Конференция по теории ветвящихся процессов

и дискретной математике,

посвященная 100-летию со дня рождения

чл.-корр. РАН Б. А. Севастьянова

(3 октября 2023 г., г. Москва, МИАН и ZOOM)

НАУКА
И УНИВЕРСИТЕТЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЕ
ПРОЕКТЫ
РОССИИ

SIMC
Steklov International Mathematical Center

МИАН

Организации

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Математический центр мирового уровня
“Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук”
(МЦМУ МИАН), г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке
Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН,
соглашение № 075-15-2022-265).

Так ли прост надкритический случай в теории ветвящихся процессах в случайной среде?

В. И. Афанасьев

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – исходное вероятностное пространство и Δ – пространство вероятностных мер на $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ с метрикой полной вариации. Рассмотрим случайные элементы $Q_1, Q_2, \ldots$, отображающие $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в Δ. Последовательность $\Pi = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ называется случайной средой.

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *ветвящимся процессом в случайной среде* (ВПСС), если $Z_0 = 1$ и

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}, \qquad n \in \mathbf{N}_0,$$

где предполагается, что при фиксированной случайной среде Π случайные величины $\left\{\xi_i^{(n)},\ i \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_0\right\}$ независимы, причем при фиксированном $n \in \mathbf{N}_0$ величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots$ одинаково распределены с распределением Q_{n+1}. На языке ветвящихся процессов Z_n – численность частиц n-го поколения, $\xi_i^{(n)}$ – число непосредственных потомков i-ой частицы из n-го поколения. Обозначим $\varphi_n(\cdot)$ производящую функцию (случайного) распределения Q_n при $n \in \mathbf{N}$.

Положим при $i \in \mathbf{N}$

$$X_i = \ln \varphi_i'(1), \qquad \eta_i = \frac{\varphi_i''(1)}{(\varphi_i'(1))^2}$$

(при этом считаем, что $\varphi_1'(1), \varphi_1''(1) \in (0, +\infty)$ п.н.). Введем *сопровождающее случайное блуждание:* $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ при $n \in \mathbf{N}$. Заметим, что случайные векторы $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \ldots$ для рассматриваемого ВПСС являются независимыми и одинаково распределенными. ВПСС называется 1) *надкритическим*, если $\mathbf{E}X_1 > 0$, 2) *критическим*, если $\mathbf{E}X_1 = 0$, 3) *докритическим*, если $\mathbf{E}X_1 < 0$.

В теории надкритических ВПСС первоначально использовался так называемый *мартингальный метод.* Он основан на том факте, что случайная последовательность $W_n := Z_n \exp(-S_n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, является мартингалом. По теореме Дуба существует п.н. $W = \lim_{n\to\infty} W_n$. На основе мартингального метода были установлены необходимые и достаточные условия невырожденности случайной величины W, затем были получены теоремы о сходимости W_n к W в L_p и оценки скорости этой сходимости. Дальнейшее применение мартингального метода связано с усложнением модели ВПСС: 1)рассмотрение ВПСС с иммиграцией, 2) рассмотрение многотипного ВПСС и т.п.

Казалось, что изучение надкритических однотипных ВПСС без иммиграции завершено. Это на фоне бурно развивающейся теории критических и особенно докритических ветвящихся процессов, при изучении которых была введена дополнительная классификация, свидетельствовало о некоторой простоте надкритического случая.

Следующий этап в изучении надкритических ВПСС, начавшийся в 2014-м году, связан с рассмотрением больших уклонений величины Z_n. При рассмотрении событий, касающихся малых значений Z_n, Бансайе и Боингхофф установили, что асимптотика вероятностей таких событий существенно зависит от *типа* рассматриваемого процесса (*сильно, слабо* или *промежуточно надкритический*). Автор изучал вероятность удаленного вырождения ВПСС (это означает, что $Z_n > 0$ и существует такое $k \in \mathbf{N}$, что $Z_{n+k} = 0$). Оказывается, асимптотика вероятности удаленного вырождения при $n \to \infty$ существенно зависит от типа надкритического ВПСС.

При получении указанных результатов существенную роль играет *метод условных предельных теорем для случайных блужданий* (эта область теории вероятностей активно развивается с 70-х годов прошлого столетия). В качестве примера применения указанного метода рассмотрим функциональную предельную теорему для *слабо надкритического* ВПСС (это означает, что $\mathbf{E}X_1 > 0$ и $-\infty < \mathbf{E}X_1 e^{-X_1} < 0$. Введем случайный процесс: $Y_n(t) = Z_{\lfloor nt \rfloor} \exp\left(-S_{\lfloor nt \rfloor}\right)$ при $t \in [0,1)$ и $Y_n(1) = Z_n$. Введем момент вырождения процесса $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$: $T = \min\{n > 0 : Z_n = 0\}$. Положим $\theta(t) = \mathbf{E}\exp(-tX_1)$ и $\gamma = \inf_{t\in[0,1]} \theta(t)$. Пусть символ $\Rightarrow$ означает сходимость конечномерных распределений процессов.

Теорема. *Если процесс $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ является слабо надкритическим и выполнены некоторые дополнительные предположения, то при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(n < T < +\infty) \sim c_1 \frac{\gamma^n}{n^{3/2}},$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная, и

$$\{Y_n(t),\ t \in [0,1]\ \mid\ n < T < +\infty\} \Rightarrow \{Y(t),\ t \in [0,1]\},$$

где $\{Y(t),\ t \in [0,1]\}$ – случайный процесс с неотрицательными постоянными траекториями на $(0,1)$, причем вероятность события $\{Y(t) > 0\}$ положительна при $t \in (0,1)$; величина $Y(1)$ принимает значения из $\mathbf{N}$.

Об экспоненциальной скорости сходимости в локальной теореме восстановления

Г. А. Бакай

Математический институт им.В.А.Стеклова, Москва, Россия

Пусть последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geq 0}$ образует неразложимую цепь Маркова с конечным множеством состояний. Пусть случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, независимы при условии цепи, и условное распределение ξ_n зависит только от значений X_{n-1} и X_n. Положим $S_0 := 0,\ S_n :=$

$\sum_{i=1}^n \xi_i$ и введем функцию восстановления

$$u_k := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k).$$

Теория восстановления для таких процессов активно развивалась в работах [1], [2], причем рассматривались значительно более общие цепи $\{X_n\}_{n\geq 0}$. Из результатов указанных работ вытекает, что последовательность $\{u_k\}_{k\geq 0}$ сходится, значение предела вычисляется явно. Результаты о степенной скорости сходимости при дополнительных предположениях получены в работе [3].

В настоящей работе доказано, что при некоторых дополнительных условиях, имеет место экспоненциальная скорость сходимости величин $u_k,\ k \geq 0$, а именно, найдутся такие величины $C, B_0 > 0,\ B_1 > 1$, что справедливо соотношение

$$|u_k - C| \leq B_0 B_1^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Аналогичный результат получен в работе [4], однако, метод настоящего исследования отличается в значительной степени и позволяет получить выражение для параметра B_1.

Работа выполнена в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2022-265).

