Вторая конференция Математических центров России
Секция «Уравнения с частными производными»

7–11 ноября 2022, Москва

Ю. В. Авербух. Аппроксимация решений уравнения Беллмана для задач управления средним полем

В докладе рассматривается задача управления средним полем, моделирующая движение большой группы агентов с динамикой

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), m(t), u(t)), \quad t \in [0, T], x(t) \in \mathbb{T}^d, m(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), \quad u \in U.$$

Здесь $\mathbb{T}^d$ обозначает d-мерный тор, $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ – пространство вероятностей на торе, снабженное метрикой Канторовича. Также $m(t)$ обозначает распределение всех агентов в момент времени t. Подход управления средним полем предполагает, что агенты выбирают свое управление независимо, но действуют кооперативно, стремясь минимизировать величину $\sigma(m(T))$.

Отметим, что в данном случае в качестве позиции выступает вероятность, описывающая распределение агентов.

Основным объектом исследования является функция цены $\mathrm{Val}(t_0, m_0)$, которая сопоставляет начальному моменту времени t_0 и начальному распределению агентов m_0 значение $\sigma(m(T))$ при оптимальном управлении. Эта функция должна удовлетворять уравнению Беллмана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(t, m, \nabla_m \varphi) = 0,$$

где $\nabla_m \varphi$ – производная функции φ по m.

В докладе рассматривается построение приближений функции цены решениями конечномерных уравнений типа Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + \mathcal{H}(t, \mu, \nabla_\mu \phi) = 0,$$

где μ — элемент некоторого конечномерного симплекса Σ, $\phi : [0, T] \times \Sigma \to \mathbb{R}$. Отметим, что конечномерное уравнение Гамильтона–Якоби возникает как уравнение Беллмана в некоторой конечномерной задаче управления, интерпретируемой как задача управления средним полем с конечным числом состояний.

Х. Али. Отсутствие нетривиальных решений Комплекснозначных полулинейных эллиптических неравенств 2-порядка

Данный доклад посвящён проблеме отсутствия решения для полулинейных неравенств второго порядка с ограниченными коэффициентами и комплексными значениями. Также в данном докладе рассматривается частный случай их.

Актуальность данной темы заключается в том, что мы расширим результаты для n-мерного вещественного пространства на n-мерное комплексное пространство.

В результате получаем условие отсутствия глобального нетривиального слабого решения данной задачи. Полученные результаты доказаны методом пробных функций.

В. Б. Васильев. Эллиптические уравнения, модельные области и краевые задачи

Отправной точкой исследования служит модельное псевдодифференциальное уравнение в конусе $C \subset \mathbb{R}^m$

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad x \in C, \tag{1}$$

где $A : H^s(C) \to H^{s-\alpha}(C)$ – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1+|\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Конкретный конус C обладает определенными параметрами, например, угол на плоскости $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ имеет "раствор" a, а пространственный конус $C_+^{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + |x_2|, a, b > 0\}$ имеет 2 параметра a, b. Представляется интересным и естественным выяснить, что произойдет с решением уравнения (1) (в том случае, когда оно существует и единственно), когда некоторые параметры стремятся к своим предельным значениям 0 или ∞. Получены ответы на некоторые из этих вопросов.

Можно рассмотреть дискретный вариант уравнения (1) с помощью следующих конструкций для функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$. Пусть $C_d = h\mathbb{Z}^m \cap C$, $\hbar = h^{-1}$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ и $\tilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция, определенная на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ в дискретном конусе C_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} h^m \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_d,$$

где $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначает дискретное преобразование Фурье функции u_d.

Можно определить дискретный аналог H^s-пространств и для специального случая $C = \mathbb{R}_+^m$ получить условия разрешимости для дискретного аналога уравнения (1). Показано, что дискретные решения обладают аппроксимационными свойствами при малых h. Аналогичные результаты получены для дискретного квадранта на плоскости.

Л. В. Гаргянц. О локально ограниченных решениях одномерных законов сохранения с несимметричной функцией потока

В полосе $\Pi_T = \{(t,\, x) \mid t \in (0,\, T),\ x \in \mathbb{R}\}$, где $0 < T \le +\infty$, рассматривается задача Коши

$$u_t + (f(u))_x = 0,\ (t,\, x) \in \Pi_T, \qquad u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Функция потока $f(u)$ предполагается строго выпуклой вверх на отрицательной полуоси и выпуклой вниз — на положительной.

