Вторая конференция Математических центров России

Секция «Динамические системы и обыкновенные дифференциальные уравнения»

7–11 ноября 2022, Москва

С. В. Агапов. Об уравнениях типа Хопфа, возникающих в задаче об интегрируемых геодезических потоках.

При поиске дополнительных интегралов многих гамильтоновых систем зачастую удивительным образом возникает уравнение Хопфа (или некоторые близкие к нему уравнения). В докладе будет рассказано о некоторых следствиях этого неожиданного явления.

Е. А. Асташов. О простых особенностях кососимметричных матричных семейств

Доклад будет посвящен рассмотрению семейств кососимметричных матриц, аналитически зависящих от параметров. Мы рассматриваем такие матрицы как матрицы кососимметричных билинейных форм и считаем эквивалентными матрицы, которые получаются друг из друга с помощью биголоморфной замены параметров и аналитической по параметрам замены базиса.

Будут представлены необходимые условия существования простых (то есть имеющих не более чем конечное число примыканий) семейств такого типа в терминах числа параметров, размера матрицы и ранга 1-струи, а также нормальные формы семейств с 1-струёй коранга 0. Кроме того, будут даны обобщения упомянутых утверждений на случай семейств, чётных либо нечётных по совокупности параметров.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с Н. Т. Абдрахмановой.

И. В. Асташова. Об асимптотической близости решений при различных типах возмущений нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка

Изучается асимптотическая близость на бесконечности решений уравнения

$$y^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|y(x)|^k\ \mathrm{sgn} y(x)=f(x) \tag{1}$$

и невозмущенного уравнения

$$z^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|z(x)|^k\ \mathrm{sgn} z(x)=0, \tag{2}$$

где $n\geq 2,\ k>1$, а $p,\ f,\ a_j$ – непрерывные функции.

В свою очередь уравнение (2) рассматривается как возмущение уравнения

$$u^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)u^{(j)}(x)=0 \tag{3}$$

и устанавливается асимптотическая близость решений уравнений (2) и (3).

Полученные результаты позволяют, в частности, находить асимптотику решений возмущенных уравнений (1), (2), если известна асимптотика решений невозмущенных уравнений (2), (3) соответственно. Приводятся иллюстрирующие примеры и рассматриваются важные частные случаи.

А. С. Баландин. О точной оценке показателя решений линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального типа

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) + bx(t) - cx(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

В работе Баландин А. С., Малыгина В. В. *Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа* (Математические труды. 2020. Т. 23. № 2. С. 3–49.) для уравнения (1) была построена область экспоненциальной устойчивости, границы которой задаются криволинейной поверхностью и тремя плоскостями, а также было изучено поведение решений уравнения (1) в том случае, когда точка (a, b, c) принадлежит границе области экспоненциальной устойчивости. Однако полученный критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (1) утверждает только существование показателя экспоненты и его знак, но не даёт оценки. В данной работе для уравнения (1) изучается точная оценка показателя степени экспоненты в зависимости от значений коэффициентов a, b, c.

М. К. Баринова. Аносовский тор как гиперболический аттрактор многомерного А-диффеоморфизма

В 1971 году Моррис Хирш предположил, что если Λ — компактное гиперболическое множество диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, которое является инвариантным гладким подмногообразием $\Lambda \subset M^n$, то ограничение $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ — диффеоморфизм Аносова. Мы обобщаем проблему Хирша для базисных множеств А-диффеоморфизмов, предполагая, что базисное множество Λ А-диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ принадлежит f-инвариантному замкнутому k-многообразию M^k_Λ, топологически (необязательно гладко) вложенному в M^n.

И. А. Богаевский. Перестройки фронтов и каустик при симплектической редукции

Если в симплектическом пространстве заданы гладкая гиперповерхность (уровень гамильтониана) и гладкое лагранжево подмногообразие (начальное условие), то возникает другое лагранжево подмногообразие, состоящее из всех характеристик уровня гамильтониана, проходящих через начальное условие. Эта конструкция очень часто используется в приложениях и называется симплектической редукцией.

