Задачи к курсу “Модальные логики предикатов и их модели” (осень 2024)

1. Пусть a, b различные буквы некоторого алфавита. Докажите, что $[a/b][b/a]$ — не тождественная подстановка и запишите ее в виде $[\alpha/\mathbf{s}]$.

2. Пусть $[\alpha/\mathbf{s}]$, $[\beta/\mathbf{t}]$ — подстановки букв, где списки $\mathbf{s}, \mathbf{t}$ не пересекаются. Найдите γ, для которого $[\alpha/\mathbf{s}][\beta/\mathbf{t}] = [\gamma/\mathbf{st}]$.

3. Формулы можно записывать так, чтобы они не содержали скобок: вместо $(A \vee B)$ пишем $\vee AB$, вместо $(A \wedge B)$ — $\wedge AB$ и т.д. (“польская запись”, введена Яном Лукасевичем).

(а) Сформулируйте рекурсивное определение формулы в польской записи.

(б) Сформулируйте и докажите лемму об однозначном анализе пропозициональных формул в польской записи.

4. (а) Докажите, что собственное начало формулы не может быть формулой.

(б) Докажите, что собственный конец формулы не может быть формулой.

5. Докажите, что конец формулы не может быть началом другой формулы.

6. Пусть $[K]x[x/a]A = [K]x[x/b]B$, где A, B — предикатные формулы ($[K]$ обозначает квантор). Как связаны A и B?

7. Пусть $[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$ — подстановка свободных переменных, $S = [C_1, \dots, C_n/Q_1, \dots, Q_n]$ — формульная подстановка. Обозначим:

$$[\mathbf{b}/\mathbf{a}]S := [[\mathbf{b}/\mathbf{a}]C_1, \dots, [\mathbf{b}/\mathbf{a}]C_n/Q_1, \dots, Q_n].$$

Докажите, что $[\mathbf{b}/\mathbf{a}]SA = ([\mathbf{b}/\mathbf{a}]S)A$, если $\mathbf{a}$ не содержит переменных из A.

8. Формула называется *чистой*, если в ней никакая связанная переменная не встречается дважды непосредственно после кванторов. Докажите, что конгруэнтные чистые формулы сильно конгруэнтны.

9. Докажите, что любая формула конгруэнтна некоторой чистой формуле.

10. Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$.

11. Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B$.

12. Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \neg\neg(A \to B) \leftrightarrow \neg\neg A \to \neg\neg B$.

13. Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \neg(A \to B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$.

14. Выразите в $\mathbf{H}$ формулу $\neg(p \wedge q)$ через $\neg, \vee, p, q$.

15. (a) Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \exists x A(x)$.

(b) Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \exists x \neg A(x) \to \neg \forall x A(x)$.

16. (a) Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$.

(b) Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$.

17. (a) Докажите, что $\mathbf{H} \nvdash \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$.

(b) Докажите, что $\mathbf{H} \nvdash \neg\neg(p \vee q) \to \neg\neg p \vee \neg\neg q$.

18. Докажите, что если A — пропозициональная интуиционистская формула и $\mathbf{CL} \vdash A$, то $\mathbf{H} \vdash \neg\neg A$ (*теорема Гливенко*).

19. Докажите, что если A — пропозициональная модальная формула и $\mathbf{S5} \vdash A$, то $\mathbf{S4} \vdash \Box\Box\Diamond A$ (*модальный аналог теоремы Гливенко*).

20. Какие из следующих формул являются теоремами $\mathbf{QH}$?

(a) $(\exists x P(x) \to q) \to \forall x (P(x) \to q)$,

(b) $(\forall x P(x) \to q) \to \exists x (P(x) \to q)$,

(c) $(q \to \exists x P(x)) \to \exists x (q \to P(x))$,

(d) $(q \to \forall x P(x)) \to \forall x (q \to P(x))$.

21. Обозначим $\mathbf{HJ} := \mathbf{H} + \neg p \vee \neg\neg p$ (*логика Янкова*; другое обозначение $\mathbf{KC}$).

Докажите, что

$$\mathbf{H} + \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q = \mathbf{H} + \neg\neg(p \vee q) \to \neg\neg p \vee \neg\neg q = \mathbf{HJ}.$$

22. (a) Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \exists x \neg\neg A(x) \to \neg\neg \exists x A(x)$.

(b) Докажите, что $\mathbf{QH} \vdash \neg\neg \forall x A(x) \to \forall x \neg\neg A(x)$.

23. Постройте замкнутую формулу A с одноместной предикатной буквой P, для которой $\mathbf{QH} \nvdash A \vee \neg A$.

