International conference

“Ergodic Theory and Related Topics”

PROGRAM AND ABSTRACTS

Moscow, Russia
November 21–25, 2022

Organizers:

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow
Steklov International Mathematical Center, Moscow

Organizing and program committee:

Alexander I. Bufetov
Yulij Ilyashenko
Alexey Klimenko

Financial support:

The conference is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (the grant to the Steklov International Mathematical Center, agreement no. 075-15-2022-265).

Schedule

The conference meetings are held at Room 110 of the Steklov Mathematical Institute (Gubkina str., 8).

Monday, November 21

10:30–11:00	*Registration, opening*
11:00–11:40	*Grigori Olshanski* **(online)** Infinite invariant measures for infinite-dimensional groups over finite fields
11:40–12:10	**Coffee break**
12:10–12:50	*Olga Pochinka* Quasi-energy function for Pixton diffeomorphisms
12:50–15:00	**LUNCH BREAK**
15:00–15:30	*Georgii Veprev* **(online)** Scaling entropy for group actions
15:30–16:00	Posters presentation
16:00–18:00	*Welcome party* (9th floor)

Tuesday, November 22

11:00–11:40	*Khudoyor Mamayusupov* Families of holomorphic functions with critical orbit relation
11:40–12:00	**Coffee break**
12:00–12:40	*Roman Romanov* **(online)** Determinantal processes and division invariant spaces
12:45–13:15	*Tianyu Ma* Geodesic random walks and Brownian motion on Finsler manifolds
13:15–15:00	**LUNCH BREAK**
15:00–15:20	*Yuliia Petrova* On non-trivial hyperbolic sets in families of diffeomorphisms of a torus
15:25–15:55	*Alexandra Skripchenko* Bruin-Troubetzkoy family of interval translation mappings: a new glance
15:55–16:20	**Coffee break**
16:20–18:00	Posters session (1st floor)

Wednesday, November 23

All talks on Wednesday are online.

11:00–11:40	*Eugene Stepanov* **(online)** Dynamics of greedy quantization
12:00–12:20	*Irina Mamsurova* **(online)** Ergodic currents and ergodic measures of systems of isometries
12:20–13:00	*Vyacheslav Grines, Dmitrii Mints* **(online)** On the dynamics of regular Denjoy type homeomorphisms

Thursday, November 24

11:00–11:40	*Alexander Shlapunov* Subelliptic Sturm-Liouville problems in domains with non-smooth boundaries
11:40–12:00	**Coffee break**
12:00–12:30	*Stanislav Minkov* C^1-Anosov diffeomorphism with a horseshoe attracting almost all points
12:35–13:15	*Konstantin Fedorovskiy* Two stories about elliptic equations with constant complex coefficients: some analytic capacities and Dirichlet problem
13:15–15:00	**LUNCH BREAK**
15:00–15:20	*Ekaterina Chilina, Vyacheslav Grines, Olga Pochinka* **(online)** On the dynamics of 3-homeomorphisms with two-dimensional attractors and repellers
15:25–15:45	*Vyacheslav Grines, Dmitrii Mints* **(online)** On one-dimensional contracting repellers of A-endomorphisms of the torus
15:45–16:10	**Coffee break**
16:10–16:30	*Nikita Naumov* Bogoliubov-Krylov averaging in kick-force driven systems
16:35–16:55	*Andrei Dukov* Multiple limit cycles that appear after a perturbation of hyperbolic polycycles
17:00–17:30	*Chenxi Wu* **(online)** Galois conjugate of exponents of core entropies

Friday, November 25

11:00–11:40	*Valery V. Ryzhikov* Generic extensions of ergodic systems
11:40–12:10	**Coffee break**
12:10–12:40	*Andrei Alpeev* Lamplighters over non-amenable groups are not strongly Ulam-stable
12:40–14:30	**LUNCH BREAK**
14:30–15:00	*Ivan Shilin* Attractors of direct products
15:05–15:25	*Marina Nenasheva* Connected components of the Prym eigenform loci in genus 5
15:25–15:45	**Coffee break**
15:45–16:05	*Zhaofeng Lin* **(online)** Fluctuations of the process of moduli for the Ginibre and hyperbolic ensembles
16:10–16:50	*Anatoly Vershik* **(online)** New approach to the theory of central measures for the Young and Gelfand-Zetlin type graphs

Abstracts

Lamplighters over non-amenable groups are not strongly Ulam-stable

Лампочные расширения неаменабельных групп не являются сильно стабильными по Уламу

Andrei Alpeev
(Euler Mathematical Institute at St. Petersburg State University)

Группа называется сильно стабильной по Уламу, если рядом со всяким почти представлением на гильбертовом пространстве есть настоящее представление. Каждан показал в [K82], что аменабельные группы обладают таким свойством, а так же, привёл контрпримеры. Бургер, Озава и Том [BOT13] показали, опираясь на результат Ролли [R09], что всякая группа, содержащая неабелеву свободную подгруппу, не является свободной. Я покажу, что лампочные расширения неаменабельных групп не обладают свойством сильной стабильности по Уламу. По моей работе [A22].

Список литературы

[A22] A. Alpeev *Lamplighters over non-amenable groups are not strongly Ulam stable*, arXiv preprint arXiv:2009.11738 (2022).

[BOT13] M. Burger, N. Ozawa and A. Thom. *On Ulam stability.* Israel Journal of Mathematics 193.1 (2013): 109–129.

[K82] D. Kazhdan, *On ε-representation.* Israel J. Math., 43(4):315-323, 1982.

[MO09] N. Monod and N. Ozawa. *The Dixmier problem, lamplighters and Burnside groups.* Journal of Functional Analysis 258.1 (2010): 255-259.

[R09] P. Rolli, *Quasi-morphisms on free groups*, arXiv: 0911.4234v2, 2009.

[U60] S. M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*, No. 8, Interscience Publishers, New York–London, 1960

On the dynamics of 3-homeomorphisms with two-dimensional attractors and repellers

О динамике 3-гомеоморфизмов с двумерными аттракторами и репеллерами

Ekaterina Chilina, Vyacheslav Grines, Olga Pochinka
(Higher School of Economics (Nizhny Novgorod))

На замкнутых ориентируемых 3-многообразиях рассмотрим класс гомеоморфизмов $\mathcal{G}$ таких, что неблуждающее множество каждого отображения $f \in \mathcal{G}$ является конечным объединением цилиндрически вложенных поверхностей, а ограничение некоторой степени f^k на каждую из них является псевдоаносовским гомеоморфизмом.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество псевдоаносовских гомеоморфизмов и через $Z(P)$ *централизатор* отображения $P \in \mathcal{P}$, то есть $Z(P) = \{h \in Hom(S_g) : Ph = hP\}$.

Согласно [1], справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Любой гомеоморфизм $h \in Z(P)$ имеет вид $h = \iota_h p^{n_h}$, где ι_h – периодический гомеоморфизм из конечного множества $\mathcal{I}_P$, $p \in \mathcal{P}$, $n_h \in \mathbb{Z}$.

Положим $\mathcal{I} = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{I}_P$ и $\mathcal{J} = \mathcal{P} \cup \mathcal{I}$.

Теорема 1. *Многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда M^3 гомеоморфно многообразию M_J, где $J \in \mathcal{J}$.*

Рассмотрим наборы чисел n, k, l таких, что $n, k \in \mathbb{N}$, где $l = 0$, если $k = 1$, и $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ и является взаимно простым с k, если $k > 1$. Для каждого набора n, k, l определим диффеоморфизм $\varphi_{n,k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi_{n,k,l}(r) = r + \frac{1}{4\pi nk} sin(2\pi nkr) + \frac{l}{k}.$$

Для $P \in \mathcal{P}$ определим отображение $\bar{\phi}_{P,n,k,l} \colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ формулой

$$\bar{\phi}_{P,n,k,l}(z, r) = (P(z), \varphi_{n,k,l}(r)).$$

Лемма 1. *Формула $\phi_{P,J,n,k,l}(w) = \pi_J(\bar{\phi}_{P,n,k,l}(\pi_J^{-1}(w)))$, где $w \in M_J$ и $\pi_J^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M_J$, определяет гомеоморфизм $\phi_{P,J,n,k,l} : M_J \to M_J$ тогда и только тогда, когда $J \in Z(P)$.*

Назовем гомеоморфизмы вида $\phi_{P,J,n,k,l}$ *модельными.* Из Леммы 1 и Предложения 1 следует, что модельные гомеоморфизмы существуют на каждом многообразии M_J, $J \in \mathcal{J}$.

