Лекция 1. Главные исторические вехи в теории алгебраических поверхностей. Основные инварианты алгебраических поверхностей. Краткое введение в теорию минимальных моделей.

Лекция 2. Основные инварианты алгебраических поверхностей (продолжение). Плюриканонические отображения. Каноническая или кодаирова размерность и объём. Задача бирациональной классификации. Проблема рациональности. Примеры алгебраических поверхностей.

Лекция 3. Примеры алгебраических поверхностей (продолжение). Вычет Пуанкаре. Эйлерова характеристика расслоения на кривые.

Лекция 4. Примеры алгебраических поверхностей (продолжение). Квадрат канонического дивизора на линейчатой поверхности. Формула Кодаиры.

Лекция 5. Примеры алгебраических поверхностей (окончание). Равноканоничные разрешения особенностей. Дивизоры на поверхности. Линейная эквивалентность дивизоров. Пучки ассоциированные с дивизорами.

Лекция 6. Обратный и прямой образы дивизора. Конечные, квазиконечные и конечные в общей точке отображения. Линейные системы. Отображения в проективное пространство. Алгебраическая и рациональная эквивалентность дивизоров.

Лекция 7. Экспоненциальная последовательность. Топологическая эквивалентность обратимых пучков. Алгебраические коциклы и теорема Лефшеца. Многообразия Пикара и Альбанезе. Пересечение дивизоров на поверхности. Явная формула пересечения дивизоров на поверхности.

Лекция 8. Теорема Безу. Основные свойства пересечения дивизоров на поверхности.

Лекция 9. Формула Римана-Роха для кривых. Монотонность эйлеровой характеристики при вырождении слоёв. Формула Римана-Роха для поверхностей. Теоремы об обращении в нуль Кодаиры и Рамануджама. Теорема Ходжа об индексе. Конус Клеймана-Мори.

Лекция 10. Примеры конусов Клеймана-Мори. Критерий обильности Накаи-Мойшезона. Критерий обильности Клеймана. Разрешение особенностей кривой на поверхности. Разрешение точек неопределённости рациональной функции на гладкой поверхности. Разложение бирационального изоморфизма гладких поверхностей в произведение σ-процессов.

Задачи по курсу “Бирациональная геометрия алгебраических поверхностей”

В.В. Шокуров

9-е февраля 2023 г. Москва

1. Для неособых проективных алгебраических поверхностей проверить бирациональную инвариантность фундаментальной группы, $P_n = l(nK) = h^0(nK), h^{i,0}, b_j$[1] при $n \geq 0; i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 3, 4$.

2. Является ли инвариант P_n бирациональным при $n < 0$?

3. Построить примеры поверхностей, показывающие бирациональную неинвариатность $K^2, h^{1,1}, b_2, e(X)$.

4. Какова максимальная кратность пересечения двух неособых коник в некоторой точке?

5. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – плоская неприводимая кривая степени $n \geq 2$. Какова максимальная возможная сумма кратностей:

(1) двух точек кривой C;

(2) пяти точек кривой C?

(3) Найдите примеры, на которых максимум достигается.

6. Для отображения $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2, f(x, y) = (x, xy)$, найдите $f(\mathbb{A}^2)$.

(1) Будет ли это множество открыто в $\mathbb{A}^2$?

(2) Будет ли оно плотно в $\mathbb{A}^2$?

(3) Будет ли замкнуто в $\mathbb{A}^2$?

(4) Будет ли отображение f бирациональным автоморфизмом?

7. Докажите, что отображение $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2, f(x, y) = (ax, by + p(x))$, где $a, b \in k$ - ненулевые элементы и $p(x) \in k[x]$ – произвольный многочлен от x, является автоморфизмом.

[1] Также верна бирациональная инвариантность $h^{0,i}$ над совершенным полем любой характеристики: Andre Chatzistamatiou and Kay Rülling, *Higher direct images of the structure sheaf in positive characteristic*, ALGEBRA AND NUMBER THEORY 5:6 (2011), 693–775.

(1) Докажите, что такие автоморфизмы образуют группу.

(2) Когда такой автоморфизм продолжается до автоморфизма $\mathbb{P}^2$?

8. Покажите, что поверхность $\mathbb{A}^2 \setminus (0,0)$ не аффинна и не проективна.

9. То же, что и в задаче 8 для $\mathbb{P}^2 \setminus (1:0:0)$. То же для $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$.

10. Пусть $f\colon X \to \mathbb{P}^2$ – стереографическая проекция невырожденной квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$ из её любой точки.

(1) Покажите, что отображение f – бирациональный изоморфизм.

