Летняя математическая школа

"Алгебра и геометрия"

(25-29 июля 2023 г., г. Суздаль)

ПОСТЕРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Классы флайп-эквивалентности 2-кривых.
Алешин Артем

ФМКН СПБгУ
2023

1. Введение

1.1. **Мотивация.** В статье [1] предложен новый метод оценки асимптотики роста числа простых узлов. Имеются основания полагать, что, если вместо простых перекрестков вставлять 2-кривые с небольшим числом пересечений, то получится улучшить доказанную в этой статье асимптотику. Целью данной работы была оценка количества 2-кривых с точностью до флайп-эквивалентности для кривых с небольшим числом пересечений.

1.2. **Основные определения.** Зафиксируем квадрат K на плоскости.

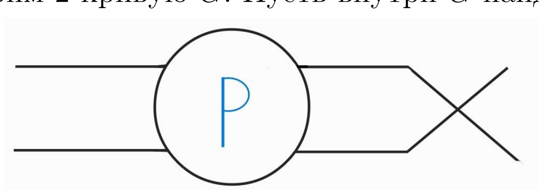
Определение. *1-кривой* общего положения в нашем квадрате будем называть такую гладкую кривую $\gamma : [0,1] \to K$, что у нее нет особенностей кроме конечного числа двойных точек, все двойные пересечения трансверсальны, и $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ это различные вершины квадрата, причем $\gamma[0,1] \cap \partial K = \{\gamma(0), \gamma(1)\}$.

Определение. *2-кривой* общего положения будем называть пару таких 1-кривых γ_1, γ_2, что они пересекаются трансверсально в конечном числе точек, точки персечения не совпадают с точками самопересечения кривых, а концы этих кривых покрывают все вершины квадрата.

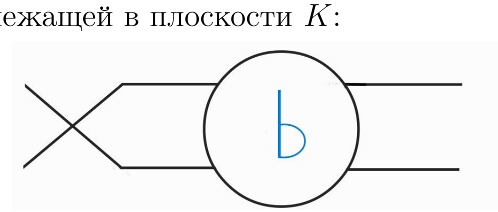
Определение. 2-кривую общего положения G будем называть *приводимой*, если в квадрате K найдется топологический диск D (с гладкой границей), край которого пересекает трансверсально 2-кривую G ровно в двух точках, а пересечение $G \cap D$ не является при этом простой дугой.

Будем рассматривать 2-кривые с точностью до неподвижных на крае изотопий.

Определение. Рассмотрим 2-кривую G. Пусть внутри G найдется такой фрагмент:



Где P также является 2-кривой. *Флайпом* называется следующее преобразование: P на 180 градусов вокруг оси, лежащей в плоскости K:



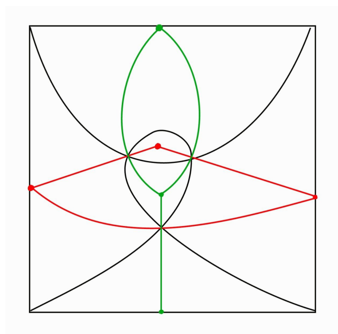
Замечание. Флайп сохраняет количество пересечений.

Определение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются области квадрата K, на которые 2-кривая его разбивает. Ребро между двумя областями соответствует пересечению в 2-кривой, разделяющему эти области. Этот граф имеет две компоненты связности.

Шахматным графом 2-кривой будем называть вложение этого графа в квадрат, при котором каждая вершина попадает в соответствующую ей область, а каждое ребро – в простую дугу, соединяющую вершины и проходящую через пересечение 2-кривой, которое разделяло смежные этому ребру области.

Замечание. Каждая компонента связности при этом отображении переходит в планарный граф, причем эти планарные графы являются двойственными относительно друг друга.

Пример.



Утверждение 1. *По шахматному графу 2-кривой можно восстановить 2-кривую.*

2. Основные результаты

Ниже приведена таблица с оценками на количество 2-кривых для фиксированного числа пересечений.

Количество пересечений	Количество 2-кривых с точностью до изотопии	Количество 2-кривых с точностью до флайп-эквивалентности
1	1	1
2	2	2
3	6	4
4	20	8
5	92	26
6	318	68

Список литературы

[1] И. С. Алексеев, А. М. Вершик, А. В. Малютин. *О росте числа простых узлав* 2021.
[2] Adams, Colin C. *The knot book.* American Mathematical Soc., 1994.

О некоторых 3-порожденных группах 6-транспозиций

Афанасьев Всеволод Альбертович

(Основано на совместной работе с А.С. Мамонтовым)

НГУ, Новосибирск

Основные понятия

Определение. Говорят, что группа G является группой n-транспозиций, если G порождена таким множеством D, что

- $x \in D \implies x^2 = e$
- $D^G = D$ (D - нормальное множество).
- $x, y \in D \implies |xy| \leq n$.

Мотивирующий пример: группы перестановок $S_n,\ n > 1$ являются группами 3-транспозиций, при этом знакопеременные группы $A_n,\ n > 1$ являются группами 6-транспозиций.

Еще одним простым классом примеров являются группы диэдра D_{2n}: группы симметрий правильных n-угольников (они порождаются двумя инволюциями, произведение которых имеет порядок n).

Неформально определим алгебры Майорана, впервые рассмотренные в [1]:

1. Это коммутативные алгебры, порожденные осями – идемпотентами, удовлетворяющими некоторым свойствам (например, для оси a относительно оператора ad_a алгебра раскладывается в прямую сумму собственных подпространств, соответствующих $0,\ 1,\ 1/4,\ 1/32$).
2. На них можно задать билинейную форму $(\cdot,\cdot)$, такую, что для любой оси a $(a, a) = 1$ и $(uv, w) = (u, vw)$ для любых элементов алгебры $u,\ v,\ w$.

Данные свойства выполняются в алгебре Грайса, группой автоморфизмов которой является спорадическая группа Монстр $\mathbb{M}$.

Историческая справка

Изучение групп n-транспозиций было начатом Берндом Фишером: им был сделан первый шаг в на данный момент завершенной классификации групп при $n = 3$ [2]. Этот случай является единственным полностью завершенным – для других n известны лишь частичные результаты. При этом известно очень много интересных примеров таких групп, например некоторые конечные специальные унитаные, симплектические и ортогональные группы.

Также самая большая конечная спорадическая простая группа Монстр $\mathbb{M}$ является группой 6-транспозиций, а также Фишером были открыты 3 спорадические группы, носящие его имя.

При этом одной из развиваемых идей в теории групп является взаимодействие с алгебрами, для которых данные группы задают автоморфизмы. Эксплуатация этой связи позволяет как изучать алгебры, используя известную информацию об их симметриях, так и работать с группами, используя некоторые алгебраические конструкции. В частности, группы можно строить как группы автоморфизмов некоторых алгебр.

В работе [3] связь групп 6-транспозиций с довольно интересным классом алгебр выражается в следующем:

Утверждение. любая алгебра Майорана имеет своей группой автоморфизмов группу 6-транспозиций.

(В статье утверждение сформулировано для более широкого класса алгебр).

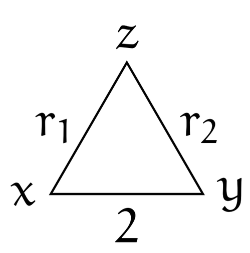
Таким образом резонной задачей является попытаться классифицировать группы 6-транспозиций и построить алгебры, автоморфизмы которых они задают. В нашей работе рассматривается первый нетривиальный случай этой задачи.

Основные результаты

Основным результатом работы является следующее утверждение: Будем рассматривать 3-порожденные группы 6-транспозиций с коммутирующей парой порождающих, то есть гомоморфные образы групп обладающих следующим представлением:

$$G = \{x, y, z | e = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (xz)^{r_1} = (yz)^{r_2}\},$$

где $r_1 < 6,\ r_2 \leq 6$.



Теорема Пусть $(r_1, r_2) \neq (6, 6)$. Тогда все 3-порожденные группы 6-транспозиций с коммутирующей парой порождающих конечны и либо являются разрешимыми, либо являются гомоморфными образами одной из следующих групп

Группа	Наименование	(r_1, r_2)
G_1	$PGL(2, 9)$	$(4, 5)$
G_2	$2 \times ((2^4 : S_5)$	$(4, 5)$
G_3	$(A_5 \times A_5) : 2^2$	$(4, 6)$
G_4	$2 \times (2^{10} : PSL(2, 11))$	$(5, 5)$
G_5	$2 \times 2^6 : S_5$	$(4, 6)$
G_6	$O_2(G) : A_5$	$(5, 5)$
G_7	$2 \times (2^5 : S_6)$	$(5, 6)$
G_8	$2 \times 3.S_6$	$(5, 6)$
G_9	M_{12}	$(5, 6)$
G_{10}	$(2.M_{22}) : 2$	$(5, 6)$

Напомним, что $H : N$ обозначает расщепляемое расширение группы H группой N (то же самое, что полупрямое произведение).

Замечание. разрешимые группы также известны, но опущены для краткости.

Для случая $(6, 6)$ также имеются частичные результаты.

Идеи доказательств

В большом числе случаев оказывается полезной Идея. найти подгруппы, похожие на группы 3-транспозиций.

В качестве такой подгруппы можно взять $\langle x^G \rangle$ (нормальное замыкание элемента x). Она всегда оказывается 5 или 6-порожденной.

Данная идея позволяет (добавляя доп. соотношения) разобрать некоторые случаи, однако, когда эта идея становится неприменима (например при $r_1 = r_2 = 5$), либо когда изучать эту подгруппу становится слишком сложно мы применяем программы компьютерной алгебры (используя результаты из теории групп для получения определяющих соотношений).

Выводы и дальнейшие направления исследований

Среди полученных на данный момент групп уже достаточно много интересных примеров, что говорит о полезности продолжения классификации, в то же время сложность работы показывает, что текущие методы для этого трудноприменимы. При этом, эти результаты естественно можно потенциально использовать в дальнейшей работе над классификацией, поскольку в группе 6-транспозиций почти всегда можно найти подгруппу с конфигурацией, соответствующей рассматриваемому нами случаю.

В дальнейшем мы планируем избавиться от условия $r_1 < 6$, а также построить алгебры Майорана, для которых полученные группы задают автоморфизмы. Стоит отметить, что эта задача также обещает быть достаточно трудновыполнимой ввиду принципов работы текущих методов построения этих алгебр (размерность алгебры не меньше числа элементов в множестве D, которое часто оказывается достаточно большим, порой оно содержит более 1000 элементов.)

Список литературы

[1] A.A Ivanov, D.V. Pasechnik, Á. Seress, S.Shpectorov, Majorana representations of the symmetric group of degree 4. Journal of Algebra, 2010, vol. 324, pp. 2432–2463.

[2] Fischer, B. Finite groups generated by 3-transpositions. I. Invent Math 13, 232–246 (1971).

[3] J.I. Hall, F. Rehren, S. Shpectorov, Universal axial algebras and a theorem of Sakuma, Journal of Algebra, Volume 421, 2015, Pages 394-424,

Работа поддержана Математическим центром в Академгородке.