Список литературы

[1] Kesten H. *Renewal theory for functionals of a Markov Chain with general state space.* The Annals of Probability, 2(3), 1974, 355–386.

[2] Athreya K. B., McDonald D., Ney P. *Limit theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains.* The Annals of Probability, 6(5),1978, 788–797.

[3] Fuh C.-D., T.L.Lang T.L. *Asymptotic expansions in multidimensional Markov renewal theory and first passage times for Markov random walks*, Advances in Applied Probability, 33(3),2001, 652–673.

[4] Заславский А.Е. *Оценка скорости сходимости в теореме восстановления для случайных величин, заданных на цепи Маркова.* Теория вероятн. и ее примен., 17(3), 563–573.

Асимптотическая форма ветвящегося случайного блуждания на периодических графах

Е. Вл. Булинская

Кафедра математической статистики и случайных процессов,
механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва,
Россия

Среди различных моделей ветвящихся случайных блужданий (ВСБ), получивших широкое распространение в последние годы (см., например, [5], [8], [13] и [17], особое место занимают каталитические ВСБ или ВСБ в неоднородной среде. Их особенностью является наличие особых точек в пространстве, только находясь в которых, частицы, совершающие случайное блуждание, могут также производить потомков или гибнуть. Говорят, что эти точки содержат "катализаторы", их также называют источниками размножения и гибели частиц или источниками ветвления. В первых работах на эту тему, среди которых отметим [1] и [4], рассматривался единственный источник ветвления. Далее, например, в статьях [14] и [16], предполагалось, что имеется конечное число произвольно расположенных источников в $\mathbb{Z}^d$. В работах [2] и [3] авторы рассмотрели ВСБ с множеством Γ источников ветвления, имеющим периодическую структуру, и назвали его ВСБ на периодических графах. Интересно, что при изучении каталитических ВСБ менялись не только модели, но и постановки задач. Так, важную роль играли классификация на надкритические, критические и докритические ВСБ, анализ асимптотического по времени поведения общих и локальных численностей частиц, а позднее задачи выявления предельной формы случайного облака частиц, распространяющегося в пространстве с течением времени.

Данный доклад посвящен исследованию эволюции пространственного распространения популяции частиц в ВСБ на периодических графах. Предполагается, что режим ветвления надкритический, а случайное блуждание имеет "легкие" хвосты. Нами установлено, что в метрике Хаусдорфа нормированное множителем t^{-1} случайное облако частиц, существующих в рассматриваемом ВСБ в момент времени t, сходится для почти всех точек события невырождения популяции к множеству $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, называемому асимптотической формой популяции ВСБ, когда $t \to \infty$. Также найдена явная формула, описывающая предельное множество $\mathcal{P}$. Если все источники ветвления имеют одни и те же параметры и расположены периодически на $\mathbb{Z}^d$, то описание $\mathcal{P}$ вовлекает экспоненциальные моменты времени и места первого достижения (или первого возвращения) случайным блужданием множества Γ. Если же рассматривается более общая ситуация, когда источники ветвления имеют различные характеристики (например, в одном источнике частицы только дают потомков, а в другом – только гибнут) и расположены периодически, то $\mathcal{P}$ выражается с помощью вспомогательных множеств, порожденных определенными функциями от перроновых корней некоторых семейств неотрицательных матриц, построенных на основе средних численностей потомков в разных источниках и некоторых характеристик инфинитезимального оператора случайного блуждания. Мы рассматриваем несколько примеров и демонстрируем способы нахождения соответствующих множеств $\mathcal{P}$.

Основная идея доказательств наших результатов состоит в рассмотрении ВСБ на периодических графах в рамках многотипного общего ВСБ, изученного, например, в работах [6] и [7]. Кроме того, применяется аппарат преобразования Лапласа, введение вспомогательного многотипного марковского ветвящегося процесса, теория неразложимых неотрицательных и квазинеотрицательных матриц (в частности, теорема Перрона-Фробениуса).

Выполненное исследование дополняет результаты о пространственном распространении ВСБ с конечным числом источников ветвления, полученные, например, в [9]–[11], [12], [15] и [16].

Список литературы

[1] Ватутин В.А., Топчий В.А., Ху Ю. *Ветвящееся случайное блуждание по решетке* $\mathbb{Z}^4$ *с ветвлением лишь в начале координат.* Теория вероятн. примен., 56(2), 2011, 224–247.

[2] Платонова М.В., Рядовкин К.С. *Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке* $\mathbb{Z}^d$ *с периодическими источниками ветвления.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 466, 2017, 234–256.

[3] Платонова М.В., Рядовкин К.С. *Ветвящиеся случайные блуждания на* Z^d *с периодически расположенными источниками ветвления.* Теория вероятн. примен., 64(2), 2019, 283–307.

[4] Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B. *Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math., 326, 1998, 975–980.

[5] Bai T., Rousselin P. *Branching random walks conditioned on particle numbers.* J. Stat. Phys., 185(3), 2021, 1–15.

[6] Biggins J.D. *The Asymptotic Shape of the Branching Random Walk.* Adv. Appl. Probab., 10(1), 1978, 62–84.

[7] Biggins J.D. *How fast does a general branching random walk spread?* In: Athreya, K.B., Jagers, P. (Eds), Classical and Modern Branching Processes. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 84, 19–39. Springer, New York, 1997.

[8] Brunet E., Le A.D., Mueller A.H., Munier S. *How to generate the tip of branching random walks evolved to large times.* EPL, 131(4), 2020, 40002.

[9] Bulinskaya E.Vl. *Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice.* Stoch. Process. Appl., 128(7), 2018, 2325–2340.

[10] Bulinskaya E.Vl. *Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails.* J. Theor. Probab., 34(1), 2021, 141–161.

[11] Bulinskaya E.Vl. *Catalytic branching random walk with semi-exponential increments.* Math. Popul. Stud., 28(3), 2021, 123–153.

[12] Carmona Ph., Hu Y. *The spread of a catalytic branching random walk.* Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 50(2), 2014, 327–351.

[13] Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S. *Branching random walk in a random time-independent environment.* Math. Popul. Stud., 30(2), 2023, 73–94.

[14] Doering L., Roberts M. *Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory.* In: Donati-Martin C., Lejay A., Rouault A. (Eds.), Séminaire de Probabilités XLV, Lecture Notes in Mathematics, 2078, 2013, 305–322.

[15] Liu R. *The Spread Speed of Multiple Catalytic Branching Random Walks.* Acta Math. Appl. Sin., Eng. Ser., 39(2), 2023, 262–292.

[16] Молчанов С.А., Яровая Е.Б. *Ветвящиеся процессы с решетчатой пространственной динамикой и конечным числом центров генерации частиц.* ДАН, 446(3), 2012, 259–262.

[17] Shi Z. *Branching random walks.* École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLII – 2012, Lect. Notes Math., 2151, 2015.