24. Постройте замкнутую формулу A с одноместной предикатной буквой P, для которой $\mathbf{QH} \nvdash \neg\neg A \to A$.

25. Обозначим

$$DNS := \forall x \neg\neg P(x) \to \neg\neg \forall x P(x).$$

Докажите, что $\mathbf{QH} \nvdash DNS$.

26. Обозначим

$$KF := \neg\neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x)) \text{ (\textit{формула Куроды})}.$$

Докажите, что $\mathbf{QH} + KF = \mathbf{QH} + DNS$.

27. Обозначим

$$Wel_1 := \exists y \forall x (P(x) \to P(y)),$$

$$Wel_1' := (q \to \exists x P(x)) \to \exists x (q \to P(x)).$$

(a)Докажите, что $\mathbf{QH} + Wel_1 = \mathbf{QH} + Wel_1'$.

(b) Докажите, что $\mathbf{QH} \nvdash Wel_1$.

28. Обозначим

$$Wel_2 := \exists y \forall x (P(y) \to P(x)),$$

$$Wel_2' := (\forall x P(x) \to q) \to \exists x (P(x) \to q).$$

(a) Докажите, что $\mathbf{QH} + Wel_2 = \mathbf{QH} + Wel_2'$.

(b) Докажите, что $\mathbf{QH} \nvdash Wel_2$.

29. Как связаны $\mathbf{QH} + Wel_2$ и $\mathbf{QH} + Wel_1$?

30. Докажите, что если $\mathbf{QCL} \vdash A$, то $\mathbf{QH} + KF \vdash \neg\neg A$ (*предикатная теорема Гливенко*).

31. Докажите, что $\mathbf{QS4} \nvdash \Box\Diamond\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box\forall x \Diamond\Box P(x)$.

32. Сформулируйте и докажите модальный аналог предикатной теоремы Гливенко.

33. *Перевод Гёделя — Генцена* A^N интуиционистской предикатной формулы A определяется рекурсивно:

- $\bot^N = \bot$,
- $A^N = \neg\neg A$, если A атомарная (кроме $\bot$),
- $(A \vee B)^N = \neg\neg(A^N \vee B^N)$,
- $(A \wedge B)^N = (A^N \wedge B^N)$,
- $(A \to B)^N = (A^N \to B^N)$,
- $(\exists x[x/a]A)^N = \neg\neg\exists x[x/a](A^N)$,
- $(\forall x[x/a]A)^N = \forall x[x/a](A^N)$.

Докажите, что если $\mathbf{QCL} \vdash A$, то $\mathbf{QH} \vdash A^N$.

34. Обозначим

$$MP := \neg\neg\exists x P(x) \to \exists x \neg\neg P(x) \text{ (\textit{сильный принцип Маркова})},$$

Докажите, что $\mathbf{QH} \nvdash MP$.

35. (a) Докажите, что $\mathbf{QH} + Wel_2 \vdash MP$.

(b) Докажите, что $\mathbf{QH} + MP \nvdash Wel_2$.

36. Обозначим

$$MP^+ := \neg\exists x P(x) \vee \exists x \neg\neg P(x).$$

(a) Докажите, что $\mathbf{QH} + MP^+ \vdash MP$.

(b) Докажите, что $\mathbf{QH} + MP \nvdash MP^+$.

37. Докажите, что $\mathbf{QHJ} + CD \vdash MP^+$.

38. Докажите, что $\mathbf{QHJ} + CD \nvdash Wel_2$.

39. Докажите, что $\mathbf{QHJ} + CD \nvdash Wel_1$.

40. Докажите, что $\mathbf{QS4} + Ba \vdash CD^T$.

41. Обозначим

$$VW := \Box\exists x P(x) \to \exists x \Box P(x) \text{ (\textit{формула фон Вригта})}.$$

Докажите, что $\mathbf{QK} + VW \vdash Ba$.

42. Найдите все предикатные шкалы Крипке, в которых общезначима формула VW.

43. Докажите, что $\mathbf{QK} + Ba \nvdash VW$.

44. Обозначим

$$CD1 := \forall x(P(x) \vee \neg P(x)) \to \forall x P(x) \vee \neg\forall x P(x).$$

Докажите, что $\mathbf{QH} + CD \vdash CD1$.

45. Докажите, что $\mathbf{QH} + CD1 \nvdash CD$.

46. Обозначим

$$CD2 := \forall x(P(x) \vee \neg P(x)) \to \exists x P(x) \vee \neg\exists x P(x).$$

Докажите, что $\mathbf{QH} + CD \vdash CD2$.