(2) В каких точках оно не регулярно?

(3) В каких не регулярно f^{-1}?

(4) Найдите изоморфные относительно f открытые множества $U \subset Q, V \subset \mathbb{P}^2$

11. Определите бирациональный изоморфизм $f\colon Q \to \mathbb{P}^2$ вырожденной неприводимой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$ и $\mathbb{P}^2$ аналогично задаче 10 и отведьте на вопросы (2-4) этой задачи.

12. Докажите, что *квадратичная инволюция* $f\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, является бирациональным автоморфизмом плоскости $\mathbb{P}^2$.

(1) В каких точках f и в каких f^{-1} не регулярны?

(2) Автоморфизм каких отрытых множеств определяет f?

13. Докажите аффинность поверхности $\mathbb{P}^2 \setminus C$, где C – коника.

14. Рассмотрим отображения проекции $p_1, p_2\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, p_1(x,y) = x, p_2(x,y) = y$. Докажите, что $p_1(X) = p_2(X) = \mathbb{P}^1$ для замкнутого подмножества $X \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в том и только том случае, когда X не имеет ни один из следующих типов:

а) $X = \emptyset$ пусто,

б) точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,

в) произведения $x_0 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 \times y_0$,

где $x_0, y_0 \in \mathbb{P}^1$ – точки из $\mathbb{P}^1$.

15. Покажите, что всякая регулярная (рацинальная) функция на плоскости $\mathbb{P}^2$ постоянна.

16. Пусть $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – форма 4-й степени. Докажите, что существует такой многочлен Φ от коэффициентов формы F, что условие $\Phi = 0$ равносильно существованию прямой в алгебраическом множестве пространства $\mathbb{P}^3$, заданном уравнением $F = 0$.

17. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ – невырожденная квадрика и $\Lambda_Q \subset \Pi$ – множество точек на плюкеровой квадрике $\Pi \subset \mathbb{P}^5$, отвечающих прямым на Q. Проверьте, что Λ_Q состоит из двух непересекающихся прямых.

18. Докажите, что неприводимая особая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^3$ является конусом над коникой.

19. Докажите, что если поверхность 3-го порядка в $\mathbb{P}^3$ имеет две особые точки, то прямая, их соединяющая, лежит на поверхности.

20. Докажите, что если плоская кривая 3-го порядка имеет три особые точки, то она распадается на три прямые.

21. Определите особые точки поверхности Штейнера в $\mathbb{P}^3$:

$$x_0^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^2x_0^2 - x_0x_1x_2x_3 = 0.$$

22. При каких значениях a поверхность $x_0^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4-ax_0x_1x_2x_3 = 0$ имеет особые точки и каковы эти точки?

23. Докажите, что если две кривые C_1, C_2 на поверхности пересекаются трансверсально в точке x и u_1, u_2 – их локальные уравнения в окрестности этой точки, то u_1, u_2 образуют систему локальных параметров в x.

24. Конус $X \subset \mathbb{A}^3$ задан уравнением $x^2 + y^2 - z^2$. Докажите, что его образующая L, заданная уравнениями $x = 0, y = z$, не имеет локального уравнения ни в какой окрестности точки $(0, 0, 0)$.

25. Рациональное отображение $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ задано формулой $\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$. Пусть $x = (1 : 0 : 0)$ и $C \subset \mathbb{P}^2$ – кривая, не особая в x. Отображение φ, ограниченное на C, регулярно в x и поэтому переводит x некоторую точку плоскости $\mathbb{P}^2$, которую обозначим через $\varphi_C(x)$. Докажите, что $\varphi_{C_1}(x) = \varphi_{C_2}(x)$ в том и только том случае, когда кривые C_1, C_2 касаются в точке x, т.е. $T_{x,C_1} = T_{x,C_2}$, где $T_{x,C}$ обозначает касательную прямую к C в x.

26. Пусть ξ – неособая точка поверхности X; $C_1, C_2 \subset X$ – две кривые, проходящие через ξ и неособые в ξ; $\sigma\colon Y \to X$ – раздутие точки ξ; $C_i' = \overline{\sigma^{-1}(C_i \setminus \xi)}$ – собственный прообраз кривой C_i; $Z = \sigma^{-1}(\xi)$. Докажите, что $C_1' \cap Z = C_2' \cap Z$ в том и только том случае, когда кривые C_1, C_2 касаются в ξ.

