9-я международная летняя школа-конференция

по геометрическим методам

математической физики

5–10 июля 2022 г.

Организации

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Математический центр мирового уровня
«Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук»
(МЦМУ МИАН), г. Москва

Лаборатория геометрических методов математической физики
имени Н. Н. Боголюбова МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке
Фонда Саймонса и Минобрнауки России
(грант на создание и развитие МЦМУ МИАН,
соглашение No 075-15-2022-265).

Аннотации миникурсов и докладов

Миникурсы

Сбоку от зеркальной симметрии

С. М. Гусейн-Заде

МГУ

Зеркальная симметрия (в её исходной форме) состояла в наблюдении о существовании пар многообразий специального вида с замечательными свойствами симметрии некоторых их инвариантов, изначально — чисел Ходжа. Это наблюдение возникло в физике при анализе так называемых моделей Ландау-Гинзбурга. Они связаны с понятием орбифолда и их анализ привел к появлению новых необычных инвариантов, например, орбифолдной эйлеровой характеристики. Первая систематическая попытка конструирования зеркально-симметричных моделей Ландау–Гинзбурга принадлежала П.Берглунду, Т.Хюбшу и М.Хеннингсону. Входными данными для (орбифолдной) модели Ландау–Гинзбурга является пара (f, G), состоящая из квазиоднородного многочлена f от нескольких переменных и конечной группы сохраняющих его линейных преобразований. В конструкции Берглунда–Хюбша–Хеннингсона в качестве f участвуют, так называемые, обратимые многочлены, а в качестве G подгруппы групп их диагональных симметрий (которые, конечно, абелевы). По паре (f, G) описанного вида строится двойственная по Берглунду–Хюбшу–Хеннингсону пара $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$. Двойственные пары (f, G) и $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$ обладают рядом «зеркально симметричных» свойств (например, симметрией ряда орбифолдных инвариантов, простейшим из которых является орбифолдная эйлерова характеристика). Было построено обобщение этой двойственности на группы симметрий, являющиеся полупрямыми произведениями $G \rtimes S$ группы G диагональных симметрий обратимого многочлена f и группы S перестановок координат, сохраняющих f и G. (Конструкция основана на идее А.Такахаши и поэтому называется двойственностью Берглунда–Хюбша–Хеннингсона–Такахаши.) Оказывается, что двойственные по Берглунду–Хюбшу–Хеннингсону–Такахаши пары могут претендовать на зеркальную симметричность только при выполнении специальных ограничений на группу S перестановок координат: так называемое условие четности.

Цикл лекций назван «Сбоку от …», в частности, потому, что в современном понимании понятие (или, правильнее, понятия: имеется не одна версия) зеркальной симметрии сильно отличается от исходного. Надеюсь, что для понимания лекций не понадобится знаний, выходящих за рамки третьего курса: необходимые понятия и утверждения будут определены и/или объяснены. Пожалуй, наиболее «продвинутым» понятием, желательным (но тоже не обязательным: при необходимости оно тоже будет определено) для понимания является понятие групп когомологий. При этом достаточно ограничиться группами когомологий де Рама (которые обычно обсуждаются в рамках курса дифференциальной геометрии и топологии).

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 21-11-00080).

Конструктивные геометрические асимптотики и операторные подходы в задачах математической физики

С. Ю. Доброхотов

ИПМ им. А.Ю. Ишлинского РАН

Лекции посвящены аналитическим методам построения эффективных асимптотик быстроменяющихся решений широкого круга дифференциальных и псевдодифференнциальных уравнений. В основе методов лежат геометрические объекты — лагранжевы многообразия в фазовых пространствах, сотканные из траекторий классических гамильтоновых систем. Знание таких многообразий и последующее применение канонического оператора Маслова позволяет построить асимптотические решения различных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений, возникающих в различных областях квантовой механики, механики сплошных сред, теории ортогональных полиномов и т.д. Обсуждаемые асимптотики находятся в рамках квазиклассического приближения и основополагающие идеи их построения были предложены более 50 лет назад.

В лекциях речь пойдет о недавно построенных существенных модификациях указанных асимптотических конструкций, позволивших, с одной стороны, выражать ответ в эффективной форме, например, через специальные функции и реализуемый с помощью программ типа Mathematica, а, с другой, — существенно расширить область рассматриваемого круга задач, допустив, например, негладкость возникающих лагранжевых многообразий. Также внимание будет уделено некоторым полезным соображениям, вытекающим из операторного исчисления Фейнмана–Маслова. Общие конструкции будут проиллюстрированы примерами из теории ортогональных полиномов, квантовой механики (физики графена, в частности), теории волновых пучков, гидродинамики. Каких-либо особых математических знаний не предполагается.

Весовые системы, связанные с алгебрами Ли и инварианты графов

С. К. Ландо

НИУ ВШЭ, Сколтех

Инварианты узлов это функции на классах изотопии узлов. Их задача — различать неизотопные узлы. Теория В. А. Васильева инвариантов узлов конечного порядка позволяет сопоставить каждому такому инварианту функцию на хордовых диаграммах — простых комбинаторных объектах, состоящих из окружности и нескольких хорд в ней. Такие функции называются «весовыми системами». В силу теоремы Концевича это соответствие, по сути, взаимно-однозначно: каждая весовая система определяет некоторый инвариант узлов.

В частности, весовую систему можно сопоставить любой полупростой алгебре Ли. Однако уже в простейшем нетривиальном случае — для алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$ — подсчет значений соответствующей весовой системы является вычислительно нетривиальной задачей. В то же время, эта весовая система весьма важна, поскольку она соответствует знаменитому инварианту узлов, называемому крашенным многочленом Джонса.

За последний год в понимании весовых систем, связанных с алгебрами Ли, произошли существенные прорывы. Выведены и доказаны явные формулы для значений весовой $\mathrm{sl}(2)$-системы на некоторых важных сериях хордовых диаграмм. Разработаны методы для вычисления $\mathrm{gl}(N)$-весовой системы, эффективно работающие при всех N. Эти методы основаны на идее М. Э. Казаряна о возможности продолжения $\mathrm{gl}(N)$-весовой системы на произвольные перестановки.

В двух лекциях будут даны необходимые определения и сформулированы результаты, в том числе, связывающие весовые системы с инвариантами графов. Будет предложен ряд задач — как решенных, так и представляющих собой открытые проблемы.