Severi-Brauer varieties and central simple algebras

Barodka Mikita

1 Central simple algebra

A ***central simple algebra*** is a ***central*** ***simple*** ***algebra***, i.e. the notion is separable in a sense that it's a combination of several definitions.
When one speaks about an algebra in the context of our topic he assumes that everything is being done over commutative ring with 1, usually denoted as R. Either leftness or rightness of module is chosen as well. So, here are equivalent definitions of an algebra:

- An R-algebra is an R-module, equipped with a proper bilinear map (so that we can call it a *multiplication*) [1, p. 1]
- An R-algebra is a ring together with a homomorphism from R to its center. [1, p.2]

An algebra is ***simple*** equals any of:

- the only ideals are the trivial one and the whole ring [1, p. 44]
- it is some matrix algebra over some division ring [1, p. 49-50]

And ***central*** iff center equals to the ring. [1, p. 224]
It turns out that the center of a simple algebra is a field, so we may consider algebras over fields without loss of generality. [1, p. 219]

2 Brauer group

Brauer group is a **Brauer** **group**. That is, we have something that is possible to turn into a group in essential way. One can consider the following approaches:

- Essential way: F — field, $\mathfrak{S}(F)$ — all central simple algebras over F. Via tensor product we split $\mathfrak{S}(F)$ into equivalence classes: for $A, B \in \mathfrak{S}(F)$: $A \sim B \iff A, B$ are matrix algebras over the same division ring. The arose equivalence classes are the elements of Brauer group with tensor product as an operation. Denotion: $Br(F)$ [1, p. 227]
- Brauer group is the second cohomology group: $Br(F) = H^2(Gal(F), (F^{sep})^*)$ [2, p. 67]
- Slightly different notation: $Br(F) = \varinjlim H^2(G(E/F), E^\circ)$ [1, p. 267]

Can be rewritten via Ext functor as well. [2, p. 16] (Ext $\leftrightsquigarrow$ cohomologies; Tor $\leftrightsquigarrow$ homologies)

3 Severi-Brauer variety

Several ways to define are possible as well:

- Severi-Brauer variety is a form of projective space [2, p. 46]
- Severi-Brauer variety (over field F) is a scheme X st there exists a separable field extension E/F st $X \times_{\text{Spec}F} \text{Spec}E$ is a projective space over E [3, p. 23]

4 Amitsur conjecture

This statement determines a connection between Severi-Brauer varieties and Brauer groups:

- two Severi-Brauer varieties are birationally isomorphic iff the two corresponding algebras have the same degree and generate the same cyclic subgroup in the Brauer group ($\Longrightarrow$ is proved in general and $\Longleftarrow$ is proved only for certain cases, so the conjecture says that $\Longleftarrow$ holds in general) [2, p. 80], [3, p. 30]

My research concerns $\Longleftarrow$ case.

References

[1] R. S. Pierce, *Associative algebras*, Springer-Verlag , (1982)

[2] C. A. Shramov, S. O. Gorchinsky, *Unramified Brauer group and its applications*, (2018), arXiv:1512.00874v2

[3] J. Jahnel, *THE BRAUER-SEVERI VARIETY ASSOCIATED WITH A CENTRAL SIMPLE ALGEBRA: A SURVEY*, (2000)

About the author:

name: **Mikita**
surname: **Barodka**

I am a Master's degree student at Department of Higher Algebra, Mechanics and Mathematics Faculty, Belarusian State University

email: *n.k.borodko@gmail.com*
telegram: @Mikitinski

О 3-порождённых аксиальных алгебрах йорданова типа

Определения

Будем полагать A коммутативной не обязательно ассоциативной алгеброй над полем $\mathbb{F}$.

- Закон слияния (fusion law) - это отображение $\star : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow 2^{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ - конечное подмножество $\mathbf{F}$.
- Элемент $a \in A$ называется полупростым, если оператор умножения на него $ad_a : x \longrightarrow ax$ полупрост.
- $\mathcal{F}$-ось (далее ось, axis) $a \in A$ - это полупростой идемпотент с собственными значениями из $\mathcal{F}$, произведения собственных векторов которого подчинены законам слияния: $A_\lambda A_\mu \subseteq A_{\lambda\star\mu}$
- Ось a примитивна, если $\dim A_1(a) = 1$.
- Примитивная аксиальная алгебра - это не обязательно ассоциативная коммутативная алгебра, порождённая осями. Выделяют аксиальные алгебры йорданова типа с законом слияния $\mathcal{J}(\eta)$ и монстрова типа с $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$.

$*$	1	0
1	1	
0		0

$*$	1	0	η
1	1		η
0		0	η
η	η	η	1, 0

$*$	1	0	α	β
1	1		α	β
0		1	α	β
α	α	α	0, 1	β
β	β	β	β	0, 1, α

Таблица: Законы слияния $\mathcal{A}/\mathcal{J}(\eta)/\mathcal{M}(\alpha,\beta)$

- Форма Фробениуса для аксиальной алгебры - это билинейная форма $(\cdot,\cdot) : A \times A \longrightarrow \mathbb{F}$ со свойством $(a, bc) = (ab, c)$ для любых $a, b, c \in A$.
- Любая аксиальная алгебра йорданова типа имеет единственную форму Фробениуса. (Khasraw, McInroy, Shpectorov, 2019)

Основные теоремы

- Любая 3-порождённая аксиальная алгебра йорданова типа йорданова и вкладывается в универсальную 9-мерную йорданову алгебру (Горшков, Старолетов, 2020).
- Универсальная 9-мерная алгебра $A(\alpha,\beta,\gamma,\psi)$ порождена осями a, b, c такими, что $(a, b) = \alpha, (b, c) = \beta, (a, c) = \gamma, (a, bc) = \psi$. Алгебра $A(\alpha,\beta,\gamma,\psi)$ проста в случае, когда $(\alpha+\beta+\gamma-2\psi-1)(\alpha\beta\gamma-\psi^2) \neq 0$. (Горшков, Старолетов, 2020)

Постановка проблемы

- Необходимо описать все возможные идеалы и все фактор-алгебры $A(\alpha,\beta,\gamma,\psi)$ в случаях, когда она непроста.

Результаты

Пусть A полупростая 3-порождённая аксиальная алгебра типа $\mathcal{J}(1/2)$ над полем $\mathbb{F}$, char $\mathbb{F} \neq 2, 3$. Тогда A изоморфна одной из следующих алгебр:

1. $\mathbb{F}^n, n \in \{1, 2, 3\}$
2. $\mathcal{J}Form_3(\mathbb{F})$
3. $\mathbb{F} \oplus \mathcal{J}Form_3(\mathbb{F})$
4. $M_2^+(\mathbb{F})$
5. $H_3^+(\mathbb{F})$

Будущие исследования

- Исследовать возможные идеалы алгебры $A(\alpha,\beta,\gamma,\psi)$.
- Исследовать 3-порождённые алгебры в случае, когда две оси йорданова типа, а одна ось - монстрова типа.

Библиография

- I. Gorshkov, A. Staroletov, On primitive 3-generated axial algebras of Jordan type. J. Algebra, 563:74–99, 2020.
- J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type. J. Algebra, 437:79–115, 2015.
- J. I. Hall, Y.Segev, and S. Shpectorov, On primitive axial algebras of Jordan type. Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), 13(4):397–409, 2018.
- S.M.S. Khasraw, J. McInroy, S. Shpectorov, On the structure of axial algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 373:2135-2156, 2020.

Равиль Бильданов

ravilbildanov@gmail.com

Новосибирский государственный университет

Гладкие кубические поверхности над конечными полями характеристики 2

АНАСТАСИЯ В.ВИКУЛОВА

В работах[1, §9.5.3] и [2] была приведена полная классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями произвольной характеристики. Тем не менее, остается открытым вопрос о группах автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Более того, для заданной группы автоморфизмов также является небезынтересным вопрос о количестве таких гладких кубических поверхностей с точностью до изоморфизма, чья группа автоморфизмов совпадает с данной.

Для конечных полей характеристики 2 известны ответы на заданные вопросы. А именно, в работе [3] была доказана следующая теорема для гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_2$:

Теорема 1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда порядок ее группы автоморфизмов удовлетворяет неравенству*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Если равенство выполнено, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$. Более того, гладкая кубика с группой автоморфизмов S_6 единственна с точностью до изоморфизма.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие результаты:

Теорема 2. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Если $|\mathrm{Aut}(S)| = 720$, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.*

Доказательство теоремы 2 основано на изучении подгрупп в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ и в группе $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$. Предъявим явно кубическую поверхность с группой автоморфизмов S_6.

Пример 1. Рассмотрим кубику $S \subset \mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, заданную уравнением

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что это уравнение задает гладкую кубику. Более того, она проходит через все точки на $\mathbb{P}^3$. Покажем, что $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$. Рассмотрим матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует кососимметрической билинейной форме. Группа, сохраняющая эту матрицу, есть группа $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{S}_6$. Левая часть уравнения (1) равна $(x^2, y^2, z^2, t^2)^T \Omega(x, y, z, t)$. Значит, группа S_6 содержится в группе автоморфизмов кубики S. По теореме 2 группа S_6 является максимальной возможной группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности над $\mathbb{F}_2$. Значит, $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.

Отметим, что кубика (1) рациональна. В самом деле, на ней есть две непересекающиеся прямые l_1 и l_2, задающиеся уравнениями $x = y = 0$ и $z = t = 0$, соответственно, что и дает бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow S$.

Лемма 1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящая через все 15 точек в $\mathbb{P}^3$. Тогда S изоморфна кубике вида (1), и ее группой автоморфизмов является группа S_6.*

Доказательство. Заметим, что всего кубик, проходящих через все 15 точек, ровно 63. Рассмотрим действие группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ на гладкие кубики в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящие через 15 точек. Пусть $\mathrm{Orb}(S)$ — орбита S действия группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$. Имеем, $|\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)| = |\mathrm{Orb}(S)| \cdot |\mathrm{Aut}(S)|$. Рассмотрим особую кубическую поверхность, которая является объединением трех плоскостей в $\mathbb{P}^3$, пересекающихся одновременно в одной прямой. Ясно, что на такой приводимой кубической поверхности будет 15 точек. В $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$ имеется ровно 35 прямых. То есть гладких кубик, проходящих через 15 точек, не более 28. Получаем, что $|\mathrm{Orb}(S)| \leqslant 28$. Тогда имеем неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \geqslant 720$, что возможно, согласно теореме 2, тогда и только тогда когда $\mathrm{Aut}(S) = \mathrm{S}_6$ и $|\mathrm{Orb}(S)| = 28$. Другими словами, все гладкие кубики, проходящие через 15 точек, изоморфны друг другу. И значит, такие кубики изоморфны кубике вида (1). $\square$

Лемма 2. *Пусть группа* S_6 *является группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности* S *над полем* $\mathbb{F}_2$. *Тогда* S *изоморфна кубике вида (1).*

Доказательство. Заметим, что согласно теореме Шевалле–Варнинга на кубике S есть точка, которую мы обозначим p. Действие группы S_6 на S определяет ее действие на $\mathbb{P}^3$. Предположим, что орбита точки p имеет длину $l \neq 5, 10, 15$. Тогда стабилизатор каждой точки в орбите является подгруппой S_6 индекса l. Более того, в стабилизаторе лежит подгруппа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, так как l взаимно просто с 5. Тогда группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ действует нетривиально на касательном пространстве к $\mathbb{P}^3$ в точке p. То есть $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$. Но это невозможно.

Случай $l = 5$ невозможен, так как в группе S_6 нет подгруппы индекса 5. Если же $l = 10$, то на $\mathbb{P}^3$ есть еще орбиты действия S_6 длины не больше 5. Но мы только что показали, что таких нет. Поэтому возможен только случай $l = 15$. Значит, на кубике S с действием группы S_6 ровно 15 точек. А по лемме 1 такие кубики изоморфны кубике (1). $\square$

Из 1 и 2 мы получаем следствие.

Следствие 1. *Группа* S_6 *действует на гладкой кубической поверхности* S *над полем* $\mathbb{F}_2$ *тогда и только тогда, когда* S *проходит через все* 15 *точек в* $\mathbb{P}^3$.

Доказательство теоремы 1. Первая часть теоремы следует из теоремы 2. Существование и единственность следуют из лемм 1 и 2. $\square$

Более того, имеется обобщение этого результата для произвольных конечных полей характеристики 2 :

Теорема 3. *Максимальная по порядку группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности над полем* $\mathbb{F}_{4^k}$ *– это группа* $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, *а над полем* $\mathbb{F}_{4^k \cdot 2}$ *– это группа* S_6. *Причем в обоих случаях гладкая кубика с данной группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма.*

Список литературы

[1] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry. A modern view*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012

[2] I. Dolgachev, A. Duncan, *Automorphisms of cubic surfaces in positive characteristic*, Izv. RAN. Ser. Mat., **83** (2019), no.3, 15–92.

[3] А. В. Викулова, *Константа Жордана группы Кремоны ранга 2 над конечным полем*, Матем. Заметки, **113** (2023), no.4, 607–612.

