Вторая конференция Математических центров России
Секция «Теория вероятностей»

7–11 ноября 2022, Москва

И. А. Алексеев. Критерий квази-безграничной делимости для некоторого класса случайных векторов

В данном докладе рассматриваются случайные векторы, функция распределения которых имеет следующий вид:

$$F(x) = \alpha F_{\mathrm{disc}}(x) + (1-\alpha)F_{\mathrm{abs}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

где $\alpha \in (0,1]$, а $F_{\mathrm{disc}}(x)$, $F_{\mathrm{abs}}(x)$ обозначают дискретную и абсолютно непрерывные части соответственно:

$$F_{\mathrm{disc}}(x) = \sum_{x_k \in (-\infty, x)} p_{x_k}, \quad \text{и} \quad F_{\mathrm{abs}}(x) = \int_{(-\infty,x)} p(u)du, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Здесь $x_k \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ – различные векторы с весами $p_{x_k} \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} = 1$; $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – плотность распределения, $p(u) \geqslant 0$, $u \in \mathbb{R}^d$ и $\int_{\mathbb{R}^d} p(u)du = 1$. Через $(-\infty, x)$, где $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ обозначим $(-\infty, x^{(1)}) \times \ldots \times (-\infty, x^{(d)}) \subset \mathbb{R}^d$.

Для векторов с функцией распределения вида (1) будет получен критерий принадлежности к классу квази-безгранично делимых распределений. Все результаты будут сформулированы для общего случая – суммы ненулевой почти-периодической функции и преобразования Фурье некоторой плотности, то есть рассматривается функция $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ такая, что

$$h(t) = h_{\mathrm{disc}}(t) + h_{\mathrm{abs}}(t), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где

$$h_{\mathrm{disc}}(t) = \sum_{y \in Y} q_y e^{i\langle t,y\rangle}, \quad \text{и} \quad h_{\mathrm{abs}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} q(y) e^{i\langle t,y\rangle} dy, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где $Y \subset \mathbb{R}^d$ непустое не более чем счетное множество, $q_y \in \mathbb{C}$ для всех $y \in Y$ и $0 < \sum_{y \in Y} |q_y| < \infty$, функция $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ удовлетворяет $\int_{\mathbb{R}^d} |q(y)|dy < \infty$.

М. А. Анохина. Предельная теорема для момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в.). Для этого блуждания хорошо известен закон арксинуса:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x\right) \to \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad n \to \infty, \quad x \in [0,1],$$

где τ_M — момент первого достижения максимума блужданием S_n. Нас интересуют такие же результаты, но для

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x \middle| M_n = k\right), \quad x \in [0,1],$$

где $M_n = S_{\tau_M}$. В докладе будет получена асимптотика данной вероятности для арифметического случайного блуждания в случае нормальных уклонений для случаев конечной и бесконечной дисперсии, а также умеренных и больших уклонений при конечной дисперсии и выполнении правостороннего условия Крамера.

Планируется рассмотреть случай $k \sim n^{\alpha}$, $n \to \infty$, при $0 < \alpha < 1/2$ для арифметического случайного блуждания.

В. И. Афанасьев. Условные предельные теоремы для случайных блужданий и их локальных времен

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковым арифметическим распределением с максимальным шагом 1, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Положим $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbf{N}$. Пусть $T = \min\{i > 0 : S_i \le 0\}$. Введем *остановленное случайное блуждание* $\widetilde{S}_i = S_i$ при $i < T$ и $\widetilde{S}_i = 0$ при $i \ge T$. Положим $\widetilde{\xi}(k) = \left|\left\{i \ge 0 : \widetilde{S}_i = k\right\}\right|$.