Ортогональные многочлены от нескольких переменных и формулы Плюккера

С. Ю. Оревков

МИАН

Классические системы ортогональных многочленов (многочлены Якоби, Лагерра и Эрмита на отрезке, полупрямой и прямой соответственно) являются собственными базисами некоторых дифференциальных операторов второго порядка, симметричных в пространстве L^2 относительно некоторой меры.

Доминик Бакри поставил задачу обобщить эту конструкцию на произвольную размерность, а именно, описать все тройки (Ω, A, μ), где Ω — область в d-мерном пространстве, μ — мера, A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, симметричный в $L^2(\Omega, \mu)$, и такой, что пространства многочленов ограниченной степени (или взвешенной степени для некоторых весов) A-инвариантны. В этом случае оператор A имеет собственный базис, состоящий из многочленов.

Я планирую рассказать решение этой задачи в размерности два и, в некоторых частных случаях, в размерности три. Используемый подход основан на применении формул Плюккера и их обобщений, связывающих числа особенностей разных типов у комплексной алгебраической кривой и ее проективно двойственной кривой. В качестве одной из главных целей курса я рассматриваю привлечение внимания к формулам Плюккера и их обобщениям, в том числе к тем, которые еще предстоит найти (возможно, кому-нибудь из слушателей).

Математические задачи теории топологических диэлектриков

А. Г. Сергеев

МИАН

Миникурс посвящен одному из интенсивно развивающихся разделов физики твердого тела — теории топологических диэлектриков. Помимо физической значимости этого направления в теоретической физике его отличают многочисленные связи с различными разделами современной математики такими как топология, теория клиффордовых алгебр, К-теория и некоммутативная геометрия.

Топологические диэлектрики характеризуются наличием энергетической щели, устойчивой к малым деформациям, что является основанием для использования топологических методов при их изучении.

Ключевую роль играет исследование групп симметрий топологических объектов. Имеются три основных типа таких симметрий — симметрия относительно обращения времени (которой будет уделено особое внимание), симметрия сохранения числа частиц (или зарядовая симметрия) и PH-симметрия (симметрия между частицами и дырками). Исходя из описания возможных групп симметрий, Алексей Китаев предложил классификацию топологических объектов в теории твердого тела, о которой будет рассказано в лекциях.

Полная положительность и электрические сети

Д. В. Талалаев

МГУ

Кластерные алгебры и полностью положительные матрицы — одна из бурно развивающихся областей современной математики. Кластерные алгебры возникли в задачах малых устойчивых колебаний линейных континуумов, получили второй всплеск внимания благодаря теории канонических базисов Люстига, сейчас широко известны благодаря связям с теорией интегрируемых систем, диофантовых уравнений, моделями статистической механики.

В курсе я расскажу о происхождении области полностью положительных матриц, дам необходимые определения кластерных многообразий и разберу основные примеры. Особое внимание будет уделено электрическим аналогам кластерных многообразий.

План по лекциям:

1. Полностью положительные матрицы. Определение, пример верхнетреугольных матриц и полных квадратных матриц. Задачи минимальной параметризации. Обменные преобразования.

2. Кластерные алгебры. Общее определение, реализация кластерных алгебр, соответствующих Грассманианам и группе верхнетреугольных матриц.

3. Осцилляционные матрицы и задача устойчивых малых колебаний. Электрические сети и электрические кластерные многообразия.

Доклады

Автоморфизмы θ_n моноидов струнных зацеплений StL_n

Дарья Аксенова

ПОМИ РАН

Доклад посвящен исследованию моноидов StL_n изотопических классов струнных зацеплений с n нитями и содержащихся в них групп крашеных кос P_n. Центральным объектом повествования является серия новых автоморфизмов $\theta_n : StL_n \to StL_n$ моноидов струнных зацеплений.

Определение θ_n основано на нескольких изящных топологических конструкциях. Сужение автоморфизма θ_n на группу P_n сопряжено с автоморфизмом w_n, определенным в [1]. Группа $\mathrm{Aut}(P_n)$ автоморфизмов порождается автоморфизмами группы кос B_n, суженными на группу P_n, группой $\mathrm{Aut}_c(P_n)$ центральных автоморфизмов и автоморфизмом w_n.

Будет представлено несколько эквивалентных конструкции, каждая из которых позволяет определить серию автоморфизмов θ_n.

[1] V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, M Singh, Automorphisms of pure braid groups, Monatshefte für Mathematik, 187:1–19, 2018.

Многогранники Кокстера в пространствах Лобачевского

Степан Александров

МФТИ

Многогранниками Кокстера называют многогранники, все углы которых являются целыми частями π. В евклидовых пространствах и на сферах все такие многогранники были классифицированы Кокстером в 1934 году. Изучение многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского было начато Винбергом. В 1984 году ему удалось доказать, что, в отличии от евклидового и сферического случаев, в пространствах Лобачевского размерности 30 и более таких многогранников нет. В 1992 Бугаенко построил пример многогранника Кокстера рекордной на текущий момент размерности 8. Одной из центральных задач этой области является нахождение размерностей, в которых такие многогранники могут существовать.

В своём докладе я расскажу об основных идеях, которые применяются при изучении многогранников Кокстера, а также о своих недавних продвижениях.

Комплексная геометрия на SU(3)

Глеб Бакшеев

НМУ

Доклад опирается на работу Hiroaki Ishida и Hisashi Kasuya «Double sided torus actions and complex geometry on SU(3)». Планируется рассказать про то, что такое трансверсально кэлерово голоморфное слоение, а также показать, что данная структура существует на вещественном подмногообразии кэлерова многообразия. SU(3), в свою очередь, допускает вложение в кэлерово многообразие как линия уровня некоторого гладкого отображения. Мы рассмотрим «особый случай» транверсальной кэлеровы структуры на SU(3), для которого можно применить другой результат из статьи «Transverse Kahler structures on central foliations of complex manifolds» и получить вычисление чисел Ходжа для SU(3). «Особость» этого случая определяется как раз упомянутым в названии доклада двусторонним действием тора на SU(3). Все необходимые сведения из комплексной и симплектической геометрии я постараюсь сообщить.

Спектральная последовательность Эйленберга–Мура

Пётр Балабанов

МГУ

Я расскажу про однородные пространства, спектральные последовательности и связанную с ними гомологическую алгебру. В основном речь пойдёт про тему моей курсовой работы — спектральную последовательность Эйленберга–Мура.

