Конференция
«Геометрия, топология и математическая физика»
к 85-летию С. П. Новикова и 80-летию В. М. Бухштабера

(10–12 апреля 2023 г., МИАН, конференц-зал 9 этаж, г. Москва)

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Математический центр мирового уровня “Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук” (МЦМУ МИАН), г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265).

АННОТАЦИИ ДОКЛАДОВ

Е. Ю. Бунькова
(МИАН)

Явное решение задачи дифференцирования гиперэллиптических функций

В докладе мы представим современные решения задачи дифференцирования гиперэллиптических функций и приложения этих результатов к теории гиперэллиптических функций Клейна.

А. М. Вершик
(ПОМИ РАН)

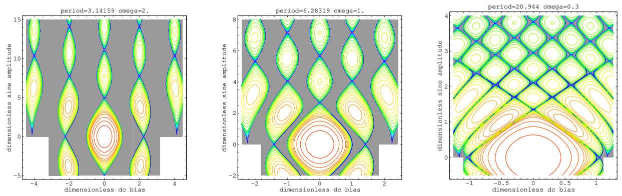
Классификация пространств с мерой и масштабированная энтропия

Рассматривается классификация (mm)-пространств с точностью до изометрий, сохраняющих меру. Теорема Громова-Вершика (в формулировке последнего) утверждает, что полный инвариант в невырожденном случае есть случайная мера на бесконечных матрицах расстояний (так называемое матричное распределение). Будет рассказано о его свойствах инварианта и о свойствах статсуммы траектории метрик относительно преобразования, сохраняющего меру. Масштабированная энтропия есть новый инвариант преобразований, уточняющий энтропию Шеннона-Колмогорова.

А. А. Глуцюк
(ИППИ РАН, НИУ ВШЭ, CNRS, UMR 5669 (UMPA, ENS de Lyon))

Модель Джозефсоновского контакта, динамические системы на торе, изомонодромные деформации и уравнения Пенлеве - 3

Эффект туннелирования, предсказанный Б. Джозефсоном (Нобелевская премия 1973 г.), относится к *Джозефсоновскому контакту:* системе из двух сверхпроводников, разделённых достаточно узкой прослойкой из диэлектрика. Он состоит в существовании проходящего через него сверхтока, описываемого уравнениями, открытыми Джозефсоном. *Сильно шунтированный* Джозефсоновский контакт моделируется семейством динамических систем на двумерном торе, описываемым дифференциальным уравнением, зависящим от трёх параметров: B (абсцисса), A (ордината) и ω (частота). Мы исследуем число вращения $\rho(B, A; \omega)$ динамической системы как функцию от (B, A) при фиксированной частоте ω. *Зоны фазового захвата* — это те её множества уровня $L_r = \{\rho = r\} \subset \mathbb{R}^2_{B,A}$, которые имеют непустую внутренность. Имеет место *эффект квантования:* зоны захвата существуют только для целых чисел вращения (как показали В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный). Каждая зона — это бесконечная гирлянда из областей, уходящих “вертикально” на бесконечность, где каждые две соседние области разделены одной точкой: см. картинки в книгах физиков К. К. Лихарева (1980-е гг.) и К. К. Лихарева – Б. Т. Ульриха (1978 г.); строго доказано А. В. Клименко и О. Л. Ромаскевич). Те из точек раздела, которые не лежат на оси абсцисс, называются *перемычками.* См. рисунки зон захвата при $\omega = 2$, 1, 0.3 по численным экспериментам Бухштабера, Тертычного, В. А. Клепцына, Д. А. Филимонова, И. В. Щурова:



Как видно на картинках, *в каждой зоне L_r все перемычки лежат на одной вертикальной прямой с абсциссой $r\omega$*. Это было доказано Ю. П. Бибило и докладчиком с помощью эквивалентного описания модели системами линейных дифференциальных уравнений на сфере Римана (полученного Бухштабером, Карповым и Тертычным), с использованием теории явления Стокса и изомонодромных деформаций, связанных с уравнением Пенлеве 3.

