Вторая конференция Математических центров России
Секция «Теория чисел»

7–11 ноября 2022, Москва

Д. В. Адлер. Формы Якоби, эллиптический род и дифференциальные уравнения

Классические формы Якоби, изученные в известной книге Эйхлера и Загье, являются частным случаем форм Якоби, ассоциированных с системами корней. Они отвечают простейшей системе корней A_1. Известно, что эллиптический род многообразия Калаби–Яу является формой Якоби веса 0.

В своём докладе я расскажу о дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют эти формы, а также об аналогах уравнений Канеко–Загье для степеней тета-функций. Оказалось, что простейшее квазимодулярное дифференциальное уравнение выполняется для эллиптического рода трёхмерного многообразия Калаби–Яу. Помимо этого я расскажу о дифференциальных уравнениях базовых форм Якоби от многих переменных в случае систем корней D_n. Доклад основан на совместных работах с В. А. Гриценко.

Р. К. Ахунжанов. О критерии плохо приближаемых векторов

Сформулировано и доказано обобщение на многомерный случай критерия плохо приближаемых чисел.

Э. Р Бигушев. Диофантовы экспоненты решёток и рост многомерных аналогов неполных частных

Если число θ иррационально, оно раскладывается в бесконечную (обыкновенную) цепную дробь вида $\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ При этом его мера иррациональности есть величина

$$\mu(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall n_0 > 0\ \exists\, n > n_0 : \left|\theta - p_n/q_n\right| \leq |q_n|^{-\gamma}\right\}.$$

Существует классическое соотношение, связывающее $\mu(\theta)$ с ростом неполных частных:

$$\mu(\theta) = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}$$

(здесь $q_0, q_1, q_2, \ldots$ - последовательность знаменателей подходящих дробей θ).

Если рассмотреть решётку

$$\Lambda = A\mathbb{Z}^2,$$

где $A = \begin{pmatrix}\theta_1 & -1\\ \theta_2 & -1\end{pmatrix}$ с различными действительными θ_1 и θ_2, то можно заметить, что мера иррациональности этих чисел в данном случае тесно связана с диофантовой экспонентой решётки, а именно:

$$\max\big(\mu(\theta_1), \mu(\theta_2)\big) = 2 + 2\omega(\Lambda).$$

Напомним, что *диофантовой экспонентой* решётки полного ранга называется величина

$$\omega(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \middle| \exists \infty \vec{x} \in \Lambda : \, |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n|^{1/n} \leq |\vec{x}|^{-\gamma} \right\}.$$

Таким образом, получим:

$$\omega(\Lambda) = \frac{1}{2} \max \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}^{\theta_1}}{\log q_n^{\theta_1}}, \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}^{\theta_2}}{\log q_n^{\theta_2}} \right).$$

В данном докладе будет показана геометрическая интерпретация аналога неполных частных a_n, а основная часть будет посвящена трёхмерной вариации неравенства

$$\omega(\Lambda) \leqslant \frac{1}{2} \max \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}^{\theta_1}}{\log q_n^{\theta_1}}, \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}^{\theta_2}}{\log q_n^{\theta_2}} \right).$$

К. М. Бобков. Двоичные записи чисел, свободных от k-ых степеней

В докладе мы установим существование чисел, свободных от k-ых степеней и имеющих большую долю единиц в двоичной записи. Мы будем использовать результаты о интервалах между свободными от k-ых степеней числами, включая результаты М. Филасеты и О. Трифонова о существовании свободных от k-ых степеней числах в коротких промежутках и результаты Р. М. Нуньеса о моментах распределения свободных от k-ых степеней чисел на коротких интервалах.

Г. В. Воскресенская. Эта-функция Дедекинда: три направления исследований

В докладе планируется рассказать о проблемах и результатах исследований, использующих свойства эта-функций Дедекинда. Существенную роль в них играют описанные в 1985 году эта-произведения с мультипликативными коэффициентами (функции МакКея).

