СБОРНИК ТЕЗИСОВ

международной конференции
«Теория функций и её приложения»,
посвящённой 120-летию со дня
рождения академика РАН
Сергея Михайловича Никольского.

Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1. *Абузярова Н.Ф., Семенова Д. В.* Делители в алгебре Бернштейна 8
2. *Aktanova S.V.* On the issue of managing bifurcations in non-linear hybrid systems 10
3. *Aliyev Y. N.* The best constants for an inequality for the ratio of differences of means 12
4. *Allilueva A. I.* Quasi-Classical Asymptotics for the Dirac Equation 14
5. *Ashyralyyev C.* Numerical solution of a source identification elliptic problem with involution and nonlocal integral condition 16
6. *Безродных С. И., Гордеева Н. М.* Аналитическое решение краевой задачи для системы уравнений Больцмана–Максвелла 18
7. *Безродных С. И., Иванникова А. А.* Аналитико-численное решение спектральной задачи для оператора Лапласа в областях со входящим углом 20
8. *Бикчентаев А. М.* Оператор блочного проектирования на алгебре измеримых операторов и дисперсия 22
9. *Blank M. L.* Local entropy and complexity 25
10. *Бондарев А.С.* Метод Галёркина приближённого решения абстрактного нелинейного параболического уравнения с периодическим по времени условием на решение 27
11. *Будочкина С. А.* Об обратной задаче вариационного исчисления для уравнений с непотенциальными операторами 30
12. *Burskii V. P.* On equivariant boundary value problems and applications 31
13. *Васильев В. Б.* Об эллиптических уравнениях и краевых задачах 33
14. *Васильева А. А.* Гельфандовские поперечники пересечения конечномерных шаров и классов Соболева 35
15. *Веденяпин В. В., Батищева Я. Г., Фимин Н. Н., Чечёткин В. М.* ОТО и уравнения Власова: космология и пространство Лобачевского 37

16. *Volovich I.* Operators in Kahler Spaces and Quantum Mechanics 40
17. *Ganyani T. and Tasevich A. L.* On a Strongly Elliptic Problem for Functional-Differential Operators with Orthotropic Contractions in the 3-dimensional Case . . . 41
18. *Ал-Гарайхоли И. А. Х.* О факторизации дифференциального уравнения с «расщеплёнными» мерами 42
19. *Гаспарян А.С.* Многомерные определители и новые теоремы о конечных приращениях 44
20. *Гвоздев П. А.* Формулы для нулей дисперсионной функции в задаче для уравнений Больцмана–Максвелла 46
21. *Gladkov A. L.* Blow-up problem for nonlocal parabolic equation with absorption under nonlocal Neumann boundary condition 48
22. *Шабров С. А., Бахтина Ж. И., Голованева Ф. В., Гридяева Т. В.* Математическая модель свободных колебаний вязкоупругой струны с особенностями 50
23. *Гумеров Р. Н., Липачева Е. В.* Об универсальных свойствах полугрупповых C^*-алгебр 52
24. *Гусев Н. А.* Слабое свойство Сарда и единственность обобщённых решений уравнения неразрывности 53
25. *Davletov D. B., Ershov A. A., Ushakov V. N.* Numerical calculation of the non-convexity measure of alpha set in the form of polygons and polyhedra 54
26. *Demina M.V.* Finding invariants and first integrals of projective structures and geodesic flows 56
27. *Jabbarov I. Sh.* New concept of a measure in metric spaces and riemann hypothesis 58
28. *Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V. E., Tolchennikov A. A.; Suleimanov B. I.* Semi-Global Uniform Asymptotics of Wave Fields with Cusp Type Caustics via the Pearcey Function and Its Derivatives 61
29. *Дрибас Р. В.* О слабом свойстве Сарда 62
30. *Дюжина Н. А.* Плотность производных наипростейших дробей в пространствах Харди 64

31. *Efremova L. S.* Multivalued Functions And the Nonwandering Set of Some Skew Products on Multidimensional Cells 66
32. *Зайцева Н. В.* Модельные начальные задачи для гиперболических дифференциально-разностных уравнений 67
33. *Ivanov G. E.* Modulus of Convexity and Lindenstrauss Formula 69
34. *Иваньшин П. Н.* Решение задачи Коши в области ограниченной кривой с угловыми точками 70
35. *Изместьев И. В.* Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца и возможным изменением в динамике 73
36. *Кабанко М. В.* Обратимость операторов в некоторых гильбертовых пространствах 75
37. *Калинин А. В., Тюхтина А. А., Милешин И. Г.* Неклассические постановки задач теории квазистационарных электромагнитных процессов 77
38. *Калинин А. В., Тюхтина А. А., Золотницин А. А.* Некоторые представления и интегральные оценки векторных полей 79
39. *Казакевич К. И., Шабров С. А.* О достаточных условиях слабого экстремума одного функционала с интегралом Стилтьеса 81
40. *Kopylov Ya. A.* On the Asymptotic and Continuous Orlicz Cohomology of Locally Compact Groups 83
41. *Kostecki R.-P.* Geometry of the noncommutative and nonassociative Orlicz spaces, and continuity of the Vaĭnberg–Brègman projections 84
42. *Кочергин А. В.* Приближение функций кограницами и возвращение орбит 87
43. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Local bifurcations of solutions of a periodic boundary value problem for the Benney–Lin–Kawahara equation 89
44. *Лангаршоев М. Р.* Наилучшее приближение классов периодических функций в L_2 91
45. *Litvinov V. L., Litvinova K.V.* Obtaining exact expressions for natural frequencies in modeling vibrations of mechanical

systems with a moving boundary using the discrete Fourier transform 94
46. *Лобода А. А.* Аналитические продолжения функциональных интегралов 95
47. *Lopatin I. A., Pechen A. N.* Weak coupling limit for quantum systems with unbounded weakly commuting system operators 97
48. *Махмутов Ш. А.* О росте гиперболической производной ограниченных аналитических функций 99
49. *Зверева М. Б., Марфин Д. Е., Ютишев А. К., Шабров С. А.* Возможность применения метода Фурье для нахождения решения смешанной задачи с разрывными решениями . 101
50. *Missarov M. D., Khajrullin D. A.* Functional Fourier transformation and renormalization group transformation in the generalized fermionic hierarchical model 104
51. *Morzhin O.V. and Pechen A.N.* Gradient Projection Method for Quantum Control 107
52. *Мухарлямов Р. Г.* Построение дифференциальных уравнений динамики систем с программными связями . . 109
53. *Некрылов Е. Е., Шабров С. А., Зверева М. Б.* О некоторых спектральных свойствах задачи с разрывными решениями 111
54. *Osipov A.S.* A function-theoretical study of logariphmic Hamiltonians of Volterra type lattices 113
55. *Панов Е. Ю.* О кососопряжённости линеаризованного оператора Эйлера 115
56. *Pavlov A.V.* Principle of indefinite equations in mathematics 117
57. *Petruhanov V. N., Pechen A. N.* Optimization of open quantum systems with coherent and incoherent controls using inGRAPE method 119
58. *Пикулин С. В., Безродных С. И.* О численно-аналитическом методе для сингулярно возмущенных квазилинейных параболических уравнений 121
59. *Pisarev M. A., Rassadin A. E.* Solving the Burgers equation by the power series breakage method 123

60. *Podvigin I.V.* On the comparison of convergence rates of classical ergodic averages for unitary R^d-actions 125
61. *Popova S.N.* Continuous dependence on a parameter in the optimal transportation problem 127
62. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* О мере приближения класса Липшица на отрезке некоторыми суммами Рисса 129
63. *Прохоров Д. В.* Об описании ассоциированных пространств к некоторым функциональным пространствам 132
64. *Пчелинцев В. А.* Операторы продолжения пространств Соболева и спектральная 134
65. *Rautian N. A.* Existence of a propagation cone for a one-dimensional wave integro-differential operator with a fractional-exponential memory function 136
66. *Galkin O. E., Remizov I. D.* Estimates on the rate of convergence Chernoff approximations to C_0-semigroups . . . 137
67. *Россовский Г. Л.* Задача Коши для параболического дифференциально-разностного уравнения с многомерным пространственным и суммируемой начальной функцией 139
68. *Сакбаев В. Ж.* Меры, функции и краевые задачи на бесконечномерных областях 141
69. *Савчин В. М., Чинь Ф. Т.* К интегральным инвариантам для бесконечномерных систем Биркгофа 142
70. *Савин А. Ю.* О гомотопической классификации эллиптических операторов на многообразиях с периодическими концами 145
71. *Старовойтов А. П., Кругликов И. В.* О поведении полюсов аппроксимаций Эрмита–Лорана 146
72. *Tashpulatov S. M.* Three-magnon systems in the Heisenberg model 149
73. *Teretenkov A. E.* Tridiagonal operators, continued fraction and dynamics of non-integrable quantum systems 152
74. *Ukhlov A. D.* Neumann eigenvalues of non-linear elliptic operators 153
75. *Фазуллин З. Ю.* Суммирование в среднем в теории следов 154

76. *Шайна Е. А., Шабров С. А.* Положительная обратимость одной математической модели пятого порядка с производными по мере 156
77. *Шишанин А.О.* Диофантово уравнение Маркова и некоторые его обобщения 159
78. *Шишкин К. А.* Функторы между $*$-полиномиальными соотношениями 161

ДЕЛИТЕЛИ В АЛГЕБРЕ БЕРНШТЕЙНА

Н. Ф. Абузярова,[1] Д. В. Семенова

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

Рассматриваются классы целых функций B_σ, $\sigma > 0$, введенные С.Н. Бернштейном в связи с вопросами аппроксимации (см., например, [1]) и состоящие из всех целых функций φ экспоненциального типа, не превосходящего σ, таких, что

$$\|\varphi\|_\sigma := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| < \infty.$$

С введенной нормой B_σ — банахово пространство.

Алгебра Бернштейна B_∞ определяется как индуктивный предел пространств $B_\sigma : B_\infty = \bigcup\limits_{\sigma>0} B_\sigma$.

Символом $D(B_\infty)$ обозначаем множество *делителей* алгебры B_∞, по определению представляющее собой совокупность всех функций $\psi \in B_\infty$, для которых справедлива импликация («теорема деления»):

$$F \in B_\infty, \quad \frac{F}{\psi} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{F}{\psi} \in B_\infty.$$

Делители алгебры B_∞ могут быть охарактеризованы при помощи условий, имеющих форму ограничений на поведение функции $|\varphi|$.

Предложение. *Функция $\psi \in B_\infty$ является делителем этой алгебры тогда и только тогда, когда*

$$\exists\, A > 0 \exists\, x_0 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant x_0, \exists x' \in \mathbb{R} : |x - x'| \leqslant A, \ln|\psi(x')| \geqslant -A.$$

Обозначим символом $\mathcal{S}$ класс *функций типа синуса*, состоящий из целых функций φ экспоненциального типа, ограниченных на вещественной прямой, не равных нулю вне некоторой горизонтальной полосы и удовлетворяющих для некоторого $d_0 \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ оценке снизу: $|\varphi(x + \mathrm{i}\, d_0)| \geqslant c_\varphi$.

[1] e-mail: abnatf@gmail.com

Легко видеть, что $\mathcal{S} \subset D(B_\infty)$. При этом из результатов работ А.М. Седлецкого [2,3] следует, что включение $\mathcal{S} \subset D(B_\infty)$ является собственным. Тем не менее, из Предложения можно вывести, что функциями типа синуса исчерпываются все делители алгебры B_∞, мнимые части нулей которых ограничены. А именно, справедлива

Теорема. *Совокупность делителей ψ алгебры Бернштейна, удовлетворяющих условию*

$$\Im\lambda = O(1), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_\psi,$$

совпадает с классом функций типа синуса $\mathcal{S}$.

Работа выполнена при поддержке НОМЦ ПФО
(соглашение № 075-02-2025-1637).

Список литературы

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
2. *Седлецкий А. М.* Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, // I. Совр. Матем. Фунд. Напр. – 2003. – т. 5. – с. 3–152.
3. *Sedletskii A. M.* On zeros of Laplace transform of finite measure // Int. Trans. and Spec. Func. – 1993. – V. 1 – Pp. 51–59.

ON THE ISSUE OF MANAGING BIFURCATIONS IN NON-LINEAR HYBRID SYSTEMS

S. V. Akmanova[1]

Nosov Magnitogorsk Technical State University

Under the control of bifurcation of a dynamical system, we will understand the processes of predicting bifurcation and modeling control, which allows either to avoid bifurcation, or to stabilize the system when bifurcation occurs. A nonlinear hybrid (continuous-discrete) control system of the form is considered

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{1}$$

where $x(t) \in R^n$, $y(t_k) \in R^m$ — state vectors of the system (1), $u(t_k) \in R^q$ — control vector, functions $f(x, y)$, $g(x, y, u)$ are continuously differentiable by the set of variables and generate operators $f : R^n \times R^m \to R^n$, $g : R^n \times R^m \times R^q \to R^m$, at the same time $f(0, 0) = g(o, 0, 0) = 0$, that is, when $u = 0$ the system has an equilibrium point $x = 0$, $y = 0$; the value $h = t_{k+1} - t_k > 0$ is constant and $t_k = hk$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

A change in the value of h can lead to different scenarios of qualitative restructuring of the behavior of system (1), and therefore, some value $h = h_0 > 0$ may turn out to be a bifurcation value of the parameter h. The issues of predicting bifurcation values of the parameter h and, as a consequence, the corresponding bifurcations in system (1) at $u = 0$ are covered in the work [1].

The main objectives of this report are the problem of changing the value of the parameter h taking into account the the existing bifurcation point $h = h_0 > 0$ in order to stabilize the branched solutions and the problem of stabilizing the system (1) by means of a control action formed according to the estimates of the state of the system, which are given by the observer of the system in order to prevent bifurcation. The solution of the first problem involves the transition from the system (1) to an

[1] e-mail: svet.akm_74@mail.ru

equivalent, in the natural sense, nonlinear discrete system

$$z_{k+1} = A(h)z_k + Bu_k + \xi(z_k, u_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

where

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix},$$

$$A_1 = f'_x(0,0), \quad B_1 = f'_y(0,0),$$

$$A_2 = g'_x(0,0,0), \quad B_2 = g'_y(0,0,0), \quad C = g'_u(0,0,0),$$

$\xi(z_k, u_k, h) = o(\|z_k\| + \|u_k\|)$, $\|z_k\| + \|u_k\| \to 0$, $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$, $u_k = u(t_k)$. Next, the operator method of studying bifurcations is applied using Lyapunov values and a conclusion is made about a certain change in the value of the parameter h in order to stabilize the branched solutions [2], taking into account the connection between the solutions of systems (1) and (2).

The solution to the second problem is possible if we consider system (1) with the output

$$w(t) = \varphi(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

where $w(t) \in R^p$ is the output of system (1), $p \leqslant n + m$; $\varphi(x, y)$ is a continuously differentiable function with respect to the set of variables, and $\varphi(0,0) = 0$. Let us assume that system (1), (3) is fully observable at some values of $h > 0$. Then it is possible to construct an observer of the system (1), (3) and simulate feedback control, which will provide asymptotic stability of the zero solution of the extended system (1), (3) with the constructed observer at the specified values $h > 0$, which will prevent possible bifurcation, or stabilize the system (1) when it occurs.

References

1. Akmanova S.V., Yumagulov M.G. *On local bifurcations in nonlinear continuous-discrete dynamical systems* // Russian Mathematics. – 2025. – Vol.69, no.2. – Pp. 1–11.
2. Gusarova N.I., Murtazina S.A., Fazlytdinov M.F., Yumagulov M.G. *Operator methods for calculating Lyapunov values in problems on local bifurcations of dynamical systems* // Ufa Mathematical Journal. – 2018. – Vol.10, no.1. – Pp. 25–48.

THE BEST CONSTANTS FOR AN INEQUALITY FOR THE RATIO OF DIFFERENCES OF MEANS

Y. N. Aliyev[1]

ADA University

In [1] it was shown that $-\infty < \dfrac{A_n^n - G_n^n}{H_n A_n^{n-1} - G_n^n} \leqslant \dfrac{\lambda_n}{n^2}$, and the best constant λ_n satisfies $\dfrac{n^3}{n-1} < \lambda_n < \dfrac{n^3}{n-2}$ for $n > 2$. In particular, it follows that since $1 + \dfrac{1}{n-1} < \dfrac{\lambda_n}{n^2} < 1 + \dfrac{1}{n-2}$, the ratio $\dfrac{\lambda_n}{n^2}$ decreases for $n > 2$ and approaches 1. In the current paper it is shown that similar monotonicity and convergence results hold true for the best contants of the inequalities $C_1 \leqslant \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \leqslant C_2$. The obtained results generalize and complete the earlier works in [6], [5], [4], [3], and the recent paper [2].

Let $f(x) = \dfrac{g(x) - \frac{1}{n}}{p(x) - \frac{1}{n}}$ in interval $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n-1}$, where

$$g(x) = \sqrt[n]{x^{n-1}(1-(n-1)x)},\ p(x) = \left(\frac{(n-1)x^{\frac{1}{r}} + (1-(n-1)x)^{\frac{1}{r}}}{n}\right)^r.$$

Theorem 1.

1. *If $\alpha < 0$, then $-\infty < \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \leqslant \omega_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu_1 - 1}$, where ν_1 is the minimum of $f(x)$ in interval $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}\right)$.*
2. *If $\alpha > 1$, then $\omega_2 = \dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 1} \leqslant \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \leqslant \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$, where ν_2 is the maximum of $f(x)$ in interval $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.*
3. *If $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ and $n < \dfrac{1}{1-\alpha}$, then $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \leqslant \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \leqslant \omega_3 = \dfrac{\nu_3}{\nu_3 - 1}$, where ν_3 is the minimum of $f(x)$ in interval $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.*

[1] e-mail: yaliyev@ada.edu.az

4. *If* $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ *and* $n \geqslant \frac{1}{1-\alpha}$, *or if* $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ *and* $n \geqslant \frac{1}{\alpha}$, *then* $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \leqslant \frac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \leqslant n^{\frac{1}{\alpha}-1}$.
5. *If* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *and* $n < \frac{1}{\alpha}$, *then* $\omega_4 = \frac{\nu_4}{\nu_4 - 1} \leqslant \frac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \leqslant n^{\frac{1}{\alpha}-1}$, *where* ν_4 *is the maximum of* $f(x)$ *in interval* $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$.

Theorem 2.

1. *If* $\alpha < 0$, *then* ω_1 *increases as* n *increases and* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_1 = 0$.
2. *If* $\alpha > 1$, *then* ω_2 *decreases as* n *increases and* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_2 = 0$.
3. *If* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, *then* ω_3 *increases as* n *increases in interval* $0 < n < \frac{1}{1-\alpha}$.
4. *If* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, *then* ω_4 *decreases as* n *increases in interval* $0 < n < \frac{1}{\alpha}$.

References

1. Aliyev, Y.N. *The best constant for inequality involving the sum of the reciprocals and product of positive numbers with unit sum.* J. Inequal. Appl., Vol. 29 (2024).
2. G.J.O. Jameson, (2023). *Some Inequalities for Power Means; a Problem from "The Logarithmic Mean Revisited."* The American Mathematical Monthly, 130(3), Pp. 276–278.
3. O. Kouba, *Bounds for the ratios of differences of power means in two arguments*, Mathematical Inequalities & Applications, Vol. 17, No. 3 (2014), Pp. 913–928.
4. J. Wen; S.-S. Cheng; C. Gao, *Optimal sublinear inequalities involving geometric and power means*, Mathematica Bohemica, Vol. 134 (2009), No. 2, Pp. 133–149.
5. S. Wu, L. Debnath, *Inequalities for differences of power means in two variables*. Anal. Math. Vol. 37 (2011), Pp. 151–159.
6. S. Wu, *Generalization and sharpness of the power means inequality and their applications*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 312 (2005) Pp. 637–652.

QUASI-CLASSICAL ASYMPTOTICS FOR THE DIRAC EQUATION

A. I. Allilueva[1]

IPMech Ras

In this paper, we consider a massless two-dimensional Dirac equation system describing the evolution of wave functions in graphene, which has the form:

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) v + Fu,$$
$$i\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u + Fv,$$

where $x \in R^2$, F is the potential, ε is a small parameter that tends to zero, and characterizes the ratio of the scales of localized inhomogeneity and the general change in the external field. Studying the asymptotics of the solution, we obtain the transmitted and reflected waves from the surface $\Phi(x,t) = 0$, where different modes can pass into each other, and also reverse waves appear when the phase and group velocities are directed in different directions.

Two tasks are considered:

1. potential $F = F\left(\frac{\Phi(x,t)}{\varepsilon}, x, t\right)$ depends on the fast variable $y = \frac{\Phi(x,t)}{\varepsilon}$ and is a smooth function, with $F(x,y,t) \to F^{\pm}(x,t)$ at $y \to \pm\infty$ is faster than any degree of y with all its derivatives. The functions of $F^{\pm}$ are also smooth. This condition reflects the localized nature of the heterogeneity. The parameter $\varepsilon \to 0$, $\Phi(x,t) : R^3 \to R$ is a smooth function, and the equation $\Phi(x,t) = 0$ defines a smooth regular hypersurface $M \subset R^3$ (heterogeneity is localized near it).

2. the potential $F(y,x,t)$ has a gap of the 1st kind on the surface of $M : \Phi(x,t) = 0$. This means that the limits of $F^{\pm}(x,t)$ are finite and are smooth functions of their arguments. In this case, the solution must be continuously on the surface of the potential gap.

[1] e-mail: esina_anna@mail.com

The initial conditions for both problems have the form:

$$u\Big|_{t=0} = u^0 e^{i\frac{S^0}{\varepsilon}}, \quad v\Big|_{t=0} = v^0 e^{i\frac{S^0}{\varepsilon}} \tag{1}$$

where $u^0 = u^0(x)$, $v^0 = u^0(x)$ and $S^0(x)$ are smooth functions, and u^0 and v^0 are finite, $\nabla S^0|_{\operatorname{supp} u^0} \neq 0$, $\nabla S^0|_{\operatorname{supp} v^0} \neq 0$ and $\operatorname{supp} u^0 \cap$ $\cap\, M = \varnothing$, $\operatorname{supp} v^0 \cap M = \varnothing$. The initial wave packet is located outside the localized inhomogeneity, the problem is to describe the scattering of such an initial packet by M.

References

1. V.P. Maslov, *Operator Methods*, Moscow, Izdat. MGU (1973).
2. V.P. Maslov, *The Complex WKB Method for Nonlinear Equations. I*, Basel, Birkhäuser (1994).
3. V.V. Belov and S.Yu. Dobrokhotov, *Semiclassical Maslov Asymptotics with Complex Phases. I. General Approach*, Theoret. and Math. Phys. **92** (2), (1992), Pp. 843–868.
4. S. Yu. Dobrokhotov and A. I. Shafarevich, *Semiclassical Quantization of Invariant Isotropic Manifolds of Hamiltonian Systems*, // Topological Methods in the Theory of Hamiltonian Systems (eds. A.T. Fomenko, A.B. Bolsinov, A.I. Shafarevich) Faktorial, Moscow (1998), Pp. 41–114.
5. A. I. Allilueva and A. I. Shafarevich, *Short-Wave Asymptotic Solutions of the Wave Equation with Localized Perturbations of the Velocity*, Russ. J. Math. Phys. **27** (2), (2020), Pp. 145–154.

NUMERICAL SOLUTION OF A SOURCE IDENTIFICATION ELLIPTIC PROBLEM WITH INVOLUTION AND NONLOCAL INTEGRAL CONDITION

C. Ashyralyyev[1]

Bahcesehir University, 34353, Istanbul, Türkiye;
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan;
National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Uzbekistan

Assume that $\gamma \in (0,1)$ is known number, $\rho : [0,1] \to R$ is given function such that

$$\int\limits_0^1 |\rho(\tau)|\, d\tau \leqslant \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

In $[-l,l] \times [0,1]$, we study a source identification problem to find pair (p,u) for elliptic differential equation with the involution and nonlocal condition

$$\begin{cases} -\omega_{tt}(t,x) = (a(x)\ \ \omega_x(t,x))_x + \beta\big(a(-x)\,\omega_x(t,x)\big)_x - \\ \qquad\qquad - \sigma\omega(t,x) + g(x,t) + p(x),\ 0 < t < 1,\ -l < x < l, \\ \omega(1,x) = \zeta(x) + \int\limits_0^1 \rho(\gamma)\,\omega(\gamma,x)\,ds, \\ \omega(0,x) = \xi(x),\ \omega(\gamma,x) = \phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \omega(t,-l) = \omega(t,l), \quad \omega_x(t,-l) = \omega_x(t,l), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{2}$$

where $a \geqslant a(x) = a(-x) \geqslant \delta > 0$, $\xi(x)$, $\zeta(x)$, $\phi(x)$ and $g(t,x)$ are given functions with sufficient smoothness.

Stability and coercive estimates for solution of source identification problem are established. A stable difference scheme for appoximate solution is proposed. Stability and coercive stability estimates for solution of difference scheme are obtained. Numerical results are given.

---

[1] e-mail: charyar@gmail.com

References

1. Ashyralyev A., Ashyralyyev C. *Well-posedness of SI problem for an elliptic equation in a Banach space with mixed boundary conditions*. // Lobachevskii Journal of Mathematics. **44 (8)**, Pp. 3241–3249 (2023).
2. Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. *Well-posedness of an elliptic equation with involution*. // Electronic Journal of Differential Equations **2015(284)**, Pp. 1–8, (2015).
3. Ashyralyyev, C. *Identification elliptic problem with Dirichlet and integral conditions*. // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics “Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, II” **351**, Pp. 63–73 (2021).
4. Ashyralyyev C., Cay A. *Well-posedness of Neumann-type elliptic overdetermined problem with integral condition*. // AIP Conference Proceedings. **1997**, 020026 (2018).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА–МАКСВЕЛЛА

С. И. Безродных,[1] Н. М. Гордеева[2]

*Федеральный исследовательский центр «Информатика
и управление» Российской академии наук*

В работе рассматривается задача об отклике плазмы на внешнее электромагнитное воздействие. Модельные уравнения для возмущений функции распределения электронов и напряженности электрического поля в соответствии с общим подходом [1–3] получены с помощью линеаризации кинетического уравнения Больцмана, дополненного системой Максвелла для самосогласованного электромагнитного поля. Интеграл столкновений взят в приближении линейной релаксации. Самосогласованное поле, следуя [1], представлено в виде суперпозиции продольной и поперечной волн, система уравнений для продольной волны имеет вид:

$$v\,\frac{\partial \mathcal{F}_{\|}(x,v)}{\partial x} + \mathrm{A}\mathcal{F}_{\|}(x,v) = v\mathcal{E}_{\|}(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\|}(x,s)k(s)\,ds, \qquad (1)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_{\|}(x)}{dx} = \mathrm{B}_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\|}(x,s)k(s)\,ds, \qquad (2)$$

а для поперечной волны — следующий вид:

$$v\,\frac{\partial \mathcal{F}_{\perp}(x,v)}{\partial x} + \mathrm{A}\mathcal{F}_{\perp}(x,v) = v\mathrm{B}_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\perp}(x,s)sk(s)ds, \qquad (3)$$

$$\mathcal{E}_{\perp}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\perp}(x,s)sk(s)ds. \qquad (4)$$

[1] e-mail: sbezrodnykh@mail.ru
[2] e-mail: ngordeeva@frccsc.ru

Здесь A — комплексный, B_1 и B_2 — вещественные коэффициенты, зависящие от свойств среды. Величины $\mathcal{F}(x,v)$ и $\mathcal{E}(x)$ представляют собой возмущения функции распределения электронов и напряженности электрического поля соответственно, индексы $\|$ и $\perp$ означают продольную и поперечную волну, а переменные (x,v) имеют смысл координаты и скорости. Функция $k(s)$ представляет собой обезразмеренную невозмущенную функцию распределения электронов, в качестве которой в работе выбраны функция Ферми — Дирака или Максвелла.

Для построения общего решения систем (1), (2) и (3), (4) применено сочетание метода расширения области (до всей плоскости (x,v)) и метода преобразования Фурье в пространствах обобщенных функций D' и Z'; о таких пространствах см. [4]. Общее решение каждой из указанных систем построено в интегральном виде с явно выписанным ядром и свободной плотностью $Q(\lambda)$.

Подстановка интегрального представления для общего решения систем (1), (2) и (3), (4) в естественно возникающие краевые условия приводит к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши относительно $Q(\lambda)$. Данное интегральное уравнение решено в аналитическом виде, при этом исследована зависимость его индекса от выбранного вида невозмущенной функции распределения, частоты внешнего поля и частоты столкновений в плазме. Результаты частично представлены в [5,6].

Список литературы

1. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // Ж. эксперим. и теор. физики. – 1938. – Т. 8. Вып. 3. – С. 291–318.
2. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит. – 2006.
3. *Биккин Х.М., Ляпилин И.И.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. – Екатеринбург: УрО РАН. – 2009.
4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматлит. – 1959.
5. Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M. *Analytic Solution of the System of Integro–Differential Equations for the Plasma Model in an External Field* // Russian Journal of Mathematical Physics, 2023. V. 30, Iss. 4, Pp. 443–452.
6. *Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M.* Solution of a Boundary Value Problem for a System of Integro–Differential Equations Arising in a Modal of Plasma Physics // Mathematical Notes, 2023. V. 114. № 5. Pp. 704–715.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТЯХ СО ВХОДЯЩИМ УГЛОМ

С. И. Безродных,[1] А. А. Иванникова[2]

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

Доклад посвящен эффективному аналитико-численному решению спектральной задачи

$$\Delta U(x) + \lambda U(x) = 0, \qquad x \in g, \tag{1}$$

$$U(x) = 0, \quad x \in \mathscr{C} \cup \mathscr{D}, \qquad \partial_\nu U(x) = 0, \quad x \in \mathscr{N}, \tag{2}$$

в плоской конечной односвязной области g с кусочно-гладкой границей ∂g без точек внешнего и внутреннего заострения, $\partial g = \mathscr{C} \cup \mathscr{D} \cup \cup \mathscr{N}$; полярные координаты на плоскости переменного $x = (x_1, x_2)$ обозначаем (r, φ). Дуга $\mathscr{C}$, являющаяся частью угла раствора $\pi\beta$, $\beta \in (1, 2)$, определяется по формуле

$$\mathscr{C} := \mathscr{C}_- \cup \mathscr{C}_+, \qquad \mathscr{C}_\pm := \big\{r \in [0, r_\pm], \varphi = \pm\pi\beta/2\big\}, \quad r_\pm > 0.$$

Предполагаем, что $\mathscr{D} = \cup_s \mathscr{D}_s$ и $\mathscr{N} = \cup_j \mathscr{N}_j$, так что кривая $\mathscr{D} \cup \mathscr{N}$ является объединением конечного числа последовательно соединенных звеньев $\mathscr{D}_s$, $\mathscr{N}_j$; символ ∂_ν означает производную по внешней нормали в точках гладкости $\mathscr{N} \subset \partial g$.

Представленное в докладе решение спектральной задачи (1), (2) построено с помощью развития результатов работ [1–4]. Искомые собственные функции $\{U_m\}$ построены в виде пределов линейных комбинаций аппроксимативных функций из набора $\{\omega_m\}$, где каждая функция $\omega_m(x; \lambda)$ тождественно удовлетворяет уравнению $\Delta\omega_m + \lambda\omega_m = 0$ с параметром $\lambda > 0$ в области g и краевому условию на части $\mathscr{C}$ ее границы. Собственные числа найдены путем решения специальных трансцендентных уравнений. Представлены результа-

[1] e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

[2] e-mail: aivannikova94@gmail.com

ты решения указанной спектральной задачи на примере несимметричных L-образных областей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00372, URL: https://rscf.ru/project/24-11-00372/ .

