Международная конференция
“МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ
К 90-летнему юбилею акад. А.Г. Куликовского”

Тезисы докладов

20-24 марта 2023 г., Москва, Россия

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Математический центр мирового уровня “Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук”

НАУКА И УНИВЕРСИТЕТЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ РОССИИ

МИАН

SIMC
Steklov International Mathematical Center

Международная конференция

“МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ

К 90-летнему юбилею акад. А.Г. Куликовского”

ТЕЗИСЫ

20–24 марта, Москва, Россия

2023

УДК 531.01
ББК 22.2

Международная конференция проводится при поддержке Минобрнауки России
(грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение 075-15-2022-265)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ:
тезисы докладов конференции / Под редакцией А.Т. Ильичева. – Москва:

ISBN

В сборник включены тезисы докладов, представленных на конференции «Математические методы механики. К юбилею А.Г. Куликовского».

Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся математическими методами аналитической механики и механики сплошной среды.

УДК 531.01

ББК 22.2

ISBN

Оглавление

Инварианты характеристик высших порядков и точные решения системы уравнений одномерной газовой динамики без градиентной катастрофы

А.В. Аксенов, К.П. Дружков
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
aksenov@mech.math.msu.su
konstantin.druzhkov@gmail.com

Рассмотрена одномерная система уравнений газовой динамики для политропного процесса. Найдены все случаи существования инвариантов характеристик до второго порядка включительно. С использованием инвариантов характеристик, дополнительных к инвариантам Римана, задачи Коши сведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены решения задач Коши на всей пространственной оси. Полученные решения существуют во все моменты времени и описывают движения газа без градиентной катастрофы с конечными массой, импульсом и энергией. Приведены графики полученных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978, 687 с.
2. Аксенов А.В., Нелинейные периодические волны в газе, Известия РАН. Механика жидкости и газа, є 5, 2012, 88-98.
3. Aksenov A.V., Druzhkov K.P., Kaptsov O.V. Application of invariants of characteristics to constru ction of solutions without gradient catastrophe, International Journal of Non-Linear Mechanics, 147 (2022), 104249.

Утилизация парниковых газов водонасыщенных пластах. Некоторые задачи термогидродинамического моделирования

А.А. Афанасьев
НИИ механики МГУ, Москва, Россия
afanasyev@imec.msu.ru

Исследование многофазных течений, сопровождающих утилизацию (т.е. захоронение) сверхкритического углекислого газа (CO_2) в водонасыщенных и нефтяных пластах представляет актуальную задачу. Углекислый газ – парниковый газ, выбросы которого в атмосферу приводят к глобальному потеплению. Снижение антропогенных выбросов CO_2 за счет закачки и долгосрочного хранения газа в проницаемых недрах Земли является важнейшим средством решения климатических проблем. В нашей стране быстро возрастающий интерес к декарбонизации также связан с планирующимся введением трансграничного углеродного регулирования и созданием рынка квот на выбросы парниковых газов. Предполагается, что поставки потребителям ископаемого топлива, сжигание которого приводит к загрязнению окружающей среды, будут облагаться дополнительным “углеродным” налогом. В этой связи захоронение продуктов сжигания топлива, в частности CO_2, является средством для снижения воздействия отмеченного налогообложения на традиционные энергоресурсы.

Скрининг недр с целью определения геологических объектов, т.е. конкретных пластов, в которых можно безопасно хранить большие объемы парниковых газов, требует повсеместного применения численного моделирования многофазной многокомпонентной фильтрации в широком диапазоне давлений и температур, содержащем критические термодинамические параметры жидкостей и газов. Только с помощью гидродинамического моделирования можно определить такие важные показатели геологических объектов как емкость (объем газа, который можно захоронить), приемистость (максимальный темп нагнетания газа в пласт) и безопасность захоронения (отсутствие сценариев, при которых газ может вернуться в атмосферу). Оценка данных показателей осложняется околокритическим состоянием CO_2, растворением газа в пластовой воде и нефти, фазовыми превращениями между жидким и газообразным CO_2, примесями других газов (например, азота) и другими эффектами.

В докладе будет дан обзор моделей, учитывающих отмеченные эффекты, и представлены результаты приложения этих моделей в исследованиях утилизации CO_2 в водонасыщенных пластах [1-4].

Во-первых, будут представлены результаты исследования нелинейных волн – фронтов вытеснения, температурных разрывов и волн Римана – распространяющихся от нагнетательной скважины в пласт на начальных этапах закачки газа. На фазовой плоскости ограничены области качественно различных решений, взаимное расположение которых определяется околокритическим термодинамическим состоянием CO_2. Показано, что в существующих проектах утилизации закачка газа приводит к распространению различных пакетов волн [2].

Во-вторых, будут представлены результаты моделирования утечки CO_2 к поверхности Земли. В таких случаях, при снижении давления образуются две фазы жидкого и газообразного CO_2 и происходит интенсивное испарение сжиженного газа, приводящее к снижению температуры [1].

В-третьих, будут представлены результаты исследования, позволившего определить безразмерный критерий подобия, характеризующий максимальное расстояние, на которое газ распространится в наклоненном к горизонту пласте. Критерий получен из системы законов сохранения, описывающих несмешивающуюся фильтрацию воды и газа, и подтвержден в рамках обширного параметрического исследования нагнетания CO_2 в различные пласты [4].

В-четвертых, исследована перспективность закачки CO_2 в подземные хранилища природного газа (ПХГ) с целью замещения буферного газа сверхкритическим CO_2 и захоронения CO_2 Выполнено трехмерное моделирование в рамках расчета фильтрации смеси H_2O–CO_2–CH_4. Предложена стратегия эксплуатации ПХГ с двумя группами скважин, одна из которых используется для закачки и отбора природного газа (CH_4), а вторая – для захоронения CO_2 на периферии ПХГ. Показано, что за счет циклического изменения направления фильтрации газов, вызванного закачкой и отбором CH_4 из ПХГ, более половины утилизированного CO_2 можно растворить в пластовой воде. При этом объем растворенного CO_2 в несколько раз больше рабочего (активного) объема ПХГ. Таким образом, предложенная стратегия закачки газов позволяет эффективно захоронить CO_2 в ПХГ. Показано, что тем не менее закачка CO_2 также сопровождается и негативными последствиями, связанными с перемешиванием газов в пласте [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект No. 19-71-10051).

ЛИТЕРАТУРА

1. Afanasyev A.A. Multiphase compositional modelling of CO_2 injection under subcritical

conditions: The impact of dissolution and phase transitions between liquid and gaseous CO_2 on reservoir temperature, Int. J. Greenhouse Gas Control, 19 (2013), 731-742.
2. Afanasyev A.A. On the Riemann problem for supercritical CO_2 injection into an aquifer, Int. J. Greenhouse Gas Contr, 42 (2015), 629-643. 3. Afanasyev A., Vedeneeva E. Compositional modeling of multicomponent gas injection into saline aquifers with the MUFITS simulator J. Nat. Gas Sci. Eng., 94 (2021), 103988.
4. Afanasyev A., Vedeneeva E., Grechko S. Scaling analysis for a 3-D CO_2 plume in a sloping aquifer at a late stage of injection, J. Nat. Gas Sci. Eng., 106 (2022), 104740.

Теория обратимых разрывов и ее применение для исследования решений уравнений электромагнитной гидродинамики

И.Б. Бахолдин
ИПМ им М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия
ibbakh@yandex.ru

Была разработана теория разрывов в недиссипативных (обратимых) и слабодиссипативных моделях [1-4]. Под локальными структурами разрывов понимаются переходы между однородными, периодическими, стохастическими состояниями. В недиссипативном случае наблюдаются расширяющиеся структуры разрывов с волновыми зонами, описываемые усредненными уравнениями. На границах этих волновых зон наблюдаются локальные структуры разрывов. В слабодиссипативном случае со временем расширяющиеся структуры перестают расширяться, волновые зоны также описываются усредненными уравнениями, локальные структуры сохраняются. Проведена классификация структур разрывов, проанализирована их эволюционность и зависимость типа структуры от числа пересечений прямой соответствующей скорости разрыва с дисперсионными ветвями. Разработаны численные методы расчета обратимых и слабодиссипативных систем уравнений в частных производных, а также методы численного анализа для получения локальных структур разрывов как решений уравнений бегущих волн. Теория применялась для исследования обобщенных уравнений Кортевега–де Вриза, обобщенного уравнения Шредингера, уравнения композитного материала, уравнений распространения волн в трубах с упругими стенками.

Наиболее интересны приложения теории для исследования уравнений электромагнитной гидродинамики [3-5], представляющих собой уравнения классической магнитной гидродинамики [6] с добавленными дисперсионными членами [7]. У данных уравнений, как и в случае уравнений волн в трубах с упругими стенками, дисперсия коротких волн исчезает, поэтому возможно как формирование бездиссипативных структур разрывов, так и опрокидывание волн, требующее введения диссипации для получения классических решений. Имеются быстрые магнитозвуковые, альвеновские и медленные магнитозвуковые волны и соответствующие им структуры разрывов. Кроме того, при включении слабой газодинамической вязкости можно наблюдать разрыв, налогичный ударной волне в газовой динамике.

Проведено численное исследование уравнений бегущих волн для анализа структур разрывов. Для исследования быстрых магнитозвуковых волн использовались методы последовательного получения структур разрывов как предельных решений последовательностей уединенных волн [4,5]. Для получения решений в виде уединенных волн использовался метод, основанный на анализе собственных значений линеаризованной системы и вариации начальных данных [1]. Исследования показали, что при увеличении амплитуды быстрой уединенной волны возникает ее заострение, что означает опрокидывание волны при дальнейшем увеличении амплитуды. Из этого следует, что амплитуды структур разрывов солитонного типа (со временем в такой структуре волны на границе волновой зоны стремятся к последовательности уединенных волн) и разрывов с излучением (с локальной структурой типа перехода между однородным и периодическим состоянием) ограничены.

К быстрым магнитозвуковым волнам в случае резонанса короткой и длинной волны применялся также метод [2], основанный на анализе периодических решений и последовательных переходах к уединенным волнам и бездиссипативным структурам [4]. Результаты оказались аналогичными, полученным при исследовании решений уравнения Кортевега-де Вриза с производной пятого порядка [2]. Затем этим методом были исследованы медленные магнитозвуковые и альвеновские волны. Установлено, что заострение наблюдается только для коротких альвеновских волн. При близких значениях скоростей альвеновских и медленных магнитозвуковых волн у системы уравнений бегущих волн имеется три точки равновесия, существуют волны, являющиеся комбинациями длинных магнитозвуковых и альвеновских волн и соответствующие приближенные уединенные волны. В общем случае встречается до четырех состояний равновесия.

Сделано предположение, что в случае резонанса длинных и коротких волн за счет излучения короткой волны может быть предотвращено опрокидывание длинной волны, то есть этот процесс в этом смысле аналогичен влиянию вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды, М.: Физматлит, 2004, 318 с.
2. Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега-Бюргерса, ПММ, 75 (2011), 271-302.
3. Бахолдин И.Б. Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях, Журн. выч. матем. и мат. физ., 61 (2021), 458-474.
4. Бахолдин И. Б. Структуры бездиссипативных разрывов и уединенные волны в решениях уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики, Журн. выч. матем. и мат. физ., 62 (2022), 162-176.
5. Bakholdin I.B., Ilichev A.T. Fast magnetosonic solitonic structures in a quasi-neutral collision-free finite-beta plasma, Wave Motion, 112 (2022), 102936.
6. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика, М.: Логос, 2005, 328 с.
7. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики, М.: Физматлит, 2003,256 с.

Решение задачи Римана, возникающей при моделировании возмущений плазмы электрическим полем

С.И. Безродных[1], Н.М. Гордеева[2]
[1]ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана
[1]sbezrodnykh@mail.ru
[2]nmgordeeva@bmstu.ru

Рассматривается система уравнений Власова–Максвелла, описывающая слой плазмы под действием внешнего электрического поля. В качестве невозмущенной функции распределения выбирается, в зависимости от свойств среды, функция Максвелла или Ферми–Дирака [1]. Подобные задачи изучались в ряде работ, см., например, [2,3]. В предположении слабого внешнего поля исходная постановка сведена к нелокальной краевой задаче следующего вида [4]:

$$vf_x(x,v) + \alpha f(x,v) = vg(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) f(x,\xi) d\xi, \tag{1}$$

$$g_x(x) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) f(x,\xi) d\xi, \tag{2}$$

где искомые величины $f(x,v)$ и $g(x)$ представляют собой возмущения соответственно исходной функции распределения электронов и напряженности электрического поля в плазме; фазовые переменные (x,v), имеющие смысл безразмерных координаты и скорости, принадлежат полосе $\Pi = \{x \in (-l,l), v \in (-\infty,+\infty)\}$. Комплексный параметр α и вещественный параметр β характеризуют свойства плазмы и приложенное внешнее поле, а четная вещественная функция $k(\xi)$, выражаемая через невозмущенную функцию распределения электронов, удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) d\xi = 1$. Граничные условия для функций $f(x,v)$ и $g(x)$ предполагаются следующими:

$$f(l,v) = f(l,-v), \quad f(-l,v) = f(-l,-v), \qquad g(l) = 1, \quad g(-l) = 1. \tag{3}$$

В работе построено новое представление для общего решения системы уравнений (1), (2) в виде интеграла с некоторой плотностью $\psi(\lambda)$. Учет краевых условий (3) сводит нахождение функции $\psi(\lambda)$ к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши на вещественной прямой $\lambda \in (-\infty,+\infty)$. Для решения этого интегрального уравнения использован метод [5], основанный на применении задачи Римана линейного сопряжения, в сочетании с результатами [6] по решению такой задачи в случае, когда ее данные имеют сингулярный характер. Проведено качественное исследование зависимости построенного решения задачи (1)–(3) от параметров задачи, определяемых свойствами плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме, М.: Наука, 1976.
2. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы Собрание трудов. М.: Наука, 1973.
3. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса, М.: Мир, 1972.
4. Латышев А.В., Гордеева Н.М. Поведение плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды, ТМФ 192 (2017), 506-522.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи, М.: Наука, 1977.
6. Безродных С.И., Власов В.И. Сингулярная задача Римана-Гильберта в сложных областях, Ж. вычисл. мат. и матем. физ., 54 (2014), 1904-1953.

