается“ тем или иным способом [4].

Чижонков Евгений Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Eugene Chizhonkov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Представляется правдоподобным, что среди различных упрощений гидродинамические модели порождают наиболее точные решения, заменяющие решения уравнения Власова. В первую очередь, это связано с тем фактом, что если функцию распределения взять пропорциональной дельта-функции, то уравнения „холодной“ плазмы являются точным следствием уравнения Власова [4], которые, в свою очередь, подробно изучены аналитически, асимптотически и численно [5]. Конечно, при моделировании реальных процессов сразу возникает проблема учета отличной от нуля температуры электронов, но и на этот счет существуют полезные рекомендации. В докладе проводится сравнение результатов исходной кинетической модели с результатами двух гидродинамических моделей, использующих различные способы учета ненулевой температуры. В качестве базового физического процесса рассматривается возбуждение плазменных колебаний и волн с помощью короткого мощного лазерного импульса.

Доклад организован следующим образом. Первый раздел посвящен описанию исходных данных: основные уравнения, свойства их решений, сформулированные в виде теорем, начальные условия для будущего численного моделирования, а также необходимые соотношения, позволяющие максимально согласовать принципиально различные по своей сути математические формулировки задач. Во втором разделе приведены значения параметров импульса, размеров области, кратко охарактеризованы используемые алгоритмы нахождения приближенных решений и сеточные характеристики, а также указано условие устойчивости, на которое важно обращать внимание при проведении расчетов. Существенным моментом этого раздела является подбор коэффициентов в различных гидродинамических моделях с целью качественного согласования динамики электронов с аналогом в кинетической модели. Третий — самый большой раздел — посвящен изложению вычислительных экспериментов. Сначала подробно рассмотрены первые „полупериоды“ процесса, соответствующие движению электронов к центру области и от него. В результате приходится отказаться от одной из гидродинамических моделей, порождающей „нефизичное“ разрывное решение. Затем акцентируется внимание, что температура электронов не является константой, а колеблется, как и другие функции, на частоте, близкой к плазменной. Наконец, приводятся иллюстрации сформировавшихся после истечения значительного времени бегущих волн, которые для оставшихся в рассмотрении моделей имеют как общие, так и различные черты. В заключении перечислены выводы из проведенного численного анализа и намечены направления дальнейших исследований.

Литература

1. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ, **8**:3 (1938), 291-318.

2. *Dimarco G., Pareschi L.* Numerical methods for kinetic equations // Acta Numerica, **23** (2014), 369-520.

3. *Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П.* Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2004.

4. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. — Москва: Высшая школа, 1988.

5. *Чижонков Е.В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. — Москва: Физматлит, 2018.

ОБ УСЛОВИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ОБЩЕГО ВИДА

К.М. Чудинов

cyril@list.ru

УДК 517.929

Представлены эффективные условия осцилляции всех решений линейного дифференциального уравнения первого порядка устойчивого типа с последействием, включающего как частные случаи уравнения с сосредоточенными и распределенными запаздываниями.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, последействие, осцилляция, эффективные условия

On oscillation conditions for linear first-order delay differential equation of general form

We present effective oscillation conditions for all solutions of a linear first-order delay differential equation of stable type including equations with concentrated and distributed delays as special cases.

Keywords: delay differential equation, oscillation, effective conditions

Решения линейных уравнений с последействием могут осциллировать начиная с первого порядка: хорошо известно, что решения автономного уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t-r)$, где $a, r \geqslant 0$, осциллируют, если и только если $ar > 1/e$. Условия осцилляции решений неавтономных уравненений с последействием впервые систематически изучал А.Д.Мышкис в середине XX века. Первые уточнения результатов Мышкиса появились только в 70-х гг. Наиболее сильным по простоте, ясности и точности результатом явилась теорема Р.Г.Коплатадзе и Т.А.Чантурия. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где функции a и h непрерывны и $h(t) \leqslant t$. Уравнение (1) называется *уравнением устойчивого типа*, если $a(t) \geqslant 0$ и $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSNM-2020-0028).

Чудинов Кирилл Михайлович, к.ф.-м.н., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия); Kirill M. Chudinov (Perm National Reserch Polytechnic University, Perm, Russia)

Теорема 1 [1]. *Если*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e,$$

то все решения уравнения (1) *устойчивого типа осциллируют.*

За последние 40 лет опубликованы сотни работ, посвященных уточнениям и обобщениям этого результата.

Рассмотрим уравнение с несколькими запаздываниями.

$$\dot{x}(t)+\sum_{k=1}^{m} a_k(t)x(h_k(t))=0,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

где функции $a_k, h_k\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$, $k=\overline{1,m}$, локально суммируемы и $h_k(t)\leqslant t$ почти всюду. При заданной измеримой по Борелю начальной функции уравнение (2) однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций. Уравнение (2) является уравнением устойчивого типа, если $a_k(t)\geqslant 0$ и $h_k(t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Определим m семейств множеств $E_k(t)=\{s\geqslant t \mid h_k(s)<t\}$.

Теорема 2 [2]. *Если*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{E_k(t)} a_k(s)\,ds > 1/e,$$

то все решения уравнения (2) *устойчивого типа осциллируют.*

В случае $m=1$ теорема 2 существенно обобщает теорему 1. Основным ее преимуществом перед известными условиями осцилляции уравнения (2), которые строятся на оценках интегралов по отрезку $[\max\limits_{s\leqslant t}\max\limits_{k} h_k(s), t]$, является учет всех запаздываний в равной мере.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)+\int\limits_{0}^{t} x(s)\,d_s r(t,s)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, функция $r(t,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию для всех t, функция $\rho(t)=\bigvee\limits_{s=0}^{t} r(t,s)$ локально суммируема и функция $r(\cdot,s)$ измерима для всех s. Соответствующее уравнению (3) неоднородное уравнение включает как частные случаи уравнения с сопредоточенными запаздываниями, интегро-дифференциальные уравнения с последействием и уравнения, содержащие последействия разных типов (при этом начальная функция переносится в правую часть).

Уравнение (3) является уравнением устойчивого типа, если для всех t функция $r(t,\cdot)$ не убывает и для всех $s\geqslant 0$ существует такое $T(s)>s$, что для всех $t\geqslant T(s)$ имеем $\int\limits_{0}^{s} d_\tau r(t,\tau)=0$.

Теорема 3 [3]. *Если*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \int\limits_t^{+\infty} \int\limits_0^t d_\tau r(s,\tau)\, ds > 1/e,$$

то все решения уравнения (3) *устойчивого типа осциллируют.*

Литература

1. *Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравн., **18**:8 (1982), 1463–1465.

2. *Чудинов К.М.* Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе — Чантурия // Сиб. матем. журн., **61**:1 (2020), 224-233.

3. *Chudinov K.M.* The Koplatadze–Chanturiya type theorem for linear first-order delay differential equation of general form // Mem. Differential Equations Math. Phys., in print.

КЛАСТЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ И ОБЪЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Б. Чужинов

b.chuzhinov@g.nsu.ru

УДК 515.162.8

Мы рассмотрим связь кластерных алгебр с комплексным объемом гиперболических узлов, а также с группами классических и виртуальных кос. Будут приведены примеры вычислений для простейших гиперболических узлов.

Ключевые слова: кластерные алгебры, теория узлов, инварианты узлов

Cluster algebras and volumes of hyperbolic knots

We consider the connection of cluster algebras with the complex volume of hyperbolic knots as well as groups of classical and virtual braids. Examples of calculations for the simplest hyperbolic knots will be given.

Keywords: cluster algebras, knot theory, knot invariants

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

Чужинов Богдан, Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия); Bogdan Chuzhinov (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Теория кластерных алгебр восходит к работам Фомина и Зелевинского, а также Фока и Гончарова, опубликованным около 20 лет назад. В основе понятия кластерной алгебры лежит колчан (конечный ориентированный граф без петель и 2-циклов) и его преобразования по определенным правилам, называемые мутациями. Поскольку в качестве вершин можно использовать разные математические объекты, то почти сразу были установлены глубокие связи между кластерными алгебрами и различными областями современной математики. В последние годы несколько групп авторов активно исследуют связь кластерных алгебр с важными понятиями и объектами двумерной и трехмерной геометрии и топологии.

В рамках данного доклада мы поговорим о связи кластерных алгебр с представлениями групп кос и групп виртуальных кос, возможности вычисления объемов дополнений к узлам на основе представлений узлов замыканиями кос, а также о возможных обобщениях идей развитых в работах, указанных в списке литературы.

Литература

1. *Hikami K., Inoue R.* Braids, complex volume and cluster algebras // Algebraic and Geometric Topology, **15** (2015), 21175-2194.

2. *Cho Y., Kim H., Kim S., Yoon S.* Parabolic representations and generalized Riley polynomials // arXiv:2204.00319v2[math.GT].