Критические ветвящиеся процессы в неблагоприятной случайной среде

В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

К.Донг

Ксиданский университет, Сиань, Китай

Пусть $\mathcal{Z} = \{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим $F_n = \{F_n\{1\}, F_n\{2\}, ...\}$ распределение числа потомков у частиц $(n-1)$-го поколения. Пусть $F_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F_n\{k\} s^k$. Последовательность

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + ... + X_n, \quad n \geq 1,$$

где $X_i = \log F_i'(1), i = 1, 2, ...,$ называется сопровождающим случайным блужданием для процесса $\mathcal{Z}$. Пусть

$$\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1;\ |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2;\ |\beta| < 1\}$$

— подмножество в пространстве $\mathbb{R}^2$. Для пары $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и случайной величины X мы будем писать $X \in \mathcal{H}(\alpha, \beta)$, если распределение величины X принадлежит (без центрирования) области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G(w) = \exp\left\{-c|w|^{\alpha}\left(1 - i\beta\frac{w}{|w|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\},\ c > 0.$$

Наложим следующие условия.

Условие B1. Приращения $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ сопровождающего случайного блуждания независимы, одинаково распределены и принадлежат $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$. Более того, распределение случайной величины X_1 абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на множестве $\mathbb{R}$, причем существует натуральное число n такое, что плотность распределения случайной величины S_n ограничена.

Напомним, что ВПСС $\mathcal{Z}$ называется критическим, если $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ п. н. и $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ п. н. Заметим, что если выполнено условие B1, то процесс является критическим и существует такая последовательность положительных чисел a_n, что распределение случайной величины S_n/a_n слабо сходится к распределению случайной величины с характеристической функцией $G(w)$.

Пусть
$$\gamma(b) = \frac{\sum_{k=b}^{\infty} k^2 F\left(\{k\}\right)}{\left(\sum_{i=b}^{\infty} iF\left(\{i\}\right)\right)^2}.$$

Условие B2. Существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $b \in \mathbb{N}$, что
$$\mathbb{E}\log^{\alpha+\varepsilon}(\max(1,\gamma(b)) \;<\; \infty.$$

Наш основной результат выглядит следующим образом.

Теорема. *Пусть выполнены условия B1 и B2,* $\min(m,n) \to \infty$ *и* $m = o(n)$. *Тогда*

1) если $\varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *таким образом, что* $\varphi(n) = o(a_m)$, *то для любого* $z \in (0,\infty)$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{a_m}\log Z_{n-m} \le z | S_n \le \varphi(n), Z_n > 0\right) = A_1(z);$$

2) если $\varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *таким образом, что* $\varphi(n) \sim Ta_m, T \in (0,\infty)$, *то для любого* $z \in [0,\infty)$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{a_m}\log Z_{n-m} \le z | S_n \le \varphi(n), Z_n > 0\right) = B(z,T);$$

3) если $m = o(\varphi(n)), \varphi(n) = o(a_n)$, *то для любого* $z \in [0,\infty)$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{a_m}\left(\log Z_{n-m} - S_n\right) \le z | S_n \le \varphi(n), Z_n > 0\right) = A_2(z),$$

где $A_1(z), A_2(z)$ *и* $B(z,T)$ *– различные собственные функции распределения.*

Исследование В. А. Ватутина и Е. Е. Дьяконовой выполнено в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение N 075-15-2022-265).

Работа В. А. Ватутина и К. Донга была также поддержана Министерством Науки и Технологии КНР (грант G2022174007L).

Список литературы

[1] Ватутин В.А., Донг К., Дьяконова Е.Е., Случайные блуждания, остающиеся неотрицательными, и ветвящиеся процессы в неблагоприятной среде, Матем. сб., 214(11), 2023 (в печати).

О положительной возвратности процесса рождения и гибели и системы $M/GI/1$

А.Ю.Веретенников

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича, Москва, Россия

В знаменитой работе [1] о телефонной станции с конечным числом серверов Б.А.Севастьянов доказал факт сходимости по метрике полной вариации распределения соответствующего процесса к стационарному. Само это распределение без доказательства указано в публикации R. Fortet. Единственным условием в [1] была конечность $\mu^{-1} := \int_0^\infty x dF(x)$ для времени обслуживания с ф.р. F. Позже возникли обобщения этой работы на бесконечные системы, где предполагалось еще, нестрого говоря, $\mu > \lambda$, где λ – интенсивность входящего пуассоновского потока требований. Затем появились работы с оценками на скорость сходимости, методика которых была сперва опробована на системах типа $M_n/GI/1/\infty$ [3] и др.; в них предполагалось существование *интенсивности обслуживания*. В данной работе для процесса рождения и гибели (РГ) изучена *положительная возвратность*, влекущая скорость сходимости порядка $1/t$ к стационарному распределению, с приложением к системе $M_n/GI/1/\infty$ (без использования существования интенсивности обслуживания), где интенсивность входящего потока λ_n может зависеть от числа n заявок в очереди. Оценку скорости сходимости порядка $1/t$ тут можно получить и иначе, методами теории восстановления; это не эквивалентно положительной возвратности и использует иные условия. Соотношение между двумя подходами требует дополнительных исследований. Для (неотрицательного) процесса РГ, обозначаемого через X_n, предполагаем, что найдутся $\delta, r_i > 0$ такие, что (индекс i в E_i означает начальное условие (н.у.))

$$\Delta_i^2 \coloneqq \sup_{i>N} \sum_{j=0}^{\infty} (j-i)^2 p_{i,j} \le 2r_i - \delta, \;\; \& \;\; b_i := \sum_{j=0}^{\infty} (j-i) p_{i,j} \le -\frac{r_i}{i}, \quad \forall\, i > 0. \quad (1)$$

Теорема. *При условии (1) для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка*

$$\mathsf{E}_i \tau_0^X \le \delta^{-1} i^2, \quad \text{где } \tau_0^X := \inf(n \ge 0 \colon X_n = 0).$$

Перейдем к системе $M_n/GI/1/\infty$. Входящий поток – условно пуассоновский с интенсивностью λ_n, все обслуживания независимы; если сервер занят, то заявка становится в очередь, ограничений на которую нет; дисциплина обслуживания FIFO. Процесс $Y_t = (n_t, y_t)$ описывается переменными n_t – числом требований в очереди – и y_t – перескоком в терминологии ТМО; при $n = 0$ считаем $y := 0$. Предполагаем $0 < C^{-1} \le \lambda_n \le C < \infty$, $\forall\, n$. Применен известный метод – рассматривать процесс Y_t в моменты (T_k) окончаний очередных обслуживаний. Эта вложенная цепь Маркова $X_k = n_{T_k}$ является процессом РГ, переходные вероятности p_{ij} которого выписываются в терминах преобразований Лапласа ф.р. F; имеем $p_{i,j} = 0, j < i - 1$. Такой подход к исследованию *стационарного распределения* систем $M_n/GI/1$

при условии его существования (напомним, что существование последнего положительная возвратность обеспечивает) реализован в [2] и др.; рекуррентные свойства в [2] не изучались. Есть надежда, что методы данной работы удастся применить и к системам типа Эрланга – Севастьянова.