Термодинамика пластичности и осреднение диссипативных динамических систем

В.Л. Бердичевский
Wayne State University, Detroit, Michigan, USA
vbchevsky@gmail.com

Давно было осознано, что в термодинамике пластичности есть концептуальная трудность, связанная с понятием энтропии [1]. Энтропия была введена Клаузиусом с использованием предположения, что любые два состояния тела можно соединить обратимым процессом. Для металлов это не так: в окрестности любого состояния есть множество состояний, в которые можно попасть только по необратимому пути. Под состоянием здесь понимается физическое состояние металла, т.е. кристаллическая структура бместе со всеми еч дефектами. Отмеченная трудность имеет чисто практические последствия: до сих пор не удается построить уравнения состояния металлов, которые являются универсальными в том смысле, что описывают основные взаимосвязанные процессы одновременно происходящие при деформации - work hardening, softening, recovery, creep. Экспериментально доказано, что простейшие уравнения состояния не работают [2]. Разрешение этих трудностей можно искать в осреднении уравнений, описывающих динамику кристаллических дефектов. В докладе будет рассматриваться случай не очень больших температур, когда основным механизмом деформации является движение дислокаций. Будет рассказано о некоторых результатах в задаче осреднения динамических уравнений теории дислокаций. Наиболее интересным является появление в осредненных уравнениях двух энтропий, обычной термодинамической энтропии и энтропии дислокационной микроструктуры и, соответственно, двух температур с простым физическим смыслом. Осреднение диктует очень специальную структуру уравнений состояния. Предложены уравнения состояния, описывающие FCC-металлы. Некоторые из результатов доклада были опубликованы в работах [3-5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bridgman P.W. The thermodynamics of plastic deformation and generalized entropy, Review of Modern Physics, 22 (1950), 56-63.
2. Orowan E. Creep of metals, West of Scotland Iron and Steel Inst. Journal, 54 (1947), 45-96.
3. Berdichevsky V.L. Beyond classical thermodynamics: Dislocation-mediated plasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 129 (2019), 83-118.
4. Berdichevsky V.L. Reciprocity relations in driven dissipative systems, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 144 (2020), 104111.
5. Berdichevsky V.L. On temperature scaling in dislocation mechanics, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 170 (2023), 105102.

Квазипериодическая версия теоремы Гордона

С.В. Болотин[1], Д.В. Трещев[2]
Математический институт им.В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
[1]bolotin@mi-ras.ru
[2]treschev@mi-ras.ru

Рассматриваются гамильтоновы системы, обладающие семействами нерезонансных инвариантных торов, все частоты которых коллинеарны. Тогда при определенных условиях частоты зависят только от энергии. Это обобщение известной теоремы Гордона [1] о периодических решениях гамильтоновых систем. В то время как доказательство теоремы Гордона использует принцип Гамильтона, доказательство обобщения основано на вариационном принципе Персиваля. Доклад основан на результатах работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gordon W.B. On the relation between period and energy in periodic dynamical systems, Journal Math. Mech. 19 (1969), 111-114.
2. Bolotin S.V., Treschev D.V. Quasiperiodic version of GordonŠs theorem, Regular and Chaotic Dynamics, 28:1 (2023), 5-13.

Математическая модель равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках и исследование их устойчивости

К.В. Брушлинский[1,2,3], В.В. Крюченков[2,4], Е.В. Степин[1,2,5]
[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
[2]Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"
[3]brush@keldysh.ru, [4]kriuchenkov.viacheslav@mail.ru, [5]eugene.v.stepin@gmail.com

Доклад представляет обзор численных исследований специального класса ловушек для удержания плазмы магнитным полем, в которых токонесущие проводники погружены в плазменный объем. Внимание к ним привлечено А.И. Морозовым [1] с перспективой решения проблемы управляемого термоядерного синтеза и названы им галатеями. Исследования изложены на примере тороидальной ловушки "Галатея-пояс", распрямленной для простоты в цилиндр с двумя параллельными оси проводниками (рис. 1).

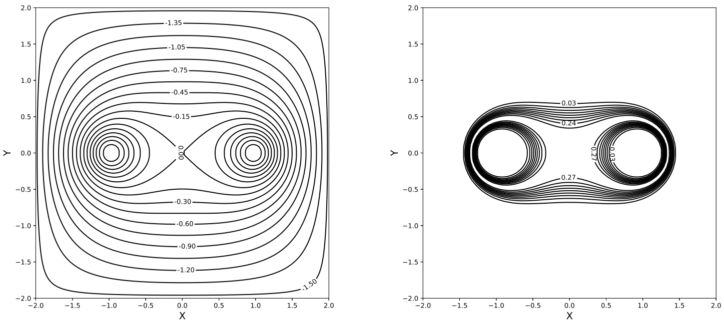

Рис. 1: Распределение магнитного поля (слева) и давления (справа) в цилиндрическом "Поясе" при $r_c = 0.2$, $q = 0.2$, $p_0 = 0.3$.

Математическая модель равновесия основана на краевой задаче с двумерным эллиптическим уравнением Грэда-Шафранова, которая решается численно. Основной интерес современного этапа работы – различные подходы к исследованию устойчивости равновесных магнитоплазменных конфигураций и ее зависимости от геометрии и параметров задачи. Рассмотрена устойчивость в линейном приближении одномерных конфигураций, окружающих один прямой проводник, и двумерных конфигураций в двумерной модели "Галатеи-пояса". Основным результатом расчетов в нескольких разных постановках задачи является определение ограничения на отношение характерных значений газового и магнитного давления, обеспечивающего устойчивость. Коротко изложены основные результаты, опубликованные в предыдущие годы [2,3], и по возможности подробно – результаты, полученные в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И. О галатеях Ц плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками, Физика плазмы, 118 (1992), 305-316.
2. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Математические модели равновесных конфигураций плазмы, окружающей проводники с током, Дифференц. уравнения, 56 (2020), 901-909.

3. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Вопросы устойчивости в двумерных математических моделях равновесия плазмы в магнитных ловушках-галатеях, Дифференц. уравнения, 57 (2021), 867-879.

Аналитические решения волновой динамики сред с течениями

В.В. Булатов
Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия
internalwave@mail.ru

В реальных океанических условиях вертикальная и горизонтальная динамика фоновых сдвиговых течений в значительной степени связана с внутренними гравитационными волнами (ВГВ). В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на динамику ВГВ. Обычно предполагается, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов ВГВ, то такие течения можно рассматривать как стационарные и горизонтально однородные. В общей постановке описание динамики ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Используя различные приближения, в том числе метод ВКБ, основанный на реалистичном предположении о плавности изменения параметров океанической среды по сравнению длинами ВГВ можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений. Синтез численных, аналитических и асимптотических результатов может дать первоначальное качественное и количественные представления о волновых процессах с учетом фоновых сдвиговых течений. Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ можно рассматривать различные модельные представления для стратификации и сдвиговых течений. В результате получаются аналитические выражения, описывающие дисперсионные зависимости, которые выражаются через модифицированную функцию Бесселя мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений используются дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Полученные результаты показывают значительную зависимость фазовой структуры возбуждаемых волновых полей от соотношения амплитуд придонного и приповерхностного течений для различных гидрологических моделей. В океане ВГВ могут обмениваться энергией со средними течениями. Если вертикальный градиент скорости течений велик, то средние течения могут отдавать энергию волнам, то есть соответствующие колебания могут быть неустойчивыми. Известно условие Майлса для числа Ричардсона, при выполнении которых не существуют неустойчивых собственных волн. В реальных океанических условиях может существовать горизонт, где скорость сдвигового течения совпадает с фазовой скоростью ВГВ: на этой глубине происходит поглощение волновой энергии, то есть передача части энергии волны средним течениям. Тогда этот уровень называется критическим. Поле ВГВ вблизи критического уровня можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует волне, переносящей энергию снизу вверх, а второе волне, переносящей энергию сверху вниз. Каждая из этих волн при пересечении критического уровня скачком убывает по амплитуде. Этот факт означает поглощение энергии ВГВ на критическом уровне, то есть передачу энергии средним течениям части энергии ВГВ. Поведение пакетов ВГВ, приближающихся к критическому уровню обычно рассматривается в ВКБ-приближении при предположении, что сдвиговое течение и частота плавучести медленно меняются на периоде осцилляций рассматриваемого волнового поля. Однако вопрос о том, в каких именно физических задачах могут возникать такие пакеты, как правило, не рассматривается. В работе рассмотрены вопросы, связанные с постановкой задач описания динамики ВГВ в стратифицированных средах с горизонтальными сдвиговыми течениями и обсуждены физические постановки задач, в которых могут возникать критические уровни. Можно предположить, что существуют собственные колебания с критическими уровнями. Однако при выполненном условии Майлса и строго монотонной функции, описывающей течение, таких собственных функций не существует. Поэтому для поля с заданным волновым числом все собственные частоты оказываются такими, чтобы не было критического уровня. Этот результат допускает простую физическую интерпретацию: волновая энергия любого собственного колебания должна сохраняться, а при наличии критического уровня часть энергии ВГВ поглощается, переходя в энергию средних течений. Поэтому критические уровни могут возникать только для вынужденных колебаний с некоторой заданной частотой. Поэтому технически проще рассматривать ВГВ, возбуждаемые не источниками, а колебаниями границы. Имеется также еще один класс задач, в которых могут возникать критические уровни – это задачи о подветренных течениях. Рассмотрим поток стратифицированной среды, набегающей на какое-либо препятствие – уступ дна, локальное возвышение дна. За этим препятствием возникает уходящая от него волна, которая может возбуждать ВГВ. Можно искать решение, зависящее от времени, единственность которого обеспечивается условием излучения и далее искать предельный переход решения. В такой постановки задачи особенность поля ВГВ на критическом уровне формируется вдали от обтекаемого препятствия. Таким образом, использование различных модельных представлений для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений) позволят редуцировать основную спектральную задачу к более простой, а также исследовать эту упрощенную задачу аналитически. Аналитические и численные результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные представления частоты плавучести и фоновых сдвиговых скоростей качественно верно могут описывать амплитудно-фазовую структуру ВГВ. Численные расчеты показывают, что учет реальных распределений основных гидрологических параметров океана дает возможность изучить все многообразие генерируемых волн. Помимо фундаментального интереса построенные математические модели представляют значительную ценность для практики, поскольку позволяют решать задачи моделирования волновых гидрофизических полей в широком классе приложений. Также полученные математические модели могут использоваться для качественной интерпретации наблюдаемых волновых явлений в океане и для разработки дистанционных методов обнаружения методами радиолокации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ грант No. 23-21-00194.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В.В. Аналитические свойства функции Грина уравнения внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями, ТМФ, 211 (2022), 200-215.

Численное решение задач с решениями типа бегущих волн

В.И. Васильев
Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
vasvasil@mail.ru

В докладе представлены численные методы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков, служащих математическими моделями распространения волновых фронтов и разрывов (ударных волн). Решения типа «бегущих волн», например, имеют уравнения: переноса, Хопфа, Баклея-Леверетта, Колмогорова-Петровского-Пискунова, Кортевега – де Вриса, квазилинейное параболическое уравнение.

Приведены результаты численного эксперимента, проведенного для перечисленного выше класса задач. Расчеты проведены на специальных пространственных сетках с помощью явной дискретизации конвективных и диффузионных членов определяющих уравнений с максимально допустимой величиной временного шага, обеспечивающей устойчивость построенной разностной схемы. В случае разрывного решения дискретизация исходной начально-краевой задачи осуществлена таким образом, что на скачке выполняется дискретный аналог условия Гюгонио. Расчеты показали достаточно высокую вычислительную эффективность построенных разностных схем.

Развитие возмущений в струйных течениях

В.В. Веденеев, Д.А. Ашуров, Л.Р. Гареев, Ю.С. Зайко, О.О. Иванов
НИИ механики МГУ, Москва, Россия
vasily@vedeneev.ru

В пристенных течения (пограничные слои, трубы, каналы) нарастание возмущений и переход к турбулентности теоретически возможен за счет роста собственных мод или же за счет немодального роста, вызванного несамосопряженностью оператора Орра-Зоммерфельда. Оба механизма наблюдаются экспериментально. При низком уровне естественной турбулентности доминирует рост собственных мод — волн Толлмина-Шлихтинга, который приводят к турбулизации течения. При повышенном уровне естественной турбулентности преобладает немодальный роста т.н. «оптимальных возмущений», проявляющихся в виде полосчатых структур, которые приводят к турбулизации минуя волны Толлмина-Шлихтинга.

Однако, в неограниченных течениях — сдвиговых слоях, струях, следах за телами — имеется значительный разрыв между линейной теорией и экспериментальными наблюдениями. А именно, неустойчивость в таких течениях имеет невязкую природу, вызванную наличием точки перегиба в профиле скорости невозмущчнного потока (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца). Теоретическая скорость нарастания собственных мод в этом случае на порядки выше, чем в пристенных течениях. Ранее в экспериментах не удавалось получить соответствия между теоретическими характеристиками растущих возмущений и измерениями, в результате чего оставался открытым вопрос о том, имеется ли вообще стадия линейного модального роста при развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, или же нелинейные эффекты практически всегда являются определяющими. Также, изза большой скорости роста собственных мод, в экспериментах не наблюдались какие-либо свидетельства немодального механизма роста возмущений.

В настоящем докладе рассматриваются теоретические и экспериментальные исследования, впервые демонстрирующие существование обоих механизмов линейного роста. Эксперименты проводятся в НИИ механики МГУ на установке, формирующей длинную ламинарную струю диаметром 120 мм [1]. Для исследования модального роста в струю вносятся тонкие колеблющиеся кольца с диаметром, соответствующим положению точек перегиба в профиле скорости. Эти кольца вносят контролируемые синусоидальные возмущения малой амплитуды. Измерение эволюции этих возмущений [2] проводится с помощью визуализации лазерным ножом и измерениями термоанемометром. Измеренные скорости роста, длины волн, распределения пульсаций по радиусу струи показали хорошее соответствие расччтам собственных мод уравнения Рэлея, что подтверждает линейный характер роста на начальном этапе развития.