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

А.В. Шкляев

ashklyaev@ gmail.com

УДК 519.214.8, 519.218.22

Для ветвящегося процесса в случайной среде хорошо известно понятие сопровождающего случайного блуждания, играющее ключевую роль при изучении процесса. Однако, для других моделей с ветвлением такого понятия не вводится. В работе рассматривается общая модель случайной рекуррентной последовательности со случайными коэффицентами, для которой вводится сопровождающее блуждание. В качестве частных случаев рассматриваются ветвящиеся процессы в случайной среде, двуполые ветвящиеся процессы в случайной среде, максимальные ветвящиеся процессы и максимальные ветвящиеся процессы в случайной среде. Рассматривается связь вероятностей

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/ в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Шкляев Александр Викторович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия), старший научный сотрудник, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (Москва, Россия); Alexander Shklyaev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)

больших уклонений случайной рекуррентной последовательности и ее сопровождающего случайного блуждания.

Ключевые слова: теория случайных процессов, ветвящиеся процессы, случайные блуждания, случайные среды, большие уклонения

Random Walks Associated with Stochastic Recurrence Sequences

Associated random walk of branching process in random environment is well-known and plays a key role in investigation of the process. However, for other branching models we have no analogue of it. In this work we introduce the associated random walk for a stochastic recurrence sequence with random coefficients. Particularly, we consider branching processes in random environment, bisexual branching processes in random environment, maximal branching processes, maximal branching processes in random environment. We consider the connection between large deviation probabilites of a recurrence sequence and its associated random walk.

Keywords: stochastic processes, branching processes, random walks, random environments, large deviations

Рассмотрим случайную рекуррентную последовательность вида

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n,$$

где (A_i, B_i) – случайные векторы из $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, Y_0 – некоторая случайная величина. Как правило, такого рода последовательности изучают в предположении того, что (A_i, B_i) независимые одинаково распределенные (н.о.р.), однако, в случае изучения больших уклонений условия можно значительно ослабить. Более конкретно, предлагается рассматривать последовательность A_i из н.о.р. положительных случайных величин, а величины B_i рассматривать, вообще говоря, зависимыми и разнораспределенными, накладывая условие независимости $(A_j, j \geqslant i)$ от прошлого $(Y_0, B_j, A_j, j < i)$ и моментные ограничения на B_i. При этих и определенных дополнительных технических условиях в работе [1] рассматривалось случайное блуждание с шагами $\xi_j = \ln A_{j+1}$ и вероятности больших уклонений последовательности $\ln Y_n$ были сведены к вероятностям больших уклонений последовательности S_n: при x/n из некоторого подкомпакта $(0, +\infty)$ показано, что

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x+\Delta)) \sim I\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta)), n \to \infty,$$

где ξ предполагаются нерешетчатыми, Δ – произвольная положительная константа, а I – некоторая непрерывная функция. В дальнейшем было показано, что поведения траектории процесса $\{\ln Y_{[nt]}\}$ и $S_{[nt]}$ близки при условии уклонения, в частности, они удовлетворяют одинаковым условным функциональным предельным теоремам о сходимости к броуновскому мосту ([2]). Данные результаты были использованы для исследования вероятностей больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС) и ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде (ВПИСС) ([3], [4]).

В настоящей работе рассматриваются другие модели с ветвлением, к которым применим тот же подход.

1. Пусть $\boldsymbol{\eta}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\{f_y(s,t)\}$, $y \in \mathbb{R}$ – набор двумерных производящих функций (п.ф.), $(X_{i,j}, Y_{i,j})$ – случайные векторы, которые при фиксации среды являются независимыми и имеют п.ф. $f_{\eta_i}(s)$. Фиксируем также функцию $L : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0$ – множество целых неотрицательных чисел. Тогда двуполым ветвящимся процессом в случайной среде называется последовательность

$$N_0 = (1,1),\ N_{n+1} = L\left(\sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}, \sum_{i=1}^{N_n} Y_{n,i}\right).$$

При широких условиях на распределения (X, Y) и функцию $L(x, y)$ удается построить сопровождающее блуждание и показать, что к процессу применимы описанные выше результаты о больших уклонениях.

2. Рассмотрим функцию распределения (ф.р.) целочисленной неотрицательной случайной величины, заданную соотношением $F(x) = 1 - (c + r(x))/x$ при $x \to \infty$, где $r(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Зададим $X_{i,j}$ – н.о.р. случайные величины с ф.р. F и зададим максимальный ветвящийся процесс соотношениями

$$M_{n+1} = \max(X_{n,1}, \ldots, X_{n,M_n}), n \geqslant 0, \quad M_0 = 1.$$

При этом в предположении $r(x) = o(x^{-\alpha})$, $x \to +\infty$, $\alpha > 0$, удается построить сопровождающее блуждание с шагами, имеющими распределение Гумбеля, и применить описанные выше результаты о больших уклонениях.

3. Результаты предыдущей задачи удается перенести на максимальный ветвящийся процесс в случайной среде, в котором условная ф.р. в каждом поколении определяется соотношением $F_{\eta_n}(x) = 1 - (c_{\eta_n}(x) + r_{\eta_n}(x))/x$, $x \to +\infty$. При определенных условиях на $r_{\eta_n}(x)$ удается построить сопровождающее блуждание и применить описанные выше результаты о больших уклонениях.

Литература

1. *Шкляев А.В.* Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I // Дискрет. матем, **31**:4 (2019), 102–115.

2. *Шкляев А.В.* Условная функциональная предельная теорема для случайной рекуррентной последовательности при условии совершения ей большого уклонения. // Теория вероятностей и ее применения, *в печати*.

3. *Шкляев А.В.* Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. II // Дискрет. матем, **32**:1 (2020), 135–165.

4. *Шкляев А.В.* Большие уклонения строго докритического ветвящегося процесса в случайной среде,// Ветвящиеся процессы и смежные вопросы, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения Андрея Михайловича Зубкова и 70-летию со дня рождения Владимира Алексеевича Ватутина, Труды МИАН, **316** (2022), 316–335.

О ЧИСЛАХ С ЗАДАННЫМ ОКОНЧАНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ ФИБОНАЧЧИ

А.В. Шутов
a1981@mail.ru

УДК 511.3

Каждое натуральное число можно разложить в систему счисления Фибоначчи: $n = \sum_k \varepsilon_k F_k$, где $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ и $\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} = 0$. Данное разложение можно обобщить, заменив последовательность Фибоначчи на более общую линейную рекуррентную последовательность, либо на последовательность знаменателей подходящих дробей к некоторому иррациональному числу. Рассмотрены множества натуральных чисел с заданным окончанием подобных разложений. Среди рассматриваемых задач: плотности этих множеств, разности между соседними элементами таких множеств, распределение простых в этих множествах и т.д.

Ключевые слова: системы счисления

On numbers with given ending of generalized Fibonacci representations

Any natural number has a representation in Fibonacci numeration system $n = \sum_k \varepsilon_k F_k$, where $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ and $\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} = 0$. This representation can be generalized by changing Fibonacci sequence to more general linear recurrence sequence or to the sequence of denominators of partial convergents to some irrational number. Sets of natural numbers with given endings of such representations are considered. We study densities of such sets, differences between neighbour elements, distribution of primes in such sets, etc.

Keywords: numeration systems

Каждое натуральное число может быть разложено в систему счисления Фибоначчи : $n = \sum_k \varepsilon_k F_k$, где $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ и $\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} = 0$ при помощи жадного алгоритма. Данное разложение можно обобщить двумя способами:

1) Заменив последовательность Фибоначчи на более общую линейную рекуррентную последовательность $\{T_n\}$ порядка d, заданную соотношением $T_n = a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_d T_{n-d}$ и начальными условиями $T_0 = 1$, $T_n = 1 + a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0$ при $n < d$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{d-1} \geqslant a_d = 1$. Будем называть соответствующее разложение T-разложением порядка d.

2) Заменив последовательность Фибоначчи на последовательность знаменателей подходящих дробей к некоторому иррациональному α.

Набор $w = (w_{d-1}, \ldots, w_0)$ будем называть допустимым для T-разложения (разложения Островского), если существует натуральное n для которого последовательность коэффициентов T-разложения (разложения Островского) заканчивается на w.

Шутов Антон Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Владимирский государственный университет (Владимир, Россия); Anton Shutov (Vladimir State University, Vladimir, Russia)

Пусть w – допустимый набор. Обозначим через $\mathbb{N}(w)$ множество натуральных чисел, у которых T-разложение (разложение Островского) заканчивается на w.

Цель работы – изучение теоретико-числовых свойств множеств $\mathbb{N}(w)$. Приведем примеры таких свойств.