Вычисление функционального интеграла для частицы на окружности

Артём Бельский

МФТИ

Мы хотим посчитать (дополнение к книжке умных людей [1], которые говорят, что полезно в этом разобраться)

$$Z = \int \mathscr{D}x(t) e^{-\int\limits_0^\beta dt \frac{\dot{x}^2}{2}}$$

С условиями компактности $x(t) \quad x(t) + R$ и калибровочными преобразованиями $x(t) \mapsto x^c(t) = x(t) + c$ где $c \in [0, R)$

Рассмотрим $\chi[x] = \beta^{-1/2}\int\limits_0^\beta dt x(t)$. Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_0^R dc \frac{d\chi[x^c]}{dc}\delta(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\chi[x^c]-\lambda) = \sqrt{\frac{\beta}{\xi}}\int\limits_0^R dc\delta(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\chi[x]+c\sqrt{\frac{\beta}{\xi}}-\lambda) = 1$ для «достаточно хороших» ξ и λ.

Подставляя это в наш интеграл получим:

$$Z = \int \mathscr{D}x(t)\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_0^R dc\sqrt{\beta}\delta(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\chi[x^c]-\lambda)e^{-\int\limits_0^\beta dt\frac{\dot{x}^2}{2}} =$$

$$= R\sqrt{\frac{\beta}{2\pi\xi}}\int \mathscr{D}x(t) e^{-\int\limits_0^\beta dt\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\beta^{-1}}{2\xi}\left(\int\limits_0^\beta x(t)\right)^2} =$$

Расскладываясь около перевальной точки ($x_n = \frac{R}{\beta}n(t-\frac{\beta}{2})$, $x(t) = x_n(t)+\eta(t)$)

$$= R\sqrt{\frac{\beta}{2\pi\xi}}\int \mathscr{D}\eta e^{-\int\limits_0^\beta dt\frac{\dot{\eta}^2}{2} - \frac{\beta^{-1}}{2\xi}\left(\int\limits_0^\beta \eta(t)\right)^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\int\limits_0^\beta dt\frac{\dot{x_n}^2}{2}} =$$

$$= R\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\mathscr{D}\mathrm{et}(-\partial_t^2)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{R^2n^2}{2\beta}}$$

Функциональный определитель находим с помощью Дзета-регуляризации:
$-\partial_t^2 f_n = \lambda_n f_n$; $f_n = e^{2\pi int/\beta}$; $\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)$

$$\zeta_{-\partial_t^2}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2\pi n}{\beta})^{-2s} = (\frac{2\pi}{\beta})^{-2s}\cdot\zeta(2s)$$

$$\zeta'_{-\partial_t^2}(0) = -\log\beta \Rightarrow Z = \frac{R}{\sqrt{2\pi\beta}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{R^2n^2}{2\beta}}$$

[1] Mirror Symmetry Kentaro Hori, Sheldon Katz, Albrecht Klemm, Rahul Pandharipande, Richard Thomas, Cumrun Vafa, Ravi Vakil, and Eric Zaslow Publication Year: 2003 ISBN-10: 0-8218-2955-6 ISBN-13: 978-0-8218-2955-4 Clay Mathematics Monographs, vol. 1

Изопериметрическая проблема для семейства замкнутых кривых на сфере

Анастасия Вахрина

СПбГУ

Обозначим единичный открытый интервал $(0,1) \subset \mathbb{R}$ за I. Пусть $f : I^3 \to \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$ — диффеоморфизм. Тогда наилучшая нижняя оценка на супремум площадей множеств вида $f(x \times I^2)$, где $x \in I$, — π. Другими словами, если шар гладко расслоен на дискообразные поверхности, то площадь какого-то из этих дисков будет не меньше площади диска с радиусом, равным радиусу шара. В докладе мы обсудим, как можно доказать эту оценку.

Данная задача была предложена Р.Матвеевым во время конференции в Белальпе, посвящённой 70-летию О. Я. Виро.

Исчисление Шуберта на многообразиях полных флагов. Исчисление Шуберта для резольвент Ботта-Самельсона на кольце алгебраических кобордизмов многообразия полных флагов

Андрей Витковский

МГУ

Планируется продемонстрировать формулу обобщенных операторов разделенной разности, из которой можно вывести формулу многочленов, представляющих классы резольвент Ботта–Самельсона, с коэффициентами в кольце Лазара. Интересно, что каждый такой многочлен будет содержать в качестве слагаемого с низшей степенью соответсвующий обычный многочлен Шуберта. Также, если успеется, планируется показать алгоритм разложения произведения резольвент Ботта–Самельсона в линейную комбинацию других резольвент с коэфициентами в кольце Лазара.

Момент-угол комплексы, соответствующие симплициальным частично упорядоченным множествам

Марк Водолеев

МГУ

Момент-угол комплексами называются топологические пространства, составленные из произведений дисков и окружностей, которые параметризованы гранями некоторого симплициального комплекса. В частности, если симплициальный комплекс является триангуляцией сферы, то соответствующий момент-угол комплекс будет являться многообразием. Данную конструкцию можно обобщить на более широкий класс объектов — симплициальные частично упорядоченные множества. Интерес к момент-угол комплексам, соответствующим симплициальным частично упорядоченным множествам, вызван, в частности, возможностью изучения колец Коэна–Маколея симплициальных частично упорядоченных множеств, используя методы алгебраической топологии.

В своем докладе я собираюсь описать конструкцию момент-угол комплексов, соответствующих симплициальным частично упорядоченным множествам, и рассказать основные результаты о них.

Об одном обобщении категории Люстерника–Шнирельмана

Федор Вылегжанин

МГУ

LS-категория связного топологического пространства X — это классический инвариант гомотопического типа, введённый Люстерником и Шнирельманом для оценки снизу числа критических точек функций на многообразиях (подробнее см. [1]).

Его изначальное определение даётся в терминах покрытий: $\mathrm{cat}(X) \leq n$, если X можно покрыть набором из $n+1$ открытого подмножества, причём все эти подмножества «гомотопически тривиальны». Позже Дж. Уайтхед дал альтернативное определение LS-категории, в котором фигурирует *толстый букет*

$$\mathrm{FW}^n(X, x_0) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : \ x_i = x_0 \text{ для некоторого } i\}.$$

Толстый букет — частный случай комбинаторно-топологической конструкции *полиэдрального произведения*, которая играет важную роль в торической топологии [2]. Я расскажу о том, что получится, если в определении Уайтхеда заменить FW^n на «не очень толстый» букет [3] или на произвольное полиэдральное произведение.

