Международная школа молодых ученых

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Аннотации лекций и докладов

30 июня - 5 июля 2022
Суздаль

Организаторы конференции благодарны

Министерству науки и высшего образования Российской Федерации,

Администрациям Владимирской области и города Суздаля,

ООО НПП «Технофильтр»

за помощь в подготовке и проведении школы.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow

Steklov International Mathematical Center, Moscow

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics

Vladimir State University
named after Alexander and Nikolay Stoletovs

Lomonosov Moscow State University

The National University of Science and Technology «MISiS»

INTERNATIONAL SCHOOL OF YOUNG SCIENTISTS MODELLING AND OPTIMIZATION OF COMPLEX SYSTEMS

Abstracts of lectures and reports

Suzdal
30 June – 5 July 2022

Vladimir
«Arkaim»
2022

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

Математический центр мирового уровня
"Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук"(МЦМУ МИАН), г. Москва

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Аннотации лекций и докладов

Суздаль
30 июня – 5 июля 2022

Владимир
«Аркаим»
2022

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6
М43

Редакционная коллегия:
С. М. Асеев, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН
А. А. Давыдов, доктор физико-математических наук, профессор

М43 Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем». Аннотации лекций и докладов. Суздаль, 30 июня – 5 июля 2022. – Владимир: «Аркаим», 44 с.

ISBN 978-5-93767-461-6

В сборник включены аннотации лекций и докладов, представленных на международной школе молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем».

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

Мероприятие проведено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Конференция проводится при финансовой поддержке Фонда Саймонса и Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265).

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-93767-461-6 © Коллектив авторов, 2022

Программный комитет

- ◇ **С. М. Асеев** (председатель), Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Давыдов** (зам. председателя), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **В. М. Вельов**, Венский технический университет, Вена, Австрия.

Организационный комитет

- ◇ **А. А. Давыдов** (председатель), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **Л. И. Родина** (заместитель председателя), Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **С. А. Болтунова**, Департамент образования Владимирской области, Владимир, Россия.
- ◇ **Е. В. Винников**, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия.
- ◇ **В. Е. Подольский**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **С. В. Сахаров**, Администрация города Суздаля, Суздаль, Россия.
- ◇ **Е. В. Шелепова**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **А. В. Черникова**, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **П. А. Яськов**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

ЛЕКЦИИ / LECTURES

ДОКЛАДЫ / TALKS

Modeling and compensation of nonlinear distortions in fiber optic links

Plotnikov P. V. (Russia, Moscow)
Huawei Moscow R&D Center
pavel.plotnikov@huawei.com

Fiber optic telecommunications are extremely important for modern ICT industry. In fact, more than 95% of global data traffic is transmitted through fiber optical links. It is the only practical way to transmit information with rates of terabits per second to distances of hundreds or even thousands kilometers.

Evolution of fiber optic during last few decades is impressive, information rate was increased in tenths or even hundreds times and is still continue growing. There are few fundamental limitations of further increasing of speeds - limited bandwidth of silica fiber and optical amplifiers, thermal noise and nonlinear distortions [1]. And importance of nonlinearity becomes bigger and bigger - now it is main obstacle for increasing of optical channel capacity and maximum transmission distance.

In the first part of the lecture we will review mathematical model of propagation of light in the fiber - Nonlinear Schrodinger Equation (NLSE). We will discuss about possible approaches for numerical integration of NLSE, such as Split Step Fourier Method (SSFM) and provide analysis of few approximated algorithms, including perturbation based model (PBM) and digital back propagation (DBP). Also we will touch alternative approach - Nonlinear Fourier Transform (NFT), which becomes more and more popular now.

During lecture we will provide classification of linear and nonlinear distortions and their relative importance in different applications. Then we will introduce methods for its suppression and suitable domains (sample, probability, transform) for their implementation. At the end of this section we will try to formulate open questions, which are still not solved and require research efforts.

In the second part of the lecture we will try to connect traditional algorithms of digital signal processing (DSP) with machine learning (ML) and neural networks (NN). We will demonstrate with practical examples that NN can be used as universal tool for construction of nonlinear adaptive models. At the end we will discuss role of artificial intelligence (AI) in design and optimization of DSP algorithms for next generation optical applications.

Литература

[1] Jianjun Yu, Nan Chi Digital Signal Processing In High-Speed Optical Fiber Communication Principle and Application. Tsinghua University Press 2020.

Основные модели теории экономического роста

Беляков А. О. (Россия, Москва)
Московская Школа Экономики МГУ им. М. В. Ломоносова
belyakov@mse-msu.ru

Модели экономического роста представляют собой динамические системы, которые мы будем описывать дифференциальными уравнениями, как например динамику капитала K в модели Солоу:

$$\dot{K}(t) = s \cdot Y(t) - \delta \cdot K(t),$$

– поток чистых инвестиций $\dot{K}(t)$ равен потоку валовых инвестиций пропорциональных выпуску $Y(t)$ с нормой s минус амортизация с нормой δ, где выпуск в свою очередь зависит от текущего количества капитала. По мере развития и усложнения моделей всё больше их параметров перестают считаться заданными и становятся зависящими от переменных состояния системы согласно разумному выбору экономических агентов, таких как отдельные потребители в децентрализованных моделях или центральный планировщик в централизованных моделях, как например норма сбережения s в модели Рамсея. Здесь нам потребуются понятие общего равновесия и оптимальное управление.

Модели экономического роста можно условно разделить на модели *экзогенного роста*, где технологический рост определяется заданным извне, например темпом g прироста эффективности труда в производственной функции

$$Y(t) = F(K(t), e^{(n+g)\cdot t}), \quad g = const$$

и модели *эндогенного роста*, где рост технологий зависит от переменных состояния системы, т.е. $g = g(K, \ldots)$. Иногда из моделей эндогенного роста выделяют ещё модели *полу-эндогенного роста*, где долгосрочный темп прироста производительности труда, хоть и зависит формально от переменных состояния системы, но стремиться к значению зависящему лишь от части параметров модели, например от темпа n прироста населения, которые не предполагается выбирать в рассматриваемой модели в рамках проведения государственной политики.

Неоклассические модели экзогенного роста, такие как модель Солоу или Рамсея, описывают экономический рост, но не могут объяснить движущие силы долгосрочного экономического роста, который мы наблюдаем как в среднем положительный темп прироста выпуска на душу, $\frac{\dot{Y}}{Y} - n$. Всилу убывающей предельной производительности капитала ($\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$) в неоклассической производственной функции в упомянутых неоклассических моделях переменные состояния объясняют изменения темпа прироста производительности труда только на переходной траектории, которая сходится к т.н. *траектории сбалансированного роста*, где по определению все переменные модели растут с постоянными темпами. На траектории сбалансированного роста в неклассических моделях производительность труда растёт с экзогенно заданным темпом роста эффективности труда, $\frac{\dot{Y}}{Y} - n = g$.

В моделях эндогенного роста первого поколения отказались от свойства убывающей предельной производительности капитала, определив более широко понятие капитала K, так что агрегированная производственная функция приняла линейный вид AK, откуда и пошло название АК-модели. Эти модели не предполагают осознанные инвестиции в научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки (НИОКР), а основываются, например, на побочном совершенствовании технологий в процессе производства с увеличением общего капитала. К тому же АК-модели плохо соотносятся с некоторыми наблюдаемыми стилизованными фактами, например, с условной конвергенцией стран по их уровню выпуска на душу населения.

Мы опишем динамику моделей полу-эндогенного роста, где вводится дополнительный сектор НИОКР, но доля средств, направляемая в этот сектор, задаётся как экзогенный параметр. Мы опишем расширение этих моделей, где норма инвестиций в НИОКР будет выбираться как функция времени центральным планировщиком с целью максимизации функции общественного благосостояния.

Мы рассмотрим два основных типа моделей эндогенного экономического роста, применяющиеся в так называемой новой теории экономического роста или, как ещё говорят, модели роста второго поколения. На основе концепции общего равновесия построены модели с отдельным конкурентным сектором НИОКР, который создает дизайн новых продуктов (горизонтальные инвестиции) или улучшает качество уже существующих продуктов (вертикальные инвестиции) по заказу фирм локальных монополистов.

Модель с горизонтальными инновациями начинается с производственной функции Диксита Штиглица (1977) следующего вида

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} [K(t,i)]^{\alpha},$$

где N – количество фирм, а $K(t,i)$ – капитал i-ой фирмы, $\alpha \in (0,1)$. Всилу симметрии общий капитал $K(t)$ в экономике распределён равномерно по фирмам $K(t,i) = K(t)/N$ так что уравнения для выпуска принимает вид

$$Y(t) = [N(t)]^{1-\alpha} [K(t)]^{\alpha}.$$

Даже если общий капитал $K(t)$ в экономике постояннен, с ростом количества фирм N будет расти общий выпуск в экнономике ввиду того, что предельная производительность капитала фирм растёт, что моделирует преимущества специализации.

Шумпетеровская теория (созидательное разрушение) начинается с производственной функции, характерной для отрасли i:

$$Y(t,i) = [A(t,i)]^{1-\alpha} [K(t,i)]^{\alpha}$$

где $A(t,i)$ – это параметр производительности, связанный с самой новой технологией, используемой в отрасли i в момент t. В этом уравнении $K(t,i)$ представляет капитал, используемый в отрасли i. Суммарный выпуск всех отраслей можно представить следующей формулой

$$Y(t) = [A(t)]^{1-\alpha} [K(t)]^{\alpha},$$

где $A(t) = \sum A(t,i)$ воплощённая в труде производительность, а $K(t) = \sum K(t,i)$ общий капитал в экономике.

Каждый промежуточный продукт производится и продается исключительно последними успешным инноватором. Успешный инноватор в секторе i улучшает технологический параметр $A(t,i)$, что позволяет ему вытеснить предыдущий продукт в этом секторе, пока он сам не будет вытеснен в свою очередь, следующим инноватором. Так осуществятся рост общефактрорной производительности, что приводит к росту выпуска на душу населения.

Литература

[1] Aghion Ph., Howitt P., Bursztyn L. The Economics of Growth. MIT Press, 2009.

[2] Асемоглу Д. Введение в теорию современного экономического роста. Издательский дом «Дело» РАНХиГС. ISBN 978-5-7749-1264-3 (Acemoglu D. Introduction to modern economic growth, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009).

[3] Барро Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост. Бином. Лабоатория знаний, М., 2010, 824 с.; (1-е англ. изд.: R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, Economic growth, New York, McGraw-Hill, 1995).

Математические задачи, возникающие при разработке базовых станций мобильной связи

Воробьев А. (Россия, Москва)
Huawei Technologies Co., Ltd
andrey.vorobyev@huawei.com

1. Представлена структура базовой станции мобильной связи, включающая антенно-фидерную часть, блок промежуточной частоты и цифровую часть. Представлена функциональная схема аналоговой части и блока промежуточной частоты, включающая блок цифрового предыскажения сигнала, блок цифровой коррекции пассивных интермодуляций, усилитель мощности, дуплексер и антенну.

2. Представлен принцип работы блока цифровой коррекции пассивных интермодуляционных искажений, предназначенного для компенсации нелинейных эффектов в аналоговой части. Рассмотрены требования, предъявляемые к данному блоку и основные параметры его эффективности. Сформулирована базовая математическая формулировка задачи коррекции пассивных интермодуляций.

2.1. Приведен пример базовой математической модели для компенсации пассивных интермодуляций. Представлен алгоритм идентификации параметров модели с помощью метода наименьших квадратов. Приведены примеры использования данного алгоритма для компенсации пассивных интермодуляций.

3. Представлен принцип работы блока цифрового предыскажения сигнала, предназначенного для линеализации усилителя мощности. Рассмотрены требования, предъявляемые к данному блоку и основные параметры его эффективности. Сформулирована базовая математическая формулировка задачи предыскажения сигнала.

3.1. Приведен пример базовой математической модели для цифрового предыскажения сигналов. Представлен итерационный алгоритм идентификации параметров модели с помощью метода наименьших квадратов. Приведены примеры использования данного алгоритма для линеализации усилителя мощности.

3.2. Рассмотрена задача по поиску оптимальной структуры модели для предыскажения сигнала. Ее математическая формулировка сводится к задаче разреженной аппроксимации. Приведены примеры решения данной задачи с помощью жадных алгоритмов (Orthogonal Matching Pursuit - OMP) и более сложных алгоритмов (K-means Clustering KSVD).

3.3. Предложено тензорное представление параметров моделей предыскажения сигналов. Применение теории тезорных аппроксимаций к указанным параметрам позволяет изменить структуру самих моделей из однослойных в многослойные, фактически, представляющие собой нейронные сети. Приведены примеры трансформаций и проведено сравнительное моделирование двух классов моделей.

