# Вторая конференция Математических центров России
# Секция «Комплексный анализ»

7–11 ноября 2022, Москва

### Н. Ф. Абузярова. О нулевых множествах медленно убывающих функций

Пусть $P$ — некоторое весовое пространство целых функций, $\varphi \in P$. Качественно свойство медленного убывания $\varphi$ в $P$ можно описать таким образом: функции $\ln|\varphi|$ и $-\ln|\varphi|$ должны удовлетворять сравнимым оценкам сверху на некоторых подмножествах комплексной плоскости, зависящих от пространства $P$. Свойство медленного убывания функций в $P$ возникло как одна из возможных характеризаций делителей этого пространства. Для приложений оказывается полезной информация о структуре нулевых множеств медленно убывающих функций. Мы рассматриваем этот вопрос в следующей постановке.

Известно, что модуль функции $\sin \pi z$ ограничен сверху и снизу на любом подмножестве фиксированной горизонтальной полосы, удаленном от $\mathbb{Z}$ на положительное расстояние. Поэтому $\sin \pi z$ является медленно убывающим элементом многих важных в приложениях весовых пространств целых функций. Нулевое множество функции $\sin \pi z$ — это множество $\mathbb{Z}$. В какой мере можно сдвигать целочисленные точки, чтобы возмущенная таким образом последовательность оставалась множеством нулей медленно убывающей функции в $P$?

### Р. Р. Акопян. Аналог теоремы о двух константах и восстановление голоморфной в поликруге функции по приближенным значениям на части остова

Обсуждаются несколько взаимосвязанных экстремальных задач для голоморфных функций в поликруге $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Получено точное неравенство

$$|f(z)| \leqslant \mathcal{C}\,\|f\|^{\alpha_1}_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)}\,\|f\|^{\alpha_0}_{L^{p_0}_{\phi_0}(G_0)}, \qquad 0 < p_0, p_1 \leqslant \infty,$$

между значением голоморфной функции в $\mathbb{D}^m$ и нормами ее предельных значений на двух измеримых подмножествах $G_1$ и $G_0 = \mathbb{S}^m \setminus G_1$ остова $\mathbb{S}^m$, являющееся аналогом теоремы братьев Неванлинна о двух константах. Изучено, когда неравенство дает значение модуля непрерывности функционала голоморфного продолжения функции в заданную точку поликруга с части остова $G_1$. В этих случаях решены соответствующие задачи оптимального восстановления функции по приближенно заданным значениям на $G_1$ и наилучшего приближения функционала продолжения функции в поликруг с части остова $G_1$.

### Ю. С. Белов. Пространства Пэли–Винера для двух интервалов, базисность, полнота биортогональных систем

Доклад посвящен изучению экспоненциальных систем в пространстве $L^2(E)$, где $E$ — объединение двух интервалов. Мы докажем аналог теоремы Юнга для таких систем и получим (отдельно) необходимые и достаточные условия для того чтобы экспоненциальная система была базисом Рисса. В частности, наши результаты позволяют продемонстрировать эффект лишней точки в сравнении с одним интервалом длины $|E|$. Доклад основан на совместных работах с А. Барановым, А. Кузнецовым и М. Мироновым.

**Р. В. Бессонов. Осцилляционные свойства решений нелинейного уравнения Шредингера**

Изучаются осцилляционные свойства решений нелинейного уравнения Шредингера

$$\begin{cases} i\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2|q|^2 q, \\ q\big|_{t=0} = q_0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказано, что соболевская норма $\|q(\cdot,t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R})}$ решения уравнения с начальными данными $q_0 \in L^2(\mathbb{R})$ эквивалентна интегралу движения с константами, зависящими лишь от величины $\|q_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Применяются методы обратной задачи теории рассеяния для одномерного оператора Дирака, в частности, спектральный вариант теоремы Сегё. Результаты получены совместно с С. А. Денисовым (Висконсинский университет в Мэдисоне). Автор поддержан грантом РНФ 19–71–30002.