Первое направление - это изучение структуры пространств модулярных форм методом рассечения, то есть представления их в виде $f(z)W \oplus U$, где $f(z)$ — некоторая модулярная форма, W — пространство модулярных форм меньшего веса, U — дополнительное пространство. Если $U = \{0\}$, то рассечение называется точным. Доказаны теоремы о точном рассечении и о природе дополнительных пространств.

Второе направление - исследование фрейм-соответствия, то есть сопоставление элементам конечной группы эта-произведений с помощью линейных представлений. Основы этой теории заложены Дж Мейсоном . Основные результаты касаются описания конечных групп, ассоциированных с функциями МакКея.

Третье направление связано с арифметической интерпретацией коэффициентов эта - произведений. Особое внимание мы уделим суммам Шимуры.

М. Р. Габдуллин. Числа, удалённые от простых

Обозначим через $F(n)$ расстояние от натурального n до ближайшего простого числа. В 2015 г. К. Форд, Д.Р. Хизбраун и С.В. Конягин ввели понятие «удалённости от простых чисел»: число n называется удалённым от простых с константой c, если

$$F(n) \geqslant c \frac{(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln\ln\ln n)}{(\ln\ln\ln n)^2}.$$

В работе трёх авторов доказано, что для любого натурального k существуют постоянная $c = c(k) > 0$ и бесконечно много точных k-х степеней, являющихся удалёнными от простых с постоянной c. Позднее Х. Майер и М. Рассиас распространили этот результат на точные k-е степени простых чисел, при этом улучшив по порядку оценку снизу на расстояние до простых.

Используя метод из недавней прорывной работы К. Форда, С. В. Конягина, Дж. Мэйнарда, К. Померанса и Т. Тао о последовательных составных значениях многочленов, мы доказываем следующую теорему.

Каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде $N = n_1 + n_2$, где

$$F(n_i) \geqslant (\ln N)(\ln\ln N)^{1/325565}, \quad i = 1, 2.$$

А. С. Гаспарян. Многомерные определители над значениями дзета-функции Римана

Вводится понятие полиганкелевой матрицы и рассматриваются полиганкелевы определители, составленные из значений кратных рядов Дирихле. Получены общие формулы для названных многомерных определителей. В частном случае ряда Дирихле от одной переменной $F(s) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m)m^{-s}$ имеем многомерные ганкелевы определители той или иной сигнатуры $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \{0, 1\}^p$:

$$H^{\sigma}_{p,n,r}(F) = |F(i_1 + \dots + i_p + r)|^{\sigma}$$

Например, при $p = 2k$ и $\sigma = (1, \dots, 1)$ имеет место формула

$$H^{(1,\dots,1)}_{2k,n,r}(F) = \frac{1}{n!} \sum_{m_1,\dots,m_n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{f(m_i)}{m_i^{2kn+r}} \prod_{i<j} (m_i - m_j)^{2k}.$$

Случай $k = 1$ принадлежит Monien (2009).

О. Н. Герман. Аналог теоремы переноса Малера для мультипликативных диофантовых приближений

Для каждого параллелепипеда

$$\mathcal{P} = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_i| \leqslant \eta_i,\ i = 1, \dots, d \Big\}$$

с положительными $\eta_1, \dots, \eta_d$ определён его *псевдоприсоединённый* параллелепипед как

$$\mathcal{P}^* = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_i| \leqslant \frac{1}{\eta_i} \prod_{j=1}^{d} \eta_j,\ i = 1, \dots, d \Big\}.$$

Знаменитая теорема Малера о билинейной форме, из которой следуют многие классические неравенства переноса в теории диофантовых приближений, допускает следующую довольно компактную переформулировку: *для любой решётки* Λ *с определителем* 1 *справедливо*

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies (d-1)\mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\},$$

где Λ^* *обозначает двойственную решётку, а* $\mathbf{0}$ *— начало координат.*

Доклад посвящён формулировке аналога этой теоремы, который позволяет доказывать неравенства переноса для *мультипликативных* диофантовых приближений.

