Вторая конференция Математических центров России
Секция «Алгебра»

7–11 ноября 2022, Москва

Хасан Алхуссейн. Вычисление когомологий конформной алгебры через соответствие Морса

Понятие конформной алгебры Ли, введенное В. Г. Кацем в 1996 г., является алгебраической формализацией свойств коэффициентов сингулярной части разложения операторного опризведения (OPE) для киральных полей в 2-мерной конформной теории поля. Хорошо известно, что для «обычной» алгебры Ли $\mathfrak{g}$, действующей на модуле V, группы когомологий $H^n(\mathfrak{g}, V)$ совпадают с группами когомологий Хохшильда универсальной ассоциативной обертывающей $U(\mathfrak{g})$ со значениями в V. Для конформных алгебр картина существенно иная. Мы использовали дискретную алгебраическую теорию Морса для построения метода, позволяющего вычислить когомологии редуцированного комплекса для ассоциативной конформной алгебры. В качестве примера данный метод позволил вычислить все группы когомологий Хохшильда для универсальной ассоциативной обертывающей $U(3)$ конформной алгебры Вирасоро со значениями в скалярном модуле. Доклад подготовлен на основе совместной работы с П. С. Колесниковым и В. Е. Лопаткиным.

В. Ю. Березнюк. Коммутаторная длина степеней в свободных произведениях групп

Пусть даны свободное произведение групп $G = A * B$ и натуральное число n. Какова минимальная возможная коммутаторная длина элемента $g^n \in G$, не сопряженного элементам свободных множителей? Мы дадим полный ответ на данный вопрос.

Е. К. Брусянская. О делимости числа наборов элементов группы с заданным свойством

В докладе будет представлена теорема о делимости числа наборов элементов группы, удовлетворяющих формуле первого порядка в групповом языке (с константами). Этот результат обобщает классические теоремы Фробениуса и Соломона.

С. А. Гайфуллин. Локально нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от трёх переменных (по совместной работе с N. Dasgupta)

Рассмотрим алгебру $A = k[x, y, z]$, где k — поле. Для того, чтобы изучать группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$ этой алгебры важным объектом являются локально нильпотентные дифференцирования, которые соответствуют алгебраическим подгруппам в $\mathrm{Aut}(A)$, изоморфным аддитивной группе поля. Локально нильпотентные дифференцирование (ЛНД) — это линейный оператор D на A, удовлетворяющий тождеству Лейбница такой, что для любого элемента из A найдётся натуральное число n такое, что D^n обнуляет этот элемент. Локально нильпотентному дифференцированию на A можно приписать числовую характеристику, которая называется рангом этого дифференцирования. Ранг может принимать значения 1, 2 и 3. Дифференцирования ранга 1 устроены довольно просто: это реплики частных производных в некоторой системе координат. Дифференцирования 2 и тем более 3 не имеют такого простого описания. В докладе будет описана итерационная процедура построения ЛНД, которой могут быть получены все ЛНД ранга 2. Будут получены новые примеры нетриангуляризуемых ЛНД ранга 2. Также будут предъявлены новые примеры ЛНД ранга 3.

А. А. Гальт. О расщепляемости нормализатора максимального тора в группах лиева типа

Задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса в 1966 году. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ простого поля характеристики p. Пусть σ — эндоморфизм Стейнберга и $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$. Хорошо известно, что все максимальные торы сопряжены в $\overline{G}$ и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\overline{G}$. Возникает естественный вопрос: для каких групп $\overline{G}$ нормализатор $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$. Аналогичный вопрос может быть сформулирован для конечных групп лиева типа. В докладе будет рассказано о решении поставленных вопросов.

М. П. Голубятников. О классе вершинно примитивных транзитивных на дугах вполне регулярных графов, возникающих из подгрупповой структуры группы $PSL(2,q)$

Обыкновенный k-регулярный граф с v вершинами называется вполне регулярным с параметрами (v,k,λ,μ), если любые две смежные вершины имеют точно λ общих соседей, а любые вершины, находящиеся на расстоянии 2 в этом графе, имеют точно μ общих соседей.