47. Докажите, что $\mathbf{QH} + CD2 \nvdash CD$.

48. Как связаны $CD1$ и $CD2$?

49. Обозначим: $\mathbf{KB} := \mathbf{K} + \Diamond\Box p \to p$.

Докажите, что $\mathbf{QKB} \vdash Ba$.

50. Пусть $\mathbf{\Lambda}$ — полная по Крипке пропозициональная модальная логика. Докажите, что если $\mathbf{Q\Lambda} \vdash Ba$, то $\mathbf{\Lambda} \supseteq \mathbf{KB}$.

51. Постройте модальную формулу, содержащую только одноместные предикатные символы, которая общезначима в любой **QS5**-шкале Крипке с конечной областью, но невыводима в **QS5**.

52. Постройте интуиционистскую формулу, содержащую только одноместные предикатные символы, которая общезначима в любой интуиционистской шкале Крипке с постоянной конечной областью, но невыводима в $\mathbf{QH} + CD$.

53. Докажите, что $\mathbf{QH} + AU_1 + \pi(A) \vdash A$ для любой интуиционистской формулы A (обозначения AU_1, $\pi(A)$ см. в лекции 7).

54. Докажите, что $\mathbf{QK} + AU_1 + \pi(A) \vdash A$ для любой модальной формулы A.

55. Докажите, что логика $\mathbf{QK} + AU_1$ полна по Крипке.

56. Докажите, что логика $\mathbf{QH} + AU_1$ полна по Крипке.

57. Используя предыдущие задачи, докажите, что если $L_\pi = \mathbf{\Lambda}$, то $\mathbf{Q\Lambda} \subseteq L \subseteq \mathbf{Q\Lambda} + AU_1$ (для модальной или суперинтуиционистской логики L).

58. Докажите, что если модальная логика L полна (в семантике Крипке), то $L + AU_1$ полна.

59. Докажите, что если суперинтуиционистская логика L полна (в семантике Крипке), то $L + AU_1$ полна.

60. Докажите, что отображение $\mathbf{\Lambda} \mapsto \mathbf{Q\Lambda} + AU_1$ задает биекцию множества суперинтуиционистских пропозициональных логик на множество суперинтуиционистских предикатных логик, содержащих AU_1; аналогично для модальных логик.

Будем использовать обозначение правил вывода $A_1, \ldots, A_n // B$ (A_i – посылки, B – заключение).

61. Применяя теорему о полноте, докажите, что правило вывода $\Box A // A$ для замкнутых формул A допустимо в $\mathbf{QK}$.

62. Допустимо ли в $\mathbf{QK}$ правило вывода $\forall x \Box A(x) // \Box \forall x A(x)$ (где $\forall x A(x)$ – замкнутая формула)?

63. Докажите, что правило вывода $\exists x A(x) // \forall x A(x)$ (где $\forall x A(x)$ – замкнутая формула) недопустимо в $\mathbf{QH}$.

64. Докажите, что правило вывода $\Box A // A$ для произвольных формул A допустимо в $\mathbf{QK}$.

65. (a) Докажите, что правило вывода $\Diamond A // A$ для замкнутых формул A допустимо в $\mathbf{QK}$.

(b) Допустимо ли оно в $\mathbf{QK} + Ba$?

66. Докажите, что правило вывода $\Diamond A // A$ для произвольных формул A допустимо в $\mathbf{QK}$.

67. (a) Докажите, что правило вывода $\Diamond A // A$ для замкнутых формул A недопустимо в $\mathbf{QS4}$.

(b) Допустимо ли оно в $\mathbf{QS5}$?

68. Докажите, что правило вывода $\Diamond A // A$ для замкнутых формул A недопустимо в $\mathbf{QT}$.

69. Используя теорему о полноте, докажите, что если $\mathbf{QH} \vdash A \vee B$, то $\mathbf{QH} \vdash A$ или $\mathbf{QH} \vdash B$ для замкнутых формул A, B (*дизъюнктивное свойство*).

70. Докажите дизъюнктивное свойство в $\mathbf{QH} + CD$ для произвольных формул A, B.

71. Докажите, что $\mathbf{QH}$ – логика класса всех интуиционистских шкал Крипке со счетными областями в каждой точке.

72. Докажите дизъюнктивное свойство в $\mathbf{QH}$ для произвольных формул A, B.

73. Используя теорему о полноте, докажите, что если $\mathbf{QK} \vdash \Box A \vee \Box B$, то $\mathbf{QK} \vdash A$ или $\mathbf{QK} \vdash B$ для замкнутых формул A, B (*дизъюнктивное свойство*).