Для изучения немодального роста сначала проводится расчет оптимальных возмущений струи. Их качественный вид — продольные вихри, эволюционирующие в дефекты продольной скорости — являются аналогами немодального «lift-up» механизма роста в пристенных течениях. В экспериментальной части исследования в струю вносятся специальные волнообразные конструкции — дефлекторы — создающие вихревые возмущения, качественно близкие к оптимальным. Их развитие изучается с помощью визуализации лазерным ножом, измерений термоанемометром и PIV-измерений в продольной и поперечной плоскостях. Измерения эволюции продольной и поперечной компонент скорости и качественной структуры течения показало соответствии теории [3]. Прослежено развитие возмущений вплоть до перехода к турбулентности и показано, что в процессе перехода не образуются волны Кельвина-Гельмгольца. Такой механизм перехода обнаружен в струйном течении впервые.

Обсуждается возможность управления переходом в струйном течении за счет управления характеристиками модального и немодального роста за счет управления профилем скорости струи и придания ечкнеосесимметричности. В первом случае исследуется задача оптимизации: выбор, в заданном классе функций, формы диффузора формирующего устройства, дающей оптимум функции, определяющей расстояние до точки перехода (комбинации скорости роста возмущений и групповой скорости их сноса). Точки минимума и максимума будут соответствовать наибольшей и наменьшей длине ламинарного участка струи. Во втором случае предполагается исследовать ослабление роста волн Кельвина-Гельмгольца за сччт возбуждения оптимальных возмущений, что было предсказано теоретически [4]. Комбинация возмущения, с одной стороны ослабляющего рост модальной неустойчивости, и с другой, самого не ускоряющего турбулизацию, должна приводить к затягиванию перехода к турбулентности, аналогично тому как это было продемонстрировано в пограничном слое [5].

Работа поддержана грантом РНФ No. 20-19-00404.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A. Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers, Phys. Fluids, 30 (2018), 043603.
2. Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V, Reshmin A.I., Vedeneev V.V. Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet, J. Fluid Mech., 934 (2022), A3.
3. Ivanov O.O., Ashurov D.A., Gareev L.R., Vedeneev V.V. Non-modal perturbation growth in a laminar jet: an experimental study, J. Fluid Mech. Under revision.
4. Wang C., Lesshafft L., Cavalieri A.V., Jordan P. The effect of streaks on the instability of jets, J. Fluid Mech., 910 (2021), A14.
5. Shahinfar S., Sattarzadeh S.S., Fransson J.H.M. Passive boundary layer control of oblique disturbances by finite-amplitude streaks, J. Fluid Mech., 749 (2014), 1–36.

Helicity in dispersive continuum mechanics

S. L. Gavrilyuk
Aix Marseille Univ, CNRS, Marseille, France
sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr

New conservation laws are obtained for the equations of dispersive continuum mechanics describing Euler–van der Waals–Korteweg's fluids, fluids containing small gas bubbles, long free surface gravity waves (Serre–Green–Naghdi equations), ... The corresponding mathematical models are characterized by the dependence of the energy on spatial and temporal derivatives of unknowns. In particular, the analogues of helicity invariants are derived.

This is a joint work with Henri Gouin.

О двух задачах теории струй

А.М. Гайфуллин
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия
gaifullin@tsagi.ru

Рассмотрены две задачи вихревой динамики жидкости, связанные с затопленными струями: осесимметричная струя с расходом через начальное сечение и трехмерная пристенная струя. Можно выделить две цели данного доклада. Первая цель: представить новые теоретические результаты исследования течения струй. Следует отметить, что публикации по этим двум задачам были и ранее, но некоторые из них содержали ошибочные утверждения и результаты. Обнаружение этих ошибочных результатов и замена их на верные – вторая и главная цель доклада.

Впервые попытка получить решение уравнений Навье - Стокса для дальнего поля осесимметричной струи с начальным расходом была предпринята Ю.Б. Румером в 1952г [1]. Дальнейшее развитие эта задача получила в работах [2,3] и др., в которых кроме решения в дальней области предпринимались попытки связать характеристики течения в этой области с профилем скорости в выходном сечении струи. Для этого необходимо было найти новые неизвестные инварианты струйного течения, которые бы обеспечивали данную связь. В 2012 г. в работе [4] был получен новый инвариант уравнений пограничного слоя для осесимметричных струй, который, как будет показано в докладе, позволяет связать параметры течения в дальней области струи с профилем скорости в начальном сечении. Полученные результаты без труда обобщаются на случай турбулентной струи, поскольку усредненное по времени поле скорости в турбулентной осесимметричной струе в рамках модели турбулентной вязкости описывается теми же уравнениями, что и ламинарная струя.

Вторая задача посвящена исследованию ламинарной трехмерной струи вязкой несжимаемой жидкости, распространяющейся вдоль твердой плоскости. В [5] показано, что в рамках параболизированных уравнений Навье-Стокса существует однопараметрический класс автомодельных по продольной координате решений. Для используемых уравнений вычислены локальные законы сохранения массы, импульса и момента импульса. Однако, потоки указанных величин через поперечное сечение пристенной струи не сохраняются, что привело к неверному определению показателя автомодельности.

В настоящей работе в приближении пограничного слоя получено автомодельное решение для дальнего поля трехмерной пристенной ламинарной струи. Показатель автомодельности определен с помощью численного решения. Получены координатные разложения автомодельного решения при малых и больших значениях радиальной координаты. В главном приближении разложения по малой координате азимутальная скорость отсутствует, а продольная и радиальная компоненты скорости зависят от азимутального угла одинаковым образом. Решение Гамеля для течения в конфузоре является главным членом разложения по большим значениям радиальной координаты. Несмотря на то, что отсутствие на данный момент инварианта рассматриваемого течения не позволило теоретически определить параметр автомодельности, предположение о размерности этого инварианта и асимптотическое разложение реleния при малых значениях радиальной координаты позволило построить универсальные (не зависящие от формы и высоты над твердой поверхностью выходного отверстия струи) профили скорости и давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румер Ю.Б. Задача о затопленной струе, ПММ, 1952, No. 2, 255-256.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, М.: Наука, 1978, 736 с.
3. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами, Новосибирск: Наука. Сибирское отделение,1989, 336 с.
4. Naz R. Conservation lows for laminar axisymmetric jet flows with weak swirl, Applicable Analysis, 2012, No. 5, 1045-1052.
5. Krechetnikov R., Lipatov I. Hidden invariances in problems of two-dimensional and three-dimensional wall jets for Newtonian and non-Newtonian fluids, SIAM Journal on Applied Mathematics, 62 (2002), 1837-1855.

Класс точных решений уравнений релятивистского вязкого теплопроводного газа, связанных с концентрацией энергии

А.Н. Голубятников, Д.В. Украинский
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
golubiat@mail.ru
d.v.ukrainskiy@gmail.com

С большой признательностью и теплотой первый автор доклада отмечает совместную работу на кафедре гидромеханики, в течение более чем полувека, с Андреем Геннадьевичем Куликовским, академиком, одним из Великих наших учителей, у которого всегда можно найти поддержку и уверенность в научных исследованиях в самых различных областях механики. Одной из таких задач — проблеме концентрации энергии — будет посвящено это сообщение.

В свое время академик Л.И. Седов (1985) выдвинул идею производства релятивистских безмассовых частиц, обладающих энергией-импульсом (например, фотонов), в результате анализа реактивного движения простой материальной точки. Далее вопрос возможной кумуляции энергии, а в некоторых случаях и импульса, развивался в нескольких направлениях.

Прежде всего, нами был исследован класс построенных ранее точных решений релятивистской механики взрывного типа, сопровождающего коллапс, как в специальной, так и в общей теории относительности, когда конечная энергия сосредотачивалась в относительно тонком ударном слое, уходящем на бесконечность (Голубятников А.Н., 1987).

Следующим было обобщение задачи Г. Герца о распространении упругих столкновений в бесконечной цепочке материальных точек с оптимизацией распределения их масс (Голубятников А.Н., Плотников С.И., 1989). Здесь в рамках релятивистской механики выходит на «конечную» точку бесконечно малой массы, кроме энергии, также и пропорциональный ей конечный импульс.

Вопрос о кумуляции энергии при сжатии пузырька в несжимаемых неньютоновских вязких жидкостях вошел в кандидатскую диссертацию Украинского Д.В. (МГУ, 2022). В ней также дано точное решение задачи о барохронном сжатии сферическим поршнем нерелятивистского нелинейно-вязкого теплопроводного совершенного газа, причем при наличии неоднородностей плотности, связанных с произвольным решением трехмерного уравнения Лапласа.

Большие плотности и температуры требуют учета эффектов теории относительности, поэтому в настоящей работе строятся аналогичные точные решения релятивистской газовой динамики, в которых теплопроводность представлена моделью Ландау-Лифшица. Наличие неоднородностей типа горячих пустот или холодных уплотнений позволяет приложить результаты к физике эволюции Вселенной.

О коротковолновой неустойчивости границы жидкость-газ в рамках континуальной и сетевой моделей пористой среды

С.В. Горкунов, В.А. Шаргатов
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия
gorkunov.ser@mail.ru
shargatov@mail.ru

Рассматривается горизонтальный слой пористой среды, показанный на рис. 1. Области Ω_g и Ω_f расположены в низкопроницаемом слое пористой среды. Область Ω_g заполнена газом с постоянным давлением P_g. Область Ω_f содержит жидкость. Нижняя граница области Ω_f примыкает к высокопроницаемому слою (пропластку), содержащему жидкость с постоянным давлением P_L. Предполагается, что давление $P_g > P_L$, поэтому жидкость из области Ω_f вытесняется газом в пропласток. Граница жидкость-газ обозначается как $S(x,t)$.

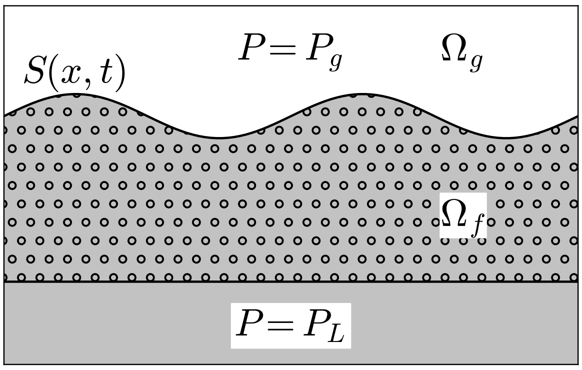

Рис. 1: Схема течения

В начальный момент времени положение границы раздела жидкость-газ задается в виде $S(x,0) = L + Acos(Kx)$.

Исследование устойчивости контактной границы выполнено с использованием континуальной [1] и сетевой [2] моделей пористой среды. Для континуальной модели фильтрация жидкости в области Ω_f рассматривается в рамках закона Дарси. Сетевая модель описывает пористую среда в виде системы пересекающихся капилляров, которые соединяются в узлах. Скорость жидкости в капилляре зависит от его свойств и давления в двух узлах, с которыми соединен капилляр. Показано, что для сетевой модели с квадратными ячейками существует сильная зависимость параметров течения от угла между условной поверхностью плоской границы жидкость-газ и линией, параллельной капиллярам сетевой модели. В общем случае вытеснение жидкости из капилляров происходит не полностью, жидкость остается в части капилляров даже в предположении о том, что неустойчивость не развивается. Для обеих моделей уравнения решались численно и аналитически. Установлено, что скорость роста амплитуды начального возмущения растет с уменьшением длины волны. Признаков выхода на асимптотическое значение не обнаружено вплоть до отношения амплитуды к длине волны равного 10.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда є 21-11-00126.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shargatov V.A., IlЎichev A.T., Tsypkin G.G. Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium, International Journal of Heat and Mass Transfer, 83 (2015), 552-561.
2. Li J., McDougall S.R., Sorbie K.S. Dynamic pore-scale network model (pnm) of water imbibition in porous media, Advances in Water Resources, 107 (2017), 191-211.

Метод локализации в задачах механики дискретного контакта

И.Г. Горячева
Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия
goryache@ipmnet.ru

При контактном взаимодействии реальных тел область контактного взаимодействия, как правило, дискретна в силу шероховатости поверхностей контактирующих тел. Для изучения влияния топографии поверхности на напряженно-деформированное состояние приповерхностных слоев взаимодействующих тел необходимо решать задачу дискретного контакта, т.е. задачу со смешанными граничными условиями для ограниченной или неограниченной системы пятен контакта.

Для исследования периодических контактных задач в пространственной постановке как для одноуровневой, так и многоуровневой системы осесимметричных (например, сферических) штампов, которая моделирует внедрение вершин неровностей поверхности контртела в деформируемое основание, предложен метод локализации. Суть этого метода состоит в учете влияния на распределение давления на фиксированном пятне контакта фактических давлений на близлежащих к нему пятнах контакта (эффект близкодействия) и осредненного (номинального) давления на удаленных пятнах контакта. Обоснование этого метода основано на анализе ядра интегрального уравнения, полученного для случая внедрения в упругое полупространство одноуровневой периодической системы сферических инденторов, расположенных на заданном расстоянии друг от друга [1].

С использованием метода локализации получены распределения давлений на отдельных пятнах фактического контакта в случае внедрения как одноуровневой, так и разноуровневой систем равноотстоящих друг от друга штампов в упругое и вязкоупругое полупространство [2]. На основе построенных решений анализируется влияние расстояния между штампами и их высотного расположения на распределение контактных давлений и радиус отдельного пятна контакта. Разработанный подход использован также для расчета характеристик контактного взаимодействия при сближении шероховатых поверхностей с учетом сил молекулярного взаимодействия в зазоре между контактирующими поверхностями [3,4].