Мы представим новое 4-параметрическое семейство динамических систем на торе, включающее вышеописанную модель Джозефсоновского контакта, где тоже есть эффект квантования числа вращения, эквивалентное описание семейством линейных уравнений, а также расслоение пространства параметров на изомонодромные семейства, связанное с уравнением Пенлеве 3. Мы дадим обзор результатов и обсудим открытые проблемы.

С. Абенда
(University of Bologna)
П. Г. Гриневич
(МИАН, МГУ, ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН)

Сигнатуры на плабик-графах и вполне неотрицательные грассманианы

Как показал А. Постников, клетки во вполне неотрицательных грассманианах можно рационально параметризовать графами внутри диска с положительными весами на ребрах. При этом элементы матриц, представляющих точки грассманиана, задаются как суммы по всем возможным путям от граничного источника до граничного стока. Альтернативный подход состоит в задании точек грассманиана через решения системы линейных уравнений, отвечающих вершинам графа, при этом положительность достигается только при правильной расстановке знаков на ребрах, называемой сигнатурой. Т. Лэм доказал существование сигнатуры, согласованной со свойством вполне положительности, не предъявляя ее явно. Мы приводим явную конструкцию такой сигнатуры и доказываем ее единственность с точностью до действия естественной калибровочной группы.

Н. Ю. Ероховец
(МГУ)

Когомологически жёсткие семейства многообразий, ассоциированные с идеальными прямоугольными гиперболическими многогранниками

Известна проблема классификации гладких многообразий с точностью до диффеоморфизма. Для односвязных многообразий размерности пять и выше классические результаты в этой области были получены С.П.Новиковым в 1960-х годах. В общем случае для различения двух гладких многообразий недостаточно изоморфизма их колец когомологий. Торическая топология, получившая значительное развитие благодаря работам В.М.Бухштабера и Т.Е.Панова, даёт богатые примеры семейств многообразий, в которых элементы различаются при помощи этого инварианта. Такие семейства называются когомологически жёсткими. Известны семейства, построенные в работе В.М.Бухштабера, Т.Е.Панова, М.Масуды, С.Пак и Н.Ю.Ероховца 2017 года. Одно из них состоит из шестимерных квазиторических многообразий, второе — из трёхмерных гиперболических многообразий, отвечающих трёхмерным прямоугольным ограниченным многогранникам в пространстве Лобачевского. Первое семейство жёстко над $\mathbb{Z}$, второе — над $\mathbb{Z}_2$. Каждое 3-мерное многообразие из семейства склеено из восьми копий соответствующего ему многогранника. В докладе планируется рассказать о когомологически жёстких семействах шестимерных и трёхмерных многообразий, параметризуемых трёхмерными идеальными прямоугольными гиперболическими многогранниками. Каждое рассматриваемое нами трёхмерное многообразие является дублем многообразия с краем, внутренность которого имеет гиперболическую структуру конечного объёма, получаемую склейкой четырёх копий многогранника. Край состоит из конечного набора торов, задающих в многообразии-дубле геометрическое разложение по Тёрстону. Семейства многообразий достаточно богаты: трёхмерных идеальных прямоугольных гиперболических многогранников столько же, сколько комбинаторных типов всех трёхмерных многогранников с точностью до перехода к двойственному многограннику.

С. К. Ландо
(НИУ ВШЭ, Сколтех)

Весовые системы, связанные с алгебрами Ли

В теории В. А. Васильева инвариантов узлов конечного порядка такому инварианту сопоставляется функция на хордовых диаграммах. Хордовая диаграмма — простой комбинаторный объект, представляющий собой ориентированную окружность с конечным набором хорд, имеющих различные концы. Такие функции удовлетворяют 4-членным соотношениям Васильева; в свою очередь, функции, удовлетворяющие этим соотношениям, называются *весовыми системами*. Согласно теореме Концевича это соответствие, по существу, взаимнооднозначно: каждая весовая система определяет инвариант узлов.