74. Выполняется ли дизъюнктивное свойство из предыдущей задачи для $\mathbf{QS5}$?

75. Докажите, что суперинтуиционистская предикатная логика класса всех шкал Крипке с конечным множеством миров не совпадает с $\mathbf{QH}$ (указание: рассмотрите формулу Куроды).

76. Используя предыдущую задачу, докажите, что модальная предикатная логика класса всех рефлексивных транзитивных шкал Крипке с конечным множеством миров не совпадает с $\mathbf{QS4}$.

77. Докажите, что $\mathbf{QH} = {}^T\mathbf{QS4}$.

78. Докажите, что $\mathbf{QH} + CD = {}^T\mathbf{QS4} + Ba$.

79. Докажите, что если суперинтуиционистская предикатная логика S полна по Крипке, то существует модальная предикатная логика L, для которой ${}^TL = S$.

Определение 1 Пусть $F = (W, R)$, $F' = (W', R')$ — пропозициональные шкалы Крипке. *p-морфизм* F на F' — это сюръективное отображение $f : W \longrightarrow W'$, такое, что $f[R(u)] = R(f(u)$ для всех $u \in W$.

Определение 2 Пусть f — p-морфизм (W, R) на (W', R'); $M = (W, R, D, \xi)$, $M' = (W', R', D', \xi')$ — предикатные модели Крипке. M называется *прообразом* M' *относительно* f, если $D_u = D'_{f(u)}$ и $\xi_u = \xi'_{f(u)}$ для всех $u \in W$.

Определение 3 $F = (W, R)$ – *шкала с корнем* u, если $W = u\uparrow$. Такая шкала называется *деревом*, если $R^{-1}(u) = \varnothing$ и $\forall v \neq u\, \exists! w\, (wRv)$. В этих случаях предикатные шкалы Крипке (F, D) также называются шкалами с корнем u (соответственно, деревьями).

80. (a) В условиях определения 2, докажите, что

$$M, u \models A \Leftrightarrow M', f(u) \models A$$

для любого $u \in W$ и любого D_u-предложения A.

(b) Докажите аналогичное утверждение для интуиционистских моделей.

81. Пусть $F = (W, R)$ – шкала с корнем u. Ее *развёрткой* называется шкала $F^\sharp := (W^\sharp, R^\sharp)$, где $W^\sharp$ – множество всех *путей* из u, т.е. конечных последовательностей $(u_0, \dots, u_n)$, где $u_0 = u$, $u_i R u_{i+1}$ для всех $i < n$,

$$R^\sharp(u_0, \dots, u_n) := \{(u_0, \dots, u_n, v) \mid u_n R v\}.$$

(a) Докажите, что $F^\sharp$ – дерево.

(b) Докажите, что отображение $(u_0, \dots, u_n) \mapsto u_n$, — p-морфизм $F^\sharp$ на F.

82. Докажите, что **QK** — логика класса всех предикатных шкал Крипке с корнем.

83. Докажите, что **QK** — логика класса всех (предикатных) деревьев.

84. Пусть $F = (W, R)$ — шкала с рефлексивным транзитивным отношением.

(a) Докажите, что $R \cap R^{-1}$ — отношение эквивалентности (его классы эквивалентности называются *сгустками*, или *кластерами*.

(b) *Скелетом* F называется шкала $F^\sim := (W^\sim, R^\sim)$, где $W^\sim$ — множество всех сгустков в F, $U R^\sim V \Leftrightarrow \forall x \in U \, \forall y \in V \, xRy$. Докажите, что $R^\sim$ — частичный порядок.

(c) Постройте p-морфизм F на $F^\sim$.

85. (a) Постройте p-морфизм F на $F^\sim$ (см. предыдущую задачу).

(b) Докажите что всякая интуиционистская модель Крипке на интуиционистской предикатной шкале (F, D) является прообразом интуиционистской модели Крипке на некоторой шкале $(F^\sim, D')$.

(c) Докажите что всякая полная по Крипке суперинтуиционистская логика является логикой некоторого класса шкал на частичных порядках.

86. Докажите полноту по Крипке для логики
$\mathbf{QH} + CD + p \vee \neg(p \wedge q) \vee (p \to q)$.

87. Докажите полноту по Крипке для логики
$\mathbf{QH} + CD + (p \to q \vee r) \vee (q \to p \vee r) \vee (r \to p \vee q)$.

88. Докажите полноту по Крипке для логики $\mathbf{QAlt}_n + Ba$.

89. Докажите полноту по Крипке для логики $\mathbf{QS4} + alt_n + Ba$.