Теорема 1. *Пусть w – допустимый набор для разложения Островского с некоторым фиксированным иррациональным α. Тогда при фиксированной длине набора плотность множества $\mathbb{N}(w)$ принимает ровно два значения.*

Теорема 2. *Пусть w – допустимый набор для некоторого T-разложения порядка d. Тогда при фиксированной длине набора плотность множества $\mathbb{N}(w)$ принимает ровно d значений.*

Теорема 3. *Пусть w – допустимый набор для разложения Островского с некоторым фиксированным иррациональным α. Тогда разность между соседними элементами множества $\mathbb{N}(w)$ принимает ровно два значения.*

Теорема 4. *Пусть w – допустимый набор для некоторого T-разложения порядка d. Предположим, что w начинается с нуля. Тогда разность между соседними элементами множества $\mathbb{N}(w)$ принимает ровно d значений.*

Отметим, что в случае произвольного допустимого набора аналог теоремы 4 пока не найден.

Теорема 5. *Пусть w – допустимый набор для разложения Островского с некоторым фиксированным иррациональным α, либо для некоторого T-разложения. Тогда множество $\mathbb{N}(w)$ содержит бесконечно много простых чисел.*

В докладе планируется также рассмотреть ряд других теоретико-числовых задач о множествах $\mathbb{N}(w)$, например задачу о представлении натуральных чисел в виде суммы элементов таких множеств.

Кроме того, планируется изложить некоторых общий подход к изучению множеств $\mathbb{N}(w)$, в основе которого лежит связь между данными множествами и распределением дробных долей линейной функции на торе.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

istima92@mail.ru

УДК 517.929

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Используя функционал Ляпунова – Красовского, установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получены оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности, и оценки на множество притяжения.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, распределенное запаздывание, периодические коэффициенты, экспоненциальное убывание решений, оценки решений, функционал Ляпунова – Красовского

Stability of solutions to systems of nonlinear differential equations with distributed delay

In the paper we consider a system of nonlinear differential equations with distributed delay and periodic coefficients in the linear part. Using the Lyapunov –Krasovsky functional, sufficient conditions for the exponential stability of the zero solution are established, estimates characterizing the rate of decrease of solutions at infinity and estimates for the attraction set are obtained.

Keywords: nonlinear differential equations, distributed delay, periodic coefficients, exponential decay of solutions, estimates of solutions, Lyapunov - Krasovskii functional

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \qquad (1)$$

$A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T,s) \equiv B(t,s),$$

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

Ыскак Тимур, к.ф.-м.н., ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия); Timur Yskak (Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia)

$F(t, u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и следующей оценке:

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \leqslant q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2}, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$q_1,\, q_2 \geqslant 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 - const.$$

Основной целью данной работы является исследование экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1), получение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценок на множество притяжения.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова – Красовского, построенный на основе функционалов из [1], [2]:

$$v(t, y) = \langle H(t) y(t), y(t) \rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \langle K(t-s, \eta) y(s), y(s) \rangle \, ds d\eta.$$

Литература

1. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **5**:3 (2005), 20-28.

2. *Yskak T.* Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Functional Differential Equations, **25**:1-2 (2018), 97-108.

ПРОБЛЕМА ДЕЛИТЕЛЕЙ КАРАЦУБЫ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

В.В. Юделевич

Vitaliiyudelevich@mail.ru

УДК 511.35

Доказано, что

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}},$$

где $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ — количество делителей числа n, а суммирование в первой сумме ведётся по простым числам.

Ключевые слова: функция делителей, сдвинутые простые и квадраты.

Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “Базис”.

Юделевич Виталий Викторович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vitalii Iudelevich (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Karatsuba's divisor problem and related questions

We prove that

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\tau(p-1)}\asymp\frac{x}{(\log x)^{3/2}}\quad\text{and}\quad\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n^2+1)}\asymp\frac{x}{(\log x)^{1/2}},$$

where $\tau(n)=\sum_{d|n}1$ is the number of divisors of n, and the summation in the first sum is over primes.

Keywords: divisor function, shifted primes and shifted squares.

В 2004 году А. А. Карацуба на семинаре «Аналитическая теория чисел и приложения» поставил следующую задачу: найти асимптотику суммы

$$\Phi(x)=\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\tau(p-1)}$$

при $x\to\infty$, где $\tau(n)=\sum_{d|n}1$ — функция делителей, а суммирование ведётся по простым числам, не превосходящим x. Данный вопрос является естественным «гибридом» следующих двух классических задач теории чисел.

Первая из них (проблема делителей Титчмарша) заключается в нахождении асимптотики суммы

$$D(x)=\sum_{p\leqslant x}\tau(p-1).$$

Хорошо известно (см. [1], [2], [3], [4]), что

$$D(x)\sim\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\,x,\qquad x\to\infty,$$

где $\zeta(s)$ обозначает дзета-функцию Римана. Вторая задача состоит в нахождении асимптотики суммы

$$T(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}$$

и была решена С. Рамануджаном в [5]: он показал, что

$$T(x)=c_0\frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\right),$$

где

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p\sqrt{p^2-p}\,\log\frac{p}{p-1}=0.5486\ldots$$

Сумма $\Phi(x)$ изучалась ранее. В недавней работе [6] получена оценка

$$\Phi(x)\leqslant 4K\frac{x}{(\log x)^{3/2}}+O\left(\frac{x\log\log x}{(\log x)^{5/2}}\right),$$

где
$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{\frac{p}{p-1}} \left(p \log \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1} \right) = 0.2532\ldots$$
Отметим, что оценку $\Phi(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{3/2}}$ можно получить из следствия 1.2 работы [7], а также действуя аналогично доказательству верхней оценки теоремы 2 ниже. Мы предполагаем, что справедливо соотношение
$$\Phi(x) \sim K \frac{x}{(\log x)^{3/2}}, \qquad x \to \infty,$$
однако доказать это, по-видимому, трудно.

В настоящей работе мы показываем, что упомянутая верхняя оценка для суммы $\Phi(x)$ является точной по порядку.

Теорема 1. Имеет место оценка
$$\Phi(x) \gg \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Тем самым для $\Phi(x)$ найден порядок роста:
$$\Phi(x) \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}},$$
что в первом приближении решает задачу, поставленную Карацубой.

Наряду с $\Phi(x)$ мы рассматриваем сумму
$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)}$$
и доказываем следующую теорему.

Теорема 2. Имеет место оценка
$$F(x) \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}}.$$

Обсудим основные идеи доказательств. В сумме $\Phi(x)$ для каждого простого $p \leqslant x$ мы записываем число $p-1$ в виде ab, где число a состоит из простых делителей, не превосходящих z, а число b — из простых делителей, больших z; при этом $z = x^{\varepsilon}$ и $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда сумма $\Phi(x)$ перепишется в виде
$$\Phi(x) = \sum_{\substack{a \leqslant x \\ p|a \Rightarrow p \leqslant z}} \frac{1}{\tau(a)} \sum_{\substack{b \leqslant \frac{x-1}{a} \\ p|b \Rightarrow p > z \\ ab+1 - \text{простое}}} \frac{1}{\tau(b)},$$
и, так как $\tau(b) = O_{\varepsilon}(1)$, получаем
$$\Phi(x) \gg_{\varepsilon} \sum_{a \leqslant x^{\varepsilon}} \frac{1}{\tau(a)} \sum_{\substack{b \leqslant \frac{x-1}{a} \\ p|b \Rightarrow p > x^{\varepsilon} \\ ab+1 - \text{простое}}} 1.$$

Внутренняя сумма оценивается снизу с помощью решета Бруна-Хооли величиной порядка

$$\frac{x}{a(\log x)^2} - R(x;a),$$

где вкладом величины $R(x;a)$ можно пренебречь. Отсюда получаем требуемый результат:

$$\Phi(x) \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^2} \sum_{a \leqslant x^\varepsilon} \frac{1}{a\tau(a)} \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Аналогично получается нижняя оценка суммы $F(x)$. Верхнюю оценку для $F(x)$ мы получаем из неравенства $\tau(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$ (здесь $\omega(n)$ — число простых делителей n без учёта кратности) и оценки на количество чисел $n \leqslant x$ с заданным значением $\omega(n^2+1)$.

Отметим, что методы, используемые в данной работе, можно применять и к другим функциям, родственным $\tau(n)$. Так, если $\tau_k(n)$ означает обобщённую функцию делителей, $\tau_k(n) = \sum_{n=d_1 d_2 \ldots d_k} 1$, то можно доказать, что

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau_k(p-1)} \asymp_k x(\log x)^{\frac{1}{k}-2}.$$

Доклад основан на совместной работе с С. В. Конягиным и М. Р. Габдуллиным.

Литература

1. *E. C. Titchmars.* A divisor problem // Rend. Palermo, **54** (1930), 414-429.

2. *Ю. В. Линник.* Новые варианты и применения дисперсионного метода в бинарных аддитивных задачах // Докл. АН СССР, **137**:6 (1961), с. 1299–1302.

