

Лекции памяти И. Р. Шафаревича

3–6 июня 2024 г., г. Москва, МИАН и online



Steklov International Mathematical Center



Организации

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Математический центр мирового уровня
“Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук”
(МЦМУ МИАН), г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке
Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН,
соглашение № 075-15-2022-265).

Аналитическая геометрия модулей кривых и расслоений

Л.А. ТАХТАДЖЯН

В лекциях будут рассмотрены вопросы, связанные с комплексной, симплектической, спектральной и алгебраической геометрией пространств модулей алгебраических кривых и стабильных векторных расслоений над кривой. Предполагается, что первые две лекции будут доступны студентам старших курсов и аспирантам. Примерный план изложения следующий.

В первой лекции пространства модулей кривых и расслоений будут введены как с точки зрения теории деформации комплексных структур Кодаиры-Спенсера, так и при помощи интерпретации модулей кривых как пространства решений двумерной гравитации, а модулей расслоений — как пространства решений двумерной калибровочной теории. Связь этих подходов дается теоремой о фуксовой униформизации римановых поверхностей (см. [1, Гл. XIV]) и теоремой Нарасимхана-Сешадри для стабильных векторных расслоений [2, 3]. Также будет рассказано о комплексной структуре на этих пространствах, кэлеровых метриках Вейля-Петерсона [4] и Нарасимхана-Атьи-Ботта [5, 6], и о связи с симплектической геометрией многообразий характеров для групп $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ и $U(n)$.

Во второй лекции, продолжая обзор [7], мы введем проективные и аффинные структуры над пространствами модулей и рассмотрим их связь с проблемой униформизации римановых поверхностей¹ [8, 9, 10]. Будет также рассказано о связи пространств проективных структур с симплектической геометрией многообразий характеров для групп $SL(2, \mathbb{C})$ и $GL(n, \mathbb{C})$ и с симплектической формой Лиувилля на кокасательных расслоениях к модулям (см. [11, 12]).

В третьей лекции мы введем три кэлеровы метрики на модулях кривых с отмеченными точками и эрмитовы метрики в расслоениях Мамфорда λ_m , где $m \geq 1$. Эти метрики отвечают, соответственно, вкладам от единичного элемента, параболических элементов, элементов конечного порядка и гиперболических элементов общей фуксовой группы первого рода, которая униформизирует кривую с отмеченными точками. Будет объяснено, как локальная теорема об индексе (в смысле Квиллена) для римановых поверхностях с отмеченными точками, доказанная в [13, 14, 15], связана с метрическим изоморфизмом Делиния-Римана-Роха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Р. Шафаревич, “Основы алгебраической геометрии”, Наука, М., 1972, 567 с.
- [2] M.S. Narasimhan and C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **82** (1965), 540–567.
- [3] S.K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Diff. Geometry **18** (1983), 269–277.
- [4] Lars V. Ahlfors, *Some remarks on Teichmüller’s space of Riemann surfaces*, Ann. of Math. (2), **74**:1 (1961), 171–191.

¹Работы [8, 9] докладывались на семинаре И.Р. Шафаревича в 1987 году.

- [5] M.S. Narasimhan, *Elliptic operators and differential geometry of moduli spaces of vector bundles on compact Riemann surfaces*, In: Proceedings of the International conference on functional analysis and related topics. Tokyo, 68–71, 1969.
- [6] M.F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. London, **A308** (1982), 523–615.
- [7] А.Н. Тюрин, “О периодах квадратичных дифференциалов”, Успехи Мат. Наук, **33**:6 (204) (1978), 149–195; Russian Math. Surveys, **33**:6 (1978), 169–221.
- [8] П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян, “Об уравнении Лиувилля, аксессуарных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0”, Матем. сб., **132(174)**:2 (1987), 147–166; Math. USSR-Sb., **60**:1 (1988), 143–161.
- [9] П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян, “Об униформизации римановых поверхностей и метрике Вейля–Петерсона на пространствах Тейхмюллера и Шоттки”, Матем. сб., **132(174)**:3 (1987), 304–321; Math. USSR-Sb., **60**:2 (1988), 297–313.
- [10] Н. В. Иванов, “Проективные структуры, плоские расслоения и кэлеровы метрики на пространствах модулей”, Матем. сб., **133(175)**:2(6) (1987), 208–222; Math. USSR-Sb., **61**:1 (1988), 211–224.
- [11] Leon A. Takhtajan, *On Kawai theorem for orbifold Riemann surfaces*, Math. Ann. **375**:3 (2019), 923–947.
- [12] Leon A. Takhtajan, *Goldman form, flat connections and stable vector bundles*, Enseign. Math. **68** (2022), no. 3/4, 409–440.
- [13] L. Takhtajan and P. Zograf, *The Selberg zeta function and a new Kähler metric on the moduli space of punctured Riemann surfaces*, J. Geom. and Phys. **5** No. 4 (1988), 551–570.
- [14] L. Takhtajan and P. Zograf, *A local index theorem for families of $\bar{\partial}$ -operators on punctured Riemann surfaces and a new Kähler metric on their moduli spaces*, Commun. Math. Phys. **137** (1991), 399–426.
- [15] L. Takhtajan and P. Zograf, *Local index theorem for orbifold Riemann surfaces*, Lett. Math. Phys. **109** (2019), 1119–1143.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. Л. ЭЙЛЕРА, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ;
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, STONY BROOK UNIVERSITY, USA