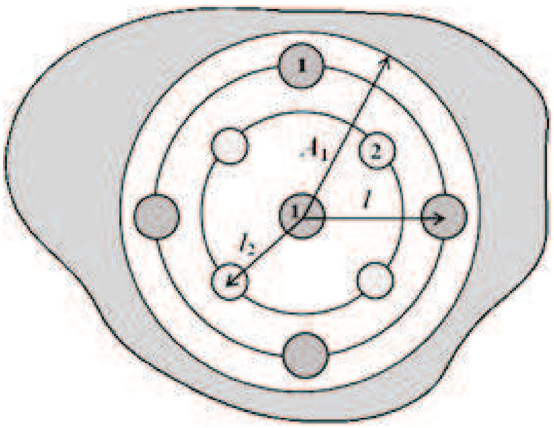

Рис. 2: Расчетная схема, основанная на методе локализации

Полученные решения позволяют провести анализ влияния пространственного расположения инденторов на характер распределения как контактных, так и внутренних напряжений в упругом полупространстве, а также оценить скорость накопления контактно-усталостных повреждений в поверхностном слое материала при циклических нагрузках, связанных со скольжением шероховатого контртела.

Работа выполнена по теме государственного задания FFGN-2023-0005.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М. Наука, 2001, 478 с.
2. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. The discrete contact problem for two-level system of indenters, Contimuum Mechanics and Thermodynamics, 2022.
3. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии, Изв.РАН, МТТ, No.4 (2017), 1-11.
4. Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology, Elsevier, 2022, 210 p.

Стандартные и нестандартные каустики в линейных и нелинейных задачах для двумерных уравнений мелкой воды.

С.Ю. Доброхотов
Институт проблем механики им А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия;
Центр интегрируемых систем,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.
s.dobrokhotov@gmail.com

Доклад посвящен конструктивным необрушающимся асимптотическим решениям системы нелинейных уравнений мелкой воды в бассейне с пологими берегами. Глубина бассейна описывается функцией $D(x)$, береговая линия определяется уравнением D(x)=0, при этом предполагается, что на береговой линии $\nabla D(x)$ не обращается в ноль. Рассматриваются задачи о волнах, порожденных пространственно локализованными источниками и о периодических по времени решениях, описывающих береговые волны и сейши. Мы показываем, что в асимптотиках изучаемых решений важную роль играют особые кривые, известные в геометрической оптике и квазиклассическом приближении как каустики. При этом каустики могут быть стандартными, с которыми связаны такие специальные функции как функции Эйри, но могут быть и кнестандарнымимнь, к которым можно отнести передний фронт распространяющейся волны, порожденной локализованным источником, а также береговую линию. Для линеаризованных уравнений мелкой воды соответствующие асимптотики определяются модифицированным каноническим оператором Маслова на особых лагранжевых многообразиях. Периодические по времени волны связаны с собственными функциями уравнения типа Бельтрами-Лапласа с вырождающейся метрикой и так называемыми бильярдами с кполужесткими стенкаминь. Основной недостаток линейных моделей состоит в невозможности описания в их рамках эффектов набега на берег (заплеска) изучаемых процессов. Один из основных результатов доклада состоит в представлении конструктивного преобразования ("модифицированного"преобразования Карриера-Гринспана) в окрестности береговой линии (кнестандартной каустикинь), позволяющего восстановить в параметрической форме асимптотические решения нелинейных уравнений по найденным асимптотическим решениям линейных уравнений и описать в том числе динамику набега изучаемых волн на берег.

Доклад основан на работах, выполненных совместно с А. Ю. Аникиным, В.Е.Назайкинским, Д.С.Миненковым, А.В.Цветковой и поддержанных Российским научным фондом, проект 21-11-30011.

Rigorous analysis of the Zakharov-L'vov stochastic model for wave turbulence

A. Dymov
MIAN, Moscow, Russia
dymov@mi-ras.ru

The wave turbulence (or weak turbulence, WT) was developed in 1960's by V.E. Zakharov and his school as a kinetic theory of interacting nonlinear waves, parallel to the famous PeierlsЎ kinetic theory, and as a toy model for the strong, Kolmogorov turbulence. From mathematical point of view, it presents a heuristic tool to study small-amplitude oscillations in nonlinear Hamiltonian PDEs with periodic boundary conditions of large period. Since its creation WT has been intensively developed in physical works and found many applications in theoretical physics. In recent years several mathematical works were published, where significant progress in rigorous justification of the theory was achieved, but the problem is still poorly understood.

The principal assertion of WT is that one of the main characteristics of solution, called the *energy spectrum*, approximately satisfies a nonlinear kinetic equation, called the *wave kinetic equation*. In my joint works [1-3]. with S. Kuksin, A. Maiocchi and S. Vladuts we completed the first step in rigorous justification of this assertion for the energy spectrum of the damped/driven nonlinear Schrodinger equation. This stochastic model for WT was earlier suggested by Zakharov and LЎvov.

More specifically, the energy spectrum is a function $n_s(\tau)$ on the dual lattice $L^{-1}\mathbb{Z}^d \ni s$, where d is the space dimension and L is the space period. The energy spectrum $n_s(\tau)$ also depends on appropriately rescaled time τ, and is given by

$$n_s(\tau) = \mathbb{E}|v_s(\tau)|^2, \qquad s \in L^{-1}\mathbb{Z}^d,$$

where $\mathbb{E}$ is the expectation and v_s are the Fourier coefficients of the solution. Instead of the exact solution $v = (v_s)_{s\in L^{-1}\mathbb{Z}^d}$, in papers [1-3] we considered a quasisolution $(V_s)_{s\in L^{-1}\mathbb{Z}^d}$, obtained as a third order truncation of a formal series in amplitude for the exact solution v. For various orders of wave turbulence limits — first space period goes to infinity and then amplitude of solution goes to zero, or vise versa, we established that the corresponding energy spectrum $\mathbb{E}|V_s(\tau)|^2$ satisfies the discussed above assertion of WT. To complete the rigorous justification of the wave turbulence hypotheses it remains to show that the quasisolution well approximates the exact solution. This is a work in progress.

REFERENCES

1. Andrey Dymov, Sergei Kuksin, Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: kinetic limit, Comm. Math. Phys., 382 (2021), 951-1014.
2. Andrey Dymov, Sergey Kuksin, Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 2: Method of diagram decomposition, J. Stat. Phys., 190 (2023.
3. Andrey Dymov, Sergei Kuksin, Alberto Maiocchi, Sergei Vladuts, The large-period limit for equations of discrete turbulence, arXiv: 2104.11967.

Волновые аттракторы в линейном и нелинейном режимах

Е.В. Ерманюк
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
ermanyuk@hydro.nsc.ru

Внутренние (инерционные) волны в однородно стратифицированной (вращающейся) жидкости подчиняются специфическому дисперсионному соотношению, которое связывает частоту колебаний и угол между вектором групповой скорости и вектором ускорения свободного падения (угловой скорости вращения жидкости) и не содержит масштаба длины. Следствием дисперсионного соотношения является закон отражения, который существенным образом меняет правила бильярда волновых лучей в замкнутой области по сравнению с классическим случаем геометрической оптики. При отражении волнового пучка конечной ширины от наклонной границы происходит изменение ширины пучка (фокусировка либо расфокусировка). В случае замкнутой области преобладает фокусировка волн, вследствие чего волновые лучи притягиваются к замкнутой траектории, называемой волновым аттрактором.

Недавние натурные наблюдения стимулируют интерес к изучению механизмов образования крупномасштабных азимутальных структур в сферических слоях небесных тел [1-3]. В докладе обсуждаются режимы движения в волновых аттракторах для различных уровней описания (лучевой скелет, пучок волн), диссипативных механизмов, геометрий области и типов возмущения. Рассмотрены такие геометрии областей вращающейся жидкости, которые допускают сосуществование волновых аттракторов в 'меридиональных' сечениях и нетривиальных азимутальных структур в 'экваториальных' сечениях [4,5]. Показано, что в случае сферического слоя [5] в зависимости от частоты и амплитуды колебаний могут развиваться волны Россби, неустойчивость слоя Стюартсона, а в случае цилиндрического слоя [4] может наблюдаться формирование полигональных вихревых кластеров. В качестве стартового механизма потери устойчивости при росте амплитуды возмущений идентифицирован триадный резонанс. Постановка [4] распространена на случай внесения возмущения в систему путем прецессии крышки (т.е. при наличии амфидромной точки), показана возможность формирования азимутальных возмущений типа волн Россби, а также эффектов перемежаемости для осредненных по времени азимутальных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adriani A., *et al.* Clusters of cyclones encircling JupiterЎs poles, Nature, 553 (2018), 216-219.
2. Gizon L., Cameron R. H., Bekki Y., Birch A. C., *et al.* Solar inertial modes: Observations, identification, and diagnostic promise, Astronomy & Astrophysics, 652 (2021), L6.
3. Gilleta N., Gerick F., Jaulta D., Schwaiger T. *et al.* Satellite magnetic data reveal interannual waves in EarthЎs core, PNAS, 119 (2022), e2115258119.
4. Boury S., Sibgatullin I., Ermanyuk E., Shmakova N. *et al.* Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor, J. of Fluid Mechanics, 926 (2021), A12.
5. Subbotin S.V., Shmakova N.D., Ermanyuk E.V., Kozlov V.G. Stewartson layer instability and triadic resonances in rotating sphere with oscillating inner core, Physics of Fluids, 34 (2022), 064103.

Общие соотношения для волн, распространяющихся в одномерных упругих системах

В.И. Ерофеев, Е.Е. Лисенкова
Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия
erof.vi@yandex.ru, eelissen@yandex.ru

Выявляются общие закономерности, присущие волнам, распространяющимся в одномерных упругих системах. Приводятся локальные законы переноса энергии и волнового импульса в случае, когда лагранжиан упругой системы зависит от обобщенных координат и их производных до второго порядка включительно. Показано, что в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью, отноlение плотности потока энергии к плотности потока волнового импульса равно фазовой скорости. Установлено, что для систем, динамическое поведение которых описывается линейными уравнениями или нелинейными относительно неизвестной функции, отноlение средних значений плотности потока энергии к плотности волнового импульса равно произведению фазовой и групповой скоростей волн.

Установлено, что для распределенных механических систем с произвольней дисперсией плотности энергии и волнового импульса, а также их потоки связаны посредством фазовой скорости. Найдены инварианты, характеризующие взаимодействие упругой волны с движущимся сосредоточенным объектом. Приводятся примеры использования полученных соотноlений для определения коэффициента преобразования энергии упругих волн в энергию поступательного движения объектов.

Алгоритм поиска геометрии устройства, формирующего затопленную струю с заданными характеристиками профиля скорости

Ю.С. Зайко, А.А. Спасова
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
zayko@imec.msu.ru

Работа посвящена созданию алгоритма управления затопленной струей, который определяет геометрию формирующего устройства, обеспечивающую заранее заданные характеристики начального профиля скорости струи. В качестве такой характеристики может выступать форма профиля скорости или, например, параметры линейной неустойчивости струи.

Рассматривается класс формирующих устройств аналогичных компактному устройству, созданному в лаборатории экспериментальной гидродинамики НИИ механики МГУ.

Это устройство формирует струю диаметром 0.12 м и длиной ламинарного участка до $5.5D$ при числах Рейнольдса в диапазоне 4000 Ц 10000 (D Ч диаметр струи) [1]. Оно состоит из подготовительной трубы-детурбулизатора и короткого быстро расширяющегося диффузора с металлическими сетками на выходе, предотвращающими отрыв потока от стенки диффузора. Экспериментальное изучение линейной неустойчивости формируемой струи и сравнение полученных данных с теорией показали, что модальный механизм играет важную роль в переходе к турбулентности в затопленных струях [2]. Следовательно, задав связь геометрии формирующего устройства и характеристик неустойчивости струи с получаемым профилем скорости, можно создать алгоритм, отыскивающий геометрию устройства, которое обеспечивает струю с требуемыми характеристиками неустойчивости.

Известно, что затопленные струи с классическими профилями скорости и плотностью, не отличающейся от плотности окружающей среды, могут быть абсолютно неустойчивыми лишь при наличии противотечения на границе [3]. Экспериментально же абсолютная неустойчивость наблюдалась для горячих плавучих струй [4] и струи плазмы [5]. Для изотермических струй с плотностью, равной плотности окружающей среды, было обнаружено, что для сложных «неклассических» профилей скорости возможна абсолютная неустойчивость без наличия противотечения [6-8]. Одной из мотиваций разработки предлагаемого в настоящей работе алгоритма является его использование для создания устройства, формирующего абсолютно неустойчивую изотермическую струю.

Алгоритм состоит в следующем: 1) параметризуется геометрия участка канала диффузора, являющегося частью формирующего устройства, 2) проводится численное моделирование течения внутри формирующего устройства, получается начальный профиль скорости струи, 3) ищется значение выбранного функционала, связывающего параметризацию геометрии и полученный при ее использовании профиль скорости, 4) для минимизации функционала применяется метод градиентного спуска. В предлагаемой работе функционал, связывающий геометрию формирующего устройства и профиль скорости струи, представляет собой отличие профиля скорости от заранее заданного (он есть разность площади под графиком заранее заданного профиля и профиля, соответствующего рассматриваемой геометрии формирующего устройства). В качестве заранее заданных профилей взяты профиль 1, являющийся конвективно неустойчивым, и профиль 2, являющийся абсолютно неустойчивым. Абсолютная неустойчивость профиля 2 подтверждается наличием седловой точки на плоскости ($\mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Im}\alpha$), где α Ч осевое волновое число. Геометрия формирующего устройства параметризуется полиномом 6-й степени. В расчете с профилем 2 функционал достиг величины $\sim 10^{-5}$ за 20 итераций, и была определена геометрия устройства, формирующего струю с этим профилем. В случае профиля 1 функционал не опустился ниже 0.01; такое ограничение объясняется выбором параметризации геометрии Ч лучшая сходимость может быть достигнута при ином выборе параметризации геометрии формирующего устройства.