Если начальное условие трансверсально уровню гамильтониана, то получившееся лагранжево многообразие может иметь только самопересечения, если нет — то более сложные особенности. Нормальные формы этих особенностей были найдены В. М. Закалюкиным и О. М. Мясниченко в 1998 г.

Обычно в приложениях условие трансверсальности выполняется и такие особенности не появляются. Однако, в некоторых ситуациях при изменении значения гамильтониана появление простейших из этих особенностей становится типичным, а само лагранжево многообразие при этом перестраивается вместе со своими каустикой и фронтом. Обо всех этих перестройках предполагается рассказать в докладе.

Е. И. Бравый. Условия разрешимости краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений

Представлен метод нахождения достаточных условий разрешимости краевых задач для различных видов линейных функционально-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. Эти достаточные условия оказываются также необходимыми условиями разрешимости данной краевой задачи для всех функционально-дифференциальных уравнений из заданного семейства уравнений. В этом смысле найденные достаточные условия являются неулучшаемыми: если они не выполнены, то в семействе найдется уравнение, для которого краевая задача не является однозначно разрешимой.

Найденные необходимые и достаточные условия, насколько нам известно, не могут быть получены с помощью принципа сжимающих отображений. Семейства функционально-дифференциальных уравнений, для которых находятся условия разрешимости краевых задач, могут быть заданы интегральными или поточечными ограничениями на функциональные операторы. Проверка необходимых и достаточных условий разрешимости краевой задачи для всех уравнений из выбранного семейства сводится к проверке положительности некоторой функции, заданной на конечномерном множестве.

Модификация предложенного метода позволяет находить необходимые и достаточные условия неотрицательности решений краевой задачи для всех уравнений семейства, а также неулучшаемые оценки решений.

В качестве примера рассмотрены периодическая краевая задача и задача Коши.

А. И. Буфетов. Гауссов мультипликативный хаос для синус-процесса

Синус-процесс возникает как скейлинговый предел радиальной части меры Хаара на унитарной группе.Реализации синус-процесса сопоставляется случайная целая функция, аналог Эйлерова произведения для синуса, скейлинговый предел отношения значений характеристического полинома случайной матрицы. Основной результат доклада устанавливает, что квадрат модуля нашей случайной целой функции сходится к гауссову мультипликативному хаосу. Из этого основного результата следует, что реализация синус-процесса с одной удаленной частицей является полным минимальным множеством для пространства Пэли–Винера, а если удалены две частицы, то получающееся множество есть множество нулей функции из класса Пэли–Винера. Квази-инвариантность синус-процесса под действием группы диффеоморфизмов с компактным носителем — аналог теоремы Де Финетти в нашей ситуации — играет главную роль.

Е. А. Барабанов, <u>В. В. Быков</u>. Распределение значений показателя Перрона по решениям линейной дифференциальной системы

Рассматривается линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с непрерывными (не обязательно ограниченными) коэффициентами. Каждому ненулевому вектору $\xi \in \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие показатель Перрона

$$\pi_A(\xi) \equiv \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t,\xi)|$$

решения $x(\cdot,\xi)$ этой системы, выходящего в момент времени $t = 0$ из вектора ξ. Возникает естественный вопрос: что представляет собой класс функций $\xi \mapsto \pi_A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, когда A пробегает множество всех линейных систем? Оказывается, указанный класс для любого $n \geq 2$ состоит в точности из функций $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $f(c\xi) = f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2) для каждого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([-\infty, r])$ является G_δ-множеством.

А. Н. Ветохин. О бэровской классификации локальной энтропии динамических систем

Рассматривается параметрическое семейство динамических систем, определенных на локально компактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства. Для любого такого семейства локальная энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов. Полносвязные системы сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием

Рассматриваются специальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений – так называемые полносвязные сети нелинейных осцилляторов. Для данного класса систем предлагаются некоторые методы, позволяющие разобраться с вопросами о существовании и устойчивости периодических решений типа бегущих волн и двухкластерной синхронизации. В случае любого из режимов двухкластерной синхронизации множество осцилляторов распадается на два непересекающихся класса. В пределах этих классов наблюдается полная синхронизация колебаний, а каждые два осциллятора из разных классов колеблются асинхронно. Характерной особенностью применяемых нами методов является то, что как при отыскании указанных циклов, так и при анализе их свойств устойчивости используются вспомогательные системы с запаздыванием.