3. *H. Halberstam.* Footnote to the Titchmarsh-Linnik divisor problem // Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), pp. 187-188.

4. *E. Bombieri, J. B. Friedlander, H. Iwaniec.* Primes in arithmetic progressions to large moduli // Acta Math. 357 (1985), pp. 51-76.

5. *S. Ramanujan.* Some formulae in the analytic theory of numbers// The Mess. Math.**45** (1916) , pp. 81-84.

6. *В. В. Юделевич*, О проблеме делителей Карацубы // Изв. РАН **86**:5, (2022), с. 169–196.

7. *P. Pollack* Nonnegative multiplicative functions on sifted sets, and the square roots of -1 modulo shifted primes // Glasgow Math. J.,**62**, (2020), pp. 187-199.

О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Е.Б. Яровая

yarovaya@mech.math.msu.su

УДК 519.21

Рассматриваются стохастические процессы с непрерывным временем, которые могут быть описаны в терминах размножения, гибели и транспорта частиц. Такие процессы на многомерных решетках называют ветвящимися случайными блужданиями, а точки решетки, в которых может происходить рождение и гибель частиц, — источниками ветвления. Особое внимание уделено различным методам исследования асимптотического поведения численностей частиц в каждой точке решетки и их моментов для ветвящихся случайных блужданий, в основе которых лежит симметричное, однородное по пространству, неприводимое случайное блуждание по решетке.

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, эволюционный оператор, функция Грина

On methods for studying branching random walks

We study stochastic processes with continuous time that can be described in terms of reproduction, death, and transport of particles. Such processes on multidimensional lattices are called branching random walks, and the points of the lattice where the birth and death of particles can occur are called branching sources. Special attention is given to various methods for studying the asymptotic behavior of the particle numbers at each point of the lattice and their moments for branching random walks based on a symmetric, spatially homogeneous, irreducible random walk on the lattice.

Keywords: branching random walks, evolution operators, moments, limit theorems

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с непрерывным временем. Случайное блуждание, лежащее в основе ВСБ, задается матрицей переходных интенсивностей $A = \big(a(x-y)\big)_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$, в которой $a(x) \geqslant 0$ при $x \neq 0$ и $a(0) < 0$, и при этом функция $a(x)$ четная и удовлетворяет условию $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} a(x) = 0$. Блуждание также предполагается неразложимым, т.е. для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдутся такие $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^{k} z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ при $i = 1, \ldots, k$. Ветвление в точках $x \in \mathbb{Z}^d$ определяется инфинитезимальной производящей функцией $f(u,x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) u^k$ определенной при $0 \leqslant u \leqslant 1$, где $b_k(x) \geqslant 0$ при $k \neq 1$, $b_1(x) \leqslant 0$ и $\sum_{k\neq 1} b_k(x) = |b_1| < \infty$. Предполагается, что $f^{(r)}(1,x) < \infty$ для каждого $x \in \mathbb{Z}^d$ при $r \in \mathbb{N}$. Величину $\beta(x) = f'(1,x) = \sum_k k b_k(x)$ называют *интенсивностью ветвления* в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Функции $a(x)$ и $f(u,x)$ определяют ветвящийся марковский процесс, а именно, частица, находящаяся в точке x (*источнике ветвления*), за малое время h с вероятностью

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

Яровая Елена Борисовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yarovaya E.B. (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$p(h,x,y) = a(x-y)h + o(h)$ переходит в точку $y \neq x$, либо не совершает такого перехода и при этом с вероятностью $p_*(h,x,k) = b_k h + o(h)$ производит потомство из $k \neq 1$ частиц, остающихся в точке x (считается, что и сама частица входит в это число, а при $k=0$ говорят, что *частица гибнет*), либо с вероятностью $1 - \sum_{y\neq x} a(x-y)h - \sum_{k\neq 1} b_k(x)h + o(h)$ никаких изменений с частицей не происходит. Отдельные частицы эволюционируют независимо друг от друга.

Основным объектом исследования является численность частиц $\mu_{t,x}(y)$ в момент времени t в произвольной фиксированной точке $y \in \mathbf{Z}^d$ при условии, что в начальный момент времени у нас имелась одна частица, находящаяся в точке $x \in \mathbf{Z}^d$. Как показано, напр., в [1] первый момент $m_1(t,x,y) = \mathsf{E}\mu_{t,x}(y)$ случайной величины $\mu_{t,x}(y)$ является решением $u(t,x)$ задачи Коши $\partial_t u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$ с начальным условием $u(0,x) = \delta(y-x)$, где симметричный оператор сверточного типа $\mathcal{A}$, порожденный матрицей A, и диагональный оператор покоординатного умножения $\mathcal{B}$ действуют на функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ следующим образом: $(\mathcal{A}\varphi)(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x-y)\varphi(y)$, $(\mathcal{B}\varphi)(x) = \beta(x)\varphi(x)$, для любого $x \in \mathbb{Z}^d$.

В большинстве публикаций по данной тематике доказательства предельных теорем для численности частиц $\mu_{t,x}(y)$ объединяются общим методом исследования, основанном на анализе асимптотики моментов $\mu_{t,x}(y)$, см., напр., [2]. Этот метод основан на проверке условий, гарантирующих единственность (при некоторой нормировке) определения предельного вероятностного распределения численностей частиц своими моментам.

Для исследования ряда моделей ВСБ может быть предложен иной метод [3]. Если в ВСБ с размножением и гибелью частиц в каждом узле $\mathbb{Z}^d$ дополнительно предположить, что $\beta(x) \to 0$ при $\|x\| \to \infty$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\mathbb{Z}^d)$. Кроме того считаются выполненными условия: $f^{(r)}(1,x) < \infty$ лишь при $r = 1,2$ и $\sup_{\|h\|=1}\{(\mathcal{A}+\mathcal{B})h,h)\} > 0$, гарантирующее экспоненциальный рост первого момента численностей частиц в каждом узле $\mathbb{Z}^d$. В этом случае, как показано в [3], для анализа поведения рассматриваемого ВСБ может быть предложен подход, основанный на аппроксимации нормированного числа частиц в точке решетки некоторым неотрицательным мартингалом, позволяющий доказать сходимость этих величин к пределу в среднеквадратическом.

Литература

1.*Makarova Iu., et al.* Branching Random Walks with Two Types of Particles on Multidimensional Lattices. Mathematics, 2022. V. 10:6., P. 1–46.

2. *Яровая Е. Б.* Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде, Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007.

3. *Смородина Н. В., Яровая Е. Б.* Мартингальный метод исследования ветвящихся случайных блужданий, УМН, 77:5, 467, 2022, 193–194.

О ТЕОРЕМЕ МАРЧЕНКО-ПАСТУРА ДЛЯ СЛУЧАЙНОЙ ТЕНЗОРНОЙ МОДЕЛИ

П.А. Яськов
yaskov@mi-ras.ru

УДК 519.214

Найдены необходимые и достаточные условия в теореме Марченко-Пастура для выборочных ковариационных матриц, отвечающих симметричным случайным тензорам, состоящим из $\binom{n}{d}$ различных произведений d величин случайной выборки объема n.

Ключевые слова: случайные матрицы, выборочные ковариационные матрицы

On the Marchenko-Pastur theorem for a random tensor model

We obtain necessary and sufficient conditions for the Marchenko-Pastur theorem for sample covariance matrices associated with symmetric random tensors, which are formed by $\binom{n}{d}$ different products of d variables chosen from a random sample of size n.

Keywords: random matrices, sample covariance matrices

Пусть X – случайная величина с $\mathbb{E}X = 0$ и $\mathbb{E}X^2 = 1$. Будем говорить, что случайный вектор $\mathbf{x}_p$ со значениями в $\mathbb{R}^p$ отвечает случайной тензорной модели, порожденной X, если для некоторых $d, n \in \mathbb{N}$ с $d \leqslant n$ имеет место равенство $p = \binom{n}{d}$, а элементы $\mathbf{x}_p$ суть всевозможные произведения вида $\prod_{k=1}^d X_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n$, где $\{X_i\}_{i=1}^n$ – н.о.р. копии X. Обозначим также через $\mu_A := p^{-1}\sum_{i=1}^p \delta_{\lambda_i}$ эмпирическое спектральное распределение симметричной матрицы $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, где $\{\lambda_i\}_{i=1}^p$ – множество собственных значений A с учетом кратности, а δ_λ – дельта-мера в точке $\lambda \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе изучается предельное поведения спектра выборочных коварицонных матриц (растущей размерности) вида

$$\widehat{\Sigma}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \mathbf{x}_{pk}\mathbf{x}_{pk}^\top,$$

где $\{\mathbf{x}_{pk}\}_{k=1}^N$ – независимые копии $\mathbf{x}_p$ со структурой, описанной выше. А именно, дается исчерпывающий ответ на вопрос, при каких условиях на d, n, X предельное спектральное распределение $\widehat{\Sigma}_N$ в стандартной асимптотике $\binom{d}{n}/N \to \rho > 0$ при $d, n, N \to \infty$ совпадает с классическим распределением Марченко-Пастура μ_ρ, где μ_ρ определяется по формуле

$$d\mu_\rho = \max\{1 - 1/\rho, 0\}\, d\delta_0 + \frac{\sqrt{(a_+ - x)(x - a_-)}}{2\pi x\rho}\mathbf{1}\big(a_- \leqslant x \leqslant a_+\big)\, dx,$$

Яськов Павел Андреевич, к.ф.-м.н., МИАН, НИТУ «МИСИС» (Москва, Россия); Pavel Yaskov (Steklov Mathematical Institute of RAS, The National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia)

где $a_{\pm} = (1 \pm \sqrt{\rho})^2$, а $\mathbf{1}(\cdot)$ – индикаторная функция. Данная задача восходит к недавней работе [1], где вопрос об оптимальных достаточных условиях рассматривался для модели с независимыми, но необязательно одинаково распределенными X_i при условии ограниченности четвертых моментов. В случае одинаковой распределенности X_i удается получить исчерпывающее описание необходимых и достаточных условий на d, n, X.