**А. Б. Богатырёв. Компоненты пространства уравнений Пелля–Абеля с примитивным решением данной степени**

Н. Х. Абель в 1826 году рассмотрел диофантово уравнение Пелля в кольце многочленов от одной переменной для решения одной задачи редукции абелевых интегралов. Сегодня оно широко используется в теории аппроксимации, алгебраической геометрии, эллиптических бильярдах и проч. Мы находим число связных компонент в пространстве уравнений Пелля–Абеля, допускающих примитивное решение заданной степени.

Совместная работа с Quentin Gendron (IM UNAM).

**В. И. Буслаев. Необходимые и достаточные условия продолжимости функции до функции Неванлинны**

Пусть $\{e_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ и $\{h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ — два множества точек, лежащих соответственно в $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ и $\overline{\mathbb{H}}$, и пусть точки множества $\{e_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ попарно различны. Известная теорема Крейна–Рехтман утверждает, что для существования функции Неванлинны $f(z)$ (т.е. функции, голоморфной в $\mathbb{H}$ и принимающей значения в $\overline{\mathbb{H}}$), удовлетворяющей условиям $f(e_p) = h_p$, $p \in \mathcal{P}$, необходимо и достаточно, чтобы все формы

$$\sum_{j,k=0}^{n} \frac{h_{p_j} - \overline{h}_{p_k}}{e_{p_j} - \overline{e}_{p_k}} \xi_j \overline{\xi}_k$$

были ненегативны. Если какая-либо из этих форм сингулярна, то функция $f(z)$ единственна и является действительной рациональной дробью.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — последовательность точек, лежащих в $\mathbb{H}$, и пусть $F(z)$ — функция, определенная с учетом кратностей в точках $e_1, e_2, \ldots$, т.е. если $\nu_n$ — кратность точки $e_n$ в множестве $E_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$, то с учетом ранее определенных значений производных порядка меньше $(\nu_n - 1)$ в точке $e_n$ определено значение $F^{(\nu_n-1)}(e_n)$ производной функции $F(z)$

порядка $(\nu_n - 1)$. В докладе будут указаны необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование функции Неванлинны $f(z)$ такой, что $f^{(\nu_n-1)}(e_n) = F^{(\nu_n-1)}(e_n)$ при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$.

### С. К. Водопьянов. Пространства Соболева и теория отображений

Пространство Соболева $L^1_p(D)$, $p \in [1, \infty)$, на области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, состоит из локально суммируемых на $D$ функций, имеющих первые обобщенные производные, суммируемые в степени $p$. Полунорма функции $v \in L^1_p(D)$ равна норме в $L_p(D)$ ее обобщенного градиента $\nabla v$. Если $\varphi\colon D \to D'$ — гомеоморфизм двух областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, возникает естественный вопрос: при каких условиях оператор композиции $\varphi^*\colon L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, где $u = \varphi^*(v) = v \circ \varphi$, будет ограниченным. Мы получим более общую задачу, если вместо пространства $L^1_p(D')$ будем рассматривать весовое пространство Соболева $L^1_p(D', \omega)$. Мы приведем решение задачи в обобщенной постановке, и покажем, что при некоторых показателях суммируемости $q$ и $p$ полученные классы отображений совпадают с отображениями, изучаемыми в более ранних работах.

В рамках обобщенной теории получены результаты, которые являются новыми даже для классической теории квазиконформных отображений. Например, норма оператора композиции $\varphi^*\colon L^1_n(D') \to L^1_n(D)$ равна $K^{1/n}$, где $K = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} \dfrac{|D\varphi(x)|^n}{|\det D\varphi(x)|}$ — коэффициент квазиконформности.

Будет показано также применение новой шкалы отображений к задачам нелинейной теории упругости.

### Д. Н. Даутова. Метрики и квазиметрики, порожденные функцией пары точек

Мы изучаем функцию пары точек

$$p_G(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + 4 d_G(x) d_G(y)}},$$

где $d_G(x)$ — расстояние от точки области до границы этой области, в подобластях $\mathbb{R}^n$. Мы доказываем, что для любой подобласти $\mathbb{R}^n$ эта функция является квазиметрикой с константой меньшей или равной $\sqrt{5}/2$. Более того, для $n \geqslant 0$ эта функция является метрикой в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Мы также рассматриваем обобщения функции $p_G(x, y)$, зависящие от параметра $\alpha > 0$, и показываем, что в некоторых областях эти обобщения являются метриками тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant 12$.