Таким образом, показано, что алгоритм позволяет найти геометрию, обеспечивающую требуемый профиль, однако, существуют ограничения сходимости алгоритма, вызванные выбором способа параметризации геометрии. Для управления струями с помощью данного алгоритма будут использованы более сложные функционалы, включающие в себя характеристики неустойчивости (и/или их комбинации): например, скорости роста и сноса малых возмущений.

Работа выполнена за счет гранта МК-4090.2022.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A. Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers, Phys. Fluids, 30 (2018),

043603.
2. Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V., Reshmin A.I., Vedeneev V.V. Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet, J. Fluid Mech. 934 (2022), A3.
3. Abid M., Brachet M., Huerre P. Linear hydrodynamic instability of circular jets with thin shear layers, Eur. J. Mech. B/Fluids, 12 (1993), 683-693.
4. Monkewitz P.A. Bechert D.W., Barsikow B., Lehmann B. Self-excited oscillations and mixing in a heated round jet, J. Fluid Mech., 213 (1990), 611-639.
5. Demange S., Chazot O., Pinna F. Local analysis of absolute instability in plasma jets, J. Fluid Mech., 903 (2020), A51.
6. Vedeneev V.V., Zayko J.S. On absolute stability of free jets, J. Phys: Conf. Series, 1129 (2018), 012037.
7. Lesshafft L., Marquet O. Optimal velocity and density profiles for the onset of absolute instability in jets, J. Fluid Mech., 662 (2010), 398-408.
8. Balestra G., Gloor M., Kleiser L. Absolute and convective instabilities of heated coaxial jet flow, Phys. Fluids, 27 (2015), 054101.

Траектории частиц жидкости в поле поверхностной уединенной волны в слое жидкости под ледяным покровом

А.Т. Ильичев[1,3], А.С. Савин[2,4], А.Ю. Шашков[2,5]

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[3]ilichev@mi-ras.ru
[4]assavin@list.ru
[5]kapitan720@yandex.ru

Изучается движение частиц в слое идеальной жидкости глубины H и плотности ρ, вызванное поверхностной уединенной волной.

Жидкость занимает область D:

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 < z < \eta(x)\},$$

которая имеет границу

$$\partial D = \partial D^+ \cup \partial D^- = \{z = \eta(x) \cup z = 0\}.$$

Слой жидкости находится под под ледяным покровом, который модедируется упругой пластиной Кирхгоффа-Лява; толщина пластины h и она находится в начальном напряженном состоянии растяжения с горизонтальным напряжением σ_0. Массовую плотность пластины обозначим через ρ_s, жесткость пластины – через J, поверхность раздела вода–лед задается уравнением $z = \eta(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим бегущую волну, которая распространяется налево вдоль оси x со скоростью V. В системе координат, движущейся со скоростью V, вектор скорости частиц $\mathbf{v} = (u, v)$ удовлетворяет следующему асимптотическому условию

$$\mathbf{v} \to \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x \to \infty.$$

Произведем далее следующие масштабные преобразования:

$$(x, z) \to \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{H}\right), \quad \eta \to \frac{\eta}{H}, \quad \mathbf{v} \to \frac{\mathbf{v}}{V}.$$

В новых безразмерных переменных, для обозначения которых будем использовать старые символы, система уравнений Эйлера для бегущих волн в пренебрежении инерцией пластины по сравнению с инерцией слоя жидкости, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathbf{0},\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0,\qquad (x,z)\in D;\\
&\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\lambda\eta-b\kappa_1+\gamma\kappa_2=\mathrm{const},\qquad (x,z)\in\partial D^+;\\
&\partial_x\eta\,u-v=0,\quad v=0,\qquad (x,z)\in\partial D^-;\\
&\mathbf{v}\to(1,0),\quad \eta(x)\to 1,\qquad x\to\infty.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Постоянные λ, b и γ определяются соотношениями

$$\lambda=gH/V^2,\quad b=\frac{\sigma_0 h}{\rho H V^2},\quad \gamma=\frac{J}{\rho V^2 H^3}.$$

Функции κ_j, $j=1,2$, выражаются по формулам

$$\kappa_1=\frac{\partial_{xx}\eta}{(1+(\partial_x\eta)^2)^{3/2}},\qquad \kappa_2=\partial^2_{xx}\frac{\partial_{xx}\eta}{(1+(\partial_x\eta)^2)^{3/2}}.$$

Можно показать, что для больших начальных напряжений ($b>1/3$) и для малых амплитуд

$$u=\sqrt{\frac{1+2w_1}{1+w_2^2}},\quad v=w_2\sqrt{\frac{1+2w_1}{1+w_2^2}},$$

где

$$
\begin{aligned}
&w_1=a_0(x),\quad w_2=-\frac{\partial a_0(x)}{\partial x}z+O(\mu^2),\quad a_0(x)=\mu\mathrm{ch}^{-2}\nu x+O(\mu^2),\\
&\nu=|\mu|^{1/2}(b-1/3)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

и

$$\eta(x)=1-a_0(x)+O(\mu^2),$$

где $\lambda-1=\mu\ll 1$, $\mu>0$.

Траектории частиц жидкости в поле указанной волны определятся из уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,$$

которые решаются методом последовательных приближений по параметру μ.

Связанные модели синтеза композитов

А.Г. Князева
Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия
anna-knyazeva@mail.ru

Композиционные материалы привлекают все большее внимание в связи с их особыми свойствами. Актуальным является не только расчет свойств композитов и разработка моделей их механического поведения, но и моделирование собственно процесса синтеза. Это непосредственно связано с оптимизацией технологий, разновидностей которых становится все больше. В настоящей работе речь идет о разработке связанной модели синтеза композита в условиях 3D-технологий, когда для получения упрочняющих частиц в смеси порошков используются экзотермические составы. Под связанными моделями, как правило, понимают такие модели, в которых учитывается взаимовлияние полей разной физической природы, например, полей температуры и деформаций, диффузионных и механических процессов и т.д. К связанным могут быть отнесены и модели, в которых учитывается взаимовлияние разных масштабных уровней, особенно если разделение масштабов непосредственно связано с разделением физических явлений. Напряжения и деформации, сопутствующие формированию композита, связаны как с изменением свойств в ходе реакций, так и с градиентами температуры в зоне реакции и в области действия внешнего источника тепла, который может способствовать как инициированию реакций, так и поддержанию некоторого режима синтеза. Математическая модель учитывает наличие подложки, источник тепла, связанный с управляющим воздействием, связанный характер теплопереноса и деформирования. Изменение свойств в ходе химических реакций учитывается с помощью дополнительных физических параметров. Комплекс химических реакций описывается редуцированной схемой. В общем случае модель реализована численно. Однако после принятий некоторых допущений в модели появляются частные варианты, допускающие качественные аналитические оценки, что полезно для лучшего понимания сопутствующих явлений. Например, удается построить решение в форме бегущей волны для квазиупругого и взкоупругого приближений. Работа фактически является продолжением предыдущих работ автора [1-4].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 22-11-00100, https://rscf.ru/project/22-11-00100.

ЛИТЕРАТУРА

1. Князева А.Г. Решение задачи термоупругости в форме бегущей волны и его приложение к анализу возможных режимов твердофазных превращений, ПМТФ, No. 2 (44), 2003, 26-38.
2. Князева А.Г. Твердофазное горение в условиях плоского напряженного состояния 1. Стационарная волна горения, ПМТФ, No. 2 (51), 2010, 27-38.
3. Князева А.Г. Твердофазное горение в условиях плоского напряженного состояния. 2. Устойчивость к малым возмущениям Прикладная механика и техническая физика, No. 3 (51), 2010, 24-31.
4. Князева А.Г. Термомеханическая устойчивость фронта твердофазного превращения к двумерным возмущениям, Вестник ПермГТУ, Механика, No. 4, 2011, 88-123.

О линейных уравнениях динамики

В.В. Козлов
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия
kozlov@pran.ru

Рассматриваются линейные автономные системы дифференциальных уравнений второго порядка, не содержащие первых производных независимых переменных. Такие системы часто встречаются в классической механике. Особый интерес представляют случаи, когда внешние силы не потенциальны. Важный частный случай – уравнения неголономной механики, линеаризованные в окрестности положений равновесия второго рода. Показано, что линейные системы такого вида всегда можно представить в виде уравнений Лагранжа и Гамильтона. Приччм эти уравнения вполне интегрируемые: они допускают полные наборы независимых инволютивных интегралов, которые квадратичны или линейны по скоростям. Линейные интегралы являются нчтеровыми: их наличие связано с нетривиальными группами симметрий.

Разрывные решения нелинейных гиперболических систем уравнений механики сплошных сред и структура разрывов

А.Г. Куликовский
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия
kulik@mi-ras.ru

Системы гиперболических уравнений механики сплошных сред Ц это упрощенная форма уравнений, не учитывающих мелкомасштабных процессов. Цель доклада Ц обсудить возможное влияние мелкомасштабных процессов на решения систем гиперболических уравнений. Это влияние может проявляться в основном через граничные условия на разрывах. Необходимое число граничных условий для корректной постановки задачи для системы гиперболических уравнений определяется условием эволюционности.

Соотношения на разрывах бывают двух типов. Соотношения, которые являются следствием законов сохранения, и непременно должны выполняться, как, например, соотношения, выражающие непрерывность потоков массы, импульса и энергии. Эти соотношения будем называть основными. Если число основных граничных условий меньше числа, требуемого условиями эволюционности, то граничные условия следует находить как условия существования решения, представляющего структуру разрыва. Эти соотношения будем называть дополнительными.

При весьма общих предположениях доказано, что требование существования структуры разрыва приводит ровно к такому числу соотношений на разрыве (включая основные соотношения), которое соответствует эволюционности разрыва.

В докладе предполагается рассказать о разрывах, граничные условия на которых, могут содержать более одного дополнительного граничного условия. Это Ц фронты ионизации в магнитном поле, проходя через которые газ приобретает электропроводность и за разрывом подчиняется уравнениям магнитной гидродинамики. Также это Ц фронты затвердевания, проходя через которые среда без касательных напряжений превращается в упругую среду.

Будет рассказано о ситуациях, когда наличие колебаний в стационарной структуре разрыва приводит к множеству особых (неклассических) разрывов различного типа, имеющих структуру. Численное построение решений в этом случае показало, что из этого множества особых разрывов устойчивую структуру имеет только один. Кроме того, было обнаружено, что существуют неособые разрывы с нестационарной структурой, в которой происходят периодические по времени колебания.

Будет также рассказано о решениях системы уравнений, описывающей нелинейные продольно-крутильные волны в стержнях при наличии вязкой диссипации, проявляющейся в структуре разрывов. В зависимости от соотношений между коэффициентами объемной и сдвиговой вязкости, среди решений этой системы могут быть особые разрывы. Это означает, что система гиперболических уравнений не определяет полностью решения задач.

Некоторые актуальные задачи детонации

<u>В.А. Левин</u>[1,2], Т.А. Журавская[1], И.С. Мануйлович[1], В.В. Марков[1,3],
О.Г. Сутырин[1], А.Н. Хмелевский[1]
[1]МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2]Институт автоматики и процессов управления ДОРАН, Владивосток, Россия

[3]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
levin@imec.msu.ru

В докладе представлены результаты численного исследования ряда оригинальных задач, связанных с проблемами управления детонационным горением.

Для волн детонации, распространяющихся в плоском канале по стехиометрической водородно-воздушной смеси с добавками аргона и озона в плоском канале получены зависимости их параметров от размера ячеек. Установлено, что соответствующими добавками можно существенно снизить скорость волны и температуру продуктов детонации. Определены условия устойчивости ячеистой структуры детонационной волны в каналах с пористым покрытием. Обнаружено, что детонационная волна в смеси с добавками в определенных концентрациях более устойчива к возмущениям, вызванным расположенными в канале препятствиями, чем в чистой смеси. Получено, что добавки делают структуру детонационной волны регулярной и качественно меняют механизм реинициирования детонации после прохождения области с препятствиями и могут быть использованы для поддержания детонации в каналах с пористым покрытием.

В результате численного моделирования процессов инициирования и распространения двумерной детонации при взаимодействии ударной волны с горючим газовым пузырем обнаружены три режима инициирования детонации в зависимости от интенсивности падающей волны и формы пузыря. Установлено, что удлинение пузыря приводит к уменьшению предельных значений числа Маха, причем к более значительному в случае плоской симметрии. В случае инертного пузыря в горючей смеси обнаружены пять воспламенения смеси. Показано что предельные значения числа Маха снижаются с $\mathrm{M} = 3.4$ до $\mathrm{M} = 2.5$ в плоском случае и до $\mathrm{M} = 1.6$ в осесимметричном за счет интенсивной фокусировки волны. Установлено слабое влияние удлинения пузыря на пороговые значения числа Маха в осесимметричном случае по сравнению с плоским, в котором умеренное вытягивание пузыря существенно снижает пороговое число Маха.

Расчетами течений в камере сгорания в форме кольцевого зазора между пластинами с вращающейся волной детонации пропановоздушной смеси определены условия формирования заданного числа волн в многоголовой волне детонации, связанные с размерами камеры сгорания и параметрами инициаторов. При рассмотренных геометрических параметрах области течения получены режимы течения с числом волн от 3 до 8. Получены значения максимального числа волн при заданных размерах камеры сгорания. Установлено, что существование максимального критического значения числа волн в многоголовой детонации связано с блокировкой подачи горючей смеси. Получено, что при неравномерном расположении инициаторов постепенно происходит выравнивание взаимных углов между волнами, составляющими многоголовую детонацию. Проанализированы тяговые характеристики устройства в зависимости от количества одновременно вращающихся волн.

Равновесная модель плотностного течения

В.Ю. Ляпидевский
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
liapid@hydro.nsc.ru

Плотностные течения являются важным классом стратифицированных течений в поле силы тяжести. Они встречаются в океане и атмосфере и реализуются как течения более плотной жидкости над неровным дном. В докладе основное внимание уделено особенностям распространения подводных лавин с подъемом неподвижных осадков на фронте волны. Экспериментально этот класс течений наименее изучен. Имеющиеся немногочисленные натурные данные о распространении снежных и подводных лавин используются для построения математических моделей различного уровня описания процесса: от интегральных до трехмерных нестационарных моделей. Интегральные модели сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, задающих характерный размер, массу и скорость движения более плотной жидкости определенной формы. Одной из первых интегральных моделей лавины является модель Куликовского–Свешниковой [1]. Следующий уровень моделирования плотностных течений с учетом подъема осадков и турбулентного вовлечения окружающей жидкости связан с использованием однослойных и многослойных уравнений мелкой воды [2].