Теорема 2. *Гомеоморфизмы $\phi_{P,J,n,k,l}$ и $\phi_{P',J',n',k',l'}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда*

- $k = k'$, $n = n'$ *и либо* $l = l'$, *либо* $k - l = l'$;
- *существует гомеоморфизм* $H \colon S_g \to S_g$ *такой, что* $PH = HP'$ *и либо* $HJ = J'H$ *(если* $l = l'$*), либо* $HJ = J'^{-1}H$ *(если* $k - l = l'$*).*

Благодарности. *Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-11-00027), а также при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.*

Список литературы

[1] McCarthy J. D. Normalizers and centralizers of pseudo-Anosov mapping classes //preprint. – 1982.

Multiple limit cycles that appear after a perturbation of hyperbolic polycycles
Кратные предельные циклы, рождающиеся из гиперболических полициклов

Andrei Dukov
(Moscow State University)

Рассмотрим гиперболический полицикл (ориентированный эйлеров граф на двумерный сфере, вершины которого — гиперболические сёдла, а рёбра — сепаратрисные связки), образованный n связками. Вопрос: предельные циклы какой кратности могут родиться при возмущении такого полицикла? Оказывается, в типичном n-параметрическом семействе при возмущении такого полицикла не могут родиться предельные циклы кратности больше n. Верно и следующее «обратное» утверждение. *Характеристическим числом* седла называется модуль отношения его собственных значений, где отрицательное стоит в числителе. Оказывается, что если полицикл монодромен (то есть существует отображение монодромии с трансверсали на неё саму, обходящее весь полицикл) и произведение характеристических чисел его сёдел равно единице, то при его возмущении в типичном $n+1$-параметрическом семействе рождается предельный цикл кратности $n + 1$. В частности, в этом же семействе рождается как минимум $n + 1$ предельный цикл.

Two stories about elliptic equations with constant complex coefficients: some analytic capacities and Dirichlet problem

Konstantin Fedorovskiy
(Moscow State University)

In the talk we plan to consider two stories about second-order homogeneous elliptic equations with constant complex coefficients. The first one is related with geometric and metrical properties of capacities of sets in $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, defined in classes of bounded and continuous functions and related with the equations under consideration. These capacities appear quite natural in problems on uniform approximation of functions on compact sets in $\mathbb{R}^N$ by solutions of such equations. In the case of harmonic functions (when the operator under consideration is the Laplace operator), the properties of such capacities are well known and they were deeply studied in classical works on potential theory at the first half of the 20th century. In the general case, these capacities are poor studied up to now. We plan to show how (in which approximation problems) the capacities under discussion arise, to state the main problems related with these capacities and to discuss approaches to solve them and principal issues and difficulties differ these capacities from the harmonic ones. Next, for a wide class of equations under consideration we plan to present new two-side estimates of capacities determined by potentials of positive measures via harmonic capacities in the same dimension. The constructions are based on relatively simple explicit formulae for fundamental solutions of equations under consideration, which we also plan to present and discuss.

The second story is about Dirichlet problem for solutions to second-order homogeneous elliptic equations with constant complex coefficients in $\mathbb{R}^2$. We will show that any Jordan domain $G \subset \mathbb{C}$ with $C^{1,\alpha}$-smooth boundary, $0 < \alpha < 1$, is not regular with respect to the Dirichlet problem for any not strongly elliptic equation of the type under consideration, which means that there always exists a continuous function on ∂G that can not be continuously extended to G to a function satisfying the corresponding equation therein. Since there exists a Jordan domain with Lipschitz boundary, which is regular with respect to the Dirichlet problem for bianalytic functions, this result is near to be sharp.

The first story is based on the joint work with Petr Paramonov (*Lomonosov Moscow State University*)*, while the second one is based on the joint work with Maksim Mazalov (Smolensk Branch of the Moscow Power Engineering Institute) and Astamur Bagapsh (Federal Research Center 'Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences).*

The work presented in this talk is carried out in frameworks of the research project supported by the Russian Science Foundation (*grant no. 22-11-00071*).

On the dynamics of regular Denjoy type homeomorphisms

Vyacheslav Grines, Dmitrii Mints
(Higher School of Economics (Nizhny Novgorod))

Согласно [1], введём следующее определение. Гомеоморфизм $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, где $\mathbb{T}^2$ - двумерный тор, называется гомеоморфизмом типа Данжуа, если выполняются следующие условия:

1. f полусопряжён некоторому минимальному сдвигу $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ посредством непрерывного гомотопного тождественному отображения $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ (т.е. $p \circ f = g \circ p$);

2. Множество $B = \{x \in \mathbb{T}^2 : p^{-1}(x)$ содержит более одной точки[1]$\}$ является непустым и счётным.

Мы будем называть множество B характеристическим множеством гомеоморфизма f. Заметим, что если точка $x \in B$, то все точки её орбиты относительно отображения g также принадлежат множеству B.

В настоящем докладе выделяется следующий подкласс гомеоморфизмов типа Данжуа двумерного тора. Гомеоморфизм типа Данжуа $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ называется регулярным, если полный прообраз каждой точки его характеристического множества относительно полусопрягающего отображения p является замкнутым вложенным диском[2] и диаметры этих дисков образуют последовательность, сходящуюся к нулю.

Отметим, что регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа являются наиболее естественным обобщением гомеоморфизмов Данжуа окружности. Они, в частности, возникают при исследовании частично гиперболических диффеоморфизмов трёхмерных многообразий. В [2] построен

[1] Под $p^{-1}(x)$ подразумевается полный прообраз точки x.

[2] Под замкнутым вложенным диском подразумевается образ замкнутого диска $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ относительно вложения $\tau : D \to \mathbb{T}^2$.

частично гиперболический диффеоморфизм h трехмерного тора $\mathbb{T}^3$, который обладает двумерным аттрактором и получен из алгебраического автоморфизма Аносова посредством бифуркации рождения инвариантной кривой. Одномерное ориентируемое неустойчивое слоение диффеоморфизма h имеет глобальную секущую (двумерный тор), и его слои индуцируют на ней отображение Пуанкаре, являющееся регулярным гомеоморфизмом типа Данжуа.

Отображение $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ называется линейным, если его можно представить как суперпозицию алгебраического автоморфизма и группового сдвига тора. Пусть f_1, f_2 - регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора такие, что f_j ($j \in \{1, 2\}$) полусопряжен минимальному сдвигу $g_j : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ посредством отображения $p_j : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$; пусть B_j - характеристическое множество гомеоморфизма f_j.

Теорема 1. *Пусть f_1, f_2 - регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора. Тогда гомеоморфизмы f_1 и f_2 топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует линейное отображение $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такое, что $\varphi \circ g_1 = g_2 \circ \varphi$, $\varphi(B_1) = B_2$.*

Следствие. *Пусть f_1, f_2 - регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора такие, что характеристическое множество каждого из них состоит из одной орбиты. Тогда гомеоморфизмы f_1 и f_2 топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует алгебраический автоморфизм $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\eta \circ g_1 = g_2 \circ \eta$.*

Согласно [3], для любого минимального сдвига g и любого множества B, состоящего из n ($n \geq 1$) орбит g, существует регулярный гомеоморфизм типа Данжуа, который полусопряжен сдвигу g и его характеристическое множество совпадает с множеством B. Из теоремы 1 и работы [3] следует существование стандартного представителя в каждом классе топологической сопряженности регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа с характеристическими множествами, состоящими из конечного числа орбит.

Теорема 2. *Для любого минимального сдвига $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ и любого натурального числа $n \geq 2$ существует континуальное множество попарно топологически несопряженных регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа двумерного тора, каждый из которых полусопряжён сдвигу g и имеет характеристическое множество, состоящее из n орбит.*

Результаты, представленные в данном докладе, опубликованы в [4].
Благодарности. Результаты получены при поддержке грантов РНФ (проекты 17-11-01041 и 21-11-00010) и при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Список литературы

[1] A. Norton, D. Sullivan, "Wandering domains and invariant conformal structures for mappings of the 2-torus", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 21:1 (1996), 51–68.