Пусть G — конечная группа, $H \leqslant G$, $\mathfrak{H} = \{H^g \,|\, g \in G\}$ — соответствующий класс сопряженности подгрупп группы G и $1 \leqslant d$ — целое число. Построим обыкновенный граф $\Gamma(G,H,d)$ следующим образом: вершинами графа $\Gamma(G,H,d)$ являются элементы класса $\mathfrak{H}$ и две различные вершины H_1 и H_2 из $\mathfrak{H}$ смежны в $\Gamma(G,H,d)$ тогда и только тогда, когда $|H_1 \cap H_2| = d$.

В докладе будет доказано, что если q — степень простого числа такая, что $13 \leqslant q \equiv 1 \pmod 4$, $G = SL_2(q)$ и H — диэдральная максимальная подгруппа группы G порядка $2(q-1)$, то граф $\Gamma = \Gamma(G,H,8)$ является вершинно примитивным транзитивным на дугах вполне регулярным графом с параметрами $\left(\dfrac{q(q+1)}{2}, \dfrac{q-1}{2}, 1, 1\right)$, при этом $\mathrm{Aut}(PSL_2(q)) \leqslant \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Более того, мы показываем, что $\Gamma = \Gamma(G,H,8)$ содержит совершенный 1-код, в частности, диаметр этого графа больше 2.

Доклад основан на результатах совместной с Н. В. Масловой работы.

М. Е. Гончаров. Операторы Роты–Бакстера на кокоммутативных алгебрах Хопфа

Операторы Роты–Бакстера (на ассоциативных алгебрах) впервые возникли в работе Г. Бакстера как формализм при изучении интегральных операторов в теории вероятностей и математической статистике. Независимо от этого, операторы Роты–Бакстера веса ноль естественным образом возникли в начале 80-х годов прошлого столетия в работе М. А. Семенова-Тян-Шанского при изучении структур гамильтоновых многообразий на группах Ли. К настоящему моменту известны тесные связи операторов Роты–Бакстера с такими объектами математики, как решения классического уравнения Янга–Бакстера, биалгебры Ли, пост- и прелиевы алгебры, двойные алгебры Ли, двойные алгебры Пуассона и т. д.

В своей недавней работе Л. Гуо, Х. Ланг и Ю. Шенг дали определение оператора Роты — Бакстера на группах. Данное определение согласуется с обычным понятием оператора Роты–Бакстера на алгебрах следующим образом: если G — это группа Ли и B является оператором Роты–Бакстера на группе G, то отображение, являющееся касательным к B в 1, является оператором Роты–Бакстера веса 1 на соответствующей алгебре Ли группы G.

В данной работе мы вводим понятие оператора Роты–Бакстера на кокоммутативных алгебрах Хопфа. Данное понятие естественным образом обобщает понятия операторов Роты–Бакстера на группах и алгебрах Ли. В частности, операторы Роты–Бакстера веса 1 на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (соответственно, на группе G) находятся во взаимно-однозначном соответствии с операторами Рота–Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ (соответственно, на групповой алгебре $F[G]$ группы G).

А. С. Гордиенко. Универсальные (ко)действующие бимоноиды и моноиды Хопфа

Во многих разделах математики и физики находят своё применение (ко)модульные алгебры над алгебрами Хопфа. С одной стороны, такие алгебры являются обобщениями алгебр, градуированных группами и алгебр с действиями групп автоморфизмами. С другой стороны, (ко)модульные алгебры можно проинтерпретировать как алгебры функций на (возможно, некоммутативных) алгебраических многообразиях, на которых действуют квантовые группы симметрий. Для многих приложений (структурная теория, полиномиальные H-тождества, ...) оказывается несущественным, какая конкретно алгебра Хопфа (ко)действует на заданной алгебре. Здесь мы естественным образом приходим к понятию эквивалентности (ко)модульных структур, которое является обобщением хорошо известного понятия эквивалентности градуировок, причём можно доказать, что среди всех алгебр Хопфа, задающих эквивалентные структуры, существуют универсальные. Более того, данные построения можно сделать, используя язык заплетённых моноидальных категорий и моноидов Хопфа. (Моноидами Хопфа в категории векторных пространств являются алгебры Хопфа, а в категории множеств - группы.) В докладе будет рассказано о том, как можно объединить эти универсальные моноиды Хопфа и универсальные (ко)действующие биалгебры и алгебры Хопфа Свидлера–Манина–Тамбары в единую теорию, что, в частности, позволяет установить определённую двойственность между ними, а также о проблеме вычисления универсальных алгебр Хопфа, свойствах отношения эквивалентности и его приложениях к теории полиномиальных H-тождеств.

