

It is known that Morse-Smale diffeomorphisms with two hyperbolic periodic orbits exist only on the sphere and all of them are topologically conjugate to each other. However, if we admit the existence of three orbits, then the range of manifolds that admit them expands considerably. In particular, such orientation-preserving diffeomorphisms admit surfaces of any kind. In this paper, we find a complete invariant of topological conjugacy of Morse-Smale diffeomorphisms with three periodic orbits. It is completely determined by the homotopy type (a pair of coprime numbers) of a knot on the torus, which is the space of orbits of an unstable saddle separatrix in the space of orbits of the sink basin. With the help of the obtained result, it is possible to calculate the exact number of topological conjugacy classes of the considered diffeomorphisms on a given surface, as well as the relation of the genus of this surface to the homotopy type of the knot.

## Introduction

Let  $S_p$  be a closed orientable surface of genus  $p$  with metric  $d$ , and let  $f : S_p \rightarrow S_p$  be an orientation-preserving diffeomorphism with a finite hyperbolic nonwandering set  $f$ . Denote by  $G$  the set of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms  $f : S_p \rightarrow S_p$  whose nonwandering set consists of exactly three periodic orbits.

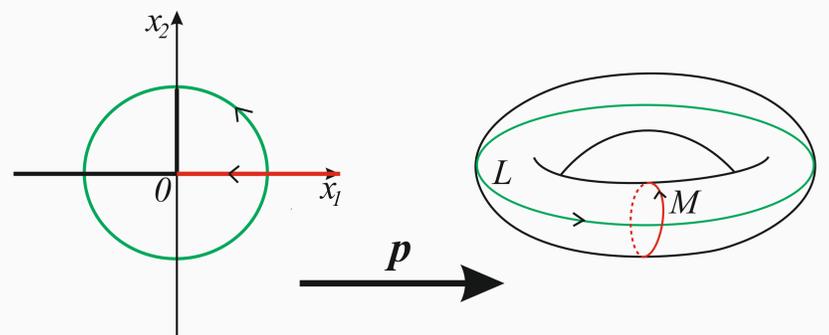
## Statement

The nonwandering set of any diffeomorphism  $f \in G$  consists of the sink orbit  $\mathcal{O}_\omega$ , the source orbit  $\mathcal{O}_\alpha$ , and the saddle orbit  $\mathcal{O}_\sigma$ . In this case, the saddle orbit has a negative orientation type and at least one of the nodal orbits of the diffeomorphism has period 1.

## Natural projection

Let  $T^2 = (R^2 \setminus (0, 0)) / A$  and denote by  $p : R^2 \setminus \{0\} \rightarrow T^2$  the natural projection. We introduce generators on the torus as follows. *Parallel*  $L$  on the torus  $T^2$  is the image of the unit circle  $S^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  ( $L = p(S^1)$ ) with counterclockwise orientation, the parallel has homotopy type  $\langle 1, 0 \rangle$ . *Meridian*  $M$  is the image of the positive semiaxis  $Ox_1^+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 > 0, x_2 = 0\}$  of the  $Ox_1$  axis ( $M = p(Ox_1^+)$ ) with orientation in the direction of decreasing  $x_1$ , the meridian has homotopy type  $\langle 0, 1 \rangle$ .

## Figure



## Homotopic knot type

Let  $p_f = p\psi_f : V_f \rightarrow T^2$  and  $\gamma_f = p_f(W_{\mathcal{O}_\sigma}^u)$ . The set  $\gamma_f$  is an essential node on the torus  $T^2$  of homotopy type  $\langle \lambda_f, \mu_f \rangle$ , where  $\mu_f > 0$  and  $\gcd(\lambda_f, \mu_f) = 1$ . The homotopy type of the knot  $\gamma_f$  depends on the choice of the homeomorphism  $\psi_f$  so that if  $\langle \tilde{\lambda}_f, \tilde{\mu}_f \rangle$  is the homotopy type of the knot  $\gamma_f$  for some homeomorphism  $\tilde{\psi}_f$ , different from  $\psi_f$ , then  $\tilde{\mu}_f = \mu_f$ ,  $\tilde{\lambda}_f \equiv \lambda_f \pmod{\mu_f}$ . Thus, without loss of generality, we assume that the homeomorphism  $\psi_f$  is chosen so that the node  $\gamma_f$  has the homotopy type

$$\langle \lambda_f, \mu_f \rangle : \mu_f > 0, \gcd(\lambda_f, \mu_f) = 1, 0 < \lambda_f < \mu_f. \quad (*)$$

## Theorem 1. Classification of diffeomorphisms of the class $G$

The topological conjugacy class of the diffeomorphism  $f \in G$  is uniquely determined by the homotopy type  $\langle \lambda_f, \mu_f \rangle$  of the knot  $\gamma_f$ . That is, diffeomorphisms  $f, f' \in G$  are topologically conjugate if and only if  $\lambda_f = \lambda_{f'}$  and  $\mu_f = \mu_{f'}$ .

## Theorem 2. Relationship between the genus of the carrier surface and the homotopy type node $\gamma_f$

On a surface  $S_p$  of genus  $p > 0$ , a diffeomorphism  $f \in G$  with knot  $\gamma_f$  of homotopy type  $\langle \lambda_f, \mu_f \rangle$  exists if and only if

$$\mu_f = 4p \text{ or } \mu_f = 4p + 2.$$

The number  $N_p$  of topological conjugacy classes of  $f \in G$  diffeomorphisms defined on the surface  $S_p$  is calculated by the formula

$$N_p = \varphi(4p) + \varphi(4p + 2),$$

where  $\varphi(n)$  is the Euler function, that is, the number of coprime numbers with  $n$  not exceeding  $n$ .

## Periodic data of the diffeomorphism $f \in G$

Statement. Any orientation-preserving gradient-like diffeomorphism  $f : S_p \rightarrow S_p$  can be represented as a composition  $f = \varphi \circ \xi^1$ , where  $\xi^1$  is the shift per unit time along the trajectories gradient flow  $\xi^t$  of some Morse function<sup>1</sup>, and  $\varphi$  is a periodic homeomorphism. Wherein:

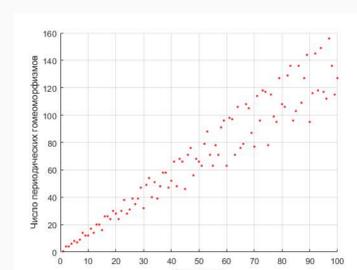
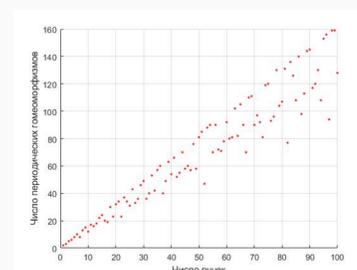
- points of smaller period of the homeomorphism  $\varphi$  are also periodic points of the diffeomorphism  $f$ , and their periods coincide;
- the period of the separatrix of any saddle point of the diffeomorphism  $f$  coincides with the period of the homeomorphism  $\varphi$ .

## Periodic data of the diffeomorphism $f \in G$

Lemma. Let  $f = \varphi \circ \xi^1 \in G$ . Then if the mapping  $\varphi$  has exactly three points of smaller period, then it has one of the following full characteristics:

- 1)  $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p - d_2), 0 < d_2 < 2p, \gcd(d_2, 2p) = 1;$
- 2)  $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p - d_2), 2p < d_2 < 4p, \gcd(d_2, 2p) = 1;$
- 3)  $(n = 4p + 2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p + 1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p + 1 - 2d_2), 0 < d_2 < 2p + 1, \gcd(d_2, 2p + 1) = 1;$
- 4)  $(n = 4p + 2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p + 1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p + 3 - 2d_2), p < d_2 < 2p + 1, \gcd(d_2, 2p + 1) = 1.$

## The number of diffeomorphisms depending on the genus of the surface



# Круговая схема Флейтас для градиентно-подобных потоков поверхности



В.Д. Галкин, Е.В. Ноздринова, О.В. Починка  
vgalkin@hse.ru, enozdrinova@hse.ru, opochinka@hse.ru

## Аннотация

В настоящей работе мы обобщаем понятие круговой схемы Флейтас на произвольные градиентно-подобные потоки на поверхностях. Доказываем, что класс изоморфности таких схем является полным инвариантом топологической эквивалентности. В работе исчерпывающим образом решен вопрос реализуемости абстрактной круговой схемы градиентно-подобным потоком на поверхности. Кроме того, построен эффективный алгоритм различения изоморфности круговых схем.

## III Абстрактная схема

Пусть  $\Sigma = \mathbb{S}^2$  и  $L^s, L^u$  – множества пар точек принадлежащих ей и обладающих следующими свойствами:  
1. пары точек множества  $L^s$  расположены так, что хорды, соединяющие эти точки попарно не пересекаются;  
2. пары точек множества  $L^u$  помечены спином  $+$  или  $-$ .

Очевидно, что круговая схема любого градиентно-подобного потока  $f^t : M^2 \rightarrow M^2$  удовлетворяет описанным свойствам. Набор  $S = (\Sigma, L^s, L^u)$  со свойствами 1, 2 назовем *абстрактной круговой схемой*.

**Теорема 1.** Для любой абстрактной круговой схемы  $S$  существует градиентно-подобный поток  $f^t : M^2 \rightarrow M^2$ , имеющий круговую схему  $S_{\delta_*}$ , эквивалентную схеме  $S$ . При этом,  
1) поверхность  $M^2$  является не ориентируемой тогда и только тогда, когда схема  $S$  содержит точки с отрицательным спином;  
2) эйлерова характеристика поверхности  $M^2$  вычисляется по формуле

$$\alpha + \omega - \sigma = 2 - 2g,$$

где  $\alpha$  – количество источников,  $\omega$  – количество стоков,  $\sigma$  – количество седел,  $g$  – род поверхности.

## IV Эффективность

**Теорема 2.** Пусть  $S$  и  $S'$  – две допустимые абстрактные круговые схемы с  $n$  парными точками. Тогда изоморфизм схем  $S$  и  $S'$  проверяется за время  $O(n^{O(g)})$ , если  $g > 0$ , и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .

## Литература

- [1] Галкин В.Д. and Починка О.В. Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством. *Журнал Средневолжского математического общества*, 24(2):132–140, 2022.
- [2] G. Fleitas. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 6:155–183, 1975.
- [3] Timur V Medvedev, Olga V Pochinka, and Svetlana Kh Zinina. On existence of morse energy function for topological flows. *Advances in Mathematics*, 378:1–15, 2021.
- [4] Czes Kosniowski. A first course in algebraic topology. 1980.
- [5] Olga V Pochinka and Svetlana Kh Zinina. Construction of the morse–bott energy function for regular topological flows. *Regular and Chaotic Dynamics*, 26(4):350–369, 2021.
- [6] Viacheslav Grines, Timur Medvedev, and Olga Pochinka. *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, volume 46. 01 2016.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

## I Круговая схема потока

Напомним, что *градиентно-подобным потоком* на связных замкнутых поверхностях  $M^2$  называется гладкий поток  $f^t$  если его неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  состоит из конечного числа гиперболических точек, а инвариантные многообразия  $W_p^s$  и  $W_q^u$  любых двух седел  $p$  и  $q$  пересекаются трансверсально.

Круговая схема Г. Флейтас была построена, как полный инвариант эквивалентности для *полярного потока* (поток с одним стоком и одним источником) на поверхности. Схема состоит из окружности вокруг источниковой точки с отмеченными на ней пересечениями с седловыми сепаратрисами.

Точки пересечения маркированы метками соответственно номеру седла, из которого они выходят, и спинами таким образом, что объединение диска, ограниченного окружностью, и трубчатой окрестности устойчивого многообразия седловой точки может быть кольцом (спин  $+$ ) или пленкой Мёбиуса (спин  $-$ ) (см. Рис. 1). Две схемы считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм окружности, сохраняющий метки со спинами.

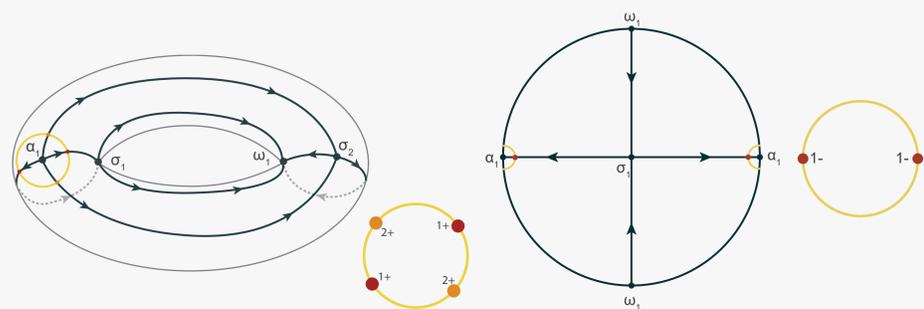


Рис. 1: Полярный поток  $f^t$  на торе (слева) и проективной плоскости (справа) и его круговая схема

Пусть  $f^t : M^2 \rightarrow M^2$  – градиентно-подобный поток. Обозначим через  $\Omega_{f^t}^\lambda$ ,  $\lambda \in \{0, 1, 2\}$  множество неподвижных точек потока  $f^t$  с индексом Морса  $\lambda$ . Для любого подмножества  $P \subset \Omega_{f^t}$  будем полагать  $W_P^s = \bigcup_{p \in P} W_p^s$ ,  $W_P^u = \bigcup_{p \in P} W_p^u$ . Для любого (возможно пустого) множества  $\delta \subset \Omega_{f^t}^1$  положим  $\Omega_\delta = \Omega_{f^t}^0 \cup \delta$ ,  $A_\delta = W_{\Omega_\delta}^u$ .