Е. Я. Гуревич. О классификации градиентно-подобных систем с многомерным фазовым пространством

Пусть $f^t(f)$ — гладкий поток (каскад) на замкнутом многообразии M^n, неблуждающее множество которого состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, размерность неустойчивого многообразия которых (индекс Морса) принимает значения $\{0, 1, n-1, n\}$, а инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются. Тогда многообразие M^n гомеоморфно многообразию $\mathcal{S}_g^n$, где $\mathcal{S}_g^n$ — либо сфера $\mathbb{S}^n$ при $g = 0$, либо связная сумма $g > 0$ копий многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Более того, верно и обратное утверждение: пусть $G(\mathcal{S}_g^n)$ класс гладких систем (потоков или каскадов) на $\mathcal{S}_g^n$, не имеющих гетероклинических траекторий, неблуждающее множество которых состоит из гиперболических состояний равновесия. Тогда множество седловых состояний равновесия (периодических точек) исчерпывается точками, индекс Морса которых равен 1 или $(n-1)$. Замыкания инвариантных многообразий седел размерности $(n-1)$ делят фазовое пространство на области с одинаковым асимптотическим поведением траекторий, взаимное расположение которых описывается при помощи комбинаторных инвариантнов. В докладе показывается, что при $n \geq 4$ такие комбинаторные инварианты оказывают полными и определяют классы топологической сопряженности рассматриваемых систем.

А. А. Давыдов. Мягкая потеря устойчивости в блочной модели океанических циркуляций с турбулентными потоками

Для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обеспечивающей качественное описание термохалинных циркуляций локально в верхнем слое воды в океане, анализируется потеря устойчивости стационарного состояния в этой системе для типичного конечно-параметрического семейства разрывных функций переноса. Показано, что задача эквивалентна возникновению нетривиальных неподвижных точек композиции инволюций для типичного семейства пар инволюций вещественной прямой с одной и той же неподвижной точкой. Также описаны соответствующие бифуркационные диаграммы в пространстве параметров.

Исследование выполнено совместно с С. О. Зосимовым при финансовой поддержке РНФ, проект № 19-11-00223.

М. В. Демина. Теория интегрируемости Дарбу для полиномиальных дифференциальных систем на плоскости

В 1878 году Жан Гастон Дарбу обнаружил тесную связь между существованием инвариантных алгебраических кривых и интегрируемостью двумерных полиномиальных дифференциальных систем. В последние годы идеи Дарбу активно развивались и дополнялись, что привело к созданию теории интегрируемости, которая носит название теории интегрируемости Дарбу. Цель доклада — представить некоторые современные аспекты этой теории. Основная трудность при поиске инвариантных алгебраических кривых состоит в том, что их степени заранее не известны. В докладе будет описан метод, который позволяет находить все неприводимые инвариантные алгебраические кривые для широких классов систем. В основе метода лежат свойства асимптотических рядов Пюизе, удовлетворяющих неавтономной редукции исходной системы. Также будут обсуждаться некоторые приложения и обобщения этого метода.

Исследования, представленные в настоящем докладе, выполнены при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-71-10003).

Е. В. Жужома. Базисные множества коразмерности один А-потоков

Динамические системы удовлетворяющие аксиоме А (коротко, А-системы) были введены С. Смейлом в 60-ых годах 20 века. Этот широкий класс систем включает в себя все структурно устойчивые системы (например, системы Морса–Смейла и системы Аносова) и Ω-устойчивые системы. В докладе рассматриваются А-потоки с базисными множествами коразмерности один на замкнутых n-мерных ($n \geq 3$) многообразиях.