[1] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanrè. Lusternik-Schnirelmann Category. Mathematical Surveys and Monographs, Volume 103 (AMS, 2003).

[2] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. Toric topology. Mathematical Surveys and Monographs, Volume 204 (AMS, 2015).

[3] K. A. Hardie. On $\mathrm{cat}^i X$. J. London Math. Soc. (2), 3 (1971), 91-92.

Преобразования Дарбу и Бэклунда для системы Адлера–Ямилова в алгебре Грассмана

Денис Голицын

ЯрГУ

В этом докладе мы покажем, как систематически строить преобразования Дарбу и Бэклунда для расширенных на грассманову алгебру интегрируемых систем разностных уравнений. В качестве иллюстративного примера используется система типа Адлера–Ямилова, которая дискретизирует нелинейное уравнение Шрёдингера. Преобразование Бэклунда потенциально может быть использовано для построения решений системы Адлера–Ямилова.

Начальные сведения о симплектической геометрии

Вячеслав Гончаров

СПбГУ

Первые определения и геометрический смысл симплектической формы. Задачи о вложениях: теорема о несжимаемости, теорема о верблюде и красивый график в теореме Мак Дафф–Шленка.

Действия дискретного тора сложности один на гладких многообразиях

Владимир Горчаков

НИУ ВШЭ

Пусть $X = X^n$ гладкое связное многообразие размерности n. Пусть группа ${\mathbb{Z}_2}^k$ эффективно действует на X. Сложностью действия называется число $n - k$. В своем докладе я расскажу о действиях сложности 1. Главным результатом будет доказательство того, что, при некоторых условиях на действие, пространство орбит является топологическим многообразием. Также я расскажу о некоторых следствиях из этого результата.

Гамильтоновы редукции в матричных уравнениях Пенлеве

Андрей Григорьев

Сколтех, НИУ ВШЭ

Гамильтонову редукцию можно рассматривать как способ понижения размерности для гамильтоновых систем с непрерывной симметрией.

Те из уравнений Пенлеве, о которых пойдёт речь являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Они встречаются в различных областях математической физики[1][2]. Уравнения Пенлеве обладают группами дискретных симметрий, которые называются группами Бэклунда.

Можно рассмотреть простейшее матричное обобщение уравнений Пенлеве. Упомянутые группы дискретных симметрий обобщаются на матричный случай. Кроме того, с помощью этих симметрий можно выделить инвариантные относительно динамики симплектические подмногообразия фазового пространства. Оказывается, что при некотором условии на размер матриц после определённой гамильтоновой редукции, динамика сводится к динамике матричной системы Пенлеве меньшего размера.

Я планирую конкретизировать сказанное в предыдущем абзаце на примере матричного уравнения PII, которое можно записывать как

$$\ddot{q} = 2q^3 + 2tq + \theta\mathbf{1}_{n\times n}, \ \text{ где } q(t) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}), \theta \in \mathbb{C}.$$

Если позволит время, я также расскажу о применении конструкции к системам Калоджеро–Пенлеве, являющимся многочастичным обобщением обычных уравнений Пенлеве.

Вычисление коррелятора в эрмитовой одноматричной негауссовой модели

Илья Данилин

МФТИ

Я расскажу про матричные модели и решение простейшей задачи — вычисление коррелятора в эрмитовой одноматричной негауссовой модели.

---

[1] К примеру, они связаны с конформной теорией поля и изомонодромными деформациями (см. arxiv:1207.0787).

[2] Другая интересная наука, относящаяся к уравнениям Пенлеве, связана с геометрией пространства начальных данных для этих уравнений. (см. arxiv:1509.08186)

Существование константы Хинчина

Вячеслав Егоров

МГУ

В 1935 году А.Я.Хинчин показал, что для почти всех чисел $x \in [0,1]$ существует предел $\lim_{n\to\infty}(a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} = K_0 = \prod_{r=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{r(r+2)})^{\log_2(r)}$ — константа Хинчина, здесь $x = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ — разложение числа x в цепную дробь. Оригинальное доказательство было достаточно сложным и техническим, однако в 1965 вышло более короткое и простое, использующее принципиально идеи из теории динамических систем: эргодичность отображения $T(x) = \{\frac{1}{x}\}$ относительно меры Гаусса–Кузьмина, теорема Биркгофа–Хинчина (примечательно, что сам Хинчин не догадался применить свою же теорему). В докладе приводится набросок доказательства (строгое обоснование эргодичности является довольно техническим), приводятся другие результаты, которые можно получить теми же методами: для почти всех чисел $x \in [0,1]$ частота появления числа p в разложении числа x в цепную дробь $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} I_{a_k=p}}{n} = \log_2(\frac{(p+1)^2}{p(p+2)})$ (Теорема Леви), для почти всех чисел $x \in [0,1]$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = \infty$. Без доказательства приводится ещё одна теорема Хинчина–Леви: для почти всех x $\lim_{n\to\infty} q_n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi^2}{12\ln(2)}}$, где q_n-знаменатель подходящей дроби. Доклад является своеобразным введением в довольно интересную область, существующую на пересечении теории чисел и теории динамических систем. Никаких предварительных знаний, выходящих за рамки второго курса мехмата МГУ, не требуется.

Линеаризация гамильтоновых систем

Никита Елфимов

МГУ

В работе рассмотрены гамильтонианы, представимые в виде произведения двух вещественно-аналитических функций. Найдены условия, при которых соответствующий фазовый поток системы будет диффеоморфен фазовому потоку системы с квадратичным гамильтонианом и условия, при которых данная система изохронна.

Полубесконечные конструкции представлений

Тимур Кенжаев

Сколтех

Я расскажу про полубесконечные конструкции двух представлений.

1. Представление фермионной алгебры Клиффорда в фоковском пространстве F.

Этот широкоизвестный сюжет приводит с одной стороны к построению представлений различных бесконечномерных алгебр Ли (например, к серии унитарных представлений аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$), с другой — к нетривиальному тождеству между характерами (Тройное тождество Якоби).

2. Неприводимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ — $\mathcal{L}_{0,1}$.

