Задачи к спецкурсу "Алгебраическая логика и категории" (2023)

1. Докажите, что объект, изоморфный начальному, - начальный.
2. Докажите, что если в категории все стрелки - изо, то она изоморфна своей двойственной.
3. Постройте категорию с единственным объектом, которая не является локально малой.
4. *Категория стрелок* для категории $\mathcal{C}$ обозначается $\mathcal{C}^{\to}$ и определяется следующим образом. Объекты $\mathcal{C}^{\to}$ – стрелки из $\mathcal{C}$; морфизмы стрелки ($f: A \to B$) в ($f': A \to B$) – это пары (a, b), где $a: A \to A'$, $b: B \to B'$, для которых коммутативен квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{b} & B' \end{array}$$

Тождественный морфизм для (A, f, B) определяется как $(1_A, 1_B)$.

Композиция определяется покомпонентно: $(a, b)\cdot(c,d)=(a\cdot c, b\cdot d)$

Проверьте, что это определение задает категорию.

5. Докажите, что если $\mathcal{C}$ имеет начальный объект, то и $\mathcal{C}^{\to}$ имеет начальный объект.

6. Найдите все начальные объекты в $SET^{\to}$.

7. а) Докажите, что если $\mathcal{C}$ имеет финальный объект, то и $\mathcal{C}^{\to}$ имеет финальный объект.

б) Найдите все финальные объекты в $SET^{\to}$.

8. Пусть (AxB, p_A, p_B) - произведение A и B (как конус), f - изоморфизм X на A x B. Докажите, что $(X, p_A\cdot f, p_B\cdot f)$ - произведение A и B.

9. (a) Докажите, что если в категории существуют произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любых 3 объектов,

причем $AxBxC \cong (AxB)xC \cong Ax(BxC)$ (как объекты).

(b) Докажите, что если в категории существует финальный объект и произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любого конечного семейства объектов.

Говорят, что категория $\mathcal{C}$ - *с конечными произведениями*, если в ней существуют произведения любых двух объектов (а значит, и любые конечные произведения — задача 41). Анакогично определяются категории *с конечными суммами*. Категория $\mathcal{C}$ - *с уравнителями*, если в ней существуют уравнители любых двух смежных стрелок (т.е. стрелок с общим концом и началом).

10. Всегда ли существует копроизведение двух объектов в категории конечных групп?

11. Что можно сказать о произведении, если один из сомножителей

а) финальный объект ? б) начальный объект ?

12. *Антидискретная категория* – это категория, в которой все объекты нулевые (начальные и финальные). Докажите, что всякая антидискретная категория полна.

13. Если в категории существует произведение $A\times A$, то *диагональный морфизм* для A (обозначение: Δ_A)– это $\langle 1_A, 1_A\rangle : A \to A \times A$. Докажите, что Δ_A – уравнитель пары проекций $p_1, p_2 : A \times A \to A$.

14. Докажите, что конечная категория с одним объектом - с конечными произведениями, если и только если она дискретна.

Категория с 1 объектом, где стрелки образуют моноид G, обозначается CM(G).

17. Приведите пример нетривиального моноида G, для которого категория CM(G) - с конечными произведениями. (Указание: можно использовать преобразования **N** и канторовскую нумерацию пар.)
18. Докажите, что если G — группа, а категория CM(G) — с уравнителями, то G тривиальна.
19. Докажите, что если G — нетривиальный моноид, а категория CM(G) — с уравнителями, то G бесконечен.
20. (а) Докажите, что композиция мономорфизмов – мономорфизм.
(б) Докажите, что если $\alpha \cdot \beta$ – мономорфизм, то β – мономорфизм.

Категория $\mathcal{C} \downarrow A$, где A – объект $\mathcal{C}$, - это часть (подкатегория) в $\mathcal{C}^{\rightarrow}$, состоящая из стрелок с концом A и морфизмов вида $(f, 1_A)$ (см. задачу 4).

21. Докажите, что мономорфизмы в категории $\mathcal{C} \downarrow A$ получаются из мономорфизмов в $\mathcal{C}$.
22. Сформулируйте определение *эпистрелки (эпиморфизма)* как двойственного понятия к мономорфизму и аналог задачи 22 для эпистрелок.
23. Докажите, что в категории SET эпистрелки – это в точности сюръекции.
24. Докажите, что в любом многообразии алгебр всякий сюръективный морфизм – эпиморфизм.
25. Постройте эпиморфизм полугрупп, который не сюръективен.
26. Пусть $\mathcal{C}$ — категория с уравнителями и произведениями, D: J $\rightarrow$ $\mathcal{C}$ – произвольная диаграмма. Постройте предел D следующим образом.