27. Пусть ξ – неособая точка поверхности X; $C \subset X$ – кривая; f – локальное уравнение кривой C в окрестности точки ξ. Пусть

$$f \equiv \prod_{i=1}^{r}(\alpha_i u + \beta_i v) \mod (\mathfrak{m}_\xi^{r+1}),$$

где $\mathfrak{m}_\xi$ – максимальный идеал точки ξ, u, v – локальные параметры в ξ, а формы $\alpha_i u + \beta_i v$ не пропорциональны. Пусть $\sigma\colon Y \to X$ – раздутие точки ξ; $C' = \overline{\sigma^{-1}(C \setminus \xi)}$ – собственный прообраз кривой C; $Z = \sigma^{-1}(\xi)$. Докажите, что кривые C', Z пересекаются трансверсально в r точках.

28. Рассмотрите рациональное отображение $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$, заданное формулой

$$\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Докажите, что φ – бирациональный изоморфизм, а обратное отображение $\overline{\varphi(\mathbb{P}^2)} \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ совпадает с σ-процессом.

29. Аналогично задаче 28 исследуйте отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^6$, определённое всеми одночленами 3-й степени кроме x_0^3, x_1^3 и x_2^3.

30. Пусть V – конус 2-го порядка, заданный уравнением $xy = z^2$ в $\mathbb{A}^3$, $X' \to \mathbb{A}^3$ – σ-процесс с центром в начале координат 0, V' – замыкание поверхности $\sigma^{-1}(V \setminus 0)$ в X'. Докажите, что V' – гладкая поверхность и прообраз начала координат $\sigma^{-1}(0)$ является (-2)-кривой на V'.

31. Пусть X – конус $z^2 = xy$ в $\mathbb{A}^3$. Докажите, что нормализация X в поле $k(X)(\sqrt{x})$ совпадает с аффинной плоскостью, а отображение нормализации имеет вид $x = u^2, y = v^2, z = xy$.

32. Будет ли нормальной поверхность Штейнера (см. задачу 21 выше).

33. Докажите, что для поверхностей $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$ над полем характеристики 2 и $y^2 = x^3 + a(t)$ над полем характеристики 3, где $a(t), b(t) \in k[t]$, особые точки слоёв образуют гладкую кривую, отображающуюся на прямую $\mathbb{A}^1$ с координатой t со степенью $p = 2$ и 3 соответственно.

34. Определите дивизор функции $\frac{x}{y}$ на поверхности 2-го порядка $xy - zt = 0$ в $\mathbb{P}^3$.

35. Пусть X – гладкая аффинная поверхность. Докажите, что $\mathrm{Cl}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда в кольце $k[X]$ разложение на простые множители однозначно.

36. Пусть X – квадратичный конус. Используя отображение $\varphi\colon \mathbb{A}^2 \to X$, описанное в задаче 31, определите образ $\varphi^*(\mathrm{Div}(X))$ в $\mathrm{Div}\,\mathbb{A}^2$. Докажите, что $D = (F) \in \mathrm{Div}\,\mathbb{A}^2$ тогда и только тогда, когда принадлежит $\varphi^*(\mathrm{Div}(X))$, когда $F(-u, -v) = \pm F(u, v)$, т.е. F является или чётной или нечётной функцией. Докажите, что главные дивизоры на X соответствуют чётным функциям. Докажите, что $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

37. В каких точках не регулярно бирациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, где X – поверхность 2-го порядка в $\mathbb{P}^3$, а φ – проектирование из точки $x \in X$. То же для φ^{-1}.

38. Докажите, что любой автоморфизм $\mathbb{P}^2$ является проективным преобразованием.

39. Пусть $\sigma\colon X \to Y$ – σ-процесс с центром в точке y неособой поверхности Y. Докажите, что $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cl}(Y) \oplus \mathbb{Z}$.

40. Прямая l называется двойной касательной плоской кривой X, если она касается X по крайней мере в двух точках. Докажите, что множество кривых 4-ой степени, имеющих заданную прямую (например, $y = 0$) двойной касательной, имеет коразмерность два в пространстве всех кривых. Докажите, что любая неприводимая кривая 4-ой степени имеет двойную касательную.

41. Докажите, что число особых точек неприводимой плоской кривой степени n не превосходит $(n-1)(n-2)/2$.

42. Докажите, что $\Omega^r[\mathbb{P}^2] = 0$ при $r > 0$.

43. Пусть C, D – две кривые в $\mathbb{A}^2$, заданные соответственно уравнениями $F = 0, G = 0$, а x – неособая точка на каждой из них. Пусть f – ограничение многочлена F на кривую D, $\mathrm{mult}_x f$ – порядок нуля этой функции в точке x на кривой D. Докажите, что это число не изменится, если поменять местами F, D и G, C соответственно.