Напомним, что компактное  $f^t$ -инвариантное множество  $A \subset M^n$  потока  $f^t : M^n \rightarrow M^n$  называется его *аттрактором*, если оно обладает замкнутой окрестностью  $U_A$ , которая называется *захватывающей*, такой, что  $f^t(U_A) \subset \text{int } U_A$  для  $t > 0$  и  $\bigcap_{t > 0} f^t(U_A) = A$ . *Репеллером* потока  $f^t$  называется аттрактор потока  $f^{-t}$ .

В работе [1] доказано, что для любого градиентно-подобного потока  $f^t : M^2 \rightarrow M^2$  множество  $A_\delta$  является аттрактором потока  $f^t$  и обладает захватывающей окрестностью  $U_\delta$ , границу которой  $\Sigma_\delta$  каждая траектория потока  $f^t|_{W_{\Omega_\delta}^s \setminus \Omega_\delta}$  пересекает в точности в одной точке.

Положим  $L_{\delta_*}^s = \{W_\sigma^s \cap \Sigma_{\delta_*}, \sigma \in \delta_*\}$ ,  $L_{\delta_*}^u = \{W_\sigma^u \cap \Sigma_{\delta_*}, \sigma \in (\Omega_{f^t}^1 \setminus \delta_*)\}$ . Каждый элемент множества  $L_{\delta_*}^s$  ( $L_{\delta_*}^u$ ) представляет собой пару точек пересечения окружности  $\Sigma_{\delta_*}$  с устойчивым (неустойчивым) многообразием седла  $W_\sigma^s$  ( $W_\sigma^u$ ). Пары точек множества  $L_{\delta_*}^u$  помечим спином  $+$  ( $-$ ), если объединение диска  $U_{\delta_*}$  с трубчатой окрестностью неустойчивого многообразия  $W_\sigma^u$  соответствующего седла  $\sigma$  гомеоморфно кольцу (пленке Мёбиуса). Набор

$$S_{\delta_*} = (\Sigma_{\delta_*}, L_{\delta_*}^s, L_{\delta_*}^u)$$

назовем *круговой схемой* градиентно-подобного потока  $f^t : M^2 \rightarrow M^2$  (см. Рис. 2, 3).

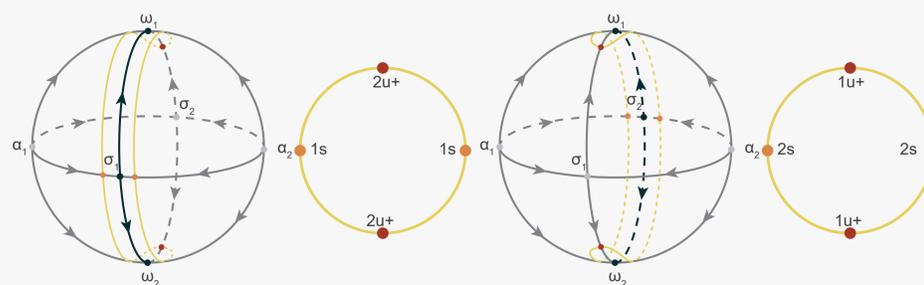


Рис. 2: Градиентно-подобный поток на сфере  $S^2$  с набором всех возможных круговых схем

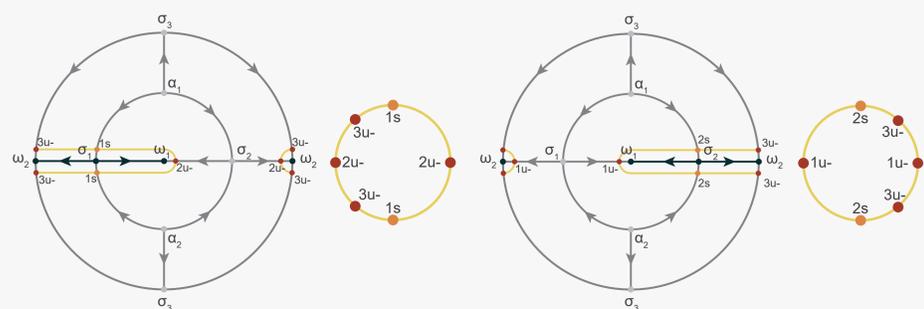


Рис. 3: Градиентно-подобный поток на проективной плоскости с набором всех возможных круговых схем

Так как выбрать  $A_{\delta_*}$  можно не единственным способом, то обозначим через  $S_{f^t}$  набор всех возможных круговых схем градиентно-подобного потока  $f^t : M^2 \rightarrow M^2$ . Две круговые схемы  $S_{\delta_*}$  и  $S_{\delta'_*}$  назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $\psi : \Sigma_{\delta_*} \rightarrow \Sigma_{\delta'_*}$ , переводящий пары точек множеств  $L_{\delta_*}^s, L_{\delta_*}^u$  в пары точек множеств  $L_{\delta'_*}^s, L_{\delta'_*}^u$ , соответственно, с сохранением спинов. Наборы  $S_{f^t}$  и  $S_{f'^t}$  градиентно-подобных потоков  $f^t$  и  $f'^t$  назовем *эквивалентными*, если они содержат эквивалентные круговые схемы  $S_{\delta_*} \in S_{f^t}$  и  $S_{\delta'_*} \in S_{f'^t}$ .

## II Основной результат

**Теорема 3.** Градиентно-подобные потоки  $f^t, f'^t$  на поверхностях топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда множества их круговых схем  $S_{f^t}, S_{f'^t}$  эквивалентны.

**Следствие 1.** Непосредственно из теоремы 3 следует, что в эквивалентных наборах  $S_{f^t}$  и  $S_{f'^t}$  градиентно-подобных потоков  $f^t$  и  $f'^t$  все круговые схемы попарно эквивалентны.

# Модули топологической сопряженности неособых потоков с двумя предельными циклами на $S^2 \times S^1$



Добролюбова Алиса Леонидовна, alicedobrolub@mail.ru  
Работа выполнена под руководством О. В. Починки и В. Е. Круглова

## Введение

Потоки  $f^t, f^{tt}: M \rightarrow M$  на многообразии  $M$  называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм  $h: M \rightarrow M$ , отображающий траектории потока  $f^t$  в траектории потока  $f^{tt}$  так, что  $h \circ f^t = f^{tt} \circ h$ . Найти инвариант, описывающий класс топологической сопряженности потоков в некотором классе, означает получить *топологическую классификацию* класса потоков с точностью до сопряженности. Цель настоящей работы – построить для неособых потоков с двумя предельными циклами на многообразии вида  $S^2 \times S^1$  топологическую классификацию в смысле сопряженности и доказать, что класс таких потоков имеет функциональный модуль устойчивости.

## Динамика

Поток называется неособым, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических предельных циклов. Введем класс  $G_2(M)$  неособых потоков  $f^t$  на трехмерном многообразии  $M = S^2 \times S^1$  с двумя единственными предельными циклами:  $c_1$  – устойчивый,  $c_2$  – неустойчивый с периодами  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Согласно работе [2], трехмерное многообразие  $M$  допускает поток из класса  $G_2(M)$ . При этом, с точностью до топологической эквивалентности, таких потоков существует ровно 2.

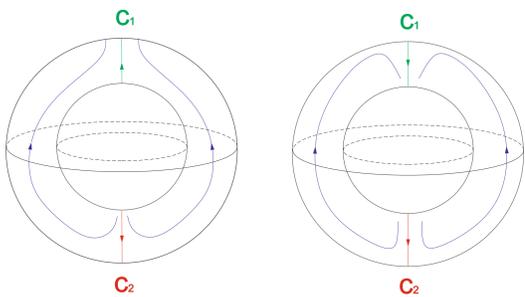


Рис. 1: Примеры топологически неэквивалентных потоков на  $S^2 \times S^1$

## Линеаризация

Определим поток  $A^t$  системой (см. Рис. 4):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ \dot{x}_3 = 1. \end{cases}$$

Для  $i = 1, 2$  зададим гомеоморфизм:  $g_i(x_1, x_2, x_3) = (2^{(-1)^i} x_1, 2^{(-1)^i} x_2, x_3 - T_i)$  и группу  $G_i = \{g_i^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Положим  $\Pi_i = \mathbb{R}^3 / G_i$ ,  $q_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi_i$  – естественная проекция,  $a_i^t$  – поток, индуцированный на  $\Pi_i$  посредством  $A^t$ .

**Предложение 1.** [4] *Неустойчивый предельный цикл  $c_2$  потока  $f^t: M \rightarrow M$  обладает неустойчивым многообразием  $W_{c_2}^u = \{x \in S \mid f^t(x) \rightarrow c_2 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}$  таким, что существует гомеоморфизм  $\eta_2: W_{c_2}^u \rightarrow \Pi_2$ , сопрягающий потоки  $f|_{W_{c_2}^u}^t$  и  $a_2^t$ .*

Аналогично для устойчивого многообразия предельного устойчивого цикла  $c_1$ .

## Два класса топологической эквивалентности

Положим,

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 2^{-x_3}\}, V_2 = q_2(V_2).$$

Обозначим  $\tilde{c}_i = q_i(Ox_3) = \eta_i(c_i)$ . По построению факторпространство  $\mathbb{V}_2$  гомеоморфно полноторию, а  $U_2 = \eta_2^{-1}(V_2)$  является замкнутой окрестностью цикла  $c_2$ . Зададим окрестность  $U_1$  цикла  $c_1$  как  $U_1 = \text{cl}(M \setminus U_2)$ . Заметим, что  $U_1$  является полноторием (согласно работе [2]). Положим  $\mathbb{V}_1 = \eta_1(U_1)$  – полноторий, являющийся подмножеством  $\Pi_1$ , содержащим внутри устойчивый предельный цикл  $\tilde{c}_1$  потока  $a_1^t$ , траектории этого потока трансверсальны границе  $\mathbb{V}_1$ .

Положим,  $\bar{\alpha}_2$  – компонента связности пересечения плоскости  $Ox_2x_3$  и  $\text{cl}(V_2)$ , ориентированная в сторону возрастания координаты  $x_3$  (см. рис. 2), а также  $\alpha_2 = q_2(\bar{\alpha}_2)$ . По построению цикл  $\tilde{c}_2$  и полноторий  $\alpha_2$  гомотопны. Положим,  $\alpha_1 = \eta_1(\eta_2^{-1}(\alpha_2))$  – образующая полнотория  $\mathbb{V}_1$  по построению. Будем говорить, что  $\nu = +1$  для потока  $f^t$ , если гомотопны устойчивый цикл  $\tilde{c}_1$  и  $\alpha_1$ . В противном случае положим, что  $\nu = -1$  (см. рис. 3).

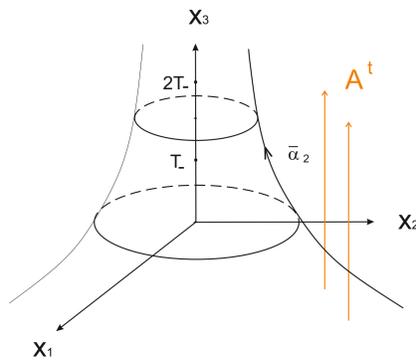


Рис. 2:  $\bar{\alpha}_2$  на  $V_2$

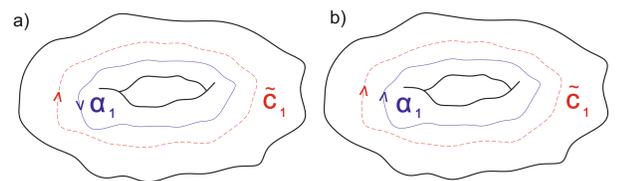


Рис. 3: (a)  $\nu = -1$  и (b)  $\nu = +1$

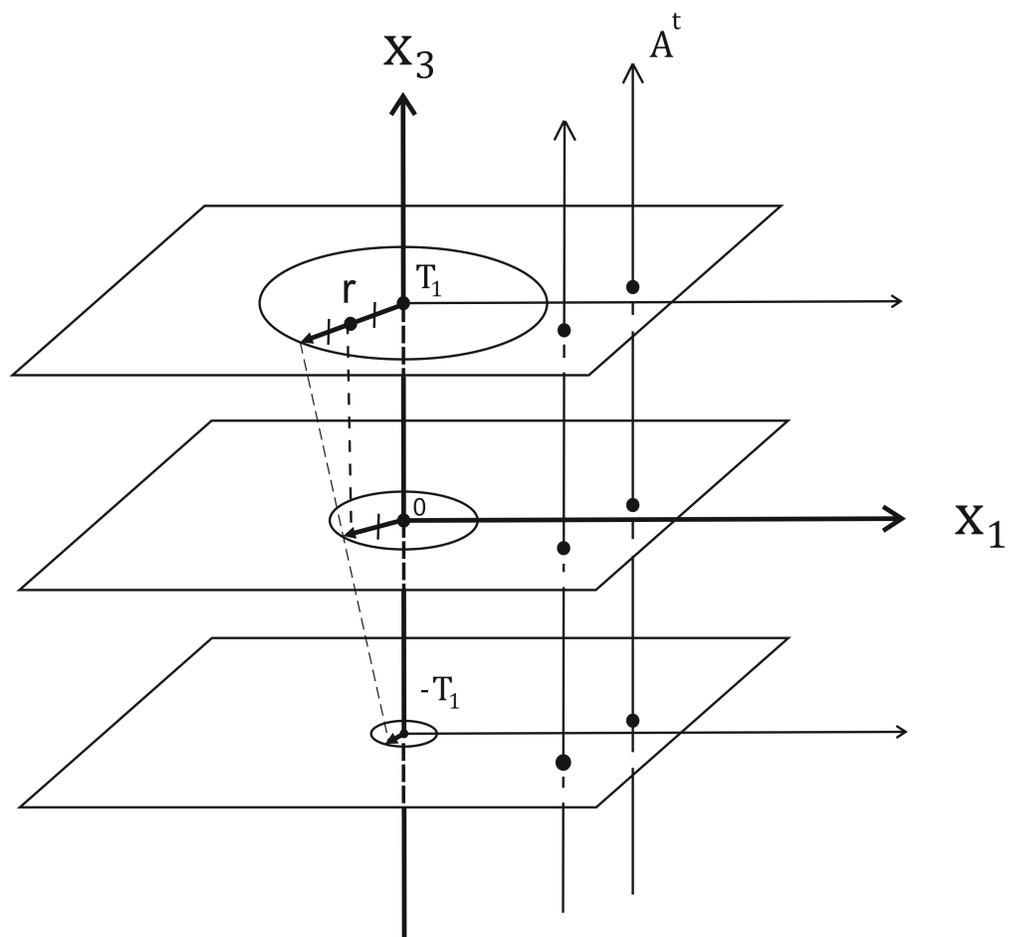


Рис. 4: Поток  $A^t$ , действие гомеоморфизма  $g_1$

# Модули топологической сопряженности неособых потоков с двумя предельными циклами на $S^2 \times S^1$



## Единственность слоения около цикла

Обозначим через  $K_1 = M \setminus c_2$  и  $K_2 = M \setminus c_1$ . Согласно работе [4] существует гомеоморфизм  $\eta_i: K_i \rightarrow \Pi_i$ , сопрягающий поток  $f^t|_{K_i}$  с потоком  $a_i^t$ . Для точки  $p \in K_i$  будем называть её локальными координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  координаты некоторой точки  $\hat{p} \in \mathbb{R}^3$ , такой, что  $\eta_i(q_i(\hat{p})) = p$  и  $0 \leq x_3 \leq T_i$ . Обозначим через  $\chi = \{x_3 = c, c \in \mathbb{R}\}$  слоение на  $\mathbb{R}^3$ , представляющее из себя горизонтальные плоскости,  $\tilde{\chi}_i = q_i(\chi)$ ,  $\Xi_i = \eta_i^{-1}(\tilde{\chi}_i)$  (см. рис. 6).