### Е. С. Дубцов. Меры Кларка и операторы композиции для нескольких переменных

Пусть $B_n$ обозначает единичный шар из $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Для каждой непостоянной голоморфной функции $\varphi\colon B_n \to B_1$ и числа $\alpha \in \partial B_1$ канонически определяется мера Кларка $\sigma_\alpha[\varphi]$, заданная на единичной сфере $\partial B_n$. Многочисленные приложения таких мер хорошо известны в одномерном случае. В докладе обсуждаются свойства мер Кларка при $n \geqslant 2$. В качестве приложения для стандартного пространства Харди $H^2(B_n)$ вычисляется существенная норма оператора композиции $C_\varphi\colon H^2(B_1) \to H^2(B_n)$ в терминах семейства $\sigma_\alpha[\varphi]$, $\alpha \in \partial B_1$. Доклад основан на совместных работах с А. Б. Александровым.

**А. В. Дьяченко. О совершенстве систем комплексных мер**

Доклад будет посвящён доказательству совершенства некоторых систем классических мер методом, позволяющим параметрам мер быть комплексными.

**С. И. Калмыков. Об открывающих отображениях и связанных с ними вопросах**

В докладе будут рассматриваться прямые и обратные задачи, связанные с нахождением рациональных функций, обратные к которым осуществляют так называемые однолистные открывающие отображения дополнений заданных наборов Жордановых дуг до комплексной плоскости.

Доклад основан на совместных работах с В. Лысовым, B. Nagy и O. Séte.

**М. А. Комаров. Об оценках типа Ньюмана для $L_p[-1,1]$-норм наипростейших дробей с полюсами на единичной окружности**

Наипростейшими дробями (НД) принято называть логарифмические производные алгебраических полиномов. В докладе рассматриваются НД с полюсами $z_k$, лежащими на единичной окружности, то есть рациональные функции вида $g_n(z) = (z-z_1)^{-1} + \cdots + (z-z_n)^{-1}$, $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$.

Как известно, величина $g_n(z)$ (с точностью до постоянного множителя и операции комплексного сопряжения) показывает напряженность электростатического поля, порождаемого $n$ точечными единичными зарядами, помещенными в точках $z_k$. Ч. К. Чуи (1971) высказал предположение, что средняя напряженность такого поля в открытом единичном круге $D$, равная $\|g_n\| = \iint_D |g_n(z)|\,dxdy$, отделена от нуля некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от $n$ (и тем самым, дроби $g_n$ неплотны в пространстве $A(D)$ аналитических в круге $D$ функций $f$, для которых $\|f\| < \infty$). В 1972 году Д. Ньюман доказал справедливость этой гипотезы, установив оценку $\|g_n\| > \pi/18$.

Для случая отрезка близкая задача была поставлена С. Р. Насыровым (2014): плотны ли дроби $g_n$ в (комплексном) пространстве $L_2[-1,1]$. Отрицательное решение этой задачи получено автором в работе 2019 года, где доказана оценка $\|g_n\|_{L_2} = \int_{-1}^{1} |g_n(x)|^2\,dx > 1/64$. В докладе будет показано, что на самом деле нормы $\|g_n\|_{L_2}$ неограниченно возрастают с ростом $n$. Более того, будет предъявлен точный по $n$ порядок роста норм $\|g_n\|_{L_p}$ с любым $p \geqslant 1$. Техника, развитая при доказательстве оценок, применяется и к недавней задаче П. А. Бородина о плотности НД $g_n$ в весовых пространствах $L_2$ на отрезке с весом $(1-x^2)^\alpha$.