44. Найти степень поверхности $v_m(\mathbb{P}^2)$, где v_m – отображение Веронезе.

45. Пусть X – гладкая проективная поверхность в пространстве $\mathbb{P}^n$, L – проективное подпространство в $\mathbb{P}^n$ размерности $n-2$. Предположим, что L и X пересекаются по конечному числу точек, причём в l из этих точек касательная плоскость к X пересекает L по прямой. Докажите, что число точек пересечения X и L не больше $\deg X - l$.

46. Предположим, что на гладкой поверхности степени m в $\mathbb{P}^3$ дивизор формы степени l является гладкой кривой. Докажите, что она неприводима, и найдите её род.

47. Предположим, что гладкая плоская кривая C степени r лежит на гладкой поверхности степени m в $\mathbb{P}^3$. Определите C^2 на указанной поверхности.

48. Докажите, что если на гладкой поверхности 4-ой степени в $\mathbb{P}^3$ лежит гладкая кривая кривая C с $C^2 < 0$, то $C^2 = -2$.

49. Докажите, что индексы самопересечения гладких кривых на гладкой поверхности чётной степени в $\mathbb{P}^3$ всегда чётны.

50. Пусть X –гладкая кривая, D – диагональ в $X \times X$. Докажите, что $D^2 = -\deg K_X$.

51. Обобщите результат задачи 50 на случай, когда $D \subset C_1 \times C_2$ – график отображения $C_1 \to C_2$ степени d неособых кривых.

52. Для дивизора $D \subset C_1 \times C_2$ докажите неравенство

$$D^2 \leq (C_1 \times c_2, D)(D, c_1 \times C_2),\ c_1 \in C_1, c_2 \in C_2.$$

53. В условиях задач 51, 52 пусть $X = C_1 = C_2$ – кривая рода g, $X \to X$ – отображение степени d и Γ – его график. Докажите, что $|(\Gamma, D) - d - 1| \leq 2g\sqrt{d}$.

54. Для любого целого числа l постройте гладкую проективную поверхность X и на ней неприводимую кривую C такую, что $C^2 = l$.

55. Пусть X – гладкая поверхность, C_1, C_2– две кривые на ней, x– неособая точка на C_1 и C_2. Пусть $\sigma\colon Y \to X$ – σ-процесс в точке x, C_1' и C_2' – собственные прообразы C_1 и C_2. Покажите, что C_1' и C_2' пересекаются в точках $y \in \sigma^{-1}x$ тогда и только тогда, когда C_1 и C_2 касаются в точке x. При этом y – единственная точка пересечения $\sigma^{-1}x \cap C_1' \cap C_2'$, точка y неособа на C_1' и C_2', и порядок касания C_1' и C_2' в y на единицу меньше порядка касания C_1 и C_2 в x.

56. Пусть $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ – отображение, заданное формулой

$$f(x_0 : x_1 : X_2) = (P(X_0, x_1, x_2) : Q(x_0, x_1, x_2)),$$

где P, Q – формы степени n. Сколько надо сделать σ-процессов, чтобы получить раздутие $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^2$, для которого произведение $f \circ \varphi$ регулярно?

57. Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая поверхность 2-го порядка и $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция поверхности X из точки $x \in X$. Докажите, что отображение f – бирациональный изоморфизм и разложите его на произведение σ-процессов.

58. Пусть f – бирациональный автоморфизм $\mathbb{P}^2$, задаваемый в неоднородных координатах формулами $x' = x, y' = y+x^2$. Разложите f в произведение σ-процессов.

59. Пусть $L \subset \mathbb{P}^2$ –прямая, x и y – две её точки, $X \to \mathbb{P}^2$ – произведение σ-процессов в точках x и y, а L' – собственный прообраз L. Докажите, что L' – (-1)-кривая. Какова поверхность, получающаяся сдутием кривой L'?

60. Докажите, что если кривая степени n проходит через l ($l = 0, 1$ 2) из точек ξ_0, ξ_1 ξ_3, определяющих квадратичное преобразование, не имеет в этих точках особенностей, и $l \leq 1$ при $n = 1$, то её образ при квадратичном преобразовании имеет степень $2n - l$.

61. Докажите, что для плоской неприводимой кривой степени n выполнено неравенство $\sum r_i(r_i-1) \leq (n-1)(n-2)$, где r_i – кратности (особых) точек. Проанализируйте случаи, когда неравенство превращается в равенство.