Н. И. Жукова. Произведения хаотических групп гомеоморфизмов

Группа гомеоморфизмов G топологического пространства X называется хаотической, если выполняются следующие два условия 1) группа G топологически транзитивна и 2) объединение компактных орбит всюду плотно в X. В случае, когда X — метрическое пространство, определяется чувствительность группы G к начальным условиям. Доказывается, что для метрических пространств Бэра со счетной базой условия 1) и 2) влекут чувствительность группы G к начальным условиям. Следовательно, данное определение хаотичности группы гомеоморфизмов G можно рассматривать как аналог определения хаоса в смысле Дивани для каскадов.

Исследуется взаимосвязь свойств топологической транзитивности, плотности компактных орбит, хаотичности и чувствительности к начальным условиям групп гомеоморфизмов G_i, $i \in J$, топологических пространств X_i и произведений групп $G = \times_{i\in J} G_i$ на тихоновском произведении пространств $X = \times_{i\in J} X_i$. Построены многочисленные примеры хаотических действий групп G на конечномерных и бесконечномерных топологических многообразиях.

С. Х. Зинина. Глобальная динамика регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на многообразиях

Доклад посвящен исследованию динамики регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на замкнутых топологических n-многообразиях M^n, а также топологической классификации таких систем и существованию для них энергетических функций. Актуальность исследования обусловлена прежде всего спецификой изучения динамических систем на многообразиях высокой (большей трех) размерности. В силу возможного отсутствия гладкой структуры на топологических многообразиях, начиная с размерности четыре, динамические системы на таких многообразиях можно рассматривать только в непрерывной категории. Даже если многомерное многообразие допускает гладкую структуру, она может оказаться не единственной, известные подходы к изучению объектов, заданных на таких многообразиях, не используют их гладкость, а, наоборот, сводятся к аппроксимации гладких объектов топологическими. В связи с чем черезвычайно полезным является развитие теории топологических динамических систем на многообразиях.

Разработаны методы изучения динамики регулярных топологических динамических систем, а также подходы к решению проблемы их классификации и построению для них энергетических функций.

Ю. С. Ильяшенко. Теоретико-множественные патологии в проблеме устойчивости по Ляпунову

Задача об устойчивости особых точек по Ляпунову не только аналитически неразрешима, но и представляет патологии на теоретико-множественном уровне, как это было предсказано Арнольдом еще 50 лет назад. А именно, существует однопараметрическое семейство в пространтве 5-струй векторных полей в 5-мерном пространстве, которое пересекает множество устойчивых струй по счетному числу попарно непересекающихся интервалов. Это семейство будет описано в докладе.

А. А. Кащенко. Динамика модели связанных осцилляторов

Будет рассмотрена нелокальная динамика сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, моделирующей связанные осцилляторы. Будет найдена асимптотика решений этой системы, исследован вопрос существования периодических режимов.

С. А. Кащенко, А. О. Толбей. Динамика пространственно–распределенных цепочек логистических уравнений с запаздыванием

Рассматриваются цепочки связанных логистических уравнений с запаздыванием. Основное предположение, открывающее путь к применению специальных асимптотических методов, состоит в том, что количество элементов цепочки достаточно велико. Это дает основание от дискретной системы уравнений перейти к использованию непрерывного аргумента и в качестве исходной модели получить интегродифференциальную краевую задачу. При исследовании поведения всех ее решений в окрестности состояния равновесия возникают бесконечномерные критические случаи в задаче об устойчивости решений. Основные результаты состоят в построении специальных семейств квазинормальных форм — нелинейных краевых задач либо шредингеровского типа, либо типа Гинзбурга–Ландау. Их решения дают возможность определить главные члены асимптотического разложения как регулярных, так и нерегулярных решений исходной системы. Основное внимание уделено изучению цепочек со связями диффузионного типа, адвективного типа и полносвязных цепочек.

И. С. Кащенко. Влияние второго запаздывания на локальную динамику

В докладе будет рассмотрена локальная динамика дифференциального уравнения с двумя запаздываниями вида $\varepsilon\dot{x}(t) + x(t) = f(x(t), x(t-T_1), x(t-T_2))$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Будет показано, что даже при малых ненулевых значениях T_2 поведение решений может существенно отличаться от случая $T_2 = 0$.