OUTER AUTOMORPHISMS OF UNIFORM LATTICES IN COMPLEX LIE GROUPS

ALEKSEI GOLOTA

It turns out that finite subgroups of various complicated groups coming from geometry (such as automorphism groups of projective varieties, Cremona groups, mapping class groups, etc) satisfy certain "boundedness" properties. More precisely, one can consider the following ones.

Definition 1 (V. L. Popov)**.** Let G be a group. We say that G is *Jordan* if there exists $J(G) \in \mathbb{N}$ such that for any finite subgroup $H \subset G$ there exists a normal abelian subgroup $A \lhd H$ of index at most $J(G)$. We say that G has *bounded finite subgroups* if there exists $B(G)$ such that for any finite subgroup $H \subset G$ one has $|H| \leqslant B(G)$.

The most important examples of Jordan groups are $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (Jordan's theorem) and, more generally, connected Lie groups (Boothby–Wang; Popov). As for infinite groups with bounded finite subgroups, the basic example is $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (Minkowski's theorem).

Let X be a compact complex manifold. We denote by $\mathrm{Aut}(X)$ the group of biholomorphic automorphisms of X. Then there is an exact sequence

$$1 \to \mathrm{Aut}^0(X) \to \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}^*(X) \to 1,$$

where the connected component of the identity $\mathrm{Aut}^0(X)$ is a complex Lie group (Bochner–Montgomery) and $\mathrm{Aut}^*(X)$ is a discrete group, called the group of connected components of $\mathrm{Aut}(X)$.

For a general compact complex manifold X little is known about the group $\mathrm{Aut}^*(X)$. However, for X projective (or compact Kaehler) the group $\mathrm{Aut}^*(X)$ is an extension of a linear (over $\mathbb{Z}$) group by a finite group. This allows to prove the following result.

Theorem 2 (S. Meng–D.-Q. Zhang; J. H. Kim)**.** *Let X be a compact Kaehler manifold. Then the group* $\mathrm{Aut}(X)$ *is Jordan.*

I would like to prove a similar result for automorphism groups of (non-Kaehler) compact complex manifolds from a particular class [Wa54].

Definition 3. A compact complex parallelizable manifold X is a quotient G/Γ of a connected complex Lie group G by a uniform lattice $\Gamma \subset G$.

These manifolds were extensively studied by J. Winkelmann [Win98]. In particular, their automorphism groups can be explicitely described in terms of G and Γ.

Proposition 4 (J. Winkelmann)**.** *Let G be a simply-connected Lie group and let $\Gamma \subset G$ be a uniform lattice. Then the group* $\mathrm{Aut}^*(G/\Gamma)$ *embeds into the group of outer automorphisms* $\mathrm{Out}(\Gamma)$.

The main result of [Gol23] is the following theorem.

Theorem 5 (G., 2023)**.** *Let Γ be a uniform lattice in a connected complex Lie group G. Then the orders of finite subgroups in the group* $\mathrm{Out}(\Gamma)$ *of outer automorphisms of Γ are bounded.*

The main idea of the proof is to use the following exact sequence:

$$1 \to \Gamma \cap R \to \Gamma \to \Gamma/\Gamma \cap R \to 1,$$

where R is the radical of G. Then $\Gamma \cap R$ is a uniform lattice in R and the quotient group $\Gamma/\Gamma \cap R$ is a uniform lattice in the semisimple group $S = G/R$. We show that the result holds for lattices in solvable Lie groups (outer automorphisms of polycyclic groups) and semisimple Lie groups (Mostow's strong rigidity and Weil's local rigidity). Then we use group cohomology (automorphisms of group extensions) to treat the general case. We refer to the excellent survey [VGS88] for the aforementioned results on lattices in Lie groups.

As a corollary, we obtain the following result ([Gol23, Theorem 1.6]).

Corollary 6. *Let X be a compact complex parallelizable manifold. Then the group* $\mathrm{Aut}(X)$ *is Jordan.*

An interesting question for further research is to find an effective Jordan constant in terms of certain invariants of the Lie group and the lattice Γ.

Question 7. Let S be a complex semisimple Lie group and $\Gamma \subset S$ a uniform lattice. Let M be a $\mathbb{Z}\Gamma$-module, finitely generated as an abelian group. Is it possible to bound the order of

$$H^1(\Gamma, M)_{tors}$$

by a function of $\dim(S)$, $\mathrm{vol}(S/\Gamma)$ and the number of generators of M?

References

[Gol23] A. Golota. Finite groups acting on compact complex parallelizable manifolds. arXiv:2302.13513.

[VGS88] E. Vinberg, V. Gorbatsevich, O. Shvartsman. Discrete subgroups of Lie groups. (Russian) *Current problems in mathematics. Fundamental directions*, Vol. 21 (Russian), 5–120, 215, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988.

[Wa54] H.-C. Wang. Complex parallelisable manifolds. *Proc. A.M.S.* 5, 771–776 (1954).

[Win98] J. Winkelmann. Complex analytic geometry of complex parallelizable manifolds. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* No. 72–73 (1998), x+219 pp.

International Laboratory of Mirror Symmetry, NRU HSE

Email address: `agolota@hse.ru`

Holomorphic potential on symplectic toric manifolds

Goncharov Viacheslav

1. Symplectic geometry

Definition. A pair (M, ω) is called symplectic manifold, if M is a smooth manifold and $\omega \in \Omega^2(M)$ is a closed non-degenerate 2-form.

It is immediate corollary from the definition that all symplectic manifolds are orientable and of even dimension. Here are some basic examples:

(1) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, where $\mathbb{R}^{2n}$ has coordinates $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ and $\omega_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$
(2) (T^*X, ω), where X – is any smooth manifold and $\omega = -d\alpha$, where α is a 1-form given by $\alpha_{(x,\xi)} = (d_{(x,\xi)}\pi)^*\xi$ at point $(x, \xi) \in T^*X$.

Definition. A map $f\colon (M, \omega_M) \to (N, \omega_N)$ of symplectic manifolds is called symplectomorphism if it is a diffeomorphism and $f^*\omega_N = \omega_M$.

Darboux theorem says that all symplectic manifolds of the same dimension are locally symplectomorhpic. In other words, symplectic manifolds do not have local invariants (such as curvature in Riemannian geometry). Thus to understand something about these objects we need to study global invariants. Lagrangian submanifolds may play such role.

Definition. Let (M^{2n}, ω) be a $2n$-dimensional symplectic manifold. A submanifold X of M is called Lagrangian if, at each point $p \in X$, $\omega_p|_{T_pX} \equiv 0$ and $\dim T_pX = n$.

2. Almost complex structure

Definition. A vector space V is said to have almost complex structure if there is an endomorphism $J\colon V \to V$ such that $J^2 = -\mathrm{Id}$

Definition. A manifold M is said to be endowed with almost complex structure if there is a smooth family $\{J_p\}_{p\in M}$ of almost complex structures for each T_pM. The pair (M, J) is called almost complex manifold.

Definition. Let j be a complex structure on Riemannian surface Σ^2.
Pseudo-holomorphic curve is a map $u\colon (\Sigma^2, j) \to (M, J)$ such that

$$du \circ j = J \circ du$$

3. Compatible structures. Kähler potential

Definition. Let (M, ω) be a symplectic manifold. An almost complex structure J on M is called compatible with ω (or ω-compatible) if $g(u, v) := \omega(u, Ju)$ is a Riemannian metric. The triple (ω, g, J) is called compatible triple.

Definition. A Kähler manifold is a symplectic manifol (M, ω) equipped with an integrable compatible almost complex structure. The symplectic form ω is then called a Kähler form.

4. Symplectic toric varieties

4.1. Moment map.

Definition. Let (M,ω) be a symplectic manifold. We say that there is a symplectic action of Lie group G on (M,ω) if there exists a homomorhphism

$$\psi\colon G \to \mathrm{Symp}(M,\omega) \subset \mathrm{Diff}(M)$$

Definition. Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra of Lie group G. The action ψ is a hamiltonian action on symplectic manifold (M^{2n},ω) if there exists a map

$$\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$$

such that

(1) For each $X \in \mathfrak{g}$ let
- $\mu^X\colon M \to \mathbb{R}$, $\mu^X(p) := \langle \mu(p), X\rangle$
- $X^\#$ be a vector field on M generated by $\{\exp tX | t \in \mathbb{R}\} \subset G$

Then
$$d\mu^X = \iota_{X^\#}\omega$$

(2) For all $g \in G$
$$\mu \circ \psi_g = \mathrm{Ad}_g^* \circ \mu$$

The map μ is called moment map for a hamiltonian G-space (M,ω,G,μ).

We will be interested only in the case when $G = \mathbb{T}^n$, i.e. our Lie group is a torus of half dimension of symplectic manifold.

The Atiyah-Guillemin-Sternberg theorem tells that for $G = \mathbb{T}^m$ the image $\mu(M)$ of the moment map is a convex polytope which is called moment polytope.

Definition. A $2n$-dimensional symplectic toric manifold is a compact connected symplectic manifold (M^{2n},ω) equipped with an effective hamiltonian action of an n-torus $\mathbb{T}^n$ and with a corresponding moment map $\mu : M \to \mathbb{R}^n$.

It turns out that for the symplectic toric manifolds the moment polytope is of very special type.

4.2. Delzant polytopes.

Definition. A Delzant polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ is a convex polytope satisfying:

- it is simple, i.e. there are n edges meeting at each vertex;
- it is rational, i.e., the edges meeting at the vertex p are rational in the sense that each edge is of the form $p + tu_i$, $t \geq 0$, where $u_i \in \mathbb{Z}^n$;
- t is smooth, i.e., for each vertex, the corresponding $u_1, \dots, u_n$ can be chosen to be a $\mathbb{Z}$-basis of $\mathbb{Z}^n$.

There is remarkable theorem of Delzant.

Theorem 1 (Delzant). *Symplectic toric manifolds are classified by Delzant polytopes. More specifically, there is the following one-to-one correspondence*

$$\{\textit{Symplectic toric manifolds}\} \longleftrightarrow \{\textit{Delzant polytopes}\}$$
$$(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu) \longmapsto \mu(M)$$

5. Kähler potential for toric varieties

A Delzant polytope P can be described by a set of inequalities of the form $\langle x, v_r\rangle \geq \lambda_r, r = 1, \ldots, d$, where d is the number of faces of Delzant polytope P, each v_r being a primitive element of the lattice $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ and inward-pointing normal to the r-th $(n-1)$-dimensional face of P. Consider the affine functions $\ell_r \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, r = 1, ..., d$, defined by

$$\ell_r(x) = \langle x, v_r\rangle - \lambda_r$$

Then $x \in \mathring{P}$ if and only if $\ell_r(x) > 0$ for all r and hence the function

$$g_P(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \ell_r(x)\log(\ell_r(x)) \quad (\heartsuit)$$

is smooth on $\mathring{P}$.

Theorem 2 (Guillemin). *The "canonical" compatible complex structure on toric symplectic manifold (M^{2n}, ω) is given in symplectic coordinates (x, y) of $\mathring{M} \cong \mathring{P} \times \mathbb{T}^n$ by*

$$J_P = \begin{pmatrix} 0 & -Hess(g_P)^{-1} \\ Hess(g_P) & 0 \end{pmatrix}$$

6. Problem statement

Theorem 3. *Let (M_P, ω_P, μ_P) be the toric symplectic manifold associated to a Delzant polytope $P \subset \mathbb{R}^n$, and J any compatible toric complex structure. Then J is determined by a potential $g \in C^\infty(\mathring{P})$ of the form*

$$g = g_P + h$$

where g_P is given by $(\heartsuit)$, h is smooth on the whole P, and the matrix $G = Hess_x(g)$ is positive definite on $\mathring{P}$.

6.1. **Further plan.** Since for a given toric symplectic manifold we know everything about its compatible complex structures, we can study subobjects of these to structures: Lagrangian submanifolds and pseudo-holomorphic curves.

The idea is the following. In Delzant polytope we consider some set (namely a tropical curve) and then we want to lift in our manifold in two ways: one way to a Lagrangian submanifold and the other to a pseudo-holomorhic curve.