И. Б. Горшков. Аксиальные алгебры йорданова типа

Аксиальные алгебры — это класс неассоциативных коммутативных алгебр, свойства которых определяются в терминах закона слияния. Когда этот закон градуирован, в группе автоморфизмов такой алгебры можно выделить конечную подгруппу, порожденную инволюциями. Это обеспечивает естественную связь теории аксиальных алгебр с теорией конечных, в том числе конечных простых, групп. Примеры аксиальных алгебр включают большинство йордановых алгебр и алгебру Грайса. В этом докладе мы введем понятие аксиальной алгебры и сконцентрируемся на аксиальных алгебрах йорданова типа.

В. Ю. Губарев. Алгебры Роты–Бакстера и двойные алгебры Ли

В 2008 году М. Ван ден Берг в качестве некоммутативного аналога алгебры Пуассона ввёл понятие двойной алгебры Пуассона. По определению двойная алгебра Пуассона снабжена ассоциативным умножением и двойной скобкой Ли, которые связаны аналогом тождества Лейбница. Векторное пространство с заданной на нём двойной скобкой Ли называется двойной алгеброй Ли.

Известен факт (см., например, работу М. Гончарова и П. Колесникова, 2018), что двойные скобки Ли на конечномерном пространстве V находятся во взаимно однозначном соответствии с кососимметричными операторами Роты–Бакстера веса 0 на алгебре $\mathrm{End}(V)$. Данное соответствие продолжено на бесконечномерный случай. Таким образом, получен первый пример простой двойной алгебры Ли.

В совместной работе с М. Е. Гончаровым введено понятие двойной алгебры Ли веса λ, которое при $\lambda = 0$ совпадает с уже известным понятием двойной алгебры Ли. Показано взаимно однозначное соответствие между двойными скобками Ли ненулевого веса λ на пространстве V и λ-кососимметричными операторами Роты–Бакстера веса λ на алгебре $\mathrm{End}(V)$. Установлено, что, как и в случае нулевого веса, простых конечномерных двойных алгебр Ли не существует.

Доказано, что каждая двойная скобка Ли веса λ, заданная на векторном пространстве V, единственным образом продолжается до модифицированной двойной скобки Пуассона на свободной ассоциативной алгебре $\mathrm{As}(V)$. Этот результат, в частности, подтверждает гипотезу С. Артамонова (2017).

Б. Е. Дураков. О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса

Группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Группа G называется *группой Фробениуса* с дополнением H и ядром F, если F и H — собственные подгруппы группы G и $G = F \leftthreetimes H$, (G, H) — пара Фробениуса, т. е. $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$, и $G \setminus F^{\#} = \bigcup H^g$.

В докладе приводятся достаточные условия, при которых бесконечная периодическая группа G, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса. В наших исследованиях среди таких условий важную роль занимает наличие в группе конечных и обобщённо конечных элементов. Элемент a называется *конечным* в группе G, если все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ $(g \in G)$ конечны; элементы a и b группы G называются *обобщённо конечными*, если все подгруппы вида $\langle a, b^g \rangle$ $(g \in G)$ конечны.

С. А. Жилина. Свойства корней многочленов над алгебрами Кэли–Диксона

Алгебрами Кэли–Диксона над произвольным полем F называется семейство 2^n-мерных алгебр, естественным образом обобщающих алгебры комплексных чисел, кватернионов и октонионов. Алгебры Кэли–Диксона, вообще говоря, некоммутативны и неассоциативны, а при $n \geqslant 4$ перестают быть даже альтернативными. Наиболее изученными среди них являются вещественные алгебры главной последовательности, для которых F — поле вещественных чисел, а все параметры процедуры Кэли–Диксона подразумеваются равными -1.