Список литературы

1. Fox L., Henrici P., Moler C., *Approximations and bounds for eigenvalues of elliptic operators* // SIAM J. Numer. Anal, 1967. Vol. 4, No 1, Pp. 89–102.
2. Trefethen L.N., Betcke T., *Computed eigenmodes of planar regions. Contemporary Mathematics*. MIMS School of Mathematics, 2005, 19 p.
3. Vlasov V.I., *A method for solving boundary value problems for the Laplace equation in domains with cones* // Dokl. Math. 2004, Vol. 70, No 1. Pp. 599–602.
4. *Безродных С. И., Власов В. И.* Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда–Шафранова с нелокальным условием // Журн. вычисл. матем. и матем. физ, 2014. – Т. 54. – № 4. – Р. 619–685.

ОПЕРАТОР БЛОЧНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРЕ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ И ДИСПЕРСИЯ

А. М. Бикчентаев[1]

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казань, Россия

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{M}^{\mathrm{id}}$ — множество идемпотентов ($Q = Q^2$) в $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I — единица $\mathcal{M}$. Проекторы $P, Q \in \mathcal{M}$ называются *изоклинными* (с углом $\theta \in (0, \pi/2)$, пишем $P \overset{\theta}{\approx} Q$), если $PQP = \cos^2\theta\, P$ и $QPQ = \cos^2\theta\, Q$, см. [1, определение 10.4]. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части, соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leqslant$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$.

Через $\mu(t; X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X)\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : \quad P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}, \quad \tau(P^{\perp}) \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

Пусть m — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0 < p < +\infty$) может быть определено как $L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \ \mu_t(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$ с F-нормой (нормой для $1 \leqslant p < +\infty$) $\|X\|_p = \|\mu(t; X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

Лемма 1. *Если* $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, *то* $|\tau(X)| \leqslant \tau(|X|)$.

[1] e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Пусть $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{M}^{\mathrm{id}}$ и $Q_1 + \ldots + Q_n = I$. Положим $\mathcal{Q}_n(X) = \sum_{k=1}^{n} Q_k X Q_k$ для каждого $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

Лемма 2.
(i) *Если* $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, *то* $\mathcal{Q}_n(X) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ *и* $\tau(\mathcal{Q}_n(X)) = \tau(X)$.
(ii) *Если* $X - \mathcal{Q}_2(X) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, *то* $\tau(X - \mathcal{Q}_2(X)) = 0$.

В условиях п. (ii) леммы 2 при $\tau(I) = 1$ из теоремы 4.8 [2] получаем неравенство $\|I + z(X - \mathcal{Q}_2(X))\|_1 \geqslant 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Пусть $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ и $P_1 + \ldots + P_n = I$. Положим $\mathcal{P}_n(X) = \sum_{k=1}^{n} P_k X P_k$ для каждого $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, см. [3].

Теорема 1. *Если* $X - \mathcal{P}_n(X) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, *то* $\tau(X - \mathcal{P}_n(X)) = 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

В условиях теоремы 1 при $\tau(I) = 1$ из теоремы 4.8 [2] получаем неравенство $\|I + z(X - \mathcal{P}_n(X))\|_1 \geqslant 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Имеем $A \leqslant n\mathcal{P}_n(A)$ для каждого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ [3, лемма 1]. Поэтому, если $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $\mathcal{P}_n(A) \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < +\infty$.

Предложение. *Пусть* $P, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ *с* $P_1 + \ldots + P_n = I$ *и* $P_k \overset{\theta}{\approx} P$, $k = 1, \ldots, n$ *с одним и тем же углом* $\theta \in (0, \pi/2)$. *Тогда* $\mathcal{P}_n(P) = \cos^2\theta\, I$ *и при* $\tau(I) < +\infty$ *имеем* $\tau(P) = \tau(\mathcal{P}_n(P)) = \cos^2\theta\, \tau(I) = \tau(P_k)$, $\ k = 1, \ldots, n$.

Далее пусть $\tau(I) = 1$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{D}(X) = \|X - \tau(X)I\|_2^2$ — *дисперсия оператора* $X \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$. *Тогда* $\mathbb{D}(\mathcal{P}_n(X)) \leqslant \mathbb{D}(X)$ *для всех* $X \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$ *и* $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.
(i) *Имеем* $\mathbb{D}(|X^*|) = \mathbb{D}(|X|)$ *для всех* $X \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$.
(ii) *Пусть* $P = U^*U$ — *начальный проектор частичной изометрии* $U \in \mathcal{M}$. *Тогда* $\max\{\tau(P)\tau(P^{\perp}), |\tau(U)| - |\tau(U)|^2\} \leqslant \mathbb{D}(U)$. *Если еще* $U^2 = 0$, *то* $\mathbb{D}(U) = \tau(P)$.
(iii) *Имеем* $\|X\|_1 \leqslant \|X\|_2 \leqslant \|X\|_1 + \sqrt{\mathbb{D}(X)}$ *для всех* $X \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$.

Список литературы

1. *А.Н. Шерстнев.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. – М.: Физматлит, 2008.
2. *А.М. Бикчентаев.* О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана. // Труды МИАН. – 293 (2016). – сс. 73–82.
3. *А.М. Бикчентаев.* Оператор блочного проектирования в алгебре измеримых операторов. – Изв. вузов. Матем., 2023. – № 10. – сс. 77–82.

LOCAL ENTROPY AND COMPLEXITY

M. L. Blank[1]

Higher School of Modern Mathematics MIPT, Moscow, Russia; National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia

The classical Kolmogorov–Sinai metric entropy and the Adler–Konheim–McAndrew topological entropy measure the complexity of a dynamical system, but do not provide any information about the complexity of individual trajectories, let alone overall sequences of points. To answer the last question, Kolmogorov proposed to consider the "simplest" dynamical system realizing this sequence as a trajectory, and implemented this idea in terms of the shortest program of a universal Turing machine realizing this sequence. Unfortunately, this approach turned out to be not very fruitful: firstly, its practical implementation is extremely difficult, and secondly, the complexity of two trajectories of the same system can differ greatly. To overcome these difficulties we propose local dynamical entropies which measure the complexity of individual trajectories and compare them to known approaches.

Let $\Delta := \{\Delta_i\}$ be a finite measurable partition of a Lebesgue space (X, Σ). We refer to the indices of Δ_i as an alphabet $\mathbf{A}$. We say that on a starting segment of length N of a given sequence $\overline{x} := (x_1, x_2, \dots)$ there is a word $\overline{w} := (w_1, \dots, w_n)$ composed of the letters $w_i \in \mathbf{A}$, if there is i such that

$$x_{i+j} \in \Delta_{w_j} \quad \forall j < n + 1, i + j \leqslant N.$$

Denote by $L(\overline{x}, \overline{w}, N)$ the number of occurrences of the word $\overline{w}$ in this starting segment, and let $\overline{p}(\overline{x}, n, N) := \{p_i\}$ be the distribution (frequency) of all such words of length n.

Definition. By the conditional *local entropy* of the trajectory $\overline{x}$ we mean

$$h^{\pm}_{\mathrm{loc}}(\overline{x}|\Delta) := \lim^{\pm}_{n\to\infty} \lim^{\pm}_{N\to\infty} \frac{1}{n} H(\overline{p}(\overline{x}, n, N)).$$

[1] e-mail: mlblank@gmail.com

Here ± refers to the upper and lower limits, and

$$H(\overline{p}(\overline{x},n,N)) := -\sum_{i=1} p_i \log p_i$$

is the entropy of the distribution $\overline{p}(\overline{x},n,N) := \{p_i\}$.

Denote by $L(\overline{x},n,N)$ the number of different words of length n in the starting piece of length N of the trajectory $\overline{x}$.

Definition. By the conditional *information entropy* of the trajectory $\overline{x}$ we mean

$$h^{\pm}_{\text{info}}(\overline{x}|\Delta) := \lim{}^{\pm}_{n\to\infty} \lim{}^{\pm}_{N\to\infty} \frac{1}{n} \log L(\overline{x},n,N).$$

Finally, we define the unconditional versions of the *local and information entropies* as follows:

$$h^{\pm}_{\text{loc}}(\overline{x}) := \sup_{\Delta} h^{\pm}_{\text{loc}}(\overline{x}|\Delta), \quad h^{\pm}_{\text{info}}(\overline{x}) := \sup_{\Delta} h^{\pm}_{\text{info}}(\overline{x}|\Delta). \tag{1}$$

Our main results may be formulated as follows.

Theorem.

1. $h_{\text{loc}}(\overline{x}) \leqslant h_{\text{info}}(\overline{x})\ \forall \overline{x}$.
2. *Kolmogorov–Sinai metric entropy* $h_\mu(\Delta) = h_{\text{loc}}(\overline{x}|\Delta)$ *for each* μ*-typical trajectory* $\overline{x}$ *of an ergodic dynamical system.*
3. $h_{\text{loc}}(\overline{x}) = h_{\text{info}}(\overline{x}) = 0$ *for each periodic sequence* $\overline{x}$.

We will discuss these results and their applications to various dynamical systems and specific sequences, in particular the ones related to number theory, such as prime numbers, quadratic residues, etc., which were published in [1].

References

1. Blank M. *Are prime numbers and quadratic residues random?* Discrete and Continuous Dynamical Systems,
URL: https://www.aimsciences.org/article/doi/10.3934/dcds.2025053 .

МЕТОД ГАЛЁРКИНА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ АБСТРАКТНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А. С. Бондарев[1]

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный педагогический университет

Пусть дана тройка вещественных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а $H \equiv H'$. Оба вложения плотны и непрерывны. Далее под выражением (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если при этом $z \in H$, то выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением в H.

Для почти всех $t \in [0, T]$, где $T < \infty$, определены операторы $A(t)\colon V \to V'$ такие, что на $u, v \in V$ выполняется:

$$(A(t)u - A(t)v, u - v) \geqslant m\|u - v\|_V^2 \quad (m > 0); \tag{1}$$

$$\|A(t)u - A(t)v\|_{V'} \leqslant M\|u - v\|_V. \tag{2}$$

Считаем также, что для функций $u(t) \in L_2(0,T;V)$ функция $A(t)u(t) \in$ $\in L_2(0, T; V')$.

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad u(0) = u(T). \tag{3}$$

Теорема 1. [1, с. 254] *В сделанных выше предположениях задача* (3) *имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in L_2(0, T; V)$ и $u' \in L_2(0, T; V')$.*

Пусть V_h, где $h > 0$, — конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. Оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P_h} : V' \to V_h'$.

[1] e-mail: bondarev@math.vsu.ru

Задаче (3) поставим в соответствие приближенную в V_h задачу на $[0,T]$.

$$u_h'(t) + \overline{P_h}A(t)u_h(t) = \overline{P_h}f(t),\ u_h(0) = u_h(T), \tag{4}$$

Решением $u_h(t)$ задачи (4) называется функция со значениями в V_h такая, что равенство (4) выполняется в смысле пространства $L_2(0,T;V_h')$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть* $u(t)$ — *решение задачи* (3), *а* $u_h(t)$ — *решение задачи* (4). *Тогда справедлива оценка*

$$\int_0^T\Big(\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 + \|\overline{P_h}u'(t)-u_h'(t)\|_{V_h'}^2\Big)dt \leqslant C\int_0^T\|(I-P_h)u(t)\|_V^2 dt. \tag{5}$$

Пусть задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\|(I-Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$, где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h.

Следствие. *Пусть* $\{V_h\}$ — *предельно плотная в* V *последовательность конечномерных подпространств, такая, что* $\|P_h\|_{V\to V}$ *равномерно по* h *ограничены. Тогда при* $h \to 0$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T\|u(t)-u_h(t)\|_V^2\,dt + \int_0^T\|u'(t)-u_h'(t)\|_{V'}^2,dt \to 0.$$

Укажем класс подпространств V_h, для которых $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Пусть:

$$\|(I-Q_h)v\|_H \leqslant r_1 h\|v\|_V \quad (v \in V), \tag{6}$$

$$\|v_h\|_V \leqslant r_2 h^{-1}\|v_h\|_H \quad (v_h \in V_h), \tag{7}$$

где r_1 и r_2 не зависят от v, v_h и h. Из (6) и (7) следует оценка $\|P_h\|_{V\to V} \leqslant r_1 r_2 + 1$.

Из оценки (5) можно получить порядок скорости сходимости. Для этого предположим существование гильбертова пространства E такого, что $E \subset V$ и $V = [E,H]_{1/2}$.

Относительно подпространств V_h далее вместо (6) предположим, что

$$\|(I-Q_h)v\|_V \leqslant r_3 h\|v\|_E \quad (v \in E).$$

Пусть теперь решение задачи (3) $u \in L_2(0,T;E)$. Тогда получим

$$\int\limits_0^T \|u(t)-u_h(t)\|_V^2\,dt \leqslant Ch^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt.$$

Если же решение $u \in L_2(0,T;E)$ и $u' \in L_2(0,T;H)$, то

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)-u_h(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|u'(t)-u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant Ch^2 \int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\right)dt.$$

Список литературы

1. *Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С. А. Будочкина[1]

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы

В рамках современного вариационного исчисления классической обратной задачей вариационного исчисления (ОЗВИ) считается задача построения функционала, уравнения экстремалей которого совпадают с заданными уравнениями. Рассматриваемые в настоящем докладе вопросы тесно связаны со следующей постановкой ОЗВИ, обобщающей ее классическую постановку: даны произвольные уравнения и краевые условия, требуется найти функционал, множество стационарных точек которого совпадает с множеством решений исходной задачи.

Доклад основан на работах [1–5]. Будет дан обзор этих работ, а также изложены результаты автора: необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи вариационного исчисления для различных типов уравнений, а также формулы для построения соответствующих функционалов — вариационных принципов.

Публикация выполнена в рамках проекта № 002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы.

Список литературы

1. Savchin V.M. *An operator approach to Birkhoff's equations.* // Вестник РУДН. Сер. Математика. – 1995, №2 (2). – сс. 111–123.
2. Budochkina S.A., Vu H.P. *On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations.* // Eurasian Mathematical Journal, 2022, Vol. 13, No. 3, Pp. 23–32.
3. Budochkina S.A., Shinkarenko I.V. *An indirect variational formulation of a third-order ordinary differential equation and Birkhoff's equations.* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 10, Pp. 4912–4924.
4. Budochkina S.A., Luu T.H. *On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation.* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 6, Pp. 2466–2477.
5. *Будочкина С.А., Лыу Т.Х.* О вариационном принципе для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2025. – т. 71, №1. – сс. 71–84.

[1] e-mail: budochkina-sa@rudn.ru

ON EQUIVARIANT BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND APPLICATIONS

V. P. Burskii[1]

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

Let Ω bean arbitrary bounded domain in the space $\mathbb{R}^n$ with the boundary $\partial\Omega$ and $\mathcal{L} = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$, $D^\alpha = (-i\partial)^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = \sum\limits_k \alpha_k$ be some formally self-ajoint differential operation with smooth complex matrix coefficients $a_\alpha(x)$, i.e. their elements belong to $C^\infty(\overline{\Omega})$. Let L_0 with domain $D(L_0)$ be a minimal operator and $L = (L_0)^*$ be a maximal operator of $\mathcal{L}$, $C(L) = D(L)/D(L_0)$ be a boundary space, $\Gamma : D(L) \to C(L)$ be a factor-mapping. An boundary value problem $Lu = f, \Gamma u \in B \subset C(L)$ is called well-posed if the corresponding expansion $L_B = L|_{D(L_B)}$, $D(L_B) = \Gamma^{-1}B$ has a continuous two-sided inverse operator.

Let G be a Lie group smoothly acting in the closed domain $\overline{\Omega}$, on boundary $\partial\Omega$ and this action remains volume of domain. Let differential operation $\mathcal{L}$ is invariant with respect to the group action, that is $g(\mathcal{L}u) = \mathcal{L}(gu)$. Then spaces $D(L)$, $D(L_0), C(L)$ are invariant with respect to the action of the group G. The boundary value problem $Lu = f$, $\Gamma u \in B$, will be called G-invariant if the space B is invariant with respect to the indicated action of group G. If the group G is compact then, as it is well known, the Hilbert space of representation is decomposed in the direct sum of finite-dimensional invariant subspaces of irreducible representations. And if the group also is commutative, such representations are one-dimensional. Let the space of representation of the group G be the boundary space $C(L)$. For the case of the compact group we have decompositions

$$C(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \tilde{C}^k, \quad C(\ker L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus C^k(\ker L), \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus B^k.$$

[1] e-mail: bvp30@mail.ru

If our G-invariant boundary value problem is well-posed, the decompositions in the direct sum $C(L) = C(\ker L) \oplus B$ attracts a decompositions in the direct sum $C^k := C^k(\ker L) \oplus B^k = \sum_l \tilde{C}^{k_l}$ with by finite-dimensional projectors $\Pi^k : C^k \to C^k(\ker L)$ along B^k and now a check of a **well-posedness of G-invariant boundary boundary value problem** can be shown by **the check of two properties**:
1) $C^k(\ker L) \cap B^k = 0$; 2) $\exists \kappa > 0, \forall k, \|\Pi^k\|_{C^k} < \kappa$.

About applications. We investigate the general well-posed mixed SO-equivariant boundary value problem for the wave equation in a ball and we obtain the theorem of solution existence for such problem. We investigate also the spectrum of operator of a general well-posed SO-equivariant boundary value problem for the Poisson equation in a disk and in a ball, selecting cases of violation of well-posedness of the same problem for the Helmholz equation as violation of the property 1). Thus the fulfilment of the property 2) appears by the supplied property of well-posedness of the problem for the Poisson equation. One more application is related to the quantum mechanics. Here we consider the Schrödinger equation for hydrogen-like atom with Coulomb potential and non-point ball nucleus and we obtain some properties and conclisions.

References

1. Burskii V. P., *Investigation methods of boundary value problems for general differential equations*, Kiev, Naukova dumka, 2002 (In Russian).

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

В. Б. Васильев[1]

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Изучается разрешимость эллиптических псевдодифференциальных уравнений

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

где A — оператор вида

$$(Au)(x) = \int\limits_D \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x,\xi) e^{i(x-y)\xi} u(y) dy d\xi, \quad x \in D,$$

функцию $A(x,\xi)$ называют символом оператора A, $D \subset \mathbb{R}^m$ — область, граница которой может иметь особенности (точки или множества негладкости) типа конуса или ребра.

При локализации в точке появляется «модельный» оператор (в символе $A(x,\xi)$ зафиксирована пространственная переменная x) в специальной «канонической» области (конусе), для которого необходимо описать условия обратимости. Для этой цели предлагается использовать специальную *волновую* факторизацию эллиптического символа [1].

Для уравнений с такими операторами строится вариант символического исчисления подобно [2, 3] и предлагаются достаточные условия фредгольмовости в подходящих пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(D)$. Эти функциональные пространства приходится строить локально, используя норму

$$||u||_{s(x)} \equiv \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} (1 + |\xi|)^{2s(x)} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

поскольку индекс волновой факторизации зависит от точки локали-

[1] e-mail: vbv57@inbox.ru

зации, лишь затем собирая их в общую конструкцию. Простейший вариант такого построения был рассмотрен в [4].

Список литературы

1. Vasil’ev, V.B., *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000.
2. Vasilyev V.B., *Elliptic operators and their symbols*, // Demonstr. Math. **52** (2019), Pp. 361–369.
3. Vasilyev V.B., *Operator symbols and operator indices*, // Symmetry, **12**:64 (2020). – cc. 1–12.
4. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные операторы и уравнения переменного порядка. Диффкпкец. уравнения. – **54**:9 (2018). – cc. 1184–1195.

ГЕЛЬФАНДОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ШАРОВ И КЛАССОВ СОБОЛЕВА

А. А. Васильева[1]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $N \in \mathbb{N}$ обозначим через l_p^N пространство $\mathbb{R}^N$ с нормой

$$\|(x_1, \dots, x_N)\|_{l_p^N} = \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad p < \infty,$$

$$\|(x_1, \dots, x_N)\|_{l_p^N} = \max_{1\leqslant j\leqslant N} |x_j| \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Через B_p^N обозначим единичный шар в l_p^N.

Через $d^n(M,X)$ и $\lambda_n(M,X)$ обозначим соответственно гельфандовский и линейный n-поперечник множества M в пространстве X.

Теорема 1. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Пусть A — непустое множество, $\nu_\alpha > 0$, $1 < p_\alpha \leqslant \infty$, $\alpha \in A$. Предположим, что $\hat{p} := \inf\limits_{\alpha\in A} p_\alpha > 1$.*

1. *Если $p_\alpha \leqslant q$ для каждого $\alpha \in A$, то для любого $n \leqslant N/2$ выполнено*
$$d^n\left(\bigcap_{\alpha\in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^N, l_q^N\right) \underset{\hat{p}}{\asymp} \inf_{\alpha\in A}\left(\nu_\alpha \min\left\{1, n^{-1/2}N^{1/p'_\alpha}\right\}\right).$$
Если при этом $1/q + 1/p_\alpha \leqslant 1$ для любого $\alpha \in A$, то аналогичная порядковая оценка верна для линейных поперечников.
2. *Пусть $p_\alpha \geqslant 2$ для каждого $\alpha \in A$. Для $p_\alpha < q$, $p_\beta > q$ определим числа $\lambda_{\alpha\beta}$ уравнением $\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda_{\alpha\beta}}{p_\alpha} + \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{p_\beta}$. Тогда для любого $n \leqslant \frac{N}{4}$ выполнена оценка*
$$d^n\left(\bigcap_{\alpha\in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^N, l_q^N\right) \asymp \lambda_n\left(\bigcap_{\alpha\in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^N, l_q^N\right) \asymp$$
$$\asymp \min\left\{\inf_{p_\alpha\geqslant q} \nu_\alpha N^{1/q-1/p_\alpha}, \inf_{p_\alpha\leqslant q} \nu_\alpha, \inf_{p_\alpha<q, p_\beta>q} \nu_\alpha^{1-\lambda_{\alpha\beta}} \nu_\beta^{\lambda_{\alpha\beta}}\right\}.$$

[1] e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Определим класс Соболева на области Ω равенством

$$W_p^r(\Omega) = \left\{ f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega) : \ \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1 \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant q < \infty$, $s \geqslant 2$, $1 < p_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, s$, $d \in \mathbb{N}$. *Пусть область* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *удовлетворяет условию Джона с параметром* $a > 0$,

$$M = \bigcap_{j=1}^{s} W_{p_j}^{r_j}(\Omega).$$

Также предположим, что выполнены неравенства $r_1 > r_2 > \cdots > r_s$, $\frac{r_1}{d} - \frac{1}{p_1} < \cdots < \frac{r_s}{d} - \frac{1}{p_s}$, $\frac{r_s}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_s} > 0$. *Обозначим* $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_s)$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_s)$.

1. *Пусть* $p_j \geqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant s$. *Тогда* $d^n(M, L_q(\Omega)) \underset{\overline{p},q,\overline{r},d,a}{\asymp} n^{-r_1/d}$.
2. *Пусть* $2 \leqslant p_j \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant s$.
   Тогда $d^n(M, L_q(\Omega)) \underset{\overline{p},q,\overline{r},d,a}{\asymp} n^{-r_s/d-1/q+1/p_s}$.
3. *Пусть* $q \geqslant 2$, $p_j \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant s$, *при этом* $p_1 < 2$.
   (a) *Если* $\frac{r_1 - r_s}{d} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{p_s}$, *то* $d^n(M, L_q(\Omega)) \underset{\overline{p},q,\overline{r},d,a}{\asymp} n^{-r_s/d-1/q+1/p_s}$.

   (b) *Пусть* $\frac{r_1 - r_s}{d} > \frac{1}{2} - \frac{1}{p_s}$ *и*

   $$\theta_1 := \frac{r_1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \neq \frac{r_s/d + 1/q - 1/p_s}{2(r_s/d - r_1/d + 1/p_s')} =: \theta_2.$$

   Тогда $d^n(M, L_q(\Omega)) \underset{\overline{p},q,\overline{r},d,a}{\asymp} n^{-\min\{\theta_1,\theta_2\}}$.
4. *Пусть* $q \geqslant 2$, $p_j \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant s$, *при этом* $\{j : \ p_j > q\} \neq \neq \varnothing$, $\{j : \ p_j < q\} \neq \varnothing$. *Для* i, j *таких, что* $p_i < q$, $p_j > q$, *определим числа* λ_{ij} *уравнениями* $\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda_{ij}}{p_i} + \frac{\lambda_{ij}}{p_j}$ *и положим* $(i_*, j_*) = \mathrm{argmax}_{p_i<q,p_j>q}((1-\lambda_{ij})r_i/d + \lambda_{ij}r_j/d)$. *Тогда*

   $$d^n(M, L_q(\Omega)) \underset{\overline{p},q,\overline{r},d,a}{\asymp} n^{-(1-\lambda_{i_*j_*})r_{i_*}/d-\lambda_{i_*j_*}r_{j_*}/d}.$$

ОТО И УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА: КОСМОЛОГИЯ И ПРОСТРАНСТВО ЛОБАЧЕВСКОГО

В. В. Веденяпин, Я. Г. Батищева, Н. Н. Фимин, В. М. Чечёткин

ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Рассмотрены вывод и свойства уравнений Власова–Эйнштейна и Власова–Пуассона и космологические решения.

В классических работах (см. [1–4]), уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия [5–11]. Получающийся вывод уравнений типа Власова даёт уравнения Власова–Эйнштейна отличные от того, что предлагались ранее [12–15]. Предлагается способ перехода от кинетических уравнений к гидродинамическим следствиям [5–8], как это делалось раньше уже самим А.А. Власовым [4].

В случае гамильтоновой механики от гидродинамических следствий уравнения Лиувилля возможен переход к уравнению Гамильтона–Якоби, как это делалось уже в квантовой механике Е. Маделунгом [16], а в более общем виде В.В. Козловым [17, 18]. Таким образом получаются в нерелятивистском случае решения Милна–Маккри, а также нерелятивистский и релятивистский анализ решений типа Фридмана нестационарной эволюции Вселенной. Это позволяет определить константу Хаббла не на основе метрики, как это делалось ранее [1–3], а как положено, на основе наблюдаемой материи, написать уравнения для нее но основе движения материи в заданной метрике, проанализировать Лямбду Эйнштейна и причину ускоренного расширения Вселенной как релятивистский эффект [19, 20].

Факт ускоренного расширения позволяет также определить знак кривизны: она отрицательна, и мы живем в пространстве Лобачевского.

Список литературы

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ЛКИ, 2007.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1988.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975. – 696 стр.
4. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. – М.: Наука, 1966. – 356 стр.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. – 2012. – Т. 170. № 3. – С. 468–480.
6. *Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. // Изв. РАН. Сер. матем. – 2017. – Т. 81. № 3. – С. 45–82.
7. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. // СМФН, 2013. – том 47. – С. 5–17.
8. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. – М.: Физматлит, 2001.
9. *Веденяпин В.В.* Уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2018. – № 188. – 20 с.
10. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M., *The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits* // International Journal of Modern Physics D., 2020, V. 29. No 1. 23 p.
11. Vedenyapin, V., Fimin, N., Chechetkin, V., *The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models* // European Physical Journal Plus. 2020, No 400, 14 p.
12. Cercigniani C., Kremer G.M., *The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications.* Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. Choquet–Bruhat Y., *Introduction to general relativity, black holes and cosmology.* New York: Oxford University Press, 2015.
14. Rein G., Rendall A.D., *Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data* // Commun. Math. Phys., **150**, Pp. 561–583, (1992).
15. Kandrup H.E., Morrison P.J., *Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters* // Ann. Phys., 1993, V. 225, Pp. 114–166.
16. Madelung E., *Quantentheorie in hydrodynamischer form* (Quantum theory in hydrodynamic form) // Z Phys, **40** (1926), Pp. 322–326.
17. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем. // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 1, Матем. Мех. – 1983, № 6. – сс. 10–22;
18. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. – Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998. – 239 с.
19. *Веденяпин В.В.* Математическая теория расширения вселенной на основе принципа наименьшего действия. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2024, том 64, № 11, – с. 2110–2127.

20. Vedenyapin V.V., *Mathematical Theory of the Expanding Universe Based on the Principle of Least Action*. // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2024, Vol. 64, No. 11, pp. 2624–2642. © Pleiades Publishing, Ltd., 2024.
21. *В.В. Веденяпин, В.М. Аушев, А.О. Гладков, Ю.А. Измайлова, А.А. Реброва.* Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна–Маккри // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2024. – 003, 28 стр.

OPERATORS IN KAHLER SPACES AND QUANTUM MECHANICS

I. Volovich[1]

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences

The mathematical foundation of quantum mechanics, as established by von Neumann, relies on the theory of operators in complex Hilbert spaces, where complex numbers play a central role. However, the necessity of complex numbers in this framework remains debated.

This talk explores a recent approach [1] that redefines quantum mechanics as a theory of operators in a real Kahler space, with a focus on spectral theory in such spaces. The Kahler-space framework retains all essential features of quantum theory while introducing a critical advantage: it naturally embeds a Hamiltonian symplectic structure, akin to classical mechanics. This structural parallelism unifies the geometric description of classical and quantum dynamics. Furthermore, we demonstrate that the ergodicity of finite-dimensional quantum systems emerges explicitly within this framework, offering new insights into their dynamical behavior.

References

1. I. Volovich, *Real Quantum Mechanics in a Kahler Space*, arXiv:2504.16838.

[1] e-mail: volovich@mi-ras.ru

ON A STRONGLY ELLIPTIC PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL OPERATORS WITH ORTHOTROPIC CONTRACTIONS IN THE 3-DIMENSIONAL CASE

T. Ganyani, A. L. Tasevich[1]

RUDN University, FRC CSC RAS

Let us consider a functional-differential equation

$$A_R u(x) = -\sum_{i,j=1}^{3} \left(R_{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

where

$R_{ij}v(x) = a_{ij0}v(x) + a_{ij1}v(q^{-1}x_1, px_2, rx_3) + a_{ij,-1}v(qx_1, p^{-1}x_2, r^{-1}x_3)$.

The coefficients $a_{ijk} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$, $k = 0, \pm 1$, parameters $p, q, r > 1$, i.e. there is a contraction on one variable and extension—on others.

The conditions for strongly ellipticity in the terms of the Garding type inequality fulfillment are obtained.

[1] e-mail: atasevich@gmail.com

О ФАКТОРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С «РАСЩЕПЛЁННЫМИ» МЕРАМИ

И. А. Х. Ал-Гарайхоли[1]

Воронежский государственный университет, Россия;
Университет Ти-Кар, Ирак

В работе доказывается возможность представления уравнения

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3}\left(p\,\frac{du}{d[\mu]_2}\right)+u\,\frac{dQ}{d[\sigma]_3}=0, \tag{1}$$

в факторизованном виде.

Решение уравнения (1) мы ищем в классе $[\mu]$-абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая $[\mu]$-производная которых $[\sigma]$-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Мы считаем, что $\mu(x)$ определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu$ в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\mu)$ — точек разрыва функции $\mu(x)$, заменена на тройку собственных элементов. Виду того, что для восстановления функции (с точностью до постоянной константы) после дифференцирования, необходимо «помнить» оба скачка функции $u(x)$, которые вообще говоря различны, производная функции $u(x)$ по мере $\mu(x)$, которую мы обозначим через $\frac{du}{d[\mu]_2}$, чтобы подчеркнуть, что она в точке ξ принимает два упорядоченных значения, определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на пару собственных значений (помимо предельных $\xi \pm 0$). Мы будем обозначать их через τ_1^ξ и τ_2^ξ. В точках τ_i^ξ $(i = 1, 2)$ производная определена следующими равенствами

$$u'_{[\mu]}(\tau_1^\xi)=\frac{\Delta^- u(\xi)}{\Delta^-\mu(\xi)} \quad \text{и} \quad u'_{[\mu]}(\tau_2^\xi)=\frac{\Delta^+ u(\xi)}{\Delta^+\mu(\xi)},$$

а в точках $\xi - 0$ и $\xi + 0$ значениями, бывшими ранее предельными.