Строятся локально ограниченные решения задачи (1) со счетным числом линий сильного разрыва. Полуплоскость $t > 0$ делится гладкими непересекающимися кривыми $\Gamma_n = \{x = \gamma_n(t), t > 0\}$ на счетное число областей. Функциональная последовательность $\gamma_n(t)$ является неограниченно монотонно убывающей, а также $\lim_{t\to+0} \gamma_n(t) = -\infty$. В областях $D_n = \{\gamma_{n-1}(t) > x > \gamma_n(t)\}$ между этими кривыми решение является классическим, а каждая из кривых Γ_n является линией сильного разрыва, причем со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n при $n \in \mathbb{N}$. Для $n = 0$ лишь часть ударной волны Γ_0 образуется как огибающая семейства характеристик, идущих от начальных условий.

А. А. Дончак. Математическая модель Гамма–Грек опциона на основе уравнения реакции-диффузии

С помощью краевой задачи для уравнения диффузии-реакции, рассматриваемого в четырехмерной ограниченной области, строится математическая модель Гамма–Грек опциона, содержащего четыре актива. Доказывается разрешимость краевой задачи, устанавливается принцип максимума и минимума. Доказывается разрешимость задачи мультипликативного управления. В случае, когда функционал качества дифференцируем по Фреше, выводится система оптимальности. На основе ее анализа устанавливается стационарный аналог принципа bang-bang. Исследуется полулинейный аналог модели, предполагающий зависимость понижающего коэффициента от решения краевой задачи.

А. В. Звягин. Разрешимость одной модели нелинейно–вязкой среды

В работе исследуется проблема существования слабого решения начально–краевой задачи для математической модели, описывающей течение линейно упруго–запаздывающей жидкости Фойгта. В данной модели рассматривается среда с нелинейной вязкостью и временем запаздывания среды, зависящим от температуры. На основе аппроксимационно-топологического подхода доказывается существование слабого решения изучаемой задачи.

А. Л. Казаков. Решения типа диффузионных волн для нелинейных параболических уравнений и систем

Рассматриваются нелинейные эволюционные параболические уравнения и системы, общий вид которых

$$\mathbf{U}_t = [\mathbf{\Xi}_1(\mathbf{U})]_{xx} + \mathbf{\Xi}_0(\mathbf{U}). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ – вектор искомых функций; t, x – независимые переменные (t – время, x – пространственная координата); $\mathbf{\Xi}_0, \mathbf{\Xi}_1$ – заданные n-компонентные вектор-функции, которые предполагаются достаточно гладкими, причем $\Xi_{1,i} = \Xi_{1,i}(u_i)$, т.е. система в главной части покомпонентно распадается. Система (2) является обобщенной математической моделью ряда тепловых, фильтрационных и диффузионных процессов. Так, ее частными случаями являются известное уравнение нелинейной теплопроводности (porous medium equation), системы реакции-диффузии и некоторые другие уравнения математической физики.

Для вырождающейся системы (2) и ее частных случаев строятся и исследуются решения, имеющие тип тепловой (диффузионной, фильтрационной) волны, распространяющейся с конечной скоростью нулевому (абсолютно покоящемуся) фону вдоль некоторой достаточно гладкой кривой, именуемой фронтом волны. Здесь тип уравнений (систем) вырождается, решения теряют гладкость (при сохранении непрерывности). В докладе будут представлены теоремы существования и единственности решений рассматриваемого вида, а также получены и изучены точные решения, построение которых сводится к интегрированию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

А. В. Коптев. Метод решения 3D уравнений Навье–Стокса

Рассматриваются 3D уравнения Навье–Стокса для движения несжимаемой среды. Предложен метод построения решений. Метод основан на приведении уравнений системы к дивергентному виду и последующим интегрированием каждого из них. В результате появляются соотношения связи между основными и новыми ассоциированными неизвестными, преобразуя которые приходим к промежуточным этапам при реализации метода. Первый это интеграл исходных уравнений и второй — генератор решений. Генератор решений позволяет строить новые решения 3D уравнений Навье–Стокса, априори удовлетворяющие дополнительным условиям.