Для каждого многочлена $f(x)$ над алгеброй Кэли–Диксона определён некоторый многочлен $C_f(x)$ над полем F, называемый сопровождающим. Целью данной работы является изучение связи между корнями $f(x)$, $f'(x)$ и $C_f(x)$ для произвольного многочлена $f(x)$ над алгеброй Кэли–Диксона. В докладе будут изложены следующие результаты:

1. В работе Чапмана было показано, что при $n \leqslant 3$ корни любого многочлена $f(x)$ являются также корнями $C_f(x)$. Установлено, что при $n \geqslant 4$ это утверждение перестаёт быть верным в общем случае, однако продолжает выполняться для сферических корней многочлена $f(x)$.

2. Классическая теорема Гаусса–Лукаса утверждает, что для любого комплексного многочлена $f(x)$ степени не меньше 1 корни $f'(x)$ содержатся в выпуклой оболочке корней $f(x)$. Гилони и Перотти обобщили эту теорему на случай алгебры кватернионов, показав, что в этом случае корни $f'(x)$ содержатся в так называемой улитке Гаусса–Лукаса $\mathrm{sn}(f)$. Показано, что такая формулировка теоремы Гаусса–Лукаса остаётся верной и для произвольных вещественных алгебр главной последовательности.

Доклад основан на совместной статье с Соломоном Вишкауцаном, Александром Эмилевичем Гутерманом и Адамом Чапманом.

К. А. Ильенко. О почти простых группах с графом Грюнберга–Кегеля как у неразрешимых групп Фробениуса

Граф Грюнберга–Кегеля (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G — это обыкновенный граф, вершинами которого являются все простые делители порядка G, и вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G найдется элемент порядка pq. По *теореме Грюнберга — Кегеля*, если G – группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, то выполняется одно из следующих утверждений: G – группа Фробениуса, G – 2-фробениусова группа, G – расширение нильпотентной группы с помощью почти простой группы.

Группа G называется *распознаваемой* по графу Грюнберга–Кегеля, если она определяется своим графом Грюнберга–Кегеля с точностью до изоморфизма, *почти распознаваемой*, если существует лишь конечное число попарно неизоморфных групп, графы Грюнберга–Кегеля которых равны $\Gamma(G)$, и *нераспознаваемой* по графу Грюнберга–Кегеля иначе. Недавно П. Камероном и Н. В. Масловой было показано, что если группа почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля, то она почти проста. В виду этого результата и теоремы Грюнберга–Кегеля представляет интерес вопрос совпадения графов Грюнберга–Кегеля почти простой группы G и группы H, которая является группой Фробениуса или 2-фробениусовой группой. Решение этого вопроса было получено М. Р. Зиновьевой и В. Д. Мазуровым (2012 г.) для случая, когда G проста, а в случае, когда H разрешима, соответствующие результаты следуют из совокупности реузльтатов работ М. Р. Зиновьевой и А. С. Кондратьева (2015 г.), И. Б. Горшкова и Н. В. Масловой (2018 г.). В этом докладе мы обсуждаем решение вопроса для оставшегося случая, когда группа G почти проста, но не проста, а группа H является неразрешимой группой Фробениуса. Доклад основан на результатах совместной с Н. В. Масловой работы.

А. В. Кислицин. Условия конечной базируемости тождеств мультипликативных векторных пространств и совпадения *T*- и *L*-идеалов

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F, E — подпространство алгебры A, порождающее A как алгебру. Алгебра A в этом случае называется *обертывающей алгеброй* пространства E, а пространство E называется *мультипликативным векторным пространством* или *L-пространством.* Свободную ассоциативную алгебру от множества свободных образующих X будем обозначать через $F\langle X\rangle$.

Под *тождеством пары* (A, E) понимается такой многочлен из $F\langle X\rangle$, который равен нулю в алгебре A при подстановке вместо переменных элементов пространства E. В этом случае также будем говорить о *тождестве векторного пространства E*.

