Для сдачи экзамена на высший балл надо решить пять задач из приведённого списка. Неправильные решения не учитываются (не повышают и не снижают оценку). Все теоремы и леммы, доказанные в курсе, могут при решении задач использоваться без доказательства.

Решения присылать на dukov@mi-ras.ru до конца календарного года.

Во всех задачах рассматриваются C^∞-гладкие векторные поля на двумерной сфере.

1 Однопараметрические семейства

Рассмотрим типичное однопараметрическое семейство векторных полей, никакое поле которого не содержит сепаратрисную петлю. Докажите, что в таком семействе встречаются только потоки, у которых все аттракторы (милноровский, статистический, минимальный) совпадают.

Указание. Используйте классификацию однопараметрических семейств, заданную теоремой Сотомайора.

2 n связок

Рассмотрим полицикл γ, образованный n сёдлами и n сепаратрисными связками. Обозначим собственные значения сёдел через $\lambda_i < 0 < \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть у полицикла γ имеется притягивающая полуокрестность: положительная орбита любой достаточно близкой к полициклу точки наматывается на полицикл. Описать милноровский, статистический и минимальный аттракторы потока в замыкании этой полуокрестности.

3 Реализация петли

Приведите пример полиномиального векторного поля, содержащего сепаратрисную петлю.

4 Реализация параболического цикла

Приведите пример полиномиального векторного поля, содержащего параболический предельный цикл.

5 Два определения минимального аттрактора

Напомним, что есть два определения минимального аттрактора.

Первое определение основано на понятии *min-пренебрежимого множества.* А именно, для потока φ, меры μ (в нашем случае это мера Лебега на сфере) и области U введём функцию

$$\tilde{I}_U^T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T I_U^t(x)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_U(\varphi^t(x))dt,$$

где I_U - характеристическая функция области U (т.е. равна 1 в точках из этой области и 0 — в остальных).

Говорят, что открытое множество U *min-пренебрежо*, ежели $\tilde{I}_U^T \to 0$ по мере μ. Дополнение до объединения всех min-пренебрежимых открытых множеств называется *минимальным аттрактором.*

С другой стороны, минимальный аттрактор можно рассматривать как объединение носителей всех мер, полученных применением процедуры Крылова-Боголюбова к мере Лебега (т.е. речь о всех мерах, получающихся как частичные пределы при предельном переходе в выражении вида $\frac{1}{T}\int_0^T \varphi_*^t(\mu)dt$).

Докажите, что эти два определения действительно задают одно и то же множество.

Примечание. Несмотря на устрашающую формулировку, стандартный $\varepsilon - \delta$ формализм быстро приводит к ответу.

6 Отображение Пуанкаре модифицированного Боуэна

Докажите, что для модифицированного примера Боуэна отображение Пуанкаре в координате на трансверсали $\xi = \ln\ln\frac{1}{x}$ (где x - расстояние до двуугольника) растягивает в малой окрестности двуугольника (достаточно вычислить производную).

7 A_M для мод. Боуэна и его квадрата

Опишите аттрактор Милнора для модифицированного примера Боуэна и для его декартова квадрата.

8 Структура A_{stat}

Пусть U — поглощающая окрестность или полуокрестность полицикла, статистический аттрактор потока в которой состоит из одной точки e. Пусть V - другая поглощающая окрестность; обозначим статистический аттрактор потока в ней через A. Докажите, что статистический аттрактор потока в множестве $U \times V$ — это в точности множество $\{e\} \times A$.

Примечание. Заметьте, что если аттрактор потока в окрестности U содержал хотя бы две точки, то аттрактор $U \times V$ уже не имел бы вида прямого произведения: контрпример даёт аттрактор декартова квадрата модифицированного примера Боуэна.

9 Дважды модифицированный Боуэн

Что является статистическим аттрактором лунки, образованной двумя седлоузлами со сжимающим отображением последования (Пуанкаре)?

Указание. Перейти к двойному логарифмическому времени.

10 Бифуркационная диаграмма

Пусть векторное поле содержит сепаратрисную петлю с седлом внутри, сепаратриса которого наматывается в прямом времени на петлю. Нарисуйте бифуркационную диаграмму возмущающего петлю типичного однопараметрического семейства.