Курс МФТИ-МИАН «Квантовые вычисления», Весна 2025.

Задачи II: Квантовые схемы

Яшин Всеволод Игоревич (yashin.vi@mi-ras.ru)

Здесь собраны задачи в дополнение к лекциям по курсу. На эти задачи полезно посмотреть, или даже решить. Когда в задаче написано "разребитесь в", подразумевается, что желательно выписать доказательство утверждения на бумаге. Решения можно обсудить с лектором очно или прислать оформленные задачи по почте. Работа над задачами примерно следующим образом влияет на итоговую оценку по курсу: если Вы совсем не решали задач, Вы не сможете претендовать на «отлично»; если Вы сдали все задачи, Вы не получите менее, чем «хорошо».

Вторая серия задач посвящена различным наблюдениям в связи с общей теорией квантовых схем.

Задача II.1

Любое состояние $\rho \in \mathcal{T}(\mathbb{C}^2)$ на кубите можно выразить как

$$\rho = \frac{1}{2}[I + r_x X + r_y Y + r_z Z] = \frac{1}{2}[I + (\mathbf{r} \cdot \sigma)], \tag{1}$$

где $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ вектор поляризации. Выразите в терминах поляризации $\mathbf{r}$ собственные числа и собственные векторы оператора ρ (возможно, придётся разобрать несколько случаев), а также функцию энтропии

$$H(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log_2 \rho). \tag{2}$$

Аналогично, мы можем выразить любую наблюдаемую $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ как

$$O = a + b_x X + b_y Y + b_z Z = a + (\mathbf{b} \cdot \sigma), \tag{3}$$

где $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ набор строк. Выразите наблюдаемую O как линейную комбинацию I и некоторого вращения оператора Z. (Вспомните, как выражать направление вектора через углы Эйлера.)

Задача II.2

На группе унитарных операций $\mathcal{U}(\mathbb{C}^2)$ на кубите есть важная подгруппа, порождённая $\langle H, S \rangle$. Она называется *группой Клиффорда на одном кубите* $\mathcal{C}\ell^1$. Посчитайте и убедитесь, что для этой группы выполнены соотношения[1]

$$H^2 = I, \qquad (SH)^3 = \omega I, \tag{4}$$

где $\omega = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ – фаза вида $\mathbb{Z}_8$. Теперь, посмотрим на то, как группа Клиффорда действует на I, X, Y, Z. Как на наблюдаемые Паули действует элемент SH? Убедитесь, что в представлении Блоха все элементы $\mathcal{C}\ell^1$ имеют вид матриц перестановки со знаком. Каков порядок группы $\mathcal{C}\ell^1$?

[1] Посмотрев на эти соотношения, осведомлённый Читатель обнаружит, что $\mathcal{C}\ell^1$ имеет связь с модулярной группой. Как и всё в этом мире!

Задача II.3

Рассмотрим однокубитные операции U, точно выразимые при помощи $\langle H, T\rangle$. Любой такой вентиль можно переписать в виде

$$U = C_n T C_{n-1} T \cdots C_1 T C_0, \tag{5}$$

где $C_0, \ldots, C_n \in \mathcal{C}\ell^1$ Клиффордовы операции. В статье [1] было показано, что такое представление можно привести к *нормальной форме Матсумото-Амано*:

$$U = H_k T H_{k-1} T \cdots H_1 T C_0, \tag{6}$$

где $H_1, \cdots, H_{k-1} \in \{H, SH\}$, $H_k \in \{I, H, SH\}$ и $C_0 \in \mathcal{C}\ell^1$. Докажите, что так действительно можно сделать. Для этого, рассмотрите подгруппу $\mathcal{S} = \langle S, X, \omega I\rangle$ и покажите, что элементы S можно прокоммутировать вправо через оператор T и операторы $\{H, SH\}$ (напишите явно эти соотношения коммутации). Сравните мощность $\mathcal{C}\ell^1$ с мощностью $\mathcal{S}$ и покажите, что любой элемент Клиффорда имеет вид $\{I, H, SH\}\mathcal{S}$.

Также, можно показать, что эта нормальная форма единственна и вычисляется за $\mathcal{O}(n)$ времени [1, 2]. При помощи этой формы можно доказать, что любой унитарный оператор с элементами из $\mathbb{C}[i, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ (и только они) выражаются точно через $\langle H, T\rangle$ [3].

Задача II.4

В работах [4, 5] была дана полная характеризация квантовых каналов на одном кубите. Если есть некоторый квантовый канал $\Phi : \mathcal{T}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{T}(\mathbb{C}^2)$, то его действие на базис Паули $\{I, X, Y, Z\}$ можно представить как матрицу

$$\Phi \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_x & b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ a_y & b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ a_z & b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

здесь вид первой строки следует из условия сохранения следа. Покажите, что существуют некоторые вращения $U, V \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^2)$, такие что

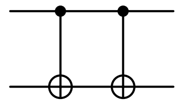
$$V\Phi[U \cdot U^\dagger]V^\dagger \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_x & \lambda_x & 0 & 0 \\ \tau_y & 0 & \lambda_y & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Это значит, что любой кубитный канал можно представить как: кручение, диссипация к некоторому состоянию, снова кручение. Далее, на коэффициенты $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ можно наложить ряд условий, чтобы они действительно определяли канал (об этом см. в статьях).

Задача II.5

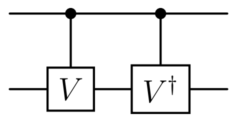
Пусть $V = \sqrt{X} = HSH$. Упростите следующие схемы:

1.



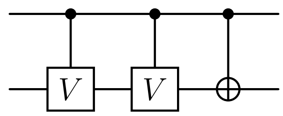
(9)

2.



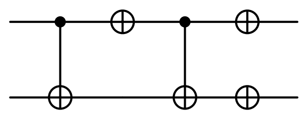
(10)

3.



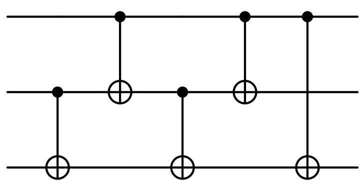
(11)

4.



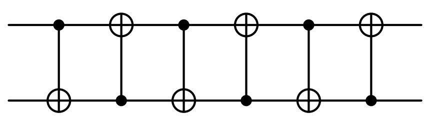
(12)

5.



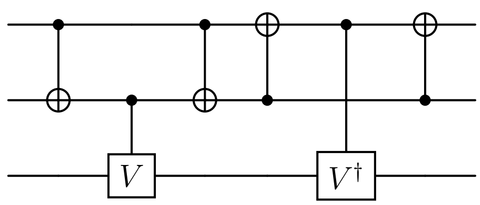
(13)

6.



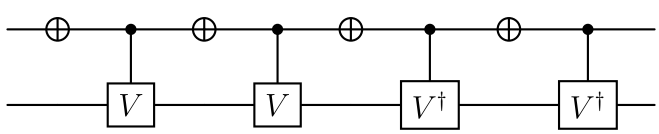
(14)

7.



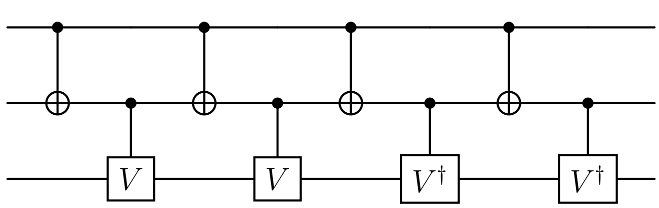
(15)

8.



(16)

9.



(