Теорема. *Пусть для вложенной цепи X_n в системе $M_n/GI/1/\infty$ выполнено условие (1). Тогда для момента остановки $\tau_0^Y := \inf(t \ge 0 : n(Y_t) = 0)$ найдется такое $K > 0$, что $\forall$ н.у. $(n, 0)$,*

$$\mathsf{E}_{n,0}\tau_0^Y \le Kn^2.$$

Теорема. *Пусть для системы $M_n/GI/1/\infty$ найдется $r > 2+2\sup_n \lambda_n$ такое, что для "интегральной интенсивности" $H(t) := \int_0^t (1-F(s))^{-1} dF(s) < \infty$, $\forall t$,*

$$\forall\, 0 \le t \le 1, \int_0^t (1+s)dH(s) \ge rt, \ \ \& \ \forall \frac{1}{2} \le \Delta \le 1, \ \inf_{x\ge 1} \int_0^\Delta (1+x+s)dH(x+s) \ge r\Delta.$$

Тогда $\forall 0 \le x \le 1/2$ $\exists a > 0$ такое, что $\inf_{0\le x'\le x} F(x'+a) - F(x') > 0$, и, более того, $\exists K > 0$ такое, что $\forall$н.у. (n, y) с $y \ge 0$ (sic: в правой части нет квадрата),

$$\mathsf{E}_{n,y}\tau_0^Y \le K(n+y+1).$$

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики "Базис".

Список литературы

[1] Севастьянов Б.А. *Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами.* ТВП, 2(1), 1957, 106–116.

[2] Abouee-Mehrizi H., Baron O. *State-dependent M/G/1 queueing systems.* Queueing Syst., 82, 2016, 121–148.

[3] Veretennikov A.Yu., Zverkina G.A. *Simple proof of Dynkin's formula for single-server systems and polynomial convergence rates.* MPRF, 20, 2014, 479–504.

Обзор работ Б.А.Севастьянова по дискретной математике

А.М.Зубков

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Планируется сделать краткий обзор публикаций Б.А.Севастьянова, посвященных вопросам дискретной математики и ее применений.

Идеи Шеннона по перемешиванию и рассеиванию в свете линейного и разностного методов в криптографии

Ф.М. Малышев

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Основой доклада является работа автора: *Методы линейных и разностных соотношений в криптографии. Диск. мат.* **34**:*1 (2022), 36–63.*

Для теоретической криптографии типичной является ситуация, когда для отображения двоичных векторных пространств $F\colon V_N \to V_M$, $a \mapsto b = F(a)$, $a \in V_N = GF(2)^N$, $b \in V_M$, рассматриваются вероятностные линейные и разностные соотношения. *Вероятностное линейное соотношение* представляем парой вектор-столбцов $L' \in V_N^*$, $L'' \in V_M^* \diagdown \{0\}$, и записываем в виде $aL' \simeq bL''$. Оно характеризуется величиной $\delta_{L',L''} = \delta_{L',L''}^F = 2\mathbf{P}\{aL' = bL''\} - 1$, где вероятность вычисляется в условиях равномерного распределения вектор-строк a на V_N. *Вероятностное разностное соотношение* представляем векторами $D' \in V_N \diagdown \{0\}$, $D'' \in V_M$ и обозначаем как $D' \rightsquigarrow D''$. Оно оценивается вероятностью $p_{D',D''} = p_{D',D''}^F = \mathbf{P}\{F(a+D') + F(a) = D''\}$. Использующие эти соотношения соответственно линейный и разностный методы криптографического анализа характеризуются следующими особенностями.

1) Предварительно получаемые вероятностные соотношения относятся к отображениям F, задаваемым сложно устроенными конкретными *функциональными схемами* (ф.с.) $\mathcal{F}$, реализующими глубокие и разветвлённые суперпозиции большого числа *локальных* нелинейных отображений $f_i : V_{n_i} \to V_{m_i}$, $x_i \mapsto y_i = f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, составляющих *нелинейную часть* ф.с. $\mathcal{F}$. Переменные a, x_i, y_i, b линейно выражаются друг через друга: $(a, y_1, \dots, y_k)C_{\mathcal{F}} = (x_1, \dots, x_k, b)$. Здесь $C_{\mathcal{F}}$ верхнетреугольная матрица *линейной среды*, состоящей из линейных отображений ф.с. $\mathcal{F}$.

2) При построении вероятностных соотношений в качестве целевых функций, подлежащих максимизации, используют не точные значения $|\delta_{L',L''}|$ и $p_{D',D''}$, а некоторые их "приближения": $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}| = \prod_{i=1}^k |\delta_{l_i',l_i''}^{f_i}|$, $\tilde{p}_{\mathfrak{D}} = \prod_{i=1}^k p_{d_i',d_i''}^{f_i}$, где $\mathfrak{L} = ((l_i', l_i''),\ i = 1, \dots, k)$, $\mathfrak{D} = ((d_i', d_i''),\ i = 1, \dots, k)$ – множества *локальных вероятностных соотношений*, относящихся к отдельным f_i. Элементы множеств $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{D}$ должны быть согласованы линейной средой. Если, например, $x_i = y_j$, $i > j$, то $l_j'' = l_i'$, $d_i' = d_j''$. Замены $|\delta_{L',L''}|$

на $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $p_{D',D''}$ на $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ производятся в отсутствии каких-либо утверждений о степени близости этих пар величин.

3) При окончательных расчётах эффективности методов анализа вместо требуемых величин $|\delta_{L',L''}|$ и $p_{D',D''}$ используют $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$.

При максимизации $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ ориентируются на множества $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{D}$, в которых как можно больше номеров $i \in \{1, \dots, k\}$, для которых $l'_i = l''_i = 0$ или $d'_i = d''_i = 0$. Минимально возможные (при некоторых $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{D}$ соответственно) мощности совокупностей остальных значений i являются показателями рассеивания θ_C и θ^*_C линейной среды $C = C_{\mathcal{F}}$, соответственно относительно линейного и разностного методов.

Приведённые особенности являются источником справедливой критики линейного и разностного методов. Имеется даже пример семейства функциональных схем $\mathcal{F}_c$ с линейной средой независящей от c, реализующих любое отображение $F_c\colon V_N \to V_M$. Параметр c принимает 2^{M2^N} значений. Локальные отображения $f_{i,c}$ зависят от c, но участвующие в поиске "лучших" вероятностных соотношений величины $|\delta^{f_{i,c}}_{l'_i,l''_i}|$ и $p^{f_{i,c}}_{d'_i,d''_i}$ от c не зависят. Это позволяет получать примеры самых экзотических соотношений между $\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}$ и $\delta_{L'_{\mathfrak{L}},L''_{\mathfrak{L}}}$, и между $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ и $p_{D'_{\mathfrak{D}},D''_{\mathfrak{D}}}$.

Теоремы о точных значениях $\delta^F_{L',L''}$ и $p^F_{D',D''}$, привлекающие в своих формулировках все возможные согласованные совокупности локальных соотношений $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{D}$, дополнительно вскрывают недостатки методов:

4) находятся не самые лучшие соотношения, а какие получатся,

5) ориентация на $\tilde{\delta} = \max_{\mathfrak{L}} |\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p} = \max_{\mathfrak{D}} \tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ уводит из областей, где реализуются $\max |\delta_{L',L''}|$ и $\max p_{D',D''}$.

Последние недостатки очень ярко демонстрируются на одной конкретной ф.с. с решёточной структурой.