Об одном алгебраическом подходе в дифференциальных уравнениях

Роман Елисеев

Системы дифференциальных уравнений и $\mathcal{D}$-модули. Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений

$$Pu = v$$

Мы не предполагаем, что число неизвестных функций k совпадает с числом уравнений m;
В качестве примера рассмотрим систему

$$(*)\frac{\partial u}{\partial x^1} = v_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x^2} = v_2, \quad x = \left(x^1, x^2\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Дифференцируя первое уравнение по x^2, а второе - по x^1, получаем дифференциальные следствия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial v_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial v_2}{\partial x^1},$$

а из них - дифференциальное условие согласования

$$(**)\frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} = 0.$$

В силу леммы Пуанкаре условие (**) является необходимым и достаточным условием разрешимости системы (*); поэтому в данном случае ясно, что никаких дифференциальных условий согласования, не выводимых из (**), не существует. Однако в общем случае дело обстоит не так просто, и возникает вопрос о том, как выписать полную систему условий согласования (и конечна ли она). Здесь оказывается полезным встать на «алгебраическую» точку зрения. Каждое условие согласования можно задавать матрицей-строкой $\widetilde{Q} = \left(\widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_m\right)$ дифференциальных операторов, так что само условие имеет вид

$$(***)\tilde{Q}v = \tilde{Q}_1 v_1 + \cdots + \tilde{Q}_m v_m = 0.$$

При этом соотношение (***) является дифференциальным условием согласования для исходной системы тогда и только тогда, когда

$$\tilde{Q}P = 0$$

Это был несложный пример того, как естественным образом возникают алгебраические структуры в дифференциальных уравнениях.

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть X - комплексноаналитическое многообразие. Требуется продолжить решение дифференциального уравнения $Pu = f$, где P - голоморфный дифференциальный оператор на X, из некоторой области $\Omega_0 \subset X$ в более широкую область $\Omega_1 \subset X$. Будем продолжать решение «постепенно», деформируя область Ω_0 к Ω_1 через семейство $\Omega_t, t \in [0, 1]$. Оказывается, что если конормаль к границе области Ω_t не проходит через «запрещенные направления» ни при каком $t \in [0,1]$, то решение можно продолжить из Ω_0 в Ω_1. Более точно, пусть $\sigma(P)-$ главный символ оператора P, а

$$\operatorname{char}(P)=\left\{(x,\xi) \in T^* X: \sigma(P)(x,\xi)=0\right\}$$

- множество характеристических векторов оператора P. Тогда запрещенные направления - это в точности направления характеристических векторов.

Естественной формализацией «запрещенных направлений» на языке пучков является понятие микроносителя. Микроноситель пучка $\mathcal{F}$ - это замкнутое подмножество

$$\mathrm{SS}(\mathcal{F}) \subset T^* X$$

определяемое следующим образом: пусть $\Phi \in C^1(X)-$ вещественная функция; тогда $\left(x_0, d \Phi\left(x_0\right)\right) \notin \mathrm{SS}(\mathcal{F})$, если когомологии пучка $\mathcal{F}$ с носителями в $\left\{x: \Phi(x) \geq \Phi\left(x_0\right)\right\}$ тривиальны в точке x_0.

Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ - когерентный $\mathcal{D}_X$-модуль на комплексно-аналитическом многообразии X и пусть $\mathcal{F}$ - комплекс решений модуля $\mathcal{M}$. Тогда

$$\mathrm{SS}(\mathcal{F})=\operatorname{char}(\mathcal{M})$$

где $\operatorname{char}(\mathcal{M})$ - характеристическое многообразие модуля $\mathcal{M}$. Теперь приведем таблицу соответсвия между стандартными понятиями в теории дифференциальных уравнений и их аналогами в теории D-модулей.

Традиционный подход		Подход, связанный с теорией D-модулей
Система дифференциальных уравнений $PU=v$	$\leftrightarrow$	D-модуль $\mathcal{M}=\mathcal{D}^k /\left(\mathcal{D}^m P\right)$
Дифференциальные условия согласования на правые части $Qv=0$	$\leftrightarrow$	Второй член свободной резольвенты $\mathcal{D}^{\boldsymbol{s}} \xrightarrow{Q} \mathcal{D}^{\mathbf{m}} \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$
Пространство $\operatorname{Ker} P$ решений однородного уравнения	$\leftrightarrow$	$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ – класс функций, в котором рассматривается уравнение
Коядро оператора P в пространстве правых частей, удовлетворяюших условию согласования, Coker $P=\{v \mid Qv=0\} /\{v \mid v=Pu\}$	$\leftrightarrow$	$\operatorname{Ext}_{\mathcal{D}}^{\mathbf{1}}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$
Характеристики char P	$\leftrightarrow$	Характеристическое многообразие char $\mathcal{M}$ модуля $\mathcal{M}$
Гамильтониан H оператора P	$\leftrightarrow$	Характеристический идеал $\operatorname{Icar}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{O}\left(T^* X\right)$
Бихарактернстики и системы Гамильтона	$\leftrightarrow$	Бихарактеристические листы и инволютивные распределения
Начальные данные в задаче Коши и условия согласования на них	$\leftrightarrow$	Индуцированная система $\mathcal{M}_{\boldsymbol{Y}}$
Волновой фронт решения	$\leftrightarrow$	Микроноситель $\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ пучка решений $\mathcal{F}$

Базисы Гребнера

Емиж И.Т.

Во многих задачах коммутативной алгебры возникают вопросы о принадлежности многочлена от нескольких переменных к тому или иному идеалу. Одним из инструментов проверки является базис Гребнера.

1 Многочлены от одной переменной

Напомним, что кольцо многочленов $F[x]$ является Евклидовым, то есть целостным кольцом в котором задана функция $deg(f)$

$$deg : F[x] \setminus 0 \to N_0$$

Удовлетворяющая свойствам:

1. $deg(ab) \geq deg(a)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда элемент b обратим.

2. Для любых $a, b \in F[x]$, где $b \neq 0$, существуют такие $q, r \in F[x]$, что $a = qb + r$, где либо $r = 0$, либо $deg(r) < deg(b)$.

То есть в данном кольце существует деление с остатком и соответственно алгоритм Евклида. Следовательно справедливо

Предложение 1.1. *Кольцо $F[x]$ является кольцом главных идеалов. (то есть каждый идеал порожден некоторым элементом)*

2 Деление многочленов от нескольких переменных

Чтобы определить деление с остатком нужно ввести некоторый порядок на мономах. Далее будем считать, что порядок на мономах введен лексикографически, то есть моном $x^\alpha = x^{\alpha_1} ... x^{\alpha_n}$ старше монома $x^\beta = x^{\beta_1} ... x^{\beta_n}$, если $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_k = \beta_k, \alpha_{k+1} > \beta_{k+1}$.

Пусть $f = a_\alpha x^\alpha + ...$ и $g = b_\beta x^\beta + ...$, где $a_\alpha x^\alpha$ и $b_\beta x^\beta$ старшие члены соответствующих многочленов, если некоторый член $c_\gamma x^\gamma$ многочлена f делится на $b_\beta x^\beta$, положим $f_1 = f - \frac{c_\gamma x^\gamma}{b_\beta x^\beta} g$, применим к f_1 такое же преобразование и т.д.

Аналогично можно определять деление с остатком многочлена f на несколько многочленов $f_1, f_2, ..., f_s$. В результате получим представление $f = u_1 f_1 + u_2 f_2 + ... + u_s f_s + r$, где у многочлена r нет членов делящихся на старшие мономы многочленов $f_1, f_2, ..., f_s$. В таком случае будем говорить, что r – остаток от деления f на многочлены $f_1, f_2, ..., f_s$.

Пример 2.1. *Рассмотрим кольцо многочленов* $\mathbb{R}[x_1, x_2]$. *Пусть* $f = x_1^2 + x_2^2$ *и* $f_1 = x_1^2 + x_2$, $f_2 = x_1 + x_2$. *Тогда справедливы равенства*

$$f = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + x_2^2 - x_2$$

$$f = 0 \cdot f_1 + (x_1 - x_2) f_2 + 2x_2^2$$

то есть такой остаток определен не однозначно. (Одно из возможных определений базиса Гребнера как раз и заключается в том, что остаток любого многочлена f *на данный базис определен однозначно)*

Определение 2.2. *Будем говорить, что (ненулевые) многочлены* $g_1, g_2, ..., g_t \in I$ *образуют базис Гребнера идеала* I, *если у любого (ненулевого) многочлена* $f \in I$ *старший член делится на старший член одного из многочленов* $g_1, ..., g_t$.

Теорема 2.3. *Многочлены* $g_1, g_2, ..., g_t$ *образуют базис Гребнера идеала* I *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1. $f \in I \Leftrightarrow$ *остаток от деления на* $g_1, g_2, ..., g_t$ *равен 0;*

2. $f \in I \Leftrightarrow \sum h_i g_i$ *и старший моном многочлена* f *равен старшему из произведений старших мономов* $h_i g_i$;

3. *Идеал* $L(I)$, *порожденный старшими членами элементов идеала* I, *порожден старшими членами многочленов* $g_1, g_2, ..., g_t$.

Теперь возникает вопрос, как выяснить за конечное число шагов, является ли данный набор базисом Гребнера и как находить эти базисы. Одним из таких алгоритмов является алгоритм Бухбергера.

Пусть $f = a_\alpha x^\alpha + ...$ и $g = b_\beta x^\beta + ...$ и x_γ – НОК мономов $a_\alpha x^\alpha$ и $b_\beta x^\beta$. Положим $S(f, g) = \frac{x_\gamma}{a_\alpha x^\alpha} f - \frac{x_\gamma}{b_\beta x^\beta} g$.

Теорема 2.4 (Бухбергер)**.** *Многочлены* $g_1, g_2, ..., g_t$ *образуют базис Гребнера тогда и только тогда, когда при всех* $i \neq j$ *остаток от деления многочлена* $S(g_i, g_j)$ *на* $g_1, g_2, ..., g_t$ *равен нулю.*

С помощью данной теоремы можно показать, что следующий алгоритм позволяет найти базис Гребнера идеала, порожденного многочленами $f_1, ..., f_s$.

Вычислим остатки от деления многочленов $S(f_i, f_j)$ на $f_1, ..., f_s$ и добавим все ненулевые остатки к набору $f_1, ..., f_s$. Повторим и т.д. Ясно, что эта процедура завершается за конечное число шагов, а согласно предыдущей теореме мы получим базис Гребнера.

Список литературы

[1] Adams W. W., Loustaunau P. An introduction to Gröbner bases. – American Mathematical Society, 2022. – Т. 3.

[2] Buchberger B., Winkler F. (ed.). Gröbner bases and applications. – Cambridge University Press, 1998. – Т. 251.

МОТИВНЫЙ СПЕКТР УОЛЛА

ЕГОР ЗОЛОТАРЕВ

Краткое описание. Одно из первых исторических применений стабильной теории гомотопий – вычисление различных групп (ко)бордизмов (неориентированных, ориентированых, унитарных, ...) с помощью теоремы Понтрягина–Тома. При этом, вычисление ориентированных и специальных унитарных кобордизмов основано на анализе вещественных и комплексных σ_1–ограниченных кобордизмов, которые представляются вещественным $\mathsf{W}(\mathbb{R})$ и комплексным $\mathsf{W}(\mathbb{C})$ спектрами Уолла соответственно [St].

В работе строится и изучается мотивный аналог спектров Уолла, который является объектом в стабильной $\mathbb{A}^1$–гомотопической категории Мореля–Воеводского $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$ [Mor], [MV]. При этом данный спектр задается явной геометрической конструкцией.

А именно, строится мотивный симметрический спектр W, который снабжается естественной стуктурой MSL–модуля, с естественными морфизмами MSL–модулей $\mathsf{MSL} \to \mathsf{W} \to \mathsf{MGL}$ (здесь MGL–спектр алгебраических кобордизмов Воеводского, а MSL–спектр ориентированных алгебраических кобордизмов [PW]).