Пусть $\{W^+(t),\ t \ge 0\}$ – броуновская извилина и $l^+(u)$ – ее локальное время, т.е. $l^+(u) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} I_{[u,u+\varepsilon]}(W^+(s))\, ds$ при $u > 0$.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\left\{\sigma\widetilde{\xi}\left(\lfloor u\sigma\sqrt{n}\rfloor\right)/\sqrt{n},\ u \ge 0 \;\middle|\; T > n\right\} \xrightarrow{D} \left\{l^+(u),\ u \ge 0\right\},$$

где символ $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0, +\infty)$ *с топологией Скорохода.*

Пусть $\left\{W_0^{\uparrow}(t),\ t \ge 0\right\}$ – броуновский прыжок в высоту и $l_0^{\uparrow}(u)$ – его локальное время, т.е. $l_0^{\uparrow}(u) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} I_{[u,u+\varepsilon]}\left(W_0^{\uparrow}(s)\right) ds$ при $u > 0$. Положим $T_x = \min\left\{i \in \mathbf{N} : \widetilde{S}_i > x\right\}$ при $x > 0$.

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$\left\{\sigma^2\widetilde{\xi}\left(\lfloor un\rfloor\right)/n,\ u \ge 0 \;\middle|\; T_n < +\infty\right\} \xrightarrow{D} \left\{l_0^{\uparrow}(u),\ u \ge 0\right\}.$$

Г. А. Бакай. Большие уклонения для случайного блуждания в случайном сценарии

Пусть случайные величины $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.). Положим

$$W_0 := 0, \quad W_n := \sum_{i=1}^{n} \kappa_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

где случайные величины $\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \ldots$ так же являются н.о.р. и имеют распределение

$$p := \mathbf{P}(\kappa = 1) > 1/2, \quad q := 1 - p = \mathbf{P}(\kappa = -1) > 0.$$

Введем моменты достижения уровня n блужданием $\{W_k\}_{k\geq 0}$: $\tau_n := \min\{k \in \mathbb{N} : W_k = n\}$ и положим

$$S_n := \sum_{i=0}^{\tau_n - 1} \zeta_{W_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В докладе будут представлены результаты исследования вероятностей больших уклонений для последовательности величин $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, которую называют *остановленным случайным блужданием в случайном сценарии.*

С. В. Гришин. Алгебраические кривые в задачах случайного блуждания

Будет рассмотрена задача нахождения времени первого достижения положительной полуоси при однородном дискретном целочисленном случайном блуждании на прямой. Показано, что производящая функция указанной величины удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению. Это уравнение в каждом конкретном случае может быть выписано явно, и соответствующая кривая допускает исследование на рациональность. Будет приведено несколько результатов такого исследования.

М. К. Досполова. Смешанный объем бесконечномерных выпуклых компактов

Пусть K – выпуклое компактное GB-подмножество сепарабельного гильбертова пространства H. Обозначим через $\mathrm{Spec}_k K$ множество $\{(\xi_1(h), \ldots, \xi_k(h)) \colon h \in K\} \subset \mathbb{R}^k$, где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ – независимые копии изонормального гауссовского процесса. Цирельсон показал, что в этом случае для внутренних объемов K верна формула

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbf{E}\, \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K),$$

где $\mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K)$ – средний объем $\mathrm{Spec}_k K$ и κ_k – объем k-мерного единичного шара.

В данном докладе мы обобщим теорему Цирельсона на случай *смешанных объемов* бесконечномерных выпуклых GB-компактов в H, предварительно введя понятие смешанного объема для бесконечномерных выпуклых подмножеств H.

Кроме того, с помощью полученного результата мы вычислим смешанный объем замкнутых выпуклых оболочек двух ортогональных спиралей Винера.

Д. Н. Запорожец. Выпуклые оболочки случайных блужданий.

Мы покажем, как можно изучать выпуклые оболочки многомерных случайных блужданий используя свойства многогранных конусов. В частности, мы обсудим некоторые неожиданные следствия конической версии формулы Гаусса–Бонне. Доклад основан на совместной работе с Федором Петровым и Жюльеном Рандоном-Фурлингом.