62. Докажите, что если $c(t) \in k[t], a, b \in k, 4a^3 + 27b^2 \neq 0$, то все слои семейства эллиптических кривых $y^2 = x^3 + ac(t)^2 x + bc(t)^3$, для которых $c(t_0) \neq 0$, изоморфны друг другу. Докажите, что если $c(t) \neq d(t)^2, d(t) \in k[t]$, то семейство не изоморфно прямому произведению ни над каким непустым отрытым множеством $U \subseteq \mathbb{A}^1$. Выведите отсюда, что для эллиптических кривых не существует универсального семейства.

63. Докажите, что вещественная кубическая поверхность, не являющаяся конусом, унирациональна над $\mathbb{R}$.

64. Докажите, что кубическая поверхность $t(z^2 + y^2) = x^3 - xt^2$ в трёхмерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ состоит из двух компонент связности. Выведите из этого, что она не рациональна над $\mathbb{R}$.

65. Пусть $X = (\mathbb{C}^2 \setminus o)/G$ – двумерное многообразие Хопфа [Ш, пример 2, стр. 465-466]. Докажите, что отображение $\mathbb{C}^2 \setminus o \to \mathbb{P}^1, (z_1, z_2) \mapsto (z_1 : z_2)$ определяет голоморфное отображение $X \to \mathbb{P}^1$, слои которого являются одномерными комплексными торами.

66. В обозначениях задачи 65 докажите, что на X нет других связных одномерных комплексных аналитических подпространств, кроме слоёв отображения $X \to \mathbb{P}^1$.

67. Пусть X – комплексное пространство $\mathbb{C}^2$, g – автоморфизм $g(z_1, z_2) = (-z_1, -z_2), G = \{1, g\}$ – группа 2-го порядка. Докажите, что факторпространство X/G является комплексным аналитическим пространством и изоморфно конусу с уравнением $xy = z^2$ в $\mathbb{A}^3$.

68. Пусть $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ – двумерный комплексный тор,

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(|\lambda_1|^2 dz_1 \wedge \overline{dz_1} + \lambda_1\overline{\lambda_2} dz_1 \wedge \overline{dz_2} + \overline{\lambda_1}\lambda_2 \overline{dz_1} \wedge dz_2 + |\lambda_2|^2 dz_1 \wedge \overline{dz_2}),$$

C – комплексная аналитическая кривая на $X, x \in C$. Отождествим касательную плоскость к X в x с $\mathbb{C}^2$ при помощи отображения $\mathbb{C}^2 \to X$; тем самым в неё вводятся координаты. Докажите, что если точка x неособа на C и координаты касательного вектора к C в x равны μ_1, μ_2, а $\lambda_1\overline{\mu_1} + \overline{\lambda_2}\mu_2 \neq 0$, то $\int_C \omega > 0$ (в частности, $\neq$). Выведите отсюда, что $\int_C \omega > 0$, если тор X проективен, а C – класс гиперплоского сечения.

69. Пусть $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ – двумерный комплексный тор, g – автоморфизм $gx = -x, G = \{1, g\}$. Докажите, что факторпространство $Z = X/G$

является комплексным аналитическим пространством, которое имеет 16 особых точек $z_1, \dots, z_{16}$, соответствующих точкам $x \in X$ с $2x = 0$.

70. В обозначениях задачи 69 докажите, что каждая точка $z_i \in Z$ имеет окрестность, изоморфную окрестности особой точки квадратичного конуса.

71. В обозначениях задачи 69 докажите существование компактного комплексного многообразия Y и голоморфного отображения $\varphi\colon Y \to Z$ таких, что на Y имеется 16 непересекающихся комплексных (-2)-кривых $C_1, \dots, C_{16}, \varphi(C_i) = z_i$, а $\varphi\colon Y \setminus \cup C_i \to Z \setminus \{z_i\}$ – изоморфизм.

72. В обозначениях задач 69 и 71 докажите, что дифференциальная форма $dx_1 \wedge dx_2$, где x_1, x_2 – координаты в $\mathbb{C}^2$, определяет голоморфную нигде не равную 0 дифференциальную форму на X. Докажите, что она определяет и голоморфную нигде не равную 0 дифференциальную форму на Y. Выведите отсюда, что канонический дивизор на Y тривиален.

73. В обозначениях задач 69 и 71 докажите, что если на торе X все мероморфные функции постоянны, то это верно и для Y. Докажите, что многообразие Y не изоморфно комплексному тору (например, проверьте, что на Y нет одномерных голоморфных дифференциальных форм). Таким образом, Y – пример неалгебраической поверхности типа K3.

74. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ – гладкая плоская кривая, заданная уравнением $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ степени n, $V \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ – поверхность, заданная уравнением $F(x_0, x_1, x_2) = x_3^n$, а $f\colon V \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ – проектирование с центром в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$. Докажите, что $f\colon V \setminus f^{-1}C \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ – неразветвлённое накрытие и что $V \setminus f^{-1}C$ – универсальная накрывающая для $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$. Выведите отсюда, что $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

75. Найти ошибку в следующем "доказательстве гипотезе о якобиане". Пусть $\varphi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ – регулярное отображение с постоянным ненулевым якобианом над полем k характеристики 0. Тогда $V = \mathbb{A}^2 \setminus \varphi(\mathbb{A}^2)$ – конечное множество точек: если бы кривая $f = 0$ пересекалась с $\varphi(\mathbb{A}^2)$ по конечному числу точек, то многочлен $\varphi^* f$ имел бы лишь конечное число нулей на $\mathbb{A}^2$. Тогда из соображений "общего положения" следует, что множество $\varphi(\mathbb{A}^2) = \mathbb{A}^2 \setminus V$ односвязно. Однако $\varphi\colon \mathbb{A}^2 \to \varphi(\mathbb{A}^2)$ является его неразветлённым накрытием, и так как $\varphi(\mathbb{A}^2)$ односвязно, должно быть изоморфизмом. Докажите, что $\varphi(\mathbb{A}^2)$ не аффинно при $V \neq \emptyset$. Поэтому $V = \emptyset$ и φ – автоморфизм.

76. Докажите, что поверхности $\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m$ над полем $k = \mathbb{C}$ гомеоморфны в том и только том случае, когда $n \equiv m \mod 2$.

77. Задайте каждую поверхность дель Пеццо X степени 6 уравнением в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и найдите все прямые на X.

78. Докажите, что любая поверхность дель Пеццо степени 5 является дивизором бистепени $(1, 2)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.

79. Пусть X – гладкий дивизор бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо. Какова её степень?

80. Докажите, что на поверхности дель Пеццо степени $2 \leq d \leq 9$ любой эффективный дивизор линейно эквивалентен *целочисленной* линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами прямых. Когда это нарушается на поверхности дель Пеццо степени 1?

81. Пусть $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ – различные квадрики. Докажите, что поверхность $Q_1 \cap Q_2$ гладкая (и является поверхностью дель Пеццо степени 4) в том и только том случае, когда пучок $< Q_1, Q_2 >$ имеет ровно 5 вырожденных квадрик.

82. Докажите, что поверхности дель Пеццо фиксированной степени описываются неприводимым семейством. Какова размерность этого семейства?

83. Докажите, что любая поверхность дель Пеццо $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 (неоднозначно) представляется двулистным накрытием $X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Каков дивизор ветвления этого накрытия? Как описать прямые на X с помощью данного накрытия.

84. Найдите число прямых на поверхности дель Пеццо степени 1 *Указание*: можно использовать свойства системы корней системы E_8.

85. Найдите число различных пучков коник на поверхности дель Пеццо степени $d = 1, 2, 3$.

86. Найдите число различных пучков коник на поверхности дель Пеццо степени $d \geq 4$.

87. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1 над полем k характеристики 0. Предположим, что антиканоническая линейная система $|-K_X|$ не содержит каспидальных кривых. Вычислите количество особых дивизоров $D \in |-K_X|$.

88. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени ≤ 2, а $L, L' \subset X$ – прямые. Какие значения может принимать индекс пересечения LL'?

89. Докажите, что поверхность дель Пеццо степени 7 над любым полем k имеет геометрическую точку.

90. Выведите критерий Клеймана из критерия Накаи-Мойшезона в случае поверхностей.

91. Пусть X – такая поверхность, что $-K_X C > 0$ для любой кривой $C \subset X$. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо.

92. Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – поверхность дель Пеццо степени 4. Опишите пучки коник на X с помощью квадратичных уравнений, задающих поверхность X.

93. Найдите группу автоморфизмов кубической поверхности Ферма над полем характеристики 2.

94. Найдите минимальную поверхность X, на которой квадратичная инволюция (см. задачу 12) действует бирегулярно.

95. Разложите квадратичное преобразование

$$(x, y) \mapsto (x, y + x^2)$$

в произведение проективных преобразований и квадратичных инволюций.

96. Опишите отображение Альбанезе для следующих комплексных аналитических поверхностей:

а) двумерный комплексный тор;

б) $\mathbb{P}^2$;

в) кривая рода 2.

97. Пусть X – двумерный комплексный тор, а $C \subset X$ – неприводимая кривая, нормализация которой – кривая рода 1. Докажите, что C неособа.