Обозначим начало стрелки α через $o(\alpha)$, конец — через $t(\alpha)$. Рассмотрим произведения:

- произведение всех объектов диаграммы D

$$\prod_{j \in \mathrm{Ob}\,J} D_j = (p_j\colon P \rightarrow D_j)_{j \in \mathrm{Ob}\,J}$$

- произведение всех концов стрелок диаграммы D

$$\prod_{\alpha \in \mathrm{Mor}\,J} D_{t(\alpha)} = (\pi_\alpha\colon Q \rightarrow D_{t(\alpha)})_{\alpha \in \mathrm{Mor}\,J}$$

Рассмотрим стрелки $\varphi_\alpha, \psi_\alpha\colon P \rightarrow D_{t(\alpha)}$, где

$$\varphi_\alpha := p_{t(\alpha)}, \quad \psi_\alpha := D_\alpha\, p_{o(\alpha)}$$

Тогда получим

$$P \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Q, \text{ где } \phi := <\varphi_\alpha>_{\alpha \in \mathrm{Mor}\, J},\ \psi := <\psi_\alpha>_{\alpha \in \mathrm{Mor}\, J}$$

Пусть $\varepsilon: E \to P$ – уравнитель ϕ и ψ. Докажите, что $(p_j \varepsilon: E \to P_j)_{j \in \mathrm{Ob}\, J}$ – предел диаграммы D.

27. Докажите, что если категория $\mathcal{C}$ полна, то и любая категория $\mathcal{C}\downarrow A$ полна.
28. В категории SET опишите явным образом конструкцию обратного предела последовательности множеств и отображений $(\alpha_n: X_n \to X_{n-1})_{n\geq 1}$.
29. Докажите, что любое множество мощности континуум является обратным пределом счетной последовательности конечных множеств.
30. Докажите, что векторное пространство размерности континуум над полем K мощности не выше континуума является обратным пределом счетной последовательности конечномерных пространств (в категории VEC_K).

Предел диаграммы

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

называется *расслоенным произведением f и g над X* (также коамальгамой, декартовым квадратом, pullback). (Строго говоря, предел как конус состоит из 3 стрелок: верхней и левой сторон квадрата и его диагонали.)

31. Докажите, что квадрат в категории $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

декартов, если и только если его диагональ fh (=gk) и два треугольника задают произведение f и g в категории $\mathcal{C}\downarrow X$.

32. Покажите, как из расслоенного произведения A и B над терминальным объектом строится произведение A и B.

33. Пусть в категории есть произведение A и B и уравнители. Постройте расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

с помощью уравнителя стрелок fp_1, fp_2, где $p_1 : A\mathrm{x}B \to A$, $p_2 : A\mathrm{x}B \to B$ – проекции.

34. (продолжение задачи 33). Приведите явную конструкцию расслоенного произведения в SET.

35. Предположим, что $\mathcal{C}$ - категория с расслоенными произведениями.

а) Докажите, что стрелка $f: A \to X$ – моно, если и только если квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1} & A \\ 1\downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

декартов.

б) Докажите, что стрелка $f: A \to X$ – моно в $\mathcal{C}$, если и только если $f \cong f\mathrm{x}f$ в категории $\mathcal{C}\downarrow X$.

36. Пусть $f: A \to B$ – морфизм Ω-алгебр, X – подалгебра B, j – включение X в B. Докажите, что расслоенное произведение f и j (как объект) изоморфно алгебре $f^{-1}(X)$.

37. Пусть $f: A \to B$ – сюръективный морфизм Ω-алгебр. Докажите, что расслоенный квадрат f (как обьект) является конгруэнцией на A.

38. Постройте конечную сигнатуру Ω и бесконечную Ω-алгебру, не имеющую собственных подалгебр.

39. *Унар* — это алгебра с единственной одноместной операцией. Постройте конечный унар, содержащий более 1 элемента и не имеющий собственных подалгебр.

40. Докажите, что любой бесконечный унар имеет бесконечно много собственных подалгебр.

41. Существует ли конечная полугруппа, содержащая более 1 элемента и не имеющая собственных подалгебр?