А. А. Килин. Динамика двух вихревых колец в конденсате Бозе – Эйнштейна

В данной работе рассматривается динамика двух взаимодействующих вихревых колец в конденсате Бозе–Эйнштейна. Было доказано существование инвариантного многообразия, соответствующего вихревым кольцам. Получены уравнения движения на этом инвариантном многообразии для произвольного числа колец из произвольного числа вихрей. Подробно рассмотрен случай двух вихревых колец, состоящих из двух вихрей каждое. Для этого случая указаны частные решения, проведен полный бифуркационный анализ. Показано, что в зависимости от параметров конденсата Бозе–Эйштейна выделяются три разных типа бифуркационных диаграмм, для каждого типа приведены характерные фазовые портреты.

С. Константину-Ризос. Метод построения решений интегрируемых уравнений в частных разностях.

Предлагается систематический метод для построения автопреобразований Бэклунда и решений уравнений в квад-графах, которые не обязательно обладают свойством трехмерной совместимости. В качестве иллюстративного примера используется система типа Адлера–Ямилова, связанная с нелинейным уравнением Шредингера. В частности, мы строим автопреобразование Бэклунда для этой дискретной системы и ее принцип суперпозиции и используем их для построения одно- и двухсолитонных решений. Обсуждается также связь принципа суперпозиции преобразования Дарбу с отображениями Янга–Бакстера.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 20-71-10110).

Т. А. Корчемкина. О поведении решений уравнений третьего порядка со степенной нелинейностью общего вида

Рассматриваются дифференциальные уравнения третьего порядка с нелинейностями общего вида

$$y''' = p(x, y, y', y'')\, |y|^{k_0} |y'|^{k_1} |y''|^{k_2} \operatorname{sgn}(y\, y'\, y''), \tag{1}$$

где $k_0, k_1, k_2 > 0$, а знакопостоянная функция $p(x, u, v, w)$ ограничена, отделена от нуля, непрерывна по x и липшицева по u, v, w.

При $k_1 = k_2 = 0$ Асташовой И. В. были получены полная качественная и асимптотическая классификация решений. Асимптотическое поведение монотонных знакопостоянных решений уравнения (1) в случае $p(x, u, v, w) = p(x)$ изучалось Евтуховым В. М. и Клопотом А. М.

В докладе будут представлены результаты исследования влияния значений показателей нелинейности k_0, k_1 и k_2 на качественное и асимптотическое поведение решений уравнения со степенными нелинейностями общего вида как в случае положительного, так и в случае отрицательного потенциала $p(x, u, v, w)$.

Л. М. Лерман, К. Н. Трифонов. Симплектические частично-гиперболические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$: динамика и классификация

Изучаются автоморфизмы 6-мерного тора $\mathbb{T}^6$, порожденные целочисленными унимодулярными матрицами. Тор $\mathbb{T}^6$ снабжается симплектической структурой, заданной кососимметрической невырожденной целочисленной матрицей в $\mathbb{R}^6$ и предполагается, что матрица A, задающая автоморфизм f_A, является симплектической относительно симплектической структуры и частично-гиперболической. Последнее означает, что собственные значения матрицы A лежат как внутри и вне единичной окружности, так и на ней. Поэтому могут быть два основных случая: 1) вне единичного круга лежит одно собственное значение и четыре простых собственных значения лежат на единичной окружности и 2) вне единичного круга лежат два собственных значения, действительные или комплексно сопряженные, и пара комплексно сопряженных собственных значений лежат на единичной окружности. В первом случае на торе порождается слоение на одномерные неустойчивые слои (и другое слоение на одномерные устойчивые слои), а во втором случае соответствующие слои двумерны. Основной вопрос исследования – топологическая структура слоения на неустойчивые слои автоморфизма и классификация таких автоморфизмов относительно соотношения топологической эквивалентности. Автоморфизм может порождать либо транзитивное слоение на неустойчивые слои, либо замыкание каждого слоя является тором меньшей размерности (разложимый случай). Классификация дается для всех случаев.