А. И. Зейфман. Некоторые подходы к оцениванию скорости сходимости для марковских цепей с непрерывным временем

Рассматриваются (неоднородные) марковские цепи с непрерывным временем. Предполагается, что вектор вероятностей состояний цепи описывается прямой системой Колмогорова

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = A(t)\mathbf{p}(t),$$

которую можно рассматривать как дифференциальное уравнение с ограниченной оператор-функцией в пространстве последовательностей l_1.

Изучается задача получения оценок скорости сходимости, то есть скорости стремления к нулю разности $\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)$ в случае слабой эргодичности цепи, и описываются возможные подходы к ее решению для различных классов цепей, приведенные, в частности, в статьях:

A. Zeifman, Y. Satin, I. Kovalev, R. Razumchik, V. Korolev. Facilitating numerical solutions of inhomogeneous continuous time Markov chains using ergodicity bounds obtained with logarithmic norm method. Mathematics, 2021. 9(1), 42.

A. Zeifman, Y. Satin, A. Sipin. Bounds on the Rate of Convergence for $M_t^X/M_t^X/1$ Queueing Models. Mathematics, 2021 9(15), 1752.

И. А. Ковалёв, Я. А. Сатин, А. В. Синицина, А.И. Зейфман. Об одном подходе к оцениванию скорости сходимости нестационарных марковских моделей систем обслуживания. Информатика и ее применения, 2022, том 16, вып. 3, 75–82.

А. В. Зорин. Система обслуживания ветвящихся потоков с разделением времени

В докладе демонстрируется применение понятия абстрактной стохастической управляющей системы к анализу одной модели системы обслуживания. Имеются m типов требований, для каждого типа требований своя очередь ожидания. В каждый момент времени обслуживается не более одного требования. Заданы законы распределения длительностей обслуживания требований каждого типа. Каждое обслуженное требование порождает случайное число требований-потомков каждого типа (“ветвящиеся вторичные потоки”). Выбор следующего требования для обслуживания зависит от длин очередей в момент решения (“динамические приоритеты”). Строится математическая модель в виде многомерной марковской цепи, проводится классификация состояний и изучаются некоторые асимптотические свойства распределений вероятностей.

А. П. Ковалевский, М. Г. Чебунин. Предельные теоремы для сумм регрессионных остатков при множественном упорядочении регрессоров

Мы доказываем теоремы о гауссовой асимптотике эмпирического моста, построенного из регрессоров линейной модели с множественным упорядочением регрессоров. Разработан алгоритм проверки гипотезы о линейной модели для компонент случайного вектора: одна из компонент является линейной комбинацией других с точностью до ошибки, не зависящей от остальных компонент случайного вектора. Результаты наблюдений за независимыми копиями случайного вектора последовательно упорядочиваются по возрастанию нескольких его компонент. Результатом является последовательность векторов более высокой размерности, состоящая из индуцированных порядковых статистик, соответствующих разным упорядочиваниям. Для этой последовательности векторов без предположения о линейной модели для компонент мы доказываем лемму о слабой сходимости распределений соответствующим образом центрированного и нормированного процесса к центрированному гауссовскому процессу с почти наверное непрерывными траекториями. В предположении о линейной взаимосвязи компонентов используются стандартные оценки методом наименьших квадратов для вычисления остатков регрессии — разностей между значениями отклика и значениями, предсказанными линейной моделью. Доказана теорема о слабой сходимости процесса сумм остатков регрессии при необходимой нормировке к центрированному гауссовскому процессу.

Исследование поддержано Математическим центром в Академгородке в соответствии с соглашением No. 075-15-2019-1675 с Минобрнауки России.