42. Существует ли унар, который вкладывается в любой конечный унар?

43. Докажите, что в подалгебре ($\mathbf{N}$,+) все элементы, кроме конечного числа, образуют арифметическую прогрессию.

44. *Рангом* подалгебры называется наименьшая мощность множества образующих.

а) Постройте подалгебру ($\mathbf{N}$,+) ранга 2.

б) Постройте подалгебру ($\mathbf{N}$,+) произвольного конечного ранга.

45. Докажите, что всякая подалгебра ($\mathbf{N}$,+) конечно порождена.

46. Постройте конечные алгебры A, B, которые не вкладываются в A x B. (Указание: можно рассмотреть унары).
47. Постройте коммутативные полугруппы A, B, которые не вкладываются в A x B. (Указание: можно использовать рациональные числа).
48. а) Докажите, что всякая конечная полугруппа содержит хотя бы один идемпотент (т. е. элемент равный своему квадрату).

    б) Выведите отсюда, что если A, B - полугруппы, и A конечна, то B вкладывается в A x B.
49. Постройте конечные неизоморфные алгебры A, B, такие что A x A и A x B изоморфны. (Указание: можно рассмотреть унары).
50. Докажите, что произведение двух конечно порожденных моноидов — конечно порожденный моноид.
51. Верно ли, что произведение двух конечно порожденных Ω-алгебр — конечно порожденная алгебра?

$T_\Omega(1)$ обозначает Ω-алгебру термов от n переменных.

52. Постройте вложение алгебры $T_\Omega(1)$ в $T_\Omega(2)$.
53. Докажите, что всякая 1-порожденная подалгебра алгебры $T_\Omega(X)$ изоморфна $T_\Omega(1)$.
54. Пусть $|X| \geq |Y|$. Постройте вложение $T_\Omega(Y)$ в $T_\Omega(X)$.
55. Пусть $|X| \geq |Y|$. Постройте гомоморфизм $T_\Omega(X)$ на $T_\Omega(Y)$.
56. Сколько автоморфизмов имеет алгебра $T_\Omega(X)$ при $|X| = n$?
57. Докажите, что унар ($\mathbf{N}$,S), где S — сдвиг на 1 вправо, изоморфен алгебре термов $T_\Omega(1)$, где Ω — сигнатура унаров.
58. Рассмотрим конечные деревья конечных двоичных последовательностей: дерево — это множество последовательностей, содержащее вместе с каждой последовательностью все ее начальные отрезки (в том числе, пустой λ). На деревьях определим операцию «прививки»: $T + S := \{0x \mid x\in T\} \cup \{1x \mid x\in S\} \cup \{\lambda\}$.

    Докажите, что полученная алгебра изоморфна $T_\Omega(X)$ для сигнатуры Ω с единственной бинарной операцией и $|X|=1$ (*свободная магма ранга 1*).
59. Рассмотрим конечную сигнатуру Ω, не содержащую констант. Докажите, что если X, Y конечны и $T_\Omega(X) \cong T_\Omega(Y)$, то $|X|=|Y|$.
60. Рассмотрим конечную сигнатуру Ω. Докажите, что если X, Y конечны и $T_\Omega(X) \cong T_\Omega(Y)$, то $|X|=|Y|$.
61. Докажите, что всякая подалгебра алгебры $T_\Omega(X)$ изоморфна алгебре $T_\Omega(Y)$ для некоторого Y.

