

Структуры на многообразиях, листок 8

Пусть  $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$  взаимно просты. Реализуем трёхмерную сферы как  $\mathbb{C} \supset \mathbb{S}^3 := \{(z, w) \mid z\bar{z} + w\bar{w} = 1\}$  и определим действие циклической группы  $C_p =: \langle \rho \rangle$  на сфере, порождённое вращением

$$\rho : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 : (z, w) \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{p}} z, e^{\frac{2\pi i q}{p}} w)$$

Линзовым пространством называется фактор-пространство

$$\mathbf{L}(p; q) := \frac{\mathbb{S}^3}{\langle \rho \rangle}.$$

**8.1.** Вычислите фундаментальную группу пространства  $\pi_1(\mathbf{L}(p; q))$ .

**8.2.** Вычислите группу изометрий пространства  $\mathbf{L}(2; 1)$ .

**8.3.** Реализуйте линзовые пространства как единичный трёхмерный шар с некоторыми отождествлениями на границе.

**8.4\*.** Докажите, что пространства  $\mathbf{L}(5; 1)$  и  $\mathbf{L}(5; 2)$  не гомеоморфны.

**8.5\*\*.** Докажите, что пространства  $\mathbf{L}(7; 1)$  и  $\mathbf{L}(7; 2)$  гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны.

Три задачи о гиперболической геометрии:

**8.6.** Постройте изометрию между *полупространством*  $\mathcal{H}_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$  с римановой метрикой  $\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{z^2}$  и *шаром*  $\mathcal{B}_3 := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 < 1\}$  с римановой метрикой  $4 \frac{(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2}{1 - (X^2 + Y^2 + Z^2)^2}$ . Определите группы изометрий этих пространств и установите их изоморфность.

**8.7.** Постройте компактное трёхмерное многообразие, универсальная накрывающая которого изометрична полуплоскости  $\mathcal{H}_3$  из предыдущей задачи.

**8.8.** Постройте некомпактное трёхмерное многообразие, универсальная накрывающая которого изометрична полуплоскости  $\mathcal{H}_3$  из предыдущей задачи и *объём* которого конечен.

15 апреля, Г.Б. Шабат