В. А. Куценко. Асимптотика моментов численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании в случайной среде

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с непрерывным временем в случайной среде. Предполагается, что в начальный момент времени на решетке находится одна частица, которая за малое время может переместиться в произвольный узел решетки, произвести потомство или погибнуть. Случайная среда определяется интенсивностями деления $\xi_+(x)$ и гибели $\xi_-(x)$ частиц в каждой точке решетки, при этом интенсивности являются неотрицательными случайными величинами $\xi^+(x) = \xi^+(x,\omega)$ и $\xi^-(x) = \xi^-(x,\omega)$. На пары $(\xi_+(x), \xi_-(x))$ накладывается условие об одинаковой распределенности и независимости в различных точках решетки. Блуждание описывается симметричным, однородным по времени случайным блужданием с конечной дисперсией скачков. Эволюция частиц происходит независимо друга от друга и от всей предыстории. В докладе будут представлены стандартные подходы, которые используются для изучения ветвящихся случайных блужданий в случайной среде. Особое внимание уделяется применению формулы типа Фейнмана-Каца для исследования моментов численностей частиц. Для некоторых случаев асимптотического поведения распределения $\xi_+(x) - \xi_-(x)$ получены результаты о предельном поведении случайных моментов при больших временах. Также будет обсуждаться ряд свойств описанных систем, в частности, скорость роста моментов, усредненных по среде, а также эффект перемежаемости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

Ю. Ю. Линке. Универсальные ядерные оценки в непараметрической регрессии.

В докладе будут обсуждаться новые оценки ядерного типа в непараметрической регрессии, равномерно состоятельные при близких к минимальным и наглядных условиях на точки дизайна. Оценки универсальны в том смысле, что дизайн может быть как фиксированным и не обязательно удовлетворяющим традиционным условиям регулярности, так и случайным, при этом не обязательно состоящим из независимых или слабо зависимых случайных величин. Относительно элементов дизайна предполагается лишь в некотором смысле плотное заполнение области определения регрессионной функции. Результаты, представленные в докладе, являются частью совместных исследований с Е. Б. Яровой (МГУ), В .А. Куценко (МГУ), И. С. Борисовым (ИМ СО РАН), П. С. Рузанкиным (ИМ СО РАН) и С. А. Шальновой (НМИЦ терапии и профилактической медицины).

В. А. Макаренко. Деликатное сравнение центральной и нецентральной ляпуновских дробей с приложением к неравенству Берри–Эссеена для составных пуассоновских распределений

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F и $\mathbb{E}|X|^3 < +\infty$, N_λ – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda > 0$. Обозначим

$$S_\lambda = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_\lambda}, \quad \widetilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - \mathbb{E}S_\lambda}{\sqrt{\mathbb{D}S_\lambda}},$$

$$\Delta_\lambda(F) = \sup_x \left| \mathbb{P}(\widetilde{S}_\lambda < x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \right|,$$

$$L_0(F) = \frac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^3}{(\mathbb{D}X)^{3/2}}, \quad L_1(F) = \frac{\mathbb{E}|X|^3}{(\mathbb{E}X^2)^{3/2}}.$$

Функционалы L_0 и L_1 называются соответственно центральной и нецентральной ляпуновскими дробями.

В докладе при каждом $t \in (-1, 1)$ представлены значения функций

$$H(t) = \sup_{\substack{F:\mathbb{E}X=t,\\ \mathbb{E}X^2=1}} \frac{\mathbb{E}|X|^3}{\mathbb{E}|X-t|^3}, \quad H(t)(1-t^2)^{3/2} = \sup_{\substack{F:\mathbb{E}X=t,\\ \mathbb{E}X^2=1}} \frac{L_1(F)}{L_0(F)}$$

и указаны соответствующие (двухточечные) экстремальные распределения, а также показано, что

$$\sup_F \frac{L_1(F)}{L_0(F)} = \sup_{t\in(-1,1)} H(t)(1-t^2)^{3/2} = \frac{\sqrt{17+7\sqrt{7}}}{4} = 1.48997\ldots.$$

Также показано, что из неравенства Берри–Эссеена с нецентральной ляпуновской дробью для составных пуассоновских случайных сумм

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} \cdot L_1(F), \quad \lambda > 0, \quad \text{(Ротарь, 1972, 1976)}$$