3.4. Математически сформулирована задача оптимизации параметров модели. Рассмотрены различные оптимизационные методы для решения поставленной задачи, включая градиентные методы (SGD, Adam), методы второго порядка (Newton, LM) и квази-Ньютоновские методы (DFP, BFGS). Проведено сравнение выбранных методов на примере оптимизации многослойной модели и выбраны наиболее эффективные из них.

4. Приведены примеры используемых антенных систем в базовых станциях сотовой связи. Рассмотрены задачи моделирования ключевых параметров антенн, включая поле в ближней зоне, диаграмму направленности и S-параметры. Рассмотрены требования к численным методам и программным средствам для моделирования антенн.

4.1. Сформулированна математичекая задача моделирования антенны в виде интегральных уравнений (IE). Найденны выражения для расчеты повехностных токов а также ближнего поля, входного сопротивления и диаграммы направленности. Приведен пример расчета тестовой атенны и сравнение рзультатов с коммерческими пакетами (HFSS, WIPL-D).

4.2. Показано применение метода мозаично-скелетонных аппроксимаций для аппроксимации матрицы, полученной в рамках использования метода интегральных уравнений для моделирования антенны. Продемонстрирован существенный выйгрыш в объеме памяти и скорости выполнения вычислений.

5. Представлена схема функционирования дуплексора внутри базовой станции. Сформулированы технические требования с дупплексору, включая форму частотной характеристики, мощность сигнала и массогабаритные параметры. Рассмотрены требования к численным методам и программным средствам для моделирования дуплексоров.

5.1. Сформулированна математичекая задача моделирования дуплексора в виде метода конечных элементов (FEM). Найденны выражения для расчета электрического поля и S-парамеров. Приведен пример расчета дуплексора и сравнение результатов с коммерческими пакетами (HFSS, CST).

5.2. Показано применение метода снижения размернорсти (MOR) для быстрого решения системы уравнений, полученной в рамках использования метода конечных элементов на множестве частотных точек. Продемонстрирован существенный выйгрыш в скорости выполнения вычислений по сравнению с полным решением задачи на всех частотных точках.

5.3. Представлена теория матриц связи для моделирования фильтров на связанных резонаторах (дуплексоров). В другой модификации этой теории моделирование дуплексоров сводится к математичекой задаче рациональной аппроксимации. Рассмотрена математическая постановка задачи синтеза фильтров на основе рациональных полиномов минимального порядка.

Литература

[1] Schreurs, Dominique, et al. RF power amplifier behavioral modeling. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008.

[2] F. M. Ghannouchi, O. Hammi, and M. Helaoui, Behavioral modeling and predistortion of wideband wireless transmitters. John Wiley & Sons, 2015.

[3] Michal Aharon, Michael Elad, and Alfred Bruckstein. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. Signal Processing, IEEE Transactions on, 12 2006.

[4] Ivan Oseledets and E. Tyrtyshnikov. Tt-cross approximation for multidimensional arrays. Linear Algebra and its Applications, 432:70-88, 01 2010.

[5] J. Nocedal and S. Wright, Numerical optimization. Springer Science & Business Media, 2006.

[6] Gibson, Walton C. The method of moments in electromagnetics. Chapman and Hall/CRC, 2021.

[7] W. Gibson, The Method of Moments in Electromagnetics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2008.

[8] Tyrtyshnikov E. E. Mosaic-skeleton approximations. // Calcolo, Vol. 33, 1996, 47-58.

[9] Stavtsev S. L., Tyrtyshnikov E. E. Application of mosaic-skeleton approximations for solving EFIE. // Progress in Electromagnetics Research Symposium, 2009, 1752-1755.

[10] D. Szypulski, G. Fotyga, V. de la Rubia and M. Mrozowski, "A Subspace-Splitting Moment-Matching Model-Order Reduction Technique for Fast Wideband FEM Simulations of Microwave Structures,"in IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 68, no. 8, pp. 3229-3241

[11] R. J. Cameron, "Advanced Filter Synthesis,"in IEEE Microwave Magazine, vol. 12, no. 6, pp. 42-61, Oct. 2011.

О некоторых интегральных уравнениях на всей прямой с вогнутой нелинейностью[1]

Хачатрян Х. А. (Армения, Ереван)
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Ереванский Государственный Университет
khachatur.khachatryan@ysu.am

Лекция посвящена изучению и решению некоторых классов интегральных уравнений на всей прямой с монотонной и вогнутой нелинейностью. При определенных частных представлениях соответствующих ядер и нелинейностей указанные классы уравнений встречаются в различных направлениях математической физики и математической биологии. В частности, такие уравнения возникают в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в теории переноса излучения в неоднородных средах и в спектральных линиях, в математической теории распространения инфекционных заболеваний (см. [1]-[5]). При различных ограничениях на функцию описывающую нелинейность уравнения будут доказаны теоремы существования неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений. При дополнительных ограничениях на ядро и на нелинейность мы сформулируем и докажем теорему единственности построенного решения в определенном классе ограниченных и неотрицательных функций имеющих конечный предел в $\pm\infty$. Полученные результаты распространяются на соответствующие двумерные аналоги указанных классов уравнений. Во-второй части доклада мы подробно обсудим конкретные прикладные примеры указанных уравнений. Часть приведенных результатов опубликована в работе [6].

Литература

[1] В. С. Владимиров, Я. И. Волович. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны. ТМФ, 138:3 (2004), 355–368.

[2] Х. А. Хачатрян. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны. Изв. РАН. Сер. матем., 82:2 (2018), 172–193.

[3] В. В. Соболев. Проблема Милна для неоднородной атмосферы. Докл. АН СССР, 239:3 (1978), 558–561.

[4] Н. Б. Енгибарян. Об одной задаче нелинейного переноса излучения. Астрофизика, 2:1 (1966), 31–36.

[5] O. Diekmann. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. J. Math. Biol., 6 (1978), 109–130.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

[6] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений с монотонным оператором типа Гаммерштейна. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 28:2 (2022), 201–214.

Новые подходы к анализу старения населения

Щербов С. Я. (Австрия, Вена)
International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)
scherbov@iiasa.ac.at

Следующие темы будут обсуждаться:

1. Как традиционно измеряется старение населения. Медианный возраст, доля населения в возрасте 60+ или 65+, демографическая нагрузка пожилыми.

2. Как выглядит картина старения населения в мире при традиционном измерении уровня старения населения.

3. Почему традиционные методы измерения старение приводят к искажению реальной картины.

4. Календарный возраст и перспективный возраст и возраст, основанный на физических, когнитивных и др. (алфа возраст) характеристиках населения. Примеры.

5. Новые показатели старения, учитывающие тенденции увеличения продолжительности жизни и характеристики населения такие, как уровень здоровья, физисеское и когнитивное здоровье населения.

6. Как выглядит старение в мире, если мы используем новые показатели старения населения. Примеры.

7. Некоторые парадоксы: чем быстрее растет продолжительность жизни, тем меньше старение, измеряемое с помощью новых показателей старения..

8. Старение населения в России на региональном уровне.

9. Последствия COVID-19.

10. Заключение

Литература

[1] Sanderson W., Scherbov S. (2005). Average remaining lifetimes can increase as human populations age. Nature 435: 811-813, June 9.

[2] Sanderson W., Scherbov S. (2010). Remeasuring aging. Science 329: 1287-1288, 10 September.

[3] Sanderson W., Scherbov S. (2008). Rethinking age and aging. Population Bulletin, 63(4).

[4] Lutz W., Sanderson W., Scherbov S. (2008). The coming acceleration of global population ageing. Nature 451: 716-719.

[5] Sanderson W., Scherbov S. (2013). The characteristics approach to the measurement of population aging , Population and Development Review, 39(4): 673-685.

[6] Sanderson W., Scherbov S. (2014), Measuring the speed of aging across population subgroups. PLoS ONE 9(5): e96289.

[7] Sanderson W., Scherbov S. (2015). Are we overly dependent on conventional dependency ratios?, Population and Development Review, 41(4):687-708.

[8] Sanderson W., Scherbov S., Gerland P. (2017) Probabilistic population aging. PLoS ONE, 12(6): e0179171.

[9] Sanderson W. C., Scherbov S. (2019). Prospective Longevity: A New Vision of Population Aging. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Модели и новые подходы к анализу продолжительности жизни[2]

Эдиев Д. М. (Россия, Черкесск, Москва)
ФГБОУ ВО «Северо-Кавказская государственная академия», кафедра математики
МГУ им. М. В. Ломоносова, кафедра демографии ВШССН
ediev@ncsa.ru

В работе рассматривается два новых подхода к анализу и прогнозированию смертности и продолжительности жизни в условиях устойчивой динамики смертности. Первый подход («прямой экстраполяции» показателей смертности) является развитием традиционного подхода, в котором возрастные коэффициенты смертности экстраполируются на основе логлинейной модели. Показано, что данная модель по сути близка получившей широкое распространение в последние десятилетия модели Ли-Картера и разделяет с ней ряд недостатков, в т.ч. внутреннюю рассогласованность в прогнозе. Предлагается модификация модели, которая позволяет избавиться от упомянутых недостатков и несколько повысить точность модели. Предложенная модификация получила некоторое распространение в практике прогнозов продолжительности жизни статистическими офисами.

Второй – неконвенциональный – подход к моделированию и прогнозированию динамической смертности опирается на идеи темпо-эффекта в демографии, т.е. искажения когортных показателей в календарных статистических наблюдениях в условиях демографической динамики. Показано, что широко распространенное механическое перенесение идей и моделей темпо-эффекта из области рождаемости в область смертности (работы Бонгартса-Фини, Луи и др.) может оказаться ошибочным и искажать картину перспектив изменения показателей смертности в будущем (приводя к необоснованно пессимистичным прогнозам смертности в условиях роста продолжительности жизни и, наоборот, чересчур оптимистичным прогнозам в условиях сокращения продолжительности жизни). Предлагается альтернативная модель темпо-эффекта в смертности, в которой предполагается устойчивость т.н. скорости старения таблицы дожития в когортах. Показано, что скорость старения в календарных наблюдениях дает искаженную картину когортной скорости старения, а два показателя могут быть связаны друг с другом на основе соотношений частных производных силы смертности по возрасту и времени. Поправка на искажения скорости старения, вызванные темпо-эффектом, позволяет рассчитать ожидаемую продолжительность жизни (в когортах, а в перспективе – и в календарных таблицах дожития), лучше соответствующую т.н. текущим условиям смертности и построить прогноз смертсноти и продолжительности жизни. В рамках модели показано наличие инерции в динамике продолжительности жизни и впервые дается объяснение уникальной качественной особенности динамики продолжительности жизни в развитых странах – тенденции к устойчивому линейному росту.

Оба подхода к анализу динамической продолжительности жизни дают возможность экстраполяции пред-ковидных тенденций в смертности и, соответственно обоснованному оцениванию избыточной смертности в период пандемии.

Литература

[1] Bengtsson, T. (Ed.). (2006). Perspectives of mortality forecasting. III. The linear rise in life expectancy: history and prospects. Swedish Social Insurance Agency.

[2] Bongaarts, J. (2005). Long-range trends in adult mortality: models and projection methods. Demography, 42, 23–49.

[3] Bongaarts, J., & Feeney, G. (2002). How long do we live? Population and Development Review, 28, 13–29.

[4] Ediev, D. M. (2007). An approach to improve the consistency of mortality projections obtained by the Lee-Carter method // Eurostat methodologies and working papers. Work session on demographic projections. Bucharest, 10-12 October 2007. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities: 101-115.

[2]В работе использованы результаты, полученные при поддержке РФФИ (грант 20-510-82002 "Демографические последствия COVID-19 для краткосрочной и долгосрочной динамики населения России: на федеральном и региональном уровнях").

[5] Ediev, D. M. (2008). Extrapolative Projections of Mortality: Towards a More Consistent Method. Part I: The Central Scenario. Vienna, Vienna Institute of Demography of Austrian Academy of Sciences. Working paper WP 03/2008. 50 pp.

[6] Ediev, D. M. (2008). On the theory of distortions of period estimates of the quantum caused by the tempo changes. Vienna Institute of Demography, European Demographic Research Paper. http://www.oeaw.ac.at/vid/download/edrp_3_08.pdf.

[7] Ediev, D. M. (2011). Life Expectancy in Developed Countries Is Higher Than Conventionally Estimated. Implications from Improved Measurement of Human Longevity. Journal of Population Ageing. 4(1-2): 5-32.

[8] Lee, R. D. and L. R. Carter. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. J. of American Statistical Association 87(419): 659-671.

[9] Luy, M. (2006). Mortality tempo-adjustment: an empirical application. Demographic Research, 15, 561-590. http://www.demographic-research.org/volumes/vol15/21/.

Mathematical modeling of string vibrations with a movable boundary

Litvinov V. L. (Russia, Moscow)
Moscow State University
vladlitvinov@rambler.ru

Litvinova K. V. (Russia, Moscow)
Moscow State University
kristinalitvinova900@rambler.ru

The resonance characteristics of viscoelastic string with moving boundaries using the Kantorovich – Galerkin method are examined in the article. The phenomenon of resonance and steady passage through resonance are analyzed.