Е. И. Костенко. Исследование слабой разрешимости одной дробной модели с бесконечной памятью

В области $Q = (-\infty, T] \times \Omega, T > 0$, Ω — ограниченная область с гладкой границей рассматривается задача, описывающая движения вязкоупругой среды с бесконечной памятью вдоль траекторий частиц жидкости, определяемых полем скоростей. Уравнение движения среды представляет собой уравнение Навье-Стокса с добавлением интегрального члена, отвечающего за память среды. Основным результатом работы является доказательство существования по крайней мере одного слабого решения рассматриваемой задачи, где в качестве решения понимается скорость рассматриваемой среды. При доказательстве основного результата возникают трудности, поскольку поле скоростей, вообще говоря, не определяет траекторию движения частиц жидкости в данном случае. Для их преодоления была использована теория регулярных Лагранжевых потоков и регуляризация $S_{\frac{1}{m}}$. А для доказательства существования решения применялся аппроксимационно-топологический метод для уравнений гидродинамики, теория топологической степени уплотняющих векторных полей.

П. А. Кузнецов. Об одной краевой задаче для нелинейной вырождающейся параболической системы «хищник-жертва»

В докладе исследована разрешимость краевой задачи вида

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1(uv_{xx} + v_x u_x) + f(u, v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x) + g(v, u). \tag{3}$$

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \tag{4}$$

Здесь u, v — искомые функции, f, g, a — известные достаточно гладкие функции, причем $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ и $a'(0) \neq 0$.

Система (3) лежит в основе модели «хищник-жертва». Параболический тип системы вырождается при $u, v = 0$, при этом становится возможным существование решений с нулевыми фронтами (границами ореолов обитания хищников и жертв), имеющими конечную скорость рапространения. Краевые условия (4) подразумевают, что границы ореолов обитания известны и изменяются по закону $x = a(t)$. Для задачи (3), (4) доказана теорема существования и единственности аналитического решения. Решение построено в виде ряда по степеням $z = x - a(t)$, коэффициенты определяются рекуррентно. Сходимость доказывается методом мажорант. Также представлены некоторые точные решения задачи (3), (4), полученные с помощью редукции ее к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, наследующей вырождение системы (3).

Е. В. Мартынов. Обратная задача, для обобщенного уравнения Кавахары

В работе рассматривается обратная начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары:

$$u_t - u_{xxxxx} + \sum_{j=0}^{4} a_j \partial_x^j u + (F(u))_x = f(t,x), \tag{5}$$

$u = u(t,x)$, $a_j, b \in \mathbb{R}$, на прямоугольнике $Q_T = (0,T) \times (0,R)$, где $T, R > 0$. с начальным условием:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,R], \tag{6}$$

и граничными условиями:

$$\begin{gathered} u(t,0) = \mu(t), \quad u(t,R) = \nu(t), \\ u_x(t,0) = \theta(t), \quad u_x(t,R) = h(t), \\ u_{xx}(t,R) = \sigma(t), \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{7}$$

Функция $F(u) \in C^1(\mathbb{R})$ удавлетворяет условию ограничения роста:

$$\mid F(u) \mid \leq c \mid u \mid^q, \tag{8}$$

где $c > 0$ и $1 < q < 6$.

Условие переопределения заданно в интегральном виде:

$$\int_0^R u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

где ω и φ некоторые заданные функции. В качестве управления выбирается либо функция σ, либо правая часть уравнения f специального вида.

Основной результат работы: условия разрешимости двух задачь управляемости:

Задача 1.При известных функциях $u_0, \mu, \nu, \theta, h, f$, необходимо найти функцию σ такую, чтобы решение задачи (5)-(7) удовлетворяло условию (9).

Задача 2. При известных функциях $u_0, \mu, \nu, h, \theta, \sigma, g$, необходимо найти функцию $\widetilde{f}$, такую, чтобы решение задачи (5)-(7) удовлетворяло условию (9).

А. А. Панин, М. О. Корпусов, И. К. Каташева. Мгновенное разрушение versus локальная разрешимость задачи Коши для уравнения полупроводника в магнитном поле

Для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 u + \sigma_1 \Delta_2 u + \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = |u|^q$$

в зависимости от начальных данных и параметров уравнения получены результаты об: отсутствии решения, локальной разрешимости (с оценкой времени разрушения) и глобальной разрешимости.