Аналогично, для восстановления функции $v(x) = u'_\mu(x)$ по её производной по мере σ, необходимо уже «помнить» три скачка, т. е.

[1] e-mail: evan.abd3@gmail.com

$\upsilon'_{[\sigma]}(x)$ в точках разрыва уже трёхзначна (помимо предельных значений), и $\upsilon'_{[\sigma]}(x)$ определена множестве $\overline{[0;\ell]}_{\sigma}^{(3)}$ в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ (при этом мы предполагаем, что множества точек «расщепления» мер μ и σ совпадают) заменена на упорядоченное множество $\{\xi - 0, \widehat{\tau}_1^{\xi}, \widehat{\tau}_2^{\xi}, \widehat{\tau}_3^{\xi}, \xi + 0\}$.

Уравнение в точках разрыва мер понимается следующим образом:

$$-\Big[\Big(pu'_{[\mu]_2}\Big)(\tau_1^{\xi}) - \Big(pu'_{[\mu]_2}\Big)(\xi - 0)\Big] + u(\xi - 0)\Big[Q(\tau_1^{\xi}) - Q(\xi - 0)\Big] = 0,$$

$$-\Big[\Big(pu'_{[\mu]_2}\Big)(\tau_2^{\xi}) - \Big(pu'_{[\mu]_2}\Big)(\tau_1^{\xi})\Big] + u(\xi)\Big[Q(\tau_2^{\xi}) - Q(\tau_1^{\xi})\Big] = 0,$$

$$-\Big[\Big(pu'_{[\mu]_2}\Big)(\xi + 0) - \Big(pu'_{[\mu]_2}\Big)(\tau_2^{\xi})\Big] + u(\xi + 0)\Big[Q(\xi + 0) - Q(\tau_2^{\xi})\Big] = 0.$$

Справедлива теорема.

Теорема. *Пусть* $\inf\limits_{\overline{[0;\ell]}_{[\mu]}^{(2)}} p(x) > 0$*,* $Q(x)$ *не убывает,* $p(x)$ *и* $Q(x)$ *—* $[\sigma]$*-абсолютно непрерывны на* $\overline{[0;\ell]}_{[\mu]}^{(2)}$*. Тогда, существуют положительные функции* $\psi_0(x)$*,* $\psi_1(x)$ *и отрицательная функция* $\psi_2(x)$ *такие, что*

$$\psi_2\left(\psi_1\left(\psi_0 u\right)'_{[\mu]_2}\right)'_{[\sigma]_3} = F'_{[\sigma]_3}. \qquad (2)$$

В работе используется подход, предложенный Ю.В. Покорным, к поточечной трактовке уравнения, который был применен им и его учениками к исследованию решений уравнений второго порядка [1–3].

Список литературы

1. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук, 2008. – Т. 63, № 1 (379). – С. 98–141.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М. : Физматлит, 2004. – 272 с.
3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. – М. : Физматлит, 2009. – 192 с.

МНОГОМЕРНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ О КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ

А. С. Гаспарян[1]

Переславль-Залесский

Многомерные матрицы и определители применяются для вывода новых теорем о конечных приращениях. Свойства знакопеременности многомерных определителей позволяют устанавливать семейство соотношений, в частности содержащее классические теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях, а также некоторые их обобщения на функции многих переменных.

Существует замечательный способ вывода формул Лагранжа и Коши из теоремы Ролля, использующий определитель в качестве связующего звена. А именно, для функций $x(t)$ и $y(t)$, непрерывных на $[a, b]$ и дифференцируемых в (a, b), составим новую функцию

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x(t & x(a) & x(b)) \\ y(t & y(a) & y(b)) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что функция $\Psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и $\Psi(a) = \Psi(b) = 0$. Следовательно, найдётся такое значение $t = \xi \in (a, b)$, при котором $\dot{\Psi} = 0$. Разложив производную определителя по правилу Лапласа, придём к равенству

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(\xi) & \dot{y}(\xi) \\ \Delta x & \Delta y \end{vmatrix} = 0,$$

в котором мы узнаём теорему Коши о конечных приращениях.

В следующем примере трёхмерный определитель применяется для доказательства утверждения о четвёрке функций одной переменной.

Теорема 1. (Матричный аналог теоремы Коши) *Пусть $F(x)$ —*

[1] e-mail: armenak.gasparyan@yandex.ru

матричная функция от x, определённая и непрерывная на $[a, b] \subset R$,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{pmatrix},$$

и пусть в (a, b) *существуют все производные* $f'_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2$.

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$, *в которой выполняется равенство*

$$f'_{11}(\xi)(f_{22}(b) - f_{22}(a)) - f'_{22}(\xi)(f_{11}(b) - f_{11}(a)) = \\ = f'_{12}(\xi)(f_{21}(b) - f_{21}(a)) - f'_{21}(\xi)(f_{12}(b) - f_{12}(a)).$$

Применение многомерных определителей специального вида позволяет доказывать всё новые теоремы о конечных приращениях.

Теорема 2. (Общая теорема о конечных приращениях) *Пусть* $\left\{f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\right\}$ *— семейство функций, непрерывных на* $[a, b]$ *и дифференцируемых в* (a, b), $(i_1, \ldots, i_p = 1; 2)$, *и пусть* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ *— произвольная последовательность из нулей и нечётного количества единиц. Тогда существует такая точка* $\xi \in (a, b)$, *в которой выполняется тождество*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_p=1;2} (-1)^{\sum i_r\sigma_r} f'_{i_1\ldots i_p}(\xi)(f_{\bar{i}_1\ldots\bar{i}_p}(b) - f_{\bar{i}_1\ldots\bar{i}_p}(a)) = 0,$$

где $\bar{i}_r = 3 - i_r$.

В частности, при $p = 1$, $\sigma = (1)$ имеем формулу Коши, при $p = 2$, $\sigma = (0, 1)$ получаем теорему 1. В случае $p = 3$ существует две качественно различные альтернативы: $\sigma = (1, 1, 1)$ и $\sigma = (0, 0, 1)$. Соответствующие формулы:

$$f'_{111}(\xi)\,(f_{222}(b) - f_{222}(a)) \pm f'_{112}(\xi)\,(f_{221}(b) - f_{221}(a)) + \\ + f'_{121}(\xi)\,(f_{212}(b) - f_{212}(a)) + f'_{122}(\xi)\,(f_{211}(b) - f_{211}(a)) - \\ - f'_{211}(\xi)\,(f_{122}(b) - f_{122}(a)) \mp f'_{212}(\xi)\,(f_{121}(b) - f_{121}(a)) \mp \\ \mp f'_{221}(\xi)\,(f_{112}(b) - f_{112}(a)) \pm f'_{222}(\xi)\,(f_{111}(b) - f_{111}(a)) = 0.$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ НУЛЕЙ ДИСПЕРСИОННОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА–МАКСВЕЛЛА

П. А. Гвоздев[1]

МГТУ им. Н.Э. Баумана

При решении множества задач как в области математики, так и математической физики, ключевым моментом является определение корней исследуемой функции. Для этого используются как аналитические, так и численные методы. Однако явные формулы могут быть получены только для ограниченного класса функций. Численные методы, несмотря на свою эффективность, обладают определенными недостатками и ограничениями в применении.

Для описания поведения плазмы в рамках кинетического подхода используется система интегро-дифференциальных уравнений, состоящая из кинетического уравнения Больцмана и уравнений Максвелла для электромагнитного поля [1]. Допустив ряд упрощений, можно строить аналитическое решение, см., например, [2], в процессе построения которого возникает дисперсионная функция, от нулей которой зависит вид решения задачи.

В работах [3, 4] было получено аналитическое решение краевой задачи для системы уравнений Больцмана–Максвелла, описывающей столкновительную плазму. Корни возникающей в процессе решения дисперсионной функции обладают существенным физическим смыслом: решения, соответствующие им, демонстрируют экранирование внешнего электрического поля. Сама дисперсионная функция имеет следующий вид:

$$\Omega^{\pm}(z) = 1 - \frac{B}{A^2} z^2 - \frac{B}{A^2} z \left(z^2 - \frac{A}{B}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s-z}\, ds, \quad z \in \mathbb{H}^{\pm}, \quad (1)$$

где $A = 1 - i\,\frac{\omega}{\nu}$, $B = \frac{m_0}{\nu^2 m_2}$, а $k(s)$ — обезразмеренная функция плотности электронов, в качестве которой можно взять функцию

[1] e-mail: gvozdev.platon03@mail.ru

Ферми — Дирака или распределение Максвелла. Здесь ω — частота внешнего возмущающего поля, ν — частота столкновений в плазме, m_0 и m_2 — нулевой и второй моменты функции $k(s)$.

Функция (1) представляет из себя сумму полинома второй степени и полинома третьей степени, умноженного на интеграл Коши. Она аналитична в обеих плоскостях $\mathbb{H}^{\pm}$, включая бесконечно удаленную точку, и обладает разрывами во всех точках действительной оси. Кроме того, функция $\Omega^{\pm}(z)$ является четной, что позволяет ограничиться поиском ее корней в одной из полуплоскостей.

Используя вышеупомянутые свойства дисперсионной функции и теорию задачи Римана [5], в явном виде были получены формулы для нахождения ее нулей.

Рассматриваемая проблема является актуальной для решения задач электродинамики, нахождения дискретного спектра, исследований решений на устойчивость и ряда задач, возникающих в других областях.

Список литературы

1. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2006.
2. *Биккин Х.М., Ляпилин И.И.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. – Екатеринбург: УрО РАН, 2009.
3. Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M., *Analytic Solution of the System of Integro-Differential Equations for the Plasma Model in an External Field* // Russian Journal of Mathematical Physics, 2023. V. 30. Iss. 4. Pp. 443–452.
4. Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M., *Solution of a Boundary Value Problem for a System of Integro-Differential Equations Arising in a Modal of Plasma Physics* // Mathematical Notes, 2023, V. 114, No 5, Pp. 704–715.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.

BLOW-UP PROBLEM FOR NONLOCAL PARABOLIC EQUATION WITH ABSORPTION UNDER NONLOCAL NEUMANN BOUNDARY CONDITION

A. L. Gladkov[1]

Belarusian State University

We consider the initial boundary value problem for nonlinear nonlocal parabolic equation

$$u_t = \Delta u + au^p \int_\Omega u^q(y,t)\,dy - bu^m,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

with nonlinear nonlocal boundary condition

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{2}$$

and initial datum

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

where a, b, p, q, m, l are positive numbers, Ω is a bounded domain in R^N for $N \geqslant 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is unit outward normal on $\partial\Omega$.

We suppose that the functions $k(x,y,t)$ and $u_0(x)$ satisfy the following conditions:

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad k(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ u_0(x) \geqslant 0 \text{ in } \Omega,\ \ \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_\Omega k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy \text{ on } \partial\Omega.$$

Initial boundary value problem for parabolic equation (1) with nonlocal boundary condition

$$u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0$$

was considered in [1,2].

[1] e-mail: gladkoval@mail.ru

We prove global existence and finite time blow-up results.

Theorem 2. *Let* $\max(p+q,l) \leqslant 1$ *or* $1 < \max(p+q,l) < m$. *Then every solution of* (1)–(3) *is global.*

To formulate finite time blow-up result we suppose that

$$\inf_{\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} k(x,y,0)\, dS_x > 0. \tag{4}$$

Theorem 3. *Let either* $r+p > \max(m,1)$ *or* $l > \max(m,1)$ *and* (4) *hold. Then solutions of* (1)–(3) *blow up in finite time if initial data are large enough.*

The results of the talk have been published in [3].

This work was supported by the state program of fundamental research of Belarus under grant 1.2.02.2.

References

1. Gladkov A.L., Kavitova T.V., *On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition* // Math. Methods Appl. Sci. – 2020. – Vol. 43, № 1. – Pp. 5464–5479.
2. Gladkov A.L., Kavitova T.V., *On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition* // J. Belarus. State Univ. Math. Inform. – 2018, № 1. – Pp. 29–38.
3. Gladkov A.L., *Global existence and blow-up of solutions of nonlinear nonlocal parabolic equation with absorption under nonlinear nonlocal boundary condition* // Monatsh. Math., 2024, Vol. 203, № 2. – Pp. 357–372.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СТРУНЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ

С. А. Шабров,[1] Ж. И. Бахтина,[2] Ф. В. Голованева, Т. В. Гридяева[3]

Воронежский государственный университет

Работа посвящена анализу математической модели свободных колебаний вязкоупругой струны с внутренними особенностями, приводящими к потере гладкости у решения соответствующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial x} - a^2 \int\limits_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial x}(x,\tau)d\tau \qquad (1)$$

при условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \qquad (2)$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ — начальное отклонение и скорость соответственно, $K(t-\tau)$ — функция релаксации.

Такая модель построена в соответствии с наследственной теорией ползучести. Используется интегральное уравнение Вольтерра, связывающее ползучесть и релаксацию. Считаем, что материал струны подчиняется линейному закону ползучести. Уравнение трактуем поточечно.

Здесь $\sigma(x)$ является строго возрастающей и ограниченной на $[0,l]$ функцией, у которой множество точек разрыва $S(\sigma)$ не пусто. В каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ уравнение (1) задается следующим образом

$$\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\Delta\sigma(\xi)}(\xi,t) - a^2 \int\limits_0^t K(t-\tau) \frac{\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\Delta\sigma(\xi)}(\xi,t)d\tau,$$

где $\Delta\psi(x) = \psi(x+0) - \psi(x-0)$ — скачок функции $\psi(x)$ в точке x.

[1] e-mail: shaspoteha@mail.ru
[2] e-mail: ioanna83@mail.ru
[3] e-mail: tatianavit99@mail.ru

Решение задачи (1)–(2) мы ищем в классе E непрерывных на прямоугольнике $[0,l]\times[0,T]$ функций, каждая из которых при фиксированном x имеет непрерывные частные производные по переменной t до второго порядка включительно; при каждом t функция $u(x,t)$ абсолютно непрерывна на $[0,l]$ по переменной x, производная по пространственной переменной σ-абсолютно непрерывна на $[0,l]$.

Применения метод разделения переменных нами были получены достаточные условия абсолютно и равномерной сходимости ряда Фурье.

Отметим, что при анализе возникающих уравнение мы используем поточеный подход, предложенный Ю.В. Покорным [1].

Список литературы

1. *Покорный Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН. – 1999. – Т. 364, № 2. – С. 167–169.
2. *Бранков Г.* Основы биомеханики. – М. : Мир. – 1981. – 254 с.
3. *Панкратова Н.Д.* Деформация неоднородных анизотропных полых упругих тел с различными видами соединения слоев // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 3. – С. 45–51.
4. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. – М. : Стройиздат, 1968. – 419 с.
5. *Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
6. *Малкин А.Я., Исаев А.И.* Реология: концепции, методы, приложения. – Санкт-Петербург, 2007. – 560 с.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука. – 1966. – 709 с.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛУГРУППОВЫХ C^*-АЛГЕБР

Р. Н. Гумеров,[1] Е. В. Липачева[2]

Доклад посвящен левым приведенным полугрупповым C^*-алгебрам $C^*_\lambda(Q)$ для некоммутативных полугрупп с сокращением Q, которые являются свободными произведениями полугрупп рациональных чисел. Поскольку эти C^*-алгебры порождаются левыми регулярными представлениями полугрупп Q, то они являются объектами изучения в целом ряде работ различных авторов (см., например, обзорную статью [1] и литературу в ней).

В докладе обсуждаются свойства полугрупп Q и C^*-алгебр $C^*_\lambda(Q)$. Интересно отметить, что каждая полугруппа Q не является левоаменабельной, но при этом ее полная и левая приведенная полугрупповые C^*-алгебры изоморфны и ядерны. Дается описание алгебры $C^*_\lambda(Q)$ как универсальной C^*-алгебры, порожденной изометриями, которые удовлетворяют набору полиномиальных соотношений. При этом используется свойство универсальности C^*-алгебры $C^*_\lambda(Q)$, рассматриваемой в качестве предела индуктивной последовательности алгебр Теплица–Кунца, задаваемой конечным набором последовательностей натуральных чисел.

Доклад основан на результатах статей [2–4].

Список литературы

1. Li X., *Semigroup C^*-algebras* In: K-Theory for Group C^*-algebras and Semigroup C^*-algebras // Oberwolfach Seminars, **47**, 167–272 (Birkhäuser, Cham, 2017).
2. Gumerov R. N., Lipacheva E. V., *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz–Cuntz algebras* // J. Math. Anal. Appl,. **533**, (2024) 127991.
3. Gumerov R. N., Kuklin A.S., Lipacheva E. V., *A universal property of semigroup C^*-algebras for the free products of semigroups of rationals* // Ufa Math. J. (to appear).
4. Gumerov R. N., Lipacheva E. V., *On limit automorphisms of C^*-algebras* // Lobachevskii J. Math. (to appear).

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: Renat.Gumerov@kpfu.ru

[2] Казанский государственный энергетический университет
e-mail: elipacheva@gmail.com

СЛАБОЕ СВОЙСТВО САРДА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЁННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Н. А. Гусев[1]

Московский Физико-Технический Институт (НИУ)

Рассматривается задача Коши для уравнения неразрывности с квадратично интегрируемым бездивергентным векторным полем $\mathbf{v}\colon \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, имеющим компактный носитель. Доказывается, что для единственности ограниченного обобщённого решения необходимо и достаточно, чтобы функция тока поля $\mathbf{v}$ имела слабое свойство Сарда. Для ограниченных векторных полей такой критерий ранее был установлен Альберти, Бьянкини и Криппа. Доклад основан на совместной работе с М.В. Коробковым.

[1] e-mail: ngusev@phystech.su

NUMERICAL CALCULATION OF THE NON-CONVEXITY MEASURE OF ALPHA SET IN THE FORM OF POLYGONS AND POLYHEDRA

D. B. Davletov,[1] A. A. Ershov,[2] V. N. Ushakov[3]

Definition 1. By *metric projection* p^* of point z^* onto set M we mean the point from M closest to z^*. The set of all metric projections of point z^* onto set M we denote by $\Omega_M(z^*)$.

Definition 2. Let A be a closed set in the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$ and $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. By $H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)$ we denote the cone spanned by the set $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$. We define the function $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Also define $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

We call the set A a *α-set* with non-convexity measure $\alpha = \alpha_A$.

Since the reachable sets of control systems can be calculated using the pixel method, it is of interest to calculate their non-convexity measure α from their finite-point approximations. However, even a small change in the boundary can significantly affect the value of the non-convexity measure α for a set. The value $\alpha_M^{(R)} = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A_R} \alpha_A(z^*)$, where A_R is an open R-neighborhood of the set A, is stable to small perturbations of the boundary. At the same time, any weakly Vial convex set with constant R has a so-called Chebyshev layer of thickness R, for all points of which there is exactly one metric projection onto this set [1, Theorem 1.7.1]. In other words, $\alpha_A = \alpha_A^{(R)}$ for any such set A.

Thus, if the estimate of the parameter R of weak Vial convexity of the reachable set is known (see, e.g., [1, Theorem 3.6.2]), then the pixel (or finite-point) representation of the reachable set can be replaced by any polygon or polyhedron close to the original set in the Hausdorff metric,

[1] Ufa University of Science and Technology
e-mail: davletovdb@mail.ru

[2] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
e-mail: ale10919@yandex.ru

[3] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
e-mail: ushak@imm.uran.ru

and then the non-convexity measure $\alpha_M^{(R)}$ can be calculated for this polygon or polyhedron M by a small modification of the previously developed program [2]. The essence of the algorithm of the program [2] is that the sought value $\alpha_M = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus M} \alpha_M(z^*)$ is replaced by its approximation $\widetilde{\alpha}_M = \max\{\alpha_M(z^*) : \rho(z^*, M) = \varepsilon \cdot k,\ k = \overline{1, N}\}$, where $\rho(z^*, M) = \min\limits_{z \in M} \|z^* - x\|$ is the distance from the point z^* to the closed polygon M, $\varepsilon > 0$ is a sufficiently small number, N is a sufficiently large natural number such that the value εN is also quite large. From the upper semicontinuity of the function $\alpha_A(z)$ with respect to $z \in \mathbb{R}^2$ [3, property 1.2], and hence of the function $\alpha_A^{(R)}(z)$, it follows the convergence of the considered scheme for approximate calculation of the measure of non-convexity of weakly convex α-sets.

A modification of the algorithm [2] for measuring the non-convexity measure α of polyhedra consists in the fact that instead of crossing the boundaries of the ε-neighborhoods of the sides of the polygons, it is necessary to triangulate all the faces, and then find and analyze all the intersections of the boundaries of the ε-neighborhoods of the resulting triangles to find points that have several projections onto the polyhedron.

Definition 3. We will say that the set M has a *pseudo-Chebyshev layer* of thickness R if $\alpha_M^{(R)} = \alpha_M$.

It is obvious that the existence of a Chebyshev layer of thickness R implies the existence of a pseudo-Chebyshev layer of no lesser thickness. Non-convex polygons and polyhedra have a non-zero pseudo-Chebyshev fiber, but do not have a Chebyshev layer. The presence of a pseudo-Chebyshev layer in polygons and polyhedra makes it possible to numerically calculate the non-convexity measure α.

This research was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00424, URL: https://rscf.ru/en/project/24-21-00424/).

References

1. Ivanov G.E., *Weakly convex sets and functions: theory and applications*. – Moscow: Fizmatlit, 2006 (in Russian).
2. Ershov A.A., Ushakov A.V., *Software package for calculating the degree of non-convexity of sets on the plane in terms of alpha sets*. Registration number: 622101900156-3 Registration date October 19, 2022.
3. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., *Theorems on the separability of α-sets in Euclidean space*, Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 2017, vol. 299, suppl. 1, Pp. 231–245.

FINDING INVARIANTS AND FIRST INTEGRALS OF PROJECTIVE STRUCTURES AND GEODESIC FLOWS

M. V. Demina[1]

HSE University

Consider some connected domain D in the tx-plane. Any second-order ordinary differential equation (ODE) cubic with respect to the first derivative

$$x_{tt} = A_3(t,x)(x_t)^3 + A_2(t,x)(x_t)^2 + A_1(t,x)x_t + A_0(t,x),$$
$$A_j(x,y) : D \to R \qquad (1)$$

defines a projective structure. If this projective structure is associated to some Levi–Civita connection of the metric $ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k$, $(x^1, x^2) = (t, x)$ related to a smooth two-dimensional surface M, then the corresponding ODE (1) is called metrisable.

The geodesic curves on a surface M with the metric $ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k$ satisfy the system

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad k = 1, 2, \qquad (2)$$

where the Christoffel symbols are given by the relations

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \qquad (3)$$

We say that system (2) defines the geodesic flow of the metric ds^2. The coefficients of the related projective connection (1) are the following: $A_3 = \Gamma^1_{22}$, $A_2 = 2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}$, $A_1 = \Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12}$, and $A_0 = -\Gamma^2_{11}$. System (2) is Hamiltonian

$$\dot{x}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad H = \frac{g^{jk}p_j p_k}{2} \qquad (4)$$

with the standard Poisson bracket

$$\{F, H\} = \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x^j}\right). \qquad (5)$$

[1] e-mail: maria_dem@mail.ru

A function $J(x^1, x^2, p_1, p_2)$ is a first integral of system (4) if it satisfies the equation $\{J, H\} = 0$. For integration of system (4) we need an additional first integral that is functionally independent of the Hamiltonian. Since any solution $x(t)$ of ODE (1), where $A_3 = \Gamma^1_{22}$, $A_2 = 2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}$, $A_1 = \Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12}$, and $A_0 = -\Gamma^2_{11}$, defines a geodesic $(t, x(t))$, possibly reparameterized, any first integral $I(t, x, x_t)$ of ODE (1) gives rise to the first integral $J(t, x, p_1, p_2) = I(t, x, \{g_{11}p_2 - g_{12}p_1\}/\{g_{22}p_1 - g_{12}p_2\})$ of system (4) and the related metric. Here again the local coordinates on the surface M are denoted as (t, x), i.e. $(x^1, x^2) = (t, x)$.

The aim of the talk is to present a method of finding first integrals for ODEs of the form (1). The method is base on the Darboux theory of integrability for non-autonomous second-order ODEs. We find the system of PDEs that represents the necessary and sufficient condition for generalized rational first integrals to exist. We present some particular solutions of this system. These solutions give rise to polynomial first integrals of the related geodesic flows that are of arbitrary degree in momenta. In addition, we find non-polynomial in the first derivative invariants of projective structures. We prove that these invariants give rise to transcendental in momenta first integrals of geodesic flows. These first integrals are not generalized rational in momenta. They are expressible via special functions. In most of our examples the related metrics do not have linear in momenta first integrals. In addition, our metrics and their first integrals are parameterized by an arbitrary function of one variable.

The work reported in this talk is supported by Russian Science Foundation grant 24-11-00372,
URL: https://rscf.ru/en/project/24-11-00372/ .

NEW CONCEPT OF A MEASURE IN METRIC SPACES AND RIEMANN HYPOTHESIS

I. Sh. Jabbarov[1]

Ganja State University

In the work [1], one considers a new measure in infinitedimensional unite cube. Some curves having zero measure in the sense of product measure stand non-measurable in a new meaning. This gives a negative answer for the J.P.R. Christensen's question on Haar measure, firstly found in the work [2] of M. Csornyei. An explanation for this phenomenon is given in [1].

Consider a compact metric space $\langle G, d \rangle$. Let Ω be a family of open balls in G, and $\Pi(\Omega)$ denotes the algebra induced by subsets of this family. Suppose that in $\Pi(\Omega)$ a finite additive set function μ be given, and this set function can be uniquely continued to σ-algebra Ξ generated by the algebra Π. Denote this measure as μ. We define now a new measure by using new definition of the sets with zero measure.

Definition 1. *A subset $A \subset \Omega$ is called to be a subset of zero measure if for any $\varepsilon > 0$ there exist open balls $B_1, B_2, \ldots$ satisfying conditions:*

1) $A \subset B = B(\varepsilon) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_K$;

2) *none of these balls contains any other;*

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} < \varepsilon.$

The inner and outer measures μ_{*0} and μ_0^* now are defined by a similar way, by using of covering with open balls satisfying the condition 2) above. Since each open ball can be enclosed in some subset from σ-algebra, then we have

$$\mu_{*0}(A) \leqslant \mu_*(A) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu_0^*(A)$$

for a given subset $A \subset \Omega$.

Definition 2. The subset A we call to be μ_0 measurable, if and only

[1] e-mail: ilgar_js@rambler.ru

if there exists a subset $D \subset \Xi$ so that the symmetric difference $D \bigtriangleup A$ has a zero measure.

It is obvious that $\Pi(\Omega) \subset \Sigma \subset \Xi$.

Theorem 1. *For any subset $A \in \Xi$ following statements are satisfied:*
1) *for a real $\varepsilon > 0$ there exists a subset $A_\varepsilon \in \Sigma$ such that $A \subset A_\varepsilon$, $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \leqslant \mu(A) + \varepsilon$.*
2) *there is a sequence of subsets $A_{\varepsilon_1}, A_{\varepsilon_2}, \ldots$, with $\varepsilon_n \to 0$, such that $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\varepsilon_n} \backslash A\right) = 0$.*
3) *the relation $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\varepsilon_n} \in \Sigma$ holds.*

Theorem 2. *If the family Ω is a right then the Lebesgue extensions of σ-algebra and σ-summable algebra induced by the family Ω are coincident.*

This theorem justifies the consideration of σ-summable algebra instead of σ-algebra.

Theorem 3. *The family of open balls of the work* [1] *in the infinite dimensional unite cube is right.*

Main difference between new and product measures is given by the lemma below.

Lemma. *Let the sequence (λ_n) be an unbounded sequence of positive real numbers every finite subsequence of which is linearly independent over the field of rational numbers. Then the curve $(\{t\lambda_n\})$, $t \in [0, 1]$ is not μ_0-measurable set in $\omega = [0, 1]^\infty$.*

Therefore the curves being not noticeable by the product Lebesgue measure acquire a property like uniform distribution. As an application of new concept we get our main result.

Theorem 4. *Let $0 < r < 1/4$ be a real number. Then there exist a sequence θ_n in ω and a sequence m_n of integers that for every real t $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(s + it, \theta_n) = \zeta(s + it)$ uniformly in the disc $|s - 3/4| \leqslant r$; here*

$$F_n(s + it, \theta_n) = \prod_{p \leqslant m_n} \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \vartheta_p^n}}{p^{s+it}}\right)^{-1}; \quad \theta_n = (\theta_p^n),$$

and the product is taken over all prime numbers, and the components of θ_n are indexed by prime numbers.

Corollary 1. *The Riemann Hypothesis is true, i. e.* $\zeta(s) \neq 0$ *when* $\sigma > 1/2$.

References

1. Jabbarov I. Sh. *On a new measure on infinite dimensional unite cube*. arXiv:1208.4525v5. URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.4525
2. Marianna Csornyei. *Haar measure is not approximable by balls*. Acta universitatis sapientiae. Mathematika 01/2009; 1(1).
3. Dunford and J.T.Schwartz. *Linear operators. Part I: General theory.* M: IIL., 1962.
4. Jabbarov I. Sh. *The Riemann Hypothesis.* Arxiv:1006.0381v5., 2013.

SEMI-GLOBAL UNIFORM ASYMPTOTICS OF WAVE FIELDS WITH CUSP TYPE CAUSTICS VIA THE PEARCEY FUNCTION AND ITS DERIVATIVES

S. Yu. Dobrokhotov,[1] V. E. Nazaikinskii,[2] A. A. Tolchennikov,[3]
B. I. Suleimanov[4]

We discuss an efficient approach to constructing uniform asymptotics of integrals describing the behavior of various wave fields with cusp type caustics. The answer is semi-global, i.e., is defined on an open set containing the caustic cusp and independent of the small parameter, and is expressed via the Pearcey function and its derivative whose arguments are functions given in parametric form and determined by the corresponding Lagrangian manifold. By way of example, we consider an exact solution of the Cauchy problem for the one-dimensional nonstationary Schrodinger equation for a free particle.

The research was supported by the Russian Science Foundation (project 24-11-00213) at Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.

[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;
Moscow Institute of Physics and Technology
e-mail: s.dobrokhotov@gmail.com

[2] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;
Moscow Institute of Physics and Technology
e-mail: nazaikinskii@googlemail.com

[3] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;
Moscow Institute of Physics and Technology
e-mail: tolchennikovaa@gmail.com

[4] Institute of Mathematics of Ufa Federal Research Center RAS, Ufa
e-mail: bisul@mail.ru

О СЛАБОМ СВОЙСТВЕ САРДА

Р. В. Дрибас[1]

Московский Физико-Технический Институт (НИУ)

Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ — $C^{1,\alpha}$-гёльдерова функция. Пусть S — критическое множество f, т.е. множество точек $x \in \in [0,1]^2$, в которых $\nabla f(x) = 0$.

Если f непрерывно дифференцируема, то по теореме Сарда

$$f_{\#}(\mathbf{1}_S \mathcal{L}^2) \perp \mathcal{L}^1, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}^d$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{1}_S$ — индикатор множества S, $f_{\#}\mu$ — образ меры μ под действием функции f и $\mu \perp \nu$ означает, что меры μ и ν взаимно сингулярны.

Определение 1. Функция f обладает ослабленным свойством Сарда, если для неё выполнено (1).