Через $T(G)$ обозначим T-идеал, порожденный множеством $G \in F\langle X\rangle$, а через $L(G)$ обозначим идеал алгебры $F\langle X\rangle$, замкнутый относительно линейных замен переменных и назовем его *L-идеалом, порожденным множеством G*.

Скажем, что *тождество g пространства E следует из тождеств $f_1, f_2, \dots$ этого пространства*, если $g \in L(f_1, f_2, \dots)$. Множество тождеств L-пространства E, из которых следуют все тождества этого пространства, назовем *базисом тождеств E*. В случае, если базис L-пространства E конечен, скажем, что E *имеет конечный базис тождеств* или *конечно базируемо*.

Ранее автором исследован вопрос о наличии условий конечной базируемости тождеств произвольного L-пространства. Доказано, что всякое мультипликативное векторное пространство E над бесконечным полем, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]z = 0$, либо тождеству $x[y, z] = 0$, имеет конечный базис тождеств. При этом, если G — базис тождеств E, то $T(G) = L(G)$.

В настоящей работе доказано, что всякое мультипликативное векторное пространство E над полем нулевой характеристики, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]zt = 0$, либо тождеству $xy[z, t] = 0$, имеет конечный базис тождеств. При этом существует L-пространство с базисом тождеств G, содержащим один из многочленов $[x, y]zt$, либо $xy[z, t]$, для которого $T(G) \neq L(G)$.

Р. А. Козлов. Универсальные ассоциативные обёртывающие с ограничением на локальность 3 для квадратичных конформных алгебр, построенных по специальным алгебрам Гельфанда–Дорфман

Алгебры Новикова возникли как помощник в построении некоторых гамильтоновых операторов в вариационном исчислении. Формально, это алгебры с одной операцией — умножением Новикова — которая является левосимметрической и правокоммутативной. Алгебра Гельфанда–Дорфман это векторное пространство с двумя билинейными операциями $[\cdot,\cdot]$ и $(\cdot \circ \cdot)$, относительно которых мы получаем алгебры Ли и Новикова соответственно, а также удовлетворяющими дополнительному тождеству согласования. Если алгебра Гельфанда–Дорфман естественным образом вкладывается в алгебру Пуассона с дифференцированием, то она называется *специальной.*

Конформная алгебра — это модуль C над алгеброй полиномов $H = \Bbbk[\partial]$, снабжённый операцией умножения $C \otimes C \to C[\lambda]$ (т.е. результат умножения – это полином от формальной переменной λ со значениями в C) и набором аксиом. Подобно “обычным” алгебрам, конформные алгебры разбиваются на многообразия (ассоциативные, Ли и т. д.). Например, конформные алгебры Ли оказываются очень полезны как инструмент по изучению структуры и представлений вертексных алгебр.

Алгебры Гельфанда–Дорфман находятся во взаимно-однозначном соответствии с квадратичными конформными алгебрами Ли, весьма широким классом, содержащим в себе большинство классических примеров: конформная алгебра Гейзенберга, Вирасоро, Навье–Шварца и т.д.

Для обычных алгебр Ли хорошо известна и очень полезна конструкция универсальной ассоциативной обёртывающей. Способ превращения ассоциативной алгебры в алгебру Ли работает и в конформном случае. Однако, в отличие от классического результата, не всякая конформная алгебра Ли инъективно вкладывается в ассоциативную. Это обусловлено "многозначностью" умножения, а именно, требованием локальности. Тем не менее, если квадратичная конформная алгебра Ли построена по специальной алгебре Гельфанда–Дорфман, то удаётся привести явную конструкцию для построения универсальной ассоциативной конформной обёртывающей алгебры с локальностью не выше 3.

