Вторая конференция Математических центров России
Секция «Действительный и функциональный анализ»

7–11 ноября 2022, Москва

А. Р. Алимов. Связность множеств в несимметричных пространствах

Рассматриваются вопросы о соотношении классов связности подмножеств несимметрично нормированных пространств. Множество $M \subset X$ называется P_0-связным (P-связным) если для любого $x \in X$ множество ближайших точек из M для x связно (непусто и связно). Множество $M \subset X$ называется B-связным, ($\mathring{B}$-связным), если его пересечение с любым шаром $B(x, r) := \{y \in X \mid \|y - x\,| \leqslant r\}$ (с любым шаром $B(x, r) := \{y \in X \mid \|y - x\,| < r\}$) связно. В классическом нормированном случае имеется ряд результатов, гарантирующих B- (или $\mathring{B}$-) связность P- (или P_0-) связных множеств. Первые результаты в этом направлении принадлежат Д. Вулберту и Л. П. Власову. К примеру, хорошо известно, что в банаховом пространстве чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией $\mathring{B}$-связно (т.е. его пересечение с любым открытым шаром связно). Среди множества обобщений результатов Вулберта, Власова и других исследователей отметим следующий: в линейном нормированном пространстве P-связное множество с полунепрерывной сверху метрической проекцией $\mathring{B}$-связно. В докладе результаты такого рода будут получены для несимметрично нормированных пространств.

С. В. Асташкин. Об одном свойстве пространств Орлича, лежащих между L^1 и L^2

Напомним, что замкнутое линейное подпространство H пространства $L^p = L^p[0, 1]$, $1 \le p < \infty$, называют *сильно вложенным*, если на H сходимость в L^p-норме эквивалентна сходимости по мере.

Цель доклада — распространение на класс пространств Орлича следующей классической теоремы Х. П. Розенталя, доказанной в 1973 г.: Для каждого $1 \le p < 2$ и любого (замкнутого линейного) подпространства H пространства L^p следующие условия эквивалентны:

(a) H не содержит подпространств, изоморфных пространству ℓ^p;

(b) H сильно вложено в L^p;

(c) функции единичного шара B_H подпространства H имеют равностепенно непрерывные нормы в L^p.

Сформулируем один из результатов, где α_M^∞, β_M^∞ — индексы Матушевской-Орлича в бесконечности функции M.

Теорема. *Пусть M — такая функция Орлича, что $1 < \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty < 2$, $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$ и $\limsup_{n\to\infty} \frac{M(uv)}{M(v)} \le Ku^{-1/\beta_M^\infty}$ для некоторого $K > 0$ и всех $u \ge 0$. Тогда для каждого подпространства H пространства L_M следующие условия эквивалентны:*

(i) H не содержит подпространств, изоморфных подпространствам L_M, порожденным последовательностями попарно дизъюнктных функций;

(ii) H сильно вложено в L_M;

(iii) нормы функций единичного шара B_H подпространства H равностепенно непрерывны в L_M.

М. В. Балашов. О сильной выпуклости множества достижимости линейной управляемой системы

Пусть $B_R(a)$ — евклидов шар с центром $a \in \mathbb{R}^n$ радиуса $R > 0$. Для выпуклого компакта $Q \subset \mathbb{R}^n$ и единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ определим $Q(p) = \{x \in Q \ : \ (p, x) = \max\limits_{z \in Q}(p, z)\}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ систему $x'(t) \in Ax(t) + U$, $x(0) = 0$. Здесь A — $n \times n$ матрица, $U \subset \mathbb{R}^n$ — одномерный выпуклый компакт (отрезок). Рассмотрим множество достижимости системы в момент $t > 0$, т.е. интеграл Аумана $\mathcal{R}(t) = \int\limits_0^t e^{As} U\, ds$.