Для $t \in \mathbb{R}$ обозначим $E_t := f^{-1}(t)$. Пусть E_t^* — объединение всех связных компонент E_t строго положительной длины (т.е. меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^1$). Пусть $E^* := \bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} E_t^*$.

Следующее определение было введено в [1]:

Определение 2. *Функция f обладает слабым свойством Сарда, если*

$$f_{\#}(\mathbf{1}_{S \cap E^*} \mathcal{L}^2) \perp \mathcal{L}^1. \tag{2}$$

Очевидно, что из ослабленного свойства Сарда следует слабое.

В [5] было показано, что если градиент f имеет ограниченную вариацию, то f обладает ослабленным свойством Сарда.

Кроме того, в [2] показано, что слабое свойство Сарда функции f равносильно единственности ограниченного обобщённого решения задачи Коши для уравнения неразрывности с полем $\nabla^{\perp} f$.

При дополнительном предположении, что $f \in W^{1,2}$ монотонна, в работе [6] было показано, что слабое и ослабленное свойства Сарда

[1] e-mail: dribas.rv@phystech.edu

эквивалентны. В связи с этим возникает вопрос, эквивалентны ли эти свойства в общем случае.

Теорема 1. *Если непрерывная f монотонна (т.е. для всех $t \in \mathbb{R}$ линии уровня $\{f = t\}$ связны), то свойства* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Ранее Боникатто в работе [3] был построен пример, показывающий, что эти свойства не эквивалентны в липшицевом случае. Мы показали, что это верно даже для $C^{1,\alpha}$-гёльдеровых функций.

Теорема 2. *Для любого $\alpha \in (0,1)$ существует $f \in C^{1,\alpha}([0,1])^2$ обладающая слабым свойством Сарда, но не обладающая ослабленным.*

Точность данной теоремы гарантируется теоремой 2 в [4], которая утверждает, что $C^{1,1}$-гладкие функции обладают сильным свойством Сарда, а значит, и ослабленным свойством Сарда.

Доклад основан на совместной работе с А.С. Головнёвым и Н.А. Гусевым.

Список литературы

1. Alberti G., Bianchini S., Crippa G., *Structure of level sets and Sard-type properties of Lipschitz maps* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 2013, V. XII, No 4, Pp. 863–902.
2. Alberti G., Bianchini S., Crippa G., *A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions* // J. Eur. Math. Soc., 2011, V. 16(2), Pp. 201–234.
3. Bonicatto P., *Untangling of trajectories for non-smooth vector fields and Bressan's Compactness Conjecture* // PhD Thesis, 2017.
4. Bates S.M., *Toward a precise smoothness hypothesis in Sard's theorem* // Proc. Amer. Math. Soc., 1993, V. 117, Pp. 279–283.
5. Bianchini S., Gusev N.A., *Steady Nearly Incompressible Vector Fields in Two-Dimension: Chain Rule and Renormalization* // Arch. Rational Mech. Anal., 2016, V. 222, Pp. 451–505.
6. Gusev N.A., Korobkov M.V., *The Nelson conjecture and chain rule property* // URL: https://arxiv.org/abs/2411.09338 .

ПЛОТНОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

Н. А. Дюжина[1]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Наипростейшей дробью называется функция вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Для произвольного подмножества E комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $SF(E)$ совокупность всех наипростейших дробей с полюсами на E:

$$SF(E) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k} : \quad a_k \in E, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Основная задача теории приближения наипростейшими дробями — это задача о плотности множества $SF(E)$ в пространствах X комплексных функций при различном выборе E и X. Аппроксимация наипростейшими дробями имеет естественную физическую интерпретацию. Функция напряженности плоского электростатического поля, создаваемого одинаковыми одноименными зарядами, расположенными в точках a_k, комплексно сопряжена наипростейшей дроби (1). Поэтому задача состоит в приближении полем, создаваемым одинаковыми одноименными зарядами, расположенными в множестве E, произвольного плоского электростатического поля с напряженностью, принадлежащей пространству X, по норме этого пространства. Общее представление о теории аппроксимации наипростейшими дробями можно получить по обзору [1], содержащему в частности нетривиальные количественные результаты о скорости приближения.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Функция F, аналитическая в полуплоскости

[1] e-mail: natasha17954@yandex.ru

$\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, принадлежит пространству $H_p(\Pi_+)$, если

$$\|F\|^p_{H_p(\Pi_+)} = \sup_{y>0} \int\limits_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^p dx < \infty.$$

Функции из пространства $H_p(\Pi_+)$ можно доопределить почти всюду на $\mathbb{R}$, причем $\|F\|_{H_p(\Pi_+)} = \|F\|_{L_p(\mathbb{R})}$.

Функция F, аналитическая в Π_+, принадлежит пространству $AC_0(\Pi_+)$ с нормой $\|F\|_{AC_0} = \max\limits_{z\in\overline{\Pi}_+} |F(z)| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |F(x)|$, если F непрерывна в $\overline{\Pi}_+$, а также

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in\overline{\Pi}_+} F(z) = 0.$$

Наипростейшие дроби $SF(\Pi_-)$ с полюсами в нижней полуплоскости не плотны во всех пространствах $H_p(\Pi_+)$, $1 < p < \infty$, и в $AC_0(\Pi_+)$ [2]. Следующие утверждения отвечают на вопрос о плотности производных наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости в пространствах $H_p(\Pi_+)$ и $AC_0(\Pi_+)$.

Теорема 1. *Множество*

$$SF^2(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2} : \operatorname{Im} a_k < 0, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

плотно во всех пространствах $H_p(\Pi_+)$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\Pi_+)$.

Теорема 2. *Пусть $l \geqslant 3$ — натуральное число. Тогда множество*

$$SF^l(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^l} : \operatorname{Im} a_k < 0, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

плотно во всех пространствах $H_p(\Pi_+)$ при $1 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\Pi_+)$.

Список литературы

1. *В. И. Данченко, М. А. Комаров, П. В. Чунаев.* Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. – **12** (2018). – сс. 9–49.
2. *Н. А. Дюжина.* Плотность производных наипростейших дробей в пространствах Харди в полуплоскости // Матем. заметки. – **109**:1 (2021). – сс. 57–66.

MULTIVALUED FUNCTIONS AND THE NONWANDERING SET OF SOME SKEW PRODUCTS ON MULTIDIMENSIONAL CELLS

L. S. Efremova[1]

Nizhny Novgorod State University;
Moscow Institute of Physics and Technology

We give the complete description of the nonwandering set of continuous skew products on multidimensional cells under the additional condition that the set of periodic points of these maps is closed.

Descriptions of the nonwandering set is based on the use of the concepts of the dynamical multifunctions such as auxiliary and extended auxiliary multifunctions. Using these multifunctions, we introduce the concept of the Ω-blowup (in C^0-norm) in the family of fiber maps of a skew product, study the influence of such blowup on the structure of the nonwandering set, and obtain the formulas for the nonwandering set of maps under consideration (see [1], [2]).

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant № 24-21-00242.

References

1. Efremova, L. S., Shalagin, M. A., *On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells*, // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics, 2024, vol. 32, no 6, pp. 796–815.
2. Efremova, L. S., Shalagin, M. A., *On trajectories asymptotic behaviour of skew products with a closed set of periodic points*, // Mathematics and Theoretical Computer Science, 2025, 3 (to appear), (in Russian).

[1] e-mail: lefunn@gmail.com

МОДЕЛЬНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Зайцева[1]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Рассмотрим в области $D = \{(x,t)\colon x \in (-\infty,+\infty),\ t \in (0,T)\}$, где $T > 0$ — заданное действительное число, два гиперболических уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\,u(x-h,t) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{2}$$

Здесь a, b, h — заданные не равные нулю действительные числа.

Уравнение (1) содержит суперпозицию дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси, а уравнение (2) — сумму указанных операторов.

Для каждого уравнения исследован вопрос классической разрешимости модельной задачи с неполными начальными данными на одной границе области, а именно, задачи с одним условием

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (-\infty,+\infty).$$

Решения обеих задач построены в явном виде — в виде свёртки фундаментального решения уравнений (найденного с помощью классической операционной схемы) с произвольной интегрируемой на всей числовой оси функцией. При этом, для существования классического решения задачи для уравнения (2) должно выполняться условие положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в уравнении (в случае уравнения (1) дополнительного условия не требуется).

[1] e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

С подробными результатами можно ознакомиться, например, в работе [1].

Список литературы

1. *Зайцева Н.В.* Модельная задача в полосе для гиперболического дифференциально-разностного уравнения // Дифференц. уравнения. – 2025. – т. 61, № 1. – сс. 5–12.

MODULUS OF CONVEXITY AND LINDENSTRAUSS FORMULA

G. E. Ivanov[1]

Moscow Institute of Physics and Technology

The concept of uniformly convex Banach space, which was introduced by J. Clarkson in 1936, plays an important role in functional analysis, approximation theory, and other areas of mathematics. In 1966, B. T. Polyak introduced the concept of uniformly convex set, which generalizes the concept of a uniformly convex space. A normed space is uniformly convex if and only if its unit ball is a uniformly convex set. On the other hand, a uniformly convex set may not be centrally symmetric and, therefore, may not be a ball for some norm. The condition of uniform convexity of a set was used by Polyak and Levitin to analyze the rate of convergence of numerical optimization methods, in particular, of the gradient projection method and the conditional gradient method (the Frank–Wolfe method).

A quantitative characteristic of the convexity of a set is its modulus of convexity, just as the modulus of convexity of a normed space characterizes the degree of convexity of this space. Some of the most important results in the theory of uniformly convex and uniformly smooth spaces are the Lindenstrauss formula, which expresses the modulus of smoothness of a normed space using the modulus of convexity of its dual space, and M. Day's theorem on the equivalence of uniform convexity of a space and uniform smoothness of its dual space. In this report, these results are transferred from balls to uniformly convex sets.

References

1. G.E. Ivanov, *Uniformly convex sets in Banach spaces*, // Mat. Zametki, 117:2 (2025), Pp. 238–256.

[1] e-mail: g.e.ivanov@mail.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ В ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВОЙ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

П. Н. Иваньшин[1]

КНИТУ-КАИ

Мы представляем способ построения приближенного конформного отображения единичного круга на область с угловыми точками на ее границе [1] и его модификацию для решения задачи Коши.

Для решения задачи об отображении единичного круга на область методом перепараметризации границы рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода относительно $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} q(\tau)\,\frac{\partial(\arg(z(\tau)-z(t)))}{\partial\tau}\,d\tau + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|z(\tau)|\,\frac{\partial[\ln|z(\tau)-z(t)|]}{\partial\tau}\,d\tau. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для любой области D с границей — простой гладкой замкнутой кривой L, заданной полиномом Фурье, можно с любой точностью построить функцию, отображающую D на единичный круг при помощи решения интегрального уравнения, сведенного к конечной системе линейных уравнений.*

Стандартный метод итераций решения интегрального уравнения [2] для областей, ограниченных кривыми с угловыми точками, не работает [3].

В окрестности угловой точки функция θ немонотонна. Необходима локальная перепараметризация как $\theta(t)$, так и вещественной части решения в виде гармонически сопряженной функции.

Рассмотрим теперь задачу Коши для области с угловыми точками на границе. Основной вопрос здесь — построить решение в слу-

[1] e-mail: pivanshi@yandex.ru

чае соединения двух кривых в угловой точке, поскольку в остальных случаях подход [1] допускает модификацию.

Пусть дана замкнутая кривая $\gamma = \Gamma \bigcup \Gamma'$. Пусть даны значения функции $f = u + \mathrm{i}v$ на Γ. Необходимо продолжить функцию f внутрь области, ограниченной γ.

Восстанавливаем значения аналитической функции $u + \mathrm{i}v$ в точках кривой Γ' согласно следующему утверждению:

Теорема 2. *Пусть D — односвязная область с гладкой границей $\Gamma \cup \Gamma'$, где $\Gamma = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S\}$, s — натуральный параметр Γ, $\Gamma' = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S'\}$. Пусть данные, определяемые формулой (1) задачи Коши, заданы в точках Γ. Пусть $\phi(s)$, $s \in S$, класса Гельдера и $\psi(s)$, $s \in S$, непрерывны. Тогда эта задача Коши разрешима, если и только если известная функция $\phi(s) + \mathrm{i}\int\limits_0^s \psi(t)dt$, $s \in S$, удовлетворяет соотношению*

$$\phi(s) + \mathrm{i}\int\limits_S \psi(t)dt = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^l \frac{\left(\phi(t) + \mathrm{i}\int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau\right)z'(t)}{z(t) - z(s)}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_l^T \frac{(\tilde{\phi}(t) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(t))z'(t)}{z(t) - z(s)}dt, \ s \in S,$$

где $\tilde{\phi}(s) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(s)$, $s \in [l, T]$, — решение сингулярного интегрального уравнения

$$\tilde{\phi}(s) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(s) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_{S'} \frac{(\tilde{\phi}(\tau) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(\tau))r'(\tau)}{r(\tau) - r(s)}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_S \frac{\left(\phi(t) + \mathrm{i}\int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau\right)z'(t)}{z(t) - z(s)}dt, \ s \in S'.$$

Решение разрешимой задачи Коши имеет вид

$$h(x,y) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_0^l \frac{\left(\phi(t) + \mathrm{i}\int\limits_0^l \psi(\tau)d\tau\right)z'(t)}{z(t)-x-\mathrm{i}y}dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_l^T \frac{(\tilde{\phi}(t)+\mathrm{i}\tilde{\chi}(t))z'(t)}{z(t)-x-\mathrm{i}y}dt\right].$$

Слагаемое с действительной частью $dz'_\tau(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$ для неизвестных функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$ имеет дело с кривой ν, отвечающей за абсолютное значение γ. Кривизна этой кривой ограничена снизу. Действительно, рассмотрим формулу $\frac{\det(\nu', \nu'')}{\|\nu'\|^3}$. Тогда, поскольку разбиение $[0, 2\pi]$ конечно, знаменатель не меньше $K\delta$, здесь δ — минимальный интервал разбиения. Знаменатель кривизны ограничен сверху, поскольку $[0, 2\pi]$ — компактное множество. Следовательно, опять требуется модификация уже уравнений системы в окрестности угловой точки.

Список литературы

1. P.N. Ivanshin, E.A. Shirokova, *The Approximate Conformal Mapping of a Disk onto Domain with an Acute Angle*, // Int. J. Appl. Comput. Math., Vol. 6, No. 54, URL: https://doi.org/10.1007/s40819-023-01529-z (2023).
2. P.K. Kythe, *Handbook of Conformal Mappings and Applications* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC.
URL: https://doi.org/10.1201/9781315180236 (2019).
3. Eun-Jee Song, *A study on stabilization for numerical conformal mapping*, // J. Appl. Math. & Computing, Vol. 20, No. 1–2, Pp. 611–621, (2006).

ОДНОТИПНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА И ВОЗМОЖНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ В ДИНАМИКЕ

И. В. Изместьев[1]

Челябинский государственный университет

В докладе рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = -a(t,\tau)u + b(t)v, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad \|v\| \leqslant 1, \quad t \leqslant p, \quad z \in R^n.$$

Здесь τ — заранее неизвестный момент изменения динамики первого игрока (например, в результате поломки [2]):

$$a(t,\tau) = \begin{cases} a_1(t) & \text{при } t < \tau, \\ a_2(t) & \text{при } \tau \leqslant t; \end{cases}$$

функции $b(t) \geqslant 0$, $a_1(t) \geqslant 0$ и $a_2(t) \geqslant 0$ являются суммируемыми на каждом отрезке из полуоси $(-\infty, p]$.

Пусть заданы числа $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$. Цель первого игрока, который выбирает управление u, заключается в осуществлении включения

$$z(p) \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \tag{1}$$

В докладе множество $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ названо кольцом [3]. Цель второго игрока, который выбирает управление v, противоположна.

Допустимыми управлениями игроков являются произвольные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\|u(t,z)\| \leqslant 1, \quad \|v(t,z)\| \leqslant 1, \quad t \leqslant p, \quad z \in R^n.$$

Рассмотрим случай, когда момент изменения динамики τ первого игрока выбирает второй игрок.

Зафиксируем начальное состояние $t_0 < p$, $z(t_0) \in R^n$. Движение $z(t)$, порожденное допустимыми управлениями u и v, с заданным начальным условием $z(t_0)$ определим с помощью ломаных Эйлера [1].

[1] e-mail: j748e8@gmail.com

Введем следующие обозначения при $t \leqslant p$:

$$f(t) = \min_{t\leqslant\tau\leqslant p} \int\limits_t^p (a(r,\tau) - b(r))\, dr;$$

$$f_2(t) = \varepsilon_2 + f(t), \quad f_1(t) = \begin{cases} \varepsilon_1 - f(t) & \text{при } t(\varepsilon_1) \leqslant t \leqslant p, \\ 0 & \text{при } t \leqslant t(\varepsilon_1), \end{cases}$$

где $t(\varepsilon_1) = -\infty$, если $\varepsilon_1 > f(t)$ при всех $t \leqslant p$, а иначе

$$t(\varepsilon_1) = \inf\{t \leqslant p : \varepsilon_1 > f(\theta) \quad \text{при всех} \quad t < \theta \leqslant p\}.$$

Для рассматриваемой задачи было построено множество разрешимости первого игрока при $t \leqslant p$:

$$W(t) = \begin{cases} S(f_1(t), f_2(t)) & \text{при } \min\limits_{t\leqslant\theta\leqslant p} (f_2(\theta) - f_1(\theta)) \geqslant 0, \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть начальное состояние* $t_0 < p$, $z(t_0) \in R^n$ *таково, что выполнено включение* $z(t_0) \in W(t_0)$. *Тогда существует допустимое управление первого игрока, которое гарантирует выполнение включения* (1) *при любых допустимых управлениях второго игрока и для любого момента изменения динамики* $\tau \in [t_0, p]$.

Теорема 2. *Пусть начальное состояние* $t_0 < p$, $z(t_0) \in R^n$ *таково, что* $z(t_0) \notin W(t_0)$, *тогда существует допустимое управление второго игрока и момент изменения динамики* $\tau \in [t_0, p]$, *гарантирующие невыполнение* (1) *при любом допустимом управлении первого игрока.*

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974.
2. *Никольский М.С., Пэн Чж.* Дифференциальная игра преследования с нарушением в динамике // Дифференциальные уравнения, 1994. – Т. 30, № 11. – С. 1923–1927.
3. *Ухоботов В.И., Изместьев И.В.* Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца // Динамика систем и процессы управления: сб. трудов Международной конф., посвящ. 90–летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Екатеринбург, 15–20 сентября 2014. Екатеринбург: – изд–во УМЦ УПИ. – 2015. – С. 325–332.

ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. В. Кабанко[1]

Курский государственный университет

Эта работа посвящена изучению обратимости операторов, действующих в гильбертовой паре. Мы рассматриваем некоторые общие условия обратимости операторов, действующих в регулярной гильбертовой паре, которая, в свою очередь, представляется в виде прямой суммы векторзначных последователдьностей.

Определение 1. (см. [1]**)** Представлением операторной алгебры $\mathcal{A}$ называется пара (H_θ, θ), где H_θ некоторое гильбертово пространство, называемое пространством представления, а θ — гомоморфизм вида

$$\theta : \mathcal{A} \to B(H_\theta).$$

Представление называется точным если гомоморфизм θ инъективен.

Определение 2. (см. [1]) Представление (H_θ, θ) операторной алгебры $\mathcal{A}$ называется топологически неприводимым (или неприводимо действует в H_θ) если инвариантными относительно $\mathcal{A}$ подпространствами пространства H_θ являются только тривиальные подпространства, т.е. 0 и H_θ.

Определение 3. (см. [2]) Два банаховых пространства X_0 и X_1 образуют банахову пару, если они непрерывно вложены в некоторое отделимое топологическое пространство $\mathcal{X}$. Банахова пара $\{X_0, X_1\}$ называется регулярной, если пересечение пространств $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в пространствах X_0 и X_1.

Будем рассматривать гильбертову пару

$$\overline{H} = \left\{ l_2(2^{\frac{n}{2}} G_n), l_2(2^{-\frac{n}{2}} G_n) \right\}.$$

[1] e-mail: kabankom@gmail.com

Эта пара изоморфна паре $\{l_2(G_n), l_2(2^{-n}G_n)\}$ (см. [3]). Будем рассматривать условия обратимости линейных ограниченных операторов, которые действуют в гильбертовой паре $\overline{H} = \{l_2(2^{\frac{n}{2}}G_n), l_2(2^{-\frac{n}{2}}G_n)\}$. Любой такой оператор можно представить в виде

$$A = D + \sum_{k \neq 0} A_k, \tag{1}$$

где D — оператор, соответствующий главной диагонали матричного представления оператора A, а операторы A_k соответсвуют диагоналям, которые «параллельны» главной (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть оператор A действует в гильбертовой паре $\overline{H}$ и имеет представление* (1). *Будем полагать, что диагональный оператор D обратим в пространстве $l_2(G_n)$ и выполняется неравенство*

$$\|D^{-1}\|_{l_2(G_n)} < \frac{\sqrt{2}-1}{2\|A\|_{B(\overline{H})}}.$$

Тогда оператор A также будет обратим в пространстве $l_2(G_n)$.

Список литературы

1. Murphy G.J., *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, San Diego (1990). URL: https://www.elsevier.com/books/c-algebras-and-operatortheory/murphy/978-0-08-092496-0 .
2. Bergh J., Löfström J., *Interpolation Spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1976).
3. Ovchinnikov V.I., *Operator ideals and interpolation in Hilbert couples.* // Вестник ВГУ. Физика. Математика. – 2014. – т. 2. – сс. 142–161. URL: http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2014/02/2014-02-13.pdf
4. *Кабанко М.В.* Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре. – Труды математического факультета ВГУ. – 2001. – т. 6. – сс. 54–60.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. В. Калинин,[1] А. А. Тюхтина, И. Г. Милешин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

При моделировании квазистационарных электромагнитных полей в зависимости от свойств среды и характерных пространственно-временных масштабов целесообразно использовать различные приближения, иерархия которых обсуждается в работах [1–4]. При этом могут возникать неклассические постановки начально-краевых задач для систем уравнений, не разрешенных относительно производных по времени с естественными с физической точки зрения неклассическими нелокальными граничными условиями, требующими выполнения условий согласования граничных данных и источников [5–8]. Математическая теория задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно производных по времени (уравнений соболевского типа) была развита, в частности, в работах [9–13].

В настоящей работе рассматриваются различные постановки краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в основных квазистационарных приближениях. Обсуждаются вопросы численной реализации алгоритмов решения поставленных задач. Проводится сравнительный анализ различных моделей для исследования задач атмосферного электричества [14, 15].

Список литературы

1. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. Larsson J. Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 2007. V. 75. N 3. P. 230–239.
3. Kruger S.E., *The three quasistatic limits of the Maxwell equations //* arXiv:1909.11264, 2019.

[1] e-mail: avk@mm.unn.ru

4. Kalinin A.V., Tyukhtina A.A., *Hierarchy of models of quasi-stationary electromagnetic fields* // MMST 2020, Revised Selected Papers. CCIS, v. 1413. Springer, 2021. Pp. 77–92.
5. Kalinin A.V., Slyunyaev N.N., *Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit* // J. Math. Anal. Appl., 2017, Vol. 450. No. 1. Pp. 112–136.
6. *Калинин А.В., Тюхтина А.А.* Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2020. – Т.60. N 8. – С. 121–134.
7. *Калинин А.В., Тюхтина А.А.* Некоторые математические задачи атмосферного электричества // Итоги науки и техники. Совр. мат. прил., 2022. – Т. 207. – С. 48–60.
8. Kalinin A.V., Tyukhtina A.A., Mileshin I.G., *Justification and implementation of the Galerkin method for solving non-classical mathematical problems of the atmospheric electricity theory* // MMST 2024, Revised Selected Papers. CCIS. V. 2363. Springer, 2025.
9. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче для системы уравнений в частных производных // Доклады АН СССР, 1951. – Т. 81, № 6. – С. 1007–1009.
10. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954. – Т. 18, выпуск 1. С. 3–50.
11. Showalter R.E., *Local regularity of solutions of Sobolev–Galpern differential equations* // Pacif. J. Math., 1970. V. 34, N 3. Pp. 781–787.
12. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998.
13. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
14. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физических наук, 2010. – Т. 180, № 5. – С. 527–534.
15. *Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А., Жидков А.А.* Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2014. – Т. 50, № 3. – С. 314–322.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

А. В. Калинин,[1] А. А. Тюхтина, А. А. Золотницин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Интегральные представления функций являются главным инструментом теории вложения пространств дифференцируемых функций, основы которой были заложены в работах С.Л. Соболева [1, 2]. Существенное развитие теория представлений функций получила в работах С.М. Никольского, В.П. Ильина, О.В. Бесова [3], Ю.Г. Решетняка [4, 5], В.И. Буренкова [6]. В частности, в работах [4, 5] рассматриваются интегральные представления для функций и вектор-функций через некоторые дифференциальные операторы, на основе которых доказываются оценки, известные в литературе под названием неравенств Корна [7].

В задачах гидродинамики и электромагнитной теории важную роль играют оценки векторных полей, связывающие их L_p-нормы с L_p-нормами дифференциальных операций векторного анализа [8–10]. При изучении электромагнитных полей в неоднородных средах с разрывными коэффициентами, характеризующими свойства среды, непосредственное использование этих результатов невозможно, и для решения этих вопросов в работах [11, 12] на основании специальных представлений векторных функций были получены соответствующие оценки для их скалярных произведений. С использованием этих оценок были исследованы вопросы корректности различных краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах.

В настоящей работе изучаются свойства операторов представлений, предложенных в [11–13] для внутренних и внешних областей. Приводятся новые классы оценок скалярных произведений векторных полей и обсуждается их применение в стационарных и квазистационарных задачах электромагнитной теории в неоднородных средах.

[1] e-mail: avk@mm.unn.ru

Список литературы

1. *Соболев С.Л.* Об одной теореме функционального анализа // Мат. сборник, 1938. – Т. 4. № 3. С. 471–497.
2. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
3. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975.
4. *Решетняк Ю.Г.* Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн., 1971. – Т. 12, № 2. – С. 420–432.
5. *Решетняк Ю.Г.* Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журн., 1980. – Т. 21, № 6. – С. 108–116.
6. *Буренков В.И.* Интегральные представления С.Л. Соболева и формула Тейлора // Труды МИАН СССР, 1973. – Т. 131. – С. 210–225.
7. *Решетняк Ю.Г.* Об интегральных представлениях дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения с частными производными. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 173–187.
8. *Быховский Э.Б., Смирнов Н.В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Труды МИАН СССР, 1960. – Т. 59. – С. 5–36.
9. *Вейль Г.* Метод ортогональной проекции в теории потенциала // Математика. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1984.
10. Girault V., Raviart P., *Finite element methods for Navier–Stokes equations*. N.Y.: Springer-Verlag, 1986.
11. *Калинин А.В., Калинкина А.А.* Lp-оценки векторных полей // Изв. вузов. Математика, 2004. – № 3. – С. 26–35.
12. Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. *Lp-estimates for scalar products of vector fields and their application for electromagnetic theory problems* // Math. Meth. App. Sciences, 2018. V. 41, No 18, Pp. 9283–9292.
13. *Калинин А.В., Молодкина В.Е.* Некоторые представления векторных полей во внешних областях // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014. – № 3–1. – С. 94–98.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СЛАБОГО ЭКСТРЕМУМА ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

К. И. Казакевич,[1] С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

В работах [1, 2] изучался функционал

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\ell \frac{pu''^2_{x\mu}}{2}\,d\mu + \int\limits_0^\ell \frac{ru'^2_x}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{u^2}{2}\,dQ + \int\limits_0^\ell u\,dF,$$

который может быть рассмотрен как функционал полной энергии системы, состоящей из растянутых стержней, соединенных шарнирно. Как и в упомянутых работах, мы считаем его заданным на множестве E — абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых μ-абсолютно непрерывна, а вторая квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; $u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$.

В [1, 2] было получено необходимое условие экстремума функционала: если $u_0(x)$ дает минимум $\Phi(u)$, то существует строго возрастающая функция $\sigma(x)$, такая что $u_0(x)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В [2, 3] задача подробно изучена: доказана разрешимость, построена функция Грина, исследован спектр.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*

1. x, $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ *—* σ*-абсолютно непрерывны;*
2. *функция* $u_0(x)$ *является решением краевой задачи* (1)*;*
3. $p(x) > (\mu(\ell)-\mu(0))\left(\int\limits_0^\ell r_+(x)\,dx\right) + \ell^2\cdot\int\limits_0^\ell q_+(x)\,d\sigma\cdot(\mu(\ell)-\mu(0)).$

[1] e-mail: klimchik26@gmail.com

Тогда, функция $u_0(x)$ *дает слабый минимум функционалу* $\Phi(u)$ *на множестве E.*

Отметим, что при анализе возникающих уравнение мы используем поточеный подход, предложенный Ю.В. Покорным [1].

Список литературы

1. *Покорный, Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН, 1999. – Т. 364, № 2. – С. 167–169.
2. *Шабров С.А.* О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса // Изв. Сарат. ун-та, 2012. – Т. 12, № 1. – С. 52–55.
3. *Шабров С.А.* Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере. Дисс. докт. физ.-мат. наук. – ВГУ, 2017. – 412 с.
4. *Шабров С.А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями // Вестн. ВГУ. Сер. Физика, математика, 2013. – № 1. – С. 232–250.

ON THE ASYMPTOTIC AND CONTINUOUS ORLICZ COHOMOLOGY OF LOCALLY COMPACT GROUPS

Ya. A. Kopylov[1]

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

Asymptotic L^p-cohomology was introduced by Pansu in [1]. It is constructed on a metric measure space with bounded geometry. Pansu proved that asymptotic L^p-cohomology is a quasi-isometry invariant. Recently, Bourdon and Rémy showed [2] that if G is a locally compact second countable topological group equipped with a left-invariant proper metric then its asymptotic and continuous L_p-cohomologies are isomorphic. We consider the Orlicz space analogs of these cohomologies and obtain the Orlicz versions of the above-mentioned results.

This is a joint work with Emiliano Sequeira (Montevideo).

The work of Ya. Kopylov was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0006).

References

1. Pansu P., *Cohomologie Lp: invariance sous quasiisometries*, Preprint (1995); URL: https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ pierre.pansu/qi04.pdf
2. Bourdon M., Rémy B., *Quasi-isometric invariance of continuous group L^p-cohomology, and first applications to vanishings*, Ann. Henri Lebesgue, V. 3 (2020), p. 1291–1326. DOI: 10.5802/ahl.61 .

[1] e-mail: yakop@math.nsc.ru

GEOMETRY OF THE NONCOMMUTATIVE AND NONASSOCIATIVE ORLICZ SPACES, AND CONTINUITY OF THE VAĬNBERG–BRÈGMAN PROJECTIONS

R.-P. Kostecki[1]

Research Center for Quantum Information,
Institute of Physics, Slovak Academy of Sciences

We present two collections of results (on geometry of the noncommutative and nonassociative Orlicz spaces, and on continuity of the Vaĭnberg–Brègman projections) that are of a separate interest, yet they also provide a nontrivial mutual application. For each of these settings we consider a generalising point of view (geometry of the noncommutative and nonassociative rearrangement invariant spaces and, respectively, continuity of the extended Vaĭnberg–Brègman projections), and provide some results at the new place of their intersection (based on the Lozanovskiĭ–Gillespie factorisation map).