Это представление можно явно построить с помощью знаний из первого пункта. С одной стороны данное представление является прямой суммой фоковских модулей, с другой стороны соотношение $e^2(z) = 0$ является определяющим в том смысле, что позволяет построить полубесконечную конструкцию из фибоначчиевых мономов. Соответствующий характер представления может быть вычислен двумя способами зная характер фоковских модулей и с помощью построенной полубесконечной конструкции. В процессе вычисления данного характера естественным образом возникают q-биномиальные коэффициенты.

Алгебры Понтрягина и момент-угол комплексы

Григорий Корюкин

МГУ

Конструкция полиэдральных произведений даёт широкий и интересный класс пространств. Одним из важнейших его подклассов является класс момент-угол комплексов, получающийся полиэдральными произведениями диска и окружности.

Всевозможные алгебраические структуры, построенные по пространствам рассматриваются по многим причинам, ведь с помощью них можно получить различные инварианты и получить много важных связей между топологией и алгеброй пространства.

Алгебры Понтрягина получаются из расслоения пространства Дэвиса–Янушкевича, и в случае, когда соответсвующий комплекс является флаговым, полностью описаны.

На докладе будут рассмотрены базовые понятия, а также разобраны несколько интересных примеров, в том числе подсчет момент-угол комплекса, построенного последовательным приклеиванием пустых симплексов к данному, и рассмотрение алгебры Понтрягина для достаточно простого нефлагового комплекса, хотя полученная алгебра будет не самой тривиальной.

Некоммутативные решения уравнения тетраэдров Замолодчикова

Алина Кутузова

ЯрГУ

В этом докладе мы строим некоммутативные решения уравнения тетраэдров Замолодчикова. В частности, мы рассматриваем задачи матричной рефакторизации для преобразований Дарбу с некоммутативными переменными (переменные, которые принадлежат некоммутативному телу) и строим некоторые отображения. Мы доказываем, что эти отображения удовлетворяют уравнению тетраэдров Замолодчикова, используя условие матричной шесть-факторизации.

Калибровочные УрЧП

Михаил Марков

МГУ

Мой доклад будет основан на статье 1903.02820 [hep-th]. В нем я дам общее представление о калибровочных УрЧП. Это понятие позволяет работать с тем, что физики называют локальными калибровочными теориями поля, как с некоторым геометрическим объектом — Q-расслоением, обладающим дополнительными свойствами. Самый простой пример калибровочного УрЧП — расслоение джетов с живущим на нем BV-BRST дифференциалом. Этот формализм оказывается крайне гибким и допускает естественное определение эквивалентности таких объектов. В качестве иллюстрации я продемонстрирую, как на этом языке выглядят известные физические теории — электродинамика Максвелла и гравитация Эйнштейна.

Индекс Морса минимальных гиперповерхностей со свободной границей в пространстве Шварцшильда

Мария Маркова

МГУ

На докладе я введу необходимые понятия индекса Морса и оператора Якоби. Индекс Морса возникает в различных областях дифференциальной геометрии и не только. В данном случае он нужен для изучения стабильности гиперповерхностей в различных размерностях. Будут разобраны основные результаты в этой области и некоторые частные примеры.

О бесселевости собственных функций граничной задачи для уравнения типа Бесселя

Бариятт Меджидова

МГУ

Пусть $M = |\mu_k|_{k=1}^{\infty} \subset C$, где C — счетное множество, $y(x;\mu_k)$ — решение уравнения

$$Ly \equiv -y'' + \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) x^{-2} y = \mu^2 y,$$

на интервале $(0;1)$ при $\mu = \mu_k$. Здесь $\nu \in (0,1)$, а μ — спектральный параметр. Установлено свойство бесселевости системы функций $\{y(x;\mu_k), k \in \mathbb{N}\}$ при некоторых условиях на числа μ_k. Доказана также полнота в $L_2(0,1)$ системы корневых функций данного уравнения, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Рассматриваются граничные условия более общего вида, чем известные в литературе.

Преобразования в теории узлов

Алексей Миллер

СПбГУ

С конца 19-го века в различных задачах классической теории узлов регулярно возникают те или иные геометрические процедуры, меняющие тип узла, так называемые преобразования узлов и зацеплений. Самый распространенный вид таких процедур — замена одного n-ниточного тэнгла на другой. Такие преобразования называются локальными. Среди хорошо известных и самых старых локальных преобразований, например, переключение перекрёстка, ленточная хирургия, Δ-преобразование, #-преобразование, Clasp-pass-преобразование и многие другие. Не так давно, в девяностые годы прошлого века, преобразования узлов стали исследоваться системно, во многом благодаря появлению эффективного инструмента взаимодействия с преобразованиями — гордиева графа. Гордиевым графом для данного преобразования называется такой граф, вершинами которого являются все узлы, а ребро между двумя вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие этим вершинам узлы переводятся друг в друга одним применением данного преобразования. Эта конструкция существенно облегчает как восприятие преобразований в целом, так и работу с ними, позволяя исследовать внутреннее устройство преобразования более тонко, обнаруживать незаметные ранее «глобальные» свойства преобразований. Мы обсудим различные подходы к изучению преобразований узлов и зацеплений, приведем как некоторые хорошо известные классические, так и недавно полученные новые результаты о гордиевых графах, выясним принципиальные различия в поведении локальных и нелокальных преобразований, а также поговорим о перспективах восприятия гордиевых графов как глобальной нетривиальной структуры на множестве всех узлов.

О конформных преобразованиях метрик диагональной кривизны

Матвей Михальчук

МГУ

Метрики диагональной кривизны и координаты диагональной кривизны играют фундаментальную роль в теории систем гидродинамического типа: существует особый класс систем гидродинамического типа — полугамильтоновы системы. Данные системы интегрируемы обобщенным методом годографа (предложенным в работе С.П.Царева), с каждой такой системой связана (псевдо-)риманова метрика диагональной кривизны. В ходе доклада будут приведены основные определения и современные результаты теории пространств диагональной кривизны (в том числе результаты курсовой работы, связанные с конформными преобразованиями метрик диагональной кривизны).

Приведение гладких функций к нормальным формам вблизи критических точек

Александра Оревкова

МГУ

Работа посвящена «равномерному» приведению гладких функций на 2-мерных многообразиях к каноническому виду вблизи критических точек с помощью некоторых замен координат в неко- торых окрестностях этих точек. Для типов особенностей E_6, E_8 и A_n мы явно строим такие замены координат и оцениваем снизу (через C^r-норму функции) радиус искомой окрестности.