One-dimensional systems whose boundaries move are widely used in engineering [1–5]. The presence of moving boundaries causes considerable difficulties in describing such systems. Exact methods for solving such problems are limited by the wave equation and relatively simple boundary conditions. Of the approximate methods, the Kantorovich-Galerkin method described in [5] is the most efficient. However, this method can also be used in more complex cases. This method makes it possible to take into account the effect of resistance forces on the system, the viscoelastic pstringrties of an oscillating object, and also the weak non-stationarity of the boundary conditions.

The paper considers the phenomena of steady-state resonance and passage through resonance for transverse oscillations of a string of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces.

Performing transformations similar to transformations [5], an expression is obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the n-th dynamic mode. Expressions are also obtained that describe the phenomenon of steady state resonance and the phenomenon of passage through resonance.

The expression that determines the maximum amplitude of oscillations when passing through the resonance was numerically investigated to the maximum. The dependence of the string oscillation amplitude on the boundary velocity, viscoelasticity, and damping forces is analyzed.

The results of numerical studies allow us to draw the following conclusions:

– with a decrease in the velocity of the boundary, viscoelasticity and damping forces, the amplitude of oscillations increases;

– as the boundary velocity, viscoelasticity and damping forces tend to zero, the oscillation amplitude tends to infinity;

In conclusion, we note that the above results make it possible to carry out a quantitative analysis of the steady state resonance and the phenomenon of passage through the resonance for systems whose oscillations are described by the formulated problem.

References

[1] Vesnitsky A. I., Potapov A. I. Transverse vibrations of strings in mine hoists // Dynamics of systems. Bitter: Bitter. un-t, 1975. Number 7. Pp. 84–89.

[2] Anisimov V. N., Litvinov V. L. Longitudinal vibrations of a viscoelastic string of variable length // Tr. 4th All-Russian. scientific conf. Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Mathematical modeling and boundary value problems. Samara, 2007. Part 1. Pp. 25-27.

[3] Goroshko O. A., Savin G. N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Science. Dumka, 1971. Pp.290.

[4] Litvinov V. L., Anisimov V. N. Transverse vibrations of a string moving in the longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. No. 4. - Pp.161-165.

[5] Litvinov V. L., Anisimov V. N. Application of the Kantorovich – Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. No2. Pp. 70–77.

Differentiation of Similar Matrices

Vasyutkin S. A. (Russia, Novosibirsk)
Novosibirsk State University
Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics
s.vasyutkin@g.nsu.ru

Chupakhin A. P. (Russia, Novosibirsk)
Novosibirsk State University
Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics
alexander190513@gmail.com

The similarity transformation $T_g : a \longrightarrow gag^{-1}$ splits the set of square $n \times n$ matrices into equivalence classes. The Jordan form Λ_a of a matrix a is the canonical representative of each class. The algebraic invariants of a matrix a are invariants of the similarity transformation T_g. They can be expressed in various ways, in particular, as the traces of the powers of $a : j_1 = tra$, $j_2 = tra^2, \ldots, j_n = tra^n$. An extensive literature is devoted to constructing bases for sets of matrices $a, b, \ldots$ and their properties. Let a matrix $a$depend smoothly on a parameter $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, so that the derivatives $a_1 = \frac{da}{dt}$, $a_2 = \frac{d^2a}{dt^2}$, ... are defined as matrices formed from the derivatives of the entries of the matrix. The eigenvalues and algebraic invariants of the matrices $a_1, a_2, \ldots$ are no longer expressed by simple formulas in terms of the algebraic invariants of the matrix a, except for the relation $\frac{d^k}{dt^k} tra = tr \frac{d^k a}{dt^k}$.

The question about the relation between the eigenvalues and algebraic invariants of the original matrix a and its derivatives $\frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \ldots$ is of interest in itself and finds applications in continuum mechanics, in gas dynamics. It is formulated and solved on the basis of the theory of differential invariants [1].

In [2], a solution to this problem is proposed based on the construction of an invariant differentiation operator for a Lie group of transformations defining similarity [3]. The invariant differentiation operator allows us to calculate the eigenvalues of the matrices $a_1, a_2, \ldots$ as invariants of the continued similarity transformation. In this paper, formulas are given for calculating algebraic invariants of derivatives of the original matrix, their correctness is proved with respect to the choice of a similarity matrix that transorms the original matrix a to the Jordan form. For 2×2 we discover a connection between the derivatives of a matrix and the differential analogue of the Clifford algebra.

In [4], this approach is applied to the construction of an invariant basis for a set of 2×2 matrices $a_0, a_1 = da_0/dt, a_2 = d^2a_0/dt^2, \ldots$, consisting of the original matrix and its derivatives. The presence of a derivative imposes connections between the elements of this set and reduces the number of elements of the basis, compared with the purely algebraic case [5]. Formulas for calculating algebraic invariants of such a set are proved. A generalization of Fricke's formulas in terms of traces is formulated.

References

[1] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformaticns. // Acta. math. 18 (1894), 1-88.

[2] Vasyutkin, S. A., Chupakhin, A. P., Differentiation of Similar Matrices. // Math Notes. 2021. V. 109, P. 302-306.

[3] L. V. Ovsjannikov, Group Analysis of Differential Equations. // English translation by W. F. Ames, Academic, New York, (1982).

[4] Vasyutkin, S. A., Chupakhin, A. P, Construction of a minimal basis of invariants for the differential algebra of (2×2)-matrices // Siberian Journal of Industrial Mathematics 2022. V. 25, 2. P. 1-9.

[5] K. S. Sibirskii, Algebraic invariants for a set of matrices // Siberian Mathematical Journal. 1968. V. 9, P. 115-124.

О невырожденности краевой задачи четвертого порядка на цепочке интервалов

Анучина Ю. А. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
anuchina@math.vsu.ru

Ряд процессов, происходящих в сетевых технических системах, описывается краевыми задачами, заданными на геометрическом графе. В силу практической значимости таких задач они изучались рядом воронежских, ленинградских, французских математиков. Частным случаем являются краевые задачи, заданные на цепочке интервалов некоторого отрезка вещественной оси, для которых в работах [1], [2] и др. при краевых условиях и условиях согласования были изучены условия невырожденности, положительной определенности оператора с ядром функции Грина, некоторые спектральные свойства.

На объединении непересекающихся интервалов $\Im_n = \bigcup\limits_{i=0}^{n} (a_i, a_{i+1})$ при коэффициентах $p_i(x) \in C^{2-i}(\Im)$, $p_0(x) > 0$, и правой части $f \in C(\Im)$ мной рассмотрена краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка

$$(p_0(x)u''(x))'' - (p_1(x)u'(x))' + p_2(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

при заданных в точках a_i локальных условиях

$$\sum_{\gamma\in(a_i,a_{i+1})} \sum_{k=0}^{3} \alpha_{\gamma j}^{ak} u^{(k)}(a_\gamma) = 0, j = \overline{1,4}. \tag{2}$$

Если коэффициенты дифференциального уравнения (1) неотрицательны и все квадратичные формы, построенные при коэффициентах условий, также неотрицательны, то такая краевая задача является энергетической [3]. С помощью данного факта мной условия (2) энергетических краевых задач были приведены к каноническому виду.

В статье [3] было доказано, что решением однородной энергетической задачи на каждом ребре является многочлен степени не выше первой. Опираясь на этот результат, удалось найти критерии невырожденности энергетических краевых задач при любых видах канонических краевых условий.

Приведем результаты для одного из видов канонических условий в частном случае, когда количество интервалов равно двум, то есть когда $\Im_2 = (0, a) \cup (a, l)$, $0 < a < l$. Таким образом, рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения (1) с краевыми условиями

$$u'(0) = u(0) = 0, \tag{3}$$

$$d^3u(l) + \beta_1 d^2u(l) + \beta_2 u(l) = u'(l) - \beta_1 u(l) = 0, \tag{4}$$

и условиями согласования

$$\begin{array}{l} d^2u\,(a-0) + \alpha_1 u'\,(a-0) + \alpha_2 u'\,(a+0) + \alpha_3 u\,(a-0) + \alpha_4 u\,(a+0) = 0, \\ d^2u\,(a+0) + \alpha_2 u'\,(a-0) + \alpha_5 u'\,(a+0) + \alpha_4 u\,(a-0) + \alpha_6 u\,(a+0) = 0, \\ d^3u\,(a-0) + \alpha_3 u'\,(a-0) + \alpha_4 u'\,(a+0) + \alpha_7 u\,(a-0) + \alpha_8 u\,(a+0) = 0, \\ d^3u\,(a+0) + \alpha_4 u'\,(a-0) + \alpha_6 u'\,(a+0) + \alpha_8 u\,(a-0) + \alpha_9 u\,(a+0) = 0, \end{array} \tag{5}$$

где $d^2u\,(a-0) = -p_0\,(x)\,u''\,(x)$, $d^3u\,(a-0) = (p_0\,(x)\,u''\,(x))' - p_1\,(x)\,u'\,(x)$.

Теорема 1. *Если $\beta_2 \neq 0$, то краевая задача (1), (3)-(5) невырождена независимо от остальных коэффициентов краевых условий и условий согласования.*

Теорема 2. *Если $\beta_2 = 0$, то краевая задача (1), (3)-(5) невырождена тогда и только тогда, когда вектор $(\alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9, -\beta_1)$ пропорционален вектору $(\alpha_2, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_6, 1 - \beta_1^l(l-a))$.*

Для краевых задач с каноническими условиями другого вида получены аналогичные результаты.

Литература

[1] Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 6. С. 730–732.

[2] Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. Об осцилляцион ных спектральных свойствах разрывных краевых задач // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 4. С. 409–412.

[3] Завгородний М. Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т.50. № 4. С. 446–456.

Задача Маркова-Дубинса с управлением на треугольнике

Ардентов А. А. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
aaa@pereslavl.ru

Рассмотрим модель колёсного робота на плоскости без препятствий. Робот управляется двумя приводными колёсами, которые вращаются с некоторыми скоростями v_r, v_l. Предполагаем, что робот двигается только вперёд, т.е. $v_r \geq 0, v_l \geq 0$, при этом максимальная скорость каждого приводного колеса ограничена некоторым значением $v_{\max}$. В рассматриваемой модели допускаем, что скорости v_l, v_r можно изменять в множестве допустимых значений произвольно, т.е. разгон до максимальной скорости и торможение до нуля происходит мгновенно.

Сформулируем для предложенной модели робота задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t)\cos\theta(t), \\ \dot{y}(t) = u_1(t)\sin\theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = u_2(t), \end{cases}$$
$$(u_1, u_2) \in U_{GMD} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \in [1, 2], |u_2| \leq 2 - u_1\},$$
$$(x, y, \theta)(0) = (x_0, y_0, \theta_0), \qquad (x, y, \theta)(T) = (x_1, y_1, \theta_1),$$
$$T \to \min,$$

здесь координаты x, y задают положение центра приводной пары робота на плоскости, а угол θ направление движения колёс робота; управления u_1, u_2 соответствуют линейной и угловой скорости.

Известна уже ставшая классической задача Маркова-Дубинса [1, 2], в которой управление лежит на отрезке

$$U_{MD} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 1, |u_2| \leq 1\}.$$

В классической задаче оптимальные пути состоят из отрезков прямых и дуг окружностей. Предполагается, что робот перемещается по окружности с той же скоростью, что и по прямой линии. На практике же роботу сложней удерживать заданную скорость при поворотах, предложенная модель устраняет этот недостаток.

Заметим, что множество скоростей правого и левого колеса в исходной постановке пересчитывается (с учётом симметрий растяжений плоскости (x, y) и времени t) в множество линейной и угловой скоростей U_{GMD}.

К задаче применен принцип максимума Понтрягина [3], описаны возможные типы экстремальных траекторий.

Литература

[1] Марков А. А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших велечинах // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1889. Т. 1, №2, С.250–276.

[2] Dubins L. E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Journal of Mathematics. Vol. 79. No 3. P.497–516.

[3] Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление // М: Едиториал УРСС. 2004. 160 с.

Теорема об оценке суммарного дохода с учетом дисконтирования для модели однородной популяции

Базулкина А. А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
hirasawa33rus@gmail.com

Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, в которой размеры промысловых заготовок являются случайными величинами. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в моменты времени $\tau_k = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in \Omega \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$. Считаем, что на данный процесс можно влиять так, чтобы остановить его, если доля добываемого ресурса окажется больше некоторого значения $u_k \in [0, 1]$ в момент времени τ_k. Это нужно для того, чтобы была возможность сохранить как можно больше ресурса для увеличения размера следующего сбора. В таком случае, доля добываемого ресурса задается следующим выражением

$$\ell_k \doteq \ell(\omega_k, u_k) = \begin{cases} \omega_k & \omega_k < u_k, \\ u_k & \omega_k \geq u_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, мы построили модель эксплуатируемой популяции, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq kd, \tag{1}$$

$$x(kd) = (1 - \ell_k)x(kd - 0), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Предполагаем, что функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для любых $x \in [0, +\infty)$ и решения уравнения (1), (2) непрерывны справа.