Не смотря на приведённые недостатки, величины $\tilde{\delta}$ и $\tilde{p}$, зависящие кстати от ф.с. $\mathcal{F}$, являются признанными характеристиками отображения F как шифрпреобразования. При синтезе ф.с. $\mathcal{F}$, предназначаемых для шифраторов, формирование нелинейной части и линейной среды ф.с. $\mathcal{F}$ осуществляется исходя из минимизации характеристик $\tilde{\delta}$ и $\tilde{p}$, что сопряжено с максимизацией показателей рассеивания θ_C, θ^*_C и с минимизацией максимальных значений $|\delta^{f_i}_{l'_i,l''_i}|$ по всем l'_i, l''_i и $p^{f_i}_{d'_i,d''_i}$ по всем d'_i, d''_i. Перечисленные требования практически повторяют предложения Шеннона по рассеиванию и перемешиванию при разработке шифраторов. Они упреждали опасность от двойственных друг другу линейного и разностного методов криптографического анализа, которые появятся спустя полвека.

Об объемах деревьев в лесах Гальтона-Ватсона

Ю. Л. Павлов

Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, Россия

Рассматривается лес Гальтона-Ватсона $F_{N,n}$ с N корневыми деревьями и n некорневыми вершинами. Случайная величина ξ, равная числу прямых потомков каждой частицы в образующем лес критическом ветвящемся процессе, имеет распределение

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau} \quad k = 0, 1, \ldots \quad \tau \in (2, 3), \tag{2}$$

где $h(x)$ - медленно меняющаяся на бесконечности функция. Предельное поведение таких лесов изучалось в [1], где распределение ξ имеет конечный третий момент. Позднее было доказано, что если конечен только второй момент, результаты [1] сохраняют силу. Но распределение (1) имеет бесконечную дисперсию. Ветвящиеся процессы с таким распределением успешно используются при изучении структуры и динамики конфигурационных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких, как Интернет. В [2] впервые предложено с этой целью использовать и результаты о случайных лесах.

Для $F_{N,n}$ найдены предельные распределения числа деревьев заданного объема и максимального объема дерева в различных зонах стремления N и n к бесконечности. Один из новых результатов формулируется ниже.

Обозначим $\tilde{g}(x)$ плотность устойчивого закона с характеристической функцией

$$\exp\left\{-c_1\Gamma(2-\tau)|t|^{\tau-1}\left(1 - i\frac{t}{|t|}tg\left(\frac{\pi(\tau-1)}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi(\tau-1)}{2}\right)\right\}, \tag{3}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, c_1 зависит от $h(x)$ и определяется соотношением (2.6.4) в [3]. Пусть $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с характеристической функцией

$$\exp\left\{-c\tilde{g}(0)\Gamma\left(\frac{\tau-2}{\tau-1}\right)|t|^{1/(\tau-1)}\left(1 - i\frac{t}{|t|}tg\left(\frac{\pi}{2(\tau-1)}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi)}{2(\tau-1}\right)\right\},$$

где c определяется так же, как и c_1 в (2). Обозначим $B(x)$ стремящуюся к бесконечности положительную функцию, при $x \to \infty$ удовлетворяющую соотношению

$$B(x) \sim x^{1/(\tau-1)}l(x), \tag{4}$$

где $l(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. В [3] показано, что последовательность нормализующих констант в локальных предельных теоремах для устойчивых законов с показателем $1/(\tau-1)$ удовлетворяет условию (3). Для максимального объема дерева ν_{max} в $F_{N,n}$ получен такой результат.

Теорема. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что существует константа $\alpha > 0$ такая, что*

$$\frac{n}{N^{\tau-1+\alpha}} \to \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\frac{N+n-\nu_{max}}{uN^{\tau-1}} \leqslant z\right\} \to \int_0^z g(x)dx,$$

где u – корень уравнения

$$u = l^{1-\tau} B(uN^{\tau-1}).$$

Список литературы

[1] Павлов Ю.Л. *Случайные леса.* Петрозаводск, Карельский научный центр РАН, 1996.

[2] Павлов Ю.Л. *Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе.* Математический сборник, 212(9), 2021, 146–163.

[3] Ибрагимов И.А., Линник Ю.Л. *Независимые и стационарно связанные величины.* М., Наука, 1965.

Об одном функционале от числа непоявившихся цепочек в полиномиальной схеме специального вида и о двухэтапном критерии хи-квадрат

М. П. Савелов

Кафедра теории случайных процессов и математической статистики, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В докладе будут рассмотрены две задачи о предельном поведении статистик в полиномиальной схеме. Обе эти задачи связаны с исследованиями Б.А. Севастьянова.

Пусть $\xi_{jl},\ 1 \le j \le n, 1 \le l \le k,$ — независимые случайные величины, имеющие полиномиальное распределение:

$$\mathbf{P}(\xi_{jl} = i) = p_i > 0, \quad 1 \le i \le M,\ 1 \le j \le n,\ 1 \le l \le k.$$

Они образуют n независимых цепочек $(\xi_{11}, \ldots, \xi_{1k}), (\xi_{21}, \ldots, \xi_{2k}), \ldots, (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk})$, принимающих значения во множестве $\{1, 2, \ldots, M\}^k$. Число непоявившихся цепочек μ_0 вычисляется по формуле

$$\mu_0 = \sum_{(s_1,\ldots,s_k)\in\{1,2,\ldots,M\}^k} I\{\eta^{(s_1,\ldots,s_k)} = 0\},$$

где $\eta^{(s_1,\ldots,s_k)} = \sum_{j=1}^n I\{(\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jk}) = (s_1, \ldots, s_k)\}$. Очевидно, $\mu_0 < M^k$.

Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_M)$, $H = H(\vec{p}) = -\sum_{i=1}^M p_i \ln p_i$,

$$\hat{H} = \frac{\ln(M^k - \mu_0)}{k}.$$

В докладе будет обсуждаться подход А.М. Зубкова к оцениванию шенноновской энтропии, основанный на теореме Шеннона-Макмиллана-Бреймана и теории случайных размещений. Будет показано, что величина $\hat{H}$ естественным образом связана с энтропией H распределения ξ_{11}.

Заметим, что $\hat{H}$ является функционалом от μ_0 в полиномиальной схеме специального вида, которая не рассматривалась в [1]. Мы представим результаты о предельном поведении $\hat{H}$, изложенные в [2].

Кроме того, мы рассмотрим последовательный r-кратный критерий χ^2 (см. [3]) и в случае $r = 2$ исследуем асимптотические свойства вероятности ошибки как функции от размеров границ прямоугольной критической области. Установленные результаты позволяют найти асимптотику хвостов двумерных распределений процесса Бесселя. В докладе будут представлены результаты работы [4].

Список литературы

[1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения.* Наука, М. 1976

[2] Савелов М. П. *Об одном функционале от числа появившихся неперекрывающихся цепочек исходов полиномиальной схемы и его связи с энтропией.* Матем. заметки, 114(3), 2023 (в печати).

[3] Захаров В. К., Сарманов О. В., Севастьянов Б. А. *Последовательный критерий* χ^2 Матем.сб. 79(121): 3(7), 1969, 444–460.