Зафиксируем единичный вектор $p \in \mathbb{R}^n$. В докладе будет обсуждаться следующий вопрос: существует ли число $R > 0$ такое, что

$$\mathcal{R}(t) \subset B_R(\mathcal{R}(t)(p) - Rp)? \tag{1}$$

Ответ зависит от корней квазимногочлена $(e^{A^T s} p, U(p))$ (по переменной $s \in \mathbb{R}$). Если все вещественные корни этого многочлена из промежутка $[0, t]$ имеют кратность 1 (простые корни), то указанное R найдется. Если имеется корень кратности ≥ 2, то никакое $R > 0$ не реализует включение (1).

Выполнение включения (1) важно для сходимости градиентных методов при решении некоторых теоретико-множественных задач со множеством достижимости.

С. И. Безродных. Формулы аналитического продолжения гипергеометрических функций многих переменных

Весьма общий класс гипергеометрических функций, зависящих от N переменных $(z_1, z_2, \ldots, z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, определяется с помощью рядов Горна, имеющих вид:

$$\Phi^{(N)}(\mathbf{z}) = \sum\nolimits_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} \Lambda(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)$ — мультииндекс, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_N^{k_N}$, а коэффициенты $\Lambda(\mathbf{k})$ таковы, что отношение любых двух соседних является рациональной функцией аргументов $k_1, k_2, \ldots, k_N$. Иначе говоря, выполняются соотношения $\Lambda(\mathbf{k} + \mathbf{e}_j)/\Lambda(\mathbf{k}) = P_j(\mathbf{k})/Q_j(\mathbf{k})$, $j = \overline{1, N}$, где P_j и Q_j — некоторые полиномы, а $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ – вектор с единицей на j-м месте.

В докладе излагается подход для построения формул аналитического продолжения ряда (1) по переменным $\mathbf{z}$ во все комплексное пространство $\mathbb{C}^N$ в виде линейных комбинаций $\Phi^{(N)}(\mathbf{z}) = \sum_m A_m u_m(\mathbf{z})$, где $u_m(\mathbf{z})$ — гипергеометрические ряды горновского типа, удовлетворяющие той же системе дифференциальных уравнений в частных производных, что и ряд (1), A_m — некоторые коэффициенты. Реализация этого подхода продемонстрирована на примере функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ — важного для приложений представителя семейства гипергеометрических функций многих переменных. Дано применение формул аналитическскго продолжения функции $F_D^{(N)}$ к решению проблемы "кроудинга", возникающей при вычислении параметров интеграла Кристоффеля–Шварца и построении конформного отображения многоугольников.

А. А. Васильева. Колмогоровские поперечники пересечения двух конечномерных шаров в смешанной норме

Получены порядковые оценки поперечников $d_n(\nu_1 B^{m,k}_{p_1,\theta_1} \cap \nu_2 B^{m,k}_{p_2,\theta_2},\, l^{m,k}_{q,\sigma})$ при $2 \le q < \infty$, $2 \le \sigma < \infty$, $1 \le p_i \le q$, $1 \le \theta_i \le \sigma$ $(i = 1,\, 2)$, $n \le \frac{mk}{2}$.