[2] P. D. McSwiggen, "Diffeomorphisms of the torus with wandering domains", Proc. Amer. Math. Soc., 117:4 (1993), 1175–1186.

[3] F. Kwakkel, "Minimal sets of non-resonant torus homeomorphisms", Fund. Math., 211:1 (2011), 41–76.

[4] В. З. Гринес, Д. И. Минц, "О топологической классификации регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа", Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 505 (2022), 66–70.

Fluctuations of the process of moduli for the Ginibre and hyperbolic ensembles

Zhaofeng Lin
(Aix-Marseille University)

In this talk, we investigate the point process of moduli of the Ginibre and hyperbolic ensembles. We show that far from the origin and at an appropriate scale, these processes exhibit Gaussian and

Poisson fluctuations. Among the possible Gaussian fluctuations, we can find white noise but also fluctuations with non-trivial covariance at a particular scale. This talk is based on a joint work with Prof. Alexander I. Bufetov and Prof. David García-Zelada.

Geodesic random walks and Brownian motion on Finsler manifolds

Tianyu Ma
(Higher School of Economics (Moscow))

We show that geodesic random walks on a complete Finsler manifold of bounded geometry converge to a diffusion process which is, up to a drift, the Brownian motion corresponding to a Riemannian metric.

Families of holomorphic functions with critical orbit relation
Семейства голоморфных функций с отношением критических орбит

Khudoyor Mamayusupov
(New Uzbekistan University)

Introduction and statement of the problem

Every cubic polynomial has the Branner-Hubbard form $p(z) = z^3 - 3a^2z + b$, where a, b are complex numbers. The critical points are at $\pm a$. Define the iterates of $p(z)$ by letting $p^{\circ 0}(z) = z$ and $p^{\circ(n+1)}(z) = p(p^{\circ n}(z))$.

By a **critical orbit relation** we mean an unordered pair (n, m) with non-negative integers n and m such that for the critical points a and $-a$ we have

$$p^{\circ n}(a) = p^{\circ m}(-a) \tag{1}$$

It is required that such n, m must be exact (minimal) in the sense that $p^{\circ n}(a) = p^{\circ m}(-a)$ but $p^{\circ(n-i)}(a) \neq p^{\circ(m-i)}(-a)$ for all $0 < i \leq \min\{n, m\}$. Every critical orbit relation of the form $(n, 0)$ is minimal by definition. As the equation (1) is symmetric with respect to n and m, it suffices to consider only the cases of $n \geq m$.

Results

Lemma. *There exist sequences $\{A_n(a,b)\}_{n\geq 0}$ and $\{B_n(a,b)\}_{n\geq 0}$ of recurrently defined polynomials of parameters a, b such that if z is a critical point of $p(z)$ then for all $n \geq 0$ the equality $p^{\circ n}(z) = A_n(a,b)z + B_n(a,b)$ holds. Moreover, there exist sequences $\{\tilde{A}_n(x,y)\}_{n\geq 0}$ and $\{\tilde{B}_n(x,y)\}_{n\geq 0}$ of polynomials such that for every $n \geq 0$ one has $A_n(a,b) = \tilde{A}_n(a^2, b^2)$ and $B_n(a,b) = b\tilde{B}_n(a^2, b^2)$.*

Set $P_{n,n}(a,b) = A_n(a,b)/A_1(a,b)$ and $\tilde{P}_{n,n}(a,b) = a^2A_{n-1}^2(a,b) + 3B_{n-1}^2(a,b) - 3a^2$, we can write $\tilde{P}_{n,n}(a,b) = a^2\tilde{A}_{n-1}^2(a^2,b^2) + 3b^2\tilde{B}_{n-1}^2(a^2,b^2) - 3a^2$. Then $P_{n,n}(a,b) = P_{n-1,n-1}(a,b) \cdot \tilde{P}_{n,n}(a,b)$.

Proposition 1. *For $n \geq 1$ set*

$$Q_{n,n}(x,y) = x\tilde{A}_{n-1}^2(x,y) + 3y\tilde{B}_{n-1}^2(x,y) - 3x \tag{2}$$

then $\tilde{P}_{n,n}(x,y) = Q_{n,n}(x^2,y^2)$. Moreover, $\deg_a P_{n,n}(a,b) = \deg P_{n,n}(a,b) = 3^n - 3$ *and* $\deg_a \tilde{P}_{n,n}(a,b) = \deg \tilde{P}_{n,n}(a,b) = 2 \cdot 3^{n-1}$ *for $n \geq 1$.*

Set $P_{n,m}(a,b) = a^2(A_n(a,b) + A_m(a,b))^2 - (B_n(a,b) - B_m(a,b))^2$. For $n \geq 1$ we have that $P_{n,0} = a^2(A_n(a,b) + 1)^2 - B_n^2(a,b)$. Set $\tilde{P}_{n,0}(a,b) = P_{n,0}(a,b) = a^2(\tilde{A}_n(a^2,b^2) + 1)^2 - b^2\tilde{B}_n^2(a^2,b^2)$. We have that $P_{n,1} = \left(a^2(A_{n-1} + 1)^2 - B_{n-1}^2\right)^2 \cdot \left(a^2(A_{n-1} - 2)^2 - B_{n-1}^2\right)$. For $n \geq 1$ set $\tilde{P}_{n,1}(a,b) = a^2(A_{n-1}(a,b) - 2)^2 - B_{n-1}^2(a,b)$, or we can write it as $\tilde{P}_{n,1}(a,b) = a^2(\tilde{A}_{n-1}(a^2,b^2) - 2)^2 - b^2\tilde{B}_{n-1}^2(a^2,b^2)$ then the above implies that $P_{n,1} = P_{n-1,0}^2 \cdot \tilde{P}_{n,1}$.

Proposition 2. *For $n \geq 1$ set*

$$Q_{n,0}(x,y) = x(\tilde{A}_n(x,y)+1)^2 - y\tilde{B}_n^2(x,y), \tag{3}$$
$$Q_{n,1}(x,y) = x(\tilde{A}_{n-1}(x,y)-2)^2 - y\tilde{B}_{n-1}^2(x,y) \tag{4}$$

then $\tilde{P}_{n,0}(x,y) = Q_{n,0}(x^2,y^2)$ and $\tilde{P}_{n,1}(x,y) = Q_{n,1}(x^2,y^2)$. Moreover, $\deg_a \tilde{P}_{n,0}(a,b) = \deg \tilde{P}_{n,0}(a,b) = 2\cdot 3^n$ and $\deg_a \tilde{P}_{n,1} = \deg \tilde{P}_{n,1} = 2\cdot 3^{n-1}$ for $n \geq 1$.

Set

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{n,m}(a.b) =& \big(a^2(A_{n-1}^2 - A_{n-1}A_{m-1} + A_{m-1}^2) + B_{n-1}^2 + B_{n-1}B_{m-1} + B_{m-1}^2 - 3a^2\big)^2 \\ &- a^2\big((2A_{n-1} - A_{m-1})B_{n-1} + (A_{n-1} - 2A_{m-1})B_{m-1}\big)^2,\end{aligned}$$

then we have that $P_{n,m}(a,b) = P_{n-1,m-1}(a,b)\cdot \tilde{P}_{n,m}(a,b)$.

Proposition 3. *Let $n > m > 1$ and set*

$$\begin{aligned}Q_{n,m}(x,y) =& \Big(x(\tilde{A}_{n-1}^2(x,y) - \tilde{A}_{n-1}(x,y)\tilde{A}_{m-1}(x,y) + \tilde{A}_{m-1}^2(x,y)) \\ &+ y\tilde{B}_{n-1}^2(x,y) + y\tilde{B}_{n-1}(x,y)\tilde{B}_{m-1}(x,y) + y\tilde{B}_{m-1}^2(x,y) - 3x\Big)^2 \\ &- xy\Big((2\tilde{A}_{n-1}(x,y) - \tilde{A}_{m-1}(x,y))\tilde{B}_{n-1}(x,y) \\ &+ (\tilde{A}_{n-1}(x,y) - 2\tilde{A}_{m-1}(x,y))\tilde{B}_{m-1}(x,y)\Big)^2,\end{aligned} \tag{5}$$

then $\tilde{P}_{n,m}(x,y) = Q_{n,m}(x^2,y^2)$. Moreover, $\deg P_{n,m}(a,b) = \deg_a P_{n,m}(a,b) = 2\cdot 3^n$ and $\deg \tilde{P}_{n,m}(a,b) = \deg_a \tilde{P}_{n,m}(a,b) = 4\cdot 3^{n-1}$.