где $C_1 \in [0.266013, 0.3031]$ (Шевцова, 2014) – абсолютная константа, вытекает неравенство Берри–Эссеена с центральной ляпуновской дробью

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant \frac{C_0\left(\frac{\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathbb{E}X^2}}\right)}{\sqrt{\lambda}} \cdot L_0(X), \quad \lambda > 0,$$

$$C_0(t) = C_1 \cdot H(t)(1-t^2)^{3/2} \leqslant C_1 \cdot 1.48998, \quad t \in (-1, 1).$$

Т. Д. Мосеева. Интегральные тождества для границы выпуклого тела

Полученное в 1956 году Плейелем интегральное тождество позволяет выразить среднее значение функции от длины случайной хорды плоского выпуклого тела K, перейдя к интегрированию по границе K. С помощью тождества Плейеля легко можно выразить дефект в изопериметрическом неравенстве на плоскости и показать, что он неотрицателен.

Амбарцумяном в 1990 году была получена версия тождества Плейеля для выпуклых плоских многоугольников, также известная как тождество Амбарцумяна–Плейеля. Существует также аналог тождества Плейеля для выпуклых тел с гладкой границей в трёхмерном пространстве.

Доклад посвящён обобщениям тождеств Плейеля и Амбарцумяна–Плейеля на случай большей размерности пространства, а также другим интегральным тождествам, связанным с границей выпуклого тела.

М. В. Платонова. Вероятностная аппроксимация оператора эволюции e^{-itH}, где $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V$

Предложен способ построения вероятностной аппроксимации в смысле сильной операторной сходимости оператора e^{-itH}, где

$$H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + V.$$

Заметим, что полугруппа e^{-itH} переводит начальную функцию $\varphi(x)$ в решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = Hu, \quad u(0,x) = \varphi(x).$$

Аппроксимирующие операторы имеют вид математических ожиданий функционалов от некоторого точечного случайного поля.

А. О. Мокроусова. Асимптотическая относительная эффективность статистических критериев проверки соответствия регрессионной модели

Доклад посвящен исследованию двух критериев, проверяющих основную гипотезу о соответствии линейной модели регрессии с двумя параметрами против одной из четырех альтернатив, которые описывают различные нарушения в непрерывности, линейности и постоянности этой модели. В роли статистик критериев выступают интегральный и супремальный функционалы от эмпирического моста, построенного по регрессионным остаткам. Целью данной работы было сравнить вышеупомянутые критерии в смысле асимптотической относительной эффективности (АОЭ) по Питмену. Была получена формула, позволяющая вычислять АОЭ для таких критериев.

Е. И. Прокопенко. Подход multi-normex для аппроксимации суммы случайных векторов с тяжелыми хвостами

Мы рассмотрим точную аппроксимацию распределения суммы н.о.р. случайных векторов с тяжелыми хвостами, комбинируя среднее и экстремальное поведение. Данных подход обобщает так называемый подход «Normex» с одномерной модели на многомерную. Мы предложим два возможных распределения, названные d-Normex и MRV-Normex. Оба основываются на нормальном распределение для описания среднего поведения через ЦПТ, в то время как разница между двумя версиями заключается в использовании точного распределения или экстремальной теоремы для максимума. Поговорим о скорости сходимости для каждого распределения к распределению суммы, предполагая, что норма случайного вектора является правильно-меняющейся случайной величиной второго порядка. Приведем численные иллюстрации с использованием квантиль-квантиль графиков на основе геометрических квантилей. Работа выполнена совместно с Marie Kratz.

