

Вторая конференция Математических центров России

Пленарные доклады

7–11 ноября 2022, Москва

А. Д. Баранов (СПбГУ). Оценки интегралов n -листных функций и геометрические свойства областей

В докладе рассматривается задача об оценке интегралов от производных ограниченных n -листных функций. Показано, что в области D со спрямляемой границей имеет место точная по порядку зависимости от n оценка $\int_D |f'(z)| dx dy \leq CL\sqrt{\log n} \|f\|_\infty$, где L — длина границы области, а C — некоторая абсолютная константа. Точность неравенства видна уже на произведениях Бляшке в единичном круге и вытекает из тонких результатов Н. Г. Макарова (1989) и Р. Бануэлоса и Ч. Н. Мура (1991) о граничном поведении функций из пространства Блоха.

Аналогичные оценки получены и для L^p -нормы производной при $1 < p < 2$. Полученные неравенства существенно обобщают известные оценки Е. П. Долженко (1966) для рациональных функций в областях с достаточно гладкой границей. Если отказаться от условия спрямляемости, то характер зависимости от порядка листности меняется. Нами получены оценки интегралов от производных ограниченных n -листных функций в терминах размерности Минковского границы.

Доклад основан на совместной работе с И. Р. Каюмовым (Казанский федеральный университет).

Д. И. Борисов (ИМВЦ УФИЦ РАН). Усреднение операторов с произвольным возмущением в младших коэффициентах

Рассматривается задача об усреднении многомерного эллиптического оператора второго порядка с произвольным возмущением в младших коэффициентах. Показано, что возможность усреднения такого оператора и установления равномерной резольвентной сходимости эквивалентна сходимости возмущенных коэффициентов в подходящих пространствах мультипликаторов. Для сходимости в указанных пространствах доказаны простые и легко проверяемые критерии, что позволило достаточно точно описать класс возмущений, для которых возможна процедура усреднения. Результаты продемонстрированы на серии примеров.

П. А. Бородин (МГУ им. М. В. Ломоносова). Квантованные приближения

Формулируются геометрические условия на множество в банаховом пространстве, необходимые или достаточные для того, чтобы суммы элементов этого множества были плотны в этом пространстве. Из общих теорем такого рода выводятся качественные результаты о возможности приближения наимпростейшими дробями (логарифмическими производными комплексных многочленов), суммами сдвигов одной функции, многочленами с целыми коэффициентами и другими множествами в различных функциональных пространствах.

А. А. Гайфуллин (МИАН). 27-вершинные триангуляции 16-мерных многообразий, похожих на октавную проективную плоскость

В 1987 году Брем и Кюнель доказали следующую оценку: всякая комбинаторная триангуляция отличного от сферы d -мерного многообразия (без края) должна иметь не менее $\frac{3d}{2} + 3$ вершин. Более того, наличие у многообразия, отличного от сферы, триангуляции ровно с $\frac{3d}{2} + 3$ вершинами накладывает на это многообразие очень жесткие условия. Во-первых, размерность d может быть равна только 2, 4, 8 или 16; во-вторых, многообразие должно быть «многообразием, похожим на проективную плоскость», то есть должно допускать (кусочно линейную) функцию Морса ровно с тремя критическими точками. До недавнего времени было известно ровно 5 примеров таких триангуляций в размерностях 2, 4 и 8. Случай $d = 16$ оставался полностью открытым: не было известно никаких 27-вершинных триангуляций 16-мерных многообразий, отличных от сферы. Я расскажу о построении таких триангуляций. А именно, будет предъявлено четыре таких триангуляции с группой симметрий порядка 351 и на их основе построено очень много (более 10^{103}) таких триангуляций с меньшими группами симметрий. Естественная гипотеза состоит в том, что все построенные симплициальные многообразия кусочно линейно гомеоморфны октавной проективной плоскости. Однако попытки доказательства этой гипотезы упираются в необходимость вычисления второго класса Понтрягина построенных симплициальных многообразий. В настоящее время не известно эффективного способа такого вычисления.