98. Пусть X – поверхность кодаировой размерности $\kappa(X) = 1$. Докажите, что $|nK_X| \neq \emptyset$ для некоторого $n = 1, 2, 3, 4$ или 6.

99. В условиях задачи 98 докажите, что $\dim |nK_X| \geq 1$ при некотором $n \leq 42$.

100. В условиях задачи 98 найдите наилучшие числа $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $\dim |nK_X| \geq an+b$ для любого целого n. Размерность пустой линейной системы предполагается равной -1.

Темы для докладов по курсу:

1. Формула присоединения.
2. Теорема Римана-Роха.
3. σ-процесс.
4. Поведение инвариантов при σ-процессе.
5. Разрешение особенностей кривой на поверхности.
6. Разрешение точек неопределённости рациональной функции.
7. Разложение бирационального изоморфизма в последовательность σ-процессов.
8. Стандартное квадратичное преобразование.

Вычет рационального дифференциала. Пусть X – многообразие размерности n, P – неособый в общей точке простой дивизор Вейля, а ω – рациональная n-форма на X с полюсом первого порядка вдоль P. Тогда на дивизоре P, рассматриваемом как многообразие, определена рациональная дифференциальная форма $\omega_P = \mathrm{Res}(\omega)$ такая, что в окрестности U общей точки дивизора P

$$\omega_{|U} = f\frac{dx_1}{x_1}\bigwedge_{i=2}^{n} dx_i,$$

и

$$\omega_{P}{}_{|P\cap U} = \mathrm{Res}(\frac{f}{x_1})\bigwedge_{i=2}^{n} dx_i{}_{|P\cap U},$$

где f – рациональная функция на X, регулярная обратимая в общей точке дивизора P, $x_1,\dots,x_n$ – локальные параметры в общей точке дивизора P, $x_2{}_{|P\cap U},\dots,x_n{}_{|P\cap U}$ – локальные параметры в общей точке дивизора P как многообразия, $x_1 = 0$ – уравнение дивизора P в окрестности U и

$$\mathrm{Res}(\frac{f}{x_1}) = f_{|P\cap U}$$

– вычет функции f/x_1 вдоль дивизора P. Вычет ω_P является рациональной $n-1$-формой на многообразии P, не зависит от выбора окрестности U, локальных параметров $x_1,\dots,x_n$, а зависит лишь от от n-формы ω, дивизора P и называется *вычетом Пуанкаре форма* ω на P.

Поскольку рациональная функция однозначно продолжается на многообразие с любого непустого отрытого множества, то функция f и рациональные дифференциалы $\omega_P, dx_2{}_{|P},\dots,dx_n{}_{|P}$ определены на P. При этом обычно на P вместо $f_{|P}, dx_2{}_{|P}\dots,dx_n{}_{|P}$ пишут $f, dx_2,\dots,dx_n$. Тогда вычет Пункаре приобретает вид

$$\omega_P = f\bigwedge_{i=2}^{n} dx_i.$$

В примере 1 [ИШ, стр. 138] многообразие $X = \mathbb{P}^3$ является проективным пространством размерности 3 с дивизором $P = X_d$ – неособой поверхностью с уравнением $F(x_0,x_1,x_2,x_3) = 0$ степени d, отличной при $d = 1$ от плоскости H с уравнением $x_0 = 0$. Рассмотрим рациональную 3-форму

$\omega = \frac{dx \wedge dy \wedge dz}{f}$ на $\mathbb{P}^3$ с дивизором нулей $(\omega)_0 = dH$ и дивизором полюсов $(\omega)_\infty = X_d + 4H$, т.е.

$$(\omega) = (d-4)H - X_d,$$

где

$$f(x,y,z) = F(1,x,y,z) = \frac{F(x_0,x_1,x_2,x_3)}{x_0^d}.$$

В этой ситуации для открытого множества $U = \mathbb{P}^3 \setminus H$, заданного неравенством $x_0 \neq 0$,

$$\omega_{X_d} = \omega_0 = \frac{dx \wedge dy}{f'_z} = \frac{dy \wedge dz}{f'_x} = \frac{dz \wedge dx}{f'_y}.$$

Действительно, из соотношения

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

на $\mathbb{P}^3$ находим

$$dx = \frac{df}{f'_x}, dy = \frac{df}{f'_y}, dz = \frac{df}{f'_z}, \omega = \frac{df \wedge dy \wedge dz}{ff'_x} = -\frac{df \wedge dx \wedge dz}{ff'_y} = \frac{df \wedge dx \wedge dy}{ff'_z}.$$

Откуда получаем требуемые соотношения на X_d. Из них вытекает, что 2-форма на X_d не имеет нулей и полюсов на $X_d \cap U$ и

$$(\omega_{X_d}) = (n-4)H_{X_d},$$

где $H_d = H_{|X_d}$ – гиперплоское сечение.