А. В. Грешнов. Об оценках в теоремах о точках совпадения на группах Карно

В недавних работах А. В. Арутюнова и А. В. Грешнова было введено и изучено понятие (q_1, q_2)-квазиметрического пространства. Пусть X — некоторое множество, состоящее не менее чем из двух точек. (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством называется пара (X, ρ_X), где $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая (q_1, q_2)-*квазиметрика*, т. е. такая функция, что для нее выполняются *аксиома тождества* $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ и (q_1, q_2)-*обобщенное неравенство треугольника* $\rho_X(x, y) \le q_1\rho_X(x, z) + q_2\rho_X(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$, где q_1, q_2 — некоторые положительные константы. Эквирегулярные пространства Карно–Каратеодори $\mathcal{M}$ (в частности, группы Карно G), снабженные Box-квазиметриками $\rho_{Box_{\mathcal{M}}}$, являются нетривиальными примерами (q_2, q_2)-квазиметрических пространств. Box-квазиметрики нашли огромное применение в геометрической теории меры и теории функциональных классов и связанных с ними отображений на неголономных многообразиях, развитых С. К. Водопьяновым и его учениками. А. В. Арутюновым и А. В. Грешнова были доказаны теоремы существования точек совпадения двух отображений, действующих из одного (q_1, q_2)-квазиметрического пространства в другое и удовлетворяющих предположению о том, что одно из этих отображений является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица. При этом были установлены оценки отклонения точки совпадения от произвольно заданной и построены примеры (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, показывающих точность полученных оценок. В настоящем докладе мы обсудим результаты, связанные с точностью оценок отклонения точки совпадения от произвольно заданной на группах Карно (G, ρ_{Box_G}).

Т. И. Зайцева. 2-тайлы и растягивающие полиномы

Доклад будет посвящен 2-тайлам — самоподобным компактам, являющимся объединением двух своих сжатий с одинаковой линейной частью. 2-тайлы являются специальным случаем тайлов, на которых основан один из подходов к построению многомерных систем Хаара и многомерных B-сплайнов. Будет рассказано про классификацию 2-тайлов с точностью до аффинного подобия в случае, когда матрица сжатия изотропна (все собственные значения равны по модулю). В анизотропном случае, вопрос сводится к классификации растягивающих полиномов с целыми коэффициентами, старшим коэффициентом 1 и свободным членом $\pm$ 2. Будет рассказано об оценках на число данных полиномов. Для верхней оценки будут использованы результаты Дубицкаса–Конягина о мере Малера. Для нижней оценки будут предъявлены конкретные классы таких полиномов.

А. Н. Карапетянц. Операторы композиции в обобщенных пространствах Гельдера

Исследуются операторы композиции в обобщенных пространствах Гёльдера на единичном диске комплексной плоскости. Именно, в пространствах Гёльдера, построенных по модулю непрерывности и также в классах переменной гёльдеровости. Даются необходимые и достаточные условия, а также приводятся критерии ограниченности и компактности операторов композиции в указанных пространствах. Изучаются также сами обобщенные пространства

Гёльдера, доказываются теоремы вложения, строятся примеры функций из этих классов, приводится характеризация функций из этих классов в различных терминах, в том числе в терминах, не использующих дифференцируемость. Доклад основан на трех работах с соавторами — Оскар Бласко (Испания) и Джоэль Рестрепо (Бельгия).

Е. Д. Косов. Новые оценки в задаче дискретизации интегральных норм

В задаче дискретизации интегральных норм по значениям в точках для заданного числа $\varepsilon \in (0,1)$ и N-мерного подпространства $L \subset C(\Omega)$, Ω — компакт с вероятностной борелевской мерой μ, ставится вопрос об оптимальном количестве m точек $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$, для которых

$$(1-\varepsilon)\int_\Omega |f(x)|^p\,\mu(dx) \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \le (1+\varepsilon)\int_\Omega |f(x)|^p\,\mu(dx) \quad \forall f \in L.$$

Ясно, что всегда $m \ge N$, поэтому вопрос состоит в том, при каких условиях на подпространство L количество точек m в описанной задаче может быть выбрано близким по порядку к размерности N. В докладе будет рассказано о недавних продвижениях в данной задаче и о новых оценках количества точек m достаточного для дискретизации интегральной нормы при условии выполнения неравенства типа Никольского для подпространства L. Доклад основан на совместной работе с Ф. Даем и В. Н. Темляковым.

З. А. Кусраева. Порядково-метрические свойства положительных операторов в банаховых решетках

Рассматриваются некоторые классы операторов, выделяемые порядковыми свойствами (положительность, регулярность, порядковая ограниченность). Приводятся примеры, показывающие, что взаимодействие алгебраической структуры и отношения порядка не только интересно, но и продуктивно, так как приводит к решению ряда различных задач анализа, даже если постановка этих задач изначально не была связана с порядком.