Данное исследование выполнено при поддержке гранта РНФ 22-11-00027.

В. В. Малыгина. Об асимптотических свойствах матрицы Коши дифференциальных уравнений нейтрального типа

Исследуются вопросы устойчивости линейного автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. В основе исследования лежит известное представление решения в явном виде с помощью интегрального оператора, ядром которого является функция Коши исследуемого уравнения. Показано, что определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической и экспоненциальной устойчивости можно без потери общности формулировать в терминах соответствующих свойств функции Коши. Наряду с понятием асимптотической устойчивости вводится новое свойство, которое получило название сильной асимптотической устойчивости.

Основные результаты связаны с устойчивостью по начальной функции из пространств суммируемых функций. С использованием свойств линейных разностных уравнений установлено, что сильная асимптотическая устойчивость при начальных данных из пространства L_1 равносильна экспоненциальной оценке функции Коши и, более того, экспоненциальной устойчивости по начальным данным из пространств L_p для любого $p > 1$.

И. И. Матвеева. Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Рассматриваются классы нелинейных систем дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов, при этом функция, определяющая запаздывание, может быть постоянной, ограниченной или неограниченной. Введены новые функционалы Ляпунова–Красовского, с использованием которых исследована устойчивость для систем с переменными коэффициентами в линейных членах. Указаны условия робастной и экспоненциальной устойчивости, которые формулируются в виде дифференциальных неравенств для самосопряженных матричных функций. Получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, установлены оценки на множества притяжения стационарных решений. Аналогичные результаты установлены для неавтономных нелинейных систем с несколькими запаздываниями, в том числе при наличии сосредоточенного и распределенного запаздываний.

Г. С. Маулешова. О связи между коммутирующими дифференциальными и разностными операторами

В докладе будет рассматриваться одноточечные коммутирующие разностные операторы и их взаимосвязь с обыкновенными коммутирующими дифференциальными операторами.

Е. Н. Махрова. Минимальные множества и топологическая энтропия непрерывных отображений дендритов

Пусть X — дендрит (локально связный континуум, не содержащий дуг, гомеоморфных окружности), $f : X \to X$ — непрерывное отображение.

Непустое множество $M \subset X$ называется *минимальным относительно* f, если оно замкнуто, инвариантно и не содержит собственных подмножеств, удовлетворяющих указанным свойствам.

Минимальное множество M называется *вполне минимальным*, если для любого натурального числа $n \geq 1$ множество M является минимальным для f^n.

Если при некотором натуральном $n \geq 2$ множество M не является минимальным относительно f^n, то найдутся натуральное число k, являющееся делителем числа n, и попарно непересекающиеся компактные множества $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1} \subset M$ такие, что $M = M_0 \cup M_1 \cup \ldots M_{k-1}$, $f(M_i) = M_{i+1(mod\, k)}$, и каждое M_i является минимальным относительно f^k [1]. Минимальное множество M будем называть *относительно вполне минимальным*, если оно не является вполне минимальным, но при некотором натуральном числе $k \geq 2$ найдется подмножество $M_i \subset M$, которое является вполне минимальным относительно отображения f^k.

В докладе изучается связь между существованием минимальных множеств различного типа, не являющихся периодическими орбитами, и положительностью топологической энтропии.

[1] X. Ye. D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskiĭ's theorem to minimal sets, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**(1992), 365-376.

В. Ю. Новокшенов. Дискретное уравнение Пенлеве второго типа и представление симметрической группы

Найдены классы асимптотических решений дискретного уравнения Пенлеве второго типа (dPII)

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{n x_n}{\nu(x_n^2 - 1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при больших значениях независимой переменной n. Изучена асимптотика переходного слоя при $n \approx 2\nu$, отвечающего фазовому переходу в калибровочных теориях поля и теории случайных матриц. Исследовано специальное решение dPII, связанные с представлениями симметрической группы и асимптотикой теплицева детерминанта.