**Лемма 1.** Слоение  $\Xi_i$  единственно, т.е. оно не зависит от выбора сопрягающего гомеоморфизма  $\eta_i$ .

## Функциональные модули

Зададим отображение

$$\phi: \Pi_1 \setminus \tilde{c}_1 \rightarrow \Pi_2 \setminus \tilde{c}_2 \text{ формулой } \phi = \eta_2 \eta_1^{-1}.$$

Также зададим его поднятие

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \setminus Ox_3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus Ox_3 \text{ (} q_2 \Phi = \phi q_1 \text{), которое может быть записано в виде:}$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (\gamma(x_1, x_2), x_3 + \delta(x_1, x_2)), \text{ где } \gamma: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow Ox_3. \text{ Напомним, что } g_i(x_1, x_2, x_3) = (2^{(-1)^i} x_1, 2^{(-1)^i} x_2, x_3 - T_i), G_i = \{g_i^n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Благодаря свойствам  $g$ , получаем, что

$$g_2 \Phi = \Phi g_1,$$

в результате определенных выкладок получаем

$$\delta(x_1, x_2) = \delta(x_1/2, x_2/2) + (T_2 - T_1).$$

Отображение  $\delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow Ox_3$  может быть спроецировано в виде отображения

$$\hat{\delta}: \mathbb{T}^2 \rightarrow S^1. \text{ Пусть } \beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ задано формулой } \beta(x_1, x_2) = (x_1/2, x_2/2) \text{ и } B = \{\beta^n(x_1, x_2), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/B$ , обозначим через  $p_\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  естественную проекцию. Пусть  $e: Ox_3 \rightarrow Ox_3$  задано следующими формулами:

- 1)  $e(x_3) = x_3 + (T_2 - T_1)$ , если  $T_2 \neq T_1$ ,
- 2)  $e(x_3) = x_3 + 1$ , если  $T_2 = T_1$ .

Пусть  $E = \{e^n(z_2), n \in \mathbb{Z}\}$ . Тогда  $S^1 = \mathbb{R}/E$ , обозначим через  $p_e: Ox_3 \rightarrow S^1$  естественную проекцию. Таким образом, отображение  $\hat{\delta}: \mathbb{T}^2 \rightarrow S^1$  определяется формулой  $\hat{\delta}(\tau) = p_e(\delta(p_\beta^{-1}(\tau)))$ ,  $\tau \in \mathbb{T}^2$  и является функциональным модулем устойчивости.

## Список литературы

[1] J. Palis. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability. *Astérisque*. 1978. Vol. 51. No. 1. P. 335-346.

[2] O.V. Pochinka, D.D. Shubin. Non-singular flows with the attractor-repeller dynamics on  $n$ -manifolds. *Nonlinearity*. 2022. Vol. 35. No. 3. P. 1485-1499

[3] V. Kruglov, O. Pochinka, G. Talanova. On functional moduli of surface flows. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2020. Vol. 13. No. 1. P. 49-60.

[4] M. C. Irwin. A classification of elementary cycles. *Topology*. 1970. Vol. 9. P. 35-47.

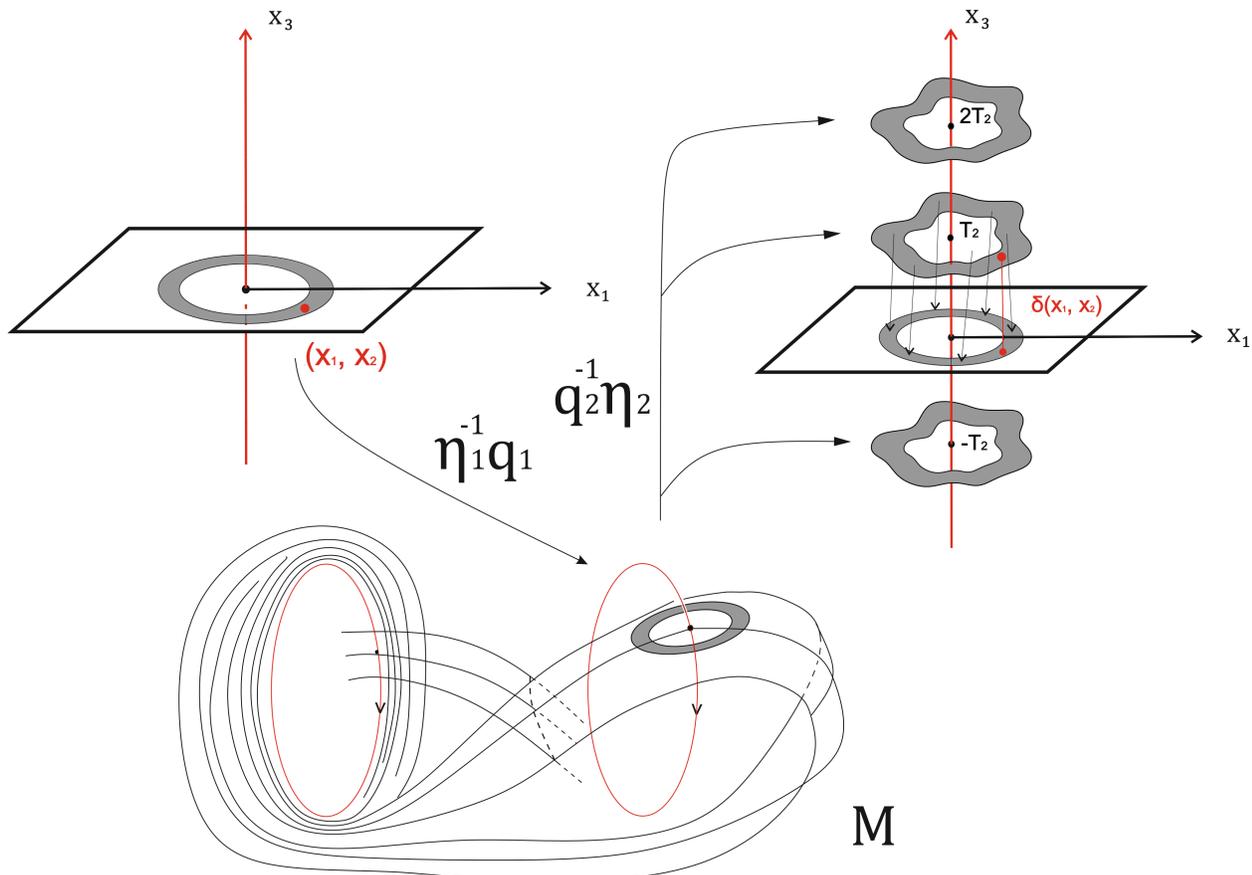


Рис. 5: Отображение  $\delta$  выражает взаимное расположение инвариантных слоений

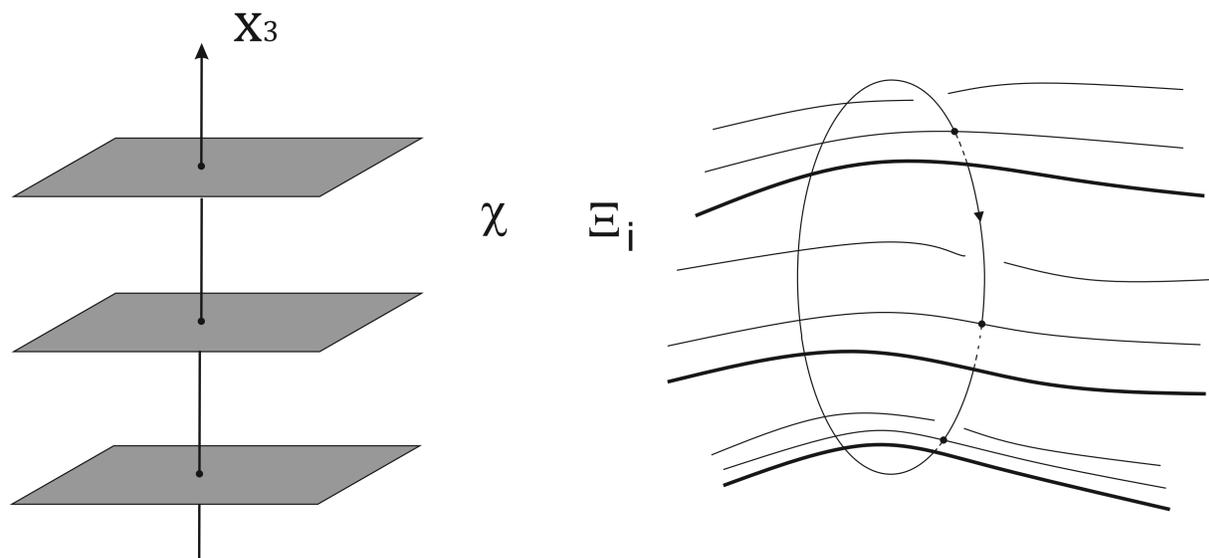


Рис. 6: Инвариантные слоения  $\chi$  и  $\Xi_i$

## Классификационная теорема

Назовем два отображения  $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$  эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $\hat{\vartheta}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , сохраняющий ориентацию, и константа  $s_0 \in S^1$  такая, что

$$\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(\tau)) = \hat{\delta}(\tau) + s_0.$$

Обозначим все объекты на  $f^{t'}$  аналогично объектам на  $f^t$ .

**Теорема 1.** Потоки  $f^t, f^{t'}: M \rightarrow M$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда

- 1)  $T_i = T'_i$ ;
- 2)  $\nu = \nu'$
- 3) отображения  $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$  эквивалентны в смысле сопряженности.



## Введение

Результаты получены в соавторстве с О.В. Починкой и Д.С. Малышевым

- ▶ Потоки  $f^t, f'^t: M \rightarrow M$  на многообразии  $S$  называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h: S \rightarrow S$ , отображающий траектории потока  $f^t$  в траектории потока  $f'^t$  с сохранением направления движения по траекториям.
- ▶ Два потока называются топологически сопряжёнными, если выполняется условие  $hf^t = f'^t h, t \in \mathbb{R}$ , это означает, что  $h$  отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям.
- ▶ Поток называется потоком Морса-Смейла, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических периодических траекторий, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально. Поток Морса-Смейла без периодических орбит называется градиентно-подобным потоком.
- ▶ Потоки Морса-Смейла были введены А.А. Андроном и Л.С. Понтрягиным [1], и в 1967 году С. Смейл [2] обобщил класс этих потоков на случай произвольной размерности.
- ▶ В настоящей работе рассматриваются известные топологические инварианты для градиентно-подобных потоков на поверхностях, и для них строятся эффективные алгоритмы различения их изоморфизмов.

## Топологическая классификация

Рассмотрим градиентно-подобный поток  $f^t$ , заданный на замкнутой поверхности  $S$ . Первый результат говорит о том, что топологические инварианты, описывающие классы топологической эквивалентности градиентно-подобных потоков на поверхностях, подходят и для классификации с точностью до топологической сопряжённости.

## Теорема

Если два градиентно-подобных потока на замкнутой поверхности топологически эквивалентны, то они топологически сопряжены.

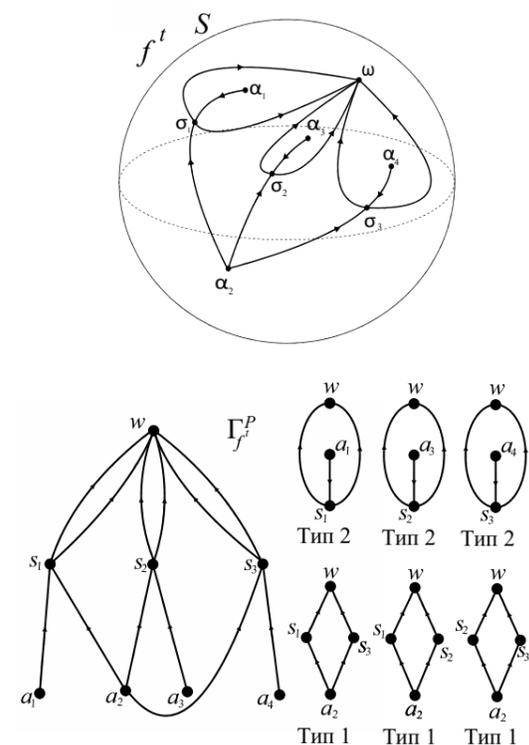
- ▶ Таким образом, классы топологически эквивалентных и сопряжённых потоков в нашем случае совпадают. Обычно инварианты, описывающие эти классы, это графы.
- ▶ Два графа называются изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие, переводящее вершины и рёбра одного графа в вершины и рёбра другого графа с сохранением цветов, направлений рёбер и оснащений при их наличии.