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, тогда $\varphi(d, x)$ — решение уравнения (1) в момент времени $t = d$.

Условие 1. *Пусть уравнение* (1) *имеет асимптотически устойчивое решение* $\varphi(t, A) \equiv A$, $A > 0$ *и существует решение* $\varphi(t, 0) = 0$.

Напомним, что областью притяжения решения $\varphi(t, A) \equiv A$ называется множество точек $x_0 \in \mathbb{R}$ таких, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t, x_0) = A$. Известно, что $\varphi(t, A)$ является асимптотически устойчивым решением, если $g(A) = 0$ и $g'(A) < 0$, см. [1].

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, описанное в работах [2],[3]. Пусть $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)\}$, где $u_k \in [0, 1]$; $\ell \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$. Обозначим через $X_k = X_k(\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}, x_0)$ количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$, зависящее от долей ресурса ℓ_i, $i = 1, \ldots, k-1$, собранного в предыдущие моменты времени и начального значения x_0. Через x_k обозначим количество ресурса после сбора. Тогда $X_{k+1} = \varphi(d, x_k)$ и $x_k = (1 - u_k) X_k, k = 1, 2, \ldots$.

Определение 1. *Суммарным доходом с учетом дисконтирования назовем функцию*

$$H_\alpha(\ell, x_0) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}, x_0) \ell_k e^{-\alpha k},$$

где $\alpha > 0$ *— показатель дисконтирования.*

Рассматриваем задачу получения оценок для суммарного дохода с учетом дисконтирования, которые выполнены для всех $\sigma \in \Sigma$ и оценок, выполненных с вероятностью единица.

Если $\ell_k = u$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то X_k удовлетворяет разностному уравнению

$$X_{k+1} = \varphi\left(d, (1-u)\, X_k\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условие* 1 *и неравенство*

$$(1-u)\, \varphi'_x\,(d, 0) > 1. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) *имеет положительную неподвижную точку* $X(u)$.

Обозначим $x(u) = (1-u)X(u)$.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условие* 1 *и неравенство* (4). *Тогда для любого* $x_0 \in [x(u), X(u)]$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что для всех* $\sigma \in \Sigma$ *имеет место неравенство*

$$X(u) \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k e^{-\alpha k} \leqslant H_\alpha(\ell, x_0) \leqslant A \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k e^{-\alpha k}.$$

Пусть $\bar{\ell}^p \doteq (\ell_1^p, \ldots, \ell_k^p)$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда функция суммарного дохода примет вид

$$H_\alpha(\ell^p, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\ell_1^p, \ldots, \ell_{k-1}^p)\ell_k^p e^{-\alpha k}.$$

Обозначим через $M\ell$ математическое ожидание случайных величин ℓ_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда для любого* $x_0 \in (x(u), A)$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнено неравенство*

$$\frac{X(u)M\ell}{e^{\alpha d} - 1} \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} X_k(\ell_1^p, \ldots, \ell_{k-1}^p)\ell_k^p e^{-\alpha k} \leqslant \frac{AM\ell}{e^{\alpha d} - 1}.$$

Рассматривается также задача нахождения максимальной оценки снизу для суммарного дохода с учетом дисконтирования. В частности, получены результаты для модели популяции, заданной логистическим уравнением $\dot{x} = (a - bx)x$, где $a > 0, b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции.

Литература

[1] Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.

[2] Родина Л. И., Тютеев И. И. Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 79–86.

[3] Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58.

Существование оптимальных стационарных состояний распределенных популяций при смешанной эксплуатации[3]

Винников Е. В. (Россия, Москва)
МГУ им. М. В. Ломоносова
НИТУ «МИСиС»
evinnikov@gmail.com

Давыдов А. А. (Россия, Москва)
МГУ им. М. В. Ломоносова
НИТУ «МИСиС»
davydov@mi-ras.ru

Потребность в исследовании распределенных популяций или любого распределенного возобновляемого ресурса, в динамике которых следует учитывать диффузию, привело к появлению моделей типа уравнения Колмогорова-Пискунова-Петровского-Фишера. Мы рассматриваем уравнение в дивергентной форме

$$p_t = (\alpha(x)p_x)_x + a(x)p - b(x)p^2, \tag{1}$$

где $p = p(x,t)$ — это плотность ресурса в точке x области его распределения в момент времени t, а функции α, a и b характеризуют диффузию ресурса, показатели его возобновления и насыщения им среды соответственно.

Эксплуатация ресурса осуществляется двумя способами одновременно: постоянного и импульсного. Первый из них добавляет в уравнение (1) слагаемое $-u(x)p$ в правую часть с измеримым управлением u , удовлетворяющим ограничению $0 \leqslant U_1(x) \leqslant u(x) \leqslant U_2(x)$ с некоторыми измеримыми ограниченными функциями U_1 и U_2. Такие управления будем называть *допустимыми*, а функции U_1 и U_2 – *ограничениями* на эти управления. Импульсный отбор происходит периодически, при нем в ареале распределяется имеющееся усилие E для сбора ресурса или его часть с измеримой плотностью $r = r(x)$ (=*плотность усилия*), которая всюду на торе удовлетворяет условию $R_1(x) \leqslant r(x) \leqslant R_2(x)$ с некоторыми неотрицательными ограниченными измеримыми функциями $R_1, R_2, R_1 \neq R_2$. Такие плотности усилия называются *допустимыми*. Отметим, что $\int\limits_{\mathbb{T}^n} r(x)dx \leqslant E$. После выбора допустимой плотности усилия r с периодом $T > 0$ отбирается доля ресурса $q(x) = 1 - e^{-\gamma(x)r(x)}$.

Целью непрерывного и импульсного отборов является получение максимального среднего временного дохода в натуральном виде, то есть, если к моменту τ эти отборы дали доход $P_u(\tau)$ и $P_r(\tau)$, то нужно решить следующую задачу оптимизации

$$\varlimsup_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}(P_u(\tau) + P_r(\tau)) \to \max \tag{2}$$

выбирая *допустимую стратегию отбора* – пару из допустимых управления и плотности усилия. Решение такой задачи доставляет оптимальную эксплуатация ресурса в долгосрочной перспективе. Здесь мы показываем, что существует допустимая стратегия отбора, доставляющая наибольшее значение функционала (2) при подходящей начальной плотности популяции. Такую стратегию будем называть *оптимальной*. Эта работа продолжает исследования, начатые в [2], [3], [4], однако отличается от них формой отбора (смешанная) и соответственно постановкой задачи.

В условиях, наложенных на коэффициенты уравнения (1) любое решение этого уравнения с ненулевыми неотрицательными начальными данными ограничено и при $t \to \infty$ равномерно по тору стремиться к предельному стационарному распределению $p_\infty = p_\infty(x)$, либо нулевому, либо положительному [1].

Теорема 1. *Существуют допустимая стратегия отбора, доставляющая значение F_{max} функционала в (2), если начальное распределение ресурса не меньше его предельного распределения p_∞ без постоянного и импульсного отборов при ненулевом неотрицательном начальном распределении.*

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-11-00223).

Литература

[1] Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence// Journal of Mathematical Biology, 2005, 51 (1) : 75-113.

[2] Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимальный циклический сбор распределенного возобновляемого ресурса с диффузией // Труды МИАН, 315, МИАН, М., 2021

[3] Давыдов А. А., Мельник Д. А. Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с импульсным отбором // Труды Института Математики и Механики УрО РАН, Том 27 (2021) № 2, 99-107.

[4] Davydov A. A. Optimal steady state of distributed population in periodic environment //AIP Conference Proceedings 2333, 120007 (2021).

Об оценке средней временной выгоды для модели конкуренции двух видов

Волдеаб М. С. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет
mebseb2018@gmail.com

Рассмотрим модель популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0,1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n \geqslant 2$, то ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп.

Таким образом, рассматривается эксплуатируемая популяция, заданная управляемой системой

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd,$$
$$x_i(kd) = \big(1 - u_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0),$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что все решения системы $\dot{x} = f(x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях; для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ удовлетворяли условию квазиположительности (см. [1, с. 34]).

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$, $C_i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида. *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется предел

$$H\big(\bar{u}, x(0)\big) \doteq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,.$$

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение системы $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Введем в рассмотрение функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d, x) - x_i\big)$$

в предположении, что для любого $x \in \mathbb{R}_n^+$ решения $\varphi(t, x)$ существуют при $t \in [0, d]$. В [2] доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция* $D(x)$ *достигает максимального значения в точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $x^*_i \leqslant \varphi_i(d, x^*) \neq 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $\varphi_i(d, x(0)) \geqslant x^*_i$, $i = 1, \ldots, n$, *существует режим эксплуатации* $\overline{u}^*$, *при котором функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения* $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(x^*)$.

Приведем оценки средней временной выгоды для модели конкуренции двух видов, которые получены в работе [2].

Пример 1. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a > b$. Тогда

$$\max\Big\{\frac{C_1}{a}, \frac{C_2}{a}, \frac{C_1 + C_2}{a + b}\Big\}\frac{c\,(e^{cd/2} - 1)}{e^{cd/2} + 1} \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}^+_2} D(x) \leqslant$$
$$\leqslant \max\Big\{\frac{c^2 C_1 C_2 d(C_1 + C_2)(a - b)}{4a^2 C_1 C_2 - b^2(C_1 + C_2)^2}, \frac{\max(C_1, C_2)c^2 d}{4a}\Big\}.$$

Пример 2. Рассмотрим модель конкуренции двух видов (1) при условии $a \leqslant b$. Здесь можно найти точную формулу для $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^2_+} D(x)$.

Утверждение. *Пусть в системе (1)* $a \leqslant b$ *и* $C_1 \leqslant C_2$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^2_+$ *такого, что* $\varphi_2(d, x(0)) \geqslant x^*_2 = \dfrac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$, *функция* $H_*\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(0, x^*_2) = \frac{c\,C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}.$$

Литература

[1] Кузенков О. А., Рябова Е. А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского ун-та, 2007.

[2] Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия вузов. Математика. 2022. № 1. С. 12–24.

Задача планирования для игр среднего поля с марковской динамикой

Волков А. М. (Россия, Екатеринбург)
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
volkov@imm.uran.ru

Авербух Ю. В. (Россия, Екатеринбург)
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
averboukh@gmail.com

Задача планирования состоит в переводе распределения бесконечного числа игроков, учитывающих свои индивидуальные интересы, на промежутке $[0, T]$ из заданного начального состояния m_0 в заданное конечное m_T за счет выбора терминального выигрыша. Динамика и интегральный выигрыш предполагаются заданными. Впервые данная задача была предложена в лекциях P.-L. Lions в 2007 году и в настоящее время привлекает большое внимание исследователей. В работе мы рассматриваем случай игр среднего поля с конечным числом состояний. Динамика игрока будет задаваться марковской цепью $X(t)$ с матрицей Колмогорова $Q(t, m, \nu)$. Здесь m — распределение агентов, а ν — рандомизированное позиционное управление, выбранное с целью максимизации показателя

$$J_0(m(\cdot), \varphi(\cdot), \nu(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\sigma_{X(T)}(m(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} g_{X(t)}(t, m(t), \nu(t))dt\right].$$

Или в векторной форме

$$J_0(m(\cdot),\varphi(\cdot),\nu(\cdot)) = m(T)\sigma(m(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} m(t)g(t,m(t),\nu(t))dt.$$

Задача планирования формулируется в виде краевой задачи

$$\begin{gathered}\dot m(t) = m(t)Q(t,m(t),\nu^*(t)), \quad m(t_0)=m_0, \quad m(T)=m_T,\\ \dot\varphi(t) = -\max\left\{Q(t,m(t),\nu)\varphi(t)+g(t,m(t),\nu) : \nu\in\mathcal{P}(U)^d\right\},\\ \nu^*(t)\in \operatorname{Argmax}\left\{Q(t,m(t),\nu)\varphi(t)+g(t,m(t),\nu) : \nu\in\mathcal{P}(U)^d\right\},\end{gathered}$$

где $\varphi(\cdot)$ — функция цены. Максимум и аргмаксимум в данном случае берутся покомпонентно.

Был построен пример задачи планирования, которая не имеет решения. При этом конечное состояние m_T лежит в области достижимости системы. Доказана эквивалентность задачи планирования некоторой задаче оптимального управления.