Theorem 1. *Except $(1,1)$ all critical orbit relations are realized. In particular, there are infinitely many cubic polynomials with critical orbit relations.*

Corollary. *In the moduli space of cubics of the form $z^3 - 3a^2z + b$ with coordinates $x = a^2$ and $y = b^2$ the exact (minimal) critical orbit relation (n,m) corresponds to the set $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : Q_{n,m}(x,y) = 0\}$, where $Q_{n,m}(x,y)$ is defined by (2), (3), (4), (5) respectively. It is never empty, except for the relation $(1,1)$.*

Denote $\mathcal{S}_{n,m} = \{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : Q_{n,m}(x,y) = 0\}$ the affine algebraic curve in $\mathbb{C}^2$. It seems that each curve $\mathcal{S}_{n,m}$, except $\mathcal{S}_{1,1}$ (which is an empty set), is irreducible. These curves are analogous to those defined by J. Milnor in the study of cubic polynomials with preperiodic critical point.

We list some examples of these special curves in $\mathbb{C}^2$. $\mathcal{S}_{0,0} = \{x = 0\}$, $\mathcal{S}_{1,0} = \{x(2x-1)^2 - y = 0\}$, $\mathcal{S}_{2,0} = \{x(8x^4 - 6x^2 + 6xy - 1)^2 - y(12x^3 - 3x + y + 1)^2 = 0\}$, $\mathcal{S}_{2,1} = \{4x(1+x)^2 - y = 0\}$, $\mathcal{S}_{2,2} = \{4x^3 - 3x + 3y = 0\}$, and $\mathcal{S}_{3,3} = \{64x^9 - 96x^7 + 528x^6y + 36x^5 - 288x^4y + 108x^3y^2 + 72x^3y + 27x^2y - 18xy^2 - 18xy - 3x + 3y^3 + 6y^2 + 3y = 0\}$. The curves $\mathcal{S}_{0,0}$, $\mathcal{S}_{1,0}$, $\mathcal{S}_{2,1}$, and $\mathcal{S}_{2,2}$ can be identified with the complex plain $\mathbb{C}$ as these are graphs of polynomials.

Corollary. *The degree of the curve $\mathcal{S}_{n,m}$ is a half of the degree of $\tilde{P}_{(n,m)}(a,b)$.*

Now consider the space of functions $f_t(z) = \lambda z/(z^2 + tz + 1)$ with a fixed point at the origin with multiplier $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ for each $t \in \mathbb{C}$, which is denoted by $\mathrm{Per}_1(\lambda)$. Each f_t has critical points at ± 1. The critical orbit relation (n,m) is $\big(f_t^{\circ n}(1) - f_t^{\circ m}(-1)\big)\big(f_t^{\circ n}(-1) - f_t^{\circ m}(1)\big) = 0$.

Analogous result for this family is the following.

Theorem 2. *For each $\lambda \neq 0$ which is not a root of unity, in $Per_1(\lambda)$ all critical orbit relations are realized except $(0,0)$ and $(n,1)$ for each $n \geq 1$.*

Ergodic currents and ergodic measures of systems of isometries

Irina Mamsurova
(École normale supérieure (Paris))

The systems of partial isometries of a multi-interval naturally appear in the research of free group actions on $\mathbb{R}$-trees, which may be informally described as infinite metric trees. D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin in 1995 presented the way to reduce the free action of a group (not necessarily free) on an $\mathbb{R}$-tree to a system of partial isometries and, conversely, reconstruct free action and the tree starting from the associated system. Associated systems, in particular, allow to classify groups which can act "well enough" on some real tree.

As interval exchange transformations and interval translations, systems of isometries are strongly related with the theory of measured foliations and give us useful tools to research transversal measures and ergodicity. We can identify each system of isometries with a foliated 2-complex, called band complex, and study its topological properties and transversal measures. In particular, thin systems arise from foliations of thin type and inherit some of their topological properties. As for IETs, non-unique ergodicity is atypical for systems of isometries.

On the other hand, systems of isometries arise in studying geometry of Outer space. In this context one of the main questions connected with the action of a free group on an $\mathbb{R}$-tree is the construction of (projectivized) currents dual to an $\mathbb{R}$-tree T. The duality between trees and currents may be described in terms of assoiated system of isometries; moreover, in 2014 Th. Coulbois and A. Hilion presented a combinatorical method to evaluate the number of ergodic currents by the number of isometries of corresponding system. I will present the connections and differences between "dynamical", "topological" and "combinatorical" points of view on a systems of isometries and the results, which may be obtained by different tools. The particular interest is the correspondence between the number of ergodic transversal measures of the band complex and the number of dual ergodic currents of the same system.

C^1-Anosov diffeomorphism with a horseshoe attracting almost all points
C^1-диффеоморфизм Аносова с подковой, притягивающей почти все точки

Stanislav Minkov
(Brook Institute of Electronic Control Machines, Moscow)

The classic result of R. Bowen and Ya. Sinai states that for C^2-smooth (and even $C^{1+\alpha}$) Anosov diffeomorphisms there is an SRB-measure with full support [2], [3]. SRB-measure is a Cesàro limit of δ-measures in almost all (w.r.t. the Haar/Lebesgue measure) points, and by ¡¡full support¿¿ we mean that there is no balls with zero SRB-measure.

One can check that for a residual subset of C^1-Anosov diffeomorphisms there is no SRB-measure with non-trivial support.

Nevertheless C. Bonatti, S. Minkov, A. Okunev and I. Shilin [1] constructed an example of C^1-Anosov diffeomorhism of T^2 with a ¡¡statistically absorbing¿¿ horseshoe: almost all points tends to this horseshoe, and it serves as a support of SRB-measure. Construction is based on the idea of ¡¡thick¿¿ C^1-horseshoe invented by R. Bowen and manipulations with the linear Anosov map on T^2, but one should be very careful to preserve Anosov structure and global ¡¡absorbing¿¿ property.

In some sense this example can not be done on a dense set in C^1.

Классический результат Р. Боуэна и Я. Г. Синая состоит в том, что у C^2-гладких (и $C^{1+\alpha}$-гёльдеровых) диффеоморфизмов Аносова SRB-мера имеет полный носитель [2], [3]. Напомним, что SRB-мера - это временное среднее для δ-мер в почти всех точках (относительно меры Лебега), а «полный носитель» - это всё многообразие.

Можно проверить, что у типичных C^1-диффеоморфизмов Аносова не бывает SRB-меры с нетривиальным (т.е., не полным) носителем.

Тем не менее, в работе К. Бонатти, С. Минкова, А. Окунева и И. Шилина [1] был построен пример C^1-диффеоморфизма Аносова двумерного тора с «поглощающей по мере» подковой: почти все точки стремятся к этой подкове под действием итераций, и она является носителем SRB-меры. Ключом к построению служит C^1-подкова положительной меры, обнаруженная Боуэном; её можно хирургией вставить в линейный диффеоморфизм Аносова. Аккуратная хирургия сохраняет аносовость и глобальность поглощающего свойства подковы.

Следует заметить, что в C^1 примеры такого типа нельзя получить даже плотно.

References

[1] Bonatti C., Minkov S., Alexey Okunev, Ivan Shilin. Anosov diffeomorphism with a horseshoe that attracts almost any point // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2020. Vol. 40. No. 1. P. 441-465

[2] Bowen, Robert Edward (1975). "Ergodic theory of axiom A diffeomorphisms". Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 470. Springer. pp. 63–76.

[3] Sinai, Yakov G. (1972). "Gibbs measures in ergodic theory". Russian Mathematical Surveys. 27 (4): 21–69.