Е В. Ноздринова. Устойчивая изотопическая связность диффеоморфизмов Палиса

В рамках данного доклада рассматривается класс градиентно-подобных диффеоморфизмов f на замкнутой ориентируемой поверхности в предположении, что все неблуждающие точки f неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Основной результат — построение устойчивой дуги, соединяющей два таких диффеоморфизма. Рассматриваемые диффеоморфизмы являются диффеоморфизмами Палиса, который выделяет их как класс поверхностных диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток. Согласно результату С. Ньюхауса, М. Пейшото и Дж. Флейтас, все потоки Морса–Смейла на заданном многообразии соединяются устойчивой дугой. Однако этот факт нельзя использовать непосредственно для построения дуги между диффеоморфизмами, так как диффеоморфизмы Палиса включаются только в топологический поток. Идея построения устойчивой дуги между диффеоморфизмами Палиса основана на построении дуги без бифуркаций, соединяющей диффеоморфизм Палиса с диффеоморфизмом, являющимся сдвигом на единицу времени градиентного потока функции Морса. Для визуализации построенной дуги рассмотрен класс полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном торе $\mathbb{T}^2$.

С. Н. Попова. О задачах назначения асимптотики решений линейных систем

Рассматриваются вопросы о назначении точной асимптотики решений линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

под действием линейного по фазовым переменным управления $u = U(t)x$, то есть замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

для которой функция $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ играет роль матричного управления. Получены достаточные условия на систему (1) и на свободную систему $\dot{x} = A(t)x$, которые гарантируют возможность построения матричного управления $U(\cdot)$, обеспечивающего асимптотическую эквивалентность замкнутой системы (2) и любой наперед заданной линейной системы $\dot{z} = C(t)z$, $z \in \mathbb{R}^n$. Для получения необходимых условий применена концепция оболочки Бебутова системы (1): строится замыкание (в топологии равномерной сходимости на отрезках) $\mathfrak{R}(A,B)$ множества сдвигов $\big\{\big(A_s(\cdot), B_s(\cdot)\big)\colon s \in \mathbb{R}\big\}$ коэффициентов системы (1), где $A_s(\cdot) \doteq A(\cdot + s)$, $B_s(\cdot) \doteq B(\cdot + s)$; каждая пара $\big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big)$ из множества $\mathfrak{R}(A,B)$ отождествляется с линейной управляемой системой $\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u$.

В. В. Рогачев. Аналог теоремы Штурма о чередовании нулей решений для нелинейных дифференциальных уравнений

В докладе рассматриваются теоремы о чередовании нулей для дифференциального уравнения произвольного порядка со степенной нелинейностью. Они расширяют полученные Штурмом и Кондратьевым результаты о чередовании нулей для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка — и с такой точки зрения оказывается, что нелинейный случай устроен проще, чем линейный.

Т. Л. Сабатулина. О точной оценке показателя решений линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + b\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{$*$}$$

где $h \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Для уравнения (*) известен критерий экспоненциальной устойчивости: уравнение (*) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $0 < bh^2 < \pi^2/2$. Однако до сих пор для этого уравнения не было найдено точного показателя степени экспоненты. В литературе есть только указания на то, что этот показатель определяется действительной частью корня характеристической функции, ближайшей к мнимой оси. Поскольку точный корень характеристической функции, ближайшей к мнимой оси, можно найти только в исключительных случаях, это указание неконструктивно.

В данной работе для уравнения (*) найдена точная оценка показателя степени экспоненты в зависимости от значения коэффициента b и запаздывания h.

И. Н. Сергеев. Исследование различных видов устойчивости по первому приближению

Исследованию ляпуновской асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть первого метода Ляпунова, посвящено огромное число работ. В докладе изучаются классы линейных приближений, обеспечивающих различные ляпуновские, а также недавно введённые перроновские или верхнепредельные свойства дифференциальных систем: устойчивость, асимптотическую устойчивость, а также глобальную, частичную (условную) и частную устойчивость. Как оказалось, общее число различных непустых классов (эквивалентности), обеспечивающих какие-либо из перечисленных в общей сложности пятнадцати разновидностей устойчивости, весьма незначительно.