С. А. Гриценко, А. К. Эминян. Бинарная аддитивная задача с простыми числами специального вида

В 1940 г. И.М. Виноградов получил для $\pi_2(N)$ — числа простых чисел, не превосходящих N и лежащих в промежутках $((2n)^2, (2n+1)^2)$ при натуральных n — следующую формулу

$$\pi_2(N) = \frac{\pi(N)}{2} + O(N^{1-0,1+\varepsilon})$$

(И.М. Виноградов, *Некоторое общее свойство распределения простых чисел*, Матем. сб., 1940, т.7, с. 365–372).

Обозначим множество простых чисел из промежутков $((2n)^2, (2n+1)^2)$ буквой V. В 1980–1990 гг. первый автор решил тернарную проблему Гольдбаха и проблему Варинга–Гольдбаха с простыми числами из множества V (С.А. Гриценко, *Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Варинга–Гольдбаха с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида*, УМН, 1988, т. 43, вып. 4(262), с. 203–204; С.А. Гриценко, *Три аддитивные задачи*, Изв. РАН. Сер. матем., 1992, т. 56, вып. 6, с. 1198–1216). Перечисленные задачи решаются круговым методом по схеме решения тернарной задачи на основе оценок тригонометрических сумм специального вида.

В докладе будет представлено решение проблемы делителей Титчмарша с простыми числами из множества V. Указанная задача не является тернарной и не может быть решена по схеме решения тернарной задачи.

Н. М. Добровольский. Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов

В докладе будут даны оценки сверху и снизу меры качества оптимальных коэффициентов через сумму по множеству Быковского. Множество Быковского было определено в 2002 г. В. А. Быковским и состоит из минимальных решений линейного сравнения с оптимальными коэффициентами.

Н. Н. Добровольский. О двумерных решётках сравнений

В докладе с помощью теории наилучших приближений второго рода описано множество Быковского, состоящее из локальных минимумов решётки приближений Дирихле для рационального числа. В явном виде описано множество Быковского для двумерной решётки решений линейного сравнения. Получена формула, выражающая гиперболический параметр этой решётки через знаменатели подходящих дробей и скобки Эйлера и позволяющая вычислять его за $O(\ln N)$ арифметических операций.

В. Г. Журавлёв. Разбиения и цепные дроби

Обсуждаются пространственные ядерные разбиения, являющиеся естественным языком описания многомерных цепных дробей. Такие разбиения допускают многочисленные симметрии и всевозможные их обобщения. Перекладывающиеся ядра задают динамику разбиений, локальные правила и комбинаторику разбиений, что позволяет выявить неизвестные свойства целого класса диофантовых приближений.

А. А. Илларионов. Гиперэллиптические последовательности и асимметричные криптосистемы

Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле (возможно конечное). Мы рассматриваем вопрос о существовании последовательностей $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{F}$, удовлетворяющих разложениям вида

$$A_{m+n}A_{m-n} = a_1(m)b_1(n) + a_2(m)b_2(n),$$
$$A_{m+n+1}A_{m-n} = \tilde{a}_1(m)\tilde{b}_1(n) + \tilde{a}_2(m)\tilde{b}_2(n),$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}$. Полученные результаты используются для построения аналогов алгоритмов Диффи–Хеллмана и Эль-Гамаля, в которых задача дискретного логарифмирования ставится в группе $(S, +)$, где множество S состоит из четверок вида $S(n) = (A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2})$, $n \in \mathbb{Z}$, а $S(n) + S(m) = S(n+m)$.