А. В. Резлер. Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки

Доклад основан на результатах статьи А.В. Резлера и М.Г. Чебунина «Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки». В работе были получены условия стабильности и нестабильности модели классической синхронизированной системы случайного множественного доступа с одним передающим прибором, управляемой протоколом передачи данных ALOHA и дополнительно снабженной механизмом энергетической подпитки. В отличие от стандартной системы ALOHA, в данной модели предполагается, что у каждого сообщения есть батарея, принимающая неограниченное количество ячеек заряда, и при том только сообщения с заряженной батареей могут быть переданы на передающий прибор. Помимо практических приложений, снабжение системы механизмом энергетической подпитки позволяет расширить ее область стабильности. В 2016 году в статье С.Г. Фосса, Д.К. Кима и А.М. Тюрликова «Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting» были получены условия стабильности и нестабильности для случая, когда каждое сообщение снабжено батареей, принимающей только одну единицу заряда. Результатом нашей работы является теорема о сохранении условий стабильности и нестабильности обобщенной модели.

Также мы исследовали условия стабильности и нестабильности модели, которая учитывает эффект саморазрядки, то есть потери заряда батарей в периоды простоя. Актуальность исследования возникла из практических приложений изучаемых систем.

Д. Б. Рохлин. О ценообразовании ресурсов на основе выявленных предпочтений

Рассматривается задача назначения цен на ресурсы с целью максимизации суммарной полезности агентов (производителей). Функции полезности агентов предполагаются неизвестными. Определение цен происходит итеративно на основе лишь информации о реакциях агентов на предложенные цены. Рассмотрены случаи асинхронных реакций и случайных функций полезности, порожденных последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Анализ опирается на теорию выпуклой онлайн оптимизации: мы применяем алгоритм SOLO FTRL (Orabona, Pal, 2018) к двойственно задаче. Для задачи с асинхронными реакциями производителей получены оценки в среднем и с большой вероятностью для отклонения целевой функции от оптимального значения и для невязок в ограничениях. Эти оценки имеют порядок $O(T^{-1/4})$ по числу T итераций и справедливы как в среднем, так и с большой вероятностью. Для задачи со случайными полезностями получены оценки такого же характера для среднего сожаления относительно лучшей последовательности цен.

Сформулируем данный результат более формально. Пусть $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}$: вектор объемов товаров, производимых k-м агентом, $A_{ij}^{(k)}$ — количество i-го ресурса, которое требуется для производства j-го товара, $b \in \mathbb{R}_{++}^m$ — вектор объемов имеющихся ресурсов, $a^{(k)} \in \mathbb{R}_{++}^{d_k}$ — вектор максимальных объемов выпуска товаров k-м агентом, $f_k(x^{(k)}; \xi_t)$ — случайные функции полезности агентов, $(\xi_t)_{t=1}^T$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в компактном множестве. Функции f_k предполагаются сильно вогнутыми по первому аргументу. Пусть x_t^* — оптимальная кооперативная стратегия:

$$x_t^* \in \arg\max_{x \in S} F(x;\xi_t), \quad S = \{x : Ax := \sum_{k=1}^n A^{(k)} x^{(k)} \le b;\ 0 \le x^{(k)} \le a^{(k)},\ k = 1, \ldots, n\},$$

$F(x;\xi_t) = \sum_{k=1}^n f_k(x^{(k)};\xi_t)$. Не приводя несложных явных формул упомянутого алгоритма SOLO FTRL для λ_t, укажем оценки сожаления и невязок в среднем:

$$\frac{1}{T} \max \left\{ \mathsf{E} \sum_{t=1}^T (F(x_t^*;\xi_t) - F(\widetilde{x}(\lambda_t);\xi_t)), \sum_{t=1}^T \|\mathsf{E}(b - A\widetilde{x}(\lambda_t))\| \right\} \le CT^{-1/4}.$$

Здесь $\widetilde{x}^{(k)}(\lambda) = \arg\min_{0 \le x^{(k)} \le a^{(k)}} (f_k(x^{(k)};\xi_t) - \langle A^{(k)} x^{(k)}, \lambda \rangle)$ — реакции агентов. Последовательность цен λ_t зависит только от этих реакций.

Н. В. Смородина. О существовании ядер некоторых случайных операторов

Доказывается существование ядер у случайных операторов, возникающих при построении вероятностного представления резольвенты самосопряженного строго эллиптического оператора второго порядка с ограниченным быстро убывающим потенциалом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-21-00016.