## Эффективные алгоритмы различения графов

- ▶ Алгоритм различения изоморфности графов в каком-либо классе графов называется эффективным, если время его выполнения ограничено полиномом от длины входной информации (количество вершин, рёбер и параметров оснащения графа) [3].
- ▶ Стандартом труднорешаемости является NP-полнота задачи [4]. Алгоритмы такого рода также называются полиномиальными.
- ▶ Остальные результаты данной главы посвящены построению эффективных алгоритмов различения некоторых известных инвариантов.

## Алгоритм для графа Пейшото

Пусть  $\Gamma_{f^t}$  – ориентированный граф потока  $f^t$  такой, что вершины графа  $\Gamma_{f^t}$  соответствуют неподвижным точкам потока  $f^t$ , а рёбра соответствуют ориентированным седловым сепаратрисам. Оснастим граф  $\Gamma_{f^t}$  различающими множествами – подграфами, соответствующими границам компонент связности дополнения несущей поверхности до замыкания инвариантных многообразий всех седловых точек (ячеек). В результате получим граф Пейшото [5]  $\Gamma_{f^t}^P$ . Такой граф является полным топологическим инвариантом для градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях.



## Теорема

Пусть  $f^t$  и  $f'^t$  – градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности  $S$  рода  $g$ , и  $\Gamma_{f^t}^P, \Gamma_{f'^t}^P$  – их  $n$ -вершинные графы Пейшото. Тогда изоморфность графов  $\Gamma_{f^t}^P$  и  $\Gamma_{f'^t}^P$  можно проверить за время  $O(n^{O(g)})$  для  $g > 0$  и за время  $O(n)$  для  $g = 0$ .



## Алгоритм для модифицированного графа Пейшото

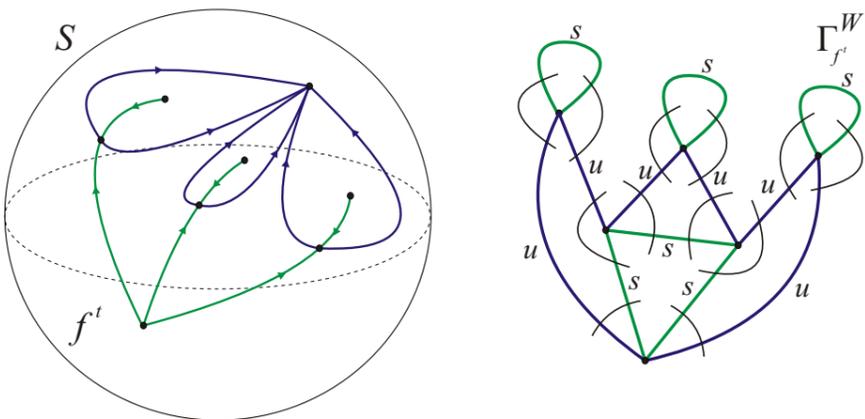
В.З. Гринес и О.В. Починка [6] модифицировали граф Пейшото. Именно, вместо различающих множеств они оснастили ориентированный граф Пейшото  $\Gamma_{f^t}$  порядками рёбер (согласованными с вложениями седловых сепаратрис в несущую поверхность), инцидентных вершинам, соответствующим стокам. Класс изоморфности полученного таким образом модифицированного графа Пейшото  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  также является полным инвариантом эквивалентности градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях.

### Теорема

Пусть  $f^t, f'^t$  – градиентно-подобные потоки на поверхности  $S$  рода  $g$ , и  $\Gamma_{f^t}^{GP}, \Gamma_{f'^t}^{GP}$  – их модифицированные  $n$ -вершинные графы Пейшото. Тогда изоморфизм графов  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и  $\Gamma_{f'^t}^{GP}$  может быть проверен за время  $O(n^{O(g)})$ , если  $g > 0$ , и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .

## Алгоритм для графа Вонга

Вершины графа Вонга [7]  $\Gamma_{f^t}^W$  для потока на ориентируемой поверхности соответствуют ячейкам потока  $f^t$ , его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по соответствующим рёбрам сепаратрисам. Каждая вершина имеет валентность 4, если считать петлю за два условных ребра. Набор этих четырёх рёбер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе соответствующей вершине ячейки. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра пары.

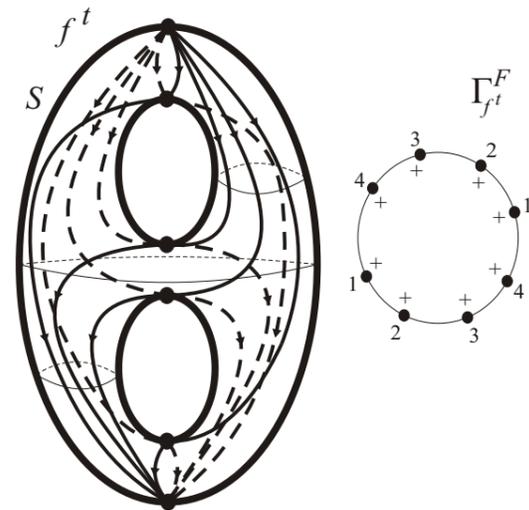


### Теорема

Пусть  $f^t, f'^t$  – градиентно-подобные потоки на ориентируемой поверхности  $S$  рода  $g$ , и  $\Gamma_{f^t}^W, \Gamma_{f'^t}^W$  – их  $n$ -вершинные графы Вонга. Тогда изоморфизм графов  $\Gamma_{f^t}^W$  и  $\Gamma_{f'^t}^W$  проверяется за время  $O(n^{O(g)})$ , если  $g \neq 0$  и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .

## Алгоритм для круговой схемы Флейтас

Градиентно-подобный поток  $f^t: S \rightarrow S$  называется полярным, если в его неблуждающем множестве содержится ровно один источник и ровно один сток. Граф Флейтас или круговая схема Флейтас [8]  $\Gamma_{f^t}^F$  для такого потока  $f^t$  строится следующим образом. Выберем вокруг источника окружность  $S$ , трансверсальную траекториям. Обозначим через  $D$  диск, который эта окружность ограничивает в бассейне источника. Присвоим всем точкам пересечения окружности  $S$  с седловыми сепаратрисами метки так, чтобы точки пересечения с сепаратрисами одного и того же седла были с одинаковыми метками. Каждой паре точек с одинаковыми метками присвоим спин, то есть знак  $+$  ( $-$ ), если объединения диска  $D$  с трубчатой окрестностью устойчивого многообразия седловой точки, пересекающего окружность  $S$  по данной паре точек, является кольцом (плёнкой Мёбиуса).



### Теорема

Пусть  $f^t$  и  $f'^t$  – полярные потоки на поверхности  $S$  рода  $g$ , и  $\Gamma_{f^t}^F, \Gamma_{f'^t}^F$  – их  $n$ -вершинные графы Флейтас. Тогда изоморфизм графов  $\Gamma_{f^t}^F$  и  $\Gamma_{f'^t}^F$  проверяется за время  $O(n^2)$ .

## Литература

- [1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. - 1937. - Т. 14. - № 5. - С. 247-250.
- [2] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American Mathematical Society. - 1967. - V. 73. - No. 6. - P. 747-817.
- [3] Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Logic, methodology, and philosophy of science. - North-Holland, Amsterdam: Proceedings of the 1964 international congress. - 1965. - P. 24-30.
- [4] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. - М.: Мир. - 1982. - 416 с.
- [5] Peixoto M. M., On the classification of flows on 2-manifolds. Dynamical systems. - Salvador: Univ. Bahia. - 1971. New-York: Academic Press. - 1973. - P. 389-419.
- [6] Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Dev. Math. - V. 46. - Cham: Springer. - 2016. - xxvi+295 p.
- [7] Wang X. The  $C^*$ -algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam Systems. - 1990. - V. 10. - No. 4. - P. 565-597.
- [8] Fleitas G. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Bol. Soc. Brasil. Mat. - 1975. - V. 6. - P. 155-183.

# Хаотическое поведение топологических слоений

Левин Г.С., Тоньшева Н.С.

Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики", Нижний Новгород

Мы называем слоение  $(M, F)$  на топологическом многообразии  $M$  хаотическим, если оно топологически транзитивно и объединение всех замкнутых слоев всюду плотно в  $M$ . Исследуемые нами хаотические топологические слоения произвольной коразмерности на  $n$ -мерных многообразиях можно рассматривать как многомерные обобщения хаотических динамических систем в смысле Дивани. Для топологических слоений  $(M, F)$ , накрытых расслоениями, мы доказываем, что существование хаоса в  $(M, F)$  эквивалентно хаотичности его глобальной группы голономии. Применяя метод надстройки, нами построено новое счетное семейство хаотических, попарно не изоморфных топологических слоений коразмерности два на 3-мерных замкнутых и незамкнутых многообразиях.

## Топологическое слоение

Разбиение  $F_{st} = \{\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\} \mid c \in \mathbb{R}^q\}$  называется стандартным слоением коразмерности  $q$  в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\}$  называются его слоями.

Определение. Пусть  $M$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие. Разбиение

$$F = \{L_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

многообразия  $M$  на линейно связные подмножества  $L_\alpha$  называется топологическим слоением коразмерности  $q$ ,  $1 \leq q \leq n$ , если

$$\forall x \in M \exists (U, \varphi) : \varphi(K_c(L_\alpha \cap U)) = \mathbb{R}^{n-q} \times \{c\}, \quad c \in \mathbb{R}^q,$$

где  $K_c(L_\alpha \cap U)$  — компонента связности пересечения  $L_\alpha \cap U$ .

Слоение — пара  $(M, F)$ ,  $L_\alpha \subset M$  — слои  $(M, F)$ ,  $(U, \varphi)$ , — расслоенная карта.

Обозначим через  $\mathfrak{fol}$  категорию топологических слоений, морфизмы слоений  $(M, F), (M', F') \in \text{Ob}(\mathfrak{fol})$  — непрерывные отображения  $f : M \rightarrow M'$ , переводящие слои в слои.

## Хаотическая динамическая система в смысле Дивани

Пусть  $T : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение метрического пространства  $X$  в себя. Семейство итераций  $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  обозначается через  $(X, T)$  и называется динамической системой.

Р. Дивани ввел следующее понятие хаотической динамической системы.

Определение. Динамическая система  $(X, T)$  называется хаотической, если:

- (1)  $(X, T)$  топологически транзитивна;
- (2) множество периодических точек всюду плотно в  $X$ ;
- (3)  $(X, T)$  чувствительна к начальным условиям.

## Слоения, накрытые расслоениями

Определение. Топологическое слоение  $(M, F)$ ,  $\text{codim } F = q$ , называется накрытым расслоением, если слоение  $(\tilde{M}, \tilde{F})$ , индуцированное универсальным накрывающим отображением  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ , образовано слоями некоторого локально тривиального расслоения  $r : \tilde{M} \rightarrow \tilde{T}$  над топологическим многообразием  $\tilde{T}$ ,  $\dim \tilde{T} = q$ .

## Критерий хаотичности топологических слоений, накрытых расслоениями

Теорема. Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение, накрытое расслоением  $r : \tilde{M} \rightarrow \tilde{T}$ , и  $\Psi_0$  — его глобальная группа голономии.

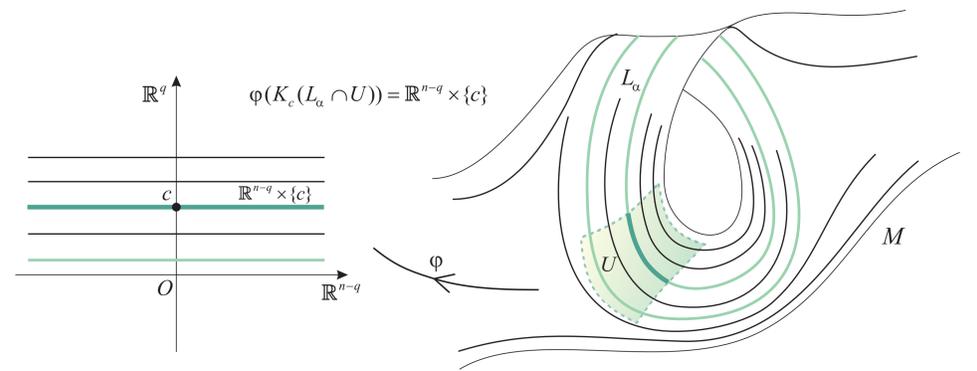
Тогда слоение  $(M, F)$  хаотическое  $\Leftrightarrow$  группа  $\Psi_0$  хаотична.

## Топологическая сопряженность групп гомеоморфизмов

Определение. Группы  $G$  и  $G'$  гомеоморфизмов топологических пространств  $X$  и  $X'$  называются топологически сопряженными, если существуют изоморфизм  $\tau : G \rightarrow G'$  и гомеоморфизм  $f : X \rightarrow X'$  такие, что для любого  $g \in G$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow \tau(g) \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

## Расслоенная карта $(U, \varphi)$ многообразия $M$



## Хаотическое топологическое слоение

Определение. Топологическое слоение  $(M, F)$  называется хаотическим, если:

- (1) существует всюду плотный слой;
- (2) объединение замкнутых слоев всюду плотно в  $M$ .

## Хаотическая группа гомеоморфизмов

Определение. Группа гомеоморфизмов  $G$  топологического многообразия  $M$  называется хаотической, если:

- (1) существует всюду плотная орбита;
- (2) объединение всех замкнутых орбит всюду плотно в  $M$ .

