# Аннотации докладов

**А. И. Аптекарев,** *Асимптотика Сегё совместно ортогональных многочленов для системы весов Анжелеско*

Система весов Анжелеско: $\{\rho_j(x),\, x \in \Delta_j \subset \mathbb{R}\}_{j=1}^{d}$, где отрезки $\Delta_j : \Delta_j \cap \Delta_k = \varnothing,\, j \neq k$, является одной из базовых для совместно ортогональных многочленов (СОМов) $Q_{\vec{n}}$ с индексом $\vec{n} := \{n_j\}_{j=1}^{d}$:

$$\int Q_{\vec{n}}(x)\, x^k\, \rho_j(x) dx = 0, \qquad k = 1, ..., n_j, \quad j = 1, ..., d,$$

при том, что $\deg Q_{\vec{n}} = |\vec{n}| := n_1 + ... + n_d$ . Очевидно, при $d = 1$ имеем вырождение в $Q_n$ – ортогональные многочлены (ОМы).

В докладе мы, стартуя с подхода Видома к сильным (или типа Сегё) асимптотикам ОМов, обсудим адаптацию этого подхода на СОМы относительно системы Анжелеско: известный частный результат при $d = 2, \vec{n} = (n, n)$, а также перспективы общего случая, мотивированного современными запросами спектральных задач для операторов Шредингера на графе-дерево Кэли.

**Р. В. Бессонов,** П. В. Губкин, *Решение дискретного нелинейного уравнения Шредингера на решетке $\mathbb{Z}$ с помощью алгоритма Шура для аналитических функций.*

В 1987 г. Й. Цуцуми доказал, что нелинейное уравнение Шредингера

$$iu'_t = -u''_{xx} \pm 2|u|^2 u, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad u\big|_{t=0} = u_0$$

разрешимо в классе начальных данных $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, причем решение единственно. Доказательство использует прямой метод, основанный на применении неравенства Стрихарца. Данный результат нельзя получить методами классической обратной теории рассеяния по следующей причине: данные рассеяния для системы Дирака с потенциалом из класса $L^2(\mathbb{R})$ (вспомогательной задачи для нелинейного уравнения Шредингера) не определяют этот потенциал единственным образом. Указанный результат, изначально открытый в постановке для матриц Якоби в 2002 г., принадлежит А. Вольбергу и П. Юдицкому.

В докладе обсуждается модификация классического метода обратной задачи рассеяния, с помощью которой можно получить разрешимость дискретного нелинейного уравнения Шредингера (уравнения Абловица-Ладика) в классе начальных данных $\ell^2(\mathbb{Z})$. Доказательство основано на оценке в алгоритме Шура для аналитических функций из класса Сегё. Оно приводит к новому экспоненциально быстрому численному методу решения дискретного уравнения Шредингера. Непрерывный случай пока остается открытым.

**А. Б. Богатырев,** *Спектральная задача Пуанкаре и Стеклова.*

Рассматривается спектральная задача с парой операторов граничного влияния (преобразующих данные Дирихле гармонической функции в ее данные Неймана) для пары плоских областей с общей границей. Подобные задачи возникают при обосновании и оптимизации вычислительных методов типа разделения области и фиктивных компонент. Задача сводится к исследованию пучка одномерных интегральных операторов с ядрами Коши и Грунского. Исследуется возможность нахождения собственных чисел и функций простейших пучков в замкнутой аналитической форме.

**А. Л. Делицын,** *Быстрые алгоритмы решения нелинейного уравнения Шредингера для цифровой компенсации искажений сигнала в волоконно-оптических линиях связи.*

Начальная задача для нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u, \quad -\infty < t < \infty, \quad z > 0, \quad u\big|_{z=0} = u_0(t)$$

является простейшей, но реалистичной моделью для описания распространения сигнала в волоконно-оптической линии предачи. При прохождении линии передачи информации сигнал полностью искажается и требует восстановления. Основной проблемой является необходимость быстрого решения данной задачи. Начальная задача для линейного уравнения Шредингера требует всего $O(N \ln N)$ действий (комплексных умножений). Под быстрыми понимаются алгоритмы, требующие меньше чем $O(N^2)$ действий.

В настоящий момент времени для решения указанной задачи могут рассматриваться алгоритмы, связанные с тремя различными подходами. В качестве первого может быть рассмотрен метод обратной задачи рассеяния. Формально он требует $O(N \ln^2 N)$ действий. Его численная неустойчивость является основным препятствием для практического применения. В случае продвижения в области теории устойчивости методов решения обратной задачи рассеяния данный подход станет исключительно актуальным в практическом плане. Вторым методом является теория возмущений, в том числе метод Крылова-Боголюбова для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих исходную задачу. Данный подход является основным рабочим методом, применимым на практике, но реализован только для первой поправки теории возмущений. Третьим возможным методом является применение малоранговых аппроксимаций рядов Вольтерра. Подобные методы обладают высокой скоростью работы. Основной проблемой является необходимость непосредственного вычисления операторов Вольтерра и отсутствие математической теории, позволяющей предсказать поведение алгоритмов.