Теорема 1. *Задача планирования для марковской игры среднего поля эквивалентна задаче оптимального управления*

$$J(m(\cdot),\varphi(\cdot),\mu(\cdot),\nu(\cdot)) = \mu_0\varphi_0 - \mu(T)\varphi(T) - \int\limits_{t_0}^{T}\mu(\tau)g(\tau,m(\tau),\nu(\tau))d\tau \longrightarrow \min_{\varphi(T),\nu(\cdot)} \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{gathered}\min J(m(\cdot),\varphi(\cdot),\mu(\cdot),\nu(\cdot)) = 0,\\ \dot m(t) = m(t)Q(t,m(t),\nu(t)), \quad m(t_0)=m_0, \quad m(T)=m_T,\\ \dot\varphi(t) = -\max\left\{Q(t,m(t),\nu)\varphi(t)+g(t,m(t),\nu) : \nu\in\mathcal{P}(U)^d\right\},\\ \dot\mu(t) = \mu(t)Q(t,m(t),\nu(t)), \quad \mu(t_0)=\mu_0\end{gathered} \qquad (2)$$

для некоторого распределения μ_0 не имеющего нулевых компонент.

Предложен вариант регуляризации задачи планирования, основанный на регуляризации эквивалентной задачи управления из Теоремы 1.

Определение 1. *Будем говорить, что $\gamma^*(\cdot)$ является решением наименьшего сожаления задачи планирования, если*

- *существует распределение μ_0^* и пятерка $(m^n(\cdot),\varphi^n(\cdot),\mu^n(\cdot),\gamma^n(\cdot),\alpha^n)$ такие, что $\alpha^n\uparrow+\infty$, а пара $(\varphi^n(T),\gamma^n(\cdot))$ является решением задачи управления (1), (2) с $\mu_0=\mu_0^*$ и дополнительным ограничением $\|\varphi^n(T)\|\le\alpha^n$,*

- *$\gamma^n(\cdot)\to\gamma^*(\cdot)$.*

Теорема 2. *Выполняются следующие утверждения:*

- *Множество решений наименьшего сожаления непусто.*

- *Множество решений наименьшего сожаления замкнуто относительно слабой сходимости.*

- *Множество решений наименьшего сожаления совпадает с замыканием множества классических решений, если последнее не пусто.*

О периодической задаче для случайных функционально-дифференциальных уравнений[4]

Гетманова Е. Н. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный педагогический университет
ekaterina_getmanova@bk.ru

Определение 1. *Отображение $f\colon \Omega \times X \to Y$ называется случайным оператором, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ – наименьшая σ-алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$ и $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ обозначает борелевскую σ-алгебру на X. Если, кроме того, $f(\omega,\cdot)\colon X \to Y$ непрерывно для всех $\omega \in \Omega$, то f называется случайным c-оператором.*

Для $\tau > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-\tau,0] \to \mathbb{R}^n$ и пусть $I = [0,T]$, $T > 0$. Для функции $x(\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau,0]$. Обозначим C_T пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с обычной нормой. Через $\|x\|_2$ обозначается норма функции x в пространстве L^2.

Будем рассматривать периодическую задачу для случайного функционально-дифференциального уравнения следующего вида:

$$x'(\omega,t) = f\big(\omega,t,x_t\big), \tag{1}$$

$$x(\omega,0) = x(\omega,T), \tag{2}$$

для всех $\omega \in \Omega$, где $f\colon \Omega \times I \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:
(f_T) для каждого $\omega \in \Omega$ пусть $f(\omega,t+T,\phi) = f(\omega,t,\phi)$ для всех $\phi \in \mathcal{C}$ и п.в. $t \in I$;
(f_1) $f\colon \Omega \times I \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ – случайный c-оператор;
(f_2) существует отображение $c : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ такое, что $c(\omega,\cdot)$ – локально интегрируемо на $\mathbb{R}$ для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot,t)$ – измеримо п.в. $t \in I$, и $\|f(\omega,t,\phi)\| \le c(\omega,t)(1+|\phi|)$.

Под *случайным решением* задачи (1), (2) понимается функция $\xi\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ такая, что (i) оператор $\omega \in \Omega \to \xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ измерим; (ii) для каждого $\omega \in \Omega$ абсолютно непрерывная функция $\xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1), (2).

Определение 2. *Отображаение $V\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется случайным потенциалом, если выполняются следующие условия: (i) $V(\cdot,z)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – измеримо для каждого $z \in \mathbb{R}^n$; (ii) $V(\omega,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – это C^1-отображение для любого $\omega \in \Omega$.*

Определение 3. *Отображение V называется случайным невырожденным потенциалом, если найдется $r_0 > 0$ такое, что $\nabla V(\omega,x) \ne 0$ для всех $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \ge r_o$*

Из определения 3 следует, что для фиксированного $\omega \in \Omega$ топологическая степень $\deg(\nabla V(\omega,\cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0,r))$ корректно определена для всех $r \ge r_0$ и совпадает с $\deg(\nabla V(\omega,\cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0,r_0))$. Напомним тогда, что случайная топологическая степень отображения ∇V по определению есть величина $D(\nabla(\omega,x), B_{\mathbb{R}^n}(0,r_0)) := \{\deg(\nabla(\omega,\cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0,r_0)) | \omega \in \Omega\}$ (см., напр., [2]).

Определение 5.(ср., [1-3]) *Случайный потенциал $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется случайной строгой интегральной направляющей функцией задачи (1), (2), если найдется $N > 0$ такой, что*

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega,x(s)), f(\omega,s,x_s)\rangle ds > 0,$$

где $\omega \in \Omega$, $x \in C(I,\mathbb{R}^n)$, $\|x\|_2 \ge N$ и $\|x'(\omega,t)\| \le \|f(\omega,t,x_t)\|$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$.

Теорема 1. *Пусть $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – случайная строгая интегральная направляющая функция задачи (1), (2) такая, что*

$$D(\nabla V(\omega,x(s)), \overline{B}_N) \ne 0,$$

где $\omega \in \Omega$, $B_N \subset \mathbb{R}^n$ – шар радиуса N с центром в 0. Тогда задача (1), (2) имеет случайное решение.

[4]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZGF-0640-2020-0009) и РФФИ (проект № 20-51-15003 НЦНИ_а).

Литература

[1] Звягин В. Г., Корнев С. В. Метод направляющих функций и его модификации. URSS, Москва, 2018.

[2] Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions // Topol. Meth. Nonl. Anal., 2012. P. 337–358.

[3] Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations // Proc. Amer. Math. Soc., 1987. Vol. 99. № 1. P. 79–85.

Моделирование субоптимальной парковки робота с прицепом

Губанов И. С. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
igubanov95@gmail.com

В данной работе рассматривается кинематическая модель колесного робота с прицепом, двигающегося по однородной плоскости (ровной горизонтальной поверхности без препятствий) [1].

Конфигурационное пространство возможных положений робота с прицепом задаётся множеством

$$SE(2) \times S^1_\varphi = \{q = (x, y, \theta, \varphi) | (x, y) \in \mathbb{R}^2; \theta, \varphi \in S^1\},$$

где (x, y) – положение центра ведущего моста, угол θ задаёт направление движения приводных колёс, а φ определяет ориентацию прицепа относительно робота.

Задача парковки робота с прицепом описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t) \cos \theta(t), \\ \dot{y}(t) = u_1(t) \sin \theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = u_2(t), \\ \dot{\varphi}(t) = -u_1(t) \frac{\sin \varphi(t)}{l_t} - u_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0), \qquad q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1, \varphi_1), \tag{2}$$

где управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ соответствуют линейной и угловой скорости, конечное время T свободно, а l_t есть расстояние между роботом и прицепом.

Для решения задачи (1)-(2) предлагается использовать в некотором смысле оптимальные и субоптимальные классы управлений. А именно, парковка осуществляется в два этапа.

Первый этап задачи подразумевает оптимальную парковку робота с прицепом в некоторое промежуточное положение $\hat{q}_1 = (x_1, y_1, \theta_1, \hat{\varphi})$ с произвольным значением угла прицепа $\hat{\varphi}$. Оптимальность рассматривается в четырёх смыслах согласно следующим задачам оптимального управления для робота: задача Маркова-Дубинса [2], задача Ридеа-Шеппа [3], задача Эйлера об эластиках [4] и субриманова задача на группе $SE(2)$ [5].

Второй этап отвечает за перепарковку самого прицепа, т.е. за парковку робота с прицепом из положения $\hat{q}_1$ в положение q_1, с помощью метода нильпотентной аппроксимации [6].

В докладе будет представлен программный интерфейс в системе Wolfram Mathematica, реализующий предложенный двухэтапный подход для парковки компьютерной модели робота с прицепом согласно решению одной из четырёх задач оптимального управления роботом. Интерфейс позволяет анализировать и сравнивать полученные решения между собой и определять наиболее выгодные из них.

Литература

[1] Ardentov A. A., Gubanov I. S. Modelling of optimal parking for a wheeled robot // 2021 International Conference "Nonlinearitv, Information and Robotics" (NIR). 2021,

[2] Dubins L. E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Journal of Math. 1957. Vol. 79. No. 3. P. 497-516.

[3] Reeds J. A., Shepp L. A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards // Pacific J. Math. 1990. Vol. 145. No. 2. P. 367-393.

[4] Sachkov Yu. L., Sachkova E. F. Exponential mapping in Euler's elastic problem // Journal of Dynamical and Control Systems. 2014. Vol. 20. P. 443-464.

[5] Sachkov Yu. L. Cut Locus and Optimal Synthesis in the Sub-Riemannian Problem on the Group Of Motions of a Plane // ESAIM: COCV. 2011. Vol. 17. P. 293-321.

[6] Ардентов А. А., Маштаков А. П. Управление мобильным роботом с прицепом на основе нильпотентной аппроксимации // Автомат. и телемех. 2021. №1. С. 95-118.

Периодические решения предельного обобщённого уравнения Мэки-Гласса с несколькими запаздываниями

Зеленова В. К. (Россия, Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Центр интегрируемых систем
verzelenowa12@gmail.com

Данная задача продолжает работу [1], посвященную генераторам Мэки–Гласса. Генератором Мэки–Гласса принято называть [2, 3] электрический генератор, функционирование которого описывается уравнением Мэки–Гласса [4]:

$$\frac{dV}{dt} = -bV + \frac{acV(t-\tau)}{1+(cV(t-\tau))^{\gamma}}.$$

Здесь $V(t)$ — это функция напряжения, $a > 0$ — уровень насыщения нелинейности, $b > 0$ — RC-постоянная, $\tau > 0$ — запаздывание по времени, параметр $\gamma > 0$ определяет форму нелинейной функции, $c > 0$ — сила обратной связи.

Назовем обобщенным уравнением Мэки–Гласса:

$$\frac{dV}{dt} = -bV + \frac{ac\big(V(t-\tau)+\sum_{k=1}^{m} V(t-r_k)\big)}{1+\big(c\big(V(t-\tau)+\sum_{k=1}^{m} V(t-r_k)\big)\big)^{\gamma}}.$$

Здесь добавлены еще m запаздываний $r_k > 0$.

С помощью перенормировки уменьшим количество параметров в уравнении. Введем неизвестную функцию $u(t)$ такую, что $V(t) = c^{-1}u(\frac{t}{\tau})$, и параметры $\beta = b\tau$, $\alpha = a$, $d_k = \frac{r_k}{\tau}$, перенормируем время $t \mapsto \frac{t}{\tau}$. Устремим параметр γ к бесконечности, получим следующее предельное уравнение:

$$\dot{u} = -\beta u + \alpha w(t) \cdot F(w(t)), \tag{1}$$

где $w(t) = u(t-1) + \sum_{k=1}^{m} u(t-d_k)$, а

$$F(w) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\gamma\to+\infty} \frac{1}{1+w^{\gamma}} = \begin{cases} 1, & 0 < w < 1 \\ \frac{1}{2}, & w = 1, \\ 0, & w > 1. \end{cases}$$

В работе отыскиваются периодические решения уравнения (1). Доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть параметры d_k имеют вид $h + k\Delta$, $k = 1, \dots, m$. Тогда существует область параметров α, h, β и такие Δ, u_0, что уравнение (1) имеет периодическое решение:*

$$u_*(t) = \begin{cases} u_0 e^{-\beta t} & \text{при } t \in [0, t_0], \\ e^{-\beta(t-t_0)}(\alpha(t-t_0) + \frac{1}{A}) & \text{при } t \in [t_0, t_0+h+\Delta], \\ e^{-\beta(t-t_0)}\Big(\frac{\alpha^2 e^{\beta(h+\Delta)}}{2}(t-h-\Delta-t_0)^2 + \alpha(t-t_0) + \frac{1}{A}\Big) & \text{при } t \in [t_0+h+\Delta, t_1], \\ \tilde{u} e^{-\beta(t-t_1)} & \text{при } t \in [t_1, T_0], \end{cases}$$

$$u_*(t+T_0) = u_*(t),$$

где

$$A = e^{\beta} + \sum_{k=1}^{m} e^{\beta(h+k\Delta)}, \ t_0 = \frac{1}{\beta}\ln(Au_0),$$

$$t_1 \text{— } \textit{корень уравнения: } e^{\beta(h+\Delta)}\alpha(t-h-\Delta-t_0)+1 = e^{\beta(t-t_0)},$$

$$T_0 = \frac{1}{\beta}\ln\left(\tilde{u}A\right) + t_1 - t_0,$$

$$\tilde{u} = e^{-\beta(t_1-t_0)}\Big(\frac{\alpha^2 e^{\beta(h+\Delta)}}{2}(t_1-h-\Delta-t_0)^2 + \alpha(t_1-t_0) + \frac{1}{A}\Big).$$

Литература

[1] Преображенская М. М. Релейная модель Мэки–Гласса с двумя запаздываниями // ТМФ. 2020. Т. 203, № 1. С. 106–118.