## Глобальная группа голономии

Теорема. Пусть слоение  $(M, F)$  накрыто расслоением  $r : \tilde{M} \rightarrow \tilde{T}$ , где  $\tilde{M}$  — пространство универсального накрывающего отображения  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ . Зафиксируем  $x \in M$  и  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ .  $\pi : M \rightarrow M/F$  — фактор-отображение. Тогда определены:

- (i) группа накрывающих преобразований  $G \cong \pi_1(M, x)$ , гомоморфизм  $\chi : G \rightarrow \text{Homeo}(\tilde{T})$  и группа  $\Psi_0 := \chi(G)$ ;
- (ii) гомеоморфизм  $d : M/F \rightarrow \tilde{T}/\Psi_0$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{M} & \\ \kappa \swarrow & & \searrow r \\ M & & \tilde{T} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mu \\ M/F & \xrightarrow{d} & \tilde{T}/\Psi_0 \end{array}$$

коммутативна,  $\mu : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}/\Psi_0$  — проекция на пространство орбит.

Определение. Группа  $\Psi_0$  называется глобальной группой голономии слоения  $(M, F)$ , накрытого расслоением  $r : \tilde{M} \rightarrow \tilde{T}$ .

## Необходимые условия изоморфности топологических слоений, накрытых расслоениями

Теорема. Пусть  $(M, F), (M', F')$  — топологические слоения, накрытые расслоениями  $r : \tilde{M} \rightarrow \tilde{T}$  и  $r' : \tilde{M}' \rightarrow \tilde{T}'$  соответственно, а  $\Psi_0$  и  $\Psi'_0$  — их глобальные группы голономии. Тогда слоения  $(M, F)$  и  $(M', F')$  изоморфны в категории  $\mathfrak{fol} \Rightarrow \Psi_0$  и  $\Psi'_0$  топологически сопряжены.

# Хаотическое поведение топологических слоений

Левин Г.С., Тоньшева Н.С.

Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики", Нижний Новгород

## Топологическое надстроечное слоение

Пусть  $B$  и  $T$  — топологические многообразия,  $\dim B = k$ ,  $\dim T = q$ .  
 $\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T)$  — гомоморфизм.  
 $\theta : \tilde{B} \rightarrow B$  — универсальное накрывающее отображение,  $\tilde{b} \in \theta^{-1}(b_0) \subset \tilde{B}$ .  
 $G \cong \pi_1(B, b_0)$  — группа накрывающих преобразований  $\tilde{B}$ . Равенство

$$g.(x, t) := (g.x, \rho(g)(t)) \quad \forall (x, t) \in \tilde{B} \times T, g \in G$$

определяет левое свободное собственное разрывное действие  $G$  на  $\tilde{B} \times T$ , поэтому определено топологическое фактор-многообразие  $M := (\tilde{B} \times T)/G$ .

$\lambda : \tilde{B} \times T \rightarrow M$  — фактор-отображение на пространство орбит и регулярное накрытие,  $\dim M = k + q$ . Так как

$$g.(\tilde{B} \times \{z\}) = \tilde{B} \times \{\rho(g)(z)\} \quad \forall g \in G, \forall z \in T,$$

то каждое  $g \in G$  сохраняет тривиальное слоение  $F_{tr} = \{\tilde{B} \times \{z\} \mid z \in T\}$  произведения  $\tilde{B} \times T$ . На  $M$  индуцируется слоение  $F = \{\lambda(\tilde{B} \times \{t\}) \mid t \in T\}$ ,  $\text{codim } F = q$ .

Определение. Топологическое слоение  $(M, F) := \text{Sus}(T, B, \rho)$  называется надстроечным.

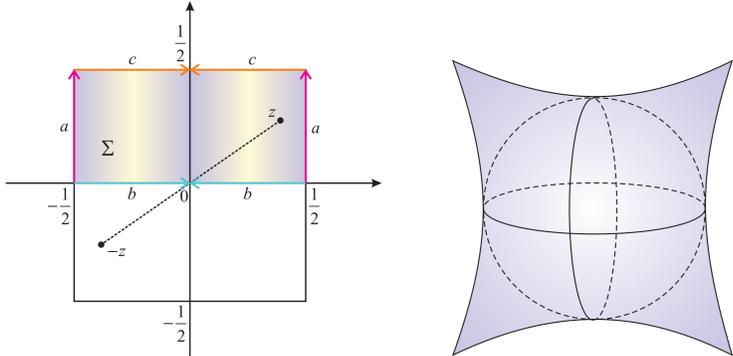
Группа  $\Psi \cong \rho(\pi_1(B, b_0))$  называется структурной группой  $\text{Sus}(T, B, \rho)$ . Многообразие  $B$  называется базой, а  $T$  называется трансверсальным многообразием для  $\text{Sus}(T, B, \rho)$ .

## Критерий хаотичности надстроечных слоений

Теорема. Слоение  $\text{Sus}(T, B, \rho)$  хаотическое  $\Leftrightarrow$  группа  $\rho(\pi_1(B, b_0))$  хаотическая.

## Орбиформ «Подушка»

Пусть  $\gamma$  — автоморфизм тора  $\mathbb{T}^2$ , заданный матрицей  $-E$ , и  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ .  
 $\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$  — орбиформ «Подушка»,  $\mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$ .



## Хаотические топологические слоения сферы

Предложение.  $\{G_m = \langle g_m \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов сферы.

Теорема. Пусть  $(M_m, F_m) = \text{Sus}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \rho_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , где  $\rho_m(n) = (g_m)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $\{(M_m, F_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство хаотических топологических слоений, попарно не изоморфных в категории  $\mathfrak{Fol}$ .

## Благодарности

Работа выполнена под руководством Н.И. Жуковой при поддержке РНФ, грант № 22-21-00304.

## Литература

- Жукова Н.И., Левин Г.С., Тоньшева Н.С. Хаотические топологические слоения, Известия вузов. Математика, (8), 81–86 (2022).
- Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1986.
- Bazaikin Y.V., Galaev A.S., Zhukova N.I. Chaos in Cartan foliations, Chaos, 30 (10), 1–9 (2020)

## Каноническое слоение

Пусть  $X, Y$  — топологические многообразия,  $\Psi$  — абстрактная группа, и заданы мономорфизмы  $\chi : \Psi \rightarrow \text{Homeo}(X)$  и  $\nu : \Psi \rightarrow \text{Homeo}(Y)$ , причем  $\chi(\Psi)$  действует свободно и собственноразрывно на  $X$ .

Тогда на  $X \times Y$  определено свободное собственноразрывное действие группы  $\Psi$ ,  $s : X \times Y \rightarrow (X \times Y)/\Psi$  — проекция на пространство орбит,  $(X \times Y)/\Psi$  — топологическое многообразие.

Определение.  $((X \times Y)/\Psi, \mathcal{F})$ , где  $\mathcal{F} = \{s(X \times \{y\}) \mid y \in Y\}$ , — топологическое надстроечное слоение, которое называется каноническим.

## Теорема о структуре надстроечного слоения

Теорема. Пусть  $(M, F) = \text{Sus}(T, B, \rho)$ . Тогда существует регулярное накрытие  $\beta : \hat{B} \rightarrow B$ , и слоение  $(M, F)$  изоморфно каноническому слоению  $((\hat{B} \times T)/\Psi, \mathcal{F})$ , где  $\Psi \cong G/\text{Ker}(\rho)$ , причем  $\Psi$  действует на  $\hat{B}$  свободно и собственноразрывно, а на  $T$  — как группа гомеоморфизмов  $\rho(G)$ .

## Критерий изоморфности надстроечных слоений

Теорема. Пусть  $(M, F) = \text{Sus}(T, B, \rho)$ ,  $(M', F') = \text{Sus}(T', B', \rho')$ ,  $T$  и  $T'$  односвязны. Тогда слоения  $(M, F)$  и  $(M', F')$  изоморфны  $\Leftrightarrow \rho(\pi_1(B, b))$  и  $\rho'(\pi_1(B', b'))$  топологически сопряжены.

## Хаотические гомеоморфизмы сферы

Пусть  $\kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$  — универсальное накрытие орбиформа  $\mathcal{P}$  и  $\kappa((0, 0)) = O \in \mathbb{S}^2$ . При любом  $m \in \mathbb{N}$  матрица

$$A_m = \begin{pmatrix} 2m & 2m-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет хаотический гомеоморфизм  $g_m$  сферы  $\mathbb{S}^2$ , причем  $g_m$  имеет ровно  $m$  неподвижных точек, а группа  $G_m = \langle g_m \rangle$  имеет счетное всюду плотное множество периодических орбит.

$\mathbb{S}^2 \setminus O \cong \mathbb{R}^2$ , точка  $O$  неподвижна относительно каждого  $g_m$ , поэтому сужение  $h_m := g_m|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{O\}}$  является хаотическим гомеоморфизмом  $\mathbb{R}^2$ .

## Хаотические топологические слоения плоскости

Предложение.  $\{H_m = \langle h_m \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов плоскости.

Теорема. Пусть  $(M_m, F_m) = \text{Sus}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2, \rho_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , где  $\rho_m(n) = (h_m)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $\{(M_m, F_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство хаотических топологических слоений, попарно не изоморфных в категории  $\mathfrak{Fol}$ , причем каждое  $M_m$  не компактно и является пространством Эйленберга–Маклейна типа  $K(\mathbb{Z}, 1)$ .

# Определение гомотопического типа диффеоморфизма Морса-Смейла на ориентируемой поверхности по гетероклиническому пересечению.

## Аннотация

В настоящей работе предложен алгоритм распознавания гомотопического типа не градиентно-подобного диффеоморфизма Морса-Смейла по его гетероклиническому пересечению. В основу алгоритма положено построение фильтрации для диффеоморфизма и подсчет индекса пересечения седловых сепаратрис в фундаментальных кольцах элементов фильтрации. Установлено, что диффеоморфизм Морса-Смейла гомотопен периодическому гомеоморфизму тогда и только тогда, когда суммарный индекс пересечения по всем гомотопным кольцам равен нулю.

## Формулировка результата.

Пусть  $f : S_p \rightarrow S_p$  – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла. Множество  $\Omega_1$  седловых точек диффеоморфизма  $f$  можно упорядочить:  $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_1}$  с сохранением отношения Смейла [1], то есть, если  $W_{\sigma_j}^u \cap W_{\sigma_i}^s \neq \emptyset$ , то  $i < j$ . Обозначим через  $\Omega_0, \Omega_2$  множества стоков и источников диффеоморфизма  $f$ , соответственно, и через  $k_0, k_2$  – число точек в этих множествах. Положим

$$A_{f,0} = \Omega_0, A_{f,i} = \Omega_0 \cup \bigcup_{j=1}^i W_{\sigma_j}^u, \quad i = 1, \dots, k_1,$$

$$R_{f,i} = \Omega_2 \cup \bigcup_{j=i+1}^{k_1} W_{\sigma_j}^s, \quad i = 0, \dots, k_1 - 1, R_{f,k_1} = \Omega_2.$$

Из работ [2], [3] следует, что каждое из множеств  $A_{f,i}$  ( $R_{f,i}$ ) является аттрактором (репеллером), то есть имеет захватывающую окрестность  $M_{f,i}$  ( $N_{f,i}$ ), являющуюся компактной поверхностью с краем такой, что

$$f(M_{f,i}) \subset \text{int } M_{f,i}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(M_{f,i}) = A_{f,i} \left( f^{-1}(N_{f,i}) \subset \text{int } N_{f,i}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(N_{f,i}) = R_{f,i} \right).$$

Кроме того, аттрактор  $A_{f,i}$  и репеллер  $R_{f,i}$  являются дуальными, то есть  $N_{f,i} = S_p \setminus \text{int } M_{f,i}$ . Поскольку  $A_{f,0} \subset A_{f,1} \subset \dots \subset A_{f,k_1}$ , то захватывающие окрестности можно выбрать так, что  $M_{f,i} \subset f(M_{f,i+1})$ ,  $i = 0, \dots, k_1 - 1$ ,  $\partial M_{f,i}$  не содержит гетероклинических точек и каждая компонента связности  $v$  множества  $K_{f,i} = M_{f,i} \setminus \text{int } f(M_{f,i})$  диффеоморфна двумерному кольцу  $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$  посредством некоторого диффеоморфизма  $h_v : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow v$  такого, что  $h_v^{-1} f h_v|_{\{0\} \times \mathbb{S}^1} (0, s) = (1, s)$ ,  $s \in \mathbb{S}^1$  (см. Рис. 1.).

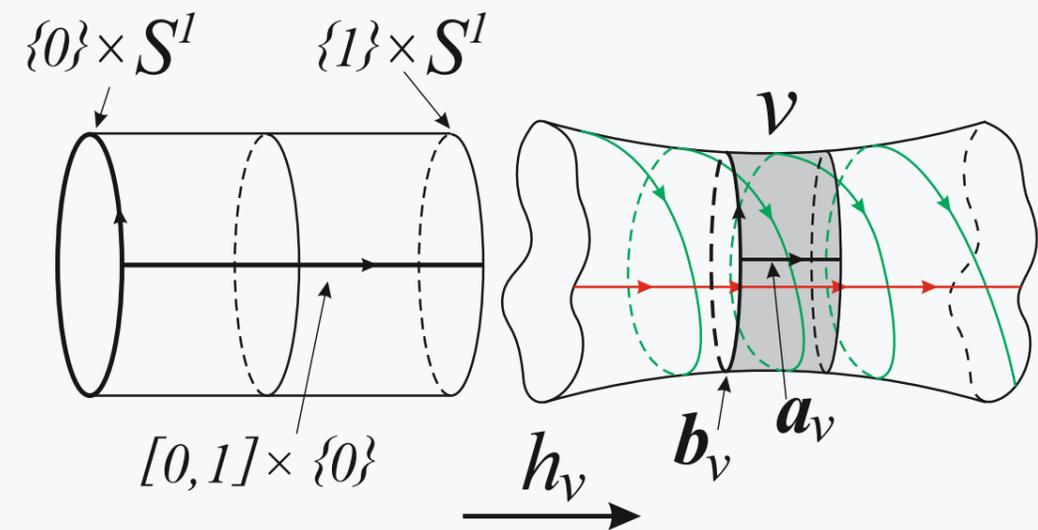


Рис.: Действие диффеоморфизма  $h_v : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow v$

Положим  $a_v = h_v([0, 1] \times \{0\})$ ,  $b_v = h_v(\{0\} \times \mathbb{S}^1)$ . Ориентируем кривую  $a_v$  направлением на отрезке  $[0, 1]$  от 0 до 1. Тогда пространство орбит  $\hat{v} = v/f$  диффеоморфно двумерному тору и естественная проекция  $p_v : v \rightarrow \hat{v}$  индуцирует на торе  $\hat{v}$  образующие  $\hat{a}_v = p_v(a_v)$ ,  $\hat{b}_v = p_v(b_v)$ .