On one-dimensional contracting repellers of A-endomorphisms of the torus

Vyacheslav Grines, Dmitrii Mints

(Higher School of Economics (Nizhny Novgorod))

В работе [1] было введено понятие аксиомы А для гладких сюръективных отображений, не являющихся, вообще говоря, взаимно однозначными. Отображения, удовлетворяющие этой аксиоме, были названы А-эндоморфизмами. В [1] для А-эндоморфизмов было доказано обобщение теоремы С. Смейла о спектральном разложении, согласно которому неблуждающее множество каждого такого отображения представляется в виде конечного объединения замкнутых инвариантных и топологически транзитивных множеств, называемых базисными.

В недавней работе [2] в каждом гомотопическом классе непрерывных отображений двумерного тора, индуцирующих гиперболическое действие в фундаментальной группе и не содержащих растягивающих отображений, построен А-эндоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из гиперболической стоковой точки и одномерного сжимающегося специального репеллера Λ (специальность здесь означает то, что неустойчивое многообразие каждой точки репеллера является инъективной иммерсией прямой; это, вообще говоря, не верно для произвольного базисного множества А-эндоморфизма). Кроме того, в [2] доказано, что репеллер Λ является одномерной ориентируемой ламинацией, локально гомеоморфной прямому произведению интервала и канторова множества. Отметим, что перечисленные свойства были доказаны для построенного примера. Вопрос качественного описания произвольных А-эндоморфизмов двумерного тора с одномерными сжимающимися специальными репеллерами не был решен. Исследованию этого вопроса посвящён настоящий доклад.

Далее будем предполагать, что эндоморфизм f является регулярным отображением и не является взаимно однозначным отображением. Пусть $\mathbb{F}(\mathbb{T}^2)$ - класс А-эндоморфизмов двумерного тора таких, что неблуждающее множество каждого эндоморфизма $f \in \mathbb{F}(\mathbb{T}^2)$ содержит одномерный сжимающийся специальный репеллер Λ_f, который просторно расположен на двумерном торе.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathbb{F}(\mathbb{T}^2)$. Тогда репеллер Λ_f связен, строго инвариантен и имеет локальную структуру прямого произведения интервала и канторова множества.*

Обозначим через f_* гомоморфизм фундаментальной группы тора, индуцированный эндоморфизмом f. Известно, что f_* задается единственной целочисленной матрицей A_f. Гомоморфизм f_* называется гиперболическим, если матрица A_f гиперболична, то есть не имеет собственных значений равных по модулю единице и нулю. Обозначим через $\hat{A}_f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ алгебраический эндоморфизм двумерного тора, заданный формулой: $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = A_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod 1$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathbb{F}(\mathbb{T}^2)$. Тогда гомоморфизм f_* является гиперболическим. При этом $|\lambda_1| > 1$, $0 < |\lambda_2| < 1$, где λ_1 и λ_2 - собственные значения матрицы A_f.*

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathbb{F}(\mathbb{T}^2)$. Тогда среди гомотопных тождественному непрерывных отображений тора $\mathbb{T}^2$ существует единственное отображение h_f, полусопрягающее эндоморфизм f с алгебраическим эндоморфизмом $\hat{A}_f$.*

Положим $B_f = \{x \in \mathbb{T}^2 : h_f^{-1}(x)$ состоит более чем из одной точки[3]$\}$. Отображение двумерного тора назовём линейным, если оно представимо в виде суперпозиции алгебраического эндоморфизма и группового сдвига тора.

Теорема 4. *Пусть $\Lambda_f, \Lambda_{f'}$ - репеллеры эндоморфизмов $f, f' \in \mathbb{F}(\mathbb{T}^2)$ соответственно. Для того чтобы существовал гомеоморфизм $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\varphi(\Lambda_f) = \Lambda_{f'}$, $f'|_{\Lambda_{f'}} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\Lambda_{f'}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало линейное отображение $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такое, что $\psi \circ \hat{A}_f = \hat{A}_{f'} \circ \psi$, $\psi(B_f) = B_{f'}$.*

Результаты, представленные в данном докладе, будут опубликованы в [3].

Благодарности. Результаты получены при поддержке гранта РНФ (проект 22-11-00027) и при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Список литературы

[1] F. Przytycki, "Anosov endomorphisms", Studia mathematica, 3:58 (1976), 249–285.

[2] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, Е. Д. Куренков, "О DA-эндоморфизмах двумерного тора", Математический сборник, 212:5 (2021), 102–132.

[3] В. З. Гринес, Д. И. Минц, "Об одномерных сжимающихся репеллерах A-эндоморфизмов двумерного тора", Математические заметки, 2023 (принято в печать).

Bogoliubov-Krylov averaging in kick-force driven systems
Усреднение Боголюбова-Крылова в системах, подверженных действию случайной ударной силы

Nikita Naumov
(Higher School of Economics (Moscow))

The classical Krylov–Bogolyubov averaging method allows for an approximate analysis of nonlinear oscillatory processes. In a 2020 article by S. B. Kuksin and his colleagues, a new method for proving the Krylov–Bogolyubov averaging theorem was described and the possibility of extending this approach to stochastically perturbed systems was proposed. In my presentation, the possibility of applying this approach to the analysis of a system that is under the influence of a specific random perturbation will be shown.

Классический метод усреднения Крылова–Боголюбова позволяет проводить приближенный анализ нелинейных колебательных процессов. В статье 2020 года С. Б. Куксиным и его коллегами был описан новый метод доказательства теоремы Крылова–Боголюбова об усреднении и предложена возможность распространения подобного подхода на стохастически возмущенные системы. В моем выступлении будет показана возможность применения этого подхода для анализа системы, находящейся под воздействием специфического случайного возмущения.

[3]Под $h_f^{-1}(x)$ подразумевается полный прообраз точки x.

Connected components of the Prym eigenform loci in genus 5

Marina Nenasheva
*(Higher School of Economics (Moscow),
Skolkovo Institute of Science and Technology)*

Riemann surfaces endowed with a holomorphic differential are known as “translation surfaces”. This term is due to the fact that a holomorphic differential induces a flat metric on a surface with singularities at its zeroes . Translation surfaces arise in a variety of mathematical domains, which include dynamical systems, geometric group theory and geometry of moduli spaces of Riemann surfaces (see e.g. [1] for a comprehensive introduction).

The moduli spaces of translation surfaces of genus g, denoted H_g carry a natural geometric action of the group $GL_2(\mathbb{R})$.This action preserves a natural stratification of the moduli spaces. The strata in this stratification, are indexed by $\kappa \vdash 2g-2$ of the number $2g-2$. The orbit closure are known to be algebraic varieties, and studying their structure appeared to be very useful in answering natural questions about the geometry of a specific flat surface, as well as of their moduli spaces.

C. McMullen discovered properties of $GL_2(\mathbb{R})$-orbit closures in genus 2 are strongly related to endomorphisms rings of the Jacobian of underlying Riemann surfaces: he showed that they map to the loci with real multiplication in the moduli space of Abelian surfaces A_2 (where the translation surface is mapped to the Jacobian of the underlying curve).

An Abelian variety $A \in A_g$ admits real multiplication by a totally real number field K of degree q over $\mathbb{Q}$ if there exists an inclusion $K \hookrightarrow End \otimes \mathbb{Q}$ such that for any $k \in K$, the action of k is self-adjoint with respect to the polarization of A. Equivalently, $End(A)$ contains a copy of an order $O \subset K$ acting by self-adjoint endomorphism. The quadratic orders are indexed by their discriminants and are denoted O_D, $O_D \simeq Z[T]/(T^2 + bT + c), D = b^2 - 4c, D \equiv 0, 1 \mod 4$. The corresponding Abelian varieties in genus 2 are denoted $E_{D,2}$.

Affine homeomorphisms of the flat metric induce self-adjoint endomorphisms of the Jacobian variety. Deducing the appropriate homeomorphism on the level of first homology groups was used by McMullen to construct infinitely many examples of closed orbits in the stratum $H(2)$ in genus two. The image of such orbits is $E_{D,2}$.