В частности, весовую систему можно построить по всякой полупростой алгебре Ли — такие весовые системы отвечают квантовым инвариантам узлов. Однако уже в простейшем нетривиальном случае — для алгебры Ли sl(2) — вычисление значений соответствующей весовой системы является вычислительно сложной задачей. В то же время, эта весовая система чрезвычайно важна, поскольку она соответствует знаменитому инварианту узлов — крашенному многочлену Джонса.

В 2022 году был достигнут существенный прогресс как в понимании природы, так и в вычислении весовых систем, отвечающих алгебрам Ли, причем не только для алгебры Ли sl(2), но и для других алгебр Ли, в первую очередь, для gl(N)-весовых систем для произвольных N. Были выведены новые рекуррентные соотношения, которые позволили получить множество явных формул. Разработанные методы вычисления основываются на идее М. Э. Казаряна, который предложил продолжить gl(N)-весовую систему на перестановки.

Доклад основывается на работах М. Э. Казаряна, докладчика и студентов П. Закорко, П. Зиновой и Чжоке Янга.

А. Я. Мальцев
(ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН)

Задача Новикова и магнитные явления в металлах

Мы рассматриваем задачу Новикова об описании квазиклассических электронных траекторий в металлах в присутствии сильного магнитного поля и ее приложения к целому ряду магнитных явлений в металлах со сложными поверхностями Ферми. Хорошо известно, что результатом исследования задачи Новикова стало появление полной классификации незамкнутых квазиклассических электронных траекторий в металлах с произвольными законами дисперсии, что, в свою очередь, позволило построить описание всех нетривиальных режимов поведения магнитопроводимости (или магнитотермопроводности) в пределе сильных магнитных полях, а также ввести новые топологические числа, наблюдаемые в магнитопроводимости нормальных металлов. Методы исследования структуры траекторий на поверхности Ферми при исследовании задачи Новикова, однако, позволяют указать еще целый ряд магнитных явлений, в которых описание такой структуры является важным и позволяет использовать такие явления для исследования дисперсионных соотношения в металлах. В докладе мы постараемся дать наиболее полный обзор как хорошо известных, так и новых результатов в данной области, которые, в действительности, довольно тесно связаны друг с другом.

Д. В. Миллионщиков
(МГУ, РГУ нефти и газа имени И. М. Губкина)

Инвариантные геометрические структуры на нильмногообразиях

Рассмотрим компактное нильмногообразие G/Γ, где G — односвязная нильпотентная группа Ли, а Γ - ее кокомпактная решетка. Доклад будет посвящён левоинваринтным симплектическим и комплексным структурам на нильмногообразии G/Γ, и в частности - описанию ограничений на алгебраическую структуру алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, возникающих из условия существования таких структур.

А. Е. Миронов
(ИМ СО РАН)

Коммутирующие разностные операторы и их связь с конечнозонными одномерными операторами Шредингера

В докладе будут рассматриваться одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один. Будет показано как из таких операторов предельным переходом получить обыкновенные коммутирующие дифференциальные операторы ранга один. В частности, будет подробно рассмотрен случай конечнозонных одномерных операторов Шредингера.

О. И. Мохов
(МГУ)

Геометрия подмногообразий с потенциалом нормалей и ее приложения в математической физике

Развивается геометрия подмногообразий с потенциалом нормалей в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах, которые были введены автором в [1], и ее приложения в математической физике, в частности, в теории плоских и неплоских уравнений Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде.

[1] О.И. Мохов, Двойственность в специальном классе подмногообразий и фробениусовы многообразия, Успехи математических наук, 63:2(380) (2008).

М. В. Павлов
(ФИАН)

Эллиптические ортогональные системы координат и разделение переменных в операторе Лапласа

Разделение переменных в системах уравнений в частных производных - одна из важных и интересных задач. Прекрасный обзор этой области был предложен в книге Уиттекера-Ватсона в 1905 году.

В докладе будет предложена интерпретация известных результатов, которая позволит лучше понять препятствия и возможности в теории разделения независимых переменных.

