

II Всероссийская научно-практическая конференция
«Математика в современном мире»,
посвященная 160-летию со дня рождения
выдающегося российского математика Д. А. Граве

Секция «Дифференциальные уравнения, теория функций,
математические модели в естественных и
социально-экономических науках»

19–22 сентября 2023

Вологда, Вологодский государственный университет

Д. И. Борисов. О резольвенте оператора Шрёдингера на графе с малыми ребрами

Настоящая работа относится к серии исследований поведения резольвент эллиптических операторов на графах с малыми рёбрами. Ранее для общих операторов второго порядка на общих графах с малыми ребрами было показано, что при выполнении определённого нерезонансного условия резольвенты данных операторов голоморфны в определённом смысле по малому параметру, описывающему длины малых рёбер. Вместе с тем, остаётся открытым вопросом о поведении резольвент эллиптических операторов на графах с малыми рёбрами при нарушении данного нерезонансного условия.

В представленной работе рассматривается модельный пример графа и оператора на нём, для которого данное нерезонансное условие нарушено. Таким примером является оператор Шрёдингера на графе с несколькими малыми петлями, присоединёнными к одной вершине, в которой задаётся стандартное условие Кирхгофа. Показано, что хотя нерезонансное условие нарушается, резольвента сохраняет свойство голоморфности. В то же время, в главных членах ряда Тейлора возникают качественно новые слагаемые, описывающие определённую локализацию резольвенты на данных малых петлях.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00009), <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>

А. И. Буфетов. Гауссов мультипликативный хаос для синус-процесса

Реализации синус-процесса естественным образом ставится в соответствие случайная целая функция с нулями в частицах нашей конфигурации, аналогично произведению Эйлера. Доказано, что при скейлинге вещественной прямой нормализованный квадрат абсолютного значения нашей случайной функции почти наверное сходится к гауссову мультипликативному хаосу.

Следствием является то, что почти каждая реализация с удалением одной частицы является полным и минимальным множеством для пространства Пэли–Винера, тогда как если удалить две частицы, то получается множество нулей для пространства Пэли–Винера.

Ключевую роль в рассуждении играет квази-инвариантность синус-процесса под действием группы диффеоморфизмов прямой с компактным носителем.

С. Ю. Доброхотов. Операторные подход и принцип Мопертюи — Якоби в задачах с локализованными правыми частями для линейных многомерных систем дифференциальных уравнений

В недавних работах А. Аникина, С. Ю. Доброхотова, В. Е. Назайкинского и М. Руло был развит метод построения эффективных асимптотических формулы для решений скалярных многомерных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с локализованными правыми частями. Задачи такого сорта близки к задачам об асимптотике функции Грина, например для уравнения Гельмгольца. В докладе обсуждается метод построения асимптотических решений такого типа для систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. Метод основан на операторной редукции, основанной на операторном исчислении Фейнмана–Маслова исходной систем уравнений к набору скалярных уравнений и последующему применению метода, развитого для скалярных задач. С помощью принципа Мопертюи–Якоби мы показываем, что вместо собственных значений можно использовать детерминант матричнозначного символа, что может сильно упростить реализацию предлагаемого метода в решении конкретных задач.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-11-00341)

А. В. Дымов. Строгие результаты для стохастической модели волновой турбулентности Захарова–Львова

Теория волновой турбулентности интенсивно развивается в физических работах с 1960-х годов. Несмотря на значительный интерес в сообществе, математические работы, посвященные ее строгому обоснованию, начали появляться лишь в последние несколько лет. В этих работах достигнут существенный прогресс в обосновании теории, однако задача все еще остается плохо понятной. С математической точки зрения теория волновой турбулентности представляет собой эвристический метод для изучения малоамплитудных решений нелинейных гамильтоновых УрЧП с периодическими граничными условиями большого периода. Ее принципиальное утверждение состоит в том, что одна из основных характеристик решения, называемая энергетическим спектром, приближенно удовлетворяет нелинейному кинетическому уравнению, называемому волновым кинетическим уравнением.

Я расскажу о совместных работах с С. Б. Куксиным, а также С. Г. Влэдуцем и А. Майокки, в которых мы завершили первый шаг в строгом обосновании этого утверждения для энергетического спектра решения нелинейного уравнения Шредингера со случайным возмущением на торе. Такая стохастическая модель волновой турбулентности была предложена В. Е. Захаровым и В. С. Львовым в 1975 году.

А. И. Зейфман. Различные подходы для получения оценок устойчивости марковских цепей с непрерывным временем

В докладе рассмотрены различные подходы для получения оценок устойчивости предельных режимов марковских цепей с непрерывным временем по отношению к возмущениям их инфинитезимальных характеристик, основанные на исследовании прямой системы Колмогорова.