А. Б. Калмынин. Простые делители сдвинутых полиномиальных последовательностей

Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Мы обсудим свойства функции

$$j_f(N) = \max_m \{m : \text{Для некоторого } x \in \mathbb{N} \text{ неравенство } (x + f(i), N) > 1 \text{ выполнено для всех } i \le m\},$$

являющейся обобщением функции Якобсталя. Будет доказана нижняя оценка

$$j_f(P(y)) \gg y(\ln y)^{\ell_f - 1} \left(\frac{\ln\ln^2 y}{\ln\ln\ln y}\right)^{h_f} \left(\frac{\ln y \ln\ln\ln y}{\ln\ln^2 y}\right)^{M(f)},$$

где $P(y)$ — произведение всех простых $p \le y$, ℓ_f — количество различных линейных делителей $f(x)$, h_f — число различных неприводимых нелинейных делителей $f(x)$, а $M(f)$ — величина, зависящая от свойств f как отображения $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$.

И. Д. Кан. Гипотеза Зарембы и круговой метод

В настоящей работе рассматривается множество $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}$ несократимых знаменателей рациональных чисел, представимых конечными цепными дробями, все неполные частные которых принадлежат некоторому конечному числовому алфавиту $\mathbf{A}$. Пусть множество бесконечных цепных дробей с неполными частными из этого алфавита имеет хаусдорфову размерность $\Delta_{\mathbf{A}}$, удовлетворяющую неравенству

$$\Delta_{\mathbf{A}} > (\sqrt{40} - 4)/3 = 0.7748\ldots.$$

Тогда $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}$ содержит почти все натуральные числа, причём остаточное слагаемое этой формулы имеет степенное понижение по отношению к главному.

Д. В. Коледа. О распределении вещественных алгебраических чисел, целых и нецелых

Доклад посвящён статистическому поведению алгебраических чисел на вещественной оси. Мы поговорим об асимптотике количества алгебраических чисел фиксированной степени, лежащих в заданном промежутке вещественной оси, когда верхняя граница их высот неограниченно растёт. Будут обсуждаться сходства и различия в поведении целых алгебраических чисел и алгебраических чисел общего вида.

П. А. Кучерявый. О числах, не представимых в виде суммы $n + w(n)$

Пусть $w(n)$ – аддитивная неотрицательная арифметическая функция, такая, что $w(p) = 1$ для всех простых чисел p. Рассмотрим $\Xi(N)$ — количество чисел меньших N, не представимых в виде $n + w(n)$. Будет получена оценка

$$\Xi(N) \gg \frac{N}{\log\log N}.$$

Для этого изучается распределение $n + w(n)$ по модулю простого числа p методом комплексного интегрирования.

Ю. В. Нестеренко. Алгебраическая независимость и квазимодулярные формы

Практически каждое доказательство в теории трансцендентных чисел использует исключение переменных. Это относится к классическим результатам о трансцендентности e (Ш. Эрмит), к алгебраической независимости значений так называемых E-функций (К. Зигель и А.Б. Шидловский), к решению 7-й проблемы Гильберта (А. О. Гельфонд, Т. Шнейдер). Все эти утверждения использовали либо исключение переменных с помощью однородных линейных форм, либо исключение одной переменной с помощью двух многочленов от неё. Ещё в начале 50-х гг. прошлого века А. О. Гельфонд указывал на необходимость развития общей теории исключения применительно к задачам о трансцендентности и алгебраической независимости чисел. Цель настоящего доклада — привлечь внимание слушателей к реализации этого пожелания Гельфонда, а также к некоторым результатам, полученным в последующие годы с его помощью.