И. А. Панин
(ПОМИ РАН)

Вокруг стабильной мотивной гомотопической категории Воеводского

Стабильная мотивная гомотопическая категория Воеводского позволяет строить на систематической основе теории когомологий на алгебраических многообразиях (в частности, на комплексных алгебраических многообразиях). В докладе будет построена версия указанной категории, отправляясь от комплексных аналитических гладких многообразий и обычной комплексной топологии на них. Будет объяснено, что modulo n версия этой категории совпадает (эквивалентна) с modulo n версией обычной (хорошо знакомой) стабильной гомотопической категории. Будут предъявлены комплексно аналитические аналоги спектра комплексных кобордизмов, спектра комплексной K-теории и спектра Эйленберга – Маклейна. Если время позволит, то будет пояснено, что многие известные бесконечно кратные пространства петель могут быть реализованы гладкими комплексными аналитическими многообразиями (бесконечномерными на подобии Грассманиана), причем и сама структура бесконечно кратного пространства петель реализуется голоморфными отображениями.

Г. Ю. Панина
(ПОМИ РАН, СПбГУ)

Деление без зависти деньрожденного пирога

Представим, что r друзей (каждый со своими собственными предпочтениями) собираются поделить деньрожденный пирог, представленный в виде отрезка $[0, 1]$. Они планируют сделать $r - 1$ разреза, и затем распределить полученные r кусков так, чтобы друзья не завидовали друг другу.

Классическая теорема Гейла говорит, что такое деление без зависти существует при стандартных предположениях: (1) предпочтения замкнуты, и (2) друзья голодны, то есть, никто не предпочтёт вырожденный кусок пирога.

Мы покажем, что если r – простое число, то можно опустить условие (2), а также возможно обогатить наш сценарий: После того, как пирог разрезан, куски раскладывают по тарелкам, стоящим на круглом столе, не более одного куска в тарелку. После этого каждый из друзей делает свой выбор, указывая на одну (или несколько) наиболее предпочитаемых тарелок. При этом выбор может зависеть не только от содержания выбранной тарелки, но и от общего расположения кусков, например, от содержания соседних тарелок.

В этом случае для деления без зависти достаточно замкнутости предпочтений.

Далее мы вводим фигуру дракона. Есть два сценария.

1. Собрались $r-1$ друзей, они делят пирог на r частей. Когда пирог разрезан и разложен по тарелкам, дракон забирает одну, причём его предпочтения никому не известны. Друзья должны иметь возможность распределить оставшиеся тарелки, не завидуя ни друг другу, ни дракону.

2. $r+1$ друзей делят пирог на r частей. После этого приходит свирепый дракон и съедает одного из друзей. Задача: надо разделить пирог так, чтобы независимо от того, кого именно съест дракон, оставшиеся друзья могли бы распределить тарелки с пирогом без зависти.

Доказательства использует методы эквивариантной топологии и комбинаторный анализ конфигурационных пространств.

Доклад основан на препринте arXiv:2302.02701; мы также упомянем результаты С. Аввакумова, Р. Карасёва, F. Meunier, F.E. Su и других.

А. С. Скрипченко
(НИУ ВШЭ, Сколтех)

Задача Новикова: как игра на бильярде помогает в физике металлов

Я расскажу историю одной задачи, которую С. П. Новиков сформулировал в 1982 году в связи с изучением полуклассического движения электрона в кристаллической решетке. Речь идет об асимптотическом поведении сечений 3-периодической поверхности плоскостями заданного направления.

Эта задача сначала представлялась топологической, а впоследствии оказалась тесно связанной со многими важными вопросами из теории динамических систем (прежде всего, с тейхмюллеровой динамикой) и геометрической теории групп (автоморфизмами свободных групп и действиями групп на R-деревьях). Мы поговорим об этих связях, а еще - о классических и свежих результатах и пока недоказанных гипотезах.

И. А. Тайманов
(ИМ СО РАН)

Поверхности в четырехмерном пространстве и формирование особенностей решений уравнения Дэви-Стюартсона

Мы изложим геометрический механизм формирования особенностей решения уравнения Дэви-Стюартсона II и его связь с несохранением нулевого уровня дискретного спектра оператора Дирака.