In [2] it is shown that analogues of ΩE_D exist in higher genus (up to 5). These subvarieties of H_g are called Prym eigenform loci. Surfaces in a Prym eigenform locus are pairs (X, ω) such that there exists a holomorphic involution $\tau : X \to X$ such that $g(X) - g(Y) = 2$, where $Y = X/\langle\tau\rangle$, $\tau_*\omega = -\omega$, and the Prym variety $Prym(X, \tau) = (\Omega(X)^-)^*/H_1(X, \mathbb{Z})^-$ admits a real multiplication with ω as an eigenform. Her $\Omega(X, \tau)^- = \ker(\tau + \mathrm{id}) \subset \Omega(X)$ for $\Omega(X)$ — the space of holomorphic one forms on X), and $H_1(X, \mathbb{Z})^-$ is the anti-invariant homology of X with respect to τ.
For any genus, the set of Prym eigenforms whose Prym variety admits a multiplication by O_D is denoted ΩE_D, and the intersection of ΩE_D with a stratum $H(\kappa)$ is denoted $\Omega E_D(\kappa)$.

We address the question of the number of connected components of the loci in genus 5. Partial results were obtained in smaller genera by C. MacMullen, E. Lanneau and D. Nguyen [2],[3],[4],[5].

Moduli spaces of translation surfaces admit a natural foliation, known as absolute period foliation. Isoperiodic deformations of a translation surface re given by changes of complex structure of the underlying complex curves, known as Schiffer variations. We use them as a major tool to prove the main result of this paper:

Theorem. *The Prym eigenform locus $\Omega E_D(4, 4)$ is non-empty and connected for $D \geq 4$.*

The proof is established in the following steps:

1. First, we use the known result on the complete periodicity of surfaces in Prym eigenform loci to classify surfaces in $\Omega E_D(4, 4)$. We introduce a local surgery on translation surfaces of smaller genera with additional marked points, called plumbing. Using the surgery we show that it is possible to produce all cylinder decompositions in $\Omega E_D(4, 4)$ applying it either to a surface of genus 2, or of genus 4, or two copies of genus 2 surfaces. In this way, the cylinder diagrams are split into three families, denoted $[H(1, 1)], [H(6)], H[2] \cdot H[2]$, respectively.

2. Then we apply Schiffer variations to show that any two surfaces in each of the three families can be connected by a specific path, for every D. In particular, for $D > 9$ every surface in the isoperiodic leaf admits an isoperiodic path to a surface obtained from a genus 4 surface with one zero ($\Omega E_D(6)$). The cases $D = 4, 9$ are treated separately.

3. Finally, we show that a parameter in the plumbing procedure (arg of the complex value in the change in relative periods) for surfaces of genus 4 can be chosen in such a way that the $GL_2(\mathbb{R})$ action is equivariant with respect to the surgery. The statement of the theorem for $D > 9$ then follows from the fact that $\Omega E_D(6) \subset H_4$ is connected. The cases $D = 4, 9$ are covered in a similar manner, using the fact that $\Omega E_D(1,1) \subset H_2$ is connected.

References

[1] A. Wright, Translation surfaces and their orbit closures: An introduction for a broad audience, *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, **2:11** (2014).

[2] C. McMullen, Prym Varieties and Teichmüller Curves, *Duke Mathematical Journal*, **133** (2006), 569–590.

[3] E. Lanneau, D. Nguyen, $GL^+(2,R)$-orbits in Prym eigenform loci, *arXiv: Geometric Topology* (2013).

[4] E. Lanneau and D. Nguyen, Weierstrass Prym eigenforms in genus four, *Journal of The Institute of Mathematics of Jussieu*, **19** (2018), 2045–2085.

[5] E. Lanneau, D. Nguyen, Teichmueller curves generated by Weierstrass Prym eigenforms in genus three and genus four, *arXiv: Geometric Topology* (2011).

Infinite invariant measures for infinite-dimensional groups over finite fields
Бесконечные инвариантные меры для бесконечномерных групп над конечными полями

Grigori Olshanski
(Institute for Information Transmission Problems of RAS, Skoltech, Higher School of Economics)

Группы, о которых пойдет речь, состоят из определенного вида матриц бесконечного размера с элементами из конечного поля $\mathbb{F}_q$. Эти группы строятся из конечных классических групп. Несмотря на "бесконечномерность", они локально компактны и по ряду своих свойств похожи на p-адические группы Ли. В частности, для них есть аналог алгебры Ли, присоединенного и коприсоединенного действия. Я расскажу о том, что известно об инвариантных мерах для коприсоединенного действия.

На основе совместных работ с Cesar Cuenca [arXiv:2102.01947, arXiv:2206.07320].

On non-trivial hyperbolic sets in families of diffeomorphisms of a torus
О нетривиальных гиперболических множествах в семействах диффеоморфизмов тора

Yuliia Petrova
(Higher School of Economics (Nizhny Novgorod))

Данный доклад посвящен численному и аналитическому исследованию однопараметрических и двухпараметрических семейств диффеоморфизмов двумерного и трехмерного торов, каждое из которых задаётся посредством суперпозиции прямого произведения отображений Мёбиуса и алгебраического автоморфизма тора. Находятся бифуркационные значения параметров, при переходе через которые рождаются одномерные базисные множества.

Отображение Мёбиуса представляет собой диффеоморфизм окружности, который зависит от двух параметров $\varepsilon \in (-1;1), v \in [-0.5;0.5]$ и имеет следующую структуру: при $\varepsilon = v = 0$ оно является тождественным; при $\varepsilon \neq 0, v \neq 0$ оно является диффеоморфизмом Морса-Смейла с двумя неподвижными точками: источник и сток. Естественным образом определяются прямое произведение двух отображений Мёбиуса и прямое произведение трех отображений Мёбиуса, действующие на двумерном и трехмерном торах соответственно. Прямое произведение двух отображений Мёбиуса при $\varepsilon \neq 0, v \in [-0.5;0.5]$ является диффеоморфизмом Морса-Смейла, при этом его неблуждающее множество состоит из 4-х неподвижных точек: источниковой, стоковой и двух седловых. Прямое произведение трех отображений Мёбиуса, являющееся при $\varepsilon \neq 0, v \in [-0.5;0.5]$ диффеоморфизмом Морса-Смейла, имеет неблуждающее множество, состоящее из 8-ми неподвижных точек: источниковой, стоковой и шести седловых.

Для семейства, заданного суперпозицией прямого произведения двух отображений Мёбиуса и алгебраического автоморфизма Аносова, при значении параметра $v = 0$ получены следующие результаты. Аналитически доказано, что при значении параметра $\varepsilon \in [-0.245;0]$ диффеоморфизмы семейства являются топологически сопряженными диффеоморфизмами Аносова. Численно показано, что при $\varepsilon \in (\varepsilon^*;-0.245]$ диффеоморфизмы рассматриваемого семейства также остаются топологически сопряженными (ε^*-бифуркационное значение параметра). При $\varepsilon = \varepsilon^*$ диффеоморфизм семейства уже не является структурно устойчивыми, но топологически сопряжен диффеоморфизму Аносова. При переходе через значение параметра ε^* происходит бифуркация «вилка», в результате которой седловая неподвижная точка диффеоморфизма Аносова меняет свой тип и становится источником, в ее окрестности рождаются две седловые неподвижные точки. При значениях параметра ε из интервала $(-0.6;\varepsilon^*)$ неблуждающее множество каждого диффеоморфизма из рассматриваемого семейства состоит из источниковой неподвижной точки и одномерного гиперболического аттрактора.

Для двухпараметрического семейства диффеоморфизмов двумерного тора ($\varepsilon \neq 0, v \neq 0$), заданного суперпозицией прямого произведения двух отображений Мёбиуса и алгебраического автоморфизма Аносова, показано, что для каждого $v \neq 0$ из промежутка $v \in (-0.1;0.1)$ существует такое значение параметра $\varepsilon = \varepsilon^*(v)$, при котором семейство претерпевает бифуркацию «седло-узел». В этом случае уже в момент бифуркации наблюдается негиперболический одномерный аттрактор. Численно получено, что до бифуркации диффеоморфизмы являются топологически сопряженными диффеоморфизмами Аносова. После бифуркации при $\varepsilon \in (-0.6;\varepsilon^*(v)), v \in (-0.1;0.1)$ неблуждающее множество каждого диффеоморфизма из рассматриваемого семейства состоит из одномерного гиперболического аттрактора и источниковой неподвижной точки.