Об инвариантных множествах диффеоморфизмов из однопараметрических и двухпараметрических семейств диффеоморфизмов двумерного и трехмерного торов

Юлия Петрова

НИУ ВШЭ

Данный доклад посвящен численному и аналитическому исследованию динамики однопараметрических и двухпараметрических семейств диффеоморфизмов, которые задаются посредством суперпозиции прямого произведения отображений Мёбиуса и алгебраических автоморфизмов двумерного и трехмерного торов. Исследуется топологическая структура инвариантных множеств диффеоморфизмов, возникающих в рассматриваемых семействах, а также бифуркации этих диффеоморфизмов. В ходе исследования получено, что при переходе через некоторое значение параметра происходит бифуркация, в результате которой меняется топологическая размерность инвариантных множеств. Неблуждающее множество диффеоморфизмов, заданных на двумерном торе, до бифуркации состоит из двумерного базисного множества, а после бифуркации состоит из тривиального базисного множества, являющегося источниковой неподвижной точкой, и одномерного базисного множества, представляющего собой аттрактор. Это подтверждается с помощью численных методов, в частности, посредством анализа ляпуновских показателей. Также получено, что неблуждающее множество диффеоморфизмов из рассматриваемых семейств на трехмерном торе после бифуркации состоит из двух тривиальных базисных множеств: источниковая и седловая неподвижные точки, и двух одномерных поверхностных базисных множеств: одномерный аттрактор и одномерное седловое базисное множество.

Два семейства перекладываний отрезков

Ирина Пугачева

МГУ

Пусть задано $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Delta^2$, т.е. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Для $i = 1, \ldots, 6$ определим $y_i = \frac{i}{7}$ и зафиксируем малое $\varepsilon > 0$. Положим $I_i = [0, \lambda_i] \times [y_i, y_i + \varepsilon]$ при $i = 1, 2, 3$, $I_i = [1 - \lambda_{i-3}, 1] \times [y_i, y_i + \varepsilon]$ при $i = 4, 5, 6$.

Рассмотрим «квадрат с разрезами» $\mathcal{D}_1 = [0,1] \times [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{6} I_i$ (Рис. 1a).

Поверхность Σ_1 получается из $\mathcal{D}_1$ с помощью следующих отождествлений:

$$[0,1] \times \{0\} \sim [0,1] \times \{1\},$$

$$[0, \lambda_i] \times \{y_i\} \sim [1 - \lambda_i, 1] \times \{y_{i+3} + \varepsilon\}, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$[0, \lambda_i] \times \{y_i + \varepsilon\} \sim [1 - \lambda_i, 1] \times \{y_{i+3}\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

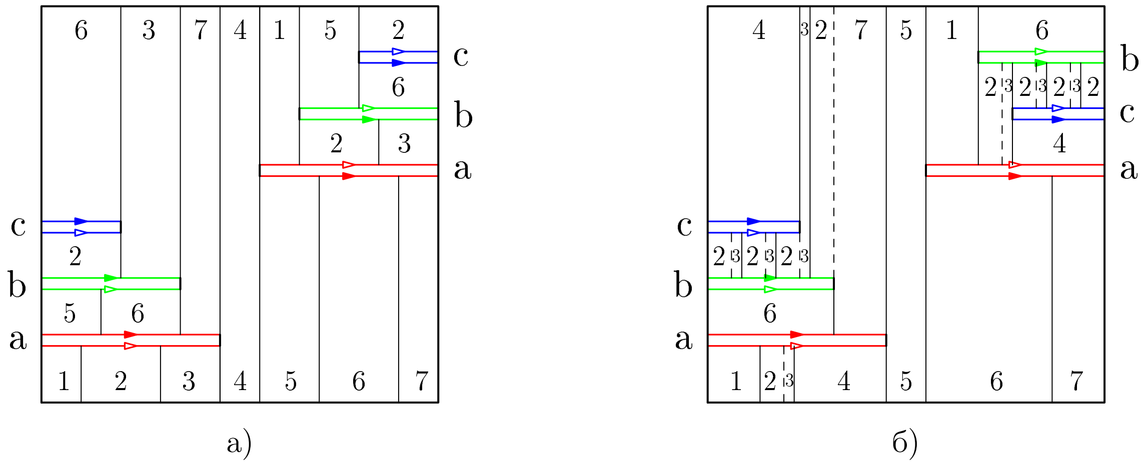

Рис. 1: два семейства

с последующим стягиванием в точку отрезков $\{0\}\times[0,1]$, $\{1\}\times[0,1]$, $\{\lambda_i\}\times[y_i,y_i+\varepsilon]$, $i=1,2,3$, и $\{1-\lambda_{i-3}\}\times[y_i,y_i+\varepsilon]$, $i=4,5,6$.

На Σ_1 определена 1-форма ω, обратный образ которой на $\mathcal{D}_1$ есть dx. Эта 1-форма определяет некоторое слоение, и мы рассматриваем отобрьажение первого возвращения на трансверсаль $[0,1]\times\{0\}$. Это отображение является перекладыванием отрезков, и мы будем обозначать его T_λ.

Если «поменять местами» два верхних разреза (Рис. 1б) и проделать то же самое, то получится поверхность Σ_2. Соответствующее ей перекладывание отрезков будем обозначать T'_λ.

Таким образом, у нас возникает два двупараметрических семейства перекладываний отрезков, которые мы хотим сравнить. Я расскажу об их сходствах и различиях.

Фробениусовы алгебры в теории особенностей

Антон Раровский

НИУ ВШЭ

В рамках доклада будут рассмотрены две разные естественные конструкции, сопоставляющие многочлену с только лишь изолированными критическими точками конечномерное векторное пространство и фробениусову алгебру.

В первом случае это алгебра Якоби особенности, во втором — когомологиии искривленной dg-алгебры. Доклад будет снабжен всеми необходимыми начальными сведениями, а также важными базовыми утверждениям.

В качестве основного примера будут рассмотрены многочлены типа Ферма, для которых явно будут доказаны невырожденность вычетного спаривания, посчитаны когомологии подкрученной dg-алгебры с нетривиальной группой симметрий, а также доказан их изоморфизм с алгеброй Якоби этого многочлена.

Присоединенные алгебры Ли и их приложения

Темурбек Рахматуллаев

МГУ

Представление дискретных групп в алгебрах Ли — полезный инструмент, для изучения структуры дискретных групп. Пусть G — группа, тогда можно изучать присоединенную алгебру Ли, полученную как прямая сумма $\oplus\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$, где $\gamma(G)$ — нижний центральный ряд группы G. Скобка в такой алгебре соответствует групповому коммутатору. Мы рассмотрим группы для которых известно исчерпывающее описание присоединенных алгебр Ли, а также их приложения в торической топологии.