Е. Ю. Панов. Об автомодельных решениях многофазной задачи Стефана

Рассматривается задачи Стефана для уравнения $u_t = (a(u)u_x)_x$ с кусочно-постоянным коэффициентом диффузии $a(u) \equiv a_k^2 > 0$ при $u_k < u < u_{k+1}$, $k =$

$0,\dots,n$, где $u_- = u_0 < u_1 < \dots < u_n < u_{n+1} = u_+$. Задаётся начальное условие Римана $u(0,x) = \begin{cases} u_-, & x<0 \\ u_+, & x>0 \end{cases}$ и условие Стефана на линиях $x = x_k(t)$ раздела фаз (где $u = u_k$):

$$d_k \dot{x}_k + (a(u)u_x)(t, x_k(t)+) - (a(u)u_x)(t, x_k(t)-) = 0, \quad d_k \ge 0,\ k = 1,\dots,n.$$

Решение указанной задачи автомодельно: $u = v(x/\sqrt{t})$ и функция $v(\xi)$ имеет вид

$$v(\xi) = u_k + (u_{k+1} - u_k)(F(\xi/a_k) - F(\xi_k/a_k))/(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)),\ \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}), k = 0,\dots,n,$$

где $-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = +\infty$, а $F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-s^2/4} ds$ – функция ошибок. Считаем, что $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Условия Стефана на линиях $x = \xi_k \sqrt{t}$ раздела фаз сводится к требованию, что вектор $\bar{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ является критической точкой функции

$$E(\bar{\xi}) = -\sum_{k=0}^{n} (a_k)^2 (u_{k+1} - u_k) \ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) + \sum_{k=1}^{n} d_k \xi_k^2/4$$

в области $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$. Нетрудно проверить, что множества $E \le \mathrm{const}$ компактны и что функция E строго выпукла. Поэтому, существует точка минимума функции $E(\bar{\xi})$, являющаяся единственной её критической точкой. Нахождение точки минимума позволяет однозначно восстановить свободные границы $\xi = \xi_k$ и, тем самым, эффективно решить нашу задачу.

Е. М. Рудой. Многомасштабный анализ стационарных колебаний термоупругого композитного материала

Изучается задача о стационарных колебаниях термоупругого волокнистого композита в рамках двухмерной теории упругости. Задача содержит два малых положительных параметра δ и ε, которые описывают толщину волокна и расстояние между двумя соседними волокнами, соответственно. Опираясь на вариационную формулировку проблемы, с помощью современных методов асимптотического анализа, исследуется поведение решений при стремлении указанных параметров к нулю. В результате строятся две модели для каждого предельного случая. А именно, сначала, при $\delta \to 0$ мы получаем предельную модель, в которой включения являются тонкими (нулевой ширины). Затем, на основе первой предельной модели, при $\varepsilon \to 0$ мы получаем гомогенизированную модель, которая описывает эффективное поведение в макроскопической шкале, то есть в масштабе, где нет необходимости принимать во внимание каждое отдельное включение.

Работа выполнена совместно с С. А. Саженковым, И. В. Фанкиной и А. И. Фурцевым и поддержана Российским научным фондом (грант № 22-21-00627).

Ю. Г. Рыков. Процессы концентрации в двумерной системе уравнений газовой динамики без давления

Характерным свойством обобщенных решений системы уравнений газовой динамики без давления в многомерном случае является возникновение сильных особенностей на многообразиях разной размерности. Это свойство обозначим как существование иерархии особенностей. Оказывается, что в двумерном случае иерархию особенностей можно описать единообразно, в форме вариационного принципа. А именно, существует такой вектор-функционал на множестве областей в координатах Лагрáгнжа, что равенство нулю определенной особым образом вариации приводит к построению решения в форме концентрации вещества (δ-функции) на кривых в координатах Эйлера. Совпадение значений функционала для, например, случая существования двух “тяжелых” кривых, ведет к образованию точечной особенности (δ-функции в точке). Данное построение является прямым обобщением известного вариационного принципа в одномерном случае.