При этом данный спектр отождествляется (после обращения экспоненциальной характеристики поля) с конусом некоторого морфизма $\eta : \Sigma^{1,1}\mathsf{MSL} \to \mathsf{MSL}$, который соответствует алгебраическому отображению Хопфа. Кроме того, доказывается, что существует расщепимый выделенный треугольник $\mathsf{W} \to \mathsf{MGL} \xrightarrow{\Delta} \Sigma^{4,2}\mathsf{MGL}$ в $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$, где Δ–когомологическая операция, описанная в терминах характеристических классов.

Базовые определения. Зафиксируем некоторое базовое совершенное поле k. Будем обозначать категорию гладких многообразий над k через Sm_k. Следующее определение является основным для мотивной теории гомотопий (для определения топологии Нисневича см.[MV]).

Определение. Пунктированным мотивным пространством над k будем называть пунктированный симплициальный пучок в топологии Нисневича на Sm_k. Они образуют категорию, которую мы будем обозначать $\mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$.

Заметим, что так как топология Нисневича является субканонической, существует вложение Йонеды $\mathsf{Sm}_\mathsf{k} \to \mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$, которое отображает гладкое многообразие в предствимый им пучок (с добавлением внешней отмеченной точки). Кроме того, данная категория содержит все пунктированные симплициальные множества и имеет структуру моноидальной категории по отношению к смэш-произведению мотивных пространств.

На $\mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$ существует структура моноидальной симплициальной модельной категории, слабые эквивалентности которой порождены морфизмами вида $X \times \mathbb{A}^1 \to X$, где $X \in \mathsf{Sm}_{\mathsf{k}}$. Соответствующая гомотопическая категория $\mathsf{H}_*(\mathsf{k}) := Ho(\mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*})$ называется *нестабильной мотивной гомотопической категорией.*

Определение. *Стабильной мотивной гомотопической категорией* называется $\mathbb{P}^1$–стабилизация категории $\mathsf{H}_*(\mathsf{k})$ (которая является гомотопической категорией от модельной категории $\mathbb{P}^1$–спектров) и обозначается $\mathsf{SH}(\mathsf{k}) := \mathsf{H}_*(\mathsf{k})[(\wedge\mathbb{P}^1)^{-1}]$.

Категория $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$ обладает структурой симметрической моноидальной триангулированной категории. При этом многие известные когомологические инварианты представляются в данной категории (группы Чжоу, мотивные когомологии, алгебраическая K-теория, эрмитова K-теория, алгебраические кобордизмы,...).

Кострукция и основные результаты. Для построения спектра W обозначим через $\mathsf{Gr_n} := \mathsf{colim}(\mathsf{Gr_n}(\mathbb{A}^m)) \in \mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$ грассманиан n–мерных подпространств в $\mathbb{A}^\infty$. Над $\mathsf{Gr_n}$ весит тавтологическое векторное расслоение $\gamma_n \to \mathsf{Gr_n}$. Рассмотрим векторное расслоение $\mathsf{det}(\gamma_n \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ над произведением $\mathsf{Gr_n} \times \mathbb{P}^1$ и обозначим через $\mathsf{WGr_n}$ дополнение к нулевому сечению данного расслоения $\mathsf{WGr_n} := \mathsf{det}(\gamma_n \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^o$. Обозначим через γ_n^W пулбэк тавтологического расслоения вдоль проекции $\mathsf{WGr_n} \to \mathsf{Gr_n}$.

Определение. *Мотивный спектр Уолла* W состоит из пространств Тома $\mathsf{W}_n := \mathsf{Th}(\gamma_n^W) = \gamma_n^W/(\gamma_n^W)^o$ и естественных структурных отображений индуцированных вложениями грассманианов.

Легко видеть из определения спектра W, что существуют естественные морфизмы $\mathsf{MSL} \to \mathsf{W} \to \mathsf{MGL}$. В отличии от других спектров Тома, таких как MGL, MSL и MSp, на спектре Уолла не существует естественной кольцевой структуры, однако существует естественное действие MSL. Следующее утверждение получается конструкцией соответствующего мотивного симметрического спектра.

Утверждение. *На спектре* W *существует естественная структура* MSL–*модуля. При этом морфизмы* $\mathsf{MSL} \to \mathsf{W} \to \mathsf{MGL}$ *являются морфизмами* MSL–*модулей.*

Для формулировки следующего результата напомним, что *алгебраическим отображением Хопфа* называется проекция $H : \mathbb{A}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}^1$. Так как $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ и $\mathbb{P}^1$ являются мотивными сферами денадстройка H определяет некоторый элемент η в гомотопических группах мотивного сферического спектра.

Теорема. *Существует эквивалентность* MSL*–модулей* $(\mathsf{MSL}/\eta)[\frac{1}{e}] \xrightarrow{\simeq} \mathsf{W}[\frac{1}{e}]$, *где* $\mathsf{MSL}/\eta := \mathsf{Cone}(\Sigma^{1,1}\mathsf{MSL} \xrightarrow{\eta} \mathsf{MSL})$, *а* e*–экспоненциальная характеристика поля* k.

Напомним, что MGL–когомологические операции описываются через характеристические классы $\mathsf{MGL}^{*,*}(\mathsf{MGL}) \cong \mathsf{MGL}^{*,*}[[c_1, c_2, \dots]]$.

Теорема. *Существует выделенный треугольник* $\mathsf{W}[\frac{1}{e}] \to \mathsf{MGL}[\frac{1}{e}] \xrightarrow{\Delta[\frac{1}{e}]} \Sigma^{4,2}\mathsf{MGL}[\frac{1}{e}]$ *в* $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$, *где* $\Delta \in \mathsf{MGL}^{4,2}(\mathsf{MGL})$ *когомологическая операция соответствующая классу* $c_1(det) \smile c_1(det^*)$.

Выделенный треугольник из теоремы выше является (неканонически) расщепимым. Это позволяет вывести следующее следствие, которое показывает, что в универсальном случае разница между SL и GL ориентациями контролируется стабильным мотивным элементом Хопфа.

Следствие. *На спектре* $(\mathsf{MSL}/\eta)[\frac{1}{e}]$ *существует структура кольцевого ориентированного мотивного спектра.*

Дальнейшие планы. В будущем планируется применить полученные результаты для вычисления "геометрической части" MSL-кобордизмов, которая известна на данный момент только после обращения η в гомотопических группах MSL, см.[BH].

Список литературы

[BH] T. Bachmann, M. Hopkins, *η–periodic motivic stable homotopy theory over fields*, arXiv:2005.06778

[Mor] F. Morel, *An introduction to $\mathbb{A}^1$–homotopy theory*, Contemporary developments in algebraic K-theory, ICTP Lect. Notes XV (2004), 357–441

[MV] F. Morel, V. Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHES, 90 (1999), 45–143

[PW] I. Panin, C. Walter, *On the algebraic cobordism spectra* MSL *and* MSp, Algebra i Analiz, 34:1 (2022), 144–187

[St] R. E. Stong, *Notes on cobordism theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1968

[Zol] E. Zolotarev, *Motivic Wall spectrum*, work in progress

Санкт–Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 191023, Санкт–Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, Россия

Email address: `zolotarev-egv@yandex.ru`

КРИВИЗНА СХОУТЕНА В ГЕОМЕТРИИ САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Николай Каренин

Преамбула. При рассмотрении нормальных почти контактных метрических многообразий, т.е. Сасакиевых многообразий, в качестве локального инварианта целесообразно принять тензор, отличный от тензора кривизны Римана, но являющийся более естественным при работе с геометрией контактного распределения. В связи с чем можно полностью отказаться от использования риманова тензора кривизны, который неприменим для работы со связностями с кручением, которые возникают при решении задач современной физики.

Тензор кривизны Схоутена. Тензором, способным заменить тензор кривизны Римана, является тензор кривизны Схоутена, введённый сначала Схоутеном, а затем изучавшийся и доработанный В.В. Вагнером. Математически, это есть отображение $S : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, задаваемое следующей формулой

$$S(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]}Z - P[Q[X, Y], Z],$$

где P, Q – проекции TM на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^\perp$, соответсвенно, $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp = TM$.

Сасакиевы пространственные формы. Если на нормальном почти контактном метрическом многообразии риманова φ-секционная кривизна постоянна и равна κ, т.е. речь идёт о сасакиевых пространственных формах, то тензор кривизны Римана R имеет следующее выражение

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}(\kappa+3)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] - \frac{1}{4}(\kappa-1)[\eta(Y)\eta(Z)X -$$

$$-\eta(X)\eta(Z)Y + g(Y,Z)\eta(X)\xi - g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(\varphi Y,Z)\varphi X +$$

$$+g(\varphi Y,Z)\varphi Y) + 2g(\varphi X,Y)\varphi Z].$$

Кривизна Схоутена и Римана могут быть выражены одна через другую при помощи некоторого соотношения.

Основная идея изучения Сасакиевой геометрии в таком ключе состоит в том, что тензор кривизны Схоутена в геометрии почти контактных метрических многообразий (и в частности, многообразий Сасаки) является объектом, более фундаментальным, чем тензор кривизны Римана.

Основная задача. Необходимо удостовериться в том, насколько два понятия кривизны соотносятся, а именно, требуется установить связь между классификациями сасакиевых многообразий, где центральным объектом является тензор Римана и где тензор Схоутена.

Соответствие Дольда-Кана

Даня Кузаков

Июль 2023

Определение 1. *Категория Δ состоит из ординалов $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, морфизмы — отображения, сохраняющие порядок ($i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$).*
Симплициальное множество — это контравариантный функтор $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Пример 2. *Нерв категории $N(C)_n = \mathrm{Func}(\underline{[n]}, C)$.*

Определение 3. *Пусть у нас есть функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, тогда левым расширением Кана F вдоль K называют функтор $\mathrm{Lan}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ вместе с естественным преобразованием $\eta : F \Rightarrow \mathrm{Lan}_K F \cdot K$, универсальным среди стрелок из F в $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "K"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Lan}_K F"'] &
\end{tikzcd}$$

Универсальность понимается в следующем смысле. Для любой пары, состоящей из функтора $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ и естественного преобразования $\gamma : F \to G \cdot K$, имеется единственное естественное преобразование $\alpha : \mathrm{Lan}_K F \to G$ такое, что для естественных преобразований выполнено равенство $\gamma = \alpha_K \cdot \eta$.

Таким образом, соответствие $\alpha \mapsto \alpha K \cdot \eta$ определяет *сопряжение функторов*

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(\mathrm{Lan}_K F, G) \simeq \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(F, G \cdot K).$$

Пример 4. *Копредел является левым расширением Кана.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "K"'] & & \mathcal{E} \\
& \mathbb{1} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Lan}_K F = \mathrm{colim}\, F"'] &
\end{tikzcd}$$

Функтор *геометрической реализации* симплициального множества является левым расширением Кана.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} \arrow[r, "|\cdot| = \mathrm{Lan}_Y F"] & \mathbf{Top} \\
\Delta \arrow[u, hook, "Y"] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Определение 5. *Пусть $A_\bullet$ — симплициальная абелева группа. Определим нормализованный комплекс NA_* следующим образом*

$$NA_n = \bigcap_{i<n} \ker d_i, \quad \partial = (-1)^n d_n : NA_n \to NA_{n-1}.$$

Теорема 6 (Соответствие Дольда-Кана)**.** *Функтор $N : \mathbf{sAb} \to \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$ определяет эквивалентность соответствующих категорий.*

Функтор в обратную сторону

$$C_* \in \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}), \quad F(C)_\bullet : (\Delta_{\mathrm{inj}})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}, \quad F(C)_n = C_n, \quad d_i : C_n \to C_{n-1} = \begin{cases} 0, \ i < n, \\ \partial, \ i = n. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} (\Delta_{\mathrm{inj}})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F(C)_\bullet"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathbf{Ab} \\ \Delta^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Lan}_i F(C)_\bullet"'] & \end{tikzcd}$$

Определение 7. *Граница n-симплексов*

$$Z_n(X) = \{x \in X_n \mid d_i(x) = 0 \ \forall i \le n\}.$$

Два n-симплекса $x, x' \in Z_n(X)$ будем называть гомотопными и обозначать $x \sim x'$, если $\exists y \in X_{n+1}$, что

$$\begin{cases} d_{n+1} y = x, \\ d_n y = x', \\ d_i y = 0, \ 0 \le i < n. \end{cases} \tag{1}$$

При этом y будем называть гомотопией и обозначать $y : x \sim x'$.
Определим n-ую гомотопическую группу как

$$\pi_n(X) = Z_n(X)/\sim .$$

Теорема 8. *Построенные функторы переводят группы гомологий в гомотопические группы и наоборот.*

Определение 9 (Инволютивная система факторизации)**.** *Систему факторизации $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ будем называть инволютивной, если существует $(-)^* : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}$, такой что:*

1. *$ee^* = 1$, а $e^* e$ формируют множество $\mathcal{E}$-проекторов.*
2. *$\forall \ (m : A \to B) \in \mathcal{M} \ \forall \varphi \in \mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(A) \ \exists \psi \in \mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(B) : m\varphi = \psi m$.*
3. *$\mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(A)$ конечно.*

Определение 10. *Отображение $m : A \to B \in \mathcal{M}$ будем называть существенным, если id_B является единственным элементом $\mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(B)$, который сохраняет m, т. е.*

$$\varphi m = m, \ \varphi \in \mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(B) \Longrightarrow \varphi = \mathrm{id}_B .$$

Пример 11 (Категория Δ)**.** *$\mathcal{E}$ — сюръекции, $\mathcal{M}$ — инъекции, звездочку определим так: каждой сюръекции $e : [m] \twoheadrightarrow [n]$ сопостовляем максимальную секцию $e^* : [n] \hookrightarrow [m]$ (то есть каждому элементы $j \in [n]$ сопоставляется максимальный прообраз $e^{-1}(j) \in [m]$).*
Для оператора вырождения по этому определению получаем $(s^i)^* = d^i$.
Единственным существенным отображением будет d^n.

