**Научно-образовательный центр при МИАН,** весна 2024

**Структуры на многообразиях, листок 2**

**2.1.** Докажите, что категорное определение трезвости топологического пространства равносильно следующему общетопологическому: каждое его *неприводимое* замкнутое подмножество (то есть не представимое в виде объединения строго меньших замкнутых подмножеств) является замыканием точки, причём единственной.

**2.2.** Докажите, что всякое хаусдорфово пространство трезво.

**2.3.** Приведите пример трезвого не хаусдорфова пространства.

**2.4.** Топологическое пространство называется *колмогоровским*, если из любых двух его разных точек хотя бы одна обладает окрестностью, не содержащей другую. Докажите, что любое трезвое пространство является колмогоровским.

**2.5.** Приведите пример колмогоровского нетрезвого пространства.

**2.6.** Приведите примеры коммутативных колец, спектры которых трезвы и нетрезвы в топологии Зариского.

**2.7.** Свяжите данное в лекции понятие морфизма окольцованных пространств с определением *преобразования функторов*.

**2.8.** Докажите, что гладкое алгебраическое подмногообразие проективного пространства $\mathbf{P}_n(\mathbb{C})$ (оно задаётся системой однородных полиномиальных уравнений) есть комплексное многообразие. Остаётся ли это утверждение верным без предположения гладкости?

**2.9.** Докажите, что гладкое алгебраическое подмногообразие проективного пространства $\mathbf{P}_n(\mathbb{R})$ (оно задаётся системой однородных полиномиальных уравнений) есть топологическое многообразие. Остаётся ли это утверждение верным без предположения гладкости?

19 февраля, *Г.Б. Шабат*