Н. В. Станкевич, А. П. Кузнецов, Ю. В. Седова. Сложная динамика трех связанных генераторов квазипериодических колебаний

Квазипериодические колебания представляют собой самостоятельный класс, достаточно широко распространенный в различных областях науки. Наиболее известны и изучены квазипериодические колебания, возникающие при подаче внешнего воздействия или взаимодействии автоколебательных подсистем с периодическими режимами, например, осциллятор ван дер Поля. Введение в рассмотрение автономных осцилляторов квазипериодических колебаний позволило сформулировать достаточно широкий круг задач по исследованию взаимодействия, синхронизации и возникновения сложной динамики и ее особенностей в таких системах. Это позволило продвинуться в формировании представлений о синхронизации квазипериодических колебаний, что образует самостоятельную емкую проблему. В теории синхронизации хорошо известно, что увеличение числа взаимодействующих подсистем заметно обогащает динамику системы, приводит к возникновению новых сложных нелинейных эффектов. В рамках данной работы мы рассмотрим сложное поведение в ансамбле трех связанных в цепочку моделей генераторов квазипериодических колебаний. В этом случае отдельные генераторы могут быть настроены по-разному, демонстрируя как периодические, так и квазипериодические колебания. Мы представим результаты численного моделирования динамики ансамбля для всех случаев, изучим многочастотные квазипериодические колебания, хаотические колебания с различным спектром показателей Ляпунова.

Работа выпонена при поддержке гранта Российского научного фонда (№ 21-12-00121).

А. Х. Сташ. О спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка

Установлено существование двух линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры показателей колеблемости смен знаков, нулей и корней которых совпадают с любым наперед заданным не более чем счетным и суслинским множеством соответственно.

В. А. Тиморин. Динамика на поверхностях, склеенных из полос бумаги

На множестве поверхностей, склеенных из полос бумаги, можно определить многозначное соответствие, моделирующее динамику рациональных функций от одной комплексной переменной. Мы обсудим это соответствие. По мотивам (продолжающегося) совместного проекта с М. Хлющанка.

К. М. Чудинов. Об условиях осцилляции решений уравнений с последействием

Решения автономного уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t-r)$, где $a, r \geqslant 0$, осциллируют, если и только если $ar > 1/e$. Условия осцилляции решений неавтономных уравненений первого порядка с последействием впервые систематически изучал А.Д.Мышкис в середине XX века. Уточнением результатов Мышкиса является теорема Р.Г.Коплатадзе и Т.А.Чантурия (1982 г.): все решения уравнения $\dot{x}(t) = -a(t)x(h(t))$, $t \geqslant 0$, где $a(t) \geqslant 0$, $h(t) \leqslant t$ и $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, осциллируют, если $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e$. За последние 40 лет опубликованы сотни работ, посвященных обобщениям этого результата, однако при расширении класса уравнений эти обобщения, как правило, теряют красоту и точность.

Доклад посвящен условиям осцилляции решений уравнения $\dot{x}(t) + \int\limits_0^t x(s)\,d_s r(t,s) = f(t)$, $t \geqslant 0$, с естественными условиями на параметры, обеспечивающими единственность решения. В частности, если функция $r(t,\cdot)$ не убывает и для всех $s \geqslant 0$ найдется такое $T(s) > s$, что $\int\limits_0^s d_\tau r(t,\tau) = 0$ для всех $t \geqslant T(s)$ (уравнение устойчивого типа), достаточным условием осцилляции всех решений является неравенство $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_t^{+\infty} \int\limits_0^t d_\tau r(s,\tau)\,ds > 1/e$. В приложении к уравнению с несколькими сосредоточенными запаздываниями это условие осцилляции учитывает все запаздывания в равной мере.

Т. Ыскак. Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Используя функционал Ляпунова–Красовского, установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получены оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности, и оценки на множество притяжения.