Пусть  $v$  – компонента связности множества  $K_{f,i}$  и  $C_v = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(v)$ . Обозначим

через  $L_{f,v}^s$  ( $L_{f,v}^u$ ) объединение устойчивых (неустойчивых) сепаратрис седел  $\sigma_j$ ,  $j \leq i$  ( $j > i$ ), целиком лежащих в множестве  $C_v$ .

Если множества  $L_{f,v}^s$ ,  $L_{f,v}^u$  не пусты, то положим  $\hat{L}_{f,v}^s = p_v(L_{f,v}^s)$ ,  $\hat{L}_{f,v}^u = p_v(L_{f,v}^u)$ . Тогда каждая компонента связности этих множеств является узлом на торе  $\hat{v}$ , имеющим гомотопический тип  $\langle 1, d_{f,v}^s \rangle$ ,  $\langle 1, d_{f,v}^u \rangle$  в выбранных образующих  $\hat{a}_v$ ,  $\hat{b}_v$ .

Положим  $\xi_{f,v} = d_{f,v}^s - d_{f,v}^u$ .

# Определение гомотопического типа диффеоморфизма Морса-Смейла на ориентируемой поверхности по гетероклиническому пересечению.

## Формулировка результата.

В силу [4][Глава С., упр.7., стр 28.] число  $\xi_{f,v}$  не зависит от выбора базиса  $\hat{a}_v, \hat{b}_v$ . Компоненту  $v$  будем называть гетероклиническим кольцом, если множество  $L_{f,v}^u$  содержит хотя бы одну неустойчивую сепаратрису седла  $\sigma_{i+1}$ , пересекающуюся с множеством  $L_{f,v}^s$ . Заметим, что гетероклинических колец не больше двух в каждом множестве  $K_{f,i}$ . Гетероклиническое кольцо  $v$  будем называть

- ▶ стягиваемым, если кривая  $b_v$  гомотопна нулю на поверхности  $S_p$ ;
- ▶ тривиальным, если  $\xi_{f,v} = 0$ ;
- ▶ существенным, если  $v$  не является ни стягиваемым, ни тривиальным.

Обозначим через  $\mathcal{V}_f$  множество существенных гетероклинических колец  $v$ . Если множество  $\mathcal{V}_f$  пусто, то положим  $\xi_f = 0$ . В противном случае введем на множестве  $\mathcal{V}_f$  следующее отношение эквивалентности: компоненты  $v \subset K_{f,i}, v' \subset K_{f,i'}$  назовем эквивалентными, если существует объемлющая изотопия  $H_t: S_p \rightarrow S_p$  такая, что  $H_0 = id, H_1(b_v) = b_{v'}$  (см. Рис. 2.). Обозначим через  $[v]$  класс эквивалентности кольца  $v$  и через  $[\mathcal{V}_f]$  множество классов эквивалентности. Полагая кривые  $b_v, b_{v'}$  согласованно ориентированными для эквивалентных колец  $v, v'$ , положим

$$\xi_{f,[v]} = \sum_{v \in [v]} \xi_{f,v}, \quad \xi_f = \sum_{[v] \in [\mathcal{V}_f]} |\xi_{f,[v]}|.$$

## Литература.

- [1] S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., 73(6): 747–817, 1967.
- [2] D. Pixton, Wild unstable manifolds, Topology, 1977, 16, 167–172.
- [3] Grines, V. Z., Zhuzhoma, E. V., Medvedev, V. S., and Pochinka, O. V. (2010). Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 271(1), 103-124.
- [4] Rolfsen, D.: Knots and links. Mathematics Lecture Series 7 (1990).
- [5] A.I. Morozov. Determination of the Homotopy Type of a Morse – Smale Diffeomorphism on a 2-torus by Heteroclinic Intersection, Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2021, Vol. 17, no. 4, pp. 465-473

## Основной результат.

Теорема Пусть  $f$  сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла на поверхности. Тогда  $\{f\} \in T_1 (\{f\} \in T_2) \Leftrightarrow \xi_f = 0 (\xi_f \neq 0)^a$ .

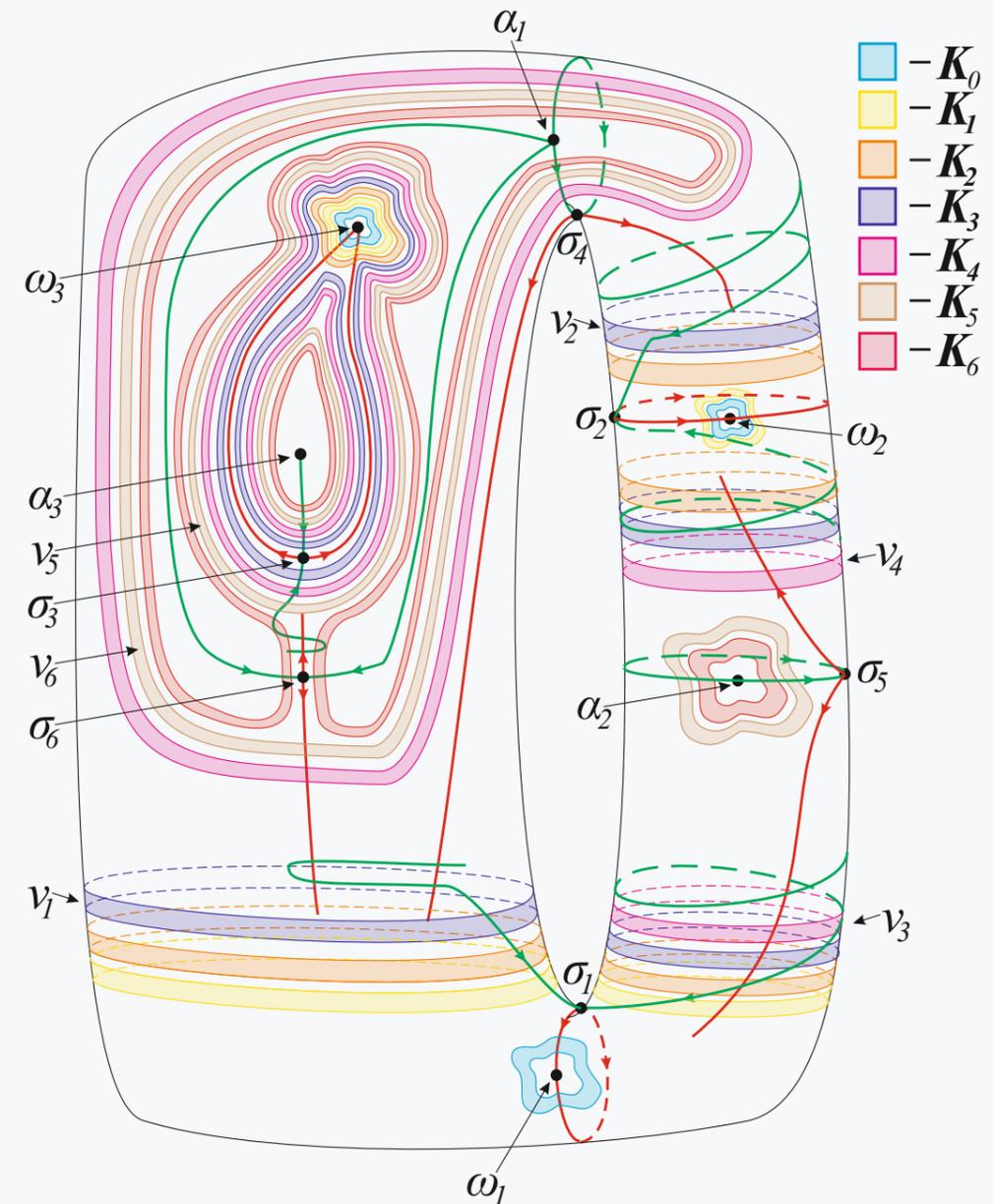


Рис.: Гетероклинические кольца диффеоморфизма Морса-Смейла на торе

<sup>a</sup>Для диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит, заданных на двумерном торе, теорема доказана в работе [5].

# ON REVERSIBLE THREE-DIMENSIONAL SYSTEM CONTAINING LORENZ ATTRACTOR AND LORENZ REPELLER

E. A. Samylina

National Research University Higher School of Economics, Russia



## Abstract

We study a reversible three-dimensional system of differential equations. On the plane of the parameters  $C$  and  $F$ , a bifurcation diagram is constructed, as well as the main local and global bifurcations that lead to the appearance of symmetric Lorenz attractor and Lorenz repeller are studied. Two scenarios of the appearance of the Lorenz attractor were found in the system. And also the Lorenz attractor was found, which does not contain equilibrium states inside its holes, i.e. the system has only two symmetric equilibrium states, one of which belongs to the attractor, and the other to the repeller.

## Introduction

In this work, we study a reversible three-dimensional system, which has the following form:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = Fx + Cyz + Dx^3 + Exz^2, \\ \dot{z} = \mu + Az^2 + Bx^2, \end{cases} \quad (1)$$

where  $A, B, C, D, E, F$  and  $\mu$  are its parameters.

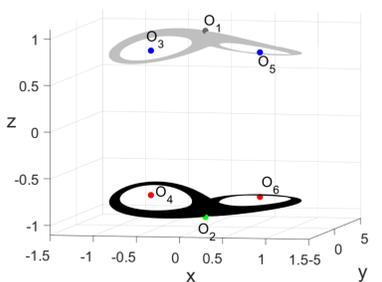


Fig 1. Phase portrait of (1) at  $C = 3.2, F = -20$  (attractor is black, repeller is gray).

System (1) has 6 equilibrium states:  $O_1(0, 0, \sqrt{-\frac{\mu}{A}}), O_2(0, 0, -\sqrt{-\frac{\mu}{A}}), O_3\left(\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, \sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right), O_4\left(\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, -\sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right), O_5\left(-\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, \sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right), O_6\left(-\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, -\sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right)$ .

Note that system (1) is invariant under the change of variables  $x \rightarrow -x$  and  $y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ . As a consequence, the phase portrait is symmetrical about the  $z$  axis. Moreover, system (1) is reversible, since it is invariant under the change of variables  $h: x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$  and time reversal, which is the involution ( $h^2: x \rightarrow x$ ). Accordingly, for each trajectory  $Q$  in system (1), there exists a trajectory  $Q' = h(Q)$  symmetric to it of the opposite type of stability (see Fig 1. Along with the attractor (shown in black), there is a repeller symmetric to it about the  $x$  axis (shown in gray) in the phase space). In addition, due to symmetry, the equilibrium states  $O_4$  and  $O_6$  have the same type and, hence, they also bifurcate simultaneously.

Let's fix the values of the parameters  $A = 1, B = 1, D = -25, E = 50, \mu = -1$  and leave  $C$  and  $F$  be control parameters. For  $C = 3.2, F = -20$  in system (1) we observe Lorenz attractor and Lorenz repeller simultaneously (see Fig.1).

## Bifurcation diagram

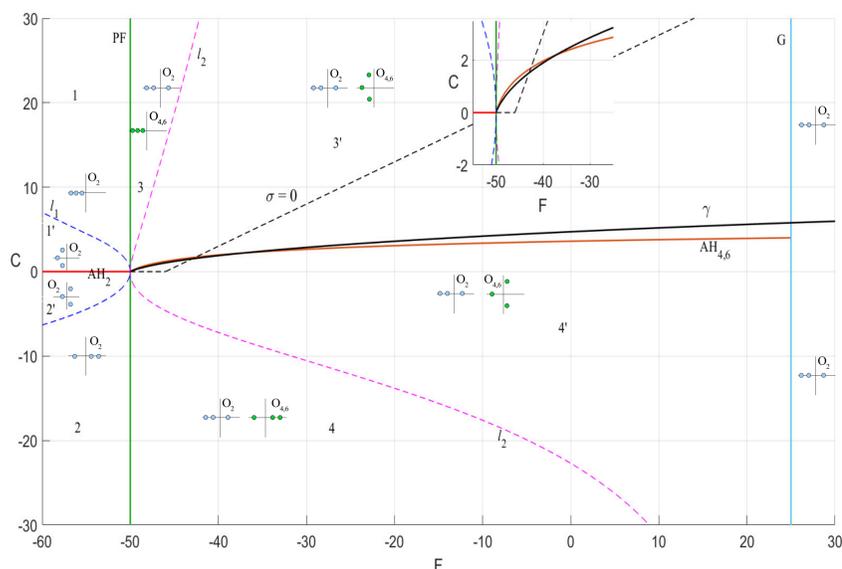


Fig 2. Bifurcation diagram in the plane of parameters  $F$  and  $C$ .

Due to the reversibility in the (1), when constructing a bifurcation diagram, it is sufficient to consider the equilibrium states  $O_2, O_4, O_6$ , since their bifurcation curves will exactly coincide with the bifurcation curves for the equilibrium state  $O_1, O_3, O_5$ , respectively.