А. В. Гасников (МФТИ). Современная стохастическая оптимизация и анализ данных

В прошлом году издательство Springer заказало нам книгу “Algorithmic stochastic optimization”, в которой планируется описать основные алгоритмы стохастической оптимизации и их приложения к анализу данных. Наиболее яркие сюжеты из книги было решено вынести в доклад и постараться презентовать их в максимально популярном (но математически строгом) ключе. В частности, будут затронуты достаточно тонкие современные аспекты задач оптимизации, возникающих в анализе данных. Например, схожесть слагаемых в целевом функционале вида суммы или необходимость решения таких задач на децентрализованных меняющихся со временем архитектурах...

И. Ш. Калимуллин (КФУ). Алгебраические структуры и вычислимая категоричность

Вычислимая алгебраическая структура вычислимо категорична, если между любыми двумя ее вычислимыми копиями существует вычислимый изоморфизм. В докладе будет сделан обзор понятий и новых результатов теории вычислимых моделей и классической теории вычислимости, связанных с вычислимой категоричностью и ее обобщениями. В частности, будут обсуждены результаты об аналогах вычислимой категоричности для примитивно рекурсивных (пунктуальных) структур.

М. А. Королев (МИАН). О некоторых арифметических свойствах дробей Фарея

Рядом Фарея порядка N называется множество рациональных несократимых дробей a/b с условиями $1 \leq a \leq b \leq N$, упорядоченных по возрастанию. Дроби Фарея возникают естественным образом в различных задачах аналитической теории чисел. Они представляют собой

полезный инструмент исследования (как, скажем, в круговом методе) и одновременно являются интересным объектом для изучения. В частности, имеется большое число результатов о статистических и арифметических свойствах таких дробей. Пожалуй, самым известным из последних является “модулярное соотношение” $ad - bc = 1$, которое справедливо для любых двух соседних дробей Фарея $c/d < a/b$. В докладе мы расскажем о других, более тонких свойствах дробей, доказательства которых основаны на изучении одного геометрического преобразования половинки единичного квадрата в себя, именуемого преобразованием Бока–Кобели–Захареску.

Е. А. Кудрявцева (МГУ им. М. В. Ломоносова). Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на 4-мерных многообразиях

Лагранжевы слоения с особенностями являются естественным обобщением вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Мы дадим классификацию с точностью до топологической эквивалентности лагранжевых слоений с особенностями на замкнутых симплектических 4-мерных многообразиях, когда все особенности невырождены, хотя бы одна из них имеет ранг 1, и база слоения удовлетворяет некоторому условию ориентируемости. Ключевым шагом доказательства служит геометрическая классификация целочисленных аффинных структур с особенностями, которые могут возникать на любом открытом страте базы такого лагранжева слоения с особенностями.

А. Г. Кузнецов (МИАН). Многообразие Фано и проблема рациональности

Алгебраическое многообразие называется рациональным, если в нем есть открытое всюду плотное подмножество изоморфное открытому плотному подмножеству аффинного пространства. Как ни странно, отличить рациональные многообразия от нерациональных оказывается весьма непросто. Я сделаю обзор классических результатов о рациональности, а также постараюсь рассказать об открытых вопросах связанных с этой проблемой.

Н. В. Маслова (ИММ УрО РАН, УрФУ). О характеристике конечной группы ее арифметическими параметрами

Симметрия — один из фундаментальных принципов самоорганизации материальных форм в природе. Множество всех симметрий некоторого объекта или множество тех его симметрий, которые сохраняют какие-то свойства этого объекта (например, ориентацию в пространстве), образует алгебраическую структуру, которая называется группой. Исследовав группу симметрий объекта, можно получить новую информацию уже о самом объекте. Однако при исследовании объекта (математического, физического, химического или какого-то другого) ситуация, когда группа его симметрий известна а priori, является редкой. Обычно из эмпирических соображений, из “видимых” свойств объекта удается извлечь только информацию о каких-то свойствах этой группы, например, некоторые ее арифметические параметры.