On one side, we obtain characterisations of strict convexity, local uniform convexity, uniform convexity, Radon–Riesz–Shmul'yan property, Gateaux differentiability, uniform Fréchet differentiability, and reflexivity of noncommutative Orlicz spaces with p-Amemiya norm, $p \in [1, \infty]$, over type II_1, type II_∞, and separable factor type I_∞ W^*-algebras. We also obtain sufficient conditions for q-uniform convexity and r-uniform Fréchet differentiability, $1 < r \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, of these spaces, as well as of the nonassociative Orlicz spaces with the Morse–Transue–Nakano (i.e. ∞-Amemiya) norm over type II_1 JBW-algebras (it is the first new result on the geometry of nonassociative Orlicz spaces since their introduction by Tadzhibaev in 1985–1986). We also prove 2-uniform convexity of nonassociative L_p spaces, $1 < p \leqslant 2$, over semifinite JBW-algebras.

On the other side, we determine the continuity properties of the (left and right) Vaĭnberg–Brègman projections onto convex closed subsets $C \subseteq X$, dependently on the geometry of the underlying Banach space $(X, \|\cdot\|_X)$. The Vaĭnberg–Brègman projection (parametrised by the Gateaux differentiable convex functions Ψ) provides a generalisation

[1] e-mail: kostecki@fuw.edu.pl

of the Hilbert space metric projection to the arbitrary reflexive Banach spaces, and is better behaved than the metric projection over these spaces (e.g., it satisfies the generalised pythagorean inequality, and is quasi-nonexpansive). We focus on the special family of the (left and right) Vaĭnberg–Brègman projections (i.e. $x \mapsto \arg\inf_{y\in C} D_{\Psi_\varphi}(y,x)$ and $x \mapsto \arg\inf_{y\in C} D_{\Psi_\varphi}(x,y)$, where $D_{\Psi_\varphi}(x,y) := \Psi_\varphi(x)-\Psi_\varphi(y)-(j_\varphi(y))(x-y)$, $\Psi(x) = \Psi_\varphi(x) := \int_0^{\|x\|_X} \mathrm{d}t\,\varphi(t)$, and $j_\varphi(x) = \partial\Psi_\varphi(x)$ is a duality map from $(X,\|\cdot\|_X)$ to its Banach dual space, where ∂ denotes a subdifferential, and $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ is strictly increasing, continuous, $\varphi(0)=0$, and $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$). For this family, we determine its key properties (i.e. characterisation by means of the generalised pythagorean inequality, as well as the sufficient conditions for the norm-to-norm, uniform, and Lipschitz–Hölder continuity) in terms of the geometric properties of the underlying Banach space.

An intersection of the above two directions of research provides a range of concrete models for convex analysis (and, as an application, statistical inference) on the noncommutative and nonassociative reflexive rearrangement invariant spaces. In particular, the key properties of the corresponding Vaĭnberg–Brègman projections are completely determined by the choice of two positive real convex functions (φ and an Orlicz function), allowing for detailed quantitative computations.

Finally, we introduce the extended Vaĭnberg–Brègman relative entropies and projections over the (nonreflexive) Banach preduals of W^*- and JBW-algebras, using a suitable (e.g., Lozanovskiĭ–Gillespie or Kaczmarz) homeomorphism of a given predual (or its subset, e.g., the unit ball or the state space) into the corresponding reflexive rearrangement invariant space. We exemplify this construction by deriving detailed results on the uniform and Lipschitz–Hölder continuity of the (left and right) extended Vaĭnberg–Brègman projections:

1) over unit balls of preduals of any W^*-algebras (resp., semifinite JBW-algebras), induced from noncommutative (resp., nonassociative) L_p spaces ($p \in]1,\infty[$) via the noncommutative (resp., nonassociative) Mazur map;
2) over unit spheres of commutative L_1 spaces, induced from q-uniformly

convex and r-uniformly Fréchet differentiable Banach function spaces (resp., Orlicz function spaces) via the Lozanovskiĭ–Gillespie (resp., Kaczmarz) map;

3) (only uniform continuity) over state spaces of type I_n W^*-algebras, induced via the noncommutative Lozanovskiĭ–Gillespie map from r-uniformly convex and q-uniformly Fréchet differentiable rearrangement invariant spaces over these algebras.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОГРАНИЦАМИ И ВОЗВРАЩЕНИЕ ОРБИТ

А. В. Кочергин[1]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность длины 1, $T\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $Tx = x + \rho \pmod 1$ — поворот окружности на иррациональный угол $2\pi\rho$. Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ непрерывна на окружности, $\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx = 0$. Отображение $T_{\rho,f}\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{T}\times\mathbb{R}$, $T_{\rho,f}(x,y) = (T_\rho x, y + f(x))$ называется цилиндрическим отображением, построенным по повороту T и функции f.

Функция $u(x)$ называется *кограницей* над T в классе непрерывных функций, если уравнение $U(Tx) - U(x) = u(x)$ имеет непрерывное решение $U(x)$.

Рассматриваются суммы Биркгофа

$$f^r(x) = \begin{cases} f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{r-1}x) & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r = 0, \\ -f^{|r|}(T^r x) & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Известно, что в случае, когда f абсолютно непрерывна или является кограницей, а q_n — последовательность знаменателей подходящих к ρ дробей, $f^{q_n}(x) \to 0$ и $T^{q_n}x \to x$ при $n \to \infty$ равномерно для всех x, что означает одновременное возвращение орбит цилиндрического отображения $T_{\rho,f}$.

С другой стороны, ещё А. Пуанкаре [1] построил пример непрерывной функции и иррационального поворота окружности, при которых значения $f^r(x_0)$ сумм Биркгофа в некоторой точке x_0 стремятся к бесконечности при $r \to \infty$, что означает убегание в бесконечность орбит $T_{\rho,f}(x_0, y)$. Позднее были построены разнообразные примеры с убегающими орбитами для любого иррационального угла, причём убегание в бесконечность может быть для массивного множества точек и с любой наперёд заданной скоростью, которую допускает эргодическая теорема.

[1] e-mail: a.kochergin@gmail.com

Кроме того, были построены примеры с убегающими орбитами (но уже без оценки скорости убегания) цилиндрических отображений с гёльдеровыми функциями f, но в этих примерах налагаются довольно жёсткие ограничения сверху на скорость роста знаменателей подходящих к ρ дробей (см., например [2]).

Для хорошо аппроксимируемых углов не удавалось построить примеры гёльдеровых цилиндрических отображений с убегающими орбитами. Но и ожидать одновременного возвращения орбит, вообще говоря, не приходится, поскольку существует пример перемешивающего специального потока, построенного по повороту окружности на угол, не имеющий ограничений сверху на скорость аппроксимации рациональными дробями, и функции $1 + f$, удовлетворяющей условию Гёльдера [3]. А это означает стремление амплитуды сумм Биркгофа f^r к бесконечности при $r \to \infty$.

В представляемой работе с помощью приближений функции f кограницами некоторого специального вида удалось установить, в определённом смысле, естественность конструкции и некоторых ограничений на угол поворота в примере из [2].

Теорема. *Если f удовлетворяет условию Гёльдера, то при достаточно быстром росте знаменателей подходящих к ρ дробей для любой точки $x \in \mathbb{T}$ последовательность сумм Биркгофа $f^r(x)$ не может стремиться к бесконечности при $r \to \infty$.*

Это в частности означает, что цилиндрическое отображение, построенное по соответствующим повороту ρ и функции f, не имеет дискретных орбит и отсюда может быть получена теорема о возвращении, причём *возвращение может быть не одновременным*.

Список литературы

1. H.Poincaré, *Sur les series trigonometriques*, Comptes rendues, **101** (1885), No 2, Pp. 1131–1134.
2. *А.В. Кочергин*. Новые примеры транзитивных цилиндрических каскадов со свойством Безиковича. // Матем. сб. – **209**, (2018). – № 9. – сс. 3–18.
3. *А.В. Кочергин*. Перемешивающий специальный поток над поворотом окружности с почти липшицевой функцией. // Матем. сб. – **193**, (2002). – № 3. – сс. 51–78.

LOCAL BIFURCATIONS OF SOLUTIONS OF A PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BENNEY–LIN–KAWAHARA EQUATION

A. N. Kulikov, D. A. Kulikov[1]

Demidov Yaroslavl State University

Let us consider a periodic boundary value problem (BVP) for an evolutionary nonlinear partial differential equation

$$u_t + Bu + Au + (F(u))_x + (G(u))_{xx} = 0 \qquad (1)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \qquad (2)$$

Here $Bu = b_5 u_{xxxxx} + b_3 u_{xxx} + b_1 u_x, Au = b_4 u_{xxxx} + b_2 u_{xx}, F(u) = a_2 u^2 + a_3 u^3, G(u) = c_2 u^2 + c_3 u^3, b_j, a_k, c_m \in R$. The BVP is given in normalized form. At least, the period is normalized by the spatial variable x.

Equation (1) can be interpreted as one of the known equations of nonlinear physics, if we specify its coefficients. For example, for $b_1, a_3, c_2, c_3 = 0$ we obtain the well-known Benny–Lin–Kawahara equation [1–3]. If we refuse the conditions $b_1 = c_2 = 0$, but put $b_5 = 0$, we obtain a version of this nonlinear partial differential equation used as a mathematical model in hydrodynamics [4].

Finally, for $b_1 = b_3 = b_5 = a_2 = a_3 = 0$, we obtain the well-known Cahn–Hilliard equation, and for $b_1 = b_3 = b_5 = a_3 = c_2 = c_3 = 0$ — the Kuramoto–Sivashinsky equation.

Note that for all variants of choosing the coefficients of this equation, it has a one-parameter family of spatially homogeneous equilibrium states $u(t, x) = \alpha, \alpha \in R$. The problems of local bifurcations in the neighborhood of some or all equilibrium states $u(t, x) = \alpha$ are considered.

Here we will restrict ourselves to an example of one of the bifurcation problems. Consider equation (1) in the case when $a_3 = b_1 = c_2 = c_3 = 0$. Such a choice corresponds to the Benney–Lin–Kawahara equation. Let the equalities $b_4 = 1, b_2 = 1 + \varepsilon$ also hold. Then the statement is true.

[1] e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Theorem. *There exists* $\varepsilon_0 > 0$ *such that for each* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *the BVP* (1)*,* (2) *has a two-dimensional invariant manifold* $V_2(\varepsilon, \alpha, \varphi)$*. This invariant manifold is a local attractor for solutions of the BVP under study. It is formed by a two-parameter family of solutions periodic in the variable* t*. For such solutions the following asymptotic formula is valid:*

$$u(t, x) = \alpha + 2\varepsilon^{1/2}\xi \cos(x + \sigma(\alpha)t + \varphi) + o(\varepsilon^{1/2}), \quad \varphi \in R,$$

where $\xi = \sqrt{3(4 + (5b_5 - b_3)^2)/4}$*,* $\sigma(\alpha) = -b_5 + b_3 - 2\alpha$*, i.e. the period depends on the choice of* α*.*

Note that the asymptotic formula given in the theorem can be refined and the following expansion terms can be found. This demonstrates the existence of a two-parameter packet of nonlinear traveling waves.

Methods of the theory of dynamic systems with an infinite-dimensional space of initial conditions were used to proof results.

References

1. Kawahara T., Takaoka M., *Chaotic behaviour of soliton lattice in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system* // Physica D., 1989. V. 39. Pp. 43–58.
2. Chen W., Li J., *On the low regularity of the Benney–Lin equation* // J. of Math. Anal. and Appl., 2009. V. 339. Pp. 1134–1147.
3. Faminskii A.V., Martynov E.V., *On the initial boundary value problem on the semi-axis for the generalized Kawahara equation* // Modern Mathematics. Fundamental Directions, 2019. V. 65. № 4. Pp. 633–699.
4. Porubov A.V., *Exact travelling wave solutions of nonlinear evolution equation of surface waves in a convecting fluid* // J. of Phys. A: Math. and Gen., 1993. V. 26, Pp. 797–800.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

М. Р. Лангаршоев[1]

АНО ВО «Московский гуманитарно-технологический университет — Московский архитектурно-строительный институт»

Пусть L_2 есть пространство 2π-периодических измеримых по Лебегу функций, у которых норма

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r)}$ $\left(r \in Z_+, L_2^{(0)} \equiv L_2\right)$ обозначим множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству L_2. Символом $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$.

Величина

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1}\right\}$$

называется наилучшее приближение функции f подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$.

Также полагаем $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{N})_2 := \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in \mathcal{N}\}$, где $\mathcal{N}$ — центрально-симметричное множество из L_2.

Величина $\Omega_m(f,t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|_2 : 0 < h \leqslant t\}$ называется специальным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$ [1].

Пусть $\Phi(u)$, $0 \leqslant u < \infty$, непрерывная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Для любых чисел $m \in N$, $r \in Z_+$ и $0 < u \leqslant \infty$, $0 < p \leqslant \infty$ введем

[1] e-mail: mukhtor77@mail.ru

в рассмотрении следующие классы функций:

$$W_m^{(r)}(u) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^u t(u-t)\Omega_m^p(f^{(r)}, t)dt \leqslant 1 \right\},$$

$$W_m^{(r)}(u, \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\int\limits_0^u t(u-t)\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)dt \right)^{1/p} \leqslant \Phi(u) \right\}.$$

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $m, n \in N$, $r \in Z_+$, $0 < p \leqslant \infty$ и u — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < u \leqslant 3\pi/(4n)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{ E_{n-1}(f)_2 \left(\int\limits_0^u t(u-t)\Omega_m^p(f^{(r)}, t)dt \right)^{-1/p} : f \in L_2^{(r)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{n^r} \left(\int\limits_0^u t(u-t)\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{pm} dt \right)^{-1/p}. \tag{1}$$

Теорема 2. *Для произвольных $m, n \in N$, $r \in Z_+$, $0 < p \leqslant \infty$ и $0 < u \leqslant 3\pi/(4n)$ имеют место равенства*

$$\sigma_{2n}\left(W_m^{(r)}(u), L_2\right) = \sigma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(u), L_2\right) = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_m^{(r)}(u)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^r} \left(\int\limits_0^u t(u-t)\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{pm} dt \right)^{-1/p}, \tag{2}$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников по Бернштейну, по Гельфанду, колмогоровского, линейного и проекционного класса $W_m^{(r)}(u)$ (см. [2]).

Теорема 3. *Пусть $m, n, r \in N$, $0 < p \leqslant \infty$ и $0 < u \leqslant 3\pi/(4n)$.*

Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(u,\Phi)) = \frac{1}{n^r}\left(\int_0^u t(u-t)\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{pm} dt\right)^{-1/p} \Phi(u). \quad (3)$$

Результаты (1)–(3) являются обобщением результат полученные в работе [3].

Список литературы

1. *Абилов В.А, Абилова Ф.В.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки, 2004. – Т. 76, № 6. – С. 803–811.
2. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976. – 304 с.
3. *Лангаршоев М.Р., Хоразмшоев С.С.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций в пространстве L_2 // Вестник российских университетов. Математика, 2025. – Т. 30, № 149. – С. 56–65.

OBTAINING EXACT EXPRESSIONS FOR NATURAL FREQUENCIES IN MODELING VIBRATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH A MOVING BOUNDARY USING THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM

V. L. Litvinov,[1] K. V. Litvinova

Samara State Technical University, Moscow State University

The article studies the vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope, bending rigidity, and resistance of the external environment. The object of study pertains to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. The presence of moving boundaries makes classical methods of mathematical physics inapplicable to solving such boundary value problems, so they have not been sufficiently studied at present. At a constant longitudinal velocity, the rope vibrations are characterized by a set of natural frequencies. In the absence of resistance of the environment, a discrete Fourier transform is used to solve the problem. As a result, an equation is obtained in the form of a series that allows one to find the exact values of the natural frequencies. The problem in the presence of resistance of the environment was solved using the Kantorovich–Galerkin method. The resulting equation allows one to find approximate values of the first two natural frequencies. The accuracy of the solution obtained by the Kantorovich–Galerkin method is estimated by comparing the exact and approximate frequencies. The article analyzes how the longitudinal speed of the rope affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables, which allows using the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

[1] e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

А. А. Лобода[1]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Пусть рассматривается следующая задача Коши для уравнения теплопроводности:

$$\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,x) = \frac{\lambda^2}{2m}\Delta\Psi(t,x) + V(x)\Psi(t,x),$$
$$\Psi(0,x) = f(x), (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n,$$

где $\lambda > 0$.

С помощью формулы Ито можно доказать, что решение этой задачи представляется следующим функциональным интегралом:

$$\Psi(t,x) = Ef(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}B_t)e^{\int_0^t \frac{V}{\lambda}(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}B_s)ds}.$$

Здесь символ E обозначает математическое ожидание, то есть интеграл по пространству непрерывных на отрезке $[0,t]$ функций с мерой Винера (см. [1]). При определённых ограничениях на функции $\tilde{f}, \tilde{V}$ можно показать (см. [2]), что функциональный интеграл

$$\Psi(t,x) = E\tilde{f}(x+\sqrt{ih}B_t)e^{\frac{1}{ih}\int_0^t \tilde{V}(x+\sqrt{ih}B_s)ds}.$$

является решением задачи Коши Коши для уравнения Шредингера:

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x) = \frac{-h^2}{2m}\Delta\Psi(t,x) + V(x)\Psi(t,x)$$
$$\Psi(0,x) = f(x), (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

В докладе речь пойдёт о том, как с помощью различных аналитических продолжений получить решения задач Коши для стохастических уравнений типа Шрёдингера (см. [3–5]).

[1] e-mail: orion1312@yandex.ru

Кроме того, будут рассмотрены задачи Коши вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u \ (x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0), \\ u(x,0) = f(x) \ (x \in \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

где $0 \leqslant f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $V(x) = \frac{c}{|x|^2}$, $c > 0$ (см. [6]), а для интегральных представлений их решений будет рассмотрена возможность аналитического продолжения, которое даёт решение задачи Коши для соответствующего решения уравнения Шрёдингера.

Список литературы

1. Simon B., *Functional Integrals and Quantum Physics*. – N.Y.: Acad. Press, 1979.
2. Doss H., *Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger a Coefficients Analytiques*. // Communications in Mathematical Physics, 1980. V. 73. P. 247–264.
3. V.P. Belavkin and O.G. Smolyanov., *The Feynman path integral corresponding to the stochastic Schrödinger*, // Dokl. Akad. Nauk, **360** (1998), Pp. 589–593;
   English transl., Dokl. Math. **57** (1998). Pp. 430–434.
4. *И.А. Ибрагимов, Н.В. Смородина, М.М. Фаддеев.* Вероятностный подход к построению решений одномерных начально-краевых задач. // Теория вероятн. и ее примен. – 58:2 (2013). – сс. 255–281.
   Theory Probab. Appl., 58:2 (2014), Pp. 242–263.
5. Loboda A.A. *The Doss Method for the Stochastic Schrodinger–Belavkin Equation*. // Mathematical Notes, 2019. V. 106, N 2, Pp. 311–315.
6. *В.П.Бурский, О.В.Самойлова.* Об одном применении формулы Фейнмана–Каца в вопросах существования решения сингулярных параболических систем. // Нелинейные граничные задачи. – т.15, 2005. – С. 126–140.

WEAK COUPLING LIMIT FOR QUANTUM SYSTEMS WITH UNBOUNDED WEAKLY COMMUTING SYSTEM OPERATORS

I. A. Lopatin,[1] A. N. Pechen[2]

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

The theory of open quantum systems is a rapidly developing branch of quantum physics that focuses on the interaction between non-isolated quantum systems and their surrounding environments, or reservoirs. These problems are relevant because almost any real physical system is open to some approximation. One of the main goals in this theory is the mathematically rigorous derivation of the reduced dynamics, that is, the system evolution described without explicit involvement of reservoir operators, under physically motivated approximations. One of the most well-known approximations is the weak coupling limit (WCL), which analyzes long-time behavior under weak system-reservoir interaction.

Let H_S, H_R denote the Hamiltonians of the system and reservoir, respectively. These are self-adjoint operators acting on the complex separable Hilbert spaces $\mathcal{H}_S$ and $\mathcal{H}_R$. Let V be an interaction operator acting on the tensor product $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. The perturbed evolution of an observable Y of the compound system is defined by the Heisenberg equation

$$\frac{dY(t)}{dt} = i\Big[H_S \otimes I_R + I_S \otimes H_R + \lambda V, Y(t)\Big],$$

where I_S, I_R are the identity operators on $\mathcal{H}_S$ and $\mathcal{H}_R$, respectively; λ is the coupling constant; and $[\cdot,\cdot]$ denotes commutator. This defines a one-parameter family of morphisms $Y \to \mathcal{T}_\lambda(t)Y$. To describe the reduced dynamics, we define a reservoir state ω as a continuous linear functional on the algebra of bounded reservoir observables, which is positive (i.e., $\omega(A^*A) \geqslant 0$) and normalized (i.e., $\omega(I_R) = 1$). This state induces a partial trace operation over the reservoir, defined by $\mathring{\omega}(A\otimes B) := A\cdot\omega(B)$. The reduced system dynamics in the WCL is defined as

$$\widetilde{\mathcal{T}_\lambda}(t)X := \mathring{\omega}\Big(\mathcal{T}_\lambda(\lambda^{-2}t)\big(X \otimes I_R\big)\Big), \quad \lambda \downarrow 0.$$

[1] e-mail: lopatin.ia@phystech.edu
[2] e-mail: apechen@gmail.com

That is, we consider the limit coupling strength as going to zero, $\lambda \to 0$, and time on which one studies the dynamics as going to infinity, $t \to \infty$, however not independently but in a related way so that the product $\lambda^2 t$ remains finite and determines a new time scale for the dynamics.

The WCL for finite-level systems (i.e., $\dim H_S < \infty$) is well-established. However, infinite-level systems, especially those with unbounded Hamiltonians and continuous spectra, remain less explored. In this work, we consider an infinite-level quantum system interacting with an ideal Fermi or Bose gas [1]. We assume that the free system Hamiltonian commutes, in a weak sense, with the system part of the interaction operator, without imposing any restrictions on their spectra.

We first analyze the multi-point correlation functions of the reservoir in the WCL:

$$\Omega_\pi(\lambda) := \lambda^k \int\limits_{\Delta_k(\lambda^{-2}t)} \omega\left(a^\#(e^{it_{\pi(1)}h}f_1)a^\#(e^{it_{\pi(2)}h}f_2)\dots a^\#(e^{it_{\pi(k)}h}f_k)\right)dt_1\dots dt_k,$$

where $\Delta_k(T) := \{t_1, \dots, t_k \in R^k : T > t_1 > t_2 > \dots > t_k > 0\}$, π is permutation of k elements, $a^\#(f)$ denotes either the creation operator $a^\dagger(f)$ or the annihilation operator $a(f)$, $a^\#(e^{ith}f)$ denotes the creation or annihilation operator in the interaction picture, where the form-factor f evolves freely under the one-particle reservoir Hamiltonian h over time t. We derive a recursive formula with respect to k, the number of operators involved, for the limit $\lambda \downarrow 0$ of these correlation functions, and we estimate the rate of convergence.

Using the results for the reservoir correlation functions, we analyze the Dyson series for the reduced system dynamics in the WCL. Then we prove that the resulting reduced system dynamics converges to unitary dynamics with a modified Hamiltonian which can be interpreted as a Lamb shift to the original Hamiltonian

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\lambda(t)X = e^{i(\lambda^{-2}H_S+\widetilde{H})t}Xe^{-i(\lambda^{-2}H_S+\widetilde{H})t} + O(\lambda), \quad \lambda \downarrow 0.$$

We obtain the exact form of the Lamb shift $\widetilde{H}$ and estimate the rate of convergence to the limiting dynamics as $O(\lambda)$.

References

1. I.A. Lopatin, A.N. Pechen, *Weak coupling limit for quantum systems with unbounded weakly commuting system operators* // J. Math. Phys. V.66(4):042101, 2025.

О РОСТЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ш. А. Махмутов[1]

Sultan Qaboos University

Обозначим через $B(\mathbb{D})$ множество аналитических функций $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и $\varphi^{\star}(z) := \dfrac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}$ — гиперболическую производную φ. Для любой функции $\varphi \in B(\mathbb{D})$ справедлива оценка

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi^{\star}(z) \leqslant 1.$$

Отнесем функцию $\varphi \in B(\mathbb{D})$ к классу $\mathcal{B}^{\star}_{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, если выполняется условие

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}^{\star}_{\alpha}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{\alpha}\varphi^{\star}(z) < \infty$$

Для функций φ из класса $\mathcal{B}^{\star}_{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, была получена оценка

$$\|\varphi\|^2_{H^\infty} \leqslant 1-(1-|\varphi(0)|^2)\exp\left(-4\,\frac{\|\varphi\|_{\mathcal{B}^{\star}_{\alpha}}}{1-\alpha}\right).$$

Это означает, что функции из классов $\mathcal{B}^{\star}_{\alpha}$ не могут удовлетворять условию $\|\varphi\|_{H^\infty} = 1$, если $0 < \alpha < 1$. Другими словами, внутренние функции не принадлежат к классам $\mathcal{B}^{\star}_{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Из работы [1] (см. также [3]) следует, что для любой внутренней функции φ

$$\int\limits_{\mathbb{D}} (\varphi^{\star}(z))^2(1-|z|^2)\,dA(z) = \infty$$

Смит [3] также показал, что существуют внутренние аналитические функции, для которых выполняется условие

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\varphi^{\star}(z) = 0.$$

Часть результатов доклада будет опубликована в работе [2].

[1] e-mail: shmakhm@gmail.com

Список литературы

1. *Махмутов Ш.А.* Гиперболический вариант основной теоремы Неванлинны. // Доклады РАН. – 2000. – т. 370, № 3. – с. 309–312.
2. Makhmutov S. and Rättyä J. *Integral estimates related to analytic self-maps, and Dirichlet classes via hyperbolic oscillation*. // Hokkaido Math. J. (accepted)
3. Smith W. *Inner Functions in the Hyperbolic Little Bloch Class*. // Michigan Math. J., 1998, V. 45, Pp. 103–114.

ВОЗМОЖНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

М. Б. Зверева, Д. Е. Марфин,[1] А. К. Ютишев, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Работа посвящена изучению возможности применения метода Фурье для нахождения решения математической модели, описывающей свободные колебания «разрывной» струны

$$\begin{cases} M'_{[\sigma]}(x)\ddot{u} = \frac{\partial}{\partial[\sigma]}\,(pu'_\mu) - q(x)u, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ \dot{u}(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Мы считаем, что колебания происходят в одной плоскости, и каждая точка системы смещается перпендикулярно положению равновесия. Здесь $u(x,t)$ — отклонение от положения равновесия точки x в момент времени t; точка и две точки означают первую и вторую производную по переменной t соответственно; $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ — начальное отклонение и начальная скорость соответственно; $q(x)$ — локальный коэффициент упругости внешней среды в точке x; $M'_{[\sigma]}(x) > 0$ — распределение массы. Внутренняя производная понимается по мере, а внешняя — по расщепленной мере (см., например, [1]).

Решение (1) мы будем искать в классе $[\mu \times t]$ — абсолютно непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\sigma \times [0;T]$ функций, μ-производная по пространственной переменной является $[\sigma]$-абсолютно непрерывной на $[0;\ell]$ функцией при всех фиксированных t; квазипроизводная $(pu'_\mu)'_{[\sigma]}$ — $[\sigma]$-суммируема на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ при всех фиксированных t; по переменной t функция $u(x,t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка при фиксированном x.

Уравнение из (1) в точках ξ разрыва функции $\mu(x)$ (и $\sigma(x)$) по-

[1] e-mail: danil-marfin@yandex.ru

нимается как два равенства

$$M'_{[\sigma]}(\tau_1^{\xi})\ddot{u}(\xi-0,t) = \frac{pu'_{\mu}(\xi) - pu'_{\mu}(\xi-0)}{\sigma(\xi)-\sigma(\xi-0)} - q(\tau_1^{\xi})u(\xi-0,t),$$

$$M'_{[\sigma]}(\tau_2^{\xi})\ddot{u}(\xi+0,t) = \frac{pu'_{\mu}(\xi+0) - pu'_{\mu}(\xi)}{\sigma(\xi+0)-\sigma(\xi)} - q(\tau_2^{\xi})u(\xi+0,t),$$

где $\xi-0$ и $\xi+0$ означают левый и правый пределы в точке ξ соответственно, а τ_1^{ξ}, τ_2^{ξ} — точки «расщепления» меры σ.

Решение задачи (1) мы ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) T_k(t), \tag{2}$$

где $\varphi_k(x)$ — собственные функции спектральной задачи

$$\begin{cases} LX \equiv -\left(pX'_{\mu}\right)'_{[\sigma]} + Xq = \lambda M'_{[\sigma]} X; \\ X(0) = X(\ell) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$T_k(t)$ — искомые функции.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *начальные условия $\psi_i(x)$ $(i = 1,2)$ — μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{\mu}$; производные $\psi'_{i\mu}(x)$ $(i = 1,2)$ по мере μ имеют конечное изменение; $p\psi'_{i\mu}(x)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$;*
2) *функции $\left(\frac{L\psi_i}{M'_{[\sigma]}}\right)(x)$ $(i = 1,2)$ μ-непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{\mu}$;*
   $\left(\frac{L\psi_i}{M'_{[\sigma]}}\right)'_{\mu}(x)$ *имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение;*
3) $\psi_0(0) = \psi_0(\ell) = (L\psi_0)(0) = (L\psi_0)(\ell) = \psi_1(0) = \psi_1(\ell) = 0.$

Тогда, ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(\int_0^{\ell} M'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)\, d\,[\sigma(x)] \cdot \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\ell} M'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)\, d\,[\sigma(x)] \cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\, t}{\sqrt{\lambda_k}} \right),$$

где $\varphi_k(x)$ *— собственные функции задачи* (3)*, отвечающие собственному значению* λ_n*, является решением* (1).

Список литературы

1. *Покорный, Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН, 1999. – Т. 364, № 2. – С. 167–169.

FUNCTIONAL FOURIER TRANSFORMATION AND RENORMALIZATION GROUP TRANSFORMATION IN THE GENERALIZED FERMIONIC HIERARCHICAL MODEL

M. D. Missarov[1] D. A. Khajrullin[2]

Kazan Federal University, Kazan, Russia

Let $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ and $V_k^s = \{j \in T : k \cdot 2^s \leqslant j < (k+1) \cdot 2^s\}$, where $k \in T$, $s \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$. The hierarchical distance $d_2(i, j)$, $i, j \in T$, $i \neq j$ is defined as $d_2(i, j) = 2^{s(i,j)}$, where $s(i, j) = \min\{s :$ is $k \in T$ such that $i, j \in V_k^s\}$. Let $T^2 = T \times T$, $k = (k_1, k_2) \in T^2$, $V_k^s = \{(j_1, j_2) \in T^2 : k_1 \cdot 2^s \leqslant j_1 < (k_1 + 1) \cdot 2^s, k_2 \cdot 2^s \leqslant j_2 < (k_2 + 1) \cdot 2^s\}$. For any $k = (k_1, k_2) \in T^2$, $l = (l_1, l_2) \in T^2$, $k \neq l$ we define $s(k, l) = \max(s(k_1, l_1), s(k_2, l_2))$. The hierarchical distance on T^2 is defined as $d_2(k, l) = 2^{s(k,l)}$. Let us consider a 4-component fermionic field

$$\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i)), \quad i \in T^2,$$

where the components are generators of a Grassman algebra. Let us redenote V_0^N by Λ_N. Let Γ_N be the Grassmann subalgebra generated by all generators $\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i), i \in \Lambda_N$. The block-spin renormalization group (RG) transformation is defined by the formula

$$\psi^{*\prime}(i) \equiv (r(\alpha)\psi^*)(i) = 2^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_i^1} \psi^*(j),$$

where $\alpha \in R^1$ is the RG parameter. We define the following functions on T^2:

$$d(k, l; \lambda) = d_2(k, l), \text{ if } s(k_1, l_1) \neq s(k_2, l_2);$$
$$d(k, l; \lambda) = \lambda d_2(k, l), \text{ if } s(k_1, l_1) = s(k_2, l_2),$$

$$b(k, l; \lambda; \alpha) = d^{\alpha-4}(k, l; \lambda), \text{ if } k \neq l, \quad b(k, k; \lambda; \alpha) = \frac{2 + \lambda^\alpha}{4(1 - 2^{-(\alpha-2)})},$$

[1] e-mail: mukadas.missarov@yandex.ru
[2] e-mail: dimahajrullin@outlook.com

λ is a real-valued parameter, $\lambda > 0$. It was shown in [1] that a zero-mean Gaussian fermionic field with a binary correlation function

$$\langle \psi_n(k)\bar{\psi}_m(l)\rangle = \delta_{n,m} b(k,l;\lambda;\alpha), \quad n,m = 1,2, \quad k,l \in T^2$$

is invariant under the RG transformation with the parameter α. To construct non-Gaussian states, we use the Gibbs description of the field. Let us consider the restriction of the Gaussian field ψ^* on the volume Λ_N. We denote the Gaussian Hamiltonian of this restriction as $H_{0,N}(\psi^*;\lambda;\alpha)$. Consider the local potential (self-action) for a 4-component fermionic field $L(\psi^*;r,g) = r(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + g\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2$.