Вводятся классы линейных операторов, в определении которых участвует не только порядок, но и норма. Тем самым обозначается обширная область из теории операторов, посвященная исследованию порядково-метрических свойств линейных операторов. Рассматриваются две проблемы: 1) проблема совпадения пространств ограниченных по норме и регулярных операторов; 2) проблема мажорации, т.е. при каких условиях оператор, мажорируемый положительным оператором, наследует какие-нибудь “хорошие” свойства своей мажоранты.

В. В. Лебедев. Большие случайные ± 1 матрицы

Мы рассматриваем $N \times N$ матрицы с коэффициентами ± 1 и при больших N оцениваем вероятность того, что две такие матрицы, выбранные случайным образом, коммутируют. Результаты получены совместно с Э. Ш. Исмагиловым. Предполагается также обсудить некоторые смежные результаты и открытые проблемы.

М. С. Лопушански, Г. М. Иванов. Конструктивный алгоритм построения спрямляемых кривых на проксимально гладких множествах

Хотя существование и единственность геодезической, соединяющей две точки на проксимально гладком множестве в гильбертовом пространстве доказаны, остается неясным, как ее строить. Для приближения к ответу на этот вопрос разработан конструктивный алгоритм построения спрямляемой кривой, соединяющей две точки на проксимально гладком множестве в гильбертовом пространстве. Доказана сходимость данного алгоритма и получена оценка на длину кривой, которая отличается от оценки на длину геодезической в третьем порядке.

Ю. В. Малыхин. Поперечники конечных систем функций

Мы обсудим колмогоровские поперечники конечных множеств функций: $d_n(\{f_1, \ldots, f_N\}, L_p)$. В пространстве L_2 любая ортонормированная система $\{f_k\}$ является "жёсткой", то есть не приближается маломерными пространствами, соответствующий поперечник отделён от нуля, если n отделено от N. При $p < 2$ это уже не так. Мы дадим достаточные условия жёсткости в этом случае, а также рассмотрим примеры систем, для которых возможна хорошая маломерная аппроксимация.

Р. Г. Насибуллин. Неравенства Харди для веса Якоби и их применения

Рассматриваются неравенства типа Харди для весовой функции Якоби. Неравенства содержат дополнительные слагаемые с весовыми функциями, характерными для неравенств Пуанкаре–Фридрихса. Мы применяем их для расширения известных классов однолистных аналитических функций в односвязных областях. Получены условия однолистности в терминах оценки производной Шварца аналитической в единичном круге, во внешности единичного круга и в правой полуплоскости функции.

Т. М. Никифорова. Об одной задаче минимакса на вещественной оси

В докладе будет обсуждаться задача минимакса на вещественной оси для функций специального вида, обобщающего многочлены с весом. Получена характеризация функции, наименее уклоняющейся от нуля, и доказана её единственность. Для отрезка $[0, 1]$ и единичного веса аналогичная задача была решена Б. Д. Бояновым в 1979 году. Взвешенную задачу Боянова на отрезке решили венгерские математики Б. Фаркаш, Б. Надь и С. Ревес в 2021 году.

К. А. Оганесян. Оценки числа многомерных разбиений

Речь пойдет об оценках на число $p_d(n)$ всех $(d-1)$-мерных разбиений натурального числа n. Известно, что имеет место двустороннее неравенство $C_1(d)n^{1-1/d} \leq \log p_d(n) \leq C_2(d)n^{1-1/d}$, где $C_1(d) > 1$ при $\log n \gtrsim d$. Мы покажем, что если n достаточно велико по сравнению с d, то и C_2 не зависит от d, а значит, $\log p_d(n)$ есть с точностью до константы $n^{1-1/d}$. Кроме того, мы приведем оценки на $p_d(n)$, дающие асимптотику для $\log p_d(n)$ в зависимости от соотношений между d и n.