Для свободных групп присоединенные алгебры хорошо изучены в работах Магнуса [1], доказана из изоморфность свободным алгебрам Ли. Позже во множестве работ подход Магнуса продолжался и обобщался на случай частично коммутативных групп (они же — прямоугольные группы Артина), например в [2], [3] и [4].

В работах Пренера [5] и Волдингера [6] при помощи «процесса сборки» коммутаторов Холла авторам удалось построить базис присоединенной алгебры Ли для групп G следующего вида:

$$G = Q_1 * ...Q_n, \quad Q_i = \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$$

Нас же интересует прямоугольная группа Кокстера $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ — группа с m образующими $v_1, ..., v_m$ и соотношениями $v_i^2 = 1$ для всех $i \in [m]$ и $v_i v_j = v_j v_i$ для $\{i, j\} \in \mathcal{K}$. Эта задача уже была частично изучена в статье Веревкина [7]. Особый интерес к группам Кокстера объясняется их тесной связью с гиперболической геометрий и появлением при изучении групп гомотопий полиэдральных произведений [8].

[1] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп: Представления групп в терминах образующих и соотношений. М.:Наука, 1974

[2] Wade R., The lower central series of a right-angled Artin group. Enseign. Math. 61 (2015), 343-371. doi: 10.4171/LEM/61-3/4-4

[3] Duchamp G. and Krob D., The lower central series of the free partially commutative group, Semigroup Forum, vol. 45, no. 1, 385–394 (1992).

[4] Duchamp G. and Krob D., The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Ad-vances in Mathematics, 95, 92-126 (1992).

[5] Prener R., The Lower Central Series of Special Groups generated by Elements of Order Two. Ph.D. Thesis, The Polytechnic Institute of Brooklyn, 1969

[6] Waldinger, Hermann V.. "The lower central series of groups of a special class." Journal of Algebra 14 (1970): 229-244.

[7] Верёвкин Я. А., "Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера", Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Труды МИАН, 305, МИАН, М., 2019, 61–70; Proc. Steklov Inst. Math., 305 (2019), 53–62

[8] Панов Т. Е., Веревкин Я. А. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Кокстера // Мат. сб. 2016 Т. 207, №11. С. 105-126

Отображения многообразий с заданными особенностями

Андрей Рябичев

НИУ ВШЭ

Если рассмотреть все гладкие отображения между фиксированными двумерными многообразиями M и N, в некотором смысле «почти все» эти отображения будут иметь особенности только двух видов: складки $f(x, y) = (x, y^2)$ и сборки $f(x, y) = (x, xy + y^3)$. Мы решаем следующую задачу: существует ли отображение $f : M \to N$, имеющее наперёд заданные множества складок и сборок $C, P \subset M$?

Вот пример (упражнение): существует ли отображение $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}^2$, имеющее связное множество складок (т.е. гомеоморфное окружности) и не имеющее других особенностей? Этот частный случай несложен, например, потому, что все отображения $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}^2$ гомотопны.

Я расскажу план решения этой задачи в общем виде (нам потребуются группы когомологий, расслоения и характеристические классы). Кроме того, я постараюсь сказать пару слов про аналогичную задачу для трёхмерных многообразий — для которой некоторые шаги даже проще, но полное решение мне пока не известно.

Гравитация МакДауэлла–Мансури и сильные гравитационные pp-волны

Вадим Смирнов

СПбГУ

Формализм МакДауэлла–Мансури — один из способов сформулировать общую теорию относительности как теорию калибровочного поля. В ходе доклада мы кратко ознакомимся с самим формализмом и стоящим за ним математическим аппаратом, а затем рассмотрим одно его интересное применение — получение точно линеаризованного сектора гравитации. Полученное в результате точной линеаризации действие обладает интересными свойствами — его экстремалями являются плоские гравитационные волны, и при выборе определенной поляризации оно совпадает с действием струны в форме Балачандрана. Кроме того, мы, при наличии времени, кратко обсудим интересный результат, получающийся при квантовании такой плоской волны — спектр площади волнового фронта оказывается ограничен снизу величиной поядка $\hbar G$.

Chernoff approximations for parabolic PDEs on manifolds

Анна Смирнова

НИУ ВШЭ

In this work we consider Cauchy problem for the parabolic (diffusion type) equation in Riemannian manifold M of bounded geometry. This work is devoted to deriving of a formula that contains coefficients of the equation and initial condition as parameters, and provides (for each natural number n, time $t > 0$, point $x \in M$) functions $u_n(t,x)$ that approximate the solution $u(t,x)$ of the Cauchy problem in L_p-norm: $\lim_{n\to\infty} \|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{L_p(M)} = 0$. This work may be considered as the next logical step after [1] where that type of formulas were published at the first time, but in space of continuous functions that vanish at infinity. In this work we generalize the area of applicability of the formulas to L_p space: solutions belong to $L_p(M)$ and approximations converge in $L_p(M)$. The presented method of approximation is based on the Chernoff theorem [2], [3].

Definition. By symbol $\gamma_{x,A_j}\colon \mathbb{R}^+ \to M$ we denote the integral curve of the vector field A_j starting at time 0 at the point $x \in M$, namely the solution of the initial value problem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_{x,A_j}(t) = A_j(\gamma_{x,A_j}(t)), \\ \gamma_{x,A_j}(0) = x. \end{cases} \tag{1}$$

Remark. Let (M,g) be a smooth Riemannian manifold of bounded geometry of dimension d. Assume that we have the number $r = 1,2,3,\dots$ and $r+1$ smooth and C^2-bounded vector fields A_j on M, where $j = 0,1,2,\dots,r$. Also we have bounded measurable scalar field $c\colon M \to \mathbb{R}$.

We consider the following Cauchy problem for evolution equation

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(t,x), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

where L is a second order differential operator defined as follows

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(A_jA_jf)(x) + A_0f(x) + c(x)f(x). \tag{3}$$

We will provide a formula that expresses the solution to (2) in terms of $A_0, A_1, \dots, A_r, c, u_0$, and this formula will include integral curves of vector fields A_j. So it is reasonable to assume that integral curves are also known.