Также с помощью численного эксперимента исследовано однопараметрическое семейство ($v = 0$), заданное суперпозицией прямого произведения трех отображений Мёбиуса и негиперболического алгебраического автоморфизма. Установлено, что при $\varepsilon \in (\varepsilon^*;0)$ неблуждающее множество каждого диффеоморфизма из рассматриваемого семейства состоит из двух базисных множеств, каждое из которых гомеоморфно двумерному тору. Одно является аттрактором, другое - репеллером, и ограничение диффеоморфизмов на каждый из этих торов является диффеоморфизмом Аносова. При переходе через значение параметра ε^* происходит две бифуркации «вилка». При $\varepsilon \in (-0.6;\varepsilon^*)$ неблуждающее множество каждого диффеоморфизма из рассматриваемого семейства состоит из двух нетривиальных поверхностных базисных множеств (одномерный аттрактор и одномерное седловое базисное множество) и двух тривиальных базисных множеств (источниковая и седловая неподвижные точки).

Данный доклад подготовлен на результатах совместной работы с В.З. Гринесом, А.О. Казаковым, Д.И. Минцем.

Quasi-energy function for Pixton diffeomorphisms

Olga Pochinka
(Higher School of Economics (Nizhny Novgorod))

This paper is devoted to estimating from below the number of critical points of the Lyapunov function for Pixton diffeomorphisms – the Morse-Smale 3-diffeomorphism having a chain recurrent set consisting of four points: one source, one saddle and two sinks. By virtue of the results of C. Bonatti and V. Grines [1] the class of topological conjugacy of such a diffeomorphism f is completely determined by the equivalence class (of which there are infinitely many) of the Hopf knot L_f – a knot in the generating class of the fundamental group of the manifold $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Moreover, any Hopf knot is realized by some Pixton diffeomorphism. It is known from the results of D. Pixton [2] that diffeomorphisms defined by the standard Hopf knot $L_0 = \{s\} \times \mathbb{S}^1$ have an energy function – the Lyapunov function, the set of critical points of which coincides with a chain recurrent set. Any Hopf knot $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ is smoothly homotopic to the knot L_0, but is not isotopic to it in the general case. Any Pixton diffeomorphism defined by a non-standard Hopf node does not have an energy function, since the set of critical points of any Lyapunov function for such a diffeomorphism is strictly larger than its chain recurrent set [3]. The Lyapunov function for a Pixton diffeomorphism with a minimum number of critical points is called quasi-energetic. In this paper, we estimate the number of critical points of a quasi-energy function for a Pixton diffeomorphism defined by an elementary node – a Hopf knot connecting to a standard node by homotopy with exactly one singularity. It is shown that this number can be arbitrarily large. For the Pixton diffeomorphism defined by the generalized Mazur knot, the accuracy of the obtained estimate is proved by constructing a quasi-energy function with the corresponding number of critical points.

[1] *C. Bonatti and V. Grines.* Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the 3-sphere // Journal of Dynamical and Control Systems, **6**:4 (2000), 579-602.
[2] *D. Pixton.* Wild unstable manifolds // Topology, **16** (1977),167-172.
[3] *V. Grines, F. Laudenbach, and O. Pochinka.* Quasi-energy function for diffeomorphisms with wild separatrices // Mathematical Notes, **86**:1 (2009), 163-170.

Determinantal processes and division invariant spaces

Roman Romanov
(St. Petersburg State University)

We explore the link between determinantal point processes and reproducing kernel Hilbert spaces of functions invariant with respect to division. The class of spaces under consideration extends the classical de Branges spaces of entire functions. We give a complete description of a wide class of quasi-invariant processes in the functional terms.

Generic extensions of ergodic systems

Valery V. Ryzhikov
(Moscow State University)

The group $Aut = Aut(\mu)$ of all automorphisms of a standard probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is equipped with the complete Halmos metric ρ. Distance between automorphisms S and T is defined by the formula

$$\rho(S,T) = \sum_i 2^{-i} \left(\mu(SA_i \Delta TA_i) + \mu(S^{-1}A_i \Delta T^{-1}A_i)\right),$$

where $\{A_i\}$ is some fixed family of sets, dense in the algebra $\mathcal{B}$. A property of automorphisms is called typical (generic) if some G_δ-set dense in Aut, consists of automorphisms that have this property. The theory of typical actions with an invariant measure has a long history, typical properties are, for example: weak mixing, rigidity, embeddability of an automorphism in a flow, presence of nontrivial factors, nonconjugacy of an automorphism to its inverse (asymmetry). Recently, the theory of generic actions has been developed to the study of typical extensions. Denote by $Ext(S)$ all skew products R over S (extensions of S), defined by the formula

$$R(x,y) = (Sx, R_x y), \ x \in X, \ y \in Y,$$

where $\{R_x\}$ is a measurable family of automorphisms of the space (Y,μ).We set $Y = X$, leaving aside finite extensions, for which $|Y| < \infty$. Let us consider the closed subspace $Ext(S)$ with the Halmos metric on $Aut(\mu \otimes \mu)$. The class of extensions containing a G_δ-set that is dense in $Ext(S)$ is called typical (generic). An extension property is typical (generic) if all extensions with this property contain a typical class. It was established in [1] that the ergodic transformation S with positive entropy is isomorphic to their typical extensions. Any zero entropy automorphism, on the contrary, is not isomorphic to its typical extension [1]. We clarify this result, using the Kushnirenko entropy invariant associated with some sequences α (see [2]).

Theorem 1. *α-Entropy for some sequence α distinguishes an automorphism S with zero classical entropy and its typical extensions R: the α-entropy of S is equal to zero, but the α-entropy of a typical $R \in Ext(S)$ is equal to infinity.*

Conjecture. *Finite typical extensions of an ergodic automorphism with zero entropy are not isomorphic to it.*

Theorem 2. *If an ergodic automorphism T is rigid ($T^{n_i} \to Id$), then its typical extensions are not conjugated to their inverse. Thus the property of symmetry (R is isomorphic to R^{-1}), generally, is not preserved via generic extensions.*

Theorem 3 ([3],[4])**.** *Typical extensions lift the following properties: partial rigidity, singularity of the automorphism spectrum, mixing property, triviality of joinings with pairwise independence.*

Conjecture. *The property of multiple mixing is preserved via typical extensions.*

The extension $R = (S, R_x)$ induces a cocycle

$$C(S,n,x) = R_{S^{n-1}x}R_{S^{n-2}x}\dots R_{Sx}R_x.$$

Associating a random walk on the group Aut with a cocycle $C(S,n,x)$, in the following theorem we assert the recurrence property of generic random walks by mixing S.

Theorem 4. *Typical extension of a mixing automorphism S has local rigidity: for any $\varepsilon > 0$, set $A \subset X$ of positive measure and sufficiently large natural n there exists A' of positive measure such that $A', S^nA' \subset A$ and $\rho(C(S,n,x), Id) < \varepsilon$ for all $x \in A'$.*

[1] T. Austin, E. Glasner, J.-P. Thouvenot, B. Weiss. An ergodic system is exactly dominant when it has positive entropy. arXiv:2112.03800

[2] A. G. Kushnirenko. On metric invariants of entropy type. Russ. Math. Surv. 22, no. 5, 53-61 (1967)

[3] V. V. Ryzhikov. Generic extensions of ergodic actions. arXiv:2209.09160

[4] V. V. Ryzhikov. Self-joinings and generic extensions of ergodic systems. arXiv:2210.15276

Attractors of direct products

Ivan Shilin

(Higher School of Economics (Moscow))

It is tempting to assume that the attractor of the direct product of smooth flows coincides with the direct product of their attractors. This is the case for so-called maximal attractors, but it is not true in general for several other types of attractors, namely Milnor, statistical, and minimal attractors, which are defined using a reference measure on the phase space.

The case of Milnor attractors was first considered by P. Ashwin and M. Field [1], who conjectured that for the product of two planar flows with attracting homoclinic saddle loops the Milnor attractor does not contain the whole product of the two loops. Then N. Agarwal, A. Rodrigues, and M. Field [2] proved the conjecture and generalized this result to the case of arbitrary attracting polycycles formed by hyperbolic saddles.