[4] Савелов М. П. *Двухэтапный критерий* χ^2 *и двумерные распределения процесса Бесселя.* Теория вероятн. и ее примен., 65(4), 2020, 841–850.

Эволюция частиц на графе, ветвящиеся процессы Севастьянова, телефонные системы

В.А. Топчий, Н.В. Перцев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал), Омск, РОссия

При исследовании живых систем появляются модели у которых имеется несколько узлов с совокупностью частиц, развивающихся на основе одной из моделей ветвящихся процессов, которые связаны направленными каналами для переходов частиц между узлами, что можно интерпретировать как эволюцию частиц на ориентированном графе. Переходы частиц в каналы регулируется независимыми случайными механизмами. В каналах происходит только перемещение частиц с ограничениями на время пребывания и возможностью гибели. На всех элементах графа распределения характеристик эволюции частиц различны. Следовательно, частица при переходах по элементам графа меняет свой тип. Если превращения частиц в узлах соответствуют марковскому процессу или описывается процессом Беллмана-Харриса, то условия на переходы частиц в каналах приводят к итоговому процессу Севастьянова (см. Б.А. Севастьянов, Ветвящиеся процессы.

М.: Наука, 1971). Исследования критического случая для описанной модели проводилось в работе В.А. Топчия и Н.В. Перцева (Siberian Electronic Mathematical Reports, 2023, **20**:1, 465–476). Для приложений часто важна неоднородность характеристик эволюции по времени. В этом случае анализ систем возможен только с помощью имитационного моделирования. Однородные по времени модели хорошо описываются традиционными предельными теоремами для процессов Севастьянова.

Рассмотрен частный случай модели, где в каждый узел входит внешний Пуассоновский поток частиц. Далее частицы могут либо гибнуть либо случайным образом переходить в соседние элементы ориентированного графа. Эволюция частиц на каждом элементе графа определяется распределением двух независимых случайных величин: допустимой продолжительности жизни частицы и ее допустимым временем пребывания на этом элементе. Реализуется событие, появившееся раньше.

Данную модель удобнее исследовать в терминах теории массового обслуживания. Узловое свойство модели состоит в том, что при входящем Пуассоновском потоке в узел при любом распределении времени пребывания заявки в нем, численность заявок будет Пуассоновской. Данный результат восходит к работе Б.А. Севастьянова (ТВП, 1957, **2**:1, 106–116). Для выбранной модели описано стационарное распределение численности частиц на всех элементах графа для произвольных распределений допустимых времен пребывания частиц на элементах графа и их продолжительности жизни. В ряде частных случаев распределение численности частиц на элементах графа будет Пуассоновским с параметрами, описанными в явном виде в любой момент времени.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Асимптотика вероятности невырождения почти критических ветвящихся процессов в случайной среде

В.В. Харламов

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

Рассмотрим два семейства производящих функций

$$\{f_y, y \in Y\}, \quad \{f_{y,i,n}, y \in Y, 0 \le i < n\},$$

где $(Y, \mathcal{G})$ – измеримое пространство. Последовательность $\Xi = \{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ независимых и одинаково распределённых случайных элементов со значениями в $(Y, \mathcal{G})$ будем называть *случайной средой.*

1. Положим $F_{k-1} := f_{\xi_k}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$.
2. Разыграем независимые случайные величины (с.в.) $Y_{i,k}$ с п.ф. F_{k-1}, $i, k \in \mathbb{N}$.

3. Положим $Z_0 = 1$, $Z_k := \sum_{i=1}^{Z_{k-1}} Y_{i,k}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\mathcal{Z} = \{Z_k, k \geq 0\}$ будем называть *ветвящимся процессом в случайной среде* (ВПСС).

Положим

$$X_i := \log F'_{i-1}(1), \quad S_0 := 0, \quad S_k := X_1 + \ldots + X_k, \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{S_k, k \geq 0\}$ будем называть *сопровождающим случайным блужданием* (ССБ) для ВПСС $\mathcal{Z}$.

Условие 1.

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{D}X_1 \in (0, \infty).$$

Если условие 1 выполнено, то ВПСС $\mathcal{Z}$ будем называть *критическим.* Козлов М. В. в работе [1] получил асимптотическое поведение $\mathsf{P}(Z_n > 0)$ для критического ВПСС с дробно-линейной производящей функцией. Общий случай был рассмотрен Geiger J., Kersting G. в работе [2].

В настоящей работе мы изучаем переходные явления для вероятности невырождения ВПСС. Переходные явления для ветвящихся процессов без среды были изучены в непрерывном случае Севастьяновым Б. А. в работе [3], в дискретном случае Нагаевым С. В. и Мухамеджановой Н. В. в работе [4]. Для ВПСС Дьяконовой Е. Е. в работе [5] исследовались переходные явления в случае процессов с миграцией и иммиграцией.

Мы будем использовать существенно другую модель для исследования переходных явлений.

1. Положим $F_{k-1,n} := f_{\xi_k, k-1, n}$ при всех натуральных $k \leq n$.

2. Разыграем независимые с.в. $Y_{i,k,n}$ с п.ф. $F_{k-1,n}$ при всех натуральных i и $k \leq n$.

3. При каждом натуральном n определим набор $\{Z_{k,n}, k \leq n\}$. Положим $Z_{0,n} = 1$, $Z_{k,n} := \sum_{i=1}^{Z_{k-1,n}} Y_{i,k,n}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Набор с.в. $\{Z_{k,n}, 0 \leq k \leq n, Z_{0,n} = 1\}$ назовём *возмущённым ветвящимся процессом в случайной среде* Ξ (ВВПСС).

Условие 2. Введём обозначение

$$Q_n(C, \delta) := \bigcap_{k=1}^{n} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{k} a_{i,n} \right| \leq C k^{1/2-\delta} \right\}, \quad a_{i,n} := \log F'_{i-1,n}(1) - \log F'_{i-1}(1).$$

При некоторых $\delta \in (0, 1/2)$, $C > 0$

$$\sqrt{n}\left(1 - \mathsf{P}\left(Q_n(C, \delta)\right)\right) \to 0, \ n \to \infty.$$

Из условия 1 следует, что разность между ССБ для $Z_{k,n}$ и Z_k ограничена с вероятностью, близкой к 1.

Основной результат этой работы состоит в следующем утверждении.

Теорема. *При выполнении условий 1 и 2 и некоторых технических предположений справедлива эквивалентность*

$$\mathsf{P}(Z_{n,n} > 0) \sim \mathsf{P}(Z_n > 0) \sim \Upsilon \frac{e^{-c_-}}{\sqrt{\pi n}},\ n \to \infty,$$

где Υ *и* c_- *– положительные константы.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/ в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Благодарности Автор глубоко признателен Шкляеву А. В. за постоянную поддержку работы.

Список литературы

[1] Козлов М. В. *Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде.* Теория вероятностей и ее применения, 21(4), 1976, 813–825.

[2] Geiger J., Kersting G. *The survival probability of a critical branching process in a random environment.* Theory of Probability & Its Applications, 45(3), 2001, 517–525.

[3] Севастьянов Б. А. *Переходные явления в ветвящихся случайных процессах.* Теория вероятностей и ее применения, 4(2), 1959, 121–135.