Теорема 1. *Пусть $d = d(N), n = n(N) \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, таковы, что $d \leqslant n$ и $\binom{n}{d}/N \to \rho > 0$, здесь и далее пределы берутся при $N \to \infty$. Предположим также, что для каждого $p = \binom{n}{d}$ случайный вектор $\mathbf{x}_p$ в $\mathbb{R}^p$ отвечает случайной тензорной модели, порожденной одной и той же случайной величиной X с $\mathbb{E}X = 0$ и $\mathbb{E}X^2 = 1$. Тогда $\mathbb{P}(\mu_{\widehat{\Sigma}_N} \xrightarrow{d} \mu_\rho) = 1$, когда*

$$d\mathbb{E}X^2\mathbf{1}(dX^2 > n) = o(1) \quad \text{и} \quad d^2\mathbb{E}X^4\mathbf{1}(dX^2 \leqslant n) = o(n). \tag{1}$$

Обратно, $\mathbb{P}(\mu_{\widehat{\Sigma}_N} \xrightarrow{d} \mu_\rho) = 1$ влечет (1), когда X не есть бернуллиевская величина.

В частности, первое утверждение теоремы 1 имеет место при $d^2 = o(n)$ при $\mathbb{E}X^4 < \infty$, ср. с условием $d^3 = o(n)$ из [1]. Доказательство теоремы 1 основано на применении теоремы 2.1 из [5], подходящей верхней оценке на дисперсии произвольных квадратичных форм от $\mathbf{x}_p$ (в предположении $\mathbb{E}X^4 < \infty$), а также новом законе больших чисел для элементарных симметрических случайных многочленов вида

$$S_n^{(d)} := \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}, \quad d, n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные случайные величины. Пусть также $\mathbb{E}Z = 1$ и $d = d(n) \in \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\frac{S_n^{(d)}}{\binom{n}{d}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \quad n \to \infty,$$

если и только если $d\mathbb{E}Z\mathbf{1}(dZ > n) \to 0$ и $d^2\mathbb{E}Z^2\mathbf{1}(dZ \leqslant n) = o(n)$.

Теорема 2 расширяет классические результаты об элементарных симметрических случайных многочленах [2], [3], [4].

Литература

1. *Bryson J., Vershynin R., Zhao H.* Marchenko–Pastur law with relaxed independence conditions // Random Matrices: Theory and Applications, Vol. 10, No. 04, (2021), article no. 2150040.

2. *van Es A. J., Helmers R.* Elementary symmetric polynomials of increasing order // Probab. Theory Related Fields, **80**, (1988), 21–35.

3. *Halász G., Szekely G.J.* On the elementary symmetric polynomials of independent random variables // Acta Math. Acad. Sci. H., **28**, (1976), 397-400.

4. *Szekely G.J.* A limit theorem for elementary symmetric polynomials of independent random variables // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **59**, (1982), 355-359.

5. *Yaskov P.* Necessary and sufficient conditions for the Marchenko-Pastur theorem // Electronic Communications in Probability, **21**, article no. 73, (2016), 1-8.

MULTIPLICATION OF QUANDLE STRUCTURES

V.G. Bardakov, D.A. Fedoseev

bardakov@mail.math.nsc.ru, denfedex@yandex.ru

UDC 512.54+515.162

We define a composition of quandle structures which are defined on the same set, and find conditions under which this composition gives a quandle. Further we prove that under this multiplication we get a group and show that this group is abelian.

Keywords: quandle, multi-quandle, multiplication of quandles.

By *groupoid* $(Q,*)$ we mean a non-empty set Q with one binary algebraic operation $*\colon Q\times Q\to Q$. A *quandle* is a groupoid $(Q,*)$ in which the operation $(x,y)\mapsto x*y$ satisfies the following axioms:

(Q1) Idempotency axiom: $x*x=x$ for all $x\in Q$,

(Q2) Right invertibility axiom: for any $x,y\in Q$ there exists a unique $z\in Q$ such that $x=z*y$,

(Q3) Self-distributivity axiom: $(x*y)*z=(x*z)*(y*z)$ for all $x,y,z\in Q$.

It follows from (Q2) that we can define an operation $\bar{*}\colon Q\times Q\to Q$ by the rule

$$a=c*b\Leftrightarrow c=a\bar{*}b.$$

This is equivalent to

$$(a*b)\bar{*}b=a=(a\bar{*}b)*b.$$

Many interesting examples of quandles come from groups.

- If G is a group and n is an integer, then the set G equipped with the binary operation $a*b=b^{-n}ab^n$ forms a quandle $Conj_n(G)$. For $n=1$, it is called the *conjugation quandle* $Conj(G)$.
- If G is a group, then the binary operation $a*b=ba^{-1}b$ turns the set G into the *core quandle* $Core(G)$.

Consider two quandles $Q_1=(Q,\circ)$ and $Q_2=(Q,*)$ defined on a set Q. Define the *composition* $\circ*$ of operations $\circ$ and $*$ in the following way:

$$\circ*\colon Q\times Q\to Q;\quad a\circ*b=(a\circ b)*b.$$

A natural question arises: is $(Q,\circ*)$ a quandle? In general, the answer is negative.

Proposition 1. *Let Q be a set and let $\circ$ and $*$ be two quandle operations on the set Q. Then,*

1. *The composition $\circ*$ satisfies the idempotency and right invertibility axioms;*

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement no. 075-02-2022-884).

Valeriy G. Bardakov (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia; Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk, Russia)

Denis A. Fedoseev (Moscow State University, Moscow, Russia; Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia)

2. If the operation $*$ is distributive with respect to the operation $\circ$, i.e.

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c), \quad a, b, c \in Q,$$

then the composition $\circ *$ satisfies the self-distributivity axiom.

Definition. Let Q be a set and let $\circ$ and $*$ be two quandle operations on Q which satisfy the condition

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$$

for any $a, b, c \in Q$. Then *multiplication* of quandles $(Q, \circ)$ and $(Q, *)$ is defined by the following formula:

$$(Q, \circ)(Q, *) = (Q, \circ *).$$

The situation when $*$ is distributive with respect to $\circ$ leads to an interesting consequence. We get the following chain of equalities:

$$a \circ * b = (a \circ b) * b = (a * b) \circ (b * b) = (a * b) \circ b = a * \circ b.$$

Hence we proved that $\circ * = * \circ$. In particular, $* \circ$ is also a quandle operation.

Proposition 2. *If the operation $*$ is distributive with respect to the operation $\circ$, quandle multiplication of $(Q, \circ)$ and $(Q, *)$ is commutative, that is $(Q, \circ)(Q, *) = (Q, *)(Q, \circ)$.*

If we begin with operations $\circ$ and $*$ and consider iterative compositions of their powers, we get an infinite family of operations, each of which is defined by a word in the alphabet $\{\circ, *, \bar{\circ}, \bar{*}\}$. For example, the word $\circ \circ \bar{*} \circ *$ defines the operation $(a, b) \mapsto ((a \circ^2 b) \bar{*} b) \circ b$. We can say that each operation of this family is defined by an element of the free group $F_2 = \langle \circ, * \rangle$.

Theorem. *Let $(Q, \circ)$ and $(Q, *)$ be quandles and let the operations $\circ$ and $*$ be distributive with respect to each other, i.e.*

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c), \quad (a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c), \quad a, b, c \in Q.$$

Then any finite word in the alphabet $\{\circ, *, \bar{\circ}, \bar{*}\}$ defines a quandle operation on the set Q.

If G is a non-abelian group, then we can define two quandles on the set G: $Conj(G)$ and $Core(G)$. It is interesting to understand under which conditions they generate a group.