М. Г. Плотников. Восстановление и приближение интегрируемых функций

Изучаются вопросы, связанные с восстановлением суммируемых функций из широких классов по их значениям на множествах малой меры (восстанавливающих множествах). Исследуется, насколько точно можно узнать функцию f на p-ичной группе по ее сужению на специальные множества H малой меры в зависимости от поведения коэффициентов Фурье f по системе Виленкина–Крестенсона, а также от групповой структуры и метрических характеристик H.

А. Ю. Попов. Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации

В 1881 году К. Жордан доказал равномерную сходимость ряда Фурье непрерывной 2π-периодической функции ограниченной вариации. В 1952 году С. Б. Стечкин дал оценку скорости сходимости (уточненную впоследствии С. А. Теляковским):

$$\|r_n(f)\| = O\left[\omega\left(f; \frac{1}{n}\right) \ln\left(\frac{V(f)}{\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)}\right)\right],$$

где $r_n(f)$ — n-й остаток ряда Фурье функции f, $\| \quad \|$ — стандартная sup-норма, ω — модуль непрерывности, $V(f)$ — вариация функции f на $[-\pi, \pi]$, постоянная в O — абсолютная. Возникает вопрос о величине этой постоянной. В 1982 году В. В. Жук опубликовал оценку сверху $\|r_n(f)\|$ (f — произвольная непрерывная 2π-периодическая функция), учитывающую "малость" наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами степени $\leq n$ по сравнению с $\omega\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)$, причем все величины в оценке В. В. Жук указал явно. Для функций ограниченной вариации теорема В. В. Жука дает

$$\|r_n(f)\| \leq \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)\left(\frac{2}{\pi^2}\ln\left(1 + \frac{3\pi V(f)}{\omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)}\right) + 9.5\right)$$

(Заметим, что этот результат нигде не был сформулирован; вывод его из теоремы В. В. Жука не вполне тривиален.) Мы уточнили последнюю оценку

$$\|r_n(f)\| \leq \omega_n(f)\left(\frac{2}{\pi^2}\ln\left(\frac{V(f)}{\omega_n(f)}\right) + 1.31\right),\ \omega_n(f) = \omega\left(f; \frac{\pi}{1.5(n+0.5)}\right).$$

Мы также показали, что постоянная $2\pi^{-2}$ является точной, а постоянная 1.31 не допускает уменьшения на 1.

Д. В. Руцкий. Экстраполяционные теоремы в решетках измеримых функций

В начале 80-х годов прошлого века Рубио де Франсиа показал, что из оценки

$$\int |Tf|^p w \leqslant c \int |f|^p w$$

с весами Макенхаупта $w \in \mathrm{A}_p$ при каком-то одном значении показателя $1 < p < \infty$ автоматически вытекает её справедливость при всех других значениях показателя и соответствующих весах Макенхаупта. В дальнейшем этот результат многократно обобщался и находил множество применений. В докладе будут представлены некоторые абстрактные экстраполяционные теоремы, сформулированные в терминах поточечных произведений решеток и применимые к широкому классу включений. В предлагаемую схему, помимо ряда классических экстраполяционных теорем, естественным образом укладываются результаты о делимости BMO-регулярности, некоторые утверждения о K-замкнутости и устойчивости интерполяции пространств типа Харди, а также и некоторые результаты о разрешимости теоремы о короне и теорем об идеалах в терминах весовых оценок.

Д. А. Сбоев. Операторы композиции в BV-пространствах на группах Карно

В докладе рассматривается вопрос описания всех гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств BV-функций. Пусть $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ — гомеоморфизм областей Ω, Ω' на группе Карно G, тогда на функцию u, определенную в области Ω', оператор φ^* действует по формуле $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$.