**М. Я. Мазалов. О емкостях, соизмеримых с гармоническими**

Пусть $L$ — однородный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, с постоянными комплексными коэффициентами. В терминах емкостей $\gamma_L$ описываются устранимые особенности $L^\infty$-ограниченных решений уравнений $Lf = 0$, причем емкости $\gamma_\Delta$ совпадают с классическими гармоническими емкостями теории потенциала.

Возникает естественный вопрос соизмеримости емкостей $\gamma_L$ и $\gamma_\Delta$ (с положительным множителем, зависящем от $L$), в какой-то степени аналогичный соизмеримости аналитических емкостей $\gamma$ и $\gamma_+$. Для класса регулярных компактов, включающего канторовы множества, на него дается положительный ответ при всех $L$ и соответствующих $N$. В доказательстве используются некоторые идеи Х. Толсы.

**А. Д. Медных. Методы комплексного анализа в теории узлов**

В докладе обсуждаются различные методы вычисления объемов узлов и зацеплений, моделируемых в пространствах постоянной кривизны. В случаях, когда моделирование ведется в гиперболическом или сферическом пространствах, объем выражается в виде комплексного интеграла от явно выписанной аналитической функции. В евклидовом пространстве, для вычисления объемов в качестве единицы масштаба берется длина моделируемого узла. Вычисленный таким образом объем всегда является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

**И. А. Медных. Спектральные инварианты циркулянтных графов**

В последнее время возник заметный интерес к исследованию различных дискретных объектов, обладающих свойствами, схожими с римановыми поверхностями. В таком качестве можно рассматривать конечные связные графы. Для них построена теория, подобная классической теорией римановых поверхностей. В частности, был введен дискретный аналог многобразия Якоби или якобиана для графов. Это приводит к задаче нахождения структуры конечной абелевой группы, порожденной потоками на графе, с системой соотношений, соответствующих первому и второму закону Кирхгофа. В рамках доклада рассматривается вопрос о структуре группы якобиана графа для семейства циркулянтных графов и их естественных обобщений.

**И. Х. Мусин. Теоремы типа Пэли–Винера–Шварца для ультрараспределений. Применения**

Будут рассматриваться пространства ультрадифференцируемых функций в выпуклых областях и на неограниченных замкнутых выпуклых множествах с непустой внутренностью многомерного вещественного пространства. Для них будет дано описание сильного сопряженного в терминах преобразования Фурье–Лапласа функционалов. Будут приведены примеры их применения в теории операторов. Ряд результатов примыкает к исследованиям В. С. Владимирова и Роевера (J. W. De Roever), посвященным пространствам функций, голоморфных в трубчатых областях.

**П. В. Парамонов. Критерии равномерной приближаемости рациональными функциями и старые задачи**

В докладе планируется сформулировать и обсудить основные критерии равномерной приближаемости функций рациональными функциями комплексного переменного (А. Г. Витушкин, М. С. Мельников, П. В. Парамонов), связанные с ними результаты о метрическом описании аналитической емкости (К. Толса), а также напомнить и обсудить ряд интересных задач в этой тематике, оставшихся нерешенными.

**Р. В. Романов. О нулях и полюсах дзета-функции Хелсона**

Исследованы особенности аналитического продолжения дзета-функции Хелсона $\zeta_\chi(s) = \sum \chi(n) n^{-s}$, отвечающей вполне мультипликативной функции $\chi$. Основной результат состоит в том, что на множества нулей и полюсов функции $\zeta_\chi$ в критической полосе нет никаких нетривиальных ограничений. Дано два различных доказательства этого факта. Одно из предложенных доказательств конструктивно — указано явное построение искомого характера $\chi$. Все ранее известные утверждения об особенностях $\zeta_\chi$ доказывались вероятностными методами.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с И. Бочковым (Санкт-Петербург).