Corollary. *If G is a two-step nilpotent group in which the square of any element lies in the center, then $Conj(G)$ and $Core(G)$ generate a group that is isomorphic to abelianization $G^{ab} = G/G'$.*

Remark. The quandle multiplication was also considered in [2, 3].

References

1. *Bardakov V.G., Fedoseev D.A.* Multiplication of quandle structures // arXiv:2204.12571.

2. *Elhamdadi M., Saito M., Zappala E.* Higher arity self-distributive operations in Cascades and their cohomology // J. Algebra and Appl., 20, no. 7 (2021) 2150116.

3. *Turaev V.* Multi-quandles of topological pairs // arXiv:2205.00951.

DETERMINATION OF THE HOMOTOPY TYPE OF A MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISM ON AN ORIENTABLE SURFACE BY A HETEROCLINIC INTERSECTION

V.Z. Grines, A.I. Morozov, O.V. Pochinka

vgrines@yandex.ru, andreifrostnn@gmail.com, olga-pochinka@yandex.ru

UDC 517.938

This paper is devoted to the study of homotopy types of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms on closed orientable surfaces.In the present work, it is proposed an algorithm for recognizing the homotopy type of a non-gradient-like Morse-Smale diffeomorphism by its heteroclinic intersection. The algorithm is based on the construction of a filtration for a diffeomorphism and calculation of the intersection index of saddle separatrices in the fundamental annuli of filtration elements.

Keywords: Morse-Smale diffeomorphisms, Nielsen-Thurston theory, homotopy classification

In this paper, the authors propose an algorithm for recognizing that a given non-gradient-like diffeomorphism belongs to the Nielsen-Thurston set T_1 or T_2 by its heteroclinic intersection. Let's analyze this problem in more detail.

Let $f: S_p \to S_p$ be an orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphism. Since $\{f\} \in T_i$ if and only if $\{f^k\} \in T_i$, $k \neq 0$ (see, for example [1-3]), then, without loss of generality, we can assume that the nonwandering set of the diffeomorphism f consists of fixed points and f preserves orientation on their invariant manifolds. Then the set Ω_1 of saddle points of the diffeomorphism f can be ordered: $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k_1}$ due to the Smale relation [4]. Precisely, if $W^u_{\sigma_j} \cap W^s_{\sigma_i} \neq \emptyset$, then $i < j$.

Denote by Ω_0, Ω_2 the sets of sinks and sources of the diffeomorphism f, respectively, and by k_0, k_2 the number of points in these sets. Let

$$A_{f,0} = \Omega_0,\ A_{f,i} = \Omega_0 \cup \bigcup_{j=1}^{i} W^u_{\sigma_j},\ i = 1, \ldots, k_1,$$

$$R_{f,i} = \Omega_2 \cup \bigcup_{j=i+1}^{k_1} W^s_{\sigma_j},\ i = 0, \ldots, k_1 - 1,\ R_{f,k_1} = \Omega_2.$$

It follows from [5,6], that each of the sets $A_{f,i}$ ($R_{f,i}$) is an *attractor (repeller)*, that has *grabbing neighbourhood* $M_{f,i}$ ($N_{f,i}$), which is a compact surface with boundary, such that

$$f(M_{f,i}) \subset int\, M_{f,i},\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(M_{f,i}) = A_{f,i}$$

$$\left(f^{-1}(N_{f,i}) \subset int\, N_{f,i}, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(N_{f,i}) = R_{f,i}\right).$$

The study is supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications in NRU HSE, grant of Ministry of Science and Higher Education (agreement no. 075-15-2022-1101).

Vyacheslav Zigmundovich Grines, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, NRU HSE (Nizhniy Novgorod, Russia);

Morozov Andrei Igorevich, graduate student NRU HSE (Nizhniy Novgorod, Russia);

Pochinka Olga Vitalevna, graduate student NRU HSE (Nizhniy Novgorod, Russia);

Moreover, the attractor $A_{f,i}$ and the repeller $R_{f,i}$ are *dual*, i.e. $N_{f,i} = S_p \setminus int\, M_{f,i}$. Since $A_{f,0} \subset A_{f,1} \subset \cdots \subset A_{f,k_1}$, then capturing neighborhoods can be chosen so that $M_{f,i} \subset f(M_{f,i+1})$, $i = 0, \dots, k_1 - 1$, $\partial M_{f,i}$ does not contain heteroclinic points and each connected component v of the set $K_{f,i} = M_{f,i} \setminus int\, f(M_{f,i})$ is diffeomorphic to the two-dimensional annulus $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ by some diffeomorphism $h_v : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to v$ such that $h_v^{-1} f h_v|_{\{0\}\times\mathbb{S}^1}(0,s) = (1,s)$, $s \in \mathbb{S}^1$.

Let $a_v = h_v([0,1] \times \{0\})$, $b_v = h_v(\{0\} \times \mathbb{S}^1)$. Let us orient the curve a_v by the direction on the interval $[0,1]$ from 0 to 1. Then the space of orbits $\hat{v} = v/f$ is diffeomorphic to the two-dimensional torus and the natural projection $p_v : v \to \hat{v}$ induces on the torus $\hat{v}$ generators $\hat{a}_v = p_v(a_v)$, $\hat{b}_v = p_v(b_v)$.

Let v be the connected component of the set $K_{f,i}$ and $C_v = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f^n(v)$. Denote by $L^s_{f,v}$ ($L^u_{f,v}$) the union of stable (unstable) separatrices of saddles σ_j, $j \leqslant i\, (j > i)$, lying entirely in the set C_v.

If the sets $L^s_{f,v}$, $L^u_{f,v}$ are not empty, then we set $\hat{L}^s_{f,v} = p_v(L^s_{f,v})$, $\hat{L}^u_{f,v} = p_v(L^u_{f,v})$. Then each connected component of these sets is a knot on the torus $\hat{v}$, of homotopy type $\langle 1, d^s_{f,v}\rangle$, $\langle 1, d^u_{f,v}\rangle$ in the chosen generators $\hat{a}_v$, $\hat{b}_v$. Let $\xi_{f,v} = d^s_{f,v} - d^u_{f,v}$.

By virtue of [7] the number $\xi_{f,v}$ does not depend on the choice of the basis $\hat{a}_v, \hat{b}_v$. A component v will be called a *heteroclinic annulus*,if the set $L^u_{f,v}$ contains at least one unstable separatrix of the saddle σ_{i+1}, intersecting the set $L^s_{f,v}$. Note that there are at most two heteroclinic annuli in each set $K_{f,i}$. The heteroclinic annulus v will be called

- *contractible*, if the curve b_v is homotopic to zero on the surface S_p;
- *trivial*, if $\xi_{f,v} = 0$;
- *essential*, if v is neither contractible nor trivial.

Denote by $\mathcal{V}_f$ the set of essential heteroclinic annuli v. If the set $\mathcal{V}_f$ is empty, then we set $\xi_f = 0$. Otherwise, we introduce the following equivalence relation on the set $\mathcal{V}_f$: components $v \subset K_{f,i}$, $v' \subset K_{f,i'}$ will be called *equivalent*, if there exists an ambient isotopy $H_t : S_p \to S_p$ such that $H_0 = id$, $H_1(b_v) = b_{v'}$. Denote by $[v]$ the equivalence class of the annulus v and by $[\mathcal{V}_f]$ the set of equivalence classes. Assuming that the curves b_v, $b_{v'}$ are consistently oriented for the equivalent annuli v, v', we set

$$\xi_{f,[v]} = \sum_{v\in[v]} \xi_{f,v}, \ \xi_f = \sum_{[v]\in[\mathcal{V}_f]} |\xi_{f,[v]}|.$$

Theorem 1.*Let f be an orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphism on a surface. Then $\{f\} \in T_1$ ($\{f\} \in T_2$) $\Leftrightarrow \xi_f = 0$ ($\xi_f \neq 0$).*

References

1. Nielsen, J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen.// I Acta Math. - 1927. - 50. - p. 189-358; II Acta Math. - 1929 - 53. - p. 1-76; III Acta Math. - 1932. - 58. - p. 87-167;

2. Nielsen, J. Die Structur periodisher Transformationen von Flachen. // D.K. Dan. Vidensk. Selsk. Math-fys. Medd. - 1937. - 15. - p. 1-77.

3. Surface transformation classes of algebraically finite type.// Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. - 1944. - 21. - p. 89.

4. S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., 73(6): 747–817, 1967, https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1

For Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits given on a two-dimensional torus, the theorem was proved in [8].

5. D. Pixton, Wild unstable manifolds, Topology, 1977, 16, 167–172, https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3.

6. Grines, V. Z., Zhuzhoma, E. V., Medvedev, V. S., and Pochinka, O. V. E. (2010). Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 271(1), 103-124, https://doi.org/10.1134/S0081543810040097.