Теорема. Гомеоморфизм φ индуцирует ограниченный оператор композиции BV-пространств

$$\varphi^*\colon BV(\Omega') \cap C(\Omega') \to BV(\Omega)$$

тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$ и

2) существует константа $C > 0$ такая, что $|D\varphi|(\varphi^{-1}(B)) \le C|B|$ для любого борелевского $B \subset \Omega'$.

С. П. Сидоров. Свойства линейных методов формосохраняющего приближения

Будут найдены оценки линейных относительных n-поперечников для линейных операторов, сохраняющих пересечение конусов p-монотонных функций. Кроме того, будут построены примеры линейных операторов, для которых эти оценки будут точны. Однако, результаты показывают, что свойство линейности операторов является негативным в том смысле, что никакое улучшение дифференциальных свойств приближаемых функций не сможет привести к улучшению порядка приближения такими операторами. В связи с этим будут рассмотрены некоторые нелинейные методы формосохраняющего приближения и восстановления сигнала по зашумленным данным, в частности, построения k-монотонных регрессий.

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков. Из теории полиномов Бернштейна

В последнее десятилетие было выявлено много специальных эффектов, связанных с полиномами Бернштейна от кусочно линейных порождающих функций. Среди прочего для таких полиномов исследован вопрос о сходимости в комплексной плоскости и построена завершенная теория аттракторов нулей. Кроме того, для основных модельных примеров

- получен ряд новых алгебраических представлений;
- изучен вопрос о скорости роста возникающих коэффициентов;
- установлены связи полиномов Бернштейна и полиномов Канторовича, что дает новые возможности для изучения последних.

Отдельно поставлена и решена задача о принципиальных отличиях в теории при ее переносе на симметричный отрезок $[-1, 1]$. Активное участие в проводимых исследованиях принимали наши коллеги М. А. Петросова, Д. Г. Цветкович, И. В. Окорочков. В докладе будут отражены некоторые наиболее интересные результаты из отмеченного цикла.

А. И. Тюленев. Следы пространств Соболева на регулярных снизу в смысле обхвата по Хаусдорфу подмножествах метрических пространств с мерой

Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ — полное сепарабельное метрическое пространство с мерой μ, равномерно удовлетворяющей локальному свойству удвоения. Пусть $p \in (1, \infty)$ и пространство X допускает слабое локальное $(1, p)$-неравенство Пуанкаре. Пусть, наконец, S — замкнутое подмножество X, удовлетворяющее при некотором $\theta \in [0, p)$ условию регулярности снизу обхвата Хаусдорфа коразмерности θ. Более точно, пусть существует $\lambda \in (0, 1]$ такое, что $\mathcal{H}_{\theta,\infty}(B_r(x) \cap S) \geq \lambda \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}$ при всех $x \in S$ и всех $r \in (0, 1]$. Мы приводим точное внутреннее описание пространства следов $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$. Кроме того, мы покажем существование линейного ограниченного оператора продолжения $\mathrm{Ext}_{S,p} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})$, являющегося правым обратным к оператору следа $\mathrm{Tr}\,|_S$. Полученные результаты являются естественным далеко идущим обобщением известных ранее в мировой литературе теорем о следах пространств Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ на регулярных по Альфорсу-Давиду подмножествах метрических пространств с мерой.

К. С. Шкляев. О приближении полугруппой в банаховом пространстве

Аддитивной полугруппой $R(M)$, порожденной подмножеством M банахова пространства X, называется множество всевозможных сумм элементов из M. Вопрос о плотности $R(M)$ в X был поставлен П. А. Бородиным. Им доказано, что если M — спрямляемая, разносторонняя и минимальная кривая, а X — равномерно гладкое и равномерно выпуклое пространство, то $R(M)$ плотно в X. В докладе речь пойдет об обобщении данного результата на случай не минимальных кривых с ослабленным условием спрямляемости. Кроме того, получен аналог данного результата, когда M — образ липшицева отображения из плоского компакта в гильбертово пространство.