The figure 2 shows the bifurcation diagram of the system on the plane of the  $F$  and  $C$  parameters. For the given values of the parameters  $A = 1, B = 1, D = -25, E = 50, \mu = -1$  equilibrium states  $O_4, O_6$  exist only for  $-50 \leq F \leq 25$ , and the equilibrium state  $O_2$  exists for any  $F$  and  $C$ .

The bifurcation diagram shows the following curves:

- Andronov-Hopf bifurcation for equilibrium state  $O_2$  ( $AH_2$ )
- Andronov-Hopf bifurcation for equilibrium states  $O_4$  and  $O_6$  ( $AH_{4,6}$ )
- "Homoclinic butterfly" curve ( $\gamma$ )
- Saddle value of equilibrium state  $O_2$  is zero ( $\sigma = 0$ )
- Pitchfork bifurcation for equilibrium state  $O_2$  ( $PF$ )
- Bifurcation line, on which the equilibrium states  $O_4$  and  $O_6$  merge with the symmetric equilibrium states  $O_3$  and  $O_5$ , which have inverse indices ( $G$ )

## Scenarios of the appearance of Lorenz Attractor

Figures 3, 4 show the appearance of the Lorenz attractor in the system at  $F = -20$  (the first scenario of the appearance of the Lorenz attractor) and  $F = -40$  (the second scenario of the appearance of the Lorenz attractor)

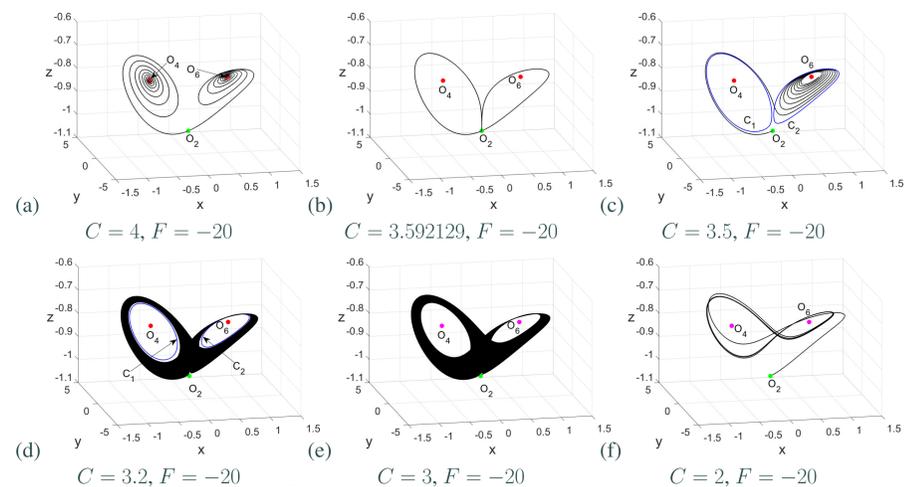


Fig 3. The first scenario of the appearance of the Lorenz attractor

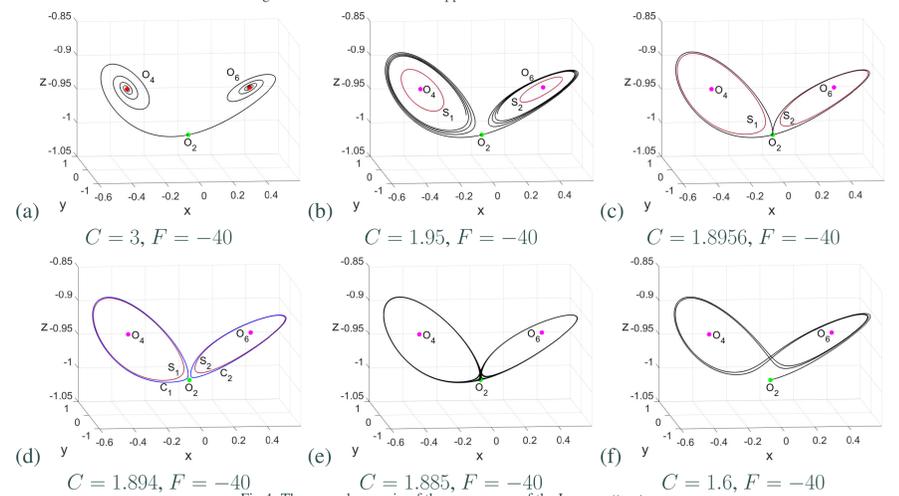


Fig 4. The second scenario of the appearance of the Lorenz attractor

## Kneading map

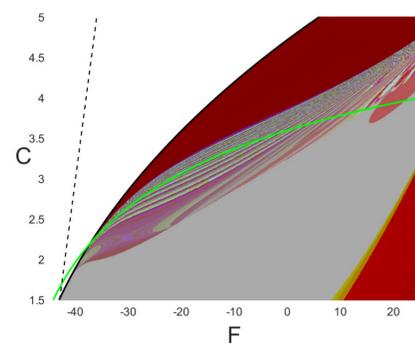


Fig 5. Kneading map with bifurcation curves.

## New type of Lorenz attractor

A new type of Lorenz attractor is found, which does not contain equilibrium states inside its holes. In this case, for  $F > 25$ , system (1) has only two symmetric equilibrium states, one of which belongs to the attractor, and the other to the repeller.

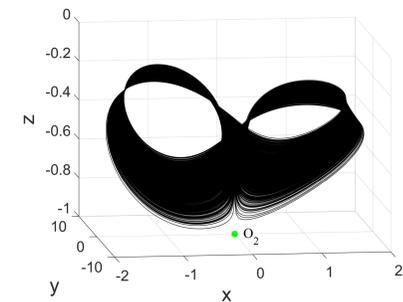


Fig 6. Lorenz attractor with no equilibrium states inside its holes.

## References

- [1] Gonchenko, Alexander S. "On Lorenz-like attractors in model of celtic stone." Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki 2 (2013): 3-11.
- [2] Gonchenko, A. S., and E. A. Samylina. "On the region of existence of a discrete Lorenz attractor in the nonholonomic model of a Celtic stone." Radiophysics and Quantum Electronics 62.5 (2019): 369-384.

## Acknowledgements

These studies were supported by the Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE of the Russian Ministry of Science and Higher Education (Grant No. 075-15-2022-1101).

# О четырехмерных многообразиях, допускающих функцию Морса с тремя критическими точками

Сараев Илья Александрович

НИУ ВШЭ Нижний Новгород

ilasaraev34@gmail.com



## Аннотация

В работе излагается доказательство гомеоморфности четырехмерного многообразия, допускающего функцию Морса ровно с тремя критическими точками, комплексной проективной плоскости.

Пусть  $M^n$  – связное замкнутое  $C^r$ -гладкое многообразие размерности  $n \geq 1$ .  $C^r$ -гладкая функция,  $r \geq 2$ ,  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется функцией Морса, если все ее критические точки которой невырождены.

Далее будем предполагать, что множество критических точек функции Морса  $\varphi$  состоит в точности из трех точек.

**Предложение 1.** *Функция*

$$\varphi(z_1 : z_2 : z_3) = 2 \left( \frac{|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 3|z_3|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} - 1 \right)$$

является функцией Морса на комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$ , множество критических точек которой состоит из трех точек индексов 0, 2, 4 соответственно, при этом значение функции  $\varphi$  в каждой критической точке равно индексу этой точки.

В общем случае про многообразие, допускающее функцию Морса ровно с тремя критическими точками, известно следующее.

**Утверждение 1** ([1]). *Пусть  $M^n$  – связное замкнутое многообразие размерности  $n$ , допускающее функцию Морса  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  ровно с тремя критическими точками. Тогда:*

1.  $n \in \{2, 4, 8, 16\}$ ;
2. критические точки функции  $\varphi$  имеют индексы  $0, \frac{n}{2}, n$ ;
3.  $M^n$  является объединением непересекающихся открытого  $n$ -мерного шара и сферы размерности  $\frac{n}{2}$ ;
4.  $M^2$  диффеоморфно вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ ;
5. в случае  $n \geq 4$  многообразие  $M^n$  односвязно и ориентируемо, при этом  $M^4$  имеет гомотопический тип комплексной проективной плоскости. При  $n = 8$  (16) существует шесть (шестьдесят) гомотопических типов таких многообразий.

Из результатов работ [2], [3] следует, что при  $n = 4$ , как и в случае  $n = 2$ , существует ровно одно (с точностью до гомеоморфизма) многообразие Илса-Кёйпера. Поскольку имеется пример функции Морса, заданной на комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$ , и имеющей ровно три критические точки, то четырехмерное многообразие Илса-Кёйпера гомеоморфно  $\mathbb{C}P^2$ . Таким образом, верна следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть на многообразии  $M^4$  существует функция Морса ровно с тремя критическими точками. Тогда  $M^4$  гомеоморфно комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$ .*

Отметим, что единственность четырехмерного многообразия Илса-Кёйпера получена в работах [2], [3] как следствие

доказанной в этих работах теоремы о единственности класса топологической эквивалентности градиентно-подобных потоков с замкнутым четырехмерным фазовым пространством, неблуждающее множество которых состоит ровно из трех состояний равновесия (к этому классу относится и градиентный поток функции Морса, имеющей ровно три критические точки). Настоящая работа посвящена независимому топологическому доказательству этой теоремы.

Следующее утверждение является ключевым для доказательства.

**Утверждение 2** ([4, Theorem 2]). *Многообразие, полученное нетривиальной хирургией вдоль нетривиального узла не гомеоморфно сфере.*

Доказательство состоит в пошаговом построении гомеоморфизма  $h : M^4 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  на всех клетках  $CW$ -комплекса, соответствующего многообразию  $M^4$ .

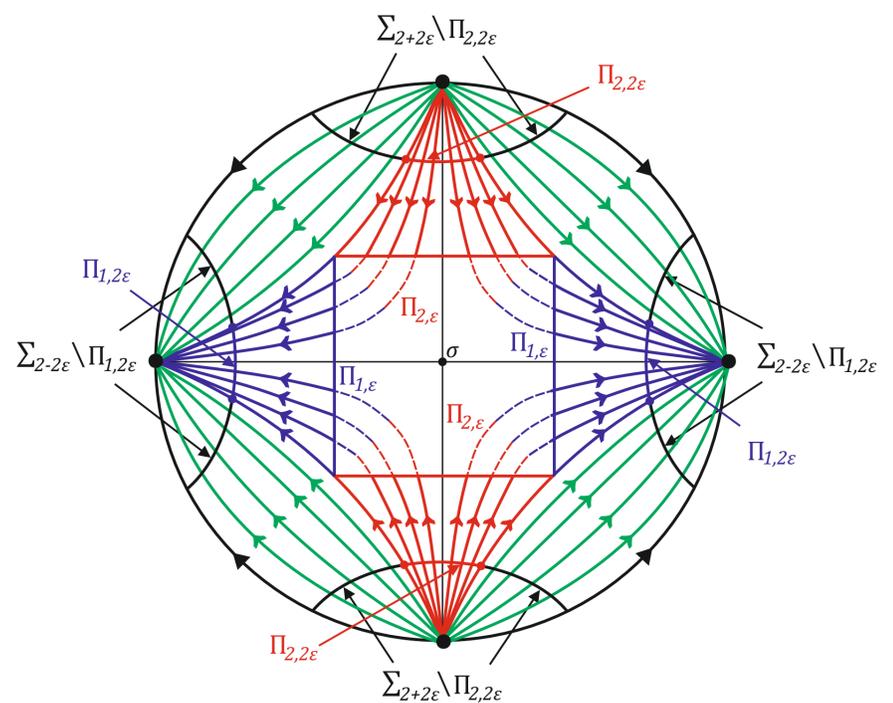


Рис. 1: траектории градиентного потока функции  $\varphi$  на многообразии  $M^4$

## Список литературы

- [1] J.Eels and N.H.Kuiper *Closed manifolds which admit nondegenerate functions with three critical points*, Proc. Amsterdam, *Indagationes Math*, 23 (1961), 109-114
- [2] Жужома Е. В., Медведев В. С. *Непрерывные потоки Морса-Смейла с тремя состояниями равновесия* // Математический сборник. 2016. Т. 207. № 5. С. 69-92
- [3] Zhuzhoma E. V., Medvedev V. *Morse-Smale systems with few non-wandering points* // Topology and its Applications. 2013. Vol. 160. No. 3. P. 498-507.
- [4] C. McA. Gordon, J. Luecke *Knots are determined by their complements.* // Journal of the American Mathematical Society (1989), 2, 371-415.

О. Починка, Д. Шубин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Международная лаборатория динамических систем и приложений

7 - 11 ноября 2022

## Аннотация

В настоящей работе рассматриваются НМС-потоки  $f^t$ , то есть неособые (без неподвижных точек) потоки Морса-Смейла, заданные на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях  $M^3$ . Неблуждающее множество такого потока состоит из конечного числа периодических гиперболических орбит.

## Введение и история вопроса

- Из работы Азимова [1] известно, что несущее многообразие в этом случае является объединением круговых ручек.
- НМС-потоки в точности с двумя периодическими орбитами, притягивающей и отталкивающей (такую пару периодических орбит необходимо содержит любой НМС-поток), допускают только линзовые пространства. Более того, в работе [3] доказано, что каждое линзовое пространство допускает ровно два класса эквивалентности таких потоков, за исключением 3-сферы  $S^3$  и проективного пространства  $\mathbb{R}P^3$ , на которых класс эквивалентности один.

- В настоящей работе устанавливается топология всех возможных ориентируемых 3-многообразий, допускающих НМС-потоки в точности с одной седловой периодической орбитой, в предположении, что она является скрученной (ее инвариантные многообразия неориентируемы).

## Утверждение

Неблуждающее множество любого потока  $f^t \in G_3^-(M^3)$  состоит в точности из трех периодических орбит  $S, A, R$ , седловой, притягивающей и отталкивающей, соответственно.