Примерами арифметических параметров конечной группы являются ее порядок, множество порядков всех ее элементов (которое принято называть спектром группы), множество величин всех классов сопряженности ее элементов, множество всех степеней неприводимых комплексных представлений этой группы и т.д. Появляется задача определить группу или описать хотя бы какие-то ее структурные свойства и особенности возможных действий на объектах, если известны только некоторые арифметические параметры этой группы. Получение

результатов такого рода — это разработка математического аппарата, который в дальнейшем может быть применен и за пределами математики.

Одним из хорошо известных арифметических параметров конечной группы G является ее граф Грюнберга–Кегеля, который называют еще графом простых чисел. Это неориентированный граф без петель и кратных ребер, вершинами которого являются все простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны в котором тогда и только тогда, когда группа G содержит элемент порядка pq . Граф Грюнберга–Кегеля конечной группы, с одной стороны, бывает “достаточно легко” вычислить, с другой стороны, в некоторых случаях он определяет группу однозначно с точностью до изоморфизма. Например, хорошо известная конечная простая спорадическая группа Монстр содержит порядка $8,08 \times 10^{53}$ элементов (для сравнения, по недавним оценкам, количество элементарных частиц в наблюдаемой части Вселенной — примерно $3,28 \times 10^{80}$), при этом граф Грюнберга–Кегеля группы Монстр содержит всего 15 вершин (причем наибольшая из них равна 71), и эта группа однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим графом Грюнберга–Кегеля в классе конечных групп.

В этом докладе мы обсудим вопрос характеризации конечной группы ее арифметическими параметрами, в частности, вопрос характеризации конечной группы ее графом Грюнберга–Кегеля.

А. Е. Миронов (ИМ СО РАН, НГУ). О дифференциальных уравнениях для интегрируемых бильярдных столов

В докладе будет рассказано о методе нахождения дифференциальных уравнений на функции, задающие границы областей с интегрируемым бильярдом Биркгофа. Мы применяем этот метод для исследования проволочного бильярда (wire billiards), для нахождения поверхностей с (локальным) первым интегралом и для нахождения кусочно гладкой поверхности, гомеоморфной тору, с двумя независимыми первыми бильярдными интегралами.

А. В. Пяткин (ИМ СО РАН, НГУ). Концепция инциденторных раскрасок

Инцидентором в ориентированном графе называется пара из вершины и инцидентной ей дуги; инцидентор удобно трактовать как половину дуги, примыкающую к данной вершине. Требуется раскрасить инциденторы мультиграфа в минимальное число цветов с соблюдением заданных ограничений на цвета смежных (имеющих общую вершину) и сопряженных (имеющих общую дугу) инциденторов. В докладе будет полностью освещена концепция таких раскрасок: история возникновения модели, развитие методов, краткий обзор результатов и остающихся открытыми проблем.

Е. Б. Савенков (ИПМ им. М. В. Келдыша РАН). «Цифровой керн»: модели диффузной границы и математическое моделирование микротечений многофазных сред в пористых средах

Доклад основан на совместной работе с В. А. Балашовым.

В докладе рассмотрен ряд вопросов реализации прикладной технологии «Цифровой керн», суть которой — прямое численное моделирование микротечений многофазной жидкости в поровом пространстве горных пород — коллекторов нефти и газа. Основу технологии составляют так называемые модели с диффузной границей. Они являются термодинамически

согласованными и позволяют описывать течения многофазной жидкости с прямым разрешением динамики границ раздела фаз и контактных углов однородным по пространству способом. Используемые в работе уравнения модели являются квази(гидро)динамической (КГД) регуляризацией более привычных уравнений типа Навье–Стокса–Кана–Хилларда. Дополнительные КГД слагаемые являются диссипативными и играют роль регуляризаторов явной разностной схемы. Разработанные вычислительные алгоритмы допускают эффективное распараллеливание и позволяют анализировать задачи представительной сеточной размерности, в том числе течения в воксельных моделях реальных пористых сред, полученных методами компьютерной микротомографии. В докладе рассмотрены общие идеи «Цифровой керн», вопросы построения и применения моделей типа диффузной границы, а также приводятся результаты модельных и содержательных численных расчетов, демонстрирующих возможности подхода.