7. Rolfsen, D.: Knots and links. Mathematics Lecture Series 7 (1990).

8. A.I. Morozov. Determination of the Homotopy Type of a Morse – Smale Diffeomorphism on a 2-torus by Heteroclinic Intersection, Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2021, Vol. 17, no. 4, pp. 465-473, https://doi.org/10.20537/nd210408.

REPRESENTATIONS OF THE SINGULAR BRAID GROUP AND SUBGROUPS OF CAMOMILE TYPE

T.A. Kozlovskaya

t.kozlovskaya@math.tsu.ru

UDC 512.54+515.162

In this work we construct a finite presentation for the singular pure braid group SP_n. Using this representation, we prove that the center of the singular braid group is a direct factor in SP_n. Also we construct linear representations and representation by automorphisms of free group F_n for the singular braid group SB_n. We introduce groups of camomile type and prove that the singular pure braid group SP_n, $n \geqslant 5$, is a subgroup of camomile type.

Keywords: braid group, pure braid group, singular braid group, singular pure braid group, center of group, finite presentation.

The singular braid group SG_n is generated by elements σ_i, τ_i, where $i = 1, 2, \ldots, n-1$. The elements σ_i, generate the braid group B_n. The generators τ_i satisfy the defining relations

$$\tau_i \, \tau_j = \tau_j \, \tau_i, \quad |i-j| \geqslant 2,$$

other relations are mixed:

$$\tau_i \, \sigma_j = \sigma_j \, \tau_i, \quad |i-j| \geqslant 2,$$

$$\tau_i \, \sigma_i = \sigma_i \, \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\sigma_{i+1} \, \sigma_i \, \tau_{i+1} = \tau_i \, \sigma_{i+1} \, \sigma_i, \quad \sigma_i \, \sigma_{i+1} \, \tau_i = \tau_{i+1} \, \sigma_i \, \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Define the map $\pi : SG_n \longrightarrow S_n$ of the singular braid group SG_n onto the symmetric group S_n on n symbols by actions on the generators $\pi(\sigma_i) = \pi(\tau_i) = (i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. The kernel $\ker(\pi)$ of this map is called the *singular pure braid group* and denoted by SP_n.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement no. 075-02-2022-884).

Tatyana A. Kozlovskaya (Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk, Russia)

Theorem 1. *The singular pure braid group SP_n, $n \geqslant 2$ is generated by elements a_{ij}, b_{ij} $1 \leqslant i < j \leqslant n$ and is defined by relations:*

$$a_{ij}b_{ij} = b_{ij}a_{ij},$$

$$\begin{gathered}
a_{ik}^{-\varepsilon}a_{kj}a_{ik}^{\varepsilon} = (a_{ij}a_{kj})^{\varepsilon}a_{kj}(a_{ij}a_{kj})^{-\varepsilon},\\
a_{ik}^{-\varepsilon}b_{kj}a_{ik}^{\varepsilon} = (a_{ij}a_{kj})^{\varepsilon}b_{kj}(a_{ij}a_{kj})^{-\varepsilon},\\
a_{km}^{-\varepsilon}a_{kj}a_{km}^{\varepsilon} = (a_{kj}a_{mj})^{\varepsilon}a_{kj}(a_{kj}a_{mj})^{-\varepsilon}, \text{ for } m < j,\\
a_{km}^{-\varepsilon}b_{kj}a_{km}^{\varepsilon} = (a_{kj}a_{mj})^{\varepsilon}b_{kj}(a_{kj}a_{mj})^{-\varepsilon}, \text{ for } m < j,\\
a_{im}^{-\varepsilon}a_{kj}a_{im}^{\varepsilon} = [a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}]^{\varepsilon}a_{kj}[a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}]^{-\varepsilon}, \text{ for } i < k < m,\\
a_{im}^{-\varepsilon}b_{kj}a_{im}^{\varepsilon} = [a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}]^{\varepsilon}b_{kj}[a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}]^{-\varepsilon}, \text{ for } i < k < m,\\
a_{im}^{-\varepsilon}a_{kj}a_{im}^{\varepsilon} = a_{kj}, \text{ for } k < i < m < j \text{ or } m < k,\\
a_{im}^{-\varepsilon}b_{kj}a_{im}^{\varepsilon} = b_{kj}, \text{ for } k < i < m < j \text{ or } m < k,\\
b_{im}^{-\varepsilon}a_{kj}b_{im}^{\varepsilon} = a_{kj}, \text{ for } k < i < m < j \text{ or } m < k,\\
b_{im}^{-\varepsilon}b_{kj}b_{im}^{\varepsilon} = b_{kj}, \text{ for } k < i < m < j \text{ or } m < k,\\
b_{ij}^{-\varepsilon}(a_{ik}a_{jk})b_{ij}^{\varepsilon} = a_{ik}a_{jk}, \text{ for } i < j < k.\\
b_{im}^{-\varepsilon}\left(a_{mj}^{-1}a_{kj}a_{mj}\right)b_{im}^{\varepsilon} = a_{mj}^{-1}a_{kj}a_{mj}, \text{ for } i < k < m,\\
b_{im}^{-\varepsilon}\left(a_{mj}^{-1}b_{kj}a_{mj}\right)b_{im}^{\varepsilon} = a_{mj}^{-1}b_{kj}a_{mj}, \text{ for } i < k < m.
\end{gathered}$$

Theorem 2. *For any $n \geqslant 3$ the center $Z(SG_n)$ is a direct factor in SP_n. But $Z(SG_n)$ is not a direct factor in SG_n.*

Let F be the field of rational fractions over $\mathbb{Q}$ with two variables t and a, $F = \mathbb{Q}(t, a)$.

Theorem 3. *Any linear local homogeneous representation $\varphi : SG_n \to GL_n(F)$ that is an extension of the Burau representation of B_n can be defined on the generators:*

$$\varphi(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c}
E_{i-1} & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 1-t & t & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & E_{n-i-1}
\end{array}\right),$$

$$\varphi(\tau_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c}
E_{i-1} & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 1-t+at & t-at & 0\\
0 & 1-a & a & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & E_{n-i-1}
\end{array}\right).$$

Suppose that a group G is defined by a set of generators X and a set of relations R. In this case we say that G has a presentation $\mathcal{P}(G) = \langle X \mid R\rangle$. We will denote the set of generators X by $\mathcal{G}(G)$ and the set of relations R by $\mathcal{R}(G)$.

Let G be a group, H is its normal subgroup, $\bar{G}$ is a set of coset representatives H in G. The subgroup H is said to be a subgroup of *camomile type* with *highlighted petal* H_0, and *conjugated set* M, if $H_0 \leqslant H$, M is a subset of $\bar{G}$ that contains a unit element e of G, and

$$\mathcal{P}(H) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{P}(H_0^m), \quad \text{where} \quad H_0^m = m^{-1}H_0m,$$

$$\mathcal{G}(H) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{G}(H_0^m) \quad \text{and} \quad \mathcal{R}(H) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{R}(H_0^m).$$

Theorem 4. *The pure singular braid group SP_n, $n \geqslant 5$, is a subgroup of camomile type with highlighted petal SP_4.*

References

1. *Bardakov V.G., Kozlovskaya T.A.* On 3-strand singular pure braid group // Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 29, no. 10, (2020) 2042001(20 pages).

2. *Gongopadhyay K., Kozlovskaya T.A., Mamonov O.* On some decompositions of the 3-strand singular braid group// Topology Appl. 283, 107398, 2020.

3. *Bardakov V.G., Emel'yanenkov I., Ivanov M., Kozlovskaya T.A., Nasybullov T., Vesnin A.* Virtual and universal braid groups, their quotients and representations // arXiv:2107.03875.

INVERSE PROBLEMS FOR THE GENERALIZED KAWAHARA EQUATION

E.V. Martynov

e.martynov@inbox.ru

In this research we study the inverse problems for the generalized form of Kawahara equation as well as its linearized analog in a bounded domain with integral overdetermination. As the control function we consider either a special form of the right-hand side of the equation or the value of the derivative of the solution on one of the boundaries. In order to achieve the controllability of the generalized Kawahara equation we impose smallness conditions on either the time interval or the input data. Those restrictions are absent in linear case.

Keywords: Kawahara equation, inverse problems, integral overdetermination, initial-boundary value problem.
MSC: 35Q93

Consider an initial-boundary value problem for the generalized Kawahara equation

$$u_t - u_{xxxxx} + \sum_{j=0}^{4} a_j \partial_x^j u + (F(u))_x = f(t,x), \tag{1}$$

$u = u(t,x)$, $a_j \in \mathbb{R}$, posed on a rectangle $Q_T = (0,T) \times (0,R)$, where $T, R > 0$, with the initial condition

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,R], \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(t,0) = \mu(t), \quad u(t,R) = \nu(t),$$

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Egor Martynov (RUDN University, Moscow, Russia)

$$u_x(t,0) = \theta(t), \quad u_x(t,R) = h(t), \qquad (3)$$
$$u_{xx}(t,R) = \sigma(t), \quad t \in [0,T].$$

The function $F(u) \in C^1(\mathbb{R})$ satisfies the following inequality:

$$|F(u)| \leqslant c|u|^q \quad \forall u \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

where $c > 0$, $q > 1$ (the assumptions on the value of q are specified later).