- Далее не уменьшая общности будем полагать, что трубчатые окрестности  $V_S, V_A, V_R$  попарно не пересекаются. Пусть  $T_A = \partial V_A$ ,  $T_S = \partial V_S$ ,  $T_R = \partial V_R$
- $K_A = W_S^u \cap T_A$ ,  $K_R = W_S^s \cap T_R$
- $\langle K_A \rangle = \langle l_A, m_A \rangle$ ,  $\langle K_R \rangle = \langle l_R, m_R \rangle$
- Эквивалентность потоков определяется следующим полным инвариантом:
  - если узлы  $K_A, K_R$  существенны, то,
 
$$C_{f^t} = (l_R, m_R, l_A, m_A);$$
  - если узлы  $K_A, K_R$  стягиваемы и диск, ограниченный узлом  $K_A$  на торе  $T_A$  остается справа (слева) при его обходе, то
 
$$C_{f^t} = (0, 2, l_2, m_2) \text{ (} C_{f^t} = (0, -2, l_2, m_2) \text{)}, \langle l_2, m_2 \rangle = \psi_{RA} \langle 0, 1 \rangle.$$

## Утверждение ([2], Теорема 1)

Потоки  $f^t, f'^t \in G_3^-(M^3)$  с наборами  $C_{f^t} = (l_1, m_1, l_2, m_2)$ ,  $C_{f'^t} = (l'_1, m'_1, l'_2, m'_2)$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда  $l_i = l'_i$  и  $m_i \equiv \pm m'_i \pmod{l_i}^a$ .

## Theorem

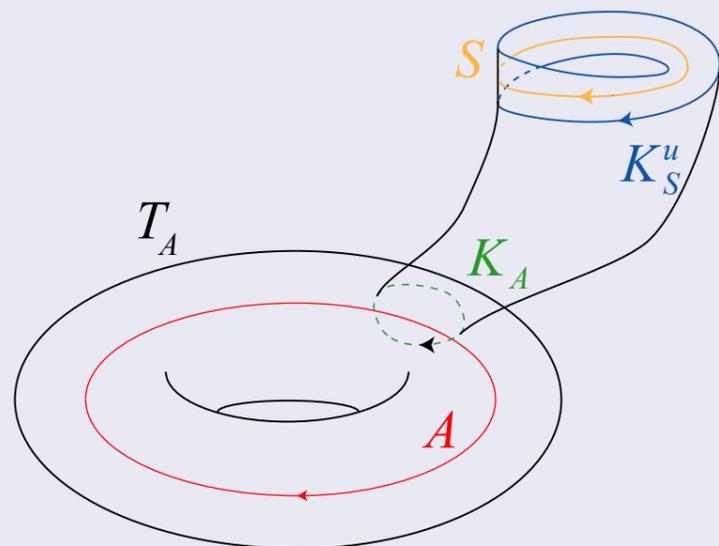
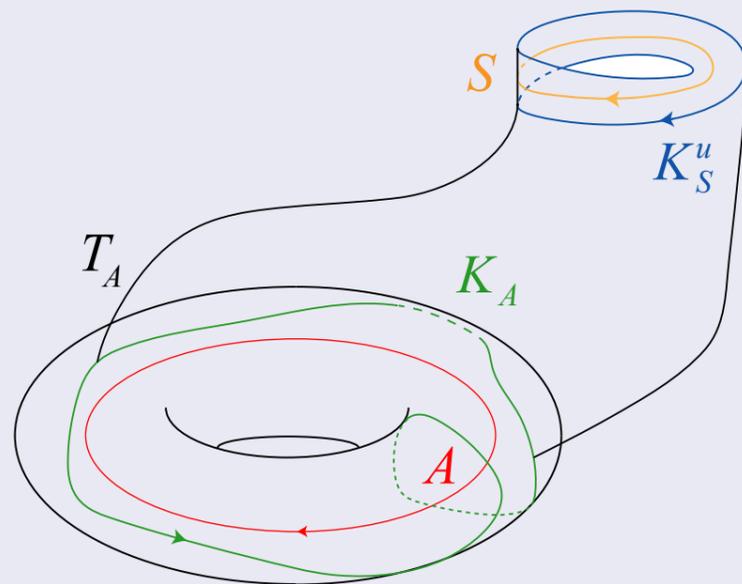
Потоки класса  $G_3^-(M^3)$  допускают все линзовые пространства  $L_{p,q}$ , все связные суммы вида  $L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3$  и все многообразия Зейферта вида  $M(S^2, (2, 1), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2))$ . Именно, пусть поток  $f^t \in G_3^-(M^3)$  имеет инвариант  $C_{f^t} = (l_1, m_1, l_2, m_2)$ . Тогда

- 1) если  $l_1 = 0$ , то  $M^3$  гомеоморфно многообразию  $L_{l_2, m_2} \# \mathbb{R}P^3$ ;
- 2) если  $l_1 \neq 0$  и  $l_2 = 0$ , то  $M^3$  гомеоморфно многообразию  $L_{l_1, m_1} \# \mathbb{R}P^3$ ;
- 3) если  $|l_1| = 1$  и  $|l_2| > 1$ , то  $M^3$  гомеоморфно линзовому пространству  $L_{p,q}$ , где  $p = -l_2 - 2b_2$ ,  $q = 2\xi_2 - m_2$  и  $\xi_2, b_2 \in \mathbb{Z}$  – решение уравнения  $l_2\xi_2 + m_2b_2 = 1$ ;
- 4) если  $|l_2| = 1$  и  $|l_1| > 1$ , то  $M^3$  гомеоморфно линзовому пространству  $L_{p,q}$ , где  $p = -l_1 - 2b_1$ ,  $q = 2\xi_1 - m_1$  и  $\xi_1, b_1 \in \mathbb{Z}$  – решение уравнения  $l_1\xi_1 + m_1b_1 = 1$ ;
- 5) если  $|l_1l_2| = 1$ , то  $M^3$  гомеоморфно сфере  $S^3$ ;
- 6) если  $|l_1| > 1$  и  $|l_2| > 1$ , то  $M^3$  гомеоморфно многообразию Зейферта  $M(S^2, (2, -1), (l_1, b_1), (l_2, b_2))$ , где  $b_i$  – решение сравнения  $b_i m_i \equiv 1 \pmod{l_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

## Источники

- Daniel Asimov.  
Round handles and non-singular morse-smale flows.  
Annals of Mathematics, 102(1):41–54, 1975.
- Ольга Витальевна Починка and Данила Денисович Шубин.  
Неособые потоки морса-смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях.  
Математические заметки, 112(3):426–443, 2022.
- O.V. Pochinka and D.D. Shubin.  
Non-singular morse-smale flows on n-manifolds with attractor-repeller dynamics.  
Nonlinearity, 35(3):1485, 2022.

<sup>a</sup>В случае  $l_i = 0$  сравнение  $m_i \equiv \pm m'_i \pmod{l_i}$  равносильно равенству  $m_i = \pm m'_i$ .



## Прямое произведение

$M_1, M_2$  – метрические пространства  
 $f : M_1 \rightarrow M_1, g : M_2 \rightarrow M_2$  – гомеоморфизмы  
**Прямое произведение** гомеоморфизмов  $f$  и  $g$  – это гомеоморфизм  $f \times g : M_1 \times M_1 \rightarrow M_2 \times M_2$  такой, что  $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$  для  $x \in M_1, y \in M_2$ .

## Цепные компоненты

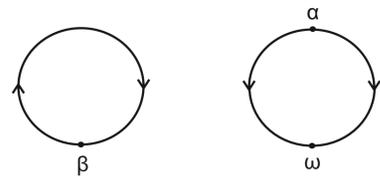
$\varepsilon$ -цепью длины  $n$ , соединяющей точку  $x$  с точкой  $y$  для каскада  $f$  называется последовательность  $x = x_0, \dots, x_n = y$  точек в  $M$  такая, что  $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$  для  $1 \leq i \leq n$ .

Точка  $x \in X$  называется **цепно рекуррентной** для каскада  $f$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $T(n)$ , зависящее от  $\varepsilon > 0$ , и  $\varepsilon$ -цепь длины  $T(n)$ , соединяющая точку  $x$  с ней самой.

Множество всех цепно рекуррентных точек называется **цепно рекуррентным множеством**.

$x \sim y$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\varepsilon$ -цепи от  $x$  к  $y$  и от  $y$  к  $x$ .

Классы эквивалентности называют **цепными компонентами**.



$$R_f = S^1;$$

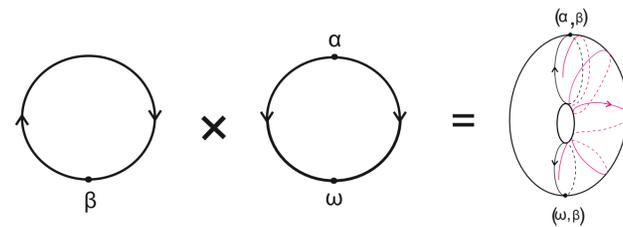
$$R_f = \{\alpha, \omega\}$$

## Критерии

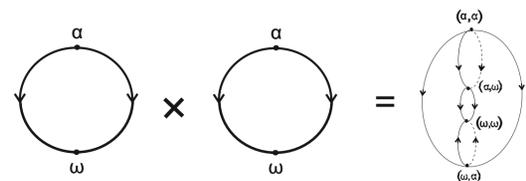
**Условие гиперболичности** цепно рекуррентного множества диффеоморфизма эквивалентно  **$\Omega$ -устойчивости** системы. Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  является **структурно устойчивым** тогда и только тогда, когда он удовлетворяет **аксиоме А** и **сильному условию трансверсальности**.

## Теорема 1 и 2

Цепно рекуррентное множество прямого произведения  $f \times g$  гомеоморфизмов  $f$  и  $g$  совпадает с прямым произведением их цепно рекуррентных множеств, причем каждая цепная компонента гомеоморфизма  $f \times g$  является прямым произведением некоторых цепных компонент  $f$  и  $g$ .



$R_{f_1} = S^1, R_{f_2} = \{\alpha, \omega\}$   
 Прямое произведение гиперболических множеств  $\Lambda_f$  и  $\Lambda_g$  диффеоморфизмов  $f$  и  $g$  является гиперболическим множеством диффеоморфизма  $f \times g$ .



## Теорема 3

Если диффеоморфизмы являются структурно устойчивыми ( $\Omega$ -устойчивыми), то их прямое произведение также будет структурно устойчивым ( $\Omega$ -устойчивым) диффеоморфизмом

## Определения

Пусть  $f : M^n \rightarrow M^n$  – диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом многообразии размерности  $n$ .

Компактное  $f$ -инвариантное множество  $\Lambda \subset \text{int } M^n$  называется **гиперболическим**, если для каждого  $x \in \Lambda$  касательное пространство  $T_x M^n$  представляется в виде прямой суммы подпространств  $E_x^s, E_x^u, T_x M^n = E_x^s \oplus E_x^u$  такой, что  $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s, Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ ;

для некоторых фиксированных  $c > 0$  и  $0 < \lambda < 1$   $\|Df^k(v)\| \leq c\lambda^k \|v\|, v \in E_x^s, k > 0, \|Df^{-k}(v)\| \leq c\lambda^k \|v\|, v \in E_x^u, k > 0$ ;

$E_x^s, E_x^u$  меняются непрерывно при изменении  $x \in \Lambda$ .

Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется  **$\Omega$ -устойчивым**, если  $C^1$ -близкие к  $f$  диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах, то есть если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого диффеоморфизма  $g : M^n \rightarrow M^n : \|f - g\|_{C^1} < \varepsilon$  существует гомеоморфизм  $\varphi : NW(f) \rightarrow NW(g)$  такой, что  $\varphi \circ f_{NW(f)} = g \circ \varphi$ .

Диффеоморфизм  $f$  называется **структурно устойчивым**, если существует его окрестность  $U(f)$  такая, что любой диффеоморфизм  $g \in U(f)$  сопряжен  $f$ .

## Энергетическая функция и функция Ляпунова

Пусть  $M^n$  – гладкое замкнутое ориентируемое  $n$ -многообразие. Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  с цепно рекуррентным множеством  $R_f$ .

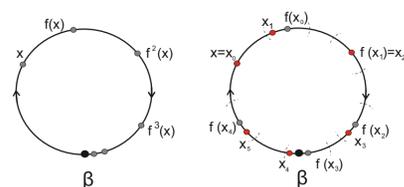
**Функцией Ляпунова** для диффеоморфизма  $f$  называется непрерывная функция  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  со следующими свойствами:

- если  $x \notin R_f$ , то  $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ ;
- если  $x, y \in R_f$ , то  $\varphi(x) = \varphi(y)$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  лежат в одной цепной компоненте;
- $\varphi(R_f)$  – компактное нигде не плотное подмножество  $\mathbb{R}$ .

**Энергетическая функция** – гладкая функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

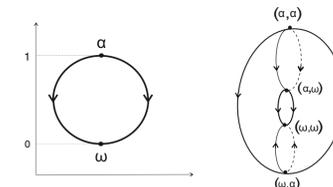
Если диффеоморфизмы  $f$  и  $g$  обладают энергетической функцией, причем хотя бы у одного из них конечное число цепных компонент, то их прямое произведение  $f \times g$  будет иметь энергетическую функцию в виде взвешенной суммы энергетических функций для диффеоморфизмов  $f$  и  $g$ .

## Траектория и $\varepsilon$ -траектория



## Пример энергетической функции

$\varphi_f, \varphi_g$  – энергетические функции для  $f$  и  $g$ . Тогда  $\varphi = \varphi_f + a\varphi_g, a > 0$  – энергетическая функция для  $f \times g$



$$(\alpha, \alpha) = 3, (\alpha, \omega) = 1$$

$$(\omega, \omega) = 0, (\omega, \alpha) = 2$$

$$\varphi = \varphi_f + 2\varphi_g$$