Let the non-Gaussian Hamiltonian $H_N(\psi^*;r,g;\lambda;\alpha)$ is given as

$$H_N(\psi^*;r,g;\lambda;\alpha) = H_{0,N}(\psi^*;\lambda;\alpha) + \sum_{i\in\Lambda_N}(L(\psi^*(i);r,g)).$$

If ρ is a state on Γ_N, given by this Gibbsian Hamiltonian, then the renormalized state ρ' is defined on Γ_{N-1} by the Hamiltonian $H_{N-1}(\psi^*;r',g';\lambda;\alpha)$. Let us denote the renormalization group transformation in the space of coupling constants (r,g) as $R(\alpha)$: $(r',g') = R(\alpha)(r,g)$. It was shown [2]:

$$r' = 2^{\alpha-2}\frac{r_1(r,g;\delta)}{r_2(r,g;\delta)}, \quad g' = \frac{2^{2(\alpha-2)}}{4} g \left(\frac{r_3(r,g;\delta)}{r_2(r,g;\delta)}\right)^2,$$

where

$$\delta = \frac{2(-2^{\alpha+2}\lambda^4 + 4^\alpha\lambda^4 + 16\lambda^\alpha - 13(2\lambda)^\alpha)}{2^{2\alpha+1}\lambda^4 - 2^{2\alpha}\lambda^\alpha - 12\lambda^4 2^\alpha - 5\lambda^\alpha 2^\alpha + 16\lambda^4},$$

$$\begin{aligned} r_1(r,g;\delta) = {} & -g^3 r - g^3\left(\frac{\delta}{4}+\frac{1}{4}\right) + 3g^2r^3 - g^2r^2\left(-\frac{5\delta}{2}-\frac{5}{2}\right) - \\ & -g^2 r\left(-\frac{\delta^2}{2} - 2\delta\right) - g^2\left(-\frac{\delta^2}{4}-\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right) - 3gr^5 - gr^4\left(\frac{17\delta}{4}+\frac{17}{4}\right) - \\ & -gr^3\left(\frac{3\delta^2}{2}+8\delta-1\right) - gr^2\left(\frac{7\delta^2}{2}+\frac{5\delta}{2}-\frac{5}{2}\right) - gr\left(\frac{5\delta^2}{2}-2\delta\right) - \\ & -g\left(\frac{\delta^2}{2}-\frac{3\delta}{4}+\frac{1}{4}\right) + r^7 - r^6(-2\delta-2) - r^5\left(-\delta^2-6\delta+1\right) - \\ & -r^4\left(-4\delta^2-4\delta+4\right) - r^3\left(-6\delta^2+4\delta+1\right) - r^2\left(-4\delta^2+6\delta-2\right) + r(\delta-1)^2, \end{aligned}$$

$$r_2(r,g;\delta) = -\frac{g^3}{4} + \frac{3g^2r^2}{2} + g^2r(\delta+1) + g^2\left(\frac{\delta^2}{4}+\frac{1}{2}\right) - \frac{9gr^4}{4} +$$
$$+gr^3(-3\delta-3) + gr^2\left(-\delta^2-5\delta+\frac{1}{2}\right) + gr\left(-2\delta^2-\delta+1\right) +$$
$$+g\left(-\delta^2+\delta-\frac{1}{4}\right) + r^6 + r^5(2\delta+2) + r^4\left(\delta^2+6\delta-1\right) +$$
$$+r^3\left(4\delta^2+4\delta-4\right) + r^2\left(6\delta^2-4\delta-1\right) + r\left(4\delta^2-6\delta+2\right) + (\delta-1)^2,$$
$$r_3(r,g;\delta) = \left(-g+(r+1)^2\right)\left(-\delta^2 g - 4\delta g r + 4\delta r^3 + 2g^2 - 4gr^2 + \right.$$
$$\left. + 2r^4 + r^2(2\delta^2+4\delta-4) + r(4\delta^2-4\delta) + 2(\delta-1)^2\right).$$

Let us define the Fourier transformation in the space of Grassmann-valued "free density measures" $e^{-L(\psi^*;r,g)}$ as

$$\int e^{-\bar\zeta_1\psi_1+\zeta_1\bar\psi_1+\bar\zeta_2\psi_2+\zeta_2\bar\psi_2} e^{-r(\bar\psi_1\psi_1+\bar\psi_2\psi_2)-g\bar\psi_1\psi_1\bar\psi_2\psi_2} d\psi_1\, d\bar\psi_1\, d\psi_2\, d\bar\psi_2 =$$
$$= F(e^{-L(\psi^*;r,g)})(\zeta^\star).$$

It is easy to see that $F(e^{-L(\psi^*;r,g)})(\zeta^\star) = (r^2-g)e^{-L\left(\zeta^\star;\frac{r}{r^2-g},\frac{g}{(r^2-g)^2}\right)}$. We call the map $F(r,g) = \left(\frac{r}{r^2-g}, \frac{g}{(r^2-g)^2}\right)$ as Fourier map.

Theorem. *Fourier map F and renormalization group transformation $R(\alpha)$ in the coupling constants plane satisfy to the relation $FR(\alpha) = R(4-\alpha)F$.*

References

1. M.D. Missarov, *New Variant of the Fermionic Model on the Hierarchical Two-Dimensional Lattice*, // P-Adic Num Ultrametr Anal Appl, 2020, Vol. 12, Pp. 163–170.
2. M.D. Missarov, D.A. Khajrullin, *The renormalization group transformation in the generalized fermionic hierarchical model*, // Izv. Math., 2023, Vol. 87, No. 5, Pp. 1011–1012.

GRADIENT PROJECTION METHOD FOR QUANTUM CONTROL

O. V. Morzhin,[1] A. N. Pechen[2]

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies; University of Science and Technology MISIS

In general constrained optimization, one-step gradient projection method (GPM) is long known (e.g., [1, 2]). In quantum control, gradient projection method for constrained optimization was developed in the fundamental work [3] (Section 5 and Appendix B) by considering constrained optimization of quantum systems as optimization over complex Stiefel manifolds with additional constraints. In that work, constrained gradient projection optimization for open quantum systems was considered in full generality, including theoretical derivation of the projection and numerical simulations, when coherent and incoherent controls are represented in the kinematic description as Kraus maps.

Making explicit adaptation and applications to various specific models of quantum systems with dynamic controls is of high importance. The talk is devoted to applying one- and two-step versions of the GPM to some particular classes of optimal control problems for closed and open quantum systems with dynamic controls. We consider such important for applications models as superconducting one- and two-qubit systems and ion-like models subject to coherent control and incoherent environment. For these systems, diverse problems ranging from Bell state preparation to quantum gate generation or entropy manipulation are investigated [4, 5]. In [3–5], basic constructions of the GPM are developed primarily directly in terms of quantum objects such as Kraus maps, Hamiltonians, density matrices, evolution operators, etc. The articles [4, 5] contain, in particular, a two-step GPM as an analog of the finite-dimensional two-step GPM known in the finite-dimensional optimization from the fundamental work [6]. In particular, in various numerical experiments it was found that two-step GPM can be essentially better than one-step GPM.

[1] e-mail: morzhin.oleg@yandex.ru
[2] e-mail: apechen@gmail.com

Partial support by RSF grants No. 22-11-00330 and 22-11-00330-P (at the Steklov Mathematical Institute), the Steklov International Mathematical Center, and the federal academic leadership program “Priority 2030” (MISIS Strategic Project Quantum Internet).

References

1. Levitin E.S., Polyak B.T., *Constrained minimization methods* // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 6:5 (1966), 1–50.
URL: https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90114-5
2. Demyanov V.F., Rubinov A.M. *Approximate Methods in Optimization Problems* / Transl. from Russian. American Elsevier Pub. Co., New York, 1970.
3. Oza A., Pechen A., Dominy J., Beltrani V., Moore K., and Rabitz H., *Optimization search effort over the control landscapes for open quantum systems with Kraus-map evolution* // J. Phys. A: Math. Theor., 42:20 (2009), 205305.
URL: https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/20/205305
4. Morzhin O.V., Pechen A.N., *Gradient projection method for constrained quantum control* // J. Phys. A: Math. Theor., 58:13 (2025), 135303.
URL: https://doi.org/10.1088/1751-8121/adbe1a
5. Morzhin O.V., Pechen A.N., *Control of the von Neumann entropy for an open two-qubit system using coherent and incoherent drives* // Entropy, 26:1 (2024), 36.
URL: https://doi.org/10.3390/e26010036
6. Antipin A.S., *Minimization of convex functions on convex sets by means of differential equations* // Differ. Equat., 30:9 (1994), 1365–1375.
URL: http://ultra27.ccas.ru/antipin/p/difeq.pdf

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ

Р. Г. Мухарлямов[1]

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Степень соответствия математической модели процессов динамики механических систем и их аналогов [1], используемых в системах управления, определяется допустимой структурой и точностью численного решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Повышению точности решения уравнений динамики способствует известная информация о свойствах системы, представленная уравнениями связей, известными интегралами или заданными целями управления [2]. Выполнение уравнений связей обеспечивается дополнительными силами, которые могут быть представлены как управляющие воздействия. Связи определяются частными интегралами уравнений динамики и соответствуют множеству точек притяжения при отклонении начальных значений от уравнений связей. Необходимым условием ограничения отклонений, вызванных погрешностями численного решения дифференциально-алгебраических уравнений и задания начальных условий, является требование асимптотической устойчивости интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений замкнутой системы, определяемого уравнениями связей и целями управления. Условия устойчивости тривиального решения уравнений возмущений связей устанавливаются методом функций Ляпунова. Для составления функции Ляпунова Н.Г. Четаевым было предложено использовать первые интегралы уравнений динамики [3]. Для ограничения отклонений от уравнений связей вводятся уравнения программных связей, уравнения возмущений связей и формулируются условия устойчивости программных связей. Уравнения динамики могут быть получены из принципов динамики с определением множества виртуальных перемещений системы. Подбор уравнений возмущений связей позволяет построить уравнения динами-

[1] e-mail: robgar@mail.ru

ки расширенной системы, учитывающей отклонения от уравнений связей, с циклическими координатами, соответствующими неголономным связям. Получено решение задачи Бертрана [4] об определении центральной силы, под действием которой материальная точка совершает устойчивое движение по траектории, соответствующей коническому сечению.

Исследование выполнено при финансовой поддержке
Российского научного фонда, № 25-21-00153
(URL: https://rscf.ru/project/25-21-00153/).

Список литературы

1. Layton R.A. *Principles of Analytical System Dynamics*. Springer, 1998. 158 p.
2. R.G. Mukharlyamov. *On the Construction of Differential Equations of Systems with Program Constraints* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No 11, Pp. 5649–5657. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080224606738 .
   Сдано в печать: Июль 2024, Сентябрь 12, 2024.
   Принята: Сентябрь 15, 2024. Опубликовано 17 марта 2025.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М. Изд. АН СССР, 1962. – 535 с.
4. Bertrand M.G. *Theoreme relatife au mouvement d'un point attire vers un centre fixe* // Compte rendus, 1873, v. 77. T. LXXVII, No 16, 20 Octobre 1873, Pp. 849–853.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Е. Е. Некрылов, С. А. Шабров, М. Б. Зверева

Воронежский государственный университет

Работа посвящена изучению некоторых свойств спектральной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_\mu)'_\sigma + qu = \lambda mu; \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с разрывными решениями. В работе [2] эта задача изучалась в интегро-дифференциальной форме, когда уравнение проинтегрировано по мере σ в пределах от 0 до x. Было показано, что спектр задачи (1) является осцилляционным, т. е. состоит только из собственных значений, единственная точка сгущения — это $+\infty$; нулевые места собственных функций перемежаются.

Решение задачи (1) мы ищем в классе μ-абсолютно непрерывных на $[0,\ell]$ функций, первая производная которых σ-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$.

При этом мы считаем, что уравнение заданным на специальном расширении $\overline{[0,\ell]}_\sigma^{(2)}$ отрезка $[0,\ell]$, которое строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва строго возрастающей на $[0,\ell]$ функции $\sigma(x)$. На $[0,\ell]$ зададим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x)-\sigma(y)|$. Как нетрудно видеть, если $S(\sigma)$ непусто, то метрическое пространство $([0,\ell];\rho)$ неполно. Стандартное пополнение нам дает $\overline{[0,\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку упорядоченных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$. Формальная замена элемента ξ из этого набора на упорядоченную пару собственных элементов $\{\tau_1^\xi,\tau_2^\xi\}$ и приводит к множеству $\overline{[0,\ell]}_\sigma^{(2)}$. Уравнение в точках $\{\tau_1^\xi,\tau_2^\xi\}$ мы понимаем как равенства

$$-\Delta^-(pu'_\mu)(\xi) + q(\tau_1^\xi)u(\xi-0) = \lambda m(\tau_1^\xi)u(\xi-0),$$

$$-\Delta^+(pu'_\mu)(\xi) + q(\tau_2^\xi)u(\xi+0) = \lambda m(\tau_2^\xi)u(\xi+0),$$

где $\Delta^{-}\psi(x) = \psi(x) - \psi(x-0)$ и $\Delta^{+}\psi(x) = \psi(x+0) - \psi(x)$ — левый и правый скачки функции $\psi(x)$ в точке x соответственно.

Мы предполагаем выполненными следующие условия
1) $p(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$;
2) $\inf\limits_{[0,\ell]} p > 0$;
3) $q(x)$ и $m(x)$ — σ-суммируемые на $\overline{[0, \ell]}_{\sigma}^{(2)}$ функции;
4) $m(x) > 0$ для всех $x \in \overline{[0, \ell]}_{\sigma}^{(2)}$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ — решения уравнения $Lu = \lambda mu$, удовлетворяющие начальным условиям $u(0) = 0$, $pu'_{\mu}(0) = 1$ и $u(\ell) = 0$, $pu'_{\mu}(\ell) = -1$ соответственно. В [2] введен аналог определителя Вронского системы $\{\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)\}$, и доказано, что он не зависит от x. Обозначим его через $\triangle(\lambda)$.

В работе доказана теорема.

Теорема. *Если λ_k — одно из собственных значений задачи* (1)*, то существует отличное от нуля β_k, такое, что $\varphi(x, \lambda) \equiv \beta_k \psi(x, \lambda)$, и справедливо равенство*

$$\alpha_k \beta_k = \frac{d}{d\lambda} \triangle \Bigg|_{\lambda = \lambda_n},$$

где $\alpha_k = \int\limits_0^l \varphi^2(x, \lambda_k) M'_{\sigma}(x) d\sigma(x)$.

Отметим, что при анализе возникающих уравнение мы используем поточеный подход, предложенный Ю.В. Покорным [1].

Список литературы

1. *Покорный, Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН, 1999. – Т. 364, № 2. – С. 167–169.
2. *Зверева, М.Б.* О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стилтьеса: (дис. … канд. наук). – Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю.В. Покорный. – 15.11.2005. – 120 с.

A FUNCTION-THEORETICAL STUDY OF LOGARIPHMIC HAMILTONIANS OF VOLTERRA TYPE LATTICES

A. S. Osipov[1]

Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute"

The classical Volterra lattice

$$\dot{a}_n = a_n(a_{n+1} - a_{n-1}), \; a_n = a_n(t) > 0, \; t \in [0, T), \; 0 < T \leqslant \infty; \quad (1)$$

also known as Kac–van Moerbeke system or discrete Korteweg–de Vries equation is a well known example of nonlinear integrable systems. It has a rich and interesting Hamiltonian structure. In particular, if we define in the coordinates (a_n) the cubic Poisson bracket $\{.,.\}_3$ having non-vanishing elements

$$\{a_{n+2}, a_n\}_3 = a_{n+2}a_{n+1}a_n, \; \{a_{n+1}, a_n\}_3 = a_{n+1}a_n(a_{n+1} + a_n). \quad (2)$$

Then (1) can be written as follows:

$$\dot{a}_n = \{H_0, a_n\}_3, \quad \text{where} \quad H_0 = \frac{1}{2}\sum_n \ln(a_n).$$

Faddeev and Takhtajan found another Poisson bracket [1], in which this system can be written similarly, with the same logarithmic Hamiltonian H_0. For the semi-infinite lattices, i.e. when $n \in \mathbb{Z}_+$ or the infinite ones $(n \in \mathbb{Z}_+)$ it is natural to ask: when their Hamiltonians H_0 are finite? The spectral theory of Jacobi operators and the results of [2] allow one to find a sort of answer to this question.

Theorem. *Each probability measure $d\mu = d\mu(x)$ on $\mathbb{R}$*

$$d\mu = d\mu_{ac} + d\mu_{\text{sing}} = f(x)dx + d\mu_{\text{sing}}$$

satisfying the following conditions:
a) ess supp$\{d\mu\}_{ac} = \{x, \; f(x) \geqslant 0\} = [-2, 2]$,

[1] e-mail: osipa68@yahoo.com

b) $f(x)$ *is an even nonnegative function satisfying the Szegő condition*

$$\int_{-2}^{2} \frac{\ln f(x)dx}{\sqrt{4-x^2}} > -\infty,$$

c) *its singular part* $d\mu_{\text{sing}}$ *consists of a finite number of masses* $\{m_i\}_{i=1}^{2N}$, $m_i = m_{2N-i+1}$ *located at the points* $\{\lambda_i\}_{i=1}^{2N} \in \mathbb{R}\backslash[-2,2]$ *such that* $\lambda_i = -\lambda_{2N-i+1}$,

is the spectral measure $d\mu_L$ *of the Lax operator corresponding to the semi-infinite Volterra lattice having the finite logarithmic Hamiltonian. Conversely, each measure* $d\mu_L$*, corresponding to such Volterra lattice, satisfies the conditions* a)–c).

Thus, there is a one-to-one correspondence between the semi-infinite Volterra lattices with the finite logarithmic Hamiltonians and the measures $d\mu$, satisfying a)-b). The elements a_n and, therefore, the Hamiltonian H_0 itself can be expressed in terms of the corresponding measure.

Then we study a correspondence between the infinite Volterra latices having a finite H_0 and the pairs of measures satisfying a)–c). We also discuss a possibility for generalization of these results to another nonlinear integrable systems such as lattice Boussinesq equations and Bogoyavlensky lattice, considered in the semi-infinite case.

References

1. L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer Verlag: Berlin, New York, 1987.
2. E.M. Nikishin, *Discrete Sturm-Liouville operators and some problems of function theory, //* J. Sov. Math., 35 (1986), Pp. 2679–2744.
Translation from Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 10, (1984), pp. 3–77 (Russian).

О КОСОСОПРЯЖЁННОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ОПЕРАТОРА ЭЙЛЕРА

Е. Ю. Панов[1]

Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН

Пусть $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ – соленоидальный вектор в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий глобальному условию Липшица $|a(x) - a(y)| \leqslant m|x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (через $|z|$ обозначается евклидова норма конечномерного вектора z). Рассмотрим линеаризованную систему стационарных уравнений Эйлера

$$u + h\sum_{j=1}^{n} a_j(x)u_{x_j} + \nabla p = v, \quad \operatorname{div} u(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь $h \in \mathbb{R}$, $v = v(x) \in H$, где H — замкнутое подпространство в вещественном гильбертовом пространстве $X = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, состоящее из соленоидальных векторных полей. Рассмотрим неограниченный линейный оператор A_0 в H, задаваемый равенством $A_0 u = Pv$, где $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H = D(A_0)$, $v = v(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x)u_{x_j}(x)$, а $P : X \to H$ – ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ на подпространство H. Если $u_1 = (u_1^k)_{k=1}^n, u_2 = (u_2^k)_{k=1}^n \in D(A_0)$, то

$$(A_0u_1, u_2) + (u_1, A_0u_2) = (Pv_1, u_2) + (u_1, Pv_2) =$$
$$= (v_1, u_2) + (u_1, v_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^{n} a_j(x)((u_1^k)_{x_j}u_2^k + u_1^k(u_2^k)_{x_j})(x)dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^{n} a_j(x)(u_1^k u_2^k)_{x_j}dx = 0$$

ввиду условия соленоидальности поля $a(x)$. Таким образом, оператор A_0 кососимметричен. Пусть A — замыкание оператора A_0, A^* — оператор, сопряжённый к A. Ввиду кососимметричности, справедливо включение $-A \subset A^*$.

[1] e-mail: evpanov@pdmi.ras.ru

Определение 1. Вектор $u = (u^1(x), \dots, u^n(x)) \in H$ называется сильным решением уравнения (1), если $u \in D(A)$ и выполнено равенство $u + hAu(x) = v$. Вектор $u \in H$ называется обобщённым решением уравнения (1), если $u \in D(A^*)$ и $u - hA^*u(x) = v$.

Заметим, что давление $p = p(x)$ не входит в определение решений, но может быть восстановлено из условия соленоидальности поля Au. Нетрудно проверить, что $\nabla p = Tu$, где T — ограниченный линейный оператор на пространстве X, задаваемый равенством

$$\mathcal{F}(Tu)^l(\xi) = -\sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^{n} (a_j)_{x_k} u^k\right)(\xi)\, \frac{\xi_l \xi_j}{|\xi|^2},$$

где $\mathcal{F} : X \to X$ — преобразование Фурье. Поскольку обобщенные производные $(a_j)_{x_k}(x)$ вектора $a(x)$ ограничены (ввиду его липшицевости), а также ограничены и функции $\xi_l\xi_j/|\xi|^2$, то оператор T ограничен.

Рассмотрим оператор B на X, являющийся замыканием оператора

$$B_0 u = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) u_{x_j}(x), \quad u = u(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Оператор B является генератором полугруппы $T_t u(x) = u(y(t,x))$, где $(0, y(t,x))$ точка на интегральной кривой $(s, y(s))$ характеристической системы $\dot{y} = a(y)$, проходящей через (t, x). В силу условия соленоидальности поля $a(y)$, поток $x \to y(t,x)$ сохраняет меру Лебега и операторы T_t, $t \in \mathbb{R}$, образуют группу ортогональных операторов. По теореме Стоуна оператор B кососопряжён: $-B = B^*$. Сужение оператора $\tilde{A} = B + T$ на инвариантное подпространство H совпадает с оператором A. Так как оператор $\tilde{A}$ является ограниченным возмущением кососопряженного оператора B, то достаточно малый интервал $(-h_0, h_0)$ лежит в резольвентном множестве оператора $\tilde{A}$. Ключевым свойством является инвариантность пространства H для резольвенты $(E + h\tilde{A})^{-1}$ при $|h| < \delta$, где $\delta \in (0, h_0)$ достаточно мало. Так как оператор $A = \tilde{A}|_H$ кососимметричен, из этого свойства вытекает кососопряжённость оператора A. В частности, справедлива следующая

Теорема 1. *При любом $h \in \mathbb{R}$, $v = v(x) \in H$ существует единственное сильное решение системы* (1).

Заметим также, что из равенства $-A = A^*$ следует совпадение классов сильных и обобщённых решений.

PRINCIPLE OF INDEFINITE EQUATIONS IN MATHEMATICS

A. V. Pavlov[1]

RTU-MIREA, higher mathematics-1

We consider the analytical $z = f(p)$ functions as in a primary coordinates (with the $0,0$) center of coordinates) so as in different coordinate system. The center of coordinates of the second system is located in the $(A, 0)$ point, $A \in (-\infty, \infty)$, r is the new complex variable in the new coordinate system, where $z = h(r) = f(p + A)|_{p=r}$ is the new equation of the M set of points (graph) in the second system, $M = \{(z, f(p)) : p \in \in G \bigcap z = f(p)\}$, G is some open aria of the complex plain. The M set is the $y = f(x)$ graph, if $p = x \in (-\infty, \infty), z = y \in (-\infty, \infty)$.

In the first fact we can consider the $z = f(R + A)$ equation for $R = = p$ and $R = r$. For all $R = p$ the $z = f(p + A)$ equation is the equation of M_A (moved to the left M set), $p - A = r, A > 0$. For all $R = r$ with $p = r$ the $z = f(r + A)$ equation is the $z = f(P)$ equation of the M set, by definitions of the second system of coordinates with the P variable (argument) in the primary system. We use, that $z = f(r + A) = h(r)$ with $r = p$. We get, that the r with $r = p$ is the r variable (argument) in the second system of coordinates, where $r + A = P$ is the P variable (argument) for the $z = f(P)$ equation of the M set. (We can name P as p for the same immobile M for all z). From the point of view of the identical reverse $f_2^{-1}(z) = f_1^{-1}(z)$ functions with $f_1^{-1}(z) = p$, $f_2^{-1}(z) = = s$ for all the $p = s, z$ we obtain the new $z = f(p + A)$ equation of the immobile M set, $f_1(p) = f(p + A) = f(s + A) = f_2(s) = z$, for all $p = = z \in G$, $f_1^{-1}(f(p + A)) = p, f_2^{-1}(f(s + A)) = s$, $P = p + A = s + A$, [1,2].

The $z = f(P - A)|_{P=s} = g(P)|_{P=s} = g(s)$ equality takes place with the same $s = r = p$ too, $P > A, s \in [A, 2A]$, P is the variable in the primary system, and s is the variable in the system with $(-A, 0)$ center, $A > 0$. We get, that the $z = g(s)$ equation of the M set is equivalent to the $z = f(p)$ equation of the same M set of points, (we use $z = f(s) = = f(p)$ always), $s \in [A, 2A], p = s - A, A > 0$. The two different $p \neq P$

[1] e-mail: aa2481632@hotmail.com

variables (the complex arguments) take place for only the M set. It is the second interesting fact, [2, 3].

A new result we can obtain for the complex $z = F(p)$ field too, $F(x + + iy) = f(-x + iy)$ for all $p = x + iy$ complex variables, $p \in G$, [2]. If instead of the OX axis we consider the iOX axis, and instead of the iOY axis we consider the OY axis, we obtain the second $K2$ system of coordinates. If on the coordinate axes in the primary system of coordinates we will change the x, y variables by places, we obtain the third $K3$ system of coordinates. In the $K3$ system the equation of the immobile M set of points (graph) is $z = u(y, x) + v(y, x)i = f(y + ix)$, if the M equation is equal to $z = f(p) = u(y, x) + v(y, x)i$. The OY,iOX axes of K2 system are the result of rotation of the $K3$ system on the $\pi/2$ angle and the change of the new iOX direction on opposite. One of the M equations in the $K2$ and $K3$ systems is the field and other equation is an analytical function, (the same result we obtain from $z = f(i(Y + Xi))|_{X=-x} = = f(x + yi) = u + iv$). But it is obvious, that the M equation in the $K2$ system is a field, (the F field in relation to the $x = y$ diagonal); the M set is immobile for all the systems of coordinates. We use the $z \longrightarrow x + + iy$ correspond for the $z = f(x + iy) = u + iv$ equation is not equal to the $z \longrightarrow ix + y$ correspond in the $K2$ system. The last $z \longrightarrow ix + y$ correspond in $K2$ system is the “field of change” as the correspond of the complex numbers, [2].

References

1. Pavlov A.V., *Principle of indefinite equations in mathematics for different systems of co-ordinates*. // 7th Intern. Conf. on Analysis and Appl. Mathem..: Turkey. Abstract book, 2024, ICAAM, (September 23–28, 2024), Bahcesehir University, p. 77.
2. *Павлов А.В.* Принцип неопределенности для разных систем координат. // Волгоград. Гос. Универ.: Мат. физ. и комп. модел., 2024. – 27, 4. – сс. 17–22.
3. A.V. Pavlov. *Different coordinate systems and periodicity*. // Volgograd State Univer.: Math. Phys. and Computer Simulation. 2023, V. 26, No 3, Pp. 114–118.

OPTIMIZATION OF OPEN QUANTUM SYSTEMS WITH COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS USING INGRAPE METHOD

V. N. Petruhanov,[1] A. N. Pechen[2]

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences; Steklov International Mathematical Center; University of Science and Technology MISIS

Quantum control which studies methods for manipulation of individual quantum systems is an important tool necessary for development of quantum technologies [1]. Often in experimental circumstances controlled systems can not be isolated from the environment, so that they are open quantum systems. Moreover, in some cases the environment can be used for actively controlling quantum systems, as for example in incoherent control [2]. While in some cases the solution for the optimal shape of the control can be obtained analytically, often it is not the case and various numerical optimization methods are needed. A large class of methods are gradient-based numerical optimization algorithms, one of which is GRadient Ascent Pulse Engineering (GRAPE) developed originally for design of NMR pulse sequences [3] and later applied to various problems, e.g. [4, 5].

In this talk, we consider dynamics of open two-level (qubit) and a four-level (two qubits) quantum systems whose evolution is governed by master equation with GKSL-type dissipative terms driven by coherent and incoherent controls [6–8]. General form of the GKSL master equation in the absence of controls was derived in particular in the weak coupling limit and in the stochastic limit of quantum theory. We consider the specific model of such master equation which includes coherent and incoherent controls. We consider different optimization problems for this systems: state transfer and gate generation. The optimization problem problem is formulated as minimization of various objective functionals on states or quantum channels. Those functionals were compared and

[1] e-mail: vadim.petrukhanov@gmail.com
[2] e-mail: apechen@gmail.com

analytically investigated. Optimization was conducted numerically using inGRAPE method [8] which was designed for optimization with incoherent control. We also compared performance of this method with a stochastic optimization method and consider efficiency of GRAPE optimization in four-level closed quantum systems [9].

This work is partially supported by the RSF grant 22-11-00330-P at the Steklov Mathematical Institute and the federal academic leadership program “Priority 2030” (MISIS Strategic Project Quantum Internet).

References

1. Koch C. P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S. J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F. K. *Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe* // EPJ Quant. Tech. (2022), Vol. 9, P.19.
2. Pechen A., Rabitz H. *Teaching the environment to control quantum systems* // Phys. Rev. A. (2006), Vol. 73, P. 062102.
3. Khaneja N., Reiss T., Kehlet C., Schulte-Herbrüggen T., Glaser S. J. *Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithm.* // J. Magn. Res. (2011), Vol. 172, Pp. 296–305.
4. de Fouquieres P., Schirmer S. G., Glaser S. J., Kuprov, I. *Second order gradient ascent pulse engineering.* // J. Magn. Res. (2011), Vol. 212, Pp. 412–417.
5. Pechen A. N., Tannor D. J. *Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps.* // Isr. J. Chem. (2012), Vol. 52, Pp. 467–472.
6. Petruhanov V. N., Pechen A. N. *GRAPE optimization for open quantum systems with time-dependent decoherence rates driven by coherent and incoherent controls.* // J. Phys. A. (2023), Vol. 56, No 30, P. 305303.
7. Petruhanov V. N., Pechen A. N. *Quantum control landscapes for generation of H and T Gates in an open qubit with both coherent and environmental drive.* // Photonics, (2023), Vol. 10, P. 1200.
8. Pechen A. N., Petruhanov, V. N., Morzhin, O. V., Volkov B. O. *Control landscapes for high-fidelity generation of C-NOT and C-PHASE gates with coherent and environmental driving.* // Eur. Phys. J. Plus. (2024), Vol. 139, P. 411.
9. Pechen A. N., Volkov B. O. *Efficiency of maximizing quantum observable mean value for some four-level quantum systems with five-order traps* (in preparation).