А. В. Кравчук. Спектр транспозиционного графа

Транспозиционный граф T_n определяется как граф Кэли на симметрической группе Sym_n относительно порождающего множества транспозиций. Известно, что все собственные значения этого графа являются целыми числами. Кроме этого, доказано, что наибольшее собственное значение $\frac{n(n-1)}{2}$ имеет кратность 1, второе собственное значение $\frac{n(n-3)}{2}$ имеет кратность $(n-1)^2$, и для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, значение $\frac{n(n-2k+1)}{2}$ является собственным значением с кратностью не менее $\frac{n!}{n(n-k)!(k-i)!}$. Поскольку транспозиционный граф является двудольным, то для любого его собственного значения λ верно, что $-\lambda$ также является собственным значением с той же кратностью, что и λ. Таким образом, имеется некоторое представление о том, как устроен спектр $Spec(T_n)$ транспозиционного графа T_n, где под спектром понимается множество всех различных собственных значений графа вместе с их кратностями. Однако точное описание спектра для графа T_n неизвестно. В этом докладе будут рассказаны результаты в изучении спектра графа T_n, которых уже удалось добиться, а так же о сложностях, которые возникают при попытке точно описать спектр данного графа.

О. В. Куликова. О некоторых факторгруппах гиперболических групп

Доклад посвящён обобщению некоторых результатов, изложенных в книге А. Ю. Ольшанского *Геометрия определяющих соотношений в группах*, на случай нециклических гиперболических групп без кручения.

М. В. Майсурадзе. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр над конечными полями

Свободные неассоциативные алгебры относятся к шраерову многообразию алгебр. Что означает, что любая подалгебра таких алгебр является свободной. Примитивные элементы — элементы, входящие в множество свободных образующих алгебры.

Используя технику свободного дифференциального исчисления и критерий примитивности, сформулированный в терминах обратимости матриц (над универсальной обёртывающей алгеброй) частных производных, получилось найти новый подход к исследованию. В частности, для элементов длины 2 с произвольным числом образующих найдена взаимосвязь между рангами матриц, составленных из коэффициентов при неассоциативных мономах и примитивностью элемента.

О. В. Маркова. Алгебры длины один

Доклад основан на совместном исследовании с К. Мартинес (Университет Овьедо, Испания) и Р. Л. Родригесом (Университет Сан-Паулу, Бразилия).

Длиной конечной системы образующих конечномерной (не обязательно ассоциативной) алгебры над полем называется наименьшее натуральное число k такое, что произведения длины, не превышающей k, порождают эту алгебру (как векторное пространство). Максимальная длина систем образующих алгебры называется длиной алгебры. Вычисление длины является достаточно трудной задачей, например, длина полной матричной алгебры неизвестна (проблема Паза 1984 г.). Изучение алгебр, длина которых близка к минимальной, представляет интерес в контексте вычислительных процедур. В докладе будет дано описание алгебр длины один над произвольными полями в терминах базиса с известной таблицей умножения.

М. А. Михеенко. О разрешимости уравнений над группами: конечные и локально индикабельные группы

Уравнение $w(x_1, \dots x_n) = 1$ называется разрешимым над группой G, если G вложима в какую-то группу, в которой есть решение данного уравнения.

Теорема Ницше–Тома утверждает, что над конечной группой разрешимо любое уравнение с нетривиальным содержанием. Теорема Бродского–Хауи–Шорта говорит, что если группа локально индикабельна, то над ней класс разрешимых уравнений ещё шире.

Наш (с А. А. Клячко) результат обобщает эти две теоремы.

В. В. Паньшин. О распознавании конечных групп по множеству размеров классов сопряженности.

Для конечной группы G обозначим через $N(G)$ множество размеров её классов сопряженности, а через G^n — ее декартову n-ю степень. Недавно был сформулирован следующий вопрос ("Коуровская тетрадь", вопрос 20.29): если S — неабелева простая группа, верно ли, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой конечной группы G с тривиальным центром из равенства $N(G) = N(S^n)$ следует изоморфизм $G \simeq S^n$? Для $n = 1$ ответ на этот вопрос утвердителен для всех неабелевых простых групп S (это известная гипотеза Дж. Томпсона 1987 года, доказанная полностью в 2019 году). В докладе будет представлен обзор результатов для $n > 1$, в частности, будут рассмотрены случаи: $n = 2$ и $S \in \{A_5, A_6\}$; $n = 3$ и $S = A_5$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

О. В. Постнова. Тензорные степени векторного представления $U_q(sl_2)$ в корнях из единицы

Будут рассмотрены представления квантованной универсальной обертывающей алгебры sl_2 с разделенными степенями и малой квантовой группы в корнях из единицы. Мы получим явные формулы для кратностей косых модулей в тензорных степенях двумерных представлений большой и малой квантовых групп. Будет рассмотрено ограничение представлений большой квантовой группы на малую квантовую группу, и построение модели решеточных путей.