Формула присоединения. Если многообразие X и дивизор P неособы, то ограничение $(K_X + P)_{|P}$ определено и

$$K_P = (K_X + P)_{|P},$$

где $K_X = (\omega), K_P = (\omega_P)$.

Квадрат канонического дивизора линейчатой поверхности Пусть $S \to C$ – линейчатая поверхность над кривой C рода g. Тогда $K^2 = 8(1-g)$, где K – канонический дивизор поверхности S. В самом деле, элементарные преобразования линейчатой поверхности над C сохраняют K^2. Это сводит вычисление K^2 к случаю прямого произведения: $S \simeq \mathbb{P}^1 \times C$, для которого

$$K = p_{\mathbb{P}^1}^*(-2P) + p_C^* K_C \text{ и } K^2 = -4 \deg K_C = 8(1-g),$$

где $p_{\mathbb{P}^1}, p_C$ – проекции на сомножители, P – точка на $\mathbb{P}^1$, а K_C – канонический дивизор кривой C.

Формула Кодаиры. Пусть $f\colon S \to C$ – относительно минимальная эллиптическая поверхность, т.е. S, C – неособые проективные поверхность и кривая соответственно, f – относительно минимальное стягивание, общий слой которого кривая рода 1. Относительная минимальность означает, что в слоях отображения f нет (-1)-кривых. Эквивалентно, канонический дивизор K поверхности X численно тривиален над C и даже $\mathbb{Q}$-линейно тривиален над кривой C. Последнее означает, что существует целое положительное число I такое, что дивизор IK линейно эквивалентен 0 в окрестности любого слоя отображения f. В окрестности общего слоя канонический дивизор K линейно тривиален. Поэтому поверхность S имеет вертикальный относительно f канонический дивизор K. Из его численной тривиальности над C получаем представление

$$K = f^*(K_C + B_{\mathrm{div}} + M),$$

где K_C – канонический дивизор кривой C, B_{div} – граница, т.е. B_{div} – эффективный логканонический и даже Кавамата логтерминальный $\mathbb{Q}$-дивизор на C, а M – $\mathbb{Q}$-дивизор на C, определяемый данной формулой, называемой формулой Кодаиры. Иначе говоря,

$$B_{\mathrm{div}} = \sum b_P P,$$

где суммирование ведётся по точкам P кривой C, и кратности b_P дивизора B_{div} принадлежат рациональным точкам полуинтервала $[0,1)$. По определению числа I, называемого *индексом присоединения*, дивизор $I(B_{\mathrm{div}} + M)$ цел, т.е. таковы все его кратности. Индекс присоединения зависит от эллиптической поверхности. Он ограничивает знаменатель объёма $V(S)$ поверхности S:

если кодаирова размерность поверхности S равна 1, то $IV(S)$ – целое положительное число.

Кратность $b_{P,\mathrm{div}}$ дивизориальной части присоединения в точке P кривой C зависит от геометрического слоя X_P отображения f над P, эквивалентно, от структуры дивизора f^*P. Например, если X_P – кратный слой $X_P = f^*P = mE$, где m – целое положительное число, *кратность слоя* X_P, а E – неособая кривая рода 1, то

$$b_{P,\mathrm{div}} = \frac{m-1}{m}.$$

В частности, если слой X_P *невырожден*, т.е. слой X_P гладкий, то X_P – неособая кривая, $m = 1$ и $b_{P,\mathrm{div}} = 0$. В случае основного поля характеристики 0 почти все слои невырождены, т.е. число вырожденных слоёв конечно. В этой ситуации формула Кодаиры применима. Полная классификация вырожденных слоёв и соответсвующие кратности дивизориального присоединения были найдены Кодаирой.

Кодаира также нашёл следующее представление модульной части с точностью до численной или I-линейной эквивалетности $\sim_I$:

$$M \sim_I \frac{J^*P}{12},$$

где $J\colon C \to \mathbb{P}^1$ – абсолютный инвариант эллиптической поверхности и P – точка на $\mathbb{P}^1$, грубом пространстве модулей кривых рода 1.

Список литературы

[ИШ] В.А. Исковских и И.Р. Шафаревич, *Алгебраические поверхности*, Москва 1989, 131–263.

[Ш] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Москва МЦНМО 2007.