О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Пикулин,[1] С. И. Безродных[2]

ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия)

В докладе представлен развитый в работах [1, 2] численно-аналитический метод решения квазилинейных параболических задач для уравнений следующего вида:

$$\partial_t u(x,t) - \lambda\, \partial_{xx}^2 u(x,t) = F\big(x, u, \partial_x u\big), \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, $F(x, u, w)$ — некоторая заданная гладкая функция. Отметим, что класс уравнений (1) включает в себя, в том числе, уравнение Бюргерса при $F = -u\,\partial_x u$, а также уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова [3].

Для искомой функции $u(x,t)$ предполагается выполнение начального условия $u(x,0) = u_0(x)$ и периодических краевых условий $u(0,t) = u(L,t)$, $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t)$ при $t \in (0,T)$ либо условий Дирихле $u(0,t) = \varphi(t)$, $u(L,t) = \psi(t)$ при $t \in (0,T)$, где $u_0(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — заданные функции.

Предлагаемый вычислительный алгоритм включает в себя этап линеаризации, т.е. редукции к последовательности линейных задач. Такая редукция проводится на основе явно-неявной схемы [4] дискретизации по времени, сочетающей явную экстраполяцию Адамса–Бэшфорта для приближения нелинейного члена $F(x, u, \partial_x u)$ и неявную модифицированной схему Кранка–Николсон для аппроксимации оператора теплопроводности, составляющего левую часть уравнения (1).

Высокая эффективность предложенного алгоритма и точность получаемого результата, в том числе при малых значениях коэффициента λ, т. е. в случае сингулярно возмущенной начально-краевой задачи, обусловлены разработанным полуаналитическим методом

[1] e-mail: spikulin@gmail.com

[2] e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

решения линейных задач для уравнения

$$-\frac{1}{\omega^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+y(x)=g(x),\qquad \omega>0,\qquad x\in[0,L], \tag{2}$$

возникающих на каждом шаге по времени, где функция $y(x)$ соответствует искомому приближению на очередном временном слое, а правая часть $g(x)$ является известной функцией. Этот полуаналитический метод использует явный вид фундаментальной системы решений уравнения (2) и имеет алгоритмическую сложность $O(K)$, где K — число узлов пространственной дискретизации.

Отметим также, что в статье [5] применяемый численно-аналитический подход был применен к решению начально-краевых задач для эволюционных уравнений третьего порядка.

Список литературы

1. *Безродных С.И., Пикулин С.В.* Численно-аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием // СМФН. – 69:2 (2023). – сс. 208–223.
2. *Безродных С.И., Пикулин С.В.* Численно-аналитический метод для нелинейных уравнений типа Колмогорова–Петровского–Пискунова // ЖВМ МФ. – 64:11 (2024). – сс. 2019–2045.
3. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980.
4. Hundsdorfer W., Verwer J. *Numerical Solutions of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 2003.
5. *Безродных С.И., Пикулин С.В.* Об одном методе решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера // СМФН (2025). (В печати.)

SOLVING THE BURGERS EQUATION BY THE POWER SERIES BREAKAGE METHOD

M. A. Pisarev, A. E. Rassadin[1]

HSE University

The Burgers equation is known to be the corner stone of nonlinear acoustics. The Cauchy problem for this equation on the straight line looks as follows:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where D is coefficient of viscosity of acoustic media.

One can linearize equation (1) by means of the well-known Cole-Hopf substitution:

$$u(x,t) = -2\,D\,\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi(x,t)\,, \tag{2}$$

where $\varphi(x,t)$ is auxiliary function obeying to the next Cauchy problem for the linear heat equation:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,, \qquad \varphi(x,0) = \exp\left(-\int\limits_0^x \frac{u^0(\xi)}{2\,D}\,d\xi\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

The Poisson integral represents exact solution of the Cauchy problem (3):

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,D\,t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,0)\,\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\,D\,t}\right)d\xi. \tag{4}$$

Formulas (2)–(4) give complete solution of the Cauchy problem (1). However, for an arbitrary initial condition $u^0(x)$ for the Burgers equation, it is often impossible to write out its solution explicitly. Nevertheless, there is a way to estimate a value of acoustic field $u(x,t)$ at time $t >$ > 0 and coordinate x, namely, let one suppose, that the initial condition

[1] e-mail: aerassadin@hse.ru

$u^0(x)$ belongs to the class of real-analytic functions on the entire real axis:

$$u^0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^0 x^k . \tag{5}$$

In this case, it is convenient to search for a solution to the Burgers equation (1) also in the form of a power series:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\, x^k. \tag{6}$$

Substituting power series (6) into he Burgers equation (1) reduces it to the following countable-dimensional system of ordinary differential equations:

$$\dot{u}_k = -\sum_{n=0}^{k} (n+1) u_{n+1}\, u_{k-n} + D\,(k+1)\,(k+2)\, u_{k+2}\,, \tag{7}$$

where the dot above the letter means the time derivative.

The initial conditions for the system (7) are extracted from the power series (5):

$$u_k(0) = u_k^0\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

The report considers approximate solutions of the Cauchy problem (7)–(8), which are obtained numerically as follows: in system (7), starting from a certain k, $u_k(t) = 0$ are assumed, which corresponds to the termination of the power series (6) on a certain term. As test solutions for this procedure a number of exact solutions of the Burgers equation has been used.

The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at HSE University (grant No. 25-00-014, “A new numerical-analytical method for solving Cauchy problems for evolutionary equations and systems of evolutionary equations with quadratic nonlinearity”).

ON THE COMPARISON OF CONVERGENCE RATES OF CLASSICAL ERGODIC AVERAGES FOR UNITARY R^d-ACTIONS

I. V. Podvigin[1]

Sobolev Institute of Mathematics

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space on which the group $\mathbb{R}^d$ acts by unitary transformations $U_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Let $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ be a set with positive finite Lebesgue measure, i.e. $0 < \mathcal{L}_d(\mathcal{K}) < \infty$. Denote $\mathbf{x} \odot \mathbf{t} := (x_1 t_1, x_2 t_2, \ldots, x_d t_d)$ for $\mathbf{t}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Statistical ergodic theorem states that for each vector $h \in \mathcal{H}$

$$I_{\mathcal{K}}(\mathbf{t}) := \left\| \frac{1}{\mathcal{L}_d(\mathcal{K} \odot \mathbf{t})} \int\limits_{\mathcal{K} \odot \mathbf{t}} U_{\mathbf{s}} h \, d\mathcal{L}_d(\mathbf{s}) - Ph \right\|_{\mathcal{H}}^2 \to 0$$

as $t_1, \ldots, t_d \to \infty$, where P is the orthogonal projection on the space of fixed vectors for the group $\{U_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d}$. The rate of convergence in this statement depends on the singularity of the spectral measure σ_{h-Ph} in the neighborhood of zero. As the neighborhoods we will consider standard ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{t}^{-1})$ or parallelepipeds $\Pi(\mathbf{t}^{-1})$.

The talk deals with the comparison of the rates of convergence $I_{\mathcal{K}}(\mathbf{t})$ when the set $\mathcal{K}$ is cub $\square$ or ball $\circ$. For the spectral measure we consider the scale of a power singularity, i.e.

$$\sigma_{h-Ph}(\mathcal{E}(\mathbf{t}^{-1})) \asymp \sigma_{h-Ph}(\Pi(\mathbf{t}^{-1})) = \mathcal{O}(\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}}),$$

where $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) > \mathbf{0}$ and $\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}} = t_1^{-\alpha_1} \cdots t_d^{-\alpha_d}$.

For vector of parameters $\boldsymbol{\alpha}$ denote as $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_d^*)$ the permutation in ascending order of coordinates $\boldsymbol{\alpha}$, i.e. $\alpha_1^* \leqslant \alpha_2^* \leqslant \ldots \leqslant \alpha_d^*$. Among successive differences $a_k^* - a_{k+1}^*$ for $1 \leqslant k \leqslant d-1$ denote $r = r(\boldsymbol{\alpha})$ the number of zero differences. Wó also put

$$m = m(\boldsymbol{\alpha}) = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \alpha_k = \alpha_d^*, \quad \theta = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_d).$$

Then we have the following estimates

[1] e-mail: ipodvigin@math.nsc.ru

	$m \in (0, 2)$	$m = 2$	$m > 2$
$I_{\square}(\mathbf{t})$	$\mathcal{O}(\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}})$	$\mathcal{O}(\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}} \ln^{r+1}(\mathbf{t}^{\boldsymbol{\alpha}}))$	$\mathcal{O}(\mathbf{t}^{-2\boldsymbol{\alpha}/m} \ln^{r}(\mathbf{t}^{\boldsymbol{\alpha}}))$

	$\theta \in (-(d+1), 0)$	$\theta = -(d+1)$	$\theta < -(d+1)$
$I_{\bigcirc}(\mathbf{t})$	$\mathcal{O}(\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}})$	$\mathcal{O}(\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}} \ln(\mathbf{t}^{\boldsymbol{\alpha}}))$	$\mathcal{O}(\mathbf{t}^{\boldsymbol{\alpha}(d+1)/\theta})$

CONTINUOUS DEPENDENCE ON A PARAMETER IN THE OPTIMAL TRANSPORTATION PROBLEM

S. N. Popova[1]

National Research University Higher School of Economics

We recall that, given two Borel probability measures μ and ν on topological spaces X and Y respectively and a nonnegative Borel function h on $X\times Y$, the Kantorovich optimal transportation problem concerns minimization of the integral

$$K_h(\mu,\nu) = \inf\left\{\int h\,d\sigma : \sigma \in \Pi(\mu,\nu)\right\}$$

over all measures σ in the set $\Pi(\mu,\nu)$ consisting of Borel probability measures on $X\times Y$ with projections μ and ν on the factors, that is, $\sigma(A\times Y) = \mu(A)$ and $\sigma(X\times B) = \nu(B)$ for all Borel sets $A \subset X$ and $B \subset Y$. The measures μ and ν are called marginal distributions or marginals, and h is called a cost function. In general, there is only infimum $K_h(\mu,\nu)$, which may be infinite. If the cost function h is continuous and bounded and the measures μ and ν are Radon, then the minimum is attained and measures on which it is attained are called optimal measures or optimal Kantorovich plans.

The Monge problem for the same triple (μ,ν,h) consists in finding a Borel mapping $T\colon X \to Y$ taking μ into ν, that is $\nu = \mu\circ T^{-1}$, $(\mu\circ T^{-1})(B) = \mu(T^{-1}(B))$ for all Borel sets $B \subset Y$, for which the integral

$$M_h(\mu,\nu) = \inf\left\{\int h(x,T(x))\,\mu(dx) : \mu\circ T^{-1} = \nu\right\}$$

is minimal. In general, there is only infimum $M_h(\mu,\nu)$ (possibly, infinite), but in many interesting cases there exist optimal Monge mappings. In any case, $K_h(\mu,\nu) \leqslant M_h(\mu,\nu)$, but if both measures are Radon and separable, μ has no atoms and the cost function h is continuous, then $K_h(\mu,\nu) = M_h(\mu,\nu)$.

In this work we consider optimal transportation problem in the case where the cost function h_t and marginal distributions μ_t and ν_t depend

[1] e-mail: popovaclaire@mail.ru

on a parameter t with values in a metric space. We address the questions about the continuity with respect to t of the optimal cost $K_{h_t}(\mu_t, \nu_t)$ and also about the possibility to select optimal Kantorovich plans in $\Pi(\mu_t, \nu_t)$ continuous with respect to the parameter. We show that the cost of optimal transportation is continuous with respect to the parameter in the case of continuous dependence of the cost function and marginal distributions on this parameter. However, it is not always possible to select an optimal plan continuously depending on the parameter t. The situation improves for approximate optimal plans. Given $\varepsilon > 0$, a measure $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ is called ε-optimal for the cost function h if

$$\int h\, d\sigma \leqslant K_h(\mu, \nu) + \varepsilon.$$

We prove that it is possible to select approximate optimal plans continuous with respect to the parameter. Furthermore, we consider the question about the continuous selection of optimal Monge mappings. In the case where there are unique optimal Kantorovich plans which are generated by Monge mappings we show that the optimal Monge mappings continuously depend on the parameter in the sense of convergence in measure. Without the assumption of uniqueness we obtain the existence of approximate optimal Monge mappings continuous with respect to the parameter.

О МЕРЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССА ЛИПШИЦА НА ОТРЕЗКЕ НЕКОТОРЫМИ СУММАМИ РИССА

П. Г. Поцейко,[1] Е. А. Ровба[2]

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Республика Беларусь)

Величина

$$\mathcal{E}(\mathcal{K}, U_n)_X = \sup_{f \in \mathcal{K}} ||f(x) - U_n(f, x)||_X,$$

введенная С. М. Никольским [1], где $\mathcal{K}$ — некоторый класс в пространстве X, называется мерой приближения всего класса $\mathcal{K}$ методом U_n. Задача об отыскании асимптотических равенств для величин $\mathcal{E}(\mathcal{K}, U_n)_X$ была и остается одной из наиболее важных в теории аппроксимаций и в теории рядов Фурье. Эта задача имеет богатую историю, связанную с именами крупнейших специалистов в теории функций.

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\varphi_n(x)$ — ряд Фурье функции f по ортогональной системе $\varphi_n(x)$ $n = 0, 1, \ldots$. Выражения

$$R_n^{\lambda,\delta}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\lambda}\right)^{\delta} a_k(f)\varphi_k(x),\ \delta, \lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

называются [2] суммами Рисса ортогональных рядов Фурье. В работе [3] был исследован вариант суммирования Рисса тригонометрических рядов Фурье с треугольной матрицей коэффициентов Λ, в которой $\lambda = 1$, $\delta = 2$. Этот метод приближений обладает рядом замечательных свойств. В частности, оператор, построенный на основании этого метода суммирования, имеет положительное ядро.

По аналогии с цитируемой работой, введем суммы Рисса, ассо-

[1] e-mail: pahamatby@gmail.com
[2] e-mail: rovba.ea@gmail.com

циированные с системой полиномов Чебышёва первого рода:

$$R_n^{1,2}(f,x) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(2(n-k)+1)s_k(f,x), \qquad x\in[-1,1], \quad n=0,1,2\dots,$$

где $s_k(f,x)$, $k=0,1,\dots,n$, — частичные суммы ряда Фурье–Чебышёва.

Для сумм Рисса $R_n^{1,2}(f,x)$ имеет место [4] интегральное представление

$$R_n^{1,2}(f,x) = \\ = \frac{1}{4\pi(n+1)^2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos(t+u))\,\frac{(2n+2)\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\sin((n+1)t)}{\sin^3\frac{t}{2}}\,dv, \qquad x=\cos u,$$

и оператор $R_n^{1,2}$ является положительным.

В докладе предполагается осветить результаты исследований приближений суммами Рисса на классах $H^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma\in(0,1]$, функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица порядка γ с константой, равной единице. Изучается асимптотическое поведение при $n\to\infty$ меры приближения класса $H^{(\gamma)}[-1,1]$ введенными суммами Рисса, то есть следующей величины

$$\mathcal{E}(H^{(\gamma)}[-1,1],x,R_n^{1,2}) = \sup_{f\in H^{(\gamma)}[-1,1]} |f(x)-R_n^{1,2}(f,x)|.$$

Теорема 1. *Для приближений на классах $H^{(\gamma)}[-1,1]$ при $n\to\infty$ равномерно относительно $x\in[-1,1]$ справедливы асимптотические равенства:*

$$\mathcal{E}_n(H^{(\gamma)}[-1,1],x,R_n^{1,2}) = \\ = \frac{4\Gamma(\gamma)(\sqrt{1-x^2})^\gamma}{\pi(1-\gamma)(2-\gamma)(n+1)^\gamma}\sin\frac{\pi\gamma}{2} + o\left(\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right)^\gamma\right) + \delta_n^{(\gamma)}(x),$$

если $\gamma\in(0,1)$ и

$$\mathcal{E}_n(H^{(1)}[-1,1],x,R_n^{1,2}) =$$

$$= \frac{4\sqrt{1-x^2}\ln(n+1)}{\pi(n+1)} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) + \delta_n^{(1)}(x),$$

если $\gamma = 1$*, где*

$$\delta_n^{(\gamma)}(x)=O\left(\left(\frac{\sqrt{|x|}}{n+1}\right)^{2\gamma}\right), \quad \gamma \in (0, 1/2), \quad \delta_n^{(\frac{1}{2})}(x)=O\left(\frac{\sqrt{|x|}\ln(n+1)}{n+1}\right),$$

$$\delta_n^{(\gamma)}(x) = O\left(\frac{|x|^\gamma}{n+1}\right), \quad \gamma \in (1/2, 1].$$

Список литературы

1. *Никольский С. М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501–508.
2. Hardy G. H., Riesz M., *The general theory of Dirichlet's series*, / Cambridge University Press, 1915. 78 p.
3. Szász, O., *On the Cesáro and Riesz means of Fourier series*, // Compositio Mathematica, 1940, V. 7. Pp. 112–122.
4. Rouba, Y., Patseika P., Smatrytski K. *On a Riesz summation method of rational Fourier–Chebyshev integral operators and approximations of functions with a power singularity*, // Analysis math. 2025. Vol. 51, iss, 2. Pp. XXX–XXX.

ОБ ОПИСАНИИ АССОЦИИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ К НЕКОТОРЫМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВАМ

Д. В. Прохоров[1]

ВЦ ДВО РАН

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}^n$ — n-мерная мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P} \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$. Для измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^n$ символом $\mathcal{M}^n_{\mathbb{P}}(E)$ обозначим семейство всех классов $\mathcal{L}^n$-п.в. совпадающих $\mathcal{L}^n$-измеримых функций, действующих из E в $\mathbb{P}$.

Тогда $\mathcal{M}^n_{\overline{\mathbb{R}}}(E)$ суть вещественное векторное пространство, а $\mathcal{M}^n_{\mathbb{C}}(E)$ — комплексное векторное пространство.

Пусть X — векторное подпространство пространства $\mathcal{M}^n_{\mathbb{P}}(E)$, и на X задана полунорма $p_X : X \to [0, \infty)$. «Сильное» ассоциированное к X пространство определяется равенством

$$X'_{\mathrm{s}} := (X, p_X)'_{\mathrm{s}} := \left\{ g \in \mathcal{M}^n_{\mathbb{P}}(E) \,\middle|\, \exists C_{\mathrm{s}}(g) > 0 : \int\limits_E |hg| \, d\mathcal{L}^n \leqslant C_{\mathrm{s}}(g) \, p_X(h), \quad \forall h \in X \right\},$$

а «слабое» ассоциированное к X пространство равенством

$$X'_{\mathrm{w}} := (X, p_X)'_{\mathrm{w}} := \left\{ g \in \mathcal{M}^n_{\mathbb{P}}(E) \,\middle|\, fg \in L_1(E), \ \forall f \in X \ \ \exists C_{\mathrm{w}}(g) > 0 : \left| \int\limits_E hg \, d\mathcal{L}^n \right| \leqslant C_{\mathrm{w}}(g) \, p_X(h), \ \forall h \in X \right\}.$$

Ясно, что $X'_{\mathrm{s}} \subset X'_{\mathrm{w}}$. Если p_X норма, то (X, p_X) суть ТВП, и пространство X'_{w} изоморфно подпространству пространства $(X, p_X)^*$, состоящему из всех непрерывных линейных функционалов вида $f \mapsto \int\limits_E fg \, d\mathcal{L}^n$, $f \in X$. Также положим $\|g\|_{X'_{\mathrm{s}}} := \inf C_{\mathrm{s}}(g)$ для $g \in X'_{\mathrm{s}}$, и $\|g\|_{X'_{\mathrm{w}}} := \inf C_{\mathrm{w}}(g)$ для $g \in X'_{\mathrm{w}}$.

[1] e-mail: prohorov@as.khb.ru

Если $(X, \|\cdot\|_X)$ Банахово функциональное пространство (БФП) в смысле определения [1, Chapter 1, 1.3], то X_s' и X_w' совпадают и $\|g\|_{X_{\mathrm{w}}'} = \|g\|_{X_{\mathrm{s}}'}$ для любого $g \in X_{\mathrm{w}}'$.

В докладе представлены некоторые результаты об ассоциированных пространствах к пространствам (не являющимся БФП): Харди $H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, типа Чезаро $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}((0,\infty))$.

Список литературы

1. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*. Boston, MA etc.: Academic Press, Inc., 1988.

ОПЕРАТОРЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА И СПЕКТРАЛЬНАЯ

В. А. Пчелинцев[1]

Томский государственный университет

В данной работе рассматривается спектральная задача Неймана для оператора Лапласа

$$-\Delta u = \mu u \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \tag{1}$$

в ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, допускающих продолжения функций классов Соболева.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область (открытое связное множество). Напомним, что линейный ограниченный оператор

$$E : L^1_2(\Omega) \to L^1_2(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

удовлетворяющий условиям

$$Eu|_\Omega = u \quad \text{и} \quad \|E\| := \sup_{u \in L^1_2(\Omega)} \frac{\|Eu \mid L^1_2(\mathbb{R}^n)\|}{\|u \mid L^1_2(\Omega)\|} < \infty$$

называется линейным ограниченным оператором продолжения.

Будем говорить, что Ω является областью, допускающая продолжение функций из L^1_2, если существует линейный ограниченный оператор продолжения (2). Этот класс включает липшицевы области, а также области с неспрямляемыми границами [3].

Согласно принципу минимакса [2] первое нетривиальное собственное число $\mu_1(\Omega)$ задачи (1) может быть представлено как

$$\mu_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}} : u \in W^1_2(\Omega) \setminus \{0\}, \quad \int\limits_\Omega u\, dx = 0 \right\}.$$

Известно [2], что если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, допускающая продолжение функций из L^1_2, то спектр оператора Лапласа задачи Неймана

[1] e-mail: va-pchelintsev@yandex.ru

в Ω является точечным и может быть записан в виде неубывающей последовательности

$$0 = \mu_0(\Omega) < \mu_1(\Omega) \leqslant \mu_2(\Omega) \leqslant \ldots \leqslant \mu_n(\Omega) \leqslant \ldots .$$

В таких областях имеет место [1]:

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, допускающая продолжение функций из L^1_2. Тогда справедливо неравенство*

$$\mu_1(\Omega) \geqslant \left(\frac{1}{\|E_\Omega\|}\,\frac{p_{n/2}}{R_\Omega}\right)^2,$$

где R_Ω — радиус наименьшего описанного шара B_Ω около Ω, $p_{n/2}$ — первый положительный корень функции $\left(t^{1-n/2}J_{n/2}(t)\right)'$ и $\|E_\Omega\|$ — норма линейного ограниченного оператора продолжения

$$E_\Omega : L^1_2(\Omega) \to L^1_2(B_\Omega).$$

Список литературы

1. Gol'dshtein V., Pchelintsev V., Ukhlov A. *Sobolev extension operators and Neumann eigenvalues* // J. Spectr. Theory. – 2020. – Vol. 10. – P. 337–353.
2. Maz'ya V. *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*. Second, revised and augmented edition. – Berlin: Springer, 2011. – 866 p.
3. Jones P.W. *Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces*. // Acta Math. – 1981. – Vol. 147, no. 1–2. – Pp. 71–88.

EXISTENCE OF A PROPAGATION CONE FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A FRACTIONAL-EXPONENTIAL MEMORY FUNCTION

N. A. Rautian[1]

Lomonosov Moscow State University

We study the linear Volterra integro-differential operator, which is a one-dimensional wave linear partial differential operator perturbed by the Volterra convolution integral operator. The kernel function of the integral operator is the sum of fractional exponential functions (Rabotnov functions) with positive coefficients. It is established that the support of the fundamental solution of the integro-differential operator under study is localized in the cone of propagation of the corresponding one-dimensional wave differential operator. The corresponding Volterra integro-differential equation describes the oscillations of a one-dimensional viscoelastic rod, the process of heat propagation in media with memory (the Gurtin–Pipkin equation) and has a number of other important applications.

The presented results are a continuation and development of research published in the works [1], [2].

References

1. Rautian N.A. *On the properties of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals*. // Differential Equations, 57:9 (2021), Pp. 1231–1248.
2. Rautian N.A. *Representations of solutions for Volterra integro-differential equations in Hilbert spaces*. // Doklady Mathematics, 109:3 (2024), Pp. 262–267.

[1] e-mail: nrautian@mail.ru

ESTIMATES ON THE RATE OF CONVERGENCE CHERNOFF APPROXIMATIONS TO C_0-SEMIGROUPS

O. E. Galkin,[1] I. D. Remizov[1,2]

The exponential of a finite matrix and of a linear bounded operator in an infinite-dimensional Banach space can be defined by a standard power series for the exponential, which converges in the usual norm of operators—completely analogous to finding the exponential of a real number. If the operator is closed but unbounded, then it is not defined everywhere and the series in its powers is a very inconvenient object, and it is not suitable for defining the exponential.

However, a reasonable analogue of the exponential for an unbounded operator does exist, the corresponding object is called a strongly continuous one-parameter semigroup of operators (the short name for this object is C_0-semigroup). Unlike the power series, the definition of a C_0-semigroup does not provide any method for calculating the exponential even approximately. Nevertheless, such methods exist, but they require calculating the resolvent of the operator, and this is often a difficult task. However, if the so-called operator-valued Chernoff function for the operator A is known, then the exponential of A can be expressed as the limit of the product of some bounded operators constructed from the Chernoff function with the number of factors tending to infinity. Chernoff's theorem is an infinite-dimensional version of the theorem on the "second remarkable limit" from the course of elementary analysis.

The speakers managed to prove approximately the following: if the Chernoff function has the same Taylor polynomial of order k as the semigroup and deviates little from its Taylor polynomial, then the Chernoff approximations of the semigroup constructed from this Chernoff function have a convergence rate no worse than about $1/n^k$, where n is the approximation number. Note that even the one-dimensional analogue of this result is nontrivial—when the exponential is calculated not from the operator, but from a real number.

[1] HSE University (Nizhny Novgorod)
[2] IITP RAS (Moscow)
e-mail: ivremizov@yandex.ru

The report will provide an elementary introduction to the topic, discuss applications, and formulate a theorem on estimates for the rate of convergence of Chernoff approximations that was announced in [1] and published with the full proof in [2].

References

1. O.E. Galkin, I.D. Remizov. *Rate of Convergence of Chernoff Approximations of Operator C_0-Semigroups*, // Math. Notes, 111:2 (2022), 305–307.
2. O.E. Galkin, I.D. Remizov. *Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators*, // Isr. J. Math. (2024). URL: https://doi.org/10.1007/s11856-024-2678-x .

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С МНОГОМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ И СУММИРУЕМОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Г. Л. Россовский[1]

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы; РТУ МИРЭА, Москва, Россия

Пусть a — вещественный параметр, а $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ — вещественный вектор в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим параболическое дифференциально-разностное уравнение со сдвигом по пространственной переменной в младшем члене:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x) + au(x-h,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{1}$$

вместе со следующим начальным условием:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Также определим функцию

$$\mathcal{E}_n(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(-|\xi|^2 + a\cos h\xi)t} \cdot \cos\left(x\xi - at\sin h\xi\right) d\xi \tag{3}$$

в полупространстве $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Эта функция может быть получена формальным применением преобразования Фурье по пространственным переменным к исходному уравнению (1). Как было показано в работах [1, 2] эта функция удовлетворяет уравнению (1) в полупространстве $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ в классическом смысле и называется ядром Пуассона.

Решение поставленной задачи (1)–(2) представляется в виде свертки ядра Пуассона (3) и начальной функции (2):

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n(x-\xi,t) \cdot u_0(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

[1] e-mail: grossovski@yandex.ru

Теорема 1. *Функция* (4) *удовлетворяет задаче Коши* (1)–(2) *в смысле обобщенных функций и удовлетворяет уравнению* (1) *в классическом смысле.*

Далее иследуются качественные характеристики и поведение решения и его производных при $t \to \infty$.

После исследования функции, стоящей в степени у экпоненты в подынтегральной функции в (3) получаем следующее достаточное условие равномерной сходимости самого интеграла (4). Это условие явным образом связывает коэффициент перед младшим членом уравнения (1) и величину сдвига.

$$|a| \cdot |\tilde{h}|^2 \leqslant 2. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (5). *Тогда решение* (4) *задачи Коши* (1)–(2) *сходится к нулю при* $t \to \infty$ *равномерно по* $x \in \in \mathbb{R}^n$. *Скорость сходимости может быть оценена следующим неравенством:*

$$|u(x,t)| \leqslant C \cdot \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{t^{n/2}},$$

где C *постоянна.*

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (5). *Тогда частные производные решения* (4) *задачи Коши* (1)–(2) *произвольного порядка* $m + + k$ *(здесь* $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ *и* $m, k \in \mathbb{N}$*) сходятся к нулю при* $t \to \infty$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$. *Скорость убывания может быть оценена следующими неравенствами:*

$$\left| \frac{\partial^{m+k} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n} \partial t^k} \right| \leqslant \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{(2\pi)^n} \left[Ce^{-a_0 t} + \sum_{j=0}^{k} C_j \, \frac{1}{t^{(m+n+2j)/2}} \right],$$

где C, C_j, $j = 0, .., k$ *постоянны.*

Список литературы

1. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши. – СМФН. – 52 (**2014**). – сс. 3–141.
2. Muravnik A.B., Rossovskii G.L., *Cauchy Problem with Summable Initial-Value Functions for Parabolic Equations with Translated Potentials.* // MDPI Mathematics, 12(6) (**2024**), 895.

МЕРЫ, ФУНКЦИИ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

В. Ж. Сакбаев[1]

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Московский Физико-Технический Институт (НИУ)

Изучаются свойства пространств функций на бесконечномерном гильбертовом пространстве, обладающих последовательностью квадратично интегрируемых по мере Лебега–Фейнмана производных произвольного порядка вдоль базисных направлений, суммируемых с некоторым операторным весом. На гильбертовом пространстве вводится неотрицательная трансляционно инвариантная мера Лебега–Фейнмана, служащая аналогом меры Лебега на конечномерном евклидовом пространстве. Вводятся аналоги пространства гладких функций, пространств Соболева. Устанавливаются теоремы вложения и теоремы о следах для функций из пространств Соболева. Изучены приложения исследуемых функциональных пространств к дифференциальным уравнениям и краевым задачам. Для бесконечномерных областей ставится задача Дирихле для уравнения Пуассона. С помощью вариационного метода устанавливается существование и единственность ее решения.

[1] e-mail: fumi2003@mail.ru

К ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТАМ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ БИРКГОФА

В. М. Савчин,[1] Ф. Т. Чинь[2]

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы

1. Постановка задачи.

Пусть состояние бесконечномерной потенциальной системы определяется вектор-функцией

$$u\,(x,t) = \left(u^1(x,t), u^2(x,t), \ldots, u^{2n}(x,t)\right)^{\mathbb{T}}, \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T),$$

где Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Предположим, что при этом действие по Гамильтону имеет вид

$$F\,[u] = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i\,(x,t,u_\alpha)\, u_t^i - B\,(u_\alpha)\right] dxdt, \tag{1}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\,, |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, |\alpha| = \overline{0,s},$$

где $R_i = R_i\,(x,t,u_\alpha)$, $B = B\,(u_\alpha)$ — заданные достаточно гладкие функции, $u_t^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}$, $i = \overline{1,2n}$, $u_\alpha = D_\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial x_2)^{\alpha_2}\cdots(\partial x_m)^{\alpha_m}}$.