Е. В. Соколов. Об аппроксимируемости фундаментальных групп некоторых графов групп

Группа X называется аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$, если для каждого ее неединичного элемента x найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, переводящий x в элемент, отличный от 1. Наибольшую известность получило свойство финитной аппроксимируемости (т. е. аппроксимируемости классом всех конечных групп), поскольку для конечно определенной финитно аппроксимируемой группы разрешима проблема тождества. Наряду с финитной изучалась также аппроксимируемость конечными p-группами (где p — простое число), разрешимыми, нильпотентными, свободными и некоторыми другими классами групп. В настоящем докладе свойство аппроксимируемости рассматривается применительно к различным свободным конструкциям групп (обобщенным свободным произведениям, HNN-расширениям и т. д.), каждая из которых представляет собой одновременно и фундаментальную группу некоторого графа групп. Б?льшая часть известных результатов об аппроксимируемости таких конструкций относится к случаю, когда аппроксимирующий класс является корневым, т. е. замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых степеней. В последние годы был выработан подход, позволяющий изучать аппроксимируемость фундаментальных групп графов групп сразу целым (потенциально бесконечным) семейством корневых классов. Это, в частности, позволило весьма существенно продвинуться в изучении аппроксимируемости свободных конструкций групп классом всех разрешимых групп и различными его подклассами. В докладе будет приведено краткое описание указанного подхода, сформулированы основные задачи, возникающие при его применении, и перечислены некоторые случаи, в которых эти задачи удалось решить.

А. М. Старолетов. О группах йорданова типа

Аксиальные алгебры йорданового типа η были введены Ф. Рееном, С. Шпекторовым и Дж. Холлом в 2015 г. Это коммутативные алгебры, порождённые идемпотентами, операторы левого сдвига которых имеют минимальный многочлен, делящий $(x-1)x(x-\eta)$, где $\eta \notin \{0,1\}$. Умножение в таких алгебрах подчиняется правилам, обобщающим правила из пирсовского разложения в йордановых алгебрах, где $\frac{1}{2}$ заменяется на η. Оказалось, что для каждого порождающего идемпотента можно построить автоморфизм алгебры порядка два, который называется инволюцией Миямото. В докладе мы обсудим свойства групп, порожденных инволюциями Миямото аксиальных алгебр йоранова типа.

Р. О. Стасенко. Короткие SL_2-структуры

Известна классическая конструкция Титса–Кантора–Кёхера, позволяющая по простой йордановой алгебре J построить простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, имеющую вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(J).$$

Теорема Титса–Кантора–Кёхера утверждает, что между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли, удовлетворяющими описанной выше формуле, существует взаимно однозначное соответствие.

Конструкцию Титса–Кантора–Кёхера можно интерпретировать как линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое разлагается на неприводимые представления размерностей 1 и 3. Естественным обобщением является следующее понятие. Пусть S — редуктивная алгебраическая группа. S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\Phi : S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовем короткой, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. При этом изотипное разложение представления Φ будет иметь вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\mathbb{C}^2 \otimes J_1\right) \oplus \left(\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2\right).$$

Конструкция Титса–Кантора–Кёхера получается при $J_1 = 0$. Доклад будет посвящён случаю $J_1 \neq 0$.

Аналогично теореме Титса–Кантора–Кехера, будет установлено взаимно однозначное соответствие между простыми алгебрам Ли с короткой SL_2-структурой с $J_1 \neq 0$ и так называемыми простыми симплектическими тройками Ли–Йордана $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$, где J_1 — симплектическое пространство, $\mathfrak{g}_0$ — редуктивная подалгебра Ли в $\mathfrak{sp}(J_1)$, а J_2 — простая йорданова подалгебра симметрических операторов на J_1, причем на J_1 алгебры J_2 и $\mathfrak{g}_0$ не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств. Будет дана полная классификация коротких SL_2-структур на простых алгебрах Ли.