62. Пусть Ω - сигнатура с единственной бинарной операцией. Существует ли вложение $T_\Omega(2)$ в $T_\Omega(1)$?
63. Пусть Ω - сигнатура с единственной бинарной операцией. Найдите количество автоморфизмов $T_\Omega(4) \to T_\Omega(4)$, имеющих хотя бы одну неподвижную точку.
64. Докажите, что $(\mathbf{N}, +, 0)$ - свободный моноид ранга 1.
65. Докажите, что $(\mathbf{N}^k, +, 0)$ - свободный коммутативный моноид ранга k (если $k>0$, натуральное).
66. Как построить свободный коммутативный моноид над произвольным множеством X?
67. a) Как из свободного моноида получить свободную полугруппу того же ранга?
    b) Как из свободного коммутативного моноида получить свободную коммутативную полугруппу того же ранга?
68. Пусть $|X| \geq |Y|$. Постройте
    а) вложение $F_\Sigma(Y)$ в $F_\Sigma(X)$.
    б) гомоморфизм $F_\Sigma(X)$ на $F_\Sigma(Y)$.
69. Докажите, что любой свободный моноид конечного ранга вкладывается в свободный моноид ранга 2.
70. Докажите, что свободный коммутативный моноид ранга 3 не вкладывается в свободный коммутативный моноид ранга 2.
71. Пусть θ, ψ – конгруэнции на Ω-алгебре A, причем $\theta \subset \psi$. Постройте конгруэнцию ψ/θ в алгебре A/θ, такую что $(A/\theta)/(\psi/\theta) \cong A/\psi$
72. (продолжение предыдущей задачи) Con (A) обозначает множество конгруэнций алгебры A. Докажите, что множество конгруэнций $\mathrm{Con}(A/\theta)$ алгебры A/θ, упорядоченное по включению, изоморфно (упорядоченному) подмножеству Con(A), которое состоит из конгруэнций, содержащих θ.
73. Постройте свободное коммутативное кольцо с единицей ранга 1.
74. Найдите копроизведение $\mathbf{N} \star \mathbf{N}$ (с операцией сложения) в категории коммутативных моноидов.
75. Найдите копроизведение $\mathbf{N} \star \mathbf{N}$ (с операцией сложения) в категории моноидов.
76. Может ли копроизведение 2 тривиальных алгебр в многообразии быть нетривиальным?
77. Всегда ли алгебра A вкладывается в копроизведение $A \star A$ **?**
78. Докажите, что $T_\Omega(m+n) \cong T_\Omega(m) \star T_\Omega(n)$.
79. Докажите, что в любом многообразии свободная алгебра ранга m+n – копроизведение свободных алгебр рангов m и n.

    80. Зададим «ковариантный функтор степени» $\mathcal{P}$: SET $\rightsquigarrow$ SET следующим образом. $\mathcal{P}(X)$ – множество всех подмножеств X; если $f: X \to Y$, то $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ – отображает каждое множество $Z \subset X$ в его образ $f[Z]$.
    Докажите, что $\mathcal{P}$ - функтор и что он является вложением SET в себя.

    81. Зададим «контравариантный функтор степени» $\mathcal{Q}$: $\mathrm{SET}^\circ \rightsquigarrow$ SET на объектах как $\mathcal{P}$; и если $f: X \to Y$, то $\mathcal{Q}(f) : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ – отображает каждое множество $Z \subset Y$ в его

прообраз $f^{-1}[Z]$.
а) Докажите, что $\mathcal{Q}$ - действительно функтор.

б) Докажите, что категория SET° конкретизируема.

82. а) Докажите, что категории SET и SET° неэквивалентны.

б) Эквивалентны ли категории FINSET и $FINSET^{\circ}$?

83. Докажите, что если категория $\mathscr{C}$ конкретизируема, то и $\mathscr{C}^{\circ}$ конкретизируема.

84. Докажите, что все категории Ω-ALG конкретизируемы.

85. Докажите, что категория CAT конкретизируема.

86. Рассмотрим категорию pSET множеств с отмеченной точкой: ее объекты – множества с отмеченной точкой, а стрелки из (X,x) в (Y,y) – это отображения X в Y, переводящие x в y.

(а) Постройте забывающий функтор **U**: pSET $\rightsquigarrow$ SET. Отражает ли он изоморфизмы?

(б) Докажите, что pSET и SET не эквивалентны.

87. Докажите, что pSET эквивалентна категории, в которой объекты - множества, а морфизмы - частичные функции.

88. Пусть MON — категория моноидов и гомоморфизмов, **U**: MON $\rightsquigarrow$ SET — забывающий функтор. Докажите, что **U** отражает изоморфизмы.

89. Пусть VEC_K — категория векторных пространств и линейных отображений над полем K, **U**: $VEC_K \rightsquigarrow$ SET — забывающий функтор. Верно ли, что **U** отражает изоморфизмы?

90. Постройте полное вложение категории MON моноидов и гомоморфизмов в категорию CAT.

91. *Монотонное отображение* предпорядка (X,R) в предпорядок (X',R') — это функция f: X → X' , такая что если xRy, то f(x)R'f(y). Постройте полное вложение категории POS предпорядков и монотонных отображений в CAT.

92. Пусть OS — категория частичных порядков (полная подкатегория POS),
U: OS $\rightsquigarrow$ SET — забывающий функтор. Докажите, что **U** не отражает изоморфизмы.

93. Постройте полное вложение SET в POS.