The overdetermination is given by the following integral condition

$$\int_0^R u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \qquad (5)$$

where ω and φ are known functions. We will consider either the boundary function σ or the special type of the right-hand side of the equation f as a control.

Impose the following conditions to the function ω:

$$\omega \in H^5(0,R), \quad \omega(0) = \omega(R) = \omega'(0) = \omega'(R) = \omega''(0) = 0, \qquad (6)$$

and to coefficients

$$a_4 \geqslant 0, \qquad a_2 \leqslant 0. \qquad (7)$$

The main results of our research are the following theorems.

Theorem 1. *Let $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_2^1(0,T)$, $\mu,\nu \in H^{2/5}(0,T)$, h, $\theta \in H^{1/5}(0,T)$, $f \in L_2(Q_T))$, inequality (4) be verified for $1 < q < 6$, the conditions (6) and (7) be satisfied and, moreover, $\omega''(R) \neq 0$,*

$$\varphi(0) = \int_0^R u_0(x)\omega(x)dx.$$

Let

$$c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T)}.$$

Then,

1) *For the fixed c_0 there exists a $T_0 > 0$ such that if $T \in (0,T_0)$, then there exists a unique function $\sigma \in L_2(0,T)$ and the corresponding unique solution $u \in X(Q_T)$ of the problem (1)–(3) with condition (5).*

2) *For the fixed T there exists a $\delta > 0$ such that if $c_0 \leqslant \delta$, then there exists a unique function $\sigma \in L_2(0,T)$ and the corresponding unique solution $u \in X(Q_T)$ of the problem (1)–(3) with condition (5).*

Theorem 2. *Let $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_1^1(0,T)$, μ, $\nu \in H^{2/5}(0,T)$, h, $\theta \in H^{1/5}$, $\sigma \in L_2(0,T)$, $g \in C([0,T]; L_2(0,R))$, inequality (4) be verified for $1 < q < 7$, the conditions (6) and (7) be satisfied and there exists a positive constant g_0 such as for all $t \in [0,T]$*

$$g_0 \leqslant \Big|\int_0^R g(t,x)\omega(x)dx\Big|.$$

Let

$$c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\sigma\|_{L_2(0,T)} + \|\varphi'\|_{L_1(0,T)}.$$

Then,

1) *For the fixed* c_0 *there exists a* $T_0 > 0$ *such that if* $T \in (0, T_0)$, *then there exists a unique function* $f_0 \in L_1(0,T)$ *and the corresponding unique solution* $u \in X(Q_T)$ *of the problem* (1)–(3) *with condition* (5).

2) *For the fixed* T *there exists a* $\delta > 0$ *such that if* $c_0 \leqslant \delta$, *then there exists a unique function* $f_0 \in L_1(0,T)$ *and the corresponding unique solution* $u \in X(Q_T)$ *of the problem* (1)–(3) *with condition* (5).

CODIMENSION ONE BASIC SETS OF A-FLOWS

V.S. Medvedev, E.V. Zhuzhoma

medvedev-1942@mail.ru, zhuzhoma@mail.ru

Dynamical systems satisfying an Axiom A (in short, A-systems) were introduced by S. Smale. The set of A-systems includes all structurally stable systems (exm., Morse-Smale systems and Anosov systems) and Ω-stable systems. We consider A-flows with codimension one basic sets on closed n-manifolds, $n \geqslant 3$.

Keywords: A-flow, attractor, fibered link

Dynamical systems satisfying an Axiom A (in short, A-systems) were introduced by S.Smale. By definition, a non-wandering set of A-system is the topological closure of periodic orbits endowed with a hyperbolic structure. Due to Smale's Spectral Decomposition Theorem, the non-wandering set of any A-system is a disjoint union of closed, invariant, and topologically transitive sets called *basic sets*. E. Zeeman proved that any n-manifold, $n \geqslant 3$, supporting nonsingular flows supports an A-flow with a one-dimensional nontrivial basic set. It is natural to consider the existence of codimension one (automatically non-trivial) basic sets on n-manifolds beginning with closed 3-manifolds M^3. We prove that any closed 3-manifolds supports A-flows with two-dimensional attractors. This gives examples of chaotic laminations of topological dimension two. Our main attention concerns to embedding of non-mixing attractors and its basins (stable manifolds) in M^3. We construct a special compactification of $W^s(\Lambda_a)$ called a casing by a collection of circles that form a fiber link in the casing.

This work is supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications of National Research University Higher School of Economics of the Ministry of Science and Higher Education of the RF (grant ag. no. 075-15-2022-1101; V.S. Medvedev) and the grant of the RSF (no. 22-21-00304; E.V. Zhuzhoma).

Vladislav Medvedev (Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, National Research University Higher School of Economics, Russia)

Evgeny Zhuzhoma (Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, National Research University Higher School of Economics, Russia)

SPECTRUM OF FRACTIONAL LAPLACIAN IN DOMAINS WITH CYLINDRICAL OUTLETS TO INFINITY

A.I. Nazarov
nazarov@pdmi.ras.ru

UDC 517.9

We describe the spectrum structure for the restricted Dirichlet fractional Laplacian in multi-tubes, i.e. domains with cylindrical outlets to infinity. Some new effects in comparison with the local case are discovered.

Keywords: fractional Laplacian, multi-tubes, Dirichlet spectrum

The **restricted** Dirichlet fractional Laplacian $\mathcal{A}_s^\Omega$ in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is defined by the quadratic form

$$a_s^\Omega[u] = (\mathcal{A}_s^\Omega u, u) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}_n u(\xi)|^2 \, d\xi$$

(here $\mathcal{F}_n$ stands for the n-dimensional Fourier transform) with domain

$$\mathrm{Dom}(a_s^\Omega) = \widetilde{H}^s(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) \colon \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}\},$$

where $H^s(\mathbb{R}^n)$ is the classical Sobolev–Slobodetskii space.

For $s = 1$ this operator is just conventional Dirichlet Laplacian in Ω. Here we consider the case $s \in (0,1)$.

Assume that outside of some compact set $\mathcal{K}$, Ω coincides with a finite union of non-intersecting semi-tubes $\mathcal{Q}_j$, $j = 1, \dots, N$, congruent to $\mathcal{Q} = \omega \times \mathbb{R}_+$, where ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Theorem 1. *Let the axes of $\mathcal{Q}_j$, $j = 1, \dots, N$, are not co-directional. Then the essential spectrum of $\mathcal{A}_s^\Omega$ coincides with the ray $[\Lambda_s, +\infty)$, where Λ_s is the smallest eigenvalue of $\mathcal{A}_s^\omega$.*

Notice that the assumption on axes of semi-tubes is not needed in the local case $s = 1$.

Next, let Ω be a boundedly enlarged cylinder $Q = \omega \times \mathbb{R}$, $\omega \Subset \mathbb{R}^{n-1}$. Namely, we assume that Ω contains Q, and the set $\Omega \setminus \overline{Q}$ is non-empty and bounded. By Theorem 1, we have $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_s^\Omega) = \sigma_{ess}(\mathcal{A}_s^Q) = [\Lambda_s, +\infty)$.

Theorem 2. *Let $s \in [\frac{1}{2}, 1)$. Then the discrete spectrum of $\mathcal{A}_s^\Omega$ is not empty. Namely, there is at least one eigenvalue in the interval $(0, \Lambda_s)$.*

Conjecture. For $s < \frac{1}{2}$, the discrete spectrum of $\mathcal{A}_s^\Omega$ is empty if the set $\Omega \setminus \overline{Q}$ is small enough.

The talk is based on the joint paper with F.L. Bakharev, see [1].

References

1. *Bakharev F.L., Nazarov A.I.* Dirichlet Fractional Laplacian in multi-tubes // Preprint available at https://arxiv.org/abs/2209.08400. 20p.

Partially supported by RFBR, project no. 20-51-12004.

Alexander I. Nazarov (PDMI RAS and St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

Указатель авторов

Научное издание

Вторая конференция Математических центров России

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

7–11 ноября 2022 г.

Художественное оформление *Л. В. Мамрак*
Верстка *Т. В. Родионов*

Подписано в печать 28.10.2022. Формат 70×100/16. Усл. печ. л. 23,73. Уч.-изд. л. 19,0.
Тираж 200 экз. Изд. № 12226. Заказ №

Издательство Московского университета

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
(ул. Академика Хохлова, 11).
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
http://msupress.com

Отдел реализации.
Тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Отпечатано в типографии ООО «Паблит». 127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1. Тел.: (495) 230-20-52