Несущественные отображения образуют идеал $\mathcal{M}_{\mathrm{in}}$. Можно рассмотреть категорию $\Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\mathrm{in}}$. В случае Δ имеем следующую картину

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & {[1]} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & {[2]} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & {[3]} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

$$\hom(\Xi_\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})_* \simeq \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}).$$

Обозначим $j : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}$, $q : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\mathrm{in}}$. Имеем следующую сопряженность

$$N : [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}] \underset{\mathrm{Lan}_j}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} [\mathcal{M}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}] \underset{q^*}{\overset{\mathrm{Ran}_q}{\rightleftarrows}} [\Xi_{\mathcal{C}}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}]_* : L$$

Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей с краем

Тонышева Николь Сергеевна

НИУ ВШЭ

ntonysheva@hse.ru

Хаос в смысле Дивани

X — метрическое пространство, $T : X \to X$ — непрерывное отображение. $(X, T) := \{T^n\}_{n \in N}$ — динамическая система.

Определение ([3]). Динамическая система (X, T) называется *хаотической*, если:

(1) (X, T) топологически транзитивна;

(2) множество периодических точек всюду плотно в X;

(3) (X, T) чувствительна к начальным условиям.

J. Banks et al. [1]: $(1) + (2) \Rightarrow (3)$.

Теорема (Биркгоф). *X — польское пространство без изолированных точек. Каскад (X, T) топологически транзитивен $\Leftrightarrow \exists x \in X : \overline{\mathcal{O}.x} = X$.*

Хаотическая группа гомеоморфизмов

Определение ([2]). Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия M называется *хаотической*, если:

(1) существует всюду плотная орбита группы;

(2) объединение конечных орбит всюду плотно в M.

$(1) + (2) \Rightarrow$ чувствительность группы G (следует из [5]).

Торальные скручивающие отображения

$\mathbb{T}^2$ — стандартный 2-тор, представим его как квадрат $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ с отождествленными противоположными сторонами.

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \,|\, x \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]\}, \;\; k \in \mathbb{N}, \, k > 2;$$

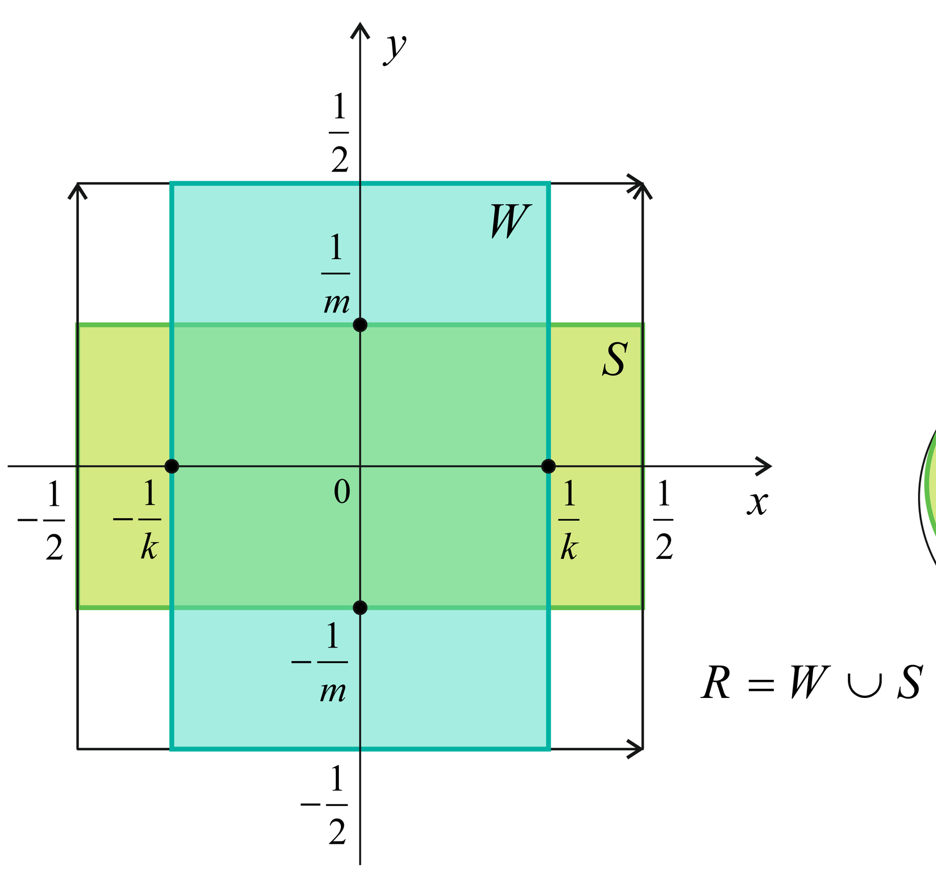
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \,|\, y \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]\}, \;\; m \in \mathbb{N}, \, m > 2.$$

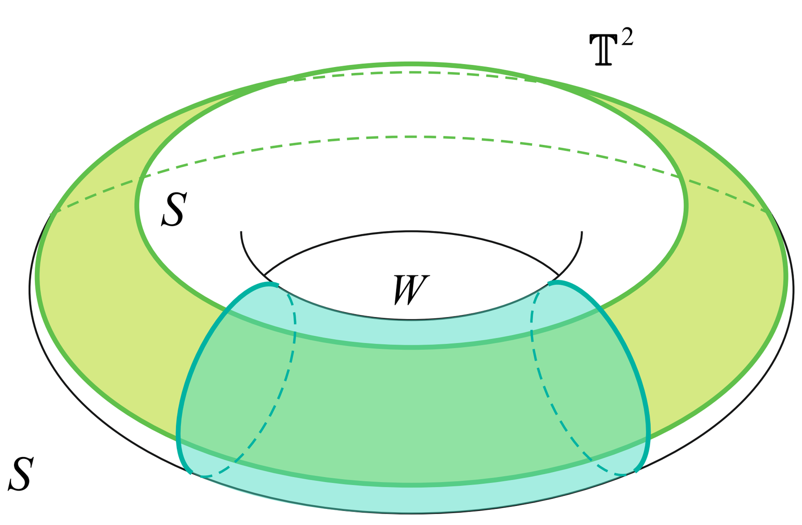
$R := W \cup S$, $a, b \in \mathbb{N}$. Введем следующие отображения:

$$\omega_{a,k}(x, y) := \begin{cases} (x, y + akx) & (x, y) \in W; \\ (x, y) & (x, y) \notin W; \end{cases}$$

$$\nu_{b,m}(x, y) := \begin{cases} (x + bmy, y) & (x, y) \in S; \\ (x, y) & (x, y) \notin S. \end{cases}$$

Определение. Композиция $T_\sigma := \nu_{b,m} \circ \omega_{a,k}$, где $\sigma = (a, b, k, m)$, называется *торальным скручивающим отображением.*



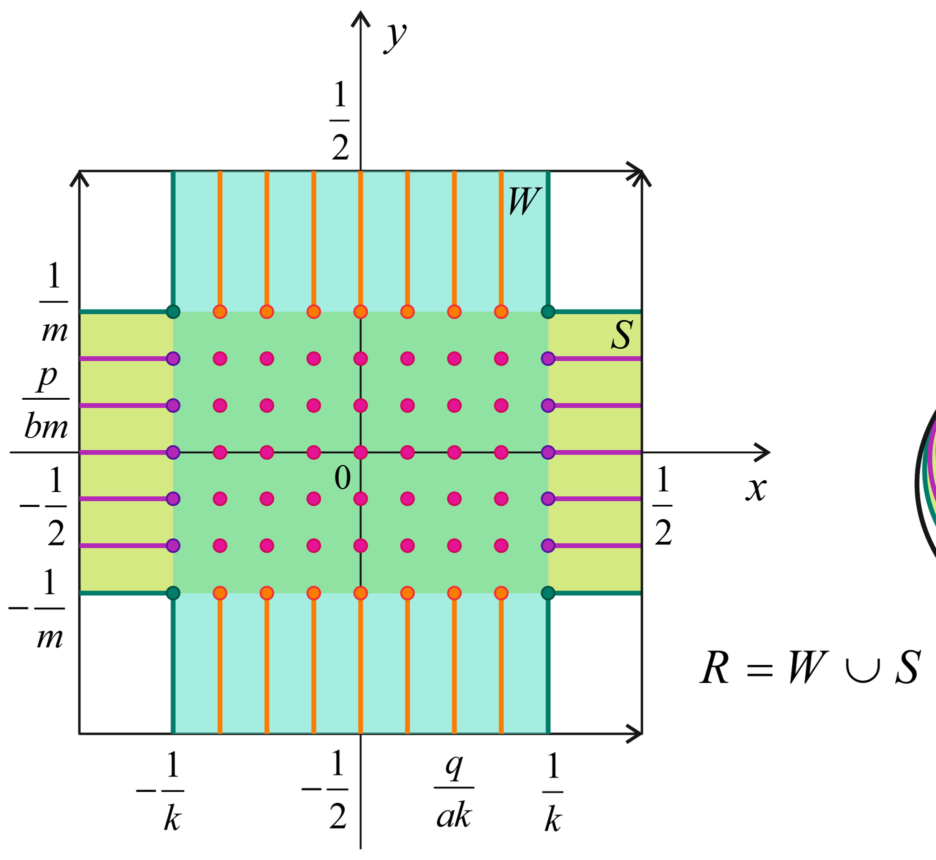


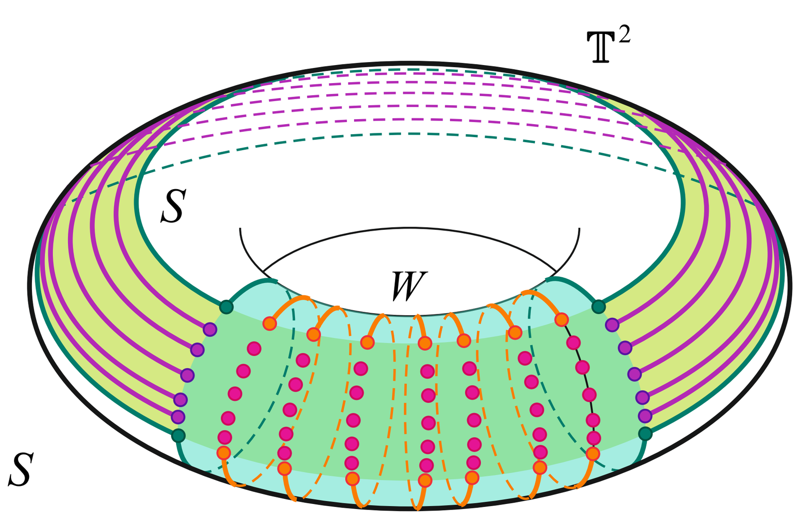
Свойства $T_\sigma : R \to R$:

- T_σ — гомеоморфизм поверхности R;
- $G_\sigma = \langle T_\sigma \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов поверхности R (вытекает из [4]);
- пространство неподвижных точек $Fix(G_\sigma)$ этой группы имеет следующую структуру:

$$Fix(G_\sigma) = \partial R \sqcup DF(G_\sigma) \sqcup IF(G_\sigma), \;\; \text{где}$$

$DF(G_\sigma)$ — максимальное дискретное подпространство в $Fix(G_\sigma)$, т.е. все изолированные неподвижные точки; $IF(G_\sigma)$ — компоненты связности пространства $Fix(G_\sigma)$, гомеоморфные отрезку.