В. В. Ульянов. Предельные теоремы для взвешенных сумм и их применения

В докладе рассматриваются асимптотические разложения для симметричных функций от многих переменных. Это дает возможность разработать общий подход к построению неасимптотических оценок точности приближений для нелинейных форм от случайных элементов в терминах отношений ляпуновского типа. Обсуждается основное приложение общих результатов к центральной предельной теореме для взвешенных сумм, позволяющее получить скорость сходимости порядка O(1/n), а также рассмотреть рандомизацию широкого класса статистик, улучшающую их асимптотические свойства.

Е. М. Филичкина. Ветвящиеся случайные блуждания с одним центром генерации частиц и бесконечным числом поглощающих источников.

В последние годы активно развивается теория ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам. В докладе рассматривается новая модель таких процессов, когда, блуждая по решетке, начальная частица может поглотиться в каждой точке решетки и только в одной из них, например, в нуле она может также произвести потомство. Предполагается, что случайное блуждание, лежащее в основе процесса, симметрично, однородно по пространству и неприводимо, а все частицы-потомки эволюционируют по тому же закону независимо друг от друга. Выведены уравнения для производящих функций и моментов всей популяции частиц и численностей частиц в каждой точке решетки. Формально в правой части эволюционных уравнений для первых моментов возникает самосопряженный оператор с бесконечномерным точечным возмущением. Однако несложным преобразованием удается свети рассматриваемую задачу к задаче с одноточечным возмущением, которая детально изучена, например, в монографии Яровой (2007). Для нового оператора изучаются условия существования изолированного положительного собственного значения, но в отличие от всех проведенных ранее исследований, экспоненциальный рост численностей частиц в ВСБ будет наблюдаться, если полученное собственное значение будет превышать интенсивность поглощения частиц, которая в рассматриваемой модели предполагается равной в каждой точке решетки. В этом случае происходит регулярный рост моментов и доказывается слабая сходимость численностей частиц к некоторой случайной величине. Именно в такой ситуации можно говорить о “сильном” центре, в котором скорость размножения частиц позволяет достигнуть экспоненциального роста численности частиц на больших временах, несмотря на возможное поглощение в каждой точке.

А. А. Хартов. Квазибезгранично делимые распределения

Новый класс так называемых квазибезгранично делимых законов является естественным и очень значительным расширением класса безгранично делимых законов. Согласно определению вероятностный закон на вещественной прямой называется *квазибезгранично делимым*, если его характеристическая функция допускает представление Леви-Хинчина с некоторым вещественным параметром сдвига и с некоторой необязательно монотонной спектральной функцией, имеющей ограниченную вариацию на всей вещественной прямой. Несложно показать, что закон является квазибезгранично делимым в точности тогда, когда он *рационально безгранично делим*, т.е. его характеристическая функция есть отношение характеристических функций некоторых двух безгранично делимых распределений. Примеры таких законов встречались в хорошо известных классических монографиях Гнеденко и Колмогорова, Линника и Островского. Однако, определение и соответствующий класс были введены только в 2011 г. в одной работе Линднера и Сато в рамках некоторых задач теории случайных процессов. Недавно в статье Линднера, Пэна и Сато (Trans. Amer. Math. Soc., 370, 2018) был сделан первый большой анализ класса квазибезгранично делимых законов на основе представлений Леви-Хинчина. Сейчас данный класс активно изучается и находит свои приложения в других областях. В докладе будет сделан обзор основных определений и фактов связанных с этим классом, а также представлены некоторые новые результаты о критериях принадлежности к нему и о слабой сходимости.