94. Докажите, что $(\mathscr{C}^{\circ})^{\rightarrow} \cong (\mathscr{C}^{\rightarrow})^{\circ}$. (Категория стрелок была определена в задаче 4)

95. Для малой категории $\mathscr{C}$ постройте функтор $\mathscr{C}\downarrow(—)$: $\mathscr{C} \rightsquigarrow$ CAT, переводящий A в $\mathscr{C}\downarrow A$. Является ли он вложением?

96. Постройте забывающий функтор **U:** CAT $\rightsquigarrow$ SET. Покажите, что
$\mathbf{U}\cdot\mathscr{C}\downarrow(—)$ **–** вложение.

97. Пусть (X, ≤) - частичный порядок, $\mathscr{C}$ = CPO(X, ≤) - соответствующая ему категория. Докажите, что $\mathscr{C}\downarrow a \cong$ CPO((X, ≤)↓a), где (X, ≤)↓a – ограничение
(X, ≤) на множество {x | x ≤ a}.

98. Пусть A – объект категории $\mathscr{C}$. Дайте определение *категории* A↑$\mathscr{C}$ *стрелок под A.*

Докажите, что $(A\uparrow\mathscr{C})^{\circ} \cong \mathscr{C}^{\circ}\downarrow A$.

99. Докажите, что pSET $\cong$ {a}$\uparrow$ SET (см. задачу 11).

100. Рассмотрим функторы Hom(A,—) из SET в SET.
Докажите, что если A непусто, то Hom(A,—) - вложение категорий. Что можно сказать про Hom($\varnothing$,—)?

101. При каких A функтор из предыдущей задачи является полным?

102. Рассмотрим категорию Mat_K, объекты которой – натуральные числа, объект 0 – начальный и финальный, морфизмы из m в n –
(n x m)-матрицы над полем K, композиция морфизмов A·B между ненулевыми объектами – это произведение матриц BA (а с нулевым объектом и так все ясно). Докажите, что Mat_K эквивалентна категории VEC_K векторных пространств над K и линейных отображений.

103. Рассмотрим категорию $\mathscr{C}$ = $FINVEC_K$ конечномерных векторных пространств над полем K.
(а) Докажите, что если dimA = 1, то $Hom_{\mathscr{C}}$(—,A) – эквивалентность ($\mathscr{C}^{\circ}$ и $\mathscr{C}$).
(б) Как это связано со стандартными понятиями из линейной алгебры?
(в) Как преобразуется матрица линейного отображения при действии этого функтора?

104. Докажите, что категория $VEC_{\mathbf{R}}$ не эквивалентна своей двойственной.

105. Докажите, что категория FINSET конечных множеств эквивалентна подкатегории в $FINVEC_K$.

106. Докажите, что эквивалентность категорий сохраняет пределы. А именно, если конус X – предел диаграммы D, а F – эквивалентность, то F(X) – предел диаграммы FD. (Точное определение F(X) дайте самостоятельно.)

107. Докажите, что если $\mathscr{C}$ - категория с конечными произведениями и $\mathscr{D} \sim \mathscr{C}$, то и $\mathscr{D}$ - с конечными произведениями.

108. Докажите, что эквивалентность категорий сохраняет полноту.

109. *Конгруэнция* в категории – это отношение эквивалентности на стрелках, согласованное с концами, началами и композицией.
(а) Дайте определение факторкатегории по конгруэнции.
(б) Постройте биективный на объектах и полный функтор из категории $\mathscr{C}$ на факторкатегорию $\mathscr{C}/\sim$.

110. (продолжение задачи 109). Для функтора $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ определите ядерную когруэнцию $\sim_{\mathbf{F}}$. С ее помощью постройте разложение **F** в композицию **H·G**, где **G** – биективный на объектах и полный, **H** – унивалентный.

111. Докажите, что CAT – категория с конечными произведениями.

112. Докажите, что множество натуральных чисел с операциями НОД(x,y) и НОК(x,y) образует решетку, изоморфную $\Theta(\mathbf{Z})$ (решетке конгруэнций группы **Z**).

113. Дистрибутивна ли решетка конгруэнций $\Theta(\mathbf{Z})$?

114. Докажите, что любая конечная дистрибутивная решетка гейтингова.

115. Постройте дистрибутивную, но не гейтингову решетку.

116. Сколько существует попарно не изоморфных дистрибутивных решеток из 4 элементов?