Цель данного исследования состоит в асимптотическом анализе плотностных течений на наклонной плоскости, построении точных решений и определении скорости фронта подводной лавины на основе однопараметрической модели, являющейся равновесной для одномерной нестационарной модели, представленной в [3]. В приближении однослойной мелкой воды построена математическая модель турбулентного течения более плотной жидкости на равномерном склоне с учетом вовлечения покоящейся окружающей жидкости и подъема неподвижных осадков перед фронтом волны. Основное внимание уделено структуре самоподдерживающейся волны (подводной лавины) и оценке скорости ее распространения. Изучена структура бегущих волн, построены точные автомодельные решения и численно исследован выход течения на автомодельный режим. Показано, что в зависимости от толщины и начальной плотности слоя осадков автомодельное решение имеет различную структуру и скорость распространения фронта. Выявленные особенности течений демонстрируют зависимость скорости распространения фронта подводной лавины от способа ее генерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Turnbull B., McElwaine J.N., Ancey C. KulikovskiyЏ-SveshnikovaЏ-Beghin model of powder snow avalanches: Development and application, Journal of Geophysical Research: Earth Surface 112 (2007), N. F01004.
2. Eglit M., Yakubenko A., Zayko J. A review of Russian snow avalanche modelsЧfrom analytical solutions to novel 3D models, Geosciences, 10 (2020), 77.
3. Liapidevskii V.Yu., Dutykh D., Gisclon M. On the modelling of shallow turbidity flows, Advances in Water Resources, 113 (2018), 310-327.

Diffraction of tidal waves on elongated island of elliptic shape

A. Marchenko[1], Z.Kowalik[2]
[1] The University Centre in Svalbard, Norway
[2] University Alaska Fairbanks, USA
alekseym@UNIS.no

An analytical solution of linearized shallow water equations is constructed to investigate the trapping of semidiurnal tide on elongated island of elliptic shape. The problem geometry corresponds to the region around Hopen Island in the Barents Sea located near the critical latitude where the wave frequency is close to the Coriolis parameter. A general solution is achieved by the superposition of the incident and reflected (scattered) waves. The incident wave simulates the tidal wave propagation towards the island and its prominent feature, an amphidromic point located to the South-East from Hopen Island. The analytical solution for the reflected wave is constructed in elliptic coordinates in terms of series by Mathieu functions. However, the proximity to the critical latitude allows to approximate the solution by the series of exponential functions. A simulated drift of Lagrangian water particles constructed with the help of analytical solutions reproduces well the observed clockwise trapped motion of the drifting buoy near Hopen Island. While this paper focuses on the details of the model used at the specific site of Hopen Island, a similar trapping analysis can be applied to circular or elliptic islands that have a small scale relative to the barotropic Rossby deformation radius.

Макро- и микрогидродинамика вязкой жидкости при обтекании супергидрофобных поверхностей

А.Н. Осипцов, А.И. Агеев
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
osiptsov@imec.msu.ru, aaiageev@mail.ru

В последние десятилетия возрос интерес к так называемым ксупергидрофобнымњ поверхностям (СГП), сочетающим химическую гидрофобность поверхностного молекулярного слоя и наличие микрорельефа (текстуры), образованного микрокавернами либо микровыступами с характерным размером порядка 10-6-10-4 м. При течении жидкости вдоль такой поверхности в элементах текстуры силами поверхностного натяжения могут удерживаться малые пузырьки газа. Так как в области контакта жидкости и поверхности пузырьков трение практически отсутствует, осредненное макроскопическое трение на СГП также снижено, а жидкость на поверхности приобретает ненулевую макроскопическую скорость проскальзывания. За счет уменьшения области контакта жидкости и твердой поверхности статический угол смачивания одиночной капли, помещенной на СГП, может превышать 150ө. Снижение трения и проскальзывание жидкости на СГП подтверждаются многочисленными экспериментальными данными (см., например, [1]). Супергидрофобные поверхности обладают целым набором свойств, представляющих существенный прикладной интерес. Помимо отталкивания жидкости на молекулярном уровне и пониженного гидродинамического сопротивления, такие поверхности имеют способность к самоочистке, обладают повышенным порогом обледенения, заметно измененным коэффициентом теплообмена и даже антикоррозийными и антимикробными свойствами [2]. Все это поддерживает интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям характеристик СГП, имеющим целью установить связь параметров микротекстуры поверхности с ее макроскопическими свойствами. Ключевой гидродинамической характеристикой супергидрофобной поверхности является тензор скольжения, входящий в формулировку эффективного граничного условия (условия скольжения типа Навье), которое используется при осредненном описании течений вязкой жидкости вблизи супергидрофобной поверхности на масштабе, много большем линейного размера элементов текстуры поверхности (макромасштабе).

Доклад посвящен обзору теоретических результатов, полученных авторами в последние годы в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова [3-9]. В первой части представлены новые решения уравнений гидродинамики с условием проскальзывания на твердых стенках для задач о растекании пленки жидкости от заданного локализованного источника массы, стекании ручейка по наклонной стенке и стекании жидкости с поверхности горизонтального цилиндра в поле силы тяжести. Эти решения предоставляют удобный инструмент для экспериментального определения главных компонент тензора скольжения супергидрофобных поверхностей. Во второй части доклада представлены решения ряда задач микрогидродинамики вязкой жидкости вблизи каверн полосчатой супергидрофобной поверхности, частично либо полностью заполненных газовой фазой. Разработан новый вариант метода граничных элементов для двумерных течений, описываемых уравнениями Стокса в областях с составными граничными условиями, включающими зоны прилипания жидкости и нулевых касательных напряжений. На основании параметрических численных решений исследованы сдвиговые течения, скорость которых направлена под углом к кавернам супергидрофобной поверхности с периодической полосчатой текстурой. Решены задачи о стационарном и пульсирующем течении вязкой жидкости в плоском канале с супергидрофобными стенками. После осреднения полученных решений по периоду микротекстуры проведено параметрическое исследование компонент тензора скольжения и эффекта снижения гидродинамического сопротивления. Обсуждается влияние геометрических параметров текстуры, кривизны и положения межфазной границы в кавернах, а также пульсаций пузырьков в каверне под действием наложенных гармонических колебаний. Для сдвиговых течений вдоль каверн полосчатой текстуры длина проскальзывания оказывается примерно в два раза больше, чем для течения поперек каверн при тех же значениях остальных параметрах. Показано, что учет кривизны и смещения межфазной границы внутрь каверны приводит к значительному ухудшению макроскопического проскальзывания жидкости. Для стационарного течения в канале с супергидрофобной стенкой падение давления вдоль канала приводит к заметному изменению положений межфазной поверхности в кавернах и длин проскальзывания скорости в различных сечениях канала. Обнаружен неожиданный эффект - наложение гармонических колебаний на сдвиговое течение в окрестности каверны с пульсирующим газовым пузырьком может приводить к увеличению скорости проскальзывания и более заметному снижению сопротивления, чем в аналогичном стационарном течении вблизи СГП. Данный эффект может служить одним из возможных объяснений механизмов снижения трения в турбулентных течениях вдоль СГП.

Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ при частичной поддержке гранта РФФИ No. 20-01-00103.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rothstein J.P. Slip on superhydrophobic surfaces, Annu. Rev. Fluid Mech., 42 (2010), 89.
2. Бойнович Л.Б., Емельяненко А.М. Гидрофобные материалы и покрытия: принципы создания, свойства и применение, Успехи химии, 77 (2008), 619.
3. Агеев А.И., Осипцов А.Н. Автомодельные режимы растекания тонкого слоя жидкости вдоль супергидрофобной поверхности, Изв. РАН. МЖГ, (2014) No. 3, 37.
4. Агеев А.И., Осипцов А.Н. Стекание ручейка вязкой жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности, Доклады РАН, 458 (2014), 652.
5. Агеев А.И., Осипцов А.Н. Стоксово течение над каверной супергидрофобной поверхности, содержащей пузырек газа, Изв. РАН. МЖГ, (2015) No. 6, 35.
6. Ageev A.I., Golubkina I.V., Osiptsov A.N. Application of boundary element method to Stokes flows over a striped superhydrophobic surface with trapped gas bubbles, Phys. Fluids, 30 (2018), 012102.
7.Агеев А.И., Осипцов А.Н. Стоксово течение в микроканале с супергидрофобными стенками, Изв. РАН. МЖГ, (2019) No. 2, 59.
8.Агеев А.И., Осипцов А.Н. Сдвиговое течение вязкой жидкости над каверной, содержащей пульсирующий пузырек газа, Доклады РАН, 493 (2020), 38.
9. Агеев А.И., Осипцов А.Н. Пульсирующее течение вязкой жидкости над каверной, содержащей сжимаемый газовый пузырек, Изв. РАН. МЖГ, (2021) No. 6, 38.

Точные решения уравнений жидкости второго порядка

А.Г. Петрова[1,2], В.В. Пухначев[2,3], О.А. Фроловская[2,3]
[1] Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

[2] Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
[3] Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
annapetrova07@mail.ru
pukhnachev@gmail.com

Уравнения жидкости второго порядка описывают движения релаксирующих жидкостей, таких как водные растворы полимеров. Вопросы существования и единственности решений начально-краевых задач для этих уравнений изучались в работах Д. Сиоранеску и В. Жиро, К. Ле Ру, Дж.Р. Галди и других. Эти публикации не содержат информации о качественных свойствах решений указанных уравнений. Такую информацию можно получить, анализируя их точные решения, чему и посвящена данная работа. В ней изучены слоистые течения, модельная задача со свободной границей, построен аналог решения Т. Кармана, которое описывает стационарное движение жидкости второго порядка в полупространстве, индуцированное вращением ограничивающей ее плоскости, приведено обобщение решения В.А. Стеклова о нестационарных винтовых течениях ньютоновской жидкости на случай жидкости второго порядка.

Градиентные потоки в теории оптимизации формы

П.И. Плотников
Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
piplotnikov@mail.ru

Математическая теория оптимизации формы имеет ряд приложений в механике жидкостей и твердых тел, теории обратных задач математической физики и задачах анализа изображений. В докладе мы исследуем математические аспекты теории на типичном примере задачи об идентификаци формы включения, содержащегося в некоторой физической области. Эта задача относится к числу обратных задач и в общем случае решения не имеет. Приближенное решение можно получить путем минимизации функционала, зависящего от формы включения и являющегося мерой отклонения данной формы от искомого решения. Для задачи идентификации и ряда других задач оптимальным выбором целевого функционала является энергетический функционал Кона-Вогелиуса. В свою очередь, эта вариационная проблема без дополнительных геометрических ограничений на форму включения также не имеет решения. Для преодоления этих трудностей обычно проводится регуляризация целевого функционала путем добавления к нему членов, зависящих от геометрических свойств границы: периметра включения, функционалов Уиллмора или Эйлера, контролирующих кривизну границы включения. Такой подход имеет прямую аналогию с теорией функционала Мамфорда-Шаха в теории изображений. Наиболее важным вопросом теории оптимизации формы является построение эффективного алгоритма для проведения численных расчетов. Стандартным является метод скорейшего спуска, основанный на теории дифференцирования форм. Исследование корректности и сходимости метода спуска сводится к анализу градиентного потока регуляризованного целевого функционала. Уравнения, определяющие этот поток, представляют собой нестационарную задачу со свободной границей и имеют составной тип. Доклад посвящен изучению корректности задачи Коши для градиентного потока регуляризованного функционала Кона-Вогелиуса. Устанавливается глобальная разрешимости этой задачи в двумерном случае. Также проводится анализ модели фазового поля, которая широко применяется в задачах топологической оптимизации. В рамках этой модели исходная задача формулируется в виде эллиптико-параболической системы дифференциальных уравнений для фазовой функции. Для этой системы доказываются нелокальные теоремы существования и единственности сильных решений.

Об интегрируемости маятника Циглера

И.Ю. Полехин
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия
ivanpolekhin@mi-ras.ru

Маятник Циглера является классической системой для изучения в теории устойчивости неконсервативных систем. В первую очередь эта система известна в связи с «парадоксом» потери устойчивости при добавлении в систему трения. Насколько нам известно, изучение динамики *в целом* и интегрируемости маятника Циглера ранее не проводилось.

Нами исследуется динамика плоского двойного маятника при наличии в системе постоянной по величине следящей силы, направленной вдоль одного из звеньев маятника. Предполагается, что на систему не действует сила тяжести, но в узлах маятника могут находиться пружины линейной жесткости.

Исследуется случай, когда жесткость пружины, расположенной в точке подвеса маятника, равна нулю. В этом случае порядок системы может быть понижен. Доказывается, что в редуцированной системе существуют двухпараметрические семейства периодических решений, т.е. локально, в окрестности этих семейств, у системы есть два первых интеграла. В этом случае можно говорить об интегрируемости системы (как минимум, для части начальных условий). Объясняется механизм нарушения периодичности решений при изменении параметров или начальных данных системы, из чего следует неинтегрируемость системы.

Обобщенные модели метаматериала

А.В. Порубов
Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
alexey.porubov@gmail.com

В последнее время возрастает интерес к исследованиям и получению метаматериалов, искусственных материалов с задаваемыми свойствами. Уже известны примеры приложений данных материалов в промышленности, биологии и медицине. Разрабатываемые теоретические модели метаматериалов реализуются в экспериментах.

Одной из наиболее распространенных одномерных моделей метаматериала является цепочечная модель масса в массе. Эта дискретная модель представляет собой обобщение простейшей цепочки с ближайшими взаимодействиями путем добавления так называемых присоединенных масс. Основной результат линейного анализа заключается в существовании запрещенной зоны скоростей для волн деформации в цепочке. Нелинейное моделирование позволяет описать ряд новых эффектов в частности, связанных с локализацией нелинейных волн.