Theorem. Let $c\colon M \to \mathbb{R}$ be measurable and bounded. Assume that we have the number $r = 1,2,3,\dots$ and $r+1$ smooth and C^2-bounded vector fields A_j on M, $j = 0,1,\dots,r$, and for all j we have $divA_j(\alpha_s^*(x)) = 0$. Let us define for all $f \in L_p(M,\mathbb{R}) \overset{denote}{=} L_p(M)$, $x \in M$ and $t \geq 0$:

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{r}\left(f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{2rt})\right) + f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{2rt})\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}f(\gamma_{x,A_0}(2t)) + tc(x)f(x), \tag{4}$$

where $\gamma_{x,A_j}\colon \mathbb{R}^+ \to M$ denotes the integral curve (defined in (1)) of the vector field A_j starting at time 0 at the point $x \in M$. We also assume that operator L generates a C_0-semigroup $(e^{tL})_{t\geq 0}$.

Then with respect to the norm $\|f\| = \left(\int\limits_M |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p}$ in $L_p(M)$ the following is satisfied:

(1) For all $t \geq 0$ we have $\|S(t)\| \leq 1 + t \sup\limits_{x\in M} |c(x)|$.

(2) $S(t)$ is Chernoff tangent to L.

(3) The solution of Cauchy problem (2) with operator L defined in (3) is given by

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x), \tag{5}$$

where the limit exists in $L_p(M)$, and equality holds for almost all $x \in M$.

Conclusion. Using the Chernoff theorem, tools of differential geometry and general theory of C_0-semigroups we found the solution to the Cauchy problem for second order parabolic equation on a manifold not assuming that manifold is compact, but assuming that it has a bounded geometry. We used Chernoff function proposed in [1], hence our Chernoff approximations coincide with those that are given in [1]. However, solutions, their approximations and convergence in [1] were considered in the space of continuous functions vanishing in infinity, meanwhile above we proved that the same situation holds if solutions, their approximations and convergence are considered in L_p.

This allows to consider solutions in a more general sense (for example, initial condition and solution may be discontinuous). Also we developed several lemmas that can be useful for studying similar equations in L_p-space on non-compact manifolds.

Acknowledgment. The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, grant of the Ministry of science and higher education of the RF, ag. No 075-15-2019-1931

[1] S. Mazzucchi, V. Moretti, I. Remizov, O. Smolyanov. Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds. — arXiv.org

[2] Paul R. Chernoff. Note on product formulas for operator semigroups// J. Functional Analysis 2 (1968), 238-242.

[3] Ya.A. Butko. The method of Chernoff approximation. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Volume 325. – Springer, Cham, 2020, p. 19–4

Диаграммы Фейнмана и трансцендентная теория чисел

Павел Супрун

МФТИ

Диаграммы Фейнмана являются основным инструментом пертурбативной квантовой теории поля. Каждой диаграмме сопоставляется некоторый многомерный интеграл, являющийся одним из слагаемых в ряде теории возмущений для теоретико–полевых наблюдаемых величин. В последнее время появилось понимание того, что интегралы диаграммного типа без параметров обладают особыми теоретико–числовыми свойствами; а именно, группа симметрий кольца периодов (трансцендентных чисел, допускающих алгебраическое интегральное представление) переводит множество чисел, приходящих из вычисления диаграмм, в себя. Этот факт обладает достаточно существенной предсказательной силой, и, возможно, окажется полезным при построении общей теории интегралов типа фейнмановских.

Я постараюсь немного рассказать об этом круге задач и результатов.

Решение различных задач о разрезаниях, замощениях и графах с помощью электрических цепей

Алсу Сурмеева

МФТИ

Данный доклад посвящен решению различных задач о разрезаниях и замощениях с помощью электрических цепей. В ходе доклада будут рассмотрены теорема Дена, матричная теорема о деревьях и теорема Elkies–Kuperberg–Larsen–Propp.

Алгоритм вращения поверхности Зейферта вокруг своего края

Михаил Чернавских

МГУ

Прямоугольные диаграммы зацеплений широко используются в изучении узлов (см. [1]). В работе Дынникова–Прасолова [2, 3] было впервые введено понятие прямоугольной диаграммы поверхности, где с помощью данной техники были изучены Лежандровы узлы. Я рассматриваю задачу построения слоения на дополнении к зацеплению. Чтобы явно задать слоение достаточно построить комбинаторный аналог «вращения» поверхности вокруг своего края. Я расскажу о своих продвижениях в этом направлении.

[1] Ivan Dynnikov, Arc-presentations of links. Monotonic simplification.
[2] Ivan Dynnikov, Maxim Prasolov. Rectangular Diagrams of Surfaces: Representability. Sbornik: Mathematics 208.6 (2017): 791 841.
[3] Ivan Dynnikov, Transverse-Legendrian links.

Neural codes

Алина Чернизова

СПбГУ

Мой доклад будет посвящен некоторому алгебраическому подходу к анализу нейронной активности. Реакция мозга на внешние раздражители может быть выражена посредством бинарного кода, где единица обозначает спайк, а ноль — его отсутствие. Часто такие коды (называемые комбинаторными) соответствуют некоторому рецептивному полю. Одна из важных задач состоит в том, чтобы научиться извлекать свойства рецептивного поля из полученных спайковых данных. Я расскажу как, вводя такие понятия как нейронное кольцо и соответствующий ему идеал, мы можем продвинуться в ее решении.

SU-линейные операции в комплексных кобордизмах

Георгий Черных

МГУ

Я расскажу про классификацию всех SU-линейных когомологических операций в комплексных кобордизмах. Соответственно, будут даны определения комплексных и специальных унитарных кобордизмов, когомологических операций и свойства SU-линейности. Потом будут определены естественные SU-линейные геометрические операции ∂_i, на уровне многообразий представляющие собой взятие подмногообразия, двойственного к i-ой степени первого класса Чженя. Результат, про который я собираюсь рассказать заключается в том, что любая SU-линейная операция выражается в виде ряда от ∂_i.

Дифференцирования алгебры Ли B_2

Оксана Ястребова

НИУ ВШЭ

Исследование относится к классификационным проблемам теории алгебр Ли над полями малой характеристики. В работе найдены дифференцирования классической алгебры Ли типа B_2 над полем характеристики 2. Задача имеет большую вычислительную сложность, поэтому для решения использовалась среда компьютерной математики Maple. Решение данной задачи позволило найти размерность и базис пространства внешних дифференцирований.