[2] Sano S., Uchida A., Yoshimori S., and Roy R. Dual synchronization of chaos in Mackey-Glass electronic circuits with time-delayed feedback // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 016207.

[3] Tateno M. and Uchida A. Nonlinear dynamics and chaos synchronization in Mackey-Glass electronic circuits with multiple time-delayed feedback // Nonlinear Theory Appl., IEICE. 2012. V. 3, No. 2. P. 155–164.

[4] Mackey M. C. and Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. V. 197, No. 4300. P. 287–289.

Кусочно-гладкие решения одной краевой задачи специального вида

Костерин Д. С. (Россия, Ярославль)
ЯрГУ им. П. Г. Демидова
kosterin.dim@mail.ru

Рассматривается система уравнений

$$\frac{du}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u,u) + F_3(u,u,u) + \varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)dx, \tag{1}$$

где $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^n$, A_0, A_1, D_0 — $n \times n$ матрицы, $F_2(*,*), F_3(*,*,*)$ — линейные по каждому аргументу вектор-функции, ε — малый положительный параметр.

Система (1) рассматривается с периодическим краевым условием

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t,x). \tag{2}$$

Будем считать, что матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение, все остальные собственные значения имеют отрицательную вещественную часть. Эта ситуация является критическим случаем в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (1)–(2).

В работе исследуется поведение решений рассматриваемой краевой задачи в достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия. В этом случае динамика решений описывается одномерной краевой задачей, называемой квазинормальной формой. Рассмотрены решения квазинормальных форм и вопрос об устойчивости этих решений.

В работах [1], [2] были рассмотрены некоторые задачи, связанные с построением таких квазинормальных форм. В настоящей работе используется схожая методика построения и анализа квазинормальных форм.

Решение краевой задачи (1)–(2) будем искать в виде асимптотического ряда

$$u(t,x)=\varepsilon\xi(\tau,x)a+\varepsilon^2u_{20}\xi^2(\tau,x)+\ldots,\quad \tau=\varepsilon t.$$

Подставив его в (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим при ε^2 краевую задачу для определения неизвестной функции $\xi(\tau,x)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\lambda\xi+\delta\xi^2+\gamma_0M(\xi),\ \xi(\tau,x+2\pi)\equiv\xi(\tau,x). \tag{3}$$

С помощью нормировок времени и функции ξ можно получитьб $\lambda=1$, $\delta=-1$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Краевая задача (3) имеет однородные состояния равновесия $\xi_0=0$ и $\xi_1=1+\gamma$. Состояние равновесия ξ_1 является асимптотически устойчивым, если $\gamma>-1$.*

Теорема 2. *Краевая задача (3) имеет однопараметрическое семейство кусочно-постоянных решений вида*

$$\xi(\tau,x)=\begin{cases}\rho, & x\in[0,\alpha),\\ 1-\rho, & x\in[\alpha,2\pi),\end{cases}$$

где ρ — решение уравнения

$$\rho^2-\left(1+\frac{\gamma(\alpha-\pi)}{\pi}\right)\rho-\frac{\gamma(2\pi-\alpha)}{2\pi}=0.$$

Решения этого семейства являются неустойчивыми при любых α и γ.

В случае, если в (3) $\delta=0$, решение краевой задачи (1)–(2) ищем в виде асимптотического ряда

$$u(t,x)=\varepsilon^{1/2}\xi(\tau,x)a+\varepsilon u_{20}\xi^2(\tau,x)+\varepsilon^{3/2})u_{30}\xi^3(\tau,x+\ldots,\quad \tau=\varepsilon t.$$

В этом случае квазинормальная форма имеет вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\lambda\xi+\delta_1\xi^3+\gamma M(\xi),\ \xi(\tau,x+2\pi)\equiv\xi(\tau,x). \tag{4}$$

Можно считать, что $\lambda=1$, $\delta_1=-1$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 3. *Краевая задача (4) имеет два ненулевых однородных состояния равновесия $\xi_1=\sqrt{1+\gamma}$ и $\xi_2=-\sqrt{1+\gamma}$, которые являются асимптотически устойчивыми при $\gamma>-\frac{2}{3}$.*

Теорема 4. *Краевая задача (4) имеет семейство кусочно-постоянных решений вида*

$$\xi(\tau,x)=\begin{cases}\rho_1, & x\in[0,\alpha),\\ \rho_2, & x\in[\alpha,2\pi),\end{cases}$$

где ρ_1, ρ_2, α — решение алгебраической системы

$$\rho_j-\rho_j^3+\frac{\gamma}{2\pi}[\rho_1\alpha+(2\pi-\alpha)\rho_2]=0,\ j=1,2.$$

Решение такого вида является устойчивым, если

$$\rho_j^2>\frac{1}{3},\ j=1,2,$$
$$2-3(\rho_1^2+\rho_2^2)+\gamma<0,$$
$$(1-3\rho_1^2)(1-3\rho_2^2)+\gamma-3\left[\rho_1^2\gamma+\frac{\gamma\alpha}{2\pi}(\rho_2^2-\rho_1^2)\right]>0.$$

Литература

[1] Кащенко С. А., Григорьева Е. В. Медленные и быстрые колебания в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Доклады Академии наук. 2019. т. 484, № 1, с. 21–25.

[2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Бегущие волны в полносвязных сетях нелинейных осцилляторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, No 1. С. 71–89.

Об одной модели электрической активности головного мозга

Ланина А. С. (Россия, Тамбов)
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
lanina.anastasiia5@mail.ru

Плужникова Е. А. (Россия, Тамбов)
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
pluznikova_ elena@mail.ru

Структурно-функциональной единицей головного мозга является нейрон. Это электрически возбудимая клетка, состоящая из сомы, дендритов и аксона. Дендриты проводят к телу нейрона электрические импульсы, полученные от других нейронов (с помощью химического и электрического взаимодействия с ними). Сома служит для формирования и распространения электрического потенциала, который впоследствии по аксону передается другим нейронам [1, с. 222–224].

Рассмотрим сетевую модель J.J. Hopfield электрической активности головного мозга (см., например [2]). Обозначим через $v_i(t)$ состояние уровня электрической активности нейрона i в момент времени t; w_{ji} — силу связи нейрона j с нейроном i; $I_i(t)$ – внешнее воздействие, оказываемое на нейрон i. Отметим, что $v_i(t) \geqslant 0$ и $w_{jj} = 0$. Предположим, что для любого «одиночного нейрона» скорость изменения уровня электрической активности пропорциональна с некоторым коэффициентом $-\alpha$, $\alpha > 0$, уровню его электрической активности. Пусть известна функция $f : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$, устанавливающая связь активации нейрона с уровнем его электрической активности. Следуя [3], зададим «функцию активации» f соотношением

$$f(v) = \begin{cases} 0, & v < v_0, \\ \tau^{-1}v - b, & v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \tau, \\ 1, & v > \tau, \end{cases}$$

где v_0 – некоторое пороговое значение, начиная с которого нейрон переходит в состояние активности, параметр $\tau > 0$ характеризует скорость этого перехода, $b = \tau^{-1}v_0$. В перечисленных предположениях модель электрической активности головного мозга принимает вид системы дифференциальных уравнений

$$\dot{v_i} = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Пусть известно начальное состояние каждого из n нейронов сети

$$v_i(0) = v_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для любого* $T > 0$ *система дифференциальных уравнений* (1) *с начальными условиями* (2) *имеет единственное определенное на отрезке* $[0, T]$ *решение* $(v_1, \ldots, v_n)$, *причем, если* $v_i^0 \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, *то* $v_i(t) \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [0, T]$.

Доказательство следует из того, что функция $f(v_j)$ удовлетворяет условию Липшица с константой τ^{-1}, и поэтому функции $F_i(v_1, \cdots, v_n) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f(v_j)$, $i = \overline{1, n}$, определяющие правые части системы (1), являются липшицевыми с константой $n \max\{\alpha, \tau^{-1} \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} w_{ji}\}$.

В докладе также рассматривается вопрос о зависимости решения задачи Коши (1), (2) от параметра $\tau > 0$. В частности показано, что для любой убывающей сходящейся к 0 последовательности $\{\tau_k\}$ последовательность решений возрастает и равномерно на $[0, T]$

сходится к решению, соответствующему параметру $\tau = 0$. Отметим, что в этом предельном случае правые части дифференциальных уравнений в (1) не являются непрерывными, и поэтому для исследования системы (1) не применимы результаты классической теории дифференциальных уравнений. Мы используем теоремы о неподвижных точках монотонных операторов. С этой целью задачу (1), (2) записываем в виде эквивалентного интегрального уравнения и показываем, что оно удовлетворяет предположениям этих теорем.

Литература

[1] Быков В. Л. Цитология и общая гистология. СПб.: Сотис, 2002.

[2] Van den Driesche P., Zou X. Global attractivity in delayed Hopfield neural network models // SIAM J. Appl. Math. 1998. Vol. 58. P. 1878–1890.

[3] Бурлаков Е. О., Насонкина М. А. О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. №121. С. 17–30.

Компьютерное моделирование элементов зрения человека на основе методов оптимального управления[5]

Маштаков А. П. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
alexey.mashtakov@gmail.com

В докладе будет рассказано о том, как задачи оптимального управления возникают при моделировании зрительной системы человека, и как такие модели используются при создании современных алгоритмов обработки изображений. В работах Дж. Петито [1], Дж. Читти и А. Сарти [2] было показано, что субримановы кратчайшие являются кривыми, порождаемыми механизмом первичной зрительной коры V1 мозга человека при восстановлении скрытых от наблюдения контуров. В основе этой модели лежит принцип минимизации энергии возбуждения нейронов V1. Недостаток этой модели состоит в том, что получаемая кривая зависит лишь от граничных условий, а не от всего изображения. Естественным уточнением является адаптация метрики к исходному изображению. Такая адаптация происходит путем выбора функции внешней стоимости – конформного множителя в метрике. В докладе будут показаны преимущества такого уточнения: 1) усовершенствованная модель V1 учитывает структуру всего видимого изображения; 2) оно приводит к эффективным алгоритмам извлечения информации из цифровых изображений.

В докладе будут объяснены основные модельные задачи оптимального управления и показано, как на их основе создаются алгоритмы обработки изображений. Будут рассмотрены несколько конкретных примеров обработки медицинских изображений: поиск кровеносных сосудов на плоских и сферических изображениях сетчатки глаза человека; отслеживание нервных волокон на изображениях МРТ человеческого мозга. После этого будет показано, как с помощью выбора подходящей функции внешней стоимости могут быть объяснены и смоделированы некоторые зрительные иллюзии. Доклад основан на серии совместных работ [3]-[7].

Литература

[1] Petitot J. The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure // Journal Physiology – Paris. 2003. V. 97. № 2–3. P. 265–309.

[2] Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // Journal of Mathematical Imaging and Vision. 2006. V. 24. № 3. P. 307–326.

[3] Bekkers E., Duits R., Mashtakov A., Sanguinetti G. A PDE approach to data-driven sub-Riemannian geodesics in SE(2) // SIAM Journal on Imaging Sciences. 2015. V. 8, № 4. P. 2740–2770.

[5]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00877, https://rscf.ru/project/22-21-00877/) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

[4] Duits R., Ghosh A., Dela Haije T., Mashtakov A. On sub-Riemannian geodesics in SE(3) whose spatial projections do not have cusps // Journal of Dynamical and Control Systems. 2016. V. 22. № 4. P. 771–805.

[5] Mashtakov A. P., Popov A. Yu. Extremal controls in the sub-Riemannian problem on the group of motions of Euclidean space // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22. № 8. P. 952–957.

[6] Mashtakov A., Duits R., Sachkov Yu., Bekkers E., Beschastnyi I. Tracking of lines in spherical images via sub-Riemannian geodesics on SO(3) // Journal of Mathematical Imaging and Vision. 2017. V. 58. № 2. P. 239–264.

[7] Franceschiello B., Mashtakov A., Citti G., Sarti A. Geometrical optical illusion via sub-Riemannian geodesics in the roto-translation Group //Differential Geometry and its Applications. 2019. V. 65. P. 55–77.