Список литературы

[1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. *On Devaney's definition of chaos,* Amer. Math. Monthly. 1992. Vol. 99, no. 4, 332–334.

[2] G. Cairns, G. Davis, E. Elton, A. Kolganova, and P. Perversi. *Chaotic group actions.* Enseign. Math. 1995. Vol. 41, no. 1-2, 123–133.

[3] R.L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (3rd ed.). NY: Chapman and Hall/CRC, 2021.

[4] R. L. Devaney. *Linked Twist Mappings are Almost Anosov.* In: Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics. 1980. Vol. 819, pp. 121–145. Springer, Berlin, Heidelberg (1980).

[5] Kontorovich, M. Megrelishvili. *A note on sensitivity of semigroup actions.* Semigroup Forum. 2008. Vol. 76, no. 1, 133–141.

Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей с краем

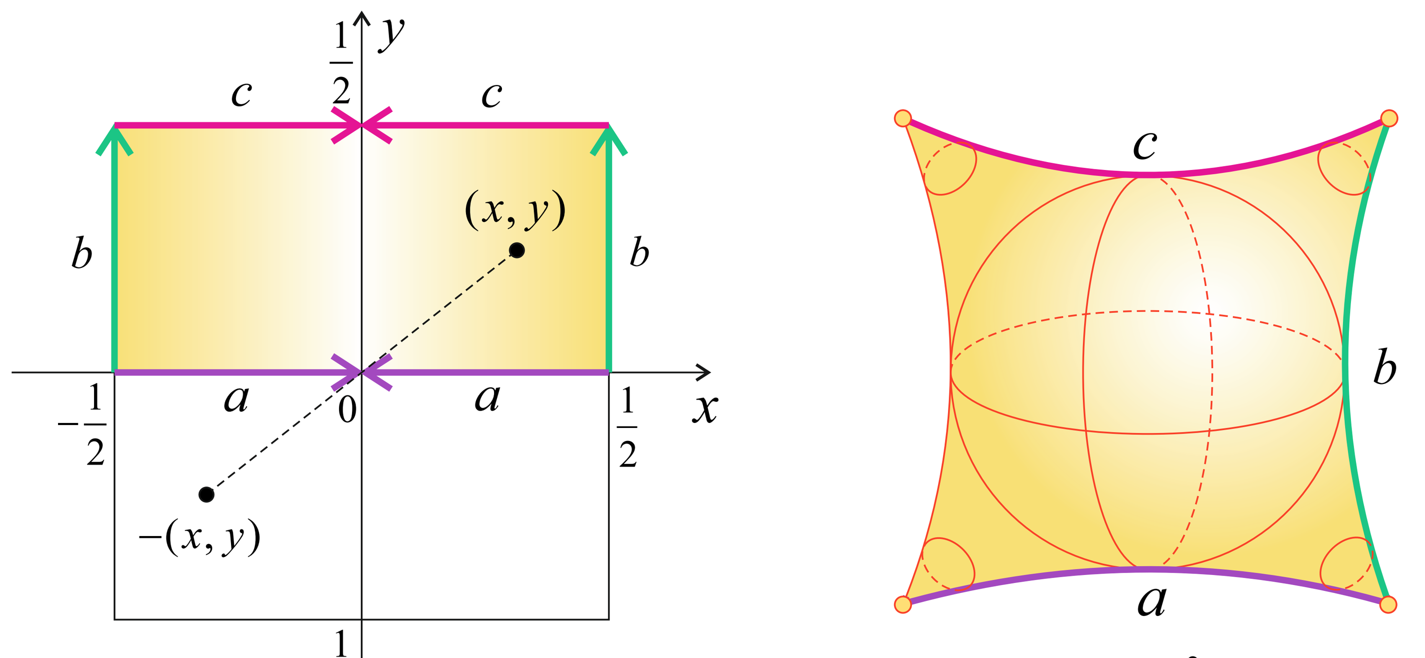
Тонышева Николь Сергеевна

НИУ ВШЭ

ntonysheva@hse.ru

Орбифолд «Подушка»

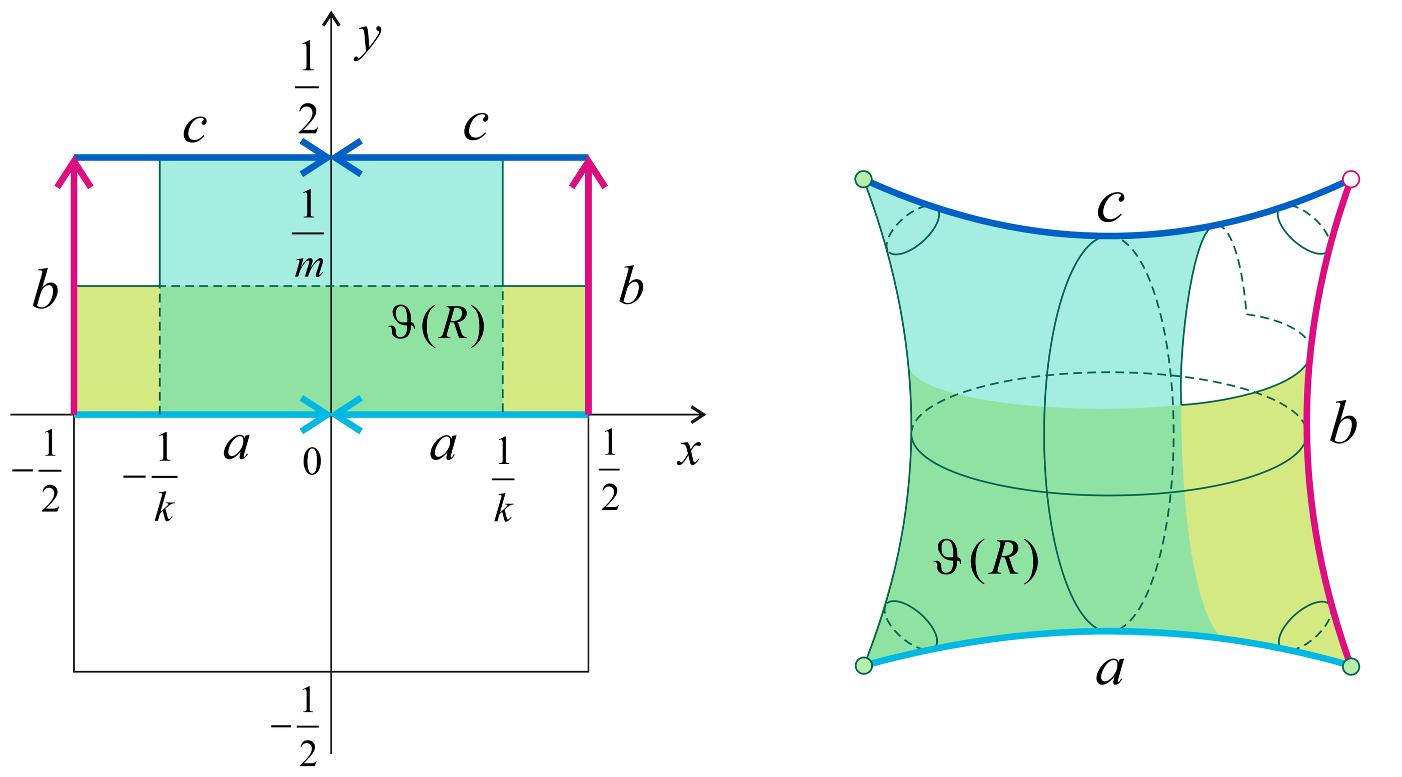
$\gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ — диффеоморфизм тора.
$\Gamma = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ — группа диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$.
$\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$ — орбифолд «Подушка», $\mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$.



$\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$

Хаотические гомеоморфизмы диска $\mathbb{B}^2$

Пусть $\vartheta : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{P}$ — проекция на $\mathcal{P}$ как на пространство орбит. Отображение $T_\sigma : R \to R$ индуцирует на $\vartheta(R) \subset \mathcal{P}$ гомеоморфизм $\widehat{T}_\sigma : \vartheta(R) \to \vartheta(R)$. Отметим, что $\vartheta(R) \cong \mathbb{B}^2$.

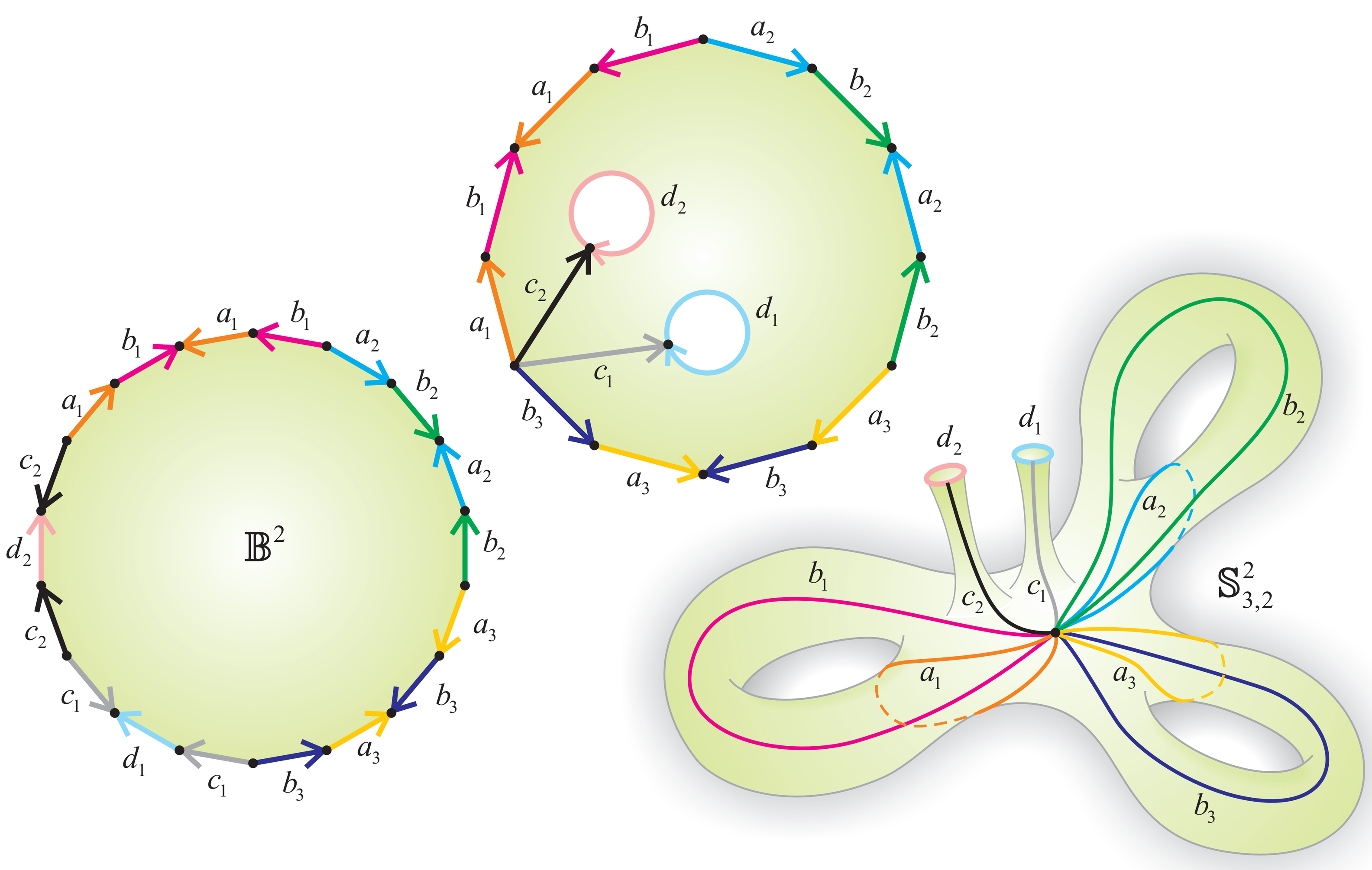


$\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов диска $\mathbb{B}^2$. Она оставляет неподвижными все точки края $\partial\mathbb{B}^2$.