**А. С. Садуллаев. Вещественно-аналитическое продолжение вдоль фиксированного направления**

В докладе дается обзор результатов по аналитическим продолжениям функций многих переменных являющихся $\mathbb{R}$-аналитическими (вещественно-аналитическими) вдоль фиксированного направления. В нем будут рассмотрены наиболее весомые результаты, полученные в последние годы в этом направлении польскими и узбекскими математиками. По характеру, приведенные результаты имеют непосредственное отношение к известной теореме Хартогса об аналитичности сепаратно-аналитических функций в многомерном комплексном анализе. Однако методы исследования указанных задач существенно отличаются друг от друга, хотя основным методом исследования $\mathbb{R}$-аналитических функций в наших работах является богатые свойства аналитических функций многих переменных и теория плюрипотенциала, основанная на операторах Монжа–Ампера $(dd^cu)^n$.

Доклад основан на работах: 1) A. Sadullaev, Real analyticity of a $C^\infty$- germ at a origin, Annales Polonici Mathematici, 2022, v. 128, 87–97; 2) A. Atamuratov, Dj. Tishabaev, T. Tuychiev, An analogue of the Hartogs lemma for $\mathbb{R}$-analytic functions, J. Sib. Fed. Univ.–Math. Phys., 2022, v. 15, no. 2, 196–200; 3) S. Imomkulov, Continuation of $\mathbb{R}$-analytic functions along parallel lines, JTWMS, to appear.

**А. Г. Сергеев. Спинорная геометрия и уравнения Зайберга–Виттена**

Уравнения Зайберга–Виттена, найденные в конце прошлого века, остаются одним из главных открытий в гладкой топологии и дифференциальной геометрии 4-мерных римановых многообразий. Также, как уравнения Янга–Миллса, они являются предельным случаем более общей суперсимметричной теории Янга–Миллса. В отличие от известных в геометрии SU(2)-уравнений Янга–Миллса, эти уравнения абелевы, однако они не инварианты относительно изменения масштаба.

Поэтому для того, чтобы извлечь «полезную информацию» из этих уравнений, приходится вводить в них масштабный параметр $\lambda$ и затем переходить к пределу $\lambda \to \infty$. Этот предел называется адиабатическим и его исследованию на компактных комплексных кэлеровых поверхностях и 4-мерных симплектических многообразиях посвящен наш доклад.

**Б. Н. Хабибуллин. Теоремы типа Лиувилля с ограничениями вне исключительных множеств**

По классической теореме Лиувилля всякая целая или субгармоническая функция, ограниченная сверху на всей комплексной плоскости, постоянна. Такой же вывод возможен и в предположении ограниченности сверху таких функций вне некоторого достаточно малого исключительного множества при дополнительном ограничении на скорость роста функции. При этом взаимосвязь между малостью исключительного множества и скоростью роста функции должна быть взаимно обратной. Количественные аспекты последнего и будут обсуждаться, включая и многомерные случаи на пространстве или шаре.

**А. К. Цих. Нестандартные интерполяции в $\mathbb{C}^n$**

В алгебраической интерполяционной теории узлы интерполяций $\{z^{(j)}\}$ трактуются в виде множества решений систем $P(z) = 0$ алгебраических уравнений. В стандартной постановке задача состоит в построении аналитической функции $f(z)$ по данным действиям

$$a_{jl} = \mathcal{L}_{jl}[f]|_{z^{(j)}}$$

нётеровских операторов $\mathcal{L}_{jl}$ идеала, порожденного системой полиномов $P$. В случае $n = 1$ получается задача Эрмита о восстановлении полинома $f$ по значениям подходящих производных $f$ в интерполяционных узлах.

Недавно D. Alpay и A. Yger предложили «нестандартную» постановку алгебраической интерполяционной задачи. Она состоит в двойственном подходе построения $f$ по заданным значениям $\{c_{jl}, c\}$ со свойством

$$\sum_{j,l} c_{jl}\mathcal{L}_{jl}[f]|_{z^{(j)}} = c.$$

Основной результат состоит в построении $f$ на основе двойственности Гротендика для локальных вычетов, ассоциированных с регулярной последовательностью полиномов. С этой целью обобщается известная теорема О. Гельфонда и А. Хованского о вычислении сумм локальных вычетов через интегралы по торам. Для этого используются кобордизмы, связанные с аналитическими полиэдрами Вейля.