С. А. Саженков. Импульсное уравнение теплопроводности с инфинитезимальным переходным слоем Вольтерра

Изучается задача Коши для уравнения теплопроводности с нелокальным по времени интегральным младшим членом, который моделирует эффект затухающей памяти и имеет вид свертки нелинейной функции от решения с гладким ядром релаксации. Ядро релаксации содержит малый параметр $\varepsilon > 0$ и при стремлении этого параметра к нулю слабо* сходится к дельта-функции Дирака, сконцентрированной в некотором моменте времени $t = \tau$. В свою очередь, дельта-функция Дирака моделирует ударное (импульсное) усилие в момент $t = \tau$. Мы устанавливаем, что при $\varepsilon \to 0$ формируется переходный импульсный слой, ассоциированный с дельта-функцией Дирака, и что семейство слабых решений рассматриваемой задачи сходится к решению двухмасштабной модели, которая состоит из двух уравнений, начального условия и условий согласования, так что «внешнее» макроскопическое решение за пределами переходного слоя определяется на макроскопической («медленной») временной шкале и является решением классического однородного уравнения теплопроводности, в то время как решение в переходном слое определяется на микроскопической («быстрой») временной шкале и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Вольтерры, наследующему в своей форме структуру профиля релаксации.

Доклад основан на совместной работе с И. В. Кузнецовым (ИГиЛ СО РАН). В полном виде работа опубликована в Journal of Elliptic and Parabolic Equations (doi.org/10.1007/s41808-022-00182-9). Исследование выполнено при финансовой поддержке проекта «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2020-23) (гос. задание FZMW-2020-0008 от 24.01.2020).

А. С. Смирнова. L_p-аппроксимации решений параболических уравнений второго порядка на многообразиях ограниченной геометрии

В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения с частными производными в римановом многообразии ограниченной геометрии. Класс многообразий ограниченной геометриии содержит в себе все компактные многообразия, а также широкий класс некомпактных многообразий, что создаёт значительные технические трудности. Например, интегралы по многообразию становятся несобственными в случае, когда многообразие имеет бесконечный объём. При этом условие ограниченной геометрии многообразия гарантирует полноту любого гладкого ограниченного векторного поля на таком многообразии. В таком случае мы можем использовать технику сдвига вдоль интегральных кривых векторного поля: векторные поля будут являться коэффициентами уравнения, затем мы используем их для создания операторнозначной функции (называемой функцией Чернова), которая определена на $0, \infty$. Вот почему нам нужно, чтобы интегральные кривые векторных полей существовали для всех положительных значений времени $t > 0$ (на компактных многообразиях это выполняется автоматически). После этого мы используем функцию Чернова и начальное условие для создания аппроксимаций Чернова $u_n(t,x)$, которые сходятся к решению $u(t,x)$ задачи Коши в L_p-норме: $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{L_p(M)} = 0$. Таким образом, решение выражается в виде явной формулы, содержащей в качестве параметров коэффициенты уравнения и начальное условие. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова об аппроксимации операторных полугрупп.

М. Д. Сурначёв. Оценки решений некоэрцитивных эллиптических задач.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, рассматриваются сопряжённые задачи Дирихле

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{10}$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u + \mathbf{b}(x)u) = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{11}$$

где матрица $\mathbf{A} \in (L^\infty(\Omega))^{n\times n}$ симметрическая и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности $\nu|\xi|^2 \leq \mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi \leq M|\xi|^2$, $M, \nu > 0$, для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Пространство $W_0^{1,2}(\Omega)$ есть замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, а $W^{-1,2}(\Omega)$ — сопряжённое к нему пространство. Предположим, что $|\mathbf{b}|^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ и выполняется неравенство типа Харди: $\| |\mathbf{b}|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_H \|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ для всех $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Определим на $W_0^{1,2}(\Omega)$ билинейную форму $a(u,v) = \int\limits_\Omega (\mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b}v \cdot \nabla u)\,dx$, тогда $|a(u,v)| \leq (M + C_H)\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$. Функцию $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ будем называть решением задачи (10) (соотв. задачи (11)), если $a(u,v) = \langle f, v\rangle$ (соотв. $a(v,u) = \langle f, v\rangle$) для всех $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. В случае малости величины C_H форма $a(\cdot,\cdot)$ коэрцитивная, $a(u,u) \geq (\nu - C_H)\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, откуда по лемме Лакса-Мильграма следует однозначная разрешимость задач (10), (11) вместе с оценкой $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq (\nu - C_H)^{-1}\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}$.

Без условия малости, для решения задачи (10) в случае $\mathbf{b} \in (L^n(\Omega))^n$ оценка вида $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq K\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}$ с константой K, зависящей лишь от n, ν, $\|\mathbf{b}\|_{(L^n(\Omega))^n}$, была установлена в работе M. Chicco, “An apriori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type,” *Matematiche (Catania)* **26**, 173–182 (1971), см. также G. Bottaro, M.E. Marina, “Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati,” *Boll. Unione Mat. Ital. (4)* **8**, 46-56 (1973).