[4] Нагаев С. В., Мухамеджанова Н. В. *Переходные явления в ветвящихся процессах с дискретным временем.* Сб. Предельные теоремы и статистические выводы, 1966, 83–89.

[5] Dyakonova E. *Transition phenomena for branching processes in a random environment.* Journal of Mathematical Sciences, 78, 1996, 48–53.

Время вырождения ветвящихся процессов с частицами двух полов с большим начальным число пар

А.В. Шкляев

Кафедра теории случайных процессов и статистики, механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрим ветвящийся процесс с частицами двух полов, введенный D. Daley в [1]. Для краткости будем называть его *двуполым ветвящимся процессом* (ДВП). Пусть $f(t,s)$ – двумерная производящая функция, $L : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, – заданная функция, которую будем называть функцией паросочетаний. ДВП $\mathcal{N} = (N_n,\ n \geq 0)$ определяется как однородная марковская цепь с переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}\left(N_{n+1} = j \middle| N_n = i\right) = \mathbf{P}(L(U,V) = j),$$

где вектор (U,V) имеет п.ф. $f(s,t)^i$, $s,t\in[0,1]$. При этом мы предполагаем, что $N_0=N$.

Дадим более понятную физическую интерпретацию процесса. Пусть $(X_{n,i},Y_{n,i})$, $n\in\mathbb{N}_0$, $i\in\mathbb{N}$, – независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные векторы. Построим процесс следующим образом. Изначально в нем есть N пар, j-я из которых дает $(X_{1,j},Y_{1,j})$ потомков первого и второго пола. Из полученных x частиц первого пола и y частиц второго пола образуется $L(x,y)$ пар, которые, в свою очередь, вновь дают потомков по тому же закону и так далее. Отметим, что одна из наиболее естественных функций L имеет вид $L(x,y)=\min(x,y)$, соответствующий ДВП мы будем называть *ДВП с идеальной верностью.*

Будем называть ДВП с идеальной верностью *докритическим*, если $A=\min(\mathbf{E}X,\mathbf{E}Y)<1$, *критическим*, если $A=1$ и *надкритическим*, если $A>1$. Отдельно выделим дважды критический случай, когда $\mathbf{E}X=\mathbf{E}Y=1$.

Теорема. *Пусть $\{N_n\}$ – ДВП с идеальной верностью с $N_0=N$, T_N – время до вырождения процесса.*

1. *Пусть процесс докритический, $\mathbf{E}X^{1+\delta}<+\infty$, $\mathbf{E}Y^{1+\delta}<+\infty$ при некотором $\delta>0$. Тогда*

$$T_N-\ln N=O_P(1),\ \ N\to\infty,$$

то есть

$$\limsup_{x\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbf{P}(|T_N-\ln N|>x)=0.$$

2. *Пусть процесс дважды критический, $\mathbf{E}X^{2+\delta}<+\infty$, $\mathbf{E}Y^{2+\delta}<+\infty$ при некотором $\delta>0$. Тогда*

$$\frac{T_N}{N}\xrightarrow{P}\frac{2}{\mu},\ \ N\to\infty,\quad \mu=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho}}{\sqrt{2\pi}},$$

где σ_1^2, σ_2^2 – дисперсии X и Y соответственно, а $\rho=cov(X,Y)$.

3. *Пусть процесс дважды критический, $\mathbf{E}X^{5/2+\delta}<+\infty$, $\mathbf{E}Y^{5/2+\delta}<+\infty$ при некотором $\delta>0$. Тогда*

$$\frac{T_N-2N/\mu}{\sqrt{N}}\xrightarrow{d}Z\sim\mathcal{N}(0,\widehat{\sigma}^2),\ \ N\to\infty,\quad \widehat{\sigma}^2=\frac{1}{\pi\mu^3}((\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\pi-1)+2\rho).$$

Первый результат теоремы принадлежит студенту МГУ М.Р. Абдюшеву, второй – студентке МГУ А.Ю. Маркиной (оба получены под руководством автора), а третий – автору.

Аналогичные результаты можно получить и для процесса в случайной среде. Рассмотрим ветвящийся процесс с частицами двух полов, введенный S. Ma в [2]. Для краткости будем называть его *двуполым ветвящимся процессом в случайной среде* (ДВПСС).

Пусть $f(t,s;y)$ – двумерная производящая функция (по первым двум переменным) с параметром y, $L:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\times\mathbb{R}\to\mathbb{N}_0$ – заданная функция, которую будем называть функцией паросочетаний. ДВПСС $\mathcal{N}=(N_n,\ n\geq 0)$ определяется как однородная марковская цепь с переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}\left(N_{n+1}=j\middle|\,N_n=i,\boldsymbol{\eta}\right)=\mathbf{P}(L(U,V,\eta_{n+1})=j|\boldsymbol{\eta}),$$

где вектор (U,V) при условии $\boldsymbol{\eta}$ имеет п.ф. $f(s,t;\eta_{n+1})^i$, $s,t\in[0,1]$. При этом мы предполагаем, что $N_0=N$.

Опять же естественная интерпретация предлагает рассматривать $(X_{n,i},Y_{n,i})$ – количества потомков одной пары первого и второго пола и полагать

$$N_{n+1}=L\left(\sum_{i=1}^{N_n}X_{n+1,i},\sum_{i=1}^{N_n}Y_{n+1,i},\eta_{n+1}\right).$$

Случайные векторы $(X_{n,i},Y_{n,i})$ при фиксации среды предполагаются независимыми и имеющими распределение $f(s,t;\eta_n)$.

Назовем функцию паросочетаний $L(x,y;z)$ *почти липшицевой*, если найдется липшицева функция $g:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, обладающая свойством $g(x,cy,z)=cg(x,y,z)$, для которой при всех x,y,z

$$|L(x,y,z)-g(x,y,z)|\leq c(|x|^{1-\delta}+|y|^{1-\delta})$$

при некоторых положительных c и $\delta\in(0,1)$.

Рассмотрим ДВПСС $\{N_n\}$ с почти липшицевой функцией паросочетаний L. Введем случайные величины

$$\xi_i=\ln g(\mathbf{E}_{\eta_i}X_{i,1},\mathbf{E}Y_{i,1},\eta_i)$$

и назовем $S_n=\sum_{i=1}^n\xi_i$, $n\geq 0$, *случайным блужданием, сопровождающим ДВПСС* $\{N_n\}$. Будем называть процесс *докритическим* при $\mathbf{E}\xi_1<0$, *критическим* при $\mathbf{E}\xi_1=0$ и *надкритическим* при $\mathbf{E}\xi_1>0$.