**А. В. Домрин,** *О свойствах вещественно-аналитических решений нелинейного уравнения Шрёдингера и связанных с ним уравнений.*

Показано, что любое локальное вещественно-аналитическое решение фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера в размерности 1+1 допускает аналитическое продолжение в некоторую полосу (возможно, увеличенную до полуплоскости или всей плоскости), параллельную оси пространственной переменной, а для дефокусирующего уравнения это верно, если допустить наличие особенностей типа полюсов. Обсуждается вопрос о максимальной области аналитичности решений и виде возможных особенностей для векторных и матричных вариантов НУШ и для уравнений, входящих в их иерархии, а также для модели магнетика Гейзенберга и уравнения Ландау–Лифшица.

**Л. Л. Фрумин**, А. Е. Чернявский, *Алгоритм решения обратной спектральной задачи рассеяния для системы Манакова.*

Описан численный алгоритм решения обратной спектральной задачи рассеяния, ассоциированной с моделью Манакова векторного нелинейного уравнения Шрёдингера. Эта модель волновых процессов одновременно учитывает дисперсионные, нелинейные и поляризационные эффекты. Она востребована в нелинейных задачах теоретической физики и физической оптики, и особенно перспективна для описания распространения оптического излучения по волоконным линиям связи. В представленном алгоритме решение обратной задачи рассеяния основано на обращении набора вложенных матриц дискретизованной системы интегральных уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко с помощью блочной версии теплицева алгоритма типа Левинсона. Численные тесты, проведенные путем сравнения расчетов с известными точными аналитическими решениями, подтверждают устойчивость и второй порядок точности предложенного алгоритма. Приведен пример применение алгоритма для моделирования столкновения пары по-разному поляризованных векторных солитонов Манакова.

**А. Д. Медных**, О. А. Данилов, *Дискретные аналитические функции и ряды Тейлора.*

История вопроса. Понятие дискретной аналитической функции на гауссовской решетке $\mathbb{G} = \mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z}$ было предложено Р. Ф. Исааксом [1]. Он классифицировал эти функции на функции первого и второго рода и исследовал те из них, что относятся к первому роду. В дальнейшем Дж. Ферран [2] и Р. Дж. Даффин [3] создали теорию дискретных аналитических функций второго рода (далее: дискретных аналитических функций). Важные результаты, связанные с поведением дискретных аналитических и гармонических функций на бесконечности были получены С. Л. Соболевым [4]. Новые комбинаторные и аналитические идеи в теорию ввёл Д. Зейльбергер [5]. Они были обобщены А. Д. Медных [6]. Развитие нелинейной теории дискретных аналитических функций, основанной на использовании круговых моделей, началось У. Терстоном [7] и его учениками [8],

[9]. На этом пути была получена аппроксимация с быстрой сходимостью в теории конформных отображений римановых поверхностей.

Определение. Всюду далее $\mathbb{G} = \{x + i\,y : x, y \in \mathbb{Z}\}$ обозначает гауссову целочисленную решетку, $\mathbb{G}^+ = \{x+i\,y \in \mathbb{G} : x \geq 0, y \geq 0\}$ – ее часть, содержащуюся в первом квадранте. Комплексно-значная функция $f$ определенная на некотром подмножестве $E \subset \mathbb{G}$, называется дискретно-аналитической на множестве $E$, если для любого квадрата $\{z, z + 1, z + 1 + i, z + i\} \subset E$ выполняется следующее условие:

$$\frac{f(z+1+i) - f(z)}{i+1} = \frac{f(z+i) - f(z+1)}{i-1}$$

или, что равносильно, выполняется условие

$$\bar{\partial} f(z) = f(z) + if(z+1) + i^2 f(z+1+i) + i^3 f(z+i) = 0.$$

Дискретно-аналитическая функция на всем множестве $\mathbb{G}^+$ называется целой дискретно аналитической функцией. Обозначим множество всех дискретно-аналитических функций на множествах $E$, $\mathbb{G}^+$ через $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$, соответсвенно.

**Теорема 1.** *Каждая дискретная аналитическая функция $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ имеет разложение Тейлора по функциям $\pi_k(z)$ :*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_k \pi_k(z), \quad z \in \mathbb{G}^+.$$

**Теорема 2.** *Разложение в Теореме 1 не единственно:*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_k \pi_k(z) \equiv 0, \quad z \in \mathbb{G}^+ \Leftrightarrow F(s) = 0, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

**Теорема 3.** *Гомоморфизм $\Theta : \mathcal{A}(U_R) \to \mathcal{D}(Q_R)$ сюрьективен, причем $\Theta(F) \equiv 0 \Leftrightarrow F(s) = 0$, $s \in \mathbb{Z}$, $|s| < R$. В этом случае*

$$Ker\,\Theta = \langle F_N(\xi) \rangle = F_N \cdot (U_R)$$

*является главным идеалом в $\mathcal{A}(U_R)$ порожденным функцией $F_N(\xi) = \xi \prod_{k=1}^N (\xi^2 - k^2)$, где $N = [R]$, если $R$ – нецелое, и $R - 1$ – в противном случае.*

**Теорема 4.** *Пусть $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$. Тогда существует функция $F(\xi) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \frac{\xi^k}{(1+i)^{|k|}} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$, такая, что $f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ и это разложение сходится абсолютно для всех $z \in \mathbb{G}^+$. Кроме того, $\Theta F = 0 \Leftrightarrow F(s) = 0$ для всех $s \in \mathbb{Z}^n$.*


[1] Isaacs R. F., "A Finite Difference Function Theory", Univ. Nac. Tucuman. Revista A., **2**, 177–201 (1941).