We construct the counterexample for the case of statistical attractors using the product of flows exhibiting so-called modified Bowen example, an attracting biangle formed by a saddlenode and a saddle, and show that an example of this type cannot be constructed using planar flows of smaller codimension.

Finally, we present the example for minimal attractors which also demonstrates an analogous property for physical measures: our flow φ has a global physical measure such that its square does not coincide with the global physical measure of the square of φ.

This is a joint work with **Stanislav Minkov** (*Brook Institute of Electronic Control Machines, Moscow*).

References

[1] Ashwin, P., Field, M.: Product dynamics for homoclinic attractors. Proc. Roy. Soc. Ser. A. 461, 155–177 (2005)

[2] Agarwal, N., Rodrigues, A., Field, M.: Dynamics near the product of planar heteroclinic attractors. Dynamical systems: An International Journal. **26:4**, 447–481 (2011)

[3] Minkov S., Shilin I.: Attractors of direct products. Qualitative Th. of Dynam. Sys. Vol. 20, No. 3, Article number: 77 (2021)

Subelliptic Sturm-Liouville problems in domains with non-smooth boundaries

Alexander Shlapunov

(Siberian Federal University (Krasnoyarsk))

The completeness of root functions related to boundary value problems is very important for the construction of the their exact and approximate solutions, see, for instance, [1] for perturbations of Dirichlet problem for the Laplace operators, [2] for elliptic (coercive) boundary value problems for strongly elliptic differential operators in smooth domains, [3] for elliptic problems in Lipschitz domains, or [4], [5] for general elliptic operators in domains with singular stratified boundary.

We consider a (generally, non-coercive or sub-elliptic) mixed boundary value problem in a bounded domain D of the eucledian space $\mathbb{R}^n$ for a second order elliptic differential operator $A(x,\partial)$. The differential equation is of divergent form and the boundary operator $B(x,\partial)$ are of Robin type:

$$\left\{ \begin{array}{l} Au = f \text{ in } D, \\ B = 0 \text{ on } \partial D, \end{array} \right.$$

where the boundary ∂D of the bounded domain D is assumed to be a Lipschitz surface. We distinguish a closed subset $Y \subset \partial D$ in order to control growth of problem's solutions near Y. We prove that the pair $(A(x,\partial), B(x,\partial))$ induces a Fredholm operator L in proper weighted spaces of Sobolev type associated with the singular set Y. Besides, we prove the completeness of root functions related to L under reasonable assumptions, see [6] for scalar operators in the usual Sobolev spaces in Lipschitz domains and [7], [8], [9] in the weighted Sobolev spaces.

The author was supported by the Russian Science Foundation, grant N 20-11-20117.

References

[1] Keldysh, M. V., *On the completeness of eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators*, Uspekhi Mat. Nauk **26**, (1971), No. 160 (4), 15–41.

[2] Agmon, S., *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 119–147.

[3] Agranovich, M. S., *Spectral Problems in Lipschitz Domains*, Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), No. 347 (5), 3–8.

[4] Egorov, Yu., Kondratiev, V., and Schulze, B. W., *Completeness of eigenfunctions of an elliptic operator on a manifold with conical points*, Russ. J. Math. Phys. **8** (2001), no. 3, 267–274.

[5] Tarkhanov, N., *On the root functions of general elliptic boundary value problems*, Compl. Anal. Oper. Theory **1** (2006), 115–141.

[6] Shlapunov A.A., Tarkhanov N., On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators. Journal of Differential Equations, 255 (2013), 3305–3337.

[7] Peicheva A.S., Shlapunov A.A., On the completeness of root functions of Sturm-Liouville problems for the Lamé system in weighted spaces. Z. Angew. Math. Mech., V. 95, N. 11 (2015), 1202–1214.

[8] Shlapunov A.A., Tarkhanov N., Sturm-Liouville problems in domains with non-smooth edges. I. Siberian Advances in Math., 26:1 (2016), 30–76.

[9] Shlapunov A.A., Tarkhanov N., Sturm-Liouville problems in domains with non-smooth edges. II. Siberian Advances in Math., 26:4 (2016), 247–293.

Bruin-Troubetzkoy family of interval translation mappings: a new glance

Alexandra Skripchenko
(Higher School of Economics (Moscow))

In 2002 H. Bruin and S. Troubetzkoy described a special class of interval translation mappings on three intervals. They showed that in this class the typical ITM could be reduced to an interval exchange transformations. They also proved that generic ITM of their class that can not be reduced to IET is uniquely ergodic.

We suggest an alternative proof of the first statement and get a stronger version of the second one. It is a joint work in progress with Mauro Artigiani and Pascal Hubert.

Dynamics of greedy quantization

Eugene Stepanov
(St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS)

We will compare the classical quantization strategy with that of a greedy (consecutive) quantization and discuss the dynamics induced by the latter on just a simple one-dimensional example.

Scaling entropy for group actions
Масштабированная энтропия групповых действий

Georgii Veprev
(Leonhard Euler International Mathematical Institute (St. Petersburg))

I will present a brief survey of recent developments in the theory of scaling entropy – an invariant of a p.m.p. action of a countable group proposed by A. Vershik in the early 00-s. Unlike the classical approach, we fix a measure space and vary a measurable metric focusing on its dynamics. The asymptotics of its epsilon net turns out to be an efficient invariant of p.m.p. actions with zero Kolmogorov-Sinai entropy. We will discuss generic properties of this invariant, their connections to group properties, and how they help to answer B. Weiss' question about the existence of a universal zero-entropy system for amenable groups.

New approach to the theory of central measures for the Young and Gelfand-Zetlin type graphs

Новый подход к описанию центральных мер для графа Юнга и графов типа Гельфанда-Цетлина

Anatoly Vershik
(St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS)

Недавно выяснилось, что для некоторых важных графов, центральные меры, имеющие обширную и долгую историю, допускают, тем не менее, простое комбинаторное описание и соответствующую теорему существования и единственности таких мер при заданных предельных распределениях. При этом доказательство совершенно свободно от обычных трудных вычислений, свойственных применению общего эргодического методе. В сделанном наблюдении центральные меры напрямую связываются с либо с бернуллиевской мерой с теми же частотами либо с виртуальной бернуллиевской мерой в случае равных частот. Первые применения этого наблюдения содержатся в работах [1, 2]

Список литературы

[1] А. Вершик. Одномерные центральные меры на нумерациях упорядоченных множеств. *Функц. анализ и его прил.* **56**:4 (2022), 17–24.

[2] A.M. Vershik, F.V. Petrov, Central measures of continuous graded graphs: the case of distinct frequencies. *European J. Math.* **8**:(Suppl 2) (2022), 481–493.

Galois conjugate of exponents of core entropies

Chenxi Wu
(University of Wisconsin at Madison)

This is a joint work with Guilio Tiozzo and Kathryn Lindsey. We used a generalized version of the Milnor-Thurston kneading theory and symbolic dynamics to study the core entropy (entropy on Hubbard tree) of certain families of super-attracting polynomial maps and found a non-trivial necessary condition for these algebraic integers. This generalized and strengthened the prior work of William Thurston, Guilio Tiozzo and many others on quadratic core entropies. I will also talk about my current project aiming at generalizing these results to the p-adic setting.

Poster talks

Andrey Chernyshev (Moscow State University)
Entropy of a unitary operator on $\mathbb{C}^J$

Alexander Khramov (Novosibirsk State University)
Estimates and asymptotics for convergence rate in birth and death processes
Оценки и асимптотика скорости сходимости для процессов рождения и гибели

Alexey Kobzev (Higher School of Economics, Moscow)
Ergodic properties of interval exchange transformations

Maria Kubyshkina (Higher School of Economics, Moscow)
On combinatorial complexity for some classes of billiards in polygons
О комбинаторной сложности некоторых классов бильярдов в многоугольниках

Konstantin Nelaev (Higher School of Economics, Moscow)
On the number of ergodic invariant measures for IETs with flips
О числе эргодических инвариантных мер перекладываний отрезков с флипами

Contents