

Алгебраическая логика и категории

декабрь 2023

- 1 . Предкатегории и категории. Малые и локально малые категории. Примеры категорий.
- 2 . Единственность тождественной и обратной стрелки. Изострелка. Изоморфные объекты.
- 3 . Категория Ω -алгебр. Изострелки в Ω -ALG.
- 4 . Начальные и финальные объекты; примеры. Двойственная категория.
- 5 . Мономорфизмы. Характеризация мономорфизмов в SET.
- 6 . Термы. Алгебра термов. Лемма об однозначном чтении.
- 7 . Абсолютная свобода алгебры термов. $T_{\Omega}(X)$ как начальный объект комматегории.
- 8 . Оценка переменных в алгебре. Значение терма в алгебре при данной оценке; его образ при гомоморфизме.
- 9 . Финальные и начальные объекты в Ω -ALG. Характеризация мономорфизмов в Ω -ALG.
- 1 0 . Подалгебры. Подалгебра, порожденная подмножеством. Морфизм $T_{\Omega}(X)$ на алгебру, порожденную X . Образ и прообраз подалгебры при морфизме.
- 1 1 . Термы данной сигнатуры. Лемма об однозначном чтении. Алгебра термов $T_{\Omega}(X)$ как абсолютно свободная алгебра над X .
- 1 2 . Значение терма в алгебре при данной оценке переменных. Термовые функции. Образ значения терма при морфизме.
- 1 3 . Истинность тождества в алгебре. Многообразия. Примеры многообразий. Сохранение тождеств при заменах переменных. Задание многообразий тождествами от фиксированного счетного множества переменных.
- 1 4 . Сохранение тождеств для подалгебр и гомоморфных образов.
- 1 5 . Конусы над семейством объектов категории. Произведение семейства объектов. Произведения в SET.
- 1 6 . Произведения в Ω -ALG. Сохранение тождеств для произведений.
- 1 7 . Диаграмма в категории. Категория конусов над диаграммой. Предел диаграммы.
- 1 8 . Уравнители. Всякий уравнитель — монострелка. Уравнители в SET и Ω -ALG.
- 1 9 . Полнота и конечная полнота. (Конечная) полнота категорий с уравнителями и (конечными) произведениями (без док.).
- 2 0 . Категория коконусов над диаграммой. Копредел диаграммы. Копроизведение (сумма) семейства объектов. Суммы в SET.
- 2 1 . Конгруэнции. Факторалгебра по конгруэнции. Теорема о гомоморфизме алгебр.

- 2 2 . Универсальное свойство факторалгебры.
- 2 3 . Коуравнители. Коуравнители в SET. Кополнота. Признак кополноты (без док.). Коуравнители в Ω -ALG.
- 2 4 . Алгебра $T_{\Omega}(X, R)$; ее универсальное свойство.
- 2 5 . Свободные алгебры многообразий. Всякая алгебра многообразия – гомоморфный образ свободной.
- 2 6 . Копроизведения в многообразиях.
- 2 7 . Эквациональные исчисления. Замена правила подстановки на схемы аксиом. Алгебра Линденбаума — Тарского эквационального исчисления как свободная алгебра многообразия.
- 2 8 . Операции S, P, H на классах алгебр. HSP как замыкание по этим операциям.
- 2 9 . Свободные алгебры в SP-классах.
- 3 0 . Теорема Биркгофа о многообразиях как HSP-замкнутых классах.
- 3 1 . Предфункторы и функторы. Примеры функторов. Контравариантные функторы. Функтор включения. Подкатегория. Полная подкатегория.
- 3 2 . Композиция функторов. Категория CAT. Изоморфизм категорий.
- 3 3 . Ном-функторы.
- 3 4 . Функторы T_{Ω} и F_{Σ} .
- 3 5 . Некоторые виды функторов: вложения, унивалентные, инъективные на объектах, полные. Вложение как изоморфизм на подкатегорию. Отражение изострелок полным унивалентным функтором.
- 3 6 . Конкретизируемые категории. Конкретизируемость малых категорий.
- 3 7 . Характеризация малых категорий с одним объектом. Теорема Кэли о представлении моноидов.
- 3 8 . Характеризация малых тонких категорий.
- 3 9 . Эквивалентность категорий. Скелетальные категории. Эквивалентность скелетальных категорий - изоморфизм.
- 4 0 . Скелет категории, его существование. Эквивалентность категории и ее скелета. Эквивалентность категорий как изоморфность скелетов.
- 4 1 . Полурешетки. Отношение порядка в полурешетке. Вложение полурешетки в полурешетку множеств с операцией пересечения.
- 4 2 . Решетки и решеточно упорядоченные множества. Решетки с 0 и 1.
- 4 3 . Фильтры и идеалы в решетках. Построение фильтров и идеалов по конгруэнциям. Главные фильтры.
- 4 4 . Дистрибутивные решетки. Эквивалентность двух дистрибутивных тождеств.
- 4 5 . Пример недистрибутивной решетки.
- 4 6 . Простые фильтры и неприводимые элементы в дистрибутивных решетках.
- 4 7 . Спектр дистрибутивной решетки. Стоуновское отображение дистрибутивной решетки в решетку подмножеств спектра. Теорема Биркгофа — Стоуна о представлении дистрибутивных решеток.

- 4 8 . Оценка мощности свободной дистрибутивной решетки конечного ранга.
- 4 9 . Свободные решетки рангов 1 и 2. Бесконечность свободной решетки ранга 4.
- 5 0 . Булевы алгебры; определение и простейшие свойства.
- 5 1 . Максимальные фильтры (ультрафильтры) в булевых алгебрах. |
Эквивалентные определения максимального фильтра. Равносильность простоты и максимальнойности. Расширение фильтра до максимального. Атомы и главные ультрафильтры.
- 5 2 . Теорема Стоуна о представлении булевых алгебр. Конечные булевы алгебры.
- 5 3 . Свободные булевы алгебры конечного ранга.
- 5 4 . Стоуновские топологические пространства. Стоуновская топология на спектре булевой алгебры.
- 5 5 . Стоуновское пространство как спектр алгебры открыто-замкнутых подмножеств.
- 5 6 . Двойственная эквивалентность булевых алгебр и стоуновских пространств.
- 5 7 . Импликация в решетке. Гейтинговы решетки, их дистрибутивность. Гейтинговы алгебры. Истинность аксиом интуиционистской логики в гейтинговых алгебрах.
- 5 8 . Суперинтуиционистские логики высказываний, их связь с гейтинговыми алгебрами.
- 5 9 . Интуиционистские шкалы Крипке (частичные порядки) и их гейтинговы алгебры. Модели Крипке.
- 6 0 . Каноническая шкала Крипке гейтинговой алгебры. Вложение гейтинговой алгебры в алгебру ее канонической шкалы (теорема Биркгофа - Стоуна о представлении).
- 6 1 . * Теорема о полноте интуиционистской логики относительно шкал Крипке.
- 6 2 . Теорема о представлении конечных гейтинговых алгебр.
- 6 3 . Порождение многообразия свободными алгебрами конечного ранга. Фinitные и локально фinitные многообразия. Эквивалентные условия локальной фinitности. Примеры локально фinitных многообразий.
- 6 4 . Многообразие гейтинговых алгебр не локально фinitно.
- 6 5 . Нормальные модальные алгебры. Модальная логика K. Модальные шкалы Крипке и их модальные алгебры.
- 6 6 . Теорема Тарского — Йонссона о представлении модальных алгебр.
- 6 7 . * Теорема о полноте логики K относительно шкал Крипке.

* дополнительные вопросы