

Структуры на многообразиях, листок 1

Ниже под словом *многообразие* понимается *компактное связное хаусдорфово* многообразие. Отказ от любого из этих свойств будет оговариваться.

1.1. Докажите, что любое 1-мерное многообразие гомеоморфно окружности \mathbf{S}^1 .

1.2. Докажите, что любое некомпактное 1-мерное многообразие гомеоморфно прямой \mathbb{R} .

1.3. Приведите пример нехаусдорфова 1-мерного многообразия. **Подсказка.** Его называют *окружностью с раздвоенной точкой*.

1.4*. Классифицируйте нехаусдорфовы 1-мерные многообразия.

1.5. Пусть \mathbf{X} – топологическое линейно связное пространство со счётной базой. Докажите, что, если дополнение к $\mathbf{X} \setminus \{P, Q\}$ к любым его точкам $P \neq Q$ несвязно, то \mathbf{X} гомеоморфно окружности \mathbf{S}^1 .

1.6. Докажите, что любое некомпактное 1-мерное многообразие допускает ровно два линейных порядка, совместимых с топологией (приведите соответствующие определения).

1.7. Вычислите пространство гомологий $H_*(\mathbf{S}^1, \mathbb{F}_2)$.

1.8*. (Для владеющих понятием универсального накрытия). Обозначим $\tilde{\mathbf{X}}$ универсальное накрытие линейно связного пространства \mathbf{X} , а для непрерывного отображения $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ обозначим $\tilde{f} : \tilde{\mathbf{X}} \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}$ обозначим подъём этого отображения на универсальные накрывающие (уточните эти обозначения с учётом необходимости выделения базисных точек).

Пусть $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ – непрерывное отображение. Докажите, что f – гомеоморфизм тогда и только тогда, когда \tilde{f} *монотонно*.

1.9. Введите (естественную!) метрику на множестве $\text{Met}(\mathbf{S}^1)$ и докажите, что получившееся пространство связно.

1.10*. Классифицируйте свободные действия конечных групп на \mathbf{S}^1 .

12 февраля, Г.Б. Шабат