Теорема. *Пусть $\{N_n\}$ – ДВПСС с $N_0=N$, T_N – время до вырождения процесса.*

1. *Пусть ДВПСС докритический, причем $\mathbf{E}X_{1,1}^{1+\delta}<+\infty$, $\mathbf{E}Y_{1,1}^{1+\delta}<+\infty$ при некотором положительном δ. Тогда*

$$T_N-\ln N\mathbf{E}\xi_1=O_P(1),\ N\to\infty.$$

2. *Пусть ДВПСС критический, причем $\mathbf{E}X_{1,1}^2<+\infty$, $\mathbf{E}Y_{1,1}^2<+\infty$. Тогда*

$$\frac{T_N}{\ln^2 N}\xrightarrow{d}Z,\ N\to\infty,$$

где Z имеет отрицательное гамма-распределение с параметром формы $1/2$ и параметром масштаба $(2\sigma^2)^{-1}$, где $\sigma^2=\mathbf{E}\xi_1^2$.

Первая часть настоящей теоремы получена автором, вторая – аспирантом А.П. Жияновым под руководством автора.

Список литературы

[1] Daley D. J. *Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes.* Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 9(4), 1968, 315–322.

[2] Ma S. *Bisexual Galton-Watson branching processes in random environments.* Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 22, 2006, 419–428.

О числе отображений с ограничениями на размеры компонент

А.Л. Якымив

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Пусть $\mathfrak{S}_n$ - совокупность отображений множества X из n элементов в себя. Граф отображения $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ является ориентированным графом $\Gamma(X, \sigma)$, вершины которого $x, y \in X$ соединены дугой (x, y), если $y = \sigma(x)$. Каждый граф $\Gamma(X, \sigma)$ состоит из связных компонент, причём компонента состоит из одного контура и деревьев, корнями которых являются вершины контура, называемые циклическими элементами. Все дуги деревьев ориентированы в направлении к корням. Пусть $\mathfrak{S}_n(A)$ - совокупность отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры связных компонент которых принадлежат множеству $A \subseteq N$. При этом размером компоненты называется число её вершин. Такие объекты рассмотрены А.Н. Тимашёвым в 2019 году [4]. Через $\pi(k)$ обозначим пуассоновскую случайную величину с параметром $k \in N$ и положим $q_k = \mathsf{P}\{\pi(k) < k\}$.

Теорема. *Пусть множество A имеет положительную плотность ϱ во множестве натуральных чисел, т.е., $|k : \ k \in A, k \le n|/n \to \varrho$ при $n \to \infty$. Также предположим, что $|k : k \le n, k \in A, m - k \in A|/n \to \varrho^2$ для произвольной постоянной $C \in [1, \infty)$ равномерно по $m \in [n, Cn]$. Тогда*

$$|\mathfrak{S}_n(A)| = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\varrho/2)} e^{c(A) - \varrho\gamma/2} n^{n-(1-\varrho)/2} L(n),$$

где γ - постоянная Эйлера, $c(A) = \sum_{k \in N \setminus A} (1/2 - q_k)/k$ и функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности, причём $L(n) = \exp\left(\left(\sum_{k \in A, \ k \le n} 1/k - \varrho \ln n\right)/2\right)$.

Пусть случайное отображение $\sigma_n = \sigma_n(A)$ имеет равномерное распределение на изучаемом множестве отображений $\mathfrak{S}_n(A)$. Через ζ_{in} обозначим число компонент размера i этого случайного отображения. Пусть $(\eta_i, \ i \in A)$ есть последовательность независимых пуассоновских случайных величин с параметрами $\lambda_i = q_i/i$. Через $d_{TV}(X, Y)$ обозначим расстояние по вариации между распределениями случайных векторов X и Y, принимающими значения из $Z_+^k = \{(x_1, \ldots, x_k), \ x_i \in N \cup \{0\} \ \forall \ i = 1, \ldots, k\}$, а именно:

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{B \subseteq Z_+^k} |\mathsf{P}\{X \in B\} - \mathsf{P}\{Y \in B\}|.$$

Далее используя результат Е. Манставичюса [1] для случайных ансамблей, а также теорему 1, выводим следующую оценку.

Теорема. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда для некоторого $a > 0$ при $n \to \infty$*

$$d_{TV}((\zeta_{mn},\ m \in A, m \leq r), (\xi_m, m \in A, m \leq r)) = O(1) \left(\frac{r}{n}\right)^a$$

равномерно по $r \in [1, n] \cap A$.

Пусть $\mathfrak{V}_n(A)$ есть множество отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры контуров которых принадлежат множеству A. Такие отображения принято называть A-отбражениями. Они введены в 1972 году в работе В.Н. Сачкова [2]. Далее мы сравниваем, каких отображений больше (с учётом соответствующего утверждения из статьи [5].)

В завершение доклада отметим, что случайные отображения являются одним из многочисленных направлений в теории вероятностей и её применениях, в частности, в комбинаторном анализе, в которых работал Борис Александрович - см., например работу [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П,
https://rscf.ru/project/19-11-00111/ .

Список литературы

[1] Manstavičius E. *On total variation approximations for random assemblies.* In 23rd International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms: AofA'12, DMTCS Proc., 97-–108.

[2] Сачков В.Н. *Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту.* Теория вероятн. и ее примен., 17(4), 1972, 679—694.

[3] Севастьянов Б.А. *Структурные характеристики некоторых неравномерных случайных отображений конечных множеств.* Тр. по дискр. матем., 6, Физматлит, М., 2002, 184—193.

[4] Тимашёв А.Н. *Случайные отображения с объемами компонент из заданного множества.* Теория вероятн. и ее примен., 64(3), 2019, 599—609.

[5] Якымив А.Л. *О числе циклических точек случайного A-отображения.* Дискрет. матем., 25(3), 2013, 116-–127.

Ветвящиеся случайные блуждания в некомпактных фазовых пространствах

Е. В. Яровая

Кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В статье Б.А.Севастьянова “Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами” (Теория вероятн. и ее примен., 3:2 (1958), 121–136), по-видимому, впервые рассмотрен ветвящийся случайный процесс с диффузией частиц. Такое обобщение значительно расширило область применения ветвящихся процессов и привело к возникновению такого направления, как ветвящиеся случайные блуждания.

В докладе приводится обзор различных моделей ветвящихся случайных блужданий с непрерывным временем, которые могут быть описаны в терминах размножения, гибели и транспорта частиц по многомерным решеткам. Точки решетки, в которых может происходить рождение и гибель частиц называются источниками ветвления. Перемещение частиц по решетке описывается, как правило, симметричным случайным блужданием. Мы предполагаем нарушение симметрии блуждания в конечном числе точек. Поведение моментов численностей частиц во многом определяется структурой спектра эволюционного оператора средних численностей частиц и требует для исследования ряда моделей привлечения спектральной теории операторов в банаховых пространствах. Для доказательства предельных теорем предлагаются два подхода: один из которых основан на проверке условий, гарантирующих единственность определения предельного вероятностного распределения численностей частиц своими моментами, а другой — на аппроксимации нормированного числа частиц в точке решетки некоторым неотрицательным мартингалом (см., Н. В. Смородина и Е. Б. Яровая, УМН, 77:5(467) (2022), 193–194), позволяющий доказать сходимость этих величин к пределу в среднеквадратическом в достаточно общих предположениях на характеристики процесса. Особое внимание уделяется сравнению асимптотического поведения численностей частиц в каждой точке решетки и их моментов для ветвящихся случайных блужданий при различных соотношениях между параметрами модели.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-11-00375, https://rscf.ru/project/23-11-00375 в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.