Пусть K – конечное расширение поля рациональных чисел. Для каждого однородного несмешанного идеала I кольца $R = K[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ с помощью формы Чжоу этого идеала можно определить ряд его характеристик: *размерность* (проективная размерность $\dim I$ многообразия $V(I)$ нулей идеала I), *степень* $\deg\,(I)$ идеала (количество точек пересечения многообразия нулей I с общим линейным пространством дополнительной размерности), *логарифмическую высоту* $h(I)$ и *проективное расстояние* $\varrho(\omega, I)$ от произвольной точки ω проективного m-мерного пространства над полем комплексных чисел до многообразия $V(I)$. Три последние характеристики аналогичны соответствующим характеристикам для многочленов. В частности, они ведут себя почти линейно при разложении I в пересечение примарных компонент. Процесс исключения переменных можно реализовать как индуктивную оценку снизу в зависимости от величин $\dim I$, $\deg\,(I)$, $h(I)$ величины расстояния $\varrho(\omega, I)$. Индукция проводится по размерности идеала. В частности, получаемая в конце индукции, такая оценка для главных идеалов позволяет получить оценку снизу для многочленов — их образующих и доказать, что эти многочлены в точке ω отличны от нуля. Другими словами, координаты точки ω однородно алгебраически независимы над K. Мы укажем ряд конкретных примеров, связанных с такой схемой рассуждений в случае квазимодулярных форм.

У. М. Пачев. О диофантовых системах с квадратичной и линейной формами удовлетворяющих конгруэнциальному условию

Доклад состоит из двух частей. В первой из них рассматривается вопрос о представлении пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэциальным условием. Точнее, речь идёт об асимптотике числа решений диофантовой системы:

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_s) = m, \\ l(x_1, \ldots, x_s) = n, \\ (x_1, \ldots, x_s) \equiv (b_1, \ldots, b_s) \pmod g, \end{cases}$$

где

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i,j=-1}^{s} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

— целочисленная положительная квадратичная форма от s переменных, причём $s \geqslant 5$;

$$l(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i=-1}^{s} l_i\, x_i$$

— целочисленная линейная форма; $m > 0$, n —целые числа.

Нас интересует число решений $r_{g;\, b_1,\ldots,b_s}(f,\, m; l,\, n)$ этой системы.

Вторая часть доклада относится к диофантовой системе вида:

$$\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_s^2 = m, \\ l_1\, x_1 + \cdots + l_s\, x_s = n, \\ (x_1, \ldots, x_s) \equiv (l_1, \ldots, l_s) \pmod g, \end{cases}$$

содержащей сумму квадратов переменных и при этом конгруэнциальное условие имеет специальный вид. Отдельное рассмотрение такой системы обусловлено тем, что для неё удаётся вычислить особый ряд. Завершается доклад постановкой нерешённых вопросов по данной теме и списком литературы.

Н. К. Семёнова. Решето Виноградова и короткие суммы Клоостермана

Неполной взвешенной суммой Клоостермана называется тригонометрическая сумма вида

$$S(x, m; a, b) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu, m)=1}} f(\nu) \exp\left(2\pi i \frac{a\overline{\nu} + b\nu}{m}\right), \quad 1 < x < m,$$

где $1 < x < m$, m, a, b – целые числа, а через $\overline{\nu}$ обозначается вычет, обратный к ν по модулю m: $\nu\overline{\nu} \equiv 1 \pmod m$. Оценкам таких сумм при различных условиях на m, x, a, b посвящены работы А. А. Карацубы, М. А. Королёва, М. З. Гараева, Ж. Бургейна.

В докладе будет рассказано об уточнении оценки неполной суммы Клоостермана за счёт применения так называемого решета Виноградова. Полученная оценка справедлива для простого модуля $m \geqslant m_0$ и целого a, $(a, m) = 1$, в случае, когда длина суммы x удовлетворяет неравенствам

$$\exp(c(\log m)^{5/6}(\log\log m)^{1/6}) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}, \quad c > 0.$$

