Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/

26 февраля 2019 года

Порождающие грамматики

Множество всех конечных слов в алфавите Σ обозначается Σ^*. Пустое слово обозначается Λ. *Язык* над алфавитом Σ — это произвольное подмножество множества Σ^*.

Если w — слово, а n — натуральное число, то через w^n обозначается слово, полученное n-кратным повторением слова w. *Обращением* слова w (обозначается w^{R}) называется слово, в котором символы, составляющие слово w, идут в обратном порядке. Например, $(abcaab)^{\mathrm{R}} = baacba$.

Каждая *порождающая грамматика* состоит из конечного алфавита вспомогательных символов N, среди которых один символ выделен и называется начальным символом, конечного алфавита терминальных символов Σ и конечного множества правил вида $\alpha \to \beta$, где α и β — слова в алфавите $N \cup \Sigma$. Будем обозначать терминальные символы строчными буквами из начала латинского алфавита, а вспомогательные символы — заглавными латинскими буквами. Правила будем записывать в таком порядке, что левая часть первого правила есть начальный символ.

Выводом в порождающей грамматике называется последовательность слов в алфавите $N \cup \Sigma$, в которой первое слово состоит из одного символа и этот символ начальный, а каждое последующее слово получено из предыдущего заменой некоторого подслова (то есть непрерывного куска) по одному из правил грамматики. Про последнее слово вывода говорят, что оно *выводится* в данной грамматике.

1. Рассмотрим грамматику $R \to TR$, $R \to a$, $T \to R$, $TT \to TbR$. Является ли выводом последовательность **а)** $R \Rightarrow TR \Rightarrow TTR \Rightarrow TbRR \Rightarrow TbaR \Rightarrow RbaR \Rightarrow abaR \Rightarrow abaa$? **б)** $R \Rightarrow a$? **в)** $TT \Rightarrow TbR \Rightarrow Tba \Rightarrow Rba \Rightarrow aba$?

2. Выводится ли в грамматике $S \to aSb$, $S \to T$, $T \to cTd$, $T \to \Lambda$ слово **а)** $aaaccddbbb$? **б)** $aacdb$? **в)** $cccddd$? **г)** $aabb$? **д)** $acabdb$? **е)** Λ? **ж)** $abcd$?

3. Выводится ли в грамматике $S \to Sb$, $S \to ST$, $S \to SU$, $S \to \Lambda$, $Ta \to aaT$, $Tb \to ab$, $Uaaa \to aaU$, $Uab \to b$ слово **а)** bb? **б)** ab? **в)** $aaab$? **г)** $aaaab$? **д)** aaa? **е)** aab? **ж)** $aaaaaab$?

Язык, *порождаемый* данной грамматикой, состоит из всех слов в терминальном алфавите, которые выводятся в этой грамматике.

4. Описать язык, порождаемый грамматикой **а)** $S \to FF$, $F \to aFb$, $F \to ab$; **б)** $S \to DSD$, $S \to c$, $D \to a$, $D \to b$, $D \to c$; **в)** $S \to aUS$, $S \to bVS$, $S \to T$, $Ua \to aU$, $Ub \to bU$, $Va \to aV$, $Vb \to bV$, $UT \to Ta$, $VT \to Tb$, $T \to \Lambda$; **г)** $S \to TaS$, $S \to b$, $Ta \to aaT$, $Tb \to bb$; **д)** $S \to TaS$, $S \to b$, $Ta \to aTT$, $Tb \to bb$; **е)** $S \to aTS$, $S \to b$, $Ta \to aaTT$, $Tb \to b$; **ж)** $S \to CS$, $S \to TR$, $CT \to TTC$, $CR \to TR$, $R \to Tab$, $Ta \to aaT$, $Tb \to bb$;

Грамматика называется *контекстно-свободной*, если в каждом правиле в левой части один символ и этот символ вспомогательный. Например, грамматики из задач 2 и 4а являются контекстно-свободными, а грамматики из задач 1 и 3 — нет.

5. Найти контекстно-свободную грамматику, порождающую язык **а)** $\{a^m b^n c^k \colon m \geqslant 1,\ n \geqslant 2,\ k \geqslant 3\}$; **б)** $\{a^m b^n \colon 0 \leqslant m < n\}$; **в)** $\{a^m b^n c^k \colon k = m+n\}$; **г)** $\{a^m b^n c^k \colon k \neq m+n\}$; **д)** $\{ucv \colon u, v \in \{a,b\}^*,\ u = v^{\mathrm{R}}\}$; **е)** $\{ucv \colon u, v \in \{a,b\}^*,\ u \neq v^{\mathrm{R}}\}$; **ж)** $\{ucv \colon u, v \in \{a,b\}^*,\ u \neq v\}$; **з)** $\{(aab)^n a (aba)^n c (bba)^n \colon n > 0\}$.

Две грамматики называются *эквивалентными*, если они порождают один и тот же язык.

6. Эквивалентны ли грамматика $S \to abS$, $S \to a$ и грамматика $T \to aU$, $U \to baU$, $U \to \Lambda$?

7. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $S \to SS$, $S \to aSb$, $S \to ab$, **б)** $S \to SS$, $S \to aSb$, $S \to \Lambda$, **в)** $S \to SS$, $S \to aSSb$, $S \to \Lambda$, **г)** $S \to aSbS$, $S \to \Lambda$, **д)** $S \to SaSb$, $S \to \Lambda$, **е)** $S \to SaSbS$, $S \to SbSaS$, $S \to \Lambda$, **ж)** $S \to aR$, $R \to aRR$, $R \to b$?

8. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $T \to abbT$, $T \to \Lambda$, $ba \to ab$, **б)** $R \to Rabb$, $R \to \Lambda$, $ba \to ab$, **в)** $S \to aSbSbS$, $S \to \Lambda$, **г)** $U \to UaUbUb$, $U \to \Lambda$, **д)** $U \to UabUb$, $U \to \Lambda$?

9. Эквивалентны ли грамматика $B \to b$, $B \to aBCB$, $C \to c$, $C \to aCBC$ и грамматика $S \to abcS$, $S \to b$, $ba \to ab$, $ca \to ac$?

Порождающие грамматики (продолжение)

Длина слова x обозначается $|x|$. Количество вхождений символа a в слово x обозначается $|x|_a$. Назовём *длиной* правила $\alpha \to \beta$ число $|\alpha| + |\beta|$. Назовём *длиной* грамматики сумму длин всех её правил.

10. Существует ли грамматика длины 20, порождающая язык $\{a^n b^n a^n b^n : n > 0\}$?

11. Существует ли такое слово x, что $|x| > 4000$ и язык $\{x\}$ порождается некоторой контекстно-свободной грамматикой длины 30?

Язык называется *контекстно-свободным*, если он порождается некоторой контекстно-свободной грамматикой.

12. Существует ли такой контекстно-свободный язык L, что $\Lambda \notin L$ и язык L не порождается никакой контекстно-свободной грамматикой без правил с пустой правой частью?

13. Пусть некоторая контекстно-свободная грамматика содержит 9 вспомогательных символов и каждое правило имеет длину 2 или 3. Пусть в этой грамматике выводится слово w, причём $|w| > 2000$. Доказать, что найдутся такие слова u, v, x, y, z, для которых верно $uvxyz = w$, $vy \neq \Lambda$ (то есть $v \neq \Lambda$ или $y \neq \Lambda$) и для всех $i \geqslant 0$ слово $uv^i xy^i z$ выводится в рассматриваемой грамматике.

14. Доказать то же с дополнительным требованием $|vxy| < 2000$.

15. Является ли контекстно-свободным язык **а)** $\{a^n b^n c^n : n > 0\}$; **б)** $\{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$; **в)** $\{w \in \{a,b,c\}^* : |w|_a = |w|_b\}$; **г)** $\{w \in \{a,b,c\}^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$; **д)** $\{ucv : u, v \in \{a,b\}^*,\ u = v\}$; **е)** $\{a^m b^n c^k : 0 < m < n < k\}$; **ж)** $\{a^n btba^m \mid t \in \{a,b\}^*,\ |t|_a = n + m\}$; **з)** $\{a,b\}^* \setminus \{tt \mid t \in \{a,b\}^*\}$?

16. Найти грамматику с 3 правилами, порождающую язык $\{a^m b^n \mid 0 \leqslant n \leqslant m \leqslant 2n\}$.

17. Найти грамматику с 6 правилами, порождающую язык $\{b^n a^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.

18. Эквивалентны ли грамматика $K \to Fb$, $F \to \Lambda$, $F \to aFbF$ и грамматика $K \to b$, $K \to aKK$?

19. Эквивалентны ли грамматика $S \to SaSbS$, $S \to c$ и грамматика $R \to cT$, $T \to acTbcT$, $T \to \Lambda$?

20. Эквивалентны ли грамматика $U \to VV$, $V \to bVa$, $V \to a$ и грамматика $S \to RT$, $R \to bRa$, $R \to T$, $T \to bTa$, $T \to a$?

21. Эквивалентны ли грамматика $S \to SabaS$, $S \to b$ и грамматика $T \to baTaT$, $T \to b$?

22. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $S \to aT$, $T \to aTTa$, $T \to b$, **б)** $S \to aT$, $T \to aTTTa$, $T \to b$, **в)** $S \to aC$, $C \to aD$, $C \to b$, $D \to aDJ$, $D \to bJ$, $J \to aDK$, $J \to bK$, $K \to a$, **г)** $S \to aC$, $C \to aD$, $C \to b$, $D \to aE$, $D \to bJ$, $E \to aEJ$, $E \to bJJ$, $F \to aEK$, $F \to bJK$, $J \to aF$, $J \to bK$, $K \to a$?

23. Существует ли контекстно-свободная грамматика с пятью правилами, порождающая конечный язык над алфавитом $\{a,b\}$, содержащий ровно 98 слов?

24. Описать язык, порождаемый грамматикой $E \to \Lambda$, $E \to aCbE$, $E \to bDaE$, $E \to aF$, $F \to \Lambda$, $F \to aCbF$, $F \to aF$, $C \to \Lambda$, $C \to aCbC$, $D \to \Lambda$, $D \to bDaD$.