О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра на полуоси[6]

Петросян А. С. (Армения, Ереван)
Национальный аграрный университет Армении
haykuhi25@mail.ru

Доклад посвящен вопросу построения нетривиального ограниченного решения и изучению асимптотического поведения решения для одного класса интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра с монотонной и выпуклой нелинейностью на полуоси. Указанный класс уравнений встречается в кинетической теории газов (при изученни уравнения Больцмана в рамках модифицированной БГК модели). Будут сформулированы и доказаны конструктивные теоремы существования и единственности ограничнного нетривиального решения. В конце доклада приведем конкретные частные примеры прикладного характера.

О разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка большего единицы[7]

Петросян Г. Г. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет инженерных технологий
Воронежский государственный педагогический университет
garikpetrosyan@yandex.ru

В последние десятилетия большую популярность получило исследование в банаховых пространствах краевых задач для дифференциальных уравнений и включений дробного порядка (см., например, работы [1],[8]). Одними из наилучших методов исследования такого рода задач представляются методы нелинейного анализа (см. статьи [2]-[7]). В настоящей работе рассматривается разрешимость следующих типов краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховом пространстве E.

1. Краевая задача для полулинейных дифференциальных уравнений дробного порядка $q \in (1, 2)$ вида

$$^{C}D_0^q x(t) = \lambda x(t) + f(t, x(t)),\ t \in [0, T],$$

с периодическим граничным условием

$$x(0) = x(T),\ x'(0) = x'(T),$$

[6]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

[7]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства просвещения РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009) и РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

или антипериодическим условием

$$x(0) = -x(T),\ x'(0) = -x'(T).$$

2. Краевая задача для дифференциальных уравнений с дробными производными порядка $\alpha \in (1,2], \beta \in [0,1]$ типа Ланжевена:

$$^C D_0^\beta [(^C D_0^\alpha + \lambda)x(t)] = f(t, x(t)),\ t \in [0,T],$$
$$x(0) = x(T),\ x(\tau) = \xi,\ x'(0) = x'(T).$$

Здесь $^C D_0^\delta$ обозначает дробную производную Капуто порядка δ, число $\lambda > 0$, $f : [0,T] \times E \to E$ – нелинейное отображение типа Каратеодори. Число $\tau \in [0,T]$ фиксировано, так же как и элемент $\xi \in E$. Для каждой из вышеописанных краевых задач устанавливаются условия существования решений.

Литература

[1] Афанасова М. С., Обуховский В. В., Петросян Г. Г. Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. № 2. С. 167–185.

[2] Ахмеров Р. Р., Каменский М. И. Ко второй теореме Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 537–540.

[3] Каменский М. И., Макаренков О. Ю., Нистри П. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388. № 4. С. 439–442.

[4] Каменский М. И., Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети // Доклады Академии наук. 1999. Т. 368. № 2. С. 157–159.

[5] Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2011. Vol. 23. P. 425–435.

[6] Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces // Nonlinear Analysis. 1993. Vol. 20. P. 781–792.

[7] Kamenskii M. I., Nistri P., Zecca P., Obukhovskii V.V. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation // Journal of Optimization Theory and Applications. 1994. Vol. 82. P. 503–517.

[8] Kamenskii M. I., Petrosyan G. G., Wen C.-F. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2021. Vol. 5. № 1. P. 155 – 177.

Моделирование движения транспортного потока

Погребняк М. А. (Россия, Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
pogrebnyakmaksim@mail.ru

В работе строится новая математическая модель движения транспортного потока, которая описывает движение $N \in \mathbb{N}$ автомобилей. За $x_n(t)$ обозначено положение транспортного средства в момент времени t, тогда $\dot{x}_n(t)$ и $\ddot{x}_n(t)$ его скорость и ускорение соответственно. Все автомобили считаются материальными точками, поэтому их внутренняя структура и внешние габариты не учитываются.

В ходе работы была построена математическая модель движения транспортного потока, которая имеет вид системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_n(t) = R_n \left[a_n \left(\dfrac{v_{max,n} - \dot{x}_{n-1}(t-\tau)}{1 + e^{k_n}(x_n(t) - x_{n-1}(t-\tau) + s_m)} + \dot{x}_{n-1}(t-\tau) - \dot{x}_n(t) \right) \right] + \\ \qquad + (1 - R_n) \left[q_n \left(\dfrac{\dot{x}_n(t)[\dot{x}_{n-1}(t-\tau) - \dot{x}_n(t)]}{x_{n-1}(t-\tau) - x_n(t) - l_{n,\varepsilon}} \right) \right], \\ x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{при } t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta x_n(t,\tau) = x_{n-1}(t-\tau) - x_n(t)$ – расстояние между соседними автомобилями; τ – время реакции водителя; $a_n > 0$ и $q_n > 0$ – коэффициенты, описывающие технические характеристики автомобиля, отвечающие за интенсивность его разгона и торможения соответственно; $v_{max} > 0$ – максимальная желаемая скорость; $l_{(n,\varepsilon)} > 0$ – безопасное расстояние вида $l_{(n,\varepsilon)} = l_n - \varepsilon$, где ε – добавка, служащая для предотвращения торможения автомобиля с неограниченной скоростью при $\Delta x_n(t,\tau)$ достаточно близком к l_n; $k_n > 0$ и $s_n > 0$ – параметры, описывающие поведение водителя: k_n показывает насколько плавно водитель преследующего автомобиля подстраивает свою скорость под впереди идущий, а s_n отражает расстояние, начиная с которого влияние впереди идущего автомобиля перестает превалировать; λ_n – начальное положение автомобиля; v_n – начальная скорость автомобиля, а R_n – релейная функция вида

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n(t,\tau) > \dfrac{\dot{x}_n^2(t)}{2\mu g} + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n(t,\tau) \le \dfrac{\dot{x}_n^2(t)}{2\mu g} + l_n, \end{cases}$$

где μ – коэффициент трения, а g – ускорение свободного падения. Функция R_n описывает переключение “разгон-торможение”.

Полученная дифференциально-разностная модель описывает каждый автомобиль потока, кроме первого. Для его описания модель необходимо дополнить: доопределить значения $x_0(t)$ и $\dot{x}_0(t)$. В качестве $x_0(t)$ берётся расстояние, которое должен проехать автомобиль, например, это может быть расстояние до светофора или иного препятствия $x_0(t) = L$. За $\dot{x}_0(t)$ в первом слагаемом берётся максимальная желаемая скорость $\dot{x}_0(t) = v_{max}$, а во втором – скорость, до которой первому водителю необходимо сбросить свою текущую скорость $\dot{x}_0(t) = v_{min,0}$.

Для модели (1) на основе физических законов, действующего законодательства Российской Федерации и логических соображений были определены значения и единицы измерения параметров.

Для модели был проведён анализ устойчивости равномерного режима движения, при котором все автомобили двигаются с одинаковой скоростью v_{max} на расстояниях $\Delta c_n = c_n - c_{n-1}$ друг от друга, где c_n – убывающая последовательность. Устойчивость такого решения зависит от знаков выражений: $d_n = -\tau v_{max} + c_n - c_{n-1} - l_{n,\varepsilon}$. Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Если для любого n выполняется неравенство $d_n > 0$, то равномерный режим устойчив. Если хотя бы при одном каком-то i выполняется неравенство $d_i \le 0$, то равномерный режим неустойчив.*

Из теоремы следует, что если все автомобили потока двигаются на довольно большом расстоянии друг от друга, то такой режим движения устойчив. Устойчивость теряется при увеличении скорости $v_{max,n}$, времени реакции водителя τ, безопасного расстояния между автомобилями l_n или при сокращении расстояния между двумя соседними автомобилями Δc_n.

Модель (1) также исследовалась численно. Результаты моделирования совпали с данными, полученными в ходе наблюдения за реальными транспортными потоками.

Об обобщенной случайной направляющей функции в периодической задаче для случайных дифференциальных уравнений

Родных С. С. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный педагогический университет
sony.rodnikh2015@gmail.com

В работе представлен новый метод исследования периодической задачи для случайных дифференциальных уравнений на основе понятия обобщенной случайной направляющей функции. Некоторые другие подходы к исследованию вынужденных колебаний динамических систем, описываемых различными классами дифференциальных уравнений и включений представлены в [1-7].

Пусть (Ω, Σ, μ) — полное вероятностное пространство и $I = [0, T]$. Рассмотрим периодическую задачу для случайного дифференциального уравнения следующего вида:

$$z'(\omega, t) = f(\omega, t, z(\omega, t)), \quad \text{для п.в.} \quad t \in I \tag{1}$$

$$z(\omega, 0) = z(\omega, T) \tag{2}$$

в предположении, что отображение $f : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет указанным ниже условиям (см., например, [6]):

f_1) $f : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является случайным c-оператором;

f_T) $f(\omega, t, z) = f(\omega, t + T, z)$, для всех $t \in I$, $\omega \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Под случайным решением понимаем функцию $\varsigma : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ такую, что i) отображение $\omega \in \Omega \to \varsigma(\omega, \cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ является измеримым; ii) для каждого $\omega \in \Omega$ функция $\varsigma(\omega, \cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет (1),(2) для всех $t \in I$.*

Определение 2. *Отображение $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется случайным потенциалом, если выполняются следующие условия: i) $V(\cdot, z) : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримо для каждого $z \in \mathbb{R}^n$; ii) $V(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является C^1-отображением для каждого $\omega \in \Omega$.*

Определение 3. *Случайный потенциал $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется обобщенной случайной направляющей функцией для уравнения (1), если существует $R > 0$ такой, что для всех $\omega \in \Omega$ из $z \in \mathbb{R}^n$, где $\|z\| \geq R$, следует что*

$$\langle \nabla V(\omega, z), f(\omega, t, z) \rangle \geq 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для уравнения (1) может быть указана обобщенная случайная направляющая функция, для которой выполнено условие коэрцитивности:*

$$\lim_{\|z\| \to \infty} V(\omega, z) = -\infty, \quad \omega \in \Omega.$$

Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно случайное решение.

Литература

[1] Звягин В. Г., Корнев С. В. Метод направляющих функций и его модификации. М.: Ленанд. 2018.

[2] Корнев С. В. Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 9. С. 31–43.

[3] Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1966.

[4] Kornev S. V., Liou Y.-C., Loi N. V., Obukhovski V. V. On periodic solutions of random differential inclusions // Applied Analysis and Optimization. 2017. V. 1. Issue. 2. P. 245–258.

[5] Kornev S. V., Obukhovski V. V., Zecca P. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators // Applicable Analysis. 2017. V. 96. Issue 3. P. 418–428.

[6] Kornev S. V., Obukhovski V. V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations // Journal od Dynamics and Differential Equations. 2019. № 31. P.1017–1028.

[7] Kornev S. V., Obukhovski V. V., Yao J.-C. Random integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions with causal multioperators // Journal of Differential Equations. 2020. V. 268. Issue 10. P. 5792–5810.

Один метод исследования задач управления для неявных дифференциальных уравнений

Серова И. Д. (Россия, Тамбов)
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
irinka_36@mail.ru

Некоторые задачи механики приводят к необходимости исследования управляемых систем, динамика которых описывается неявными (не разрешенными относительно старшей производной) дифференциальными уравнениями. В случае, если уравнения порождены гладкими функциями, такие системы управления исследовались геометрическими методами (см. [1]). Здесь рассматривается ситуация, когда соответствующие функции не являются гладкими и непрерывными, а лишь суперпозиционно измеримы. В этом случае управляемая система может быть сведена к неявному дифференциальному включению. Результаты [2] о таких включениях позволяют исследовать свойства соответствующей системы управления. Здесь мы сформулируем только утверждение, устанавливающее связь управляемой системы и неявного дифференциального включения — аналог хорошо известного утверждения (см. [3]) об управляемых системах для "явных" дифференциальных уравнений.

Пусть заданы вектор $A \in \mathbb{R}^n$, функция $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ и многозначное отображение $U : I \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, где $I = [t_0, T]$. Рассмотрим управляемую систему

$$f(t, x, \dot{x}, u) = 0, \tag{1}$$

$$u \in U(t, x(t)) \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(0) = A. \tag{3}$$

Под *решением системы* (1), (2) подразумеваем пару (x, u), где функция $x : I \to \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна, а функция $u : I \to \mathbb{R}^m$ измерима, удовлетворяющую при п.в. $t \in I$ обоим соотношениям (1), (2).

Наряду с управляемой системой рассмотрим дифференциальное включение

$$0 \in f(t, x, \dot{x}, U(t)) \tag{4}$$

с начальным условием (3).

Абсолютно непрерывную функцию $x : I \to \mathbb{R}^k$ называют *решением включения* (4), если $0 \in f(t, x(t), \dot{x}(t), U(t))$ при п.в. $t \in I$.

Сформулируем утверждение (аналогичное [3, Теорема 3.4.1]), позволяющее "переходить" от управляемой системы (1), (2) к дифференциальному включению (4).