Будем рассматривать функционал (1) на множестве

$$D\,(N) = \Bigg\{ u \in U = \left(U^1, \ldots, U^{2n}\right)^{\mathbb{T}} : u^i \in U^i = C^{2s,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right) : \\ u^i\big|_{t=0} = \varphi_0^i\,(x)\,, \quad u^i\big|_{t=T} = \varphi_1^i\,(x)\,, \\ \left.\frac{\partial^\nu u^i}{\partial n_x^\nu}\right|_{\Gamma_T} = \psi_\nu^i\,(x,t)\,, \quad i = \overline{1,2n}, \quad |\nu| = \overline{0,s-1} \Bigg\},$$

[1] e-mail: savchin_vm@pfur.ru
[2] e-mail: tr.phuoctoan@gmail.com

где $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, n_x — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; φ_0^i, φ_1^i, $\psi_\nu^i\,(x, t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

2. Уравнения движения.

Теорема 1. *Экстремали функционала* (1) *являются решениями системы уравнений*

$$N_i \equiv \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \left[\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial R_k}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{\partial R_i}{\partial u_\beta^k} \right] D_\beta u_t^k - \frac{\partial R_i}{\partial t} -$$

$$- \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}, \qquad (2)$$

где

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_m}{\beta_m}, & \text{если } \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\} : \alpha_i \geqslant \beta_i, \\ 0, & \text{если } \exists i \in \{1, 2, \cdots, m\} : \alpha_i < \beta_i, \end{cases}$$

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i!\,(\alpha_i - \beta_i)!}\,.$$

Отметим, что из (2) как частный случай следуют уравнения Биркгофа [1, 2].

3. Интегральные инварианты.

Пусть $u = u\,(\lambda; x, t)$, $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$ — произвольное однопараметрическое множество элементов из U непрерывно дифференцируемых по λ. Его можно рассматривать как кривую C в U. Будем считать, что $u\,(0; x, t) = u\,(1; x, t)\ \forall\,(x, t) \in Q_T$, т.е. кривая замкнута.

Введём обозначение: $\delta u = \dfrac{\partial u\,(\lambda; x, t)}{\partial \lambda}\, d\lambda$.

Теорема 2. *Система уравнений* (2) *имеет относительный интегральный инвариант первого порядка вида*

$$\int_\Lambda \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i dx = \oint_C \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i dx.$$

4. Заключение.

Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получена достаточно общая система уравнений движения для бесконечномерных систем. В частном случае из них следуют известные уравнения Биркгофа. Найден линейный относительный интегральный инвариант первого порядка для системы (2).

Список литературы

1. Birkhoff G.D., *Dynamical systems*. New York: American Mathematical Society, 1927, 295 p.
2. Santilli R.M., *Foundations of Theoretical Mechanics II: Birkhoffian Generalizations of Hamiltonian Mechanics*. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983, 371 p.

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОНЦАМИ

А. Ю. Савин[1]

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Рассматриваются некомпактные гладкие многообразия, которые вне компактного подмногообразия являются периодическими, т.е. диффеоморфны окрестности бесконечности в бесконечном циклическом накрытии. На таких многообразиях строится эллиптическая теория для дифференциальных операторов с коэффициентами периодическими на бесконечности. Эллиптические операторы в близких ситуациях рассматривались Рабиновичем, Таубсом, Мровкой, Руберманом, Савельевым, и др. Известно условие эллиптичности таких операторов, которое обеспечивает фредгольмову разрешимость в соответствующих пространствах Соболева. Это условие состоит в требовании обратимости главного символа. При этом главный символ представляет собой пару, состоящую из внутреннего символа — скалярной функции на кокасательном расслоении многообразия, и специального операторно-значного символа на бесконечности. На множестве таких операторов вводится отношение эквивалентности — стабильная гомотопия. При этом множество классов эквивалентности является абелевой группой относительно прямой суммы операторов. Основной результат состоит в вычислении этой абелевой группы в топологических терминах. В случае, когда на многообразии существует оператор Дирака, мы показываем, что рассматриваемая абелева группа порождается операторами Дирака, скрученными при помощи векторных расслоений.

[1] e-mail: a.yu.savin@gmail.com

О ПОВЕДЕНИИ ПОЛЮСОВ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ЛОРАНА

А. П. Старовойтов,[1] И. В. Кругликов[2]

*Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины*

Множество k-мерных мультииндексов обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядком мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ назовём сумму $m = m_1 + \ldots + m_k$.

Обозначим через L_p множество всех рациональных дробей вида

$$Q(z) = \frac{a_{-i}}{z^i} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_i z^i, \quad i \leqslant p.$$

Функцию $Q \in L_p$ будем называть обобщенным многочленом степени не выше p.

Пусть $\mathbf{f}^{\mathbf{L}} = (f_1, \ldots, f_k)$ — система, состоящая из k рядов Лорана,

$$f_j(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^j z^l, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Рассмотрим следующий аналог задачи Эрмита–Паде [1, глава 4, § 1] для системы $\mathbf{f}^{\mathbf{L}}$:

Задача HL. Для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и набора $\mathbf{f}^{\mathbf{L}}$ найти тождественно не равный нулю обобщенный многочлен многочлен $Q_m(z) = Q_{n,\vec{m}}(z; \mathbf{f}^{\mathbf{L}}) \in L_m$, и такие обобщенные многочлены $P_{n_j}(z) = P_{n_j,n,\vec{m}}(z; \mathbf{f}^{\mathbf{L}}) \in L_{n_j}$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы

$$\left(Q_m f_j - P_{n_j}\right)(z) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \left(\tilde{c}_l^j z^l + \frac{\tilde{c}_{-l}^j}{z^l}\right), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Аппроксимациями Эрмита–Лорана будем называть рациональные дроби вида $[n_j, \vec{m}]_{\mathbf{f}^{\mathbf{L}}}(z) := P_{n_j}(z)/Q_m(z)$, где обобщённые мно-

[1] e-mail: svoitov@gsu.by
[2] e-mail: igor.v.kruglikov@gmail.com

гочлены P_{n_j} и Q_m являются решением задачи **HL**. Будем говорить, что задача **HL** имеет единственное решение, если решение единственно с точностью до числового множителя.

Введём в рассмотрение следующие матрицы и определители $(j = 1, \dots, k)$:

$$E_m(z) = \left(z^{-m} \ \dots \ z^{-1} \ 1 \ \ z \ \dots \ z^m\right),$$

$$\mathbb{C}_l^j = \left(c_{l+m}^j \ \dots \ c_{l+1}^j \ c_l^j \ c_{l-1}^j \ \dots \ c_{l-m}^j\right),$$

$$F_+^j = \left[\mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \ \dots \ \mathbb{C}_{n_j+1}^j\right]^T,$$

$$F_-^j = \left[\mathbb{C}_{-n_j-1}^j \ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \ \dots \ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j\right]^T,$$

$$D(n, \vec{m}; z) = \det\left[F_+^k \ \dots \ F_+^1 \ E_m(z) \ F_-^1 \ \dots \ F_-{}^k\right]^T.$$

Обозначим через $H_{n,\vec{m}}(\mathbf{f}^{\mathbf{L}})$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \vec{m}; z)$ после удаления в нём $(m+1)$-ой строки $E_m(z)$. Если в определителе $D(n, \vec{m}; z)$ строку $E_m(z)$ заменить на строку $\mathbb{C}_l^j$, получим новый определитель $d_l^j(n, \vec{m})$.

Теорема. *Задача* ***HL*** *всегда имеет решение. Для того, чтобы для мультииндекса $(n, \vec{m})$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$ задача* ***HL*** *имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} H_{n,\vec{m}}(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{L}}) = 2m$. *Если* $\operatorname{rank} H_{n,\vec{m}}(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{L}}) = 2m$, *то при подходящей нормировке и $j = 1, \dots, k$ справедливы равенства*

$$Q_{n,\vec{m}}(z; \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{L}}) = D(n, \vec{m}; z),$$

$$P_{n,n_j,\vec{m}}(z; \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{L}}) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \vec{m}) z^p,$$

$$\left(Q_m f_j - P_{n_j}\right)(z) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left\{d_p^j(n, \vec{m}) z^p + d_{-p}^j(n, \vec{m}) z^{-p}\right\}.$$

Предположим теперь, что $c_{\pm n}^j \neq 0$ при $n \geqslant n_0$, $j = 1, \dots, k$, и *существуют пределы*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n^j}{c_{n+1}^j}=z_j\neq 0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{c_{-n}^j}{c_{-n-1}^j}=\frac{1}{z_{-j}}\neq\infty,\quad |z_{-j}|<|z_j|,$$

где комплексные числа $\{z_{\pm j}\}_{j=1}^k$ *попарно различны. По теореме Фабри точки* $z_{\pm j}$ *являются особыми точками* f_j*, и в кольце* $K_j=\{z: |z_{-j}|<|z|<|z_j|$ *функция* f_j *аналитична. Пусть* $\vec{1}=(1,\ldots,1)\in\mathbb{Z}^k$*. Пронормируем дробь* $[n_j,\vec{1}]_{f^{\mathrm{L}}}$*, умножив её числитель и знаменатель на* $1/\lambda_n$*, где* $\lambda_n=\prod\limits_{j=1}^k c_{n+2m}^j c_{-n-2m}^j$*. Тогда*

$$\lim_{n\to+\infty}Q_{n,\vec{1}}(z)/\lambda_n=Az^{-k}\prod_{j=1}^k(z-z_j)(z-z_{-j}),$$

где A *— ненулевая константа.*

Таким образом аппроксимации Эрмита–Лорана $[n_j,\vec{1}]_{\mathbf{f}^{\mathrm{L}}}$ при $n\to+\infty$ ведут себя также, как и классические аппроксимации Паде: они локализуют особые точки функции f_j на границе её кольца аналитичности.

Список литературы

1. *Никишин Е.М., Сорокин В.Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. – М. : Наука, 1988. – 256 с.

THREE-MAGNON SYSTEMS IN THE HEISENBERG MODEL

S. M. Tashpulatov[1]

Institute of Nuclear Physics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

In the work S. Tashpulatov [1], was considered the three-magnon system in an isotropic non-Heisenberg ferromagnet model with spin values $s = 1$ with the nearest neighbors interactions. We consider the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system. Hamiltonian of the system has the form $H = J \sum\limits_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau})$, where $J < 0$ is the parameter of the bilinear exchange interaction between atoms, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the operator of the atomic spin $\frac{1}{2}$ at the site m, and summation over τ ranges the nearest neighbors. Hamiltonian H acts in a symmetric complex Fock space $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$. We let φ_0 denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions $S_m^+\varphi_0 = 0$ and $S_m^z\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0$, where $||\varphi_0|| = 1$. We set $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, where S_m^- and S_m^+ are the magnon creation and annihilation operators at the site m. The vector $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ describes the state of the system of three magnons at the sites p, q and r with spin $s = \frac{1}{2}$. The vectors $\psi = \sum\limits_{p,q,r} f(p,q,r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ constitute an orthonormal system. We let $\mathcal{H}_3$ denote the closure of this space of three-magnon states of operator H.

Theorem 1. *The space $\mathcal{H}_3$ is invariant with respect to the operator H. The operator H_3 is a bounded self-adjoint operator. It generates bounded self-adjoint operator $\overline{H}_3$, acting in the space $l_2((Z^\nu)^3)$ according to the formula*

$(\overline{H}_3 f)(p,q,r) =$

[1] e-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

$$= J\sum_{\tau}\Bigg[\{\delta_{p,q+\tau}+\delta_{p+\tau,q}+\delta_{p,r+\tau}+\delta_{p+\tau,r}+\delta_{q,r+\tau}+\delta_{q+\tau,r}-3\}f(p,q,r)-$$
$$-\frac{1}{2}\,\delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q,r)-\frac{1}{2}\,\delta_{p-\tau,r}f(p-\tau,q,r)-\frac{1}{2}\,\delta_{q-\tau,r}f(p,q-\tau,r)-$$
$$-\frac{1}{2}\,\delta_{q,r-\tau}f(p,q,r-\tau)-\frac{1}{2}\,\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau,r)-\frac{1}{2}\,\delta_{p,r-\tau}f(p,q,r-\tau)+$$
$$+\frac{1}{2}\,f(p-\tau,q,r)+\frac{1}{2}\,f(p,q-\tau,r)+\frac{1}{2}\,f(p,q,r-\tau)-$$
$$-\frac{1}{2}\,\delta_{p+\tau,q}f(p+\tau,q,r)-\frac{1}{2}\,\delta_{p+\tau,r}f(p+\tau,q,r)-\frac{1}{2}\,\delta_{q+\tau,r}f(p,q+\tau,r)-$$
$$-\frac{1}{2}\,\delta_{q,r+\tau}f(p,q,r+\tau)-\frac{1}{2}\,\delta_{p,q+\tau}f(p,q+\tau,r)-\frac{1}{2}\,\delta_{p,r+\tau}f(p,q,r+\tau)+$$
$$+\frac{1}{2}\,f(p+\tau,q,r)+\frac{1}{2}\,f(p,q+\tau,r)+\frac{1}{2}\,f(p,q,r+\tau)\Bigg], \quad (1)$$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator H_3 acts on the vector $\psi \in \mathcal{H}_3$ according to the formula $H_3\psi = \sum\limits_{p,q,r} (\overline{H}_3 f)(p,q,r)S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$.

We let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform:

$$\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^3) \to L_2((T^\nu)^3) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_3,$$

where T^ν is the ν-dimensional torus with the normalized Lebesgue measure $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$. We set $\widetilde{H}_3 = \mathcal{F}\overline{H}_3\mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 2. *The Fourier transformation transforms the operator $\overline{H}_3$ into the bounded self-adjoint operator $\widetilde{H}_3$ acting in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_3$.*

We let $\mathcal{H}_2$ denote the space of two-magnon states of the operator H. We let H_2 denote the restriction of operator H to the space $\mathcal{H}_2$.

Theorem 3. *The space $\mathcal{H}_2$ is invariant with respect of the operator H. The operator H_2 is a bounded self-adjoint operator. It generates the bounded self-adjoint operator $\overline{H}_2$, acting in the space $l_2((Z^\nu)^2)$ according to the formula*

$$(\overline{H}_2 f)(p,q) = J\sum_{\tau}\big\{[\delta_{p,q+\tau}+\delta_{p+\tau,q}-2]f(p,q)-\delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q)-$$
$$-\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau)+f(p-\tau,q)+f(p,q-\tau)-\delta_{p+\tau,q}f(p+\tau,q)-$$

$$- \delta_{p,q+\tau} f(p, q + \tau) + f(p + \tau, q) + f(p, q + \tau)\Big\}. \qquad (2)$$

The operator H_2 acts on the vector $\psi \in \mathcal{H}_2$ according to the formula

$$H_2\psi = \sum_{p,q} (\overline{H}_2 f)(p, q) S_p^- S_q^- \varphi_0. \qquad (3)$$

Next, using the results of the study of the spectrum of operator H_2 and the tensor products of Hilbert spaces and the tensor products of operators in the Hilbert spaces, we describe the structure of essential spectrum and discrete spectrum of the operator H_3.

References

1. Tashpulatov S. M. *Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions*. // Journal of Applied Mathematics and Physics, 2019, Vol 7, No 4, Pp. 874–899. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7

TRIDIAGONAL OPERATORS, CONTINUED FRACTION AND DYNAMICS OF NON-INTEGRABLE QUANTUM SYSTEMS

A. E. Teretenkov[1]

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia;
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

We begin with a brief review of some known results on the connection between tridiagonal (Jacobi) operators, continued fractions for the vacuum average of the resolvents of such operators, and the moment problem for the vacuum average of their spectral measure.

Then we focus on the application of these results to the problems of quantum many-body physics based on the recursion method. This method uses the Lanczos algorithm, which tridiagonalizes the Liouville–von Neumann superoperator in the Krylov basis for a given observable. Although long known in quantum many-body physics, a few years ago it was enriched by the universal operator growth hypothesis. Indeed, several numerical and analytical considerations for non-integrable quantum systems and the observables with local densities have shown that the asymptotic behavior for a large number of Lanczos coefficients is universal.

It turns out that this universal behavior corresponds exactly to the boundary between essentially self-adjoint tridiagonal operators and symmetric ones with non-trivial defect indices. In terms of continued fractions, it is the boundary between convergence and divergence on the complex plane outside the real line. And in terms of the moment problem, it is the boundary between the determinate and indeterminate Hamburger moment problem.

Finally, we focus on a specific tridiagonal matrix that illustrates the results discussed in the talk.

This work was supported by the Russian Science Foundation under grant № 24-22-00331, URL: https://rscf.ru/en/project/24-22-00331 .

[1] e-mail: taemsu@mail.ru

NEUMANN EIGENVALUES OF NON-LINEAR ELLIPTIC OPERATORS

A. D. Ukhlov[1]

Ben-Gurion University of the Negev

We consider the Neumann (p,q)-eigenvalue problem in bounded outward γ-cuspidal domains $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{gathered} -\Delta_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda \|u\|^{p-q}_{L^q(\Omega_\gamma)} |u|^{q-2}u \text{ in } \Omega_\gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega_\gamma. \end{gathered} \tag{1}$$

In the case $1 < p < \gamma$ and $1 < q < p^*_\gamma = \gamma p/(\gamma - p)$ we prove solvability of this eigenvalue problem and existence of the minimizer of the associated variational problem [1]. In addition, we establish some regularity results of the eigenfunctions and some estimates of (p,q)-eigenvalues.

The suggested approach to the spectral problem (1) is based on the theory of (p,q)-composition operators on Sobolev spaces [2, 3].

The talk is based on the joint work with P. Garain and V. Pchelintsev.

References

1. P. Garain, V. Pchelintsev, A. Ukhlov. *On the Neumann (p,q)-eigenvalue problem in Hölder singular domains*. // Calc. Var., 63 (2024), 172.
2. S.K. Vodop'yanov, A.D. Ukhlov. *Set functions and its applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces*. // Siberian Adv. Math., 14 (2004), Pp. 1–48.
3. S.K. Vodop'yanov, A.D. Ukhlov. *Set functions and its applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces*. // Siberian Adv. Math., 15 (2005), Pp. 91–125.

[1] e-mail: ukhlov@math.bgu.ac.il

СУММИРОВАНИЕ В СРЕДНЕМ В ТЕОРИИ СЛЕДОВ

З. Ю. Фазуллин[1]

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассмотрим класс самосопряженных, ограниченных снизу операторов L_0 с компактной резольвентой, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и соответствующих классов симметрических относительно компактных возмущений V.

По теореме Като–Реллиха оператор $L = L_0 + V$ имеет компактную резольвенту и полуограничен снизу. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\lambda_k < < \lambda_{k+1})$ — собственные числа оператора L_0, пронумерованные без учета кратностей, ν_k — кратность λ_k, $\left\{\mu_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\nu_k}$, $\left(\mu_i^{(k)} \leqslant \mu_{i+1}^{(k)}\right)$, $k = = 1, 2, \ldots$ собственные числа оператора L, на которые расщепляют λ_k при возмущении V, P_k — ортогональный проектор на собственное подпространство, соответствующее λ_k. Если $\left\{f_{k_i}\right\}_{i=1}^{\nu_k}$ — собственные вектора оператора L_0, образующие ортонормированный базис пространства P_kH, то

$$trP_kV = \sum_{i=1}^{\nu_k} \left(Vf_{k_i}, f_{k_i}\right).$$

Далее, пусть $r_n = \frac{1}{2} min\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n; \lambda_n - \lambda_{n-1})$ и существует последовательность d_n, такая что $0 < d_n \leqslant r_n$, $\inf\limits_{n \geqslant 2} d_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-\lambda_n| \leqslant d_n} \|R_{0n}(z)V\| = 0, \qquad (1)$$

где $R_{0n}(z) = R_0(z) - (\lambda_n - z)^{-1}P_n$, $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$.

Введем функции

$$\rho(t) = \sum_{\lambda_k < t} \left[\sum_{i=1}^{\nu_k} \left(\lambda_k - \mu_i^{(k)}\right) + trP_kV\right], \quad K(z) = (R_0(-z)V)^2\, R_0(-z).$$

Справедлива

[1] e-mail: fazullinzu@mail.ru

Теорема 1. *Если V произвольный ограниченный симметрический оператор в H, $trK(z) < \infty$ и выполнено* (1), *то при $t \to +\infty$*

$$\int\limits_0^t \rho(\tau)d\tau = \sum_{\lambda_k<t} tr\left(P_kV^2 - (P_kV)^2\right)(1 + o(1)).$$

На основе теоремы 1 для дифференциальных операторов (как обыкновенных так и в частных производных) возмущенных оператором умножения на ограниченную измеримую функцию $V(x)$, доказывается, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\int\limits_0^t \rho(\tau)d\tau = C(V),$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, постоянна $C(V)$ есть функционал от возмущения V.

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОБРАТИМОСТЬ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Е. А. Шайна,[1] С. А. Шабров[2]

Работа посвящена получению достаточных условий положительной обратимости математической модели пятого порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{d\sigma}\left[((-pu'''_{xx\mu})'_x + ru''_{xx})'_x - gu'_x\right] + uq = f; \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере.

Заметим, что эта модель возникает при описании малых поперечных деформаций, возникающих под воздействием внешней силы интенсивности $f(x)$ системы, состоящей из двух стержней, соединенных растянутой струной. Точки соединения мы обозначаем через ξ_1 и ξ_2. При этом мы считаем, что стержень размещенный вдоль отрезка $[0;\xi_1]$ погружен во внешнюю среду с упругим «двойным» основанием.

При этом, на протяжении всей работы мы предполагаем выполненными следующие условия:

1) $\inf\limits_{[0;\xi_1)} p(x) > 0$; $p(x) \equiv 0$ на $[\xi_1;\ell]$;
2) $r(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0;\ell]$; $\inf\limits_{(\xi_2;\ell]} r(x) > 0$;
3) $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0;\ell]$; $\inf\limits_{(\xi_1;\xi_2)} g(x) > 0$;
4) функции x, $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $q(x)$, $\theta(x-\xi_i)$ $(i = 1,2)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная 0, если $x < 0$, и 1, если $x > 0$.

Мы считаем уравнение заданным почти всюду на расширении отрезка $[0,\ell]$, в котором каждая точка ξ разрыва функции $\sigma(x)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0;\xi;\xi + 0\}$. Обозна-

[1] Воронеж, Воронежский государственный университет
e-mail: katerinashaina@mail.ru

[2] Воронеж, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

чим через $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. Пусть $I = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ и $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ — метрика на I. Если $S(\sigma) \neq \emptyset$, то метрическое пространство (I,ρ) — неполное. Обозначим через $\overline{[0;\ell]}_S$ — стандартное пополнение (I,ρ) до полного метрического пространства. В $\overline{[0;\ell]}_S$ каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных элементов $\{\xi - 0; \xi + 0\}$. Уравнение (1) задано на $\overline{[0;\ell]}_\sigma = \overline{[0;\ell]}_S \cup \cup S(\sigma)$. Отметим, что для первого уравнения в ξ_1 — точке соединения стержня, помещенного на «двойное» упругое основание и растянутой струны, должны выполняться четыре условия: $u(\xi_1 - 0) = = u(\xi_1 + 0)$, $pu'''_{xx\mu}(\xi_1 - 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(\xi_1 - 0) - \left(ru''_{xx}\right)(\xi_1 - 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi_1 - 0) - \left(ru''_{xx}\right)'_x(\xi_1 - 0) + gu'_x(\xi_1 - 0) - gu'_x(\xi_1 + 0) + + u(\xi_1)q(\xi_1) = 0$; а в ξ_2 — точке соединения натянутой струны и стержня три условия: $u(\xi_2 - 0) = u(\xi_2 + 0)$, $ru''_{xx}(\xi_2 + 0) = = 0$, $\left(ru''_{xx}\right)'_x(\xi_2 + 0) + gu'_x(\xi_2 - 0) - gu'_x(\xi_2 - 0) + u(\xi_2)q(\xi_2) = = 0$; в точках $\xi \in S(\sigma) \bigcap (0;\xi_1)$ должны выполняться шесть условий: $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$, $u'_x(\xi - 0) = u'_x(\xi + 0)$, $pu'''_{xx\mu}(\xi - - 0) = pu'''_{xx\mu}(\xi + 0) = 0$, $(pu'''_{xx\mu})'_x(\xi - 0) = (pu'''_{xx\mu})'_x(\xi + 0)$, $-\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi) + \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) - \Delta gu'_x(\xi) + u(\xi)q(\xi) = 0$, здесь и далее, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+0) - \varphi(x-0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке x; если $\xi \in S(\sigma) \bigcap (\xi_1;\xi_2)$, то два условия: $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$, $-\Delta(gu'_x)(\xi) + u(\xi)q(\xi) = 0$; и, наконец, если $\xi \in S(\sigma) \bigcap (\xi_2;\ell)$, то четыре условия: $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$, $ru''_{x\mu}(\xi - 0) = ru''_{x\mu}(\xi + 0) = 0$, $\Delta r(u''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(gu'_x)(\xi) + u(\xi)q(\xi) = 0$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E: абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, первая производная $u'_x(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\xi_1]$, u''_{xx} — μ-абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$, $pu'''_{xx\mu}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$; $-(pu'''_{xx\mu})'_x(x) + + ru''_{xx}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$, $(-(pu'''_{xx\mu})'_x + + ru''_{xx})'_x(x) - g(x)u(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$; $u'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[\xi_2;\ell]$, $(ru''_{xx})(x)$ — абсолютно непрерывна на $[\xi_2;\ell]$; $(ru''_{xx})'_x(x) - g'_x u(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi_2;\ell]$; $u'_x(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi_1;\xi_2]$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1)–4) *и* $q(x) \equiv 0$, $g(x)$ *равна нулю на отрезке* $[0; \xi_1]$. *Если* $f(x) \geqslant 0$ ($\not\equiv 0$) *для всех* $x \in [0; \ell]$. *Тогда решение* $u(x)$ *математической модели* (1) *неотрицательно для всех* $x \in [0; \ell]$, *при этом* $u'''_{xx\mu}(0) \neq 0$ *и* $u''_{xx}(\ell) \neq 0$.

Список литературы

1. *Покорный, Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН, 1999. – Т. 364, № 2. – С. 167–169.

ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ МАРКОВА И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

А. О. Шишанин[1]

НИУ МЭИ

Диофантово уравнение Маркова было обнаружено А.А. Марковым в 1879 году. Оно имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Уравнение Маркова появляется в таких разделах математики, как теория приближений рациональных чисел, теория квадратичных форм и гиперболическая геометрия. Хороший обзор на эти темы представлен в [1]. Кроме того, числа Маркова, которые появляются в решениях уравнения Маркова, наблюдаются для расслоений над $\mathbb{P}^2$ [2]. Это уравнение также связано с кластерными алгебрами [3]. Уравнение Маркова замечательно тем, что множество его решений в натуральных числах находится из начального решения $(1, 1, 1)$ в виде ветвящегося графа, например, по формуле $(3yz - x, y, z)$. Похожая структура решения есть у многомерного аналога на случай n переменных

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n\prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Существует множество похожих диофантовых уравнений, где натуральные решения представимы в виде графа. Замечательно, что имеются уравнения со слагаемыми выше второй степени в левой части уравнения [4], [3]. Также недавно было предложено изучать такие уравнения для дуальных чисел [5].

[1] e-mail: guaicura@gmail.com

Список литературы

1. B. Springborn. *The hyperbolic geometry of Markov's theorem on Diophantine approximation and quadratic forms*. // Enseign. Math., 63(3-4):333–373, 2017. arXiv:1702.05061.
2. *А.Н. Рудаков.* Числа Маркова и исключительные расслоения над $\mathbb{P}^2$. // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 52:1 (1988). – сс. 100–112.
3. P. Lampe. *Diophantine equations via cluster transformations*. // J. Algebra, **462** (2016), Pp. 320–337. arXiv:1602.01011.
4. Y. Gyoda, K. Matsushita. *Generalization of Markov Diophantine equation via generalized cluster algebra*. arXiv:2201.10919.
5. V. Ovsienko. *Shadow sequences of integers, from Fibonacci to Markov and back*. arXiv:2111.02553.

ФУНКТОРЫ МЕЖДУ $*$-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

К. А. Шишкин[1]

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

В работе Т.А. Лоринга [1] был предложен категорный подход к понятию универсальной C^*-алгебры, порождённой множеством образующих, удовлетворяющих набору соотношений. В рамках данного подхода рассматриваются специальные категории представлений. Такие категории удовлетворяют ряду естественных аксиом и называются C^*-соотношениями. В этих терминах *универсальная C^*-алгебра, порождённая C^*-соотношением $\mathcal{R}$*, — это инициальный объект в категории $\mathcal{R}$. Однако, универсальная C^*-алгебра существует не для всякой категории $\mathcal{R}$. В том случае, когда C^*-соотношение определяет универсальную C^*-алгебру, оно называется компактным.

В [2] было показано, что всякое компактное C^*-соотношение изоморфно категории $*$-полиномиальных соотношений.

Иначе говоря, порождающие соотношения соответствующей универсальной C^*-алгебры могут быть представлены множеством инволютивных полиномов от порождающих элементов.

В [3] был установлен категорный критерий для существования универсальной C^*-алгебры для заданного множества порождающих соотношений.

В [4] было показано, что всякий функтор между C^*-соотношениями, с точностью до изоморфизмов категорий, является функтором между $*$-полиномиальными соотношениями, заданными на одном и том же множестве. Соответствующие универсальные C^*-алгебры при этом являются изоморфными.

В докладе обсуждается следующий результат.

Теорема. *Пусть $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{F}_{X_1}$, $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{F}_{X_2}$ — компактные C^*-соотношения на множествах X_1 и X_2 соответственно и $\mathcal{T} : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ —*

[1] e-mail: keril911@gmail.com

функтор. Тогда существуют множество Y, наборы инволютивных полиномов $P_1, P_2 \subset F(Y)$, функтор $\mathcal{G}\colon \mathcal{R}(Y, P_1) \to \mathcal{R}(Y, P_2)$ и изоморфизмы $\mathcal{V}\colon \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}(Y, P_1)$ и $\mathcal{W}\colon \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}(Y, P_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_1 \arrow[r, "\mathcal{T}"] \arrow[d, "\mathcal{V}"'] & \mathcal{R}_3 \arrow[d, "\mathcal{W}"'] \\ \mathcal{R}(Y, P_1) \arrow[r, "\mathcal{G}"] & \mathcal{R}(Y, P_2) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Более того, имеют место изоморфизмы C^*-алгебр

$$C^*(\mathcal{R}_1) \cong C^*(Y, P_1) \text{ и } C^*(\mathcal{R}_2) \cong C^*(Y, P_2).$$

Список литературы

1. Loring T. A. *C^*-algebra relations*. // Math. Scand., 2010, **107**, Pp. 43–72.
2. Berdnikov I. S., Gumerov R. N., Lipacheva E. V., Shishkin K. A. *On C^*-algebra and $*$-polynomial relations*. // Lobachevskii J. Math., 2023, **44**(6), Pp. 1988–1995.
3. Gumerov R. N., Lipacheva E. V., Shishkin K. A. *Categorical criterion for existence of universal C^*-algebras*. // Ufa Math. J., 2024, **16**(3), Pp. 113–124.
4. *Шишкин К.А.* Функторы между C^*-соотношениями. – Известия вузов. Математика. (в печати).