117. Найдите все дистрибутивные решетки (с точностью до изоморфизма), имеющие единственный простой фильтр.

118. Найдите все дистрибутивные решетки (с точностью до изоморфизма), имеющие 2 простых фильтра.

119. Найдите все дистрибутивные решетки из 5 элементов с точностью до изоморфизма.

120. Докажите, что для любого конечного $n \geq 5$ имеются по крайней мере 2 неизоморфные дистрибутивные решетки из n элементов.

121. Найдите все дистрибутивные решетки из 6 элементов с точностью до изоморфизма. (Указание: можно использовать задачу 114 и теорему о представлении.)

122. Существует ли бесконечная решетка, в которой все фильтры главные?

123. Докажите, что в дистрибутивной решетке любой фильтр равен пересечению всех содержащих его простых фильтров.

124. (а) Постройте конечную дистрибутивную решетку, в которой все фильтры — простые.

(б) Найдите все такие конечные решетки.

Антицепь в частично упорядоченном множестве – это подмножество, в котором никакие 2 элемента не сравнимы.

125. Докажите, что мощность свободной дистрибутивной решетки с 0 и 1 ранга n равна количеству антицепей в булевой алгебре 2^n.

126. Докажите, что мощность свободной дистрибутивной решетки с 0 и 1 ранга n равна количеству монотонных функций $2^n \to 2$.

127. *Булево кольцо* – это коммутативное кольцо с 1, удовлетворяющее тождеству $x^2 \equiv x$.

(a) Докажите, что булевы кольца удовлетворяют тождеству $x+x \equiv 0$

(b) Докажите, что булево кольцо является булевой алгеброй с операциями

$x \vee y := x+y+xy$, $x \wedge y := xy$, $-x := x+1$.

80. 128. Докажите, что булева алгебра является булевым кольцом с операциями

$x+y := -(x \Leftrightarrow y)$, $xy := x \wedge y$.

81. 129. Докажите, что многообразия булевых алгебр и булевых колец изоморфны как категории.

130. Существует ли бесконечная булева алгебра, в которой все фильтры главные?

131. Булева алгебра называется *атомной*, если всякий ее ненулевой элемент больше или равен какому-нибудь атому. Докажите, что любая атомная булева алгебра B

вложима в $\mathbf{2}^{At(B)}$, где At(B) – множество всех атомов B.
132. Постройте булеву алгебру со счетным спектром.
133. Докажите, что спектр свободной булевой алгебры счетного ранга $F_{BA}(\omega)$ имеет мощность континуума.
134. Постройте вложение $F_{BA}(\omega)$ в алгебру $\mathbf{2}^{\omega}$.
135. Докажите, что всякая конечная булева алгебра вложима в конечную свободную булеву алгебру.
136. Пусть $P_f(\omega)$ - булева алгебра конечных подмножеств ω и дополнений к ним. Докажите, что эта алгебра вкладывается в любую счетную булеву алгебру.
132А. Опишите стоуновское пространство алгебры $P_f(\omega)$. Сколько в нем неизолированных точек?
133А. Докажите, что в алгебре $P_{fin}(\omega)$ все немаксимальные фильтры – главные.
134А. Докажите, что любая счетная булева алгебра вложима в $F_{BA}(\omega)$.
135А. Докажите, что любое счетное стоуновское пространство вложимо в $\mathcal{U}(F_{BA}(\omega))$.
136А. Докажите, что свободная булева алгебра бесконечного ранга *безатомна* (т.е. не содержит атомов).
137. Докажите, что любая бесконечная булева алгебра содержит бесконечную цепь.
138. Докажите, что любая бесконечная булева алгебра содержит бесконечную антицепь.
139. Докажите, что всякая непротиворечивая суперинтуиционистская логика содержится в классической логике.
140. Докажите, что 3-элементные гейтинговы алгебры изоморфны 3-элементной цепи **3**.
141. Докажите, что суперинтуиционистская логика L(**3**) *(логика Сметанича)* не совпадает ни с классической, ни с интуиционистской.
142. Докажите что всякая непротиворечивая суперинтуиционистская логика либо совпадает с классической, либо содержится в L(**3**).
143. Докажите, что свободная гейтингова алгебра $F_{HA}(1)$ содержит ровно 2 максимальных фильтра.
144. Докажите, что в любой гейтинговой алгебре все элементы вида $-a$ $(= a \to 0)$ образуют булеву алгебру.