Утверждение 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

- *при любых $(x, z, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $f(\cdot, x, z, u) : I \to \mathbb{R}^k$ измерима;*
- *при любых $u \in \mathbb{R}^m$ функция $f(\cdot, \cdot, \cdot, u) : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ суперпозиционно измерима (т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot), z(\cdot)$ функция $f(\cdot, x(\cdot), z(\cdot), u)$ измерима);*
- *при любых $t \in I$, $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функция $f(t, x, z, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ непрерывна;*
- *отображение $U : I \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ имеет компактные значения и измеримо.*

Тогда управляемая система (1), (2) *равносильна включению* (4), *т.е. если (x, u) — решение управляемой системы* (1), (2), *то x является решением включения* (4), *и обратно, если x — решение включения* (4), *то существует функция u такая, что пара (x, u) является решением системы* (1), (2).

Доказательство этого утверждения прямо следует из леммы Филиппова об измеримом выборе (см. [3, Теорема 1.5.15]).

На основании этого утверждения в докладе получено утверждение о двусторонних оценках решений управляемой системы (1), (2), (3).

Литература

[1] Давыдов А. А., Структурная устойчивость управляемых систем на ориентируемых поверхностях // Матем. сб. 1991. Т. 182, №1, С. 3–35.

[2] Zhukovskiy E. S., Serova I. D., Panasenko E. A., Burlakov E. O., On Order Covering Set-Valued Mappings and Their Applications to the Investigation of Implicit Differential Inclusions and Dynamic Models of Economic Processes // Advances in Systems Science and Applications. 2022. Vol. 22. No 1. (in print).

[3] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В., Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд.стереотип. М.: Книжный дом "ЛИБЕРКОМ", 2016. 224 с.

Черновские аппроксимации для параболических PDE на многообразиях

Смирнова А. С (Россия, Нижний Новгород)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
anny12075@gmail.com

В этой работе мы рассматриваем задачу Коши для параболического уравнения (типа уравнения диффузии) в римановом многообразии ограниченной геометрии. Настоящая работа посвящена выводу формулы, содержащей в качестве параметров коэффициенты уравнения и начальное условие, и дает функции, аппроксимирующие решение задачи Коши в L_p-норме. В этой работе мы обобщаем область применимости формул на пространство L_p: решения принадлежат $L_p(M)$, а аппроксимации сходятся в $L_p(M)$. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова.

О каузальном функциональном включении типа Хейла дробного порядка с нелинейным граничным условием[8]

Сорока М. С. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный педагогический университет
marya.afanasowa@yandex.ru

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря приложениям в различных областях науки (см. [2]-[4], [6]-[9]). Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное J.K. Hale и J. Kato (см. [5]). Пространство $\mathcal{B}$ будет рассматриваться как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty, 0]$ со значениями в банаховом пространстве E, наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ (см. [1]).

Для любой функции $x\colon (-\infty, T] \to E$, где $T > 0$, и каждого $t \in (-\infty, T]$, x_t представляет собой функцию из $(-\infty, 0]$ в E, заданную как $x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in (-\infty, 0]$.

Банахово пространство ограниченных непрерывных функций $BC((-\infty, 0]; E)$ наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ будем обозначать $\mathcal{BC}$.

Мы будем рассматривать систему, заданную функнкциональным включением с каузальным мультиоператором $\mathcal{Q}$

$$^{C}D_0^q[y(t) - k(t, y_t)] \in Ay(t) + \mathcal{Q}(y)(t),\ t \in [0, T]$$

и нелинейным граничным условием

$$y(\tau) + g(y)(\tau) = \upsilon(\tau),\ \tau \in (-\infty, 0].$$

[8]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства просвещения РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

Здесь ${}^C D_0^q$ – дробная производная Капуто порядка $0 < q < 1$, $A : D(A) \subset E \to E$ – линейный замкнутый оператор (не обязательно ограниченный), $k : [0, T] \times \mathcal{BC} \to E$ и $\upsilon \in \mathcal{BC}$ – заданные функции, $g : C([-\infty, T]; E) \to \mathcal{BC}$ – нелинейное отображение.

При помощи методов теории дифференциальных уравнений и включений, топологические методов нелинейного и многозначного анализа, а также методов дробного анализа получены условия существования решений поставленной выше задачи.

Литература

[1] Афанасова М. С., Обуховский В. В., Петросян Г. Г. Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. № 2. С. 167–185.

[2] Каменский М. И., Макаренков О. Ю., Нистри П. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388. № 4. С. 439–442.

[3] Каменский М. И., Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети // Доклады Академии наук. 1999. Т. 368. № 2. С. 157–159.

[4] Afanasova M., Obukhovskii V., Petrosyan G. A Controllability Problem for Causal Functional Inclusions with an Infinite Delay and ImpulseConditions // Advances in Systems Science and Applications. 2021. Vol.2. № 3. P. 40-62.

[5] Hale J. K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funkc. Ekvac. 1978. Vol. 21. P. 11-41.

[6] Johnson R., Nistri P., Kamenskii M. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods // Journal of Differential Equations. 1997. Vol. 140. P. 186–208.

[7] Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces // Nonlinear Analysis. 1993. Vol. 20. P. 781–792.

[8] Kamenskii M. I., Nistri P., Zecca P., Obukhovskii V.V. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation // Journal of Optimization Theory and Applications. 1994. Vol. 82. P. 503–517.

[9] Kamenskii M. I., Petrosyan G. G., Wen C.-F. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2021. Vol. 5. № 1. P. 155 – 177.

О разрешимости периодической краевой задачи для скалярных дифференциальных уравнений с дробной из интервала (1,2) производной

Тарасова Е. С. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
ijustekaterina@gmail.com

Для краевой задачи

$$ {}^C D_0^q x(t) = \lambda x(t) + f(t),\, t \in [0, T], 1 < q < 2, \tag{1}$$

$$ x(0) = x(T), x'(0) = x'(T), \tag{2}$$

где ${}^C D_0^q$ - производная Капуто порядка q, показано существование функции Грина G(t,s), которая позволяет получить единственное решение задачи в виде

$$ x(t) = \int_0^T G(t, s) f(s) ds. \tag{2}$$

Наиболее существенным условием, обеспечивающим существование функции Грина является

$$ (1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q) \neq 0, $$

где $E_q, E_{q,0}, E_{q,2}$ - функции Миттаг-Леффлера [1].

Для нахождения численного решения данной краевой задачи на основе функции Грина была написана программа на языке Python. Результатом работы программы является массив позволяющий вычислить значение решения в момент времени t при заданных параметрах. На основе данного массива происходит построение графика решения задачи.

Литература

[1] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin, Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014.

Об оценке средней временной выгоды в вероятностной модели эксплуатируемой популяции

Черникова А. В. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет
nastik.e@bk.ru

Исследуется модель динамики популяции, заданная разностными уравнениями, зависящими от случайных параметров. При отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением

$$X(k+1) = f\big(X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $X(k)$ — размер популяции в момент времени k, $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке $I = [0, a]$, такая, что $f(I) \subseteq I$.

Предположим, что в моменты времени $k = 1, 2, \ldots$ имеется количество ресурса $X(k)$ и в эти моменты времени извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k) \in \Omega \subseteq [0, 1]$. Допускается влиять на процесс сбора так, чтобы остановить его, если доля собранного ресурса окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u(k) \in [0, 1))$ для сохранения как можно большей части популяции. Для всех $k = 1, 2, \ldots$ доля добытого ресурса равна $\ell(k) = \ell(\omega(k), u(k)) = \min\big\{\omega(k), u(k)\big\}$. Тогда модель эксплуатируемой однородной популяции имеет вид

$$X(k+1) = f\big((1 - \ell(k))X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $X(1) = f\big(x(0)\big)$, $X(k) = X\big(\ell(1), \ldots, \ell(k-1), x(0)\big)$, $k = 2, 3, \ldots$, $x(0)$ — начальная численность популяции.

Важной проблемой природосбережения является описание экологически и экономически оптимального режима сбора ресурса, подверженного стохастическим колебаниям окружающей среды. Рассмотрим функцию

$$H_*\big(\ell, x(0)\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X(k)\ell(k),$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Исследуем задачу выбора управления $\overline{u} \in U$, где $U \doteq \{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)\}$ при котором значение функции $H_*\big(\ell, x(0)\big)$ можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

Будем рассматривать вероятностную модель, которая описана в работе [1].

Если уравнение (1) имеет решение вида $X(k) \equiv const = x^*$, то это решение называется *положением равновесия* (*неподвижной точкой*) *данного уравнения*, причем $x^* = f\big(x^*\big)$.

Пусть $\overline{\ell}(k) \doteq (\ell(1), \ldots, \ell(k))$. Для любого $k = 1, 2, \ldots$ зададим рекуррентным образом случайные величины $A(k, x) = A\big(k, x, \overline{\ell}(k)\big)$, $B(k, x^*) = B\big(k, x^*, \overline{\ell}(k)\big)$

$$A(k+1, x) = f\big((1 - \ell(k))A(k, x)\big);$$
$$B(k+1, x^*) = f\big((1 - \ell(k))B(k, x^*)\big).$$

Здесь $A(1, x) = f(x)$, $B(1, x^*) = x^*$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $x^* > 0$ *является неподвижной точкой уравнения (1) и существует отрезок* $[a_1, a_2]$ *такой, что* $x^* \in [a_1, a_2]$ *и* $0 < f'(x^*) < 1$ *для всех* $x \in [a_1, a_2]$*;*

2) $F(0) < 1$.

Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$, $x \in [a_1, x^*]$ *и* $x(0) \in [a_1, a_2]$ *существует управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\big(A(k,x)\ell(k)\big) \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\big(B(k,x^*)\ell(k)\big).$$

Литература

[1] Родина Л. И. Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2018. Т. 28. № 2. С. 213–221.

Оптимальное управление гибридными системами переменной размерности

Ясько Е. Ю. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
yasko.kate@gmail.com

Рассматривается задача группового быстродействия подвижных объектов в конфликтной ситуации. Плоское движение каждого объекта описывается моделью Маркова-Дубинса [1,2]. Траектории представляют собой линии с ограниченной кривизной. Начальные состояния группы объектов управления известны. Терминальные положения всех объектов совпадают с заданной целью. Движение группы подвержено воздействию одного или нескольких противников. Каждый противник с заданной частотой уничтожает один объект из попавших в зону его действия, например, в круг заданного радиуса. Это может быть либо ближайший к цели объект группы, либо случайный. Таким образом, состав группы меняется в процессе управления. Требуется решить игровую задачу оптимального по быстродействию управления группой переменного состава, т.е. найти траектории Маркова-Дубинса одновременного достижения цели оставшимися объектами за наименьшее время.

Поставленная задача является примером планирования маршрутов плоского движения группы беспилотных летательных аппаратов [3]. Новизна задачи заключается в том, что состав группы меняется в процессе управления под воздействием противника, при этом не исключается случай полного уничтожения группы. Актуальность проблемы обусловлена потребностями практики.

Предлагается рекуррентный алгоритм решения задачи. Для заданного состава группы определяется время достижения цели наиболее удаленным объектом и планируются попадающие траектории. Наиболее удаленный движется по оптимальной траектории. Для остальных объектов строятся попадающие траектории с таким же временем достижения цели. Производится моделирование движения группы до воздействия противника. Вследствие воздействия противников состав группы меняется. Для нового состава группы повторяются те же действия. Итерации заканчивается либо уничтожением всей группы, либо достижением цели.

Программная реализация алгоритма выполнена в среде MatLab. Программа позволяет визуализировать постановку и решение задачи: изобразить начальные состояния объектов группы, зоны действия противника, оптимальные по быстродействию траектории объектов управления, а также траектории, полученные в результате моделирования с учетом действия противника. Эффективность алгоритма демонстрируется на академических примерах при разных моделях воздействия противника.

Литература

[1] Марков А. А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Сер. 2. Т. I. 1889. С. 250-276.

[2] Dubins L. E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American. Mathematics. 1957. V. 79. № 3. P. 497-516.

[3] Tsourdos A., White B., Shanmugavel M. Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. – N. Y.: Wiley&Sons, 2011. 190 p.

Научное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ»

Аннотации лекций и докладов

Суздаль
30 июня – 5 июля 2022 г.

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка Н. Коровина, А. Черниковой
Подписано в печать 20.06.2022

Подписано в печать 21.06.2022
Формат 60х84/16. Бумага офсетная 80 г/м^2. Гарнитура Таймс.
Печать лазерная. Усл. печ. лист 2,56. Заказ № 8207. Тираж 50 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО «Аркаим»
Владимир, ул. Кирова, д. 14г
Тел.: 8 (4922) 53-41-50
e-mail: print@arkprint.ru
www.arkprint.ru

http://agora.guru.ru/MOCS-2022/, diff@vlsu.ru

http://agora.guru.ru/MOCS-2022