[2] Ferrand J., "Fonctions Preharmoniques et Functions Preholomorphes", Bull. Sci. Math., **68**, 152–180 (1944).

[3] Duffin R. J., "Basic Properties of Discrete Analytic Functions", Duke Math. J., **23**, 335–363 (1956).

[4] Sobolev S. L., "A difference analog of the polyharmonic equation", Soviet Math. Dokl., **6**, 1174–1178 (1965).

[5] Zeilberger D. A., "A New Basis for Discrete Analytic Polynomials", J. Austral. Math. Soc., **23**, 95–104 (1977).

[6] Mednykh A. D., "Discrete analytic functions and Taylor series", in: Theory of mappings, its generalizations and applications, Naukova Dumka, Kiev, 1982, pp. 137–144.

[7] Thurston W. P., The finite Riemann mapping theorem, Purdue University, West Lafayette (1985).

[8] Stephenson K., "Circle packing and discrete analytic function theory", In: Handbook of complex analysis: geometric function theory, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 333–370.

[9] Schramm O., "Circle patterns with the combinatorics of the square grid", Duke Math. J., **86**, 347–389 (1997).


**В.Ю. Новокшенов,** *Дискретная задача Римана и интерполяция целых функций.*

Рассмотрены две задачи комплексного анализа, разрабатывавшиеся в Уфе в 1970-х годах. Это задача Римана о скачке кусочно-аналитической функции на контуре и задача интерполяции целой функции на счетном множестве точек в комплексной плоскости. Прослежено развитие этих задач в последующие годы и показано, что они имеют много общего. Первая из них служит эквивалентом обратной задачи рассеяния, применяемой для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Вторая задача является естественным обобщением формулы Лагранжа для нахождения полинома, принимающего заданные значения на конечном множестве точек. Показано, что обе задачи могут быть объединены обобщением задачи Римана на случай "дискретного контура", на котором происходит "скачок" аналитической функции. В такой формулировке рассмотрена дискретная матричная задача Римана, применяемая ныне во многих задачах для точно решаемых разностных уравнений и оценки спектра случайных матриц. В статье показано, как дискретная матричная задача Римана доставляет способ интегрирования нелинейных разностных уравнений математической физики, таких как разностные уравнения Пенлеве. С другой стороны продемонстрировано, как задание вычетов мероморфной матрицы-функции на счетном множестве в $\mathbb{C}$ с точкой накопления в бесконечности по сути сводится к задаче интерполяции целых функций. Указано другое приложение решений этой задачи, связанное с вычислением детерминантов Фредгольма, применяемых в комбинаторике и теории представления групп.

**Р. В. Романов,** *Поведение при больших временах систем с потерями, эволюция которых задается операторами Шредингера и Дирака.*

Обсуждается поведение систем с потерями при больших временах. Типичные примеры включают эволюцию Шредингера или Дирака, задаваемую комплексными потенциалами и линейным оператором переноса. Когда потери малы, ситуация близка к самосопряженной теории рассеяния. На противоположном конце, когда потери становятся большими, эволюция сводится к экспоненциальному убыванию. В докладе обсуждается промежуточный режим, в котором потери достаточно велики для эволюции в духе теории рассеяния, но слишком слабы, чтобы отодвинуть спектр от вещественной оси и вызвать экспоненциальное затухание.

**А. О. Смирнов,** *Спектральные кривые и векторные интегрируемые нелинейные уравнения.*

Исследования двух-компонентных векторного нелинейного уравнения Шредингера, векторного уравнения Кунду-Экхауса и векторного уравнения Герджикова-Иванова показали, что спектральные кривые многофазных решений данных уравнений обладают необычными свойствами. В частности,

- Эти уравнения инвариантны относительно ортогональных преобразований решений. И спектральные кривые многофазных решений также инвариантны относительно ортогональных преобразований решений. Т.е. по спектральной кривой нельзя узнать направление вектора волны.

- Процедура построения простейших нетривиальных решений этих уравнений показала, что сначала появляется уравнение на длину вектора. Затем из дополнительных соотношений вытекает уравнение, определяющее зависимость направления вектора от его длины. Т.е. решение уравнения определяется не столько динамикой его компонент, сколько динамикой длины вектора и его направления.

- Для всех векторных уравнений существуют значения параметров, при которых направление вектора является фиксированным. Т.е. эволюция вектора сводится к эволюции длины вектора. В этих случаях спектральная кривая распадается на отдельные компоненты и эволюция вектора определяется кривой меньшего рода, чем в случае, когда направление вектора не является фиксированным.

Нами исследованы примеры, иллюстрирующие данные положения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант 22-11-00196 (https://rscf.ru/project/22-11-00196/)