Теорема. *Пусть* $\sigma = (a, b, k, m)$ *— четверка фиксированных натуральных чисел, где* $k \geq 5$, $m \geq 5$. *Тогда* $|DF(\widehat{G}_\sigma)| = 4ab - a - b + 1$.

Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей

Отождествим $\partial\mathbb{B}^2 \cong \mathbb{S}^1$ с некоторым многоугольником и укажем правила склейки его сторон.



В результате получим одну из следующих поверхностей:

- либо сферу с n компонентами края $\mathbb{S}^2_n$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- либо сферу с p ручками и n компонентами края $\mathbb{S}^2_{p,n}$, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- либо сферу с q пленками Мебиуса и n компонентами $\mathbb{N}^2_{q,n}$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

На каждой из перечисленных поверхностей $\widehat{T}_\sigma$ индуцирует гомеоморфизм $\widetilde{T}_\sigma$, и $\widetilde{G}_\sigma = \langle \widetilde{T}_\sigma \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов этой поверхности, причем $|DF(\widetilde{G}_\sigma)| = 4ab - a - b + 1$.

Топологическая сопряженность групп гомеоморфизмов

Группы гомеоморфизмов G и G' пространств X и X' называются *топологически сопряженными*, если $\exists\, f : X \to X'$ — гомеоморфизм и $\exists\, \mu : G \to G'$ — изоморфизм групп такие, что $\forall\, g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu(g)} \\ X & \xrightarrow{f} & X'. \end{array}$$

Лемма. *Если G и G' топологически сопряжены, то:*

(1) $Fix(G)$ и $Fix(G')$ гомеоморфны;

(2) $DF(G)$ и $DF(G')$ гомеоморфны.

Основной результат

Теорема. *Пусть M — произвольная компактная поверхность с краем или без края и $\widetilde{G}_\sigma$, где $\sigma = \sigma(a)$, $a \in \mathbb{N}$, — группа гомеоморфизмов M, определенная ранее. Тогда*

$$\{\widetilde{G}_\sigma \,|\, \sigma = \sigma(a),\ a \in \mathbb{N}\}$$

— семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов M, изоморфных $\mathbb{Z}$.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю Н.И. Жуковой.
Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Список литературы

[1] N.I. Zhukova, N.S. Tonysheva. *Chaotic suspended foliations of topological manifolds.* J. Math. Sci. 2023. (In printing.)

Уразбаев Аскар Амерханович (СПбГУ)

В данной работе рассматривается вопрос классификации локальных гладких открытых пар над нётеровым кольцом R с точностью до мотивных или Нисневич-локальных эквивалентностей. А имеенно, рассматриваются пары схем

$$(U, U - Z) \in \mathrm{Sch}^{\mathrm{pair}}_B,$$

где $U = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ для некоторой гладкой схемы $X \in \mathrm{Sm}_B$ и точки $x \in X$, Z – замкнутая подсхема в U, см. определение **??**. Отметим, что без ораничения общьности схему Z допустимо считать приведённой поскольку имеет место равенство $U - Z = U - Z_{\mathrm{red}}$ в категории открытых подсхем U, где Z_{red} – приведённая подсхема. Когда Z является гладкой схемой над B, тогда хорошо известна Нисневич-локальная эквивалентность

$$(U, U - Z) \simeq_{\mathrm{nis}} (Z \times \mathbb{A}^{\operatorname{codim}_U Z}, Z \times (\mathbb{A}^{\operatorname{codim}_U Z} - 0)), \tag{1}$$

а в работе получено обощение указанного факта на произвольные схемы Z.

Теорема 1. *Пусть $X_0, X_1 \in \mathrm{Sm}_B$ для нетеровой отделимой схемы B, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $U_0 = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X_0,x_0}$ и $U_1 = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X_1,x_1}$ - локальная схема, Z_0 и Z_1 замкнутые подсхемы U_0 и U_1. Предположим, что*

$$\dim_B U_0 = \dim_B U_1$$

и

$$(Z_0)_{\mathrm{red}} \simeq (Z_1)_{\mathrm{red}}.$$

тогда есть Нисневич локальная эквивалентность открытых пар над B

$$(U_0, U_0 - Z_0) \simeq_{\mathrm{nis}} (U_1, U_1 - Z_1); \tag{2}$$

в терминах категории Sch_B эквивалентность (2) означает наличие следующей коммутативной диаграмы

$$\begin{array}{ccccc} U_0 & \xleftarrow{\text{étale}} & \Gamma & \xrightarrow{\text{étale}} & U_1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ Z_0 & \xleftarrow{\cong} & \Theta & \xrightarrow{\cong} & Z_1 \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки – замкнутые вложения заданные по условию, верхние горизонтальные стрелки являются этальными, нижние горизонтальные стрелки являются изоморфизмами, и оба коммутативных квадрата являются расслоенными, т.е.

$$\Gamma \times_{U_0} Z_0 \cong \Theta \cong \Gamma \times_{U_1} Z_1.$$

Следствие 1. *Пусть U_0, U_1, Z_0, Z_1 - такие жe, как и в теореме наверху. Тогда для любого предпучка A на $\mathrm{Sm}^{\mathrm{pair}}$, который удоволетворяет аскиоме вырезания в смысле определения* **??**, *имеет место изоморфизм*

$$A(U_0, U_0 - Z_0) \simeq A(U_1, U_1 - Z_1).$$

Следствие 2. *Пусть X_0, X_1 – гладкте схемы над B, и x_0, x_1 – замкнутые точки. Предположим, что $\dim^{x_0} X_0 = \dim^{x_1} X_1$, и поля вычетов в точке x_0 и x_1 – изоморфны. Тогда существует локальная эквивалентсность пучков Нисневича*

$$X_0/(X_0 - x_0) \simeq_{\mathrm{nis}} X_1/(X_1 - x_1),$$

и как следствие мотивная эквивалентность мотивных пространств

$$X_0/(X_0 - x_0) \simeq_{\mathrm{mot}} X_1/(X_1 - x_1) \in \mathbf{H}(B)$$

в мотивной гомотопической категории Мореля-Воеводского $\mathbf{H}(B)$ [1].

Коль скоро мы говорим о классификации, то следует обсудить и импликацию в обратную сторону, а именно доказательство не изоморфизмов, т.е. утверждения в той или иной степени обратные к теореме 1 и следствию 2.

Теорема 2. *Пусть B – это схема.*

Предположим, что есть изоморфим $X_0/(X_0 - x_0) \simeq X_1/(X_1 - x_1)$ в $\mathbf{H}(B)$, для каких-то $X_0, X_1 \in \mathrm{Sm}_B$ и замкнутых точек $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, тогда

$$\dim_B^{x_0} X_0 = \dim_B^{x_1} X_1 \in \mathbb{Z},$$

и

$$p_0(x_0) = p_1(x_1) \in B, \mathrm{sdeg}_{K_0} L_0 = \mathrm{sdeg}_{K_1} L_1, \tag{3}$$

где $p_0 \colon X_0 \to B$, $p_1 \colon X_1 \to B$ – структурные морфизмы, K_0 и L_0 – поля вычетов в $p_0(x_0)$ и x_0, тоже самое для K_1 и L_1.

Звмечание 1. Так как утверждение (3) в теореме слабее, чем

$$x_0 \simeq x_1,$$

последнее утверждение также справедливо при предположении, что расширения поля L_0/K_0 и L_1/K_1 – простые.

Ушаков Иван Владимирович
Саратовский государственный университет

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ называется симметрическим, если он инвариантен относительно действия группы S_n, то есть для любой подстановки $\tau \in S_n$ выполнено

$$\tau f(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Известны различные $\mathbb{Z}$-базисы в модуле симметрических многочленов. Например, в теории симметрических функций доказано [1]

Теорема 1 Симметрические многочлены могут быть единственным образом представлены как многочлены от $\{e_i\}$ и $\{h_j\}$, то есть

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n] = \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_n]$$

Таким образом, если $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \ldots$ и $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \ldots$, то $\{e_\lambda\}$ и $\{h_\mu\}$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в модуле симметрических многочленов.

Равенство производящих функций $H(t)E(-t) = 1$ позволяет определить многочлены

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t)} = \sum_{k \geqslant 1} h_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{-n} h_k^{(\infty)} t^k.$$

Можно показать, что многочлены $H_k = h_k - h_k^{(\infty)}$ порождают кольцо симметрических лорановских многочленов, то есть наименьшим кольцом, содержащим $\{H_k\}$, является $\Lambda_n^{\pm}$.

Кольца $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ и $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]^{S_n}$ тесным образом связаны с конечномерными полиномиальными и просто конечномерными представлениями соответственно полной линейной группы $\mathrm{GL}(n)$.

Оказывается, с точностью до некоторых отождествлений, похожую роль в теории конечномерных представлений супергруппы Ли $\mathrm{GL}(n, m)$ играет кольцо суперсимметрических многочленов [2]:

$$\begin{aligned}\Lambda_{n,m}^{\pm} = \{&f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]^{S_n \times S_m} \mid \\ &f(t, x_2, \ldots, x_n, t, y_2, \ldots, y_m) \text{ не зависит от } t\}\end{aligned}$$

Если по аналогии определить многочлены

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}(1 - y_j t)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t)} = \sum_{k \geqslant 0} h_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{m-n} h_k^{(\infty)} t^k,$$

то кольцо $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ допускает следующее описание ($m = n = 1$).

Определение 1 Зафиксируем переменные t, $u_1, u_2 \dots$ и $v_1, v_2 \dots$. Положим $u_0 = v_0 = 1$ и $u_i = v_i = 0$ при $i < 0$. Для любого целого числа $i \in \mathbb{Z}$ определим $w_i = u_i - t v_{-i-n+m}$. Тогда кольцо, порождённое переменными $t, u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$ с соотношениями ($i, j \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{vmatrix} w_i & w_{i+1} \\ w_j & w_{j+1} \end{vmatrix} = 0,$$

будем обозначать $U^{\pm}_{1,1}$.

Теорема 2 Отображение

$$\varphi : U^{\pm}_{1,1} \to \Lambda^{\pm}_{1,1}, \quad \varphi(u_i) = h_i, \quad \varphi(v_i) = h^*_i, \quad \varphi(t) = \frac{y}{x},$$

где $h^*_k = h_k(x^{-1}, y^{-1})$, есть изоморфизм колец. Многочлены, индексируемые целыми числами,

$$K_{\lambda,\mu} = (-1)^{\mu} \left(1 - \frac{y}{x}\right) x^{\lambda} y^{\mu}$$

вместе с 1 линейно порождают $\Lambda^{\pm}_{1,1}$.

Язык теоремы 2 позволяет удобно описывать такие гомоморфизмы $\Lambda^{\pm}_{1,1} \cong U^{\pm}_{1,1} \xrightarrow{\varphi} R$, что $\ker \varphi = \langle P_{\lambda,-\lambda} \rangle$ – идеал проективных модулей. На данный момент получены необходимые условия существования в некоторых случаях.

Список литературы

[1] Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. – Oxford university press, 1998.

[2] Sergeev A. N. On rings of supersymmetric polynomials //Journal of Algebra. – 2019. – T. 517. – C. 336-364.