Короткие и очень короткие SL_2-структуры можно аналогичным образом задавать на произвольных $\mathfrak{g}$-модулях, используя соответствующее линейное представление алгебры ли $\mathfrak{g}$. Подобная конструкция имеет интересные приложения к теории представлений йордановых алгебр, о которых также будет рассказано в докладе.

О. Г. Стырт. Графы ортогональности матриц над коммутативными кольцами

Доклад посвящён исследованию графов ортогональности некоммутативных ассоциативных колец на примере кольца матриц. Так, в случае, если основное кольцо является телом, ранее были получены следующие свойства графа ортогональности кольца $(n \times n)$-матриц: при $n = 2$ он несвязен, и все его связные компоненты имеют диаметры не более 2, а при $n \geqslant 3$ он связен и имеет диаметр 4. Эти утверждения доказаны в 2014 г. для поля [1], а в 2017 г. — для произвольного тела [2]; их также легко обобщить на целостные кольца (путём перехода к полю частных).

Основу выступления составляет граф ортогональности кольца $(n \times n)$-матриц над коммутативным нецелостным кольцом. Автором доказано, что при $n > 1$ данный граф связен, его диаметр равен 3 либо 4, а радиус — 2, 3 либо 4; получен критерий каждого из значений диаметра.

[1] Бахадлы Б. Р., Гутерман А. Э., Маркова О. В. Графы, определённые ортогональностью // Зап. научн. семин. ПОМИ 2014. Т. 428. Сс. 49–80.

[2] Гутерман А. Э., Маркова О. В. Графы ортогональности матриц над телами // Зап. научн. семин. ПОМИ 2017. Т. 463. Сс. 81–93.

А. Л. Таламбуца. О свободных полугруппах целочисленных матриц и связанных с ними вопросах

Доклад посвящён алгоритмической задаче проверки, является ли данный набор квадратных целочисленных матриц базисом свободной полугруппы. Доказано, что эта задача алгоритмически неразрешима уже для матриц размера 3×3, а для матриц 2×2 этот вопрос открыт. Эта задача также тесно связана с вопросом Эрдёша–Грэхэма о плотностях орбит целочисленных линейных функций одной переменной, который возник из исследования существования латинских квадратов чётных размеров, и которая также остаётся нерешённой уже более 40 лет. Будет рассказано о результатах докладчика в этих двух направлениях.

Д. Т. Тапкин. Инволюции и автоморфизмы в алгебре формальных матриц

Исследование автоморфизмов и инволюций матричных алгебр относится к классическим задачам теории колец. Здесь можно выделить два основных направления. С одной стороны, можно изучать непосредственно общий вид автоморфизмов и инволюций. А с другой стороны, можно исследовать эти отображения в целом и описывать группу автоморфизмов или, если нам достаточно изучить поведение отображений с точностью до некоторого отношения эквивалентности, группу внешних автоморфизмов и классификацию инволюций с точностью до эквивалентности. Здесь мы говорим что инволюции первого рода $*$ и $\circ$ алгебры A эквивалентны, если $(A, *)$ и $(A, \circ)$ изоморфны как алгебры с инволюциями.

В докладе будет приведен обзор имеющихся результатов об автоморфизмах и инволюциях, а также и некоторые новые результаты.

Н. А. Шишмаров. Симметрии Гекке, ассоциированные с регулярными по Артину–Шельтеру алгебрами типов E и H

Симметрии Гекке представляют собой специальный класс решений уравнения Янга–Бакстера. С каждой симметрией Гекке R на векторном пространстве V можно связать алгебры $\mathbb{S}(V, R)$ и $\Lambda(V, R)$, которые можно рассматривать как обобщение симметрической и кососимметрической алгебр для пространства V. В серии работ разных авторов было показано, что при некоторых ограничениях алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ обладает определенными гомологическими свойствами, что относит ее к классу регулярных алгебр, изучавшихся М. Артином и В. Шельтером. В докладе будет рассказано о симметриях Гекке R, для которых соотвествующая алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ является регулярной типа E. Также будет показано, что не существует симметрии Гекке R такой, что алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ имеет тип H.