Недавно были предложены обобщения модели масса в массе, связанные с добавлением присоединенной массы или изменения порядка присоединения масс. Это, в частности, может приводить к возникновению дополнительных запрещенных зон скоростей волн.

В настоящей работе будет рассмотрен ряд обобщенных моделей масса в массе. Основной упор будет сделан на описание при помощи континуального предела исходной дискретной задачи. Дисперсионный анализ позволяет исследовать динамику изменения запрещенных зон скоростей в зависимости от параметров обобщенной модели. Численное моделирование граничного возмущения дает представление о генерации периодической волны вне и внутри запрещенных зон. Также оказывается возможным разработать механизм управления дополнительными элементами обобщенной модели, приводящее к прохождению или непрохождению волн деформации через метаматериал. Нелинейное обобщение модели приводит к выводу модельных уравнений, описывающих динамику локализованных влн деформации в обобщенных моделях.

Многомасштабный анализ стационарных колебаний термоупругого композитного материала

Е.М. Рудой[1,2], С.А. Саженков[1,3], И.В. Фанкина[1,4], А.И. Фурцев[1,5]
[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
[2]rem@hydro.nsc.ru
[3]sazhenkovs@yandex.ru
[4]fankina@hydro.nsc.ru
[5]furtsev@hydro.nsc.ru

В настоящее работе исследуются задача о стационарных колебаниях термоупругого волокнистого композита в рамках двухмерной теории упругости. Задача содержит два малых положительных параметра δ и ε, которые описывают толщину волокна и расстояние между двумя соседними волокнами, соответственно. Опираясь на вариационную формулировку проблемы, с помощью современных методов асимптотического анализа, исследуется поведение решений при стремлении указанных параметров к нулю. В результате строятся две модели для каждого предельного случая. А именно, сначала, при $\delta \to 0$ методом формальных асимптотических разложений (см., например, [1,2]) мы получаем предельную модель, в которой включения являются тонкими (нулевой ширины). Затем, на основе первой предельной модели, при $\varepsilon \to 0$ мы получаем гомогенизированную модель, которая описывает эффективное поведение в макроскопической шкале, то есть в масштабе, где нет необходимости принимать во внимание каждое отдельное включение. Переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ основан на методе двухмасштабной сходимости на многообразиях (см., например, [3,4]).

Работа поддержана Российским научным фондом (грант No. 22-21-00627).

ЛИТЕРАТУРА

1. Serpilli M., Rizzoni R., Lebon F., Dumont S. An asymptotic derivation of a general imperfect interface law for linear multiphysics composites, Int. J. Solids Struct., No. 180-181 (2019), 97-107.
2. Serpilli M., Dumont S., Rizzoni R., Lebon F. Interface models in coupled thermoelasticity, Technologies, No.9(17) (2021), 1-16.
3. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal., No. 23 (6) (1992), 1482-1518.
4. Allaire G, Damlamian A, Hornung U. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications. In: Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media (May 1995), A. Bourgeat et al. eds., pp. 15–25, World Scientific Pub., Singapore.

Обобщенные решения с ударными волнами в механике упругопластических сред

В.М. Садовский
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

sadov@icm.krasn.ru

Проблема построения решений с поверхностями разрыва скоростей и напряжений (ударными волнами) в пластически деформируемых средах относится к числу нерешенных проблем механики. Было установлено [1], что определяющие уравнения теории упругопластического течения Прандтля–Рейсса не приводятся к дивергентной форме, поэтому не удается применить к анализу допустимых разрывов метод интегрального обобщения. Впервые уравнения сильного разрыва в рамках геометрически линейного приближения были получены с помощью дополнительного принципа максимальной диссипации энергии при переходе через поверхность разрыва [2]. В дальнейшем этот подход был применен к анализу разрывных решений в модели необратимо уплотняющейся среды с кусочно-линейной поверхностью текучести [3,4].

Альтернативный метод построения системы уравнений сильного разрыва в теории упруго-пластичности основан на приближении разрывного решения последовательностью решений модели вязкой среды, сглаживающей разрывы, при стремлении коэффициентов вязкости к нулю [5,6].

Решения с ударными волнами малой амплитуды в идеальной упругопластической среде и среде с линейным упрочнением можно получить методом интегрального обобщения вариационного неравенства, основанного на формулировке определяющих соотношений пластичности в виде принципа максимума Мизеса. Это неравенство представимо в следующем общем виде [7,8]:

$$\big(\tilde{U} - U\big) \cdot \big(\mathcal{D}\langle U\rangle - g(U)\big) \geq 0\,, \qquad \tilde{U},\ U \in F\,.$$

Здесь U – вектор–функция, составленная из проекций вектора скорости, компонент тензора напряжений и параметров упрочнения, F – выпуклое и замкнутое множество допустимых вариаций, ограниченное поверхностью текучести среды, $g(U)$ – заданная “правая часть”, $\tilde{U}$ – варьируемый вектор, $\mathcal{D}\langle U\rangle$ – линейный симметричный гиперболический по Фридрихсу оператор:

$$\mathcal{D}\langle U\rangle = A\,\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^i\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,.$$

В моделях динамики сыпучих и пористых сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, входящий в вариационное неравенство дифференциальный оператор определяется через производящие потенциалы $\Phi(U)$ и $\Psi_i(U)$:

$$\mathcal{D}\langle U\rangle = \frac{\partial\varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_i(U)}{\partial x_i}\,, \qquad \varphi(U) = \frac{\partial\Phi}{\partial U}\,, \quad \psi_i(U) = \frac{\partial\Psi_i}{\partial U}\,,$$

и является термодинамически согласованным по Годунову.

В геометрически нелинейной теории проблема описания пластических ударных волн далека от окончательного решения. В первую очередь потому, что до настоящего времени окончательно не решен вопрос о представлении конечной деформации среды в виде суперпозиции упругой и пластической составляющих. Поэтому не существует общепринятой геометрически нелинейной модели.

В настоящем докладе соотношения на ударных волнах конечной амплитуды анализируются в рамках упрощенной термомеханической модели динамики изотропно упрочняющейся среды с упругим изменением объема и пластическим формоизменением с помощью принципа максимального производства энтропии. При отсутствии упрочнения аналогичный метод анализа применялся в [9].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ

(Соглашение 075-02-2022-873).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов В.Н. К исследованию уравнений динамики упругопластических сред при конечных деформациях. Нелинейные волны деформаций. Таллин, 2 (1977), 102-105.
2. Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упруго-пластических средах, Прикладная математика и механика, 36 (1972), 106-116.
3. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Рычков В.А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред, Проблемы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. к 60-летию акад. В.П. Мясникова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 1996, 116-127.
4. Буренин А.А., Дудко О.В., Семенов К.Т. Об условиях существования поверхностей разрывов необратимых деформаций в упругопластических средах, Прикладная механика и техническая физика, 50 (2009), 176-185.
5. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Ударные волны в упругопластических средах со структурой, определяемой процессом релаксации напряжений, Труды МИАН, 289 (2015), 178-194.
6. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля–Рейсса, Журнал вычислительной математики и математической физики, 56 (2016), 650-663.
7. Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. - 208 с.
8. Садовский В.М. О термодинамической согласованности и математической корректности в теории упругопластических, сыпучих и пористых сред, Журнал вычислительной математики и математической физики, 60 (2020), 738-751.
9. Садовский В.М. К теории ударных волн в сжимаемых пластических средах, Известия РАН: Механика твердого тела, № 5 (2001), 87-95.

Гидродинамическое сопротивление сублимирующих подводных объектов

Н.И. Сидняев
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
Sidn_ni@mail.ru

В докладе представлены современные подходы к решению проблемы математического моделирования динамических возмущений в морской воде надводных и подводных тел традиционной формы. Даются основные сведения о потоке, о принципе неразрывности, освещаются кинематические и динамические стороны общих уравнений движения. Указываются их решения для различных условий течения. Приведены допущения классической гидродинамики, а именно, однородность, несжимаемость, вязкость, а также математические приемы применяемые при решении трех- и двумерных возмущенных движений. Приводятся различные методы приближений для конкретных примеров. Подробно изложены исследования гидродинамического обтекания сублимирующей сферы и представлены способы снижения сопротивления трения путем подвода массы в пристеночную пограничную область потока веществ с малыми значениями вязкости и плотности. Получены зависимости гидродинамических параметров при различных обтеканиях сферы [1]. Задача о движении твердых тел в среде с сопротивлением обсуждается с позиций теоретической механики. Вводится правдоподобная модель воздействия среды на тела. Проведен качественный анализ нелинейных движений простых моделей различной конфигурации в потоке сопротивляющейся среды [1]. Современные исследования показывают, что подъемная сила может иметь такую зависимость от обобщенных скоростей, которая носит недиссипативный характер. Указаны условия, в которых возможны устойчивые ротационные режимы движения. Особое внимание уделяется подъемной силе, как новому (по сравнению с задачей о движении точки) силовому фактору. Отмечается, что подъемная сила приводит к такой зависимости обобщенных сил от скорости, которая может носить не только диссипативный характер, но и ускоряющий. Это свойство, наряду с известной неконсервативной зависимостью подъемной силы от координат служит источником нетривиальных закономерностей движения тела, которые проиллюстрированы примерами [1]. Показано, что одним из способов решения практических задач, связанных с уменьшением сопротивления трения, является управление пограничным слоем, которое принципиально может быть осуществлено путем подачи в пристенную область веществ, свойства которых отличаются от свойств воды , при этом возможно два варианта изучения пограничного слоя как с непрерывным распределение свойств жидкости поперек пограничного слоя, так и при наличии границы раздела между жидкостями (воздушная гпзовая прослойка между обтекаемой поверхностью и основным потоком воды). Методы теоретического исследования пленочного режима газонасыщения заключаются, с одной стороны, в том, что для изучения данного режима используется теория пограничного слоя с учетом влияния плотности и вязкости газа, при условии пренебрежения влиянием его вдува на распределение давлений, которое предполагается заданным. Форма границы раздела определяется расходом газа и способом его введения в поток. С другой стороны, для исследования искусственно создаваемых газовых пленок используется теория развитого кавитационного течения, в котором не учитываются реальные свойства газа. Движение с поверхностью раздела рассматривается как движение идеальной жидкости, определяемой числами кавитации и Фруда, с подлежащей отысканию свободной линией тока, давление на которой постоянно и равно давлению газа в пленке. Применение пленочного режима газонасыщения заключает в себе ряд допущений о монотонности перехода свойств среды от свойств газа на стенке до свойств жидкости на границе пограничного слоя. Так при вдуве газа сквозь пористую поверхность в пограничный слой обычно образуются поверхности раздела на которых свойства среды могут изменяться скачком, а не монотонно. Также необходимо учитывать, что на характеричтики движения жидкости в пограничном слое большое влияние оказывает материал стенки, и прежде всего, отсутствующий в однородных потоках фактор смачиваемости. В докладе, на примере сферы, представлены исследования решения задачи обтекания твердого тела жидкостью, проведены расчеты по определению поля скоростей и давления, а также сравнения полученных результатов для различных методов решения. Одним из частных случаев исследования проблемы обтекания тела жидкостью является случай обтекания при малых числах Рейнольдса, так как в этом случае на тело действуют силы вязкости, возникающие вследствии существования пограничного слоя вблизи поверхности тела и течение , в данном случае, является ламинарным.

Более подробно представлены проблемы снижения трения на примере равномерного гидродинамического обтекания сферы с сублимирующей поверхностью.На основе достаточного числа исходных данных, примеров и расчетов исследована возможность и целесообразность применения метода управления пограничным слоем в целях снижения вязкого сопротивления движущихся в жидкости высокоскоростных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидняев Н.И. Теория удара и проникания высокоскоростных тел в жидкость, М.: КНОРУС. 2021, 296с.

Поток нормализации

Д.В. Трещев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
treschev@mi-ras.ru

Процесс нормализации в теории нормальных форм традиционно происходит пошагово: нежелательные члены (в векторном поле, функции Гамильтона и т.п.) удаляются поочередно степень за степенью. Я укажу дифференциальное уравнение в пространстве всех формальных гамильтонианов с эллиптической особой точкой в начале координат, вдоль решений которого функции Гамильтона движутся к своим нормальным формам. Сдвиги вдоль потока этого уравнения отвечают каноническим преобразованиям координат. Итак, речь идет о непрерывной процедуре нормализации. Формальный аспект теории не вызывает трудностей. Аналитический аспект и вопросы сходимости рядов, как всегда, весьма нетривиальны. В этом направлении сделаны лишь первые шаги.

Многофазные течения в пористых средах и их устойчивость

Г.Г. Цыпкин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
tsypkin@ipmnet.ru

Дается краткий обзор развития математических моделей процессов переноса в пористых средах. Основное внимание уделяется течениям с фазовыми переходами в грунтах, геотермальных системах и пластах, содержащих газовые гидраты. Задачи, приводящие к неединственным решениям и к слиянию фронтов фазовых переходов, представлены в деталях. Приводятся асимптотические решения и анализируются полученные результаты. Представлены исследования устойчивости течений в пористых средах и выделены основные особенности переходов к неустойчивому состоянию.

Согласованное математическое и лабораторное моделирование динамики и структуры течений неоднородных жидкостей

Ю.Д. Чашечкин
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия
yulidch@gmail.com

Многочисленные наблюдения показали, что природные системы Ц атмосфера и гидросфера Земли, как и технологические процессы характеризуются тонкой структурой, включающей тонкие и высокоградиентные прослойки и волокна, разделяющие толстые слои с более однородными распределениями параметров. Описание динамики таких систем обычно проводится на основе различных конститутивных уравнений, затрудняющих сравнение результатов расчетов с данными лабораторных опытов и перенос результатов на реальные условия. Развитие компьютерной техники и программирования позволяет использовать в качестве общей основы теории и методик опытов систему фундаментальных уравнений, включающую уравнения состояния для потенциала Гиббса и плотности среды, а также динамические уравнения переноса плотности, вещества, импульса и энергии, включающей внутреннюю [1]. В анализе учитывается макроскопический с потоком и волнами и микроскопический перенос энергии Ц медленный диффузионный и быстрый конверсионный. Система анализируется с учетом условия совместности, задающего ее ранг, порядок линеаризованной версии и степень характеристического уравнения. Определено минимальное число собственных функций, составляющих полное решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям. Малые диссипативные коэффициенты позволяют находить решения системы методами теории сингулярных возмущений. Проведены расчеты распространения капиллярно-гравитационных поверхностных и волн и сопутствующих лигаментов [2], генерации внутренних волн в линейном и слабонелинейном приближении с учетом взаимодействия всех компонентов [3].

