

Программа курса “Введение в теорию моделей”

Л.Д. Беклемишев, весна 2024 г.

1. Язык логики предикатов, модели, определимость. Классические примеры: элементарная геометрия, арифметика, стандартные алгебраические структуры. [Marker]
2. Переводы и интерпретации. Внутренние модели. Интерпретации теорий. [Marker, Шёнфилд, Беклемишев]
3. Взаимная интерпретируемость поля вещественных чисел и элементарной геометрии Тарского. [Беклемишев]
4. Модель Пуанкаре на полуплоскости как интерпретация геометрии Лобачевского в евклидовой геометрии. [Беклемишев]
5. Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ и интерпретация в ней свободной группы (подгруппа Санова). [Conrad, Каргаполов-Мерзляков]
6. Полугруппа $SL_2(\mathbb{N})$ и интерпретация Маркова свободного моноида с двумя порождающими в стандартной модели арифметики.
7. Фильтры, ультрафильтры, ультрапроизведения, теорема Лося. [Кейслер-Чен, Мальцев, Henson]
8. Теорема о компактности и ее применения. Теорема Рамсея, вывод конечной теоремы Рамсея из бесконечной с помощью теоремы о компактности.
9. Теорема Левенгейма–Скулема–Мальцева о повышении мощности. Нестандартные модели арифметики. [Кейслер-Чен, Marker, Беклемишев]
10. Элементарная эквивалентность. Теорема Левенгейма – Скулема о понижении мощности. [Кейслер-Чен, Marker, Беклемишев]
11. Полнота и категоричность теории в данной мощности. Признак Воота полноты теории. Счетная категоричность теории плотных линейных порядков без концов. Несчетная категоричность теории делимых абелевых групп без кручения. [Marker]
12. Элиминация кванторов. Признак элиминации кванторов. Классические теории с элиминацией кванторов: плотные линейные порядки без первого и последнего элементов, делимые абелевы группы без кручения. [Marker]
13. Алгебраически замкнутые поля. Существование и единственность алгебраического замыкания. Алгебраическая (не)зависимость. Предгеометрии (матроиды). Степень трансцендентности. [Винберг, Marker, Henson]
14. Полнота и категоричность элементарной теории алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики в любой несчетной мощности. Принцип Лефшеца. [Marker]
15. Элиминация кванторов для алгебраически замкнутых полей и ее следствия. Следствие: Акс-Гротендик. [Marker]
16. Типы, пространство типов. Его стоуновость (компактность, вполне несвязность). [Marker]
17. Изолированные типы и теорема об опускании типов. [Marker]
18. Теорема: счетная модель арифметики Пеано имеет собственное конечное расширение. [Marker, Кейслер-Чен]
19. Простые модели, атомные модели. Характеризация хороших теорий, имеющих простую модель. [Marker]

20. Счетно-категоричные теории. Теорема Рылль-Нардзевского. [Marker]
21. Неразличимые элементы. Применение диагонально неразличимых элементов для построения моделей арифметики Пеано. Принцип Канамори-Макалуна и его независимость от аксиом арифметики Пеано. [Kanamori-McAloon, Marker, Kaye]

Литература

1. А.И. Мальцев. Алгебраические системы.
2. Дж. Шёнфилд. Математическая логика.
3. Г. Дж.Кейслер, Дж. Дж. Чен. Теория моделей.
4. D. Marker. Model theory: an introduction.
5. R. Kaye. Models of arithmetic.
6. Л.Д. Беклемишев. Введение в математическую логику и теорию алгоритмов (записки лекций)
7. C. Ward Henson. Model theory.
8. K. Conrad. $SL_2(\mathbb{Z})$.
9. Э.Б. Винберг. Курс алгебры.
10. М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. Основы теории групп.