И. Г. Шевцова. Дифференциальные преобразования характеристических функций и их свойства

В развитие идей Лукача (1970, Глава 12) вводятся некоторые интегральные преобразования конечных борелевских зарядов на прямой со смешивающими бета-распределениями и их суперпозиции. Эти преобразования определяются в терминах преобразований Фурье–Стилтьеса (характеристических функций) и обобщают хорошо известные преобразования смещения размера, квадрата, нулевого смещения, равновесное и симметричное равновесное преобразования вероятностных мер, причем не только за счет снятия ограничений на знакопостоянство меры, но и в части снятия моментных условий и ограничений на носитель. Изучаются свойства введенных преобразований, в частности, неподвижные точки и приводятся соответствующие предельные теоремы. Также приводятся возможные приложения полученных результатов к оценкам скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин методом Стейна и методом характеристических функций.

А. В. Шкляев. Сопровождающие блуждания для рекуррентных последовательностей

Рассмотрим последовательность

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n,\ n \geq 0,$$

где A_i – н.о.р. положительные случайные величины. Если бы мы потребовали независимость пар (A_i, B_i), то это была бы классическая модель, однако, в случае зависимых и разнораспределенных B_i мы сможем описать большие уклонения данной последовательности при достаточно широких условиях, связав их с уклонениями сопровождающего случайного блуждания $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, где $\xi_i = \ln A_{i-1}$, $i \geq 1$.

В докладе будут изложены основные результаты о такой связи. Упор будет сделан на применения к частным случаям: процессам в ветвлением в случайной среде. В этот обзор включены несколько классических моделей (в частности, ветвящийся процесс в случайной среде), несколько малоизвестных (в частности, двуполый ветвящийся процесс в случайной среде и максимальный ветвящийся процесс в случайной среде), а также приведем ряд моделей, которые, насколько нам известно, не вводились ранее (в частности, двуполый ветвящийся процесс со случайным механизмом паросочетания). Для данных моделей мы введем понятие сопровождающего случайного блуждания. В части моделей (в частности, однополом и двуполом ветвящемся процессе в случайной среде) такое блуждание вполне естественно, тогда как в моделях максимального ветвящегося процесса такого рода блуждание выглядит достаточно неожиданно. Основной упор будет сделан на асимптотику вероятностей больших уклонений, однако, в рамках того же подхода описываются и предельные теоремы в области нормальных уклонений.

Е. Б. Яровая. О методах исследования ветвящихся случайных блужданий

Доклад посвящен стохастическим процессам с непрерывным временем, которые могут быть описаны в терминах размножения, гибели и транспорта частиц. Такие процессы на многомерных решетках называют ветвящимися случайными блужданиями, а точки решетки, в которых может происходить рождение и гибель частиц — источниками ветвления. Особое внимание уделено анализу асимптотического поведения численностей частиц в каждой точке решетки и их моментов для ветвящихся случайных блужданий, в основе которых лежит симметричное, однородное по пространству, неприводимое случайное блуждание по решетке. Поведение моментов численностей частиц во многом определяется структурой спектра эволюционного оператора средних численностей частиц и требует для исследования ряда моделей привлечения спектральной теории операторов в банаховых пространствах. Будут рассмотрены два способа доказательства предельных теорем, один из которых основан на проверке условий, гарантирующих единственность определения предельного вероятностного распределения численностей частиц своими моментами, а другой — на аппроксимации нормированного числа частиц в точке решетки некоторым неотрицательным мартингалом (см., Н. В. Смородина и Е. Б. Яровая, 2022), позволяющий доказать сходимость этих величин к пределу в среднеквадратическом в достаточно общих предположениях на характеристики процесса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

П. А. Яськов. О теореме Марченко–Пастура для случайной тензорной модели

В докладе будут описаны неулучшаемые достаточные условия в теореме Марченко–Пастура для выборочных ковариационных матриц, отвечающих симметричным случайным тензорам, образованным $\binom{n}{d}$ различными произведениями d переменных, выбранных из n независимых стандартизированных случайных величин. Доказательства результатов будут основаны на новом неравенстве концентрации для квадратичных форм от симметричных случайных тензоров и новом законе больших чисел для элементарных симметрических случайных многочленов.