Разработанная методика оптических и контактных исследований течений позволяет регистрировать основные крупномасштабные компоненты Ц следы, волны, вихри и выделять тонкие слои и волокна. Результаты теневой визуализации и электролитической преципитации хорошо согласуются с данными расчетов внутренних волн, вихрей и следа с тонкой структурой течения за полосой [4] и сферой [5]. Опыты проведены на стендах УИУ кГФК ИПМех РАНњ. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 19-19-00598-П.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows, Axioms, 10 (2021), 286.
2. Chashechkin Yu.D., Ochirov A. A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field, Axioms, 11 (2022), 402.
3. Chashechkin, Yuli D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics, Mathematics, 9 (2021), 586.
4. Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V. 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes, Fluids, 6 (2021), 310.
5. Chashechkin Y.D. Discrete and continuous symmetries of stratified flows past a sphere, Symmetry, 14 (2022), 1278.

Волновые структуры в течениях идеального газа с внешним источником энергии

А.А. Чесноков
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
chesnokov@hydro.nsc.ru

Объяснение широкого круга природных явлений связано с изучением генерации автоволновых структур в активных средах, для которых характерно наличие внешних источников энергии. Ярким примером такого процесса является формирование самоподдерживающихся бегущих волн давления (автоволн) в межзвездной среде вследствие развития тепловой неустойчивости [1,2]. Аналогичные волновые процессы возникают в двухфазных течениях жидкости с переменной массовой долей газовой фазы [3], а также в реагирующих средах. Выяснение условий формирования волн конечной амплитуды при малых возмущениях стационарного решения и определение параметров волн являются важными составляющими изучения автоволновых процессов.

В данной работе математическая теория катящихся волн и метод Уизема анализа устойчивости постоянного решения неоднородных гиперболических систем применены для объяснения возникновения и описания автоволн в идеальном газе при наличии внешних источников притока и поглощения энергии. Получено условие, при котором малые возмущения постоянного решения трансформируются в нелинейные квазипериодические волновые пакеты конечной амплитуды. Это условие сводится к сравнению замороженной и равновесной скоростей звука, определяемых уравнением состояния газа и функцией источников. В классе бегущих волн построены периодические решения содержащие сильные разрывы и характеризующиеся наличием критических параметров, при которых происходит непрерывный переход докритического течения в сверхкритическое. Особенностью развития неустойчивости в рамках рассматриваемой модели политропного газа с внешними источниками энергии, в отличии от генерации катящихся волн в открытых каналах [4], является возможность усиления малых возмущений в покоящейся среде. При этом направления распространения волн равноправны. Выполнены численные расчеты развития автоколебаний и нелинейного взаимодействия волн. Показано, что при малом гармоническом возмущении начального состояния равновесия формируются два вида волновых структур: катящиеся волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, и периодические двухпиковые стоячие волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснобаев К.В., Тагирова Р .Р ., Арафайлов С.И., Котова Г.Ю. Эволюция и насыщение автоволн в областях фотодиссоциации, Письма в астрономический журнал, 7 (2016), 510-524.
2. Molevich N.E., Riashchikov D.S. Shock wave structures in an isentropically unstable heat-releasing gas, Physics of fluids, 7 (2021), 076110.
3. Будлал А., Ляпидевский В.Ю. Катящиеся волны в канале с активной газовой фазой, Прикладная механика и техническая физика, 4 (2015), 3-11.
4. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. - 420 с.

Неклассические разрывы в решениях гиперболических систем уравнений

А.П. Чугайнова
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
[3]anna_ch@mi-ras.ru

Рассматриваются структуры разрывов в решениях гиперболической системы уравнений. Система уравнений имеет достаточно общий вид и, в частности, может описывать в простейшей постановке продольно-крутильные нелинейные волны в упругих стержнях, а также одномерные волны в неограниченной упругой среде. Ранее свойства разрывов в решениях этих уравнений изучались в предположении, что на разрывах выполняются только соотношения, следующие из законов сохранения продольного импульса и момента импульса вокруг оси стержня, а также условие непрерывности перемещений. Была изучена ударная адиабата. В работе [1] исследуется стационарная структура разрывов в предположении, что главным, определяющим механизмом внутри структуры является вязкость. Показано, что некоторые части ударной адиабаты соответствуют эволюционным разрывам, не имеющим структуры. Кроме того, показано, что существуют особые (неклассические) разрывы, на которых должно выполняться дополнительное соотношение, которое находится как условие существования структуры разрыва. Дополнительное соотношение зависит от процессов, происходящих в структуре. Особый разрыв удовлетворяет условиям эволюционности, которые отличаются от известных условий Лакса. Обсуждаются выводы, которые могут представлять интерес также для других систем гиперболических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. О структурах неклассических разрывов в решениях гиперболических систем уравнений, Успехи математических наук, 71 (2022), 55-90.

Неединственность автомодельного решения задачи Римана об упругих волнах в средах с отрицательным параметром нелинейности

А.П. Чугайнова[1,3], Р.Р. Полехина[2,4]
[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
[3]anna_ch@mi-ras.ru, [4]polekhina@keldysh.ru

Изучаются решения гиперболической системы уравнений, описывающих распространение квазипоперечных волн в слабоанизотропной упругой среде в случае отрицательного параметра нелинейности [1]. В работе [2] была обнаружена неединственность решений стандартных автомодельных задач упомянутой системы уравнений нелинейной теории упругости.

Одно из решений в области неединственности представляет собой последовательность быстрой ударной волны или быстрой волны Римана и медленной ударной волны (решение I типа). Второе решение (решение II типа) состоит из последовательности быстрой ударной или простой волны и сложной медленной волны, содержащей волны Жуге.

С целью выявления единственного решения в области неединственности исследована стационарная структура разрывов, входящих в решения задачи Римана. Было предположено, что внутри структуры действует только диссипация. Показано, что все разрывы, входящие в состав решений в области неединственности, обладают структурой. Таким образом исследование структуры не дало оснований для выделения единственного решения.

Проведено исследование решений в области неединственности путем численного построения асимптотик нестационарных решений системы уравнений, дополненной вязкими членами. Показано, что в зависимости от задания начальных данных в области неединственности могут быть получены асимптотики, соответствующие обоим типам автомодельных решений. Если начальные данные заданы в виде ступеньки (задача Римана), то асимптотика нестационарного решения состоит из последовательности волн (со структурами), соответствующей автомодельному решению I типа.

Для того, чтобы сформировалась асимптотика, соответствующая автомодельному решению II типа, начальные данные нужно задать специальным образом. В качестве начальных данных задается асимптотическое решение II типа, а затем левое граничное условие смещается в область неединственности. Такое задание начальных условий не всегда позволяет получить асимптотическое решение II типа. Это связано с тем, что структура медленной сложной волны расширяется с течением времени, так как в ее структуру входит простая волна. Показано, в зависимости от ширины структуры сложной волны, решение выходит либо на асимптотическое решение I типа, либо на асимптотическое решение II типа (при существенной ширине структуры сложной волны).

Аналогичные результаты были получены при исследовании асимптотических решений в области неединственности для сред с положительным коэффициентом нелинейности [3, 4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропном упругом теле, ПММ, 50 (1986), 597-604.
2. Куликовский А.Г. , Свешникова Е.И., Нелинейные волны в упругих средах, М.: «Московский лицей», 1998, 412 с.
3. Чугайнова А.П. О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве, ПММ, 52 (1988), 541-545.
4. Куликовский А.Г. О взаимодействии нелинейных волн в слабоанизотропной упругой среде, ПММ, 57 (1993), 375-381.
5. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 38 (1998), 305-312.

Течение жидкости в каналах сложной формы и с податливыми стенками

А.П. Чупахин[1,2]
[1]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
alexander190513@gmail.com

Исследование движения жидкости в каналах сложной геометрии при наличии ветвлений канала и изменений его сечения представляет интерес как с точки зрения фундаментальной гидродинамики, так и для многочисленных приложений, в которых гидродинамика кровеносной системы (гемодинамика) является одним из важнейших. Сеть кровеносных сосудов характеризуется ветвлением и переменным сечением сосудов, что приводит к сложному характеру течения, сопровождающемуся развитыми вихрями и возвратными течениями. При этом течение крови, в основном, сохраняет ламинарный характер. Наличие аномалии в сосудистой системе типа бляшки, приводящей к стенозу в сосуде, или аневризмы, существенно изменяющей геометрию течения, перестраивает структуру потока в сторону ее усложнения. Еще одним важным фактором, влияющим на устойчивость потока в канале является податливость стенок и их многослойность.

В докладе будет рассказано об исследовании течения в канале сложной формы, моделирующем артериальную аневризму, даны оценки различных компонент энергии системы: кинетической, упругой, энергии изгибания а также потерь энергии потока на вязкую диссипацию для различных геометрических форм канала.

Будут представлены результаты моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с податливыми стенками. Для канала со стенками типа оболочек Койтера дано описание различных режимов течения в зависимости от прочностных вязко-упругих характеристик стенок. Для модели обтекания стенки в приближении пограничного слоя Блазиуса исследована устойчивость потока для многослойной стенки типа “сэндвич”.

Обсуждается применение полученных результатов для моделирования гемодинамики в кровеносных сосудах с различными аномалиями.

Решения в виде бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса в случае функции потока с четырьмя точками перегиба

В. А. Шаргатов
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия
shargatov@mail.ru

Целью работы является изучение разрывных решений нелинейных гиперболических уравнений - неклассических (особых) разрывов, обладающих интересными и важными особенностями [1,2]. Рассматривается класс задач, связанный с изучением поведения нелинейных волн, в том числе особых разрывов, и представляющий существенный интерес с точки зрения построения общей теории разрывных решений.

В работе выполнено исследование разрывных решений обобщенного уравнения Хопфа в предположении, что непрерывное и сильное изменение параметров среды в узких зонах, соответствующих разрывам в решениях уравнения Хопфа, описывается обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза-Бюргерса с функцией потока $\varphi(v)$, имеющей четыре точки перегиба

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi(v)}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \quad v = v(x,t),$$

где μ, $m = \mathrm{const} > 0$ – коэффициенты диссипации и дисперсии соответственно.

На больших масштабах, если производными в правой части можно пренебречь, решения этого уравнения становятся близкими к решениям интегрального уравнения Хопфа

$$\oint \varphi(v)\, dt - v\, dx = 0,$$

которое имеет разрывные кусочно-постоянные решения в виде бегущей волны (ударной волны).

Для функции потока с четырьмя точками перегиба описана структура множества решений в виде бегущей волны. Методом функции Эванса и путем численного решения обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса исследована устойчивость этих решений. Сформулированы гипотезы, устанавливающие допустимость классических разрывов в случае, если функция потока имеет четыре точки перегиба.

Впервые построен пример существования двух особых разрывов с монотонной структурой, обладающих разными скоростями. Методом функции Эванса исследована линейная устойчивость этих разрывов и показано, что оба особых разрыва являются устойчивыми. Сформулированы гипотезы, устанавливающие допустимость классических разрывов в случае, если существуют два устойчивых особых разрыва. Допустимым разрывам соответствует либо решение в виде бегущей волны, либо пульсирующее решение с эффективной шириной, сравнимой с эффективной шириной структуры бегущей волны. Такое решение представляет собой ударную волну, которая спонтанно излучает волновые пакеты, затухающие на масштабах длины, сравнимых с шириной структуры.

Для того, чтобы найти множество допустимых разрывов, достаточно знать скорости особых разрывов с монотонной структурой. Скорости таких разрывов зависят от вида функции потока и коэффициентов диссипации и дисперсии.

Сформулированные дополнительные условия допустимости разрыва являются гипотезой, подтвержденной многочисленными прямыми вычислениями и исследованиями линейной устойчивости решений в виде бегущей волны методом функции Эванса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г. О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов, Докл. АН СССР, 275 (1984), 1349-1352.
2. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Классические и неклассические разрывы в решениях уравнений нелинейной теории упругости, УМН, 63 (2008), 85-152.

О пульсирующих течениях жидкостей с пределом текучести в трубах

М.Э. Эглит[1], Ю.А. Дроздова[2], И.Н. Усачев[2]
[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва, Россия
m.eglit@mail.ru

Рассматриваются ламинарные течения неньютоновских жидкостей, обладающих пределом текучести, в трубах под действием периодически меняющегося перепада давления. Для описания реологических свойств движущихся жидкостей принимается модель Хершеля - Балкли, которая учитывает наличие предела текучести и нелинейную зависимость вязких напряжений от скоростей сдвига. Численно исследуется влияние пульсаций перепада давления на профили скорости, а также на средние по периоду величины расхода, трения на стенках трубы и толщины "квазитвердого" ядра потока в зависимости от амплитуды и частоты колебаний перепада давления, обобщенного числа Бингама Bn и степенного индекса n. Этой теме посвящено достаточно много публикаций. Новым в этой работе является включение в исследование потоков вязкопластических жидкостей с величиной степенного индекса, большей единицы. В этом случае влияние пульсаций качественно различно в разных диапазонах величин скорости сдвига. Кроме того, исследованы потоки, в которых относительные амплитуды колебаний перепада давления велики. При больших амплитудах и малых частотах колебаний перепада давления в потоке периодически возникают противотечения и образуются не одна, а две зоны "квазитвердого" течения, а также периодически появляются конечные интервалы времени, когда расход равен нулю.