А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров. К задаче группового преследования с дробными производными

Рассматривается конфликтно управляемый процесс с участием группы преследователей и одного убегающего, описываемый линейными дифференциальными уравнениями с дробными по Капуто производными и простыми матрицами. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования и задачи уклонения.

Э. М. Мухамадиев, А. Н. Наимов. Об ограниченных решениях одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Для одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами исследован вопрос о существовании, единственности и представлении ограниченного решения. Найдены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность ограниченного решения при любой заданной ограниченной правой части уравнения. В этих условиях приведено и обосновано представление единственного ограниченного решения в виде интеграла с ядром, составленным по коэффициентам уравнения.

В. Е. Назайкинский. Асимптотические решения уравнений с локализованными правыми частями

В докладе описывается метод построения квазиклассических асимптотических решений неоднородных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в частных производных с локализованными правыми частями. Эти задачи близки к задачам об асимптотике функции Грина, в частности, для уравнения Гельмгольца. Метод основан на конструктивном описании соответствующих лагранжевых многообразий и на недавно предложенных новых представлениях канонического оператора Маслова в окрестности лагранжевых сингулярностей. Развитый метод служит основой аналитико-численного алгоритма построения эффективных асимптотических решений указанных задач, возникающих в различных областях физики и механики сплошных сред.

Доклад основан на совместных работах с С.Ю.Доброхотовым, А.Ю.Аникиным и М.Руло, поддержанных грантом РФФИ 17-51-150006 НЦНИ_а и средствами госбюджета по госзаданию №АААА-А20-120011690131-7 в Институте проблем механики РАН.

И. Ю. Полехин. Интегрируемость маятника Циглера

В работе исследуется динамика плоского двойного маятника при наличии в системе постоянной по величине следящей силы, направленной вдоль одного из звеньев маятника (маятник Циглера). Предполагается, что на систему не действует сила тяжести, но в узлах маятника могут находиться пружины линейной жесткости.

Исследуется случай, когда жесткость пружины, расположенной в точке подвеса маятника, равна нулю. В этом случае порядок системы может быть понижен. Доказывается, что в редуцированной системе существуют двухпараметрические семейства периодических решений, т.е. локально, в окрестности этих семейств, у системы есть два первых интеграла. В этом случае можно говорить об интегрируемости системы (как минимум, для части начальных условий). Объясняется механизм нарушения периодичности решений при изменении параметров или начальных данных системы, из чего следует неинтегрируемость и хаотизация

динамики системы (показывается численно). Отметим, что этот механизм принципиально отличен от случая гамильтоновых систем.

Д. М. Поляков. О собственных значениях дифференциального оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами

Рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка на единичном отрезке. Коэффициенты оператора являются вещественными и интегрируемыми на отрезке. Кроме того, предполагается, что значения коэффициентов совпадают на концах отрезка. С точки зрения механики изучаемый оператор описывает модель балки с жестко закрепленными концами, а его собственные значения указывают на различные резонансные случаи. Более того, уравнения четвертого порядка появляются как модельные уравнения для большого класса уравнений высокого порядка, возникающих в статистической механике, моделях фазового поля, моделях висячих мостов.

Для рассматриваемого оператора доказывается асимптотика собственных значений как в случае негладких коэффициентов, так и при различных предположениях их гладкости. Кроме того, выписывается формула регуляризованного следа.

А. А. Толченников. Лежандрова особенность Арнольда в решении модельного уравнения Гельмгольца с локализованной правой частью

В докладе будет рассматриваться 2-мерное модельное уравнение Гельмгольца с линейным показателем преломления и локализованной правой частью, а также фундаментальное решение этого уравнения. В похожих задачах конструкция асимптотического решения основывается на лагранжевой поверхности, составленной из полутраекторий системы Гамильтона, выпущенных из окружности (пересечении вертикальной плоскости с нулевой поверхностью уровня гамильтониана). Однако непосредственно этот алгоритм применить нельзя, поскольку имеется одна траектория, которая за бесконечное время приходит в особую точку. Это приводит к тому, что асимптотическое решение будет локализовано не только в окрестности проекции 2-мерного лагранжева многообразия в физическое пространство, но и в окрестности проекции особого луча, который “срывается” с негладкой лагранжевой поверхности, нормальная форма (лежандрова версия) которой была давно описана В. И. Арнольдом.

А. В. Цветкова. Асимптотики с комплексными фазами ортогональных полиномов, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями

Рассматриваются совместно ортогональные полиномы Эрмита $H_{(n_1, n_2)}(z)$ с двумя натуральными индексами. Такие полиномы можно определить с помощью рекуррентных соотношений, а также представить в виде решения дифференциального уравнения третьего порядка. Обсуждается подход, позволяющий получить глобальную асимптотику для полиномов с большими индексами в виде специальных функций, опираясь на каждое из упомянутых представлений.

Доклад основан на совместных работах с А. И. Аптекаревым, С. Ю. Доброхотовым и Д. Н. Туляковым.