И. А. Тлюстангелов. Циклические симметрии многомерных цепных дробей

Для понятия классической цепной дроби действительного числа известно несколько обобщений, одно из которых основывается на геометрической интерпретации цепной дроби, предложенной Ф. Клейном. А именно, пусть $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Объединение выпуклых оболочек точек $\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ внутри этих симплициальных конусов называется $(n-1)$-мерной цепной дробью. Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах любая $(n-1)$-мерная алгебраическая цепная дробь, соответствующая вполне вещественному расширению поля $\mathbb{Q}$ степени n, обладает богатой группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрий, действие которой сохраняет каждое из подпространств $l_1, \ldots, l_n$. Однако, у $(n-1)$-мерной алгебраической цепной дроби могут существовать и дополнительные $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрии, называемые палиндромическими. Такие симметрии нетождественным образом переставляют подпространства $l_1, \ldots, l_n$. В данном докладе показывается, что для любого целого $n > 1$ существует $(n-1)$-мерная алгебраическая цепная дробь, обладающая палиндромическими симметриями.

А. В. Устинов. Тропические последовательности Сомоса

Для целого $k \geq 4$ последовательностью *Сомос–k* называется последовательность, задаваемая квадратичным рекуррентным соотношением

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j s_{n+k-j}s_{n+j},$$

где α_j — константы, s_0, …, s_{k-1} — начальные условия. Оказывается, что некоторые последовательности Сомоса являются целочисленными. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты последовательности Сомос–k при $k = 4, 5, 6, 7$ оказываются полиномами от начальных условий. При попытке изучать свойства этих полиномов, например, рост степеней, возникает необходимость рассматривать тропические аналоги последовательностей Сомоса. О них и пойдёт речь в докладе.

В. Н. Чубариков. О системах счисления и их обобщениях

В сообщении формулируются теоремы о разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел, по последовательности Фибоначчи и по целочисленной последовательности, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям и связанной с числами Пизо–Виджаяраргхавана. Особое внимание обращено на «явные формулы» и условия единственности таких представлений. Отметим, что единственность разложения действительного числа по обратным значениям мультипликативной системы позволяет получить оценку остатка для некоторых значений показательной функции.

Разложения чисел по последовательности обратных чисел Фибоначчи существенно использует их представление через степени «золотого сечения». Системы чисел, связанные с числами Пизо–Виджаярагхавана рассмотрены менее подробно, поскольку требуется конкретизировать свойства рассматриваемых чисел.

Ю. Н. Штейников. О некоторых задачах связанных с произведением и частных числовых множеств

Пусть имеется множества $A, B \subset [1, Q]$. Мы рассматриваем задачи, связанные с оценками на размер множества произведений AB и частных A/B. Будет дан обзор имеющихся и некоторых современных результатов и их приложений.

А. В. Шутов. О числах с заданным окончанием разложения в обобщённые системы счисления Фибоначчи

Каждое натуральное число можно разложить в систему счисления Фибоначчи:

$$n = \sum_k \varepsilon_k F_k, \quad \text{где} \quad \varepsilon_k \in \{0, 1\} \quad \text{и} \quad \varepsilon_k \varepsilon_{k+1} = 0.$$

Данное разложение можно обобщить, заменив последовательность Фибоначчи на более общую линейную рекуррентную последовательность, либо на последовательность знаменателей подходящих дробей к некоторому иррациональному числу (второй вариант часто называют разложением Островского).

В докладе будут рассмотрены множества натуральных чисел с заданным окончанием подобных разложений. Среди рассматриваемых задач: плотности этих множеств, разности между соседними элементами таких множеств, распределение простых в этих множествах.

Основным инструментом доказательства служит связь между данными множествами и распределением дробных долей линейной функции на торе.

В. В. Юделевич. Проблема делителей Карацубы и родственные задачи (по совместной работе с С. В. Конягиным и М. Р. Габдуллиным.)

В докладе пойдёт речь о доказательстве оценок

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{\tau(p-1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \sum_{n \le x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}},$$

и их обобщений. Здесь значок $\asymp$ обозначает символ Харди, $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ — количество делителей числа n, а суммирование в первой сумме ведётся по подряд идущим простым числам.