В докладе будут обсуждаться различные варианты оценок типа Чикко (-Боттаро-Марина) для задач (10), (11) для $\mathbf{b}$ из классов Лебега, Лоренца и Като.

А. В. Фаминский. Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары–Захарова–Кузнецова

Для обобщенного уравнения Кавахары–Захарова–Кузнецова

$$u_t - u_{xxxxx} + u_{xxx} + u_{xyy} + bu_x + g'(u)u_x = 0,$$

рассматриваются начально-краевые задачи на полуполосе $\Sigma_L = \{(x,y) : x > 0, 0 < y < L\}$, L – произвольное положительное число. Кроме начального условия $u\big|_{t=0} = u_0(x,y)$, ставятся краевые условия на левой границе $u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=0} = 0$ и различные однородные краевые условия на горизонтальных границах, в частности, Дирихле $u\big|_{y=0} = u\big|_{y=L} = 0$ или Неймана $u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=L} = 0$.

На функцию g накладываются условия ограничения роста, которым удовлетворяют квадратичные и кубичные нелинейности.

Устанавливаются результаты о глобальной корректности в классах слабых и сильных решений, причем здесь результаты не зависят от типа краевых условий на горизонтальных границах.

Начальная функция u_0 предполагается лежащей в весовых пространствах L_2 в случае слабых решений и H^1 в случае сильных решений со степенными или экспоненциальными весами при $x \to +\infty$.

Также для случая краевых условий Дирихле и применения экспоненциальных весов устанавливаются результаты об экспоненциальном убывании при $t \to +\infty$ слабых и сильных решений при малых начальных данных.

И. В. Филимонова. Об асимптотическом поведении положительных решений полулинейного параболического уравнения в цилиндре

Во время доклада планируется рассказать результаты об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ положительных решений полулинейного параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + f(u),$$

определенных в цилиндрической области $\Omega \times (0,\infty)$, удовлетворяющих условию Неймана на $\partial\Omega \times (0,\infty)$, где область $\Omega \subset R^n$ ограничена. Цель - сформулировать условия на функцию $f(u)$, чтобы результат был аналогичен случаю $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$, в котором положительные решения $u(x,t)$ эквивалентны некоторому решению обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{u} = u^q$, т.е. являются неограниченными функциями вида $u(x,t) = [(1-q)(t+t_0)]^{1/(1-q)} + O(e^{-\delta t})$ при $t \to \infty$.

А. В. Филиновский. О краевых задачах Робена с большим параметром

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей $\Gamma \in C^2$ рассмотрим задачу Робена

$$\begin{aligned} &\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega,\\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ, α — вещественный параметр. Изучается асимптотическое поведение собственных значений данной задачи как функции параметра при $\alpha \to \pm\infty$.

В. В. Чепыжов. Об усреднении аттракторов систем реакции-диффузии в пористой области

Рассматривается общая система реакции-диффузии в области с периодической перфорацией, которая содержит быстро осциллирующие члены в уравнениях системы и в граничных условиях 3-го рода. В изучаемой задаче малый параметр ε характеризует диаметр отверстий перфорации, а величина ε^{-1} – скорость осцилляции коэффициентов. Нелинейные члены, входящие в уравнения, могут не удовлетворять условию Липшица, поэтому теорема единственности для соответствующей смешанной краевой задачи может не выполняться. Изучается асимптотическое поведение траекторных аттракторов рассматриваемой задачи, когда $\varepsilon \to 0+$. Доказано, что траекторные аттракторы рассматриваемой системы реакции-диффузии сходятся в сильной топологии при $\varepsilon \to 0+$ к траекторному аттрактору соответствующей усредненной системы реакции-диффузии, которая содержит некоторый дополнительный "странный" член (потенциал). Работа выполнена совместно с К.А. Бекмаганбетовым и Г.А.Чечкиным.

А. С. Шамаев. Управляемость в системах интегро-дифференциальных уравнений

В работе рассматриваются задачи управления для некоторого класса интнгродифференциальных уравнений с интегральным запаздыванием. Устанавливаются "препятствия"для полной управляемости системами с помощью как граничных, так и распределенных сил. Эти "препятствия"формулируются в терминах спектров соответствующих краевых задач и в терминах аналитических свойств ядер сверток, входящих в нелокальные члены систем интегродифференциальных уравнений.

А. Е. Шишков. Суперсингулярные и большие решения полулинейных эллиптических уравнений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, — ограниченная область и $f(\cdot,\cdot)$ - неотрицательная непрерывная функция в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1$ такая,что $f(x,0) = 0\ \forall\, x \in \overline{\Omega}$. Мы рассматриваем так называемые большие решения уравнения

$$-\Delta u + f(x,u) = 0 \text{ in } \Omega, \tag{12}$$

то есть решения $u(x)$ уравнения (12), удовлетворяющие граничному условию

$$\lim_{d(x)\to 0} u(x) = \infty, \quad d(x) := dist(x, \partial\Omega). \tag{13}$$

Если $f = f(u)$ является монотонной функцией, то существование большого решения связано с хорошо известным условием Келлера-Оссермана на рост функции $f(u)$ при $u \to \infty$ и с соответствующими обобщенными условиями Келлера-Оссермана для различных классов общих неотрицательных немонотонных нелинейностей $f(x,u)$ (S. Dumont, L. Dupaigne, O. Goubet, V. Radulescu (2007), J. Lopez-Gomez (2000) и др.).

Принципиально более сложной является проблема единственности большого решения. В случае области Ω с гладкой границей и $f(u) = u^p$, $p = \frac{n+2}{n-2}$, $n > 2$, единственность была впервые доказана в работе C. Loewner, L. Nirenberg (1974). При $f(u) = u^p$, $p > 1$, указанная единственность была установлена в работе C. Bandle, M. Marcus (1992). Что касается общей нелинейности $f(x,u)$, M. Marcus и L. Veron (2003) доказали единственность большого решения для C^2–гладкой ограниченной Ω если:

$f(x,u) \geqslant c_0 d(x)^\alpha u^p\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, u \geqslant 0,\ p > 1,\ \alpha > 0,\ c_0 = const > 0.$

Наконец, в [1] была высказана гипотеза,что достаточным условием единственности является:

$f(x,u) \geqslant c_0 \exp\left(-c_1 d(x)^{-\alpha}\right) u^p\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, u \geqslant 0,\ p > 1,\ 0 < \alpha < 1,\ c_1 > 0.$

Мы установили справедливость этой гипотезы. Более того,единственность доказана даже при при более слабых ограничениях на вырождение нелинейности $f(x,u)$ на границе области Ω:

$f(x,u) \geqslant c_0 h_\omega\left(d(x)\right) u^p \ \forall\, x \in \Omega,\ p > 1$, где $h_\omega(s) = \exp\left(-s^{-1}\omega(s)\right)$ и неубывающая непрерывная функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Дини:

$$\int_0^c s^{-1}\omega(s)ds < \infty, \quad \forall\, c > 0. \tag{14}$$

ВОПРОС: является ли (14) также и необходимым условием для единственности большого решения?

В [3] было доказано, что условие (14) является достаточным условием для существования так называемого суперсингулярного решения $u_a(x)$ уравнения (12) с произвольной точкой $a \in \partial\Omega$, то есть неотрицательного решения (12), удовлетворяющего граничному условию $u_a(x) = 0 \ \forall\, x \in \partial\Omega \setminus \{a\}$ с сингулярностью в точке $\{a\}$ более сильной, чем сингулярность соответствующего ядра Пуассона. Нами показано в [2], что условие (14) является также и необходимым условием существования суперсингулярного решения $u_a(x)$ уравнения (12) с произвольной точкой $a \in \partial\Omega$. Этот факт может рассматриваться также как косвенный аргумент в пользу позитивного ответа на поставленный выше вопрос.

Список литературы

[1] Lopez-Gomez J., Mair L., Veron L., General uniqueness results for large solutions. *Z. Angew. Math. Phys.*, **71:109** (2020), 14 p.

[2] Shishkov A. E., Large and very singular solutions to semilinear elliptic equations. *Calc. Var. PDE*, **61:102**(2022), 28p.,https://doi.org/10.1007/s00526-022-02214-7

[3] Shishkov A. E., Veron L., Diffusion versus absorption in semilinear elliptic equations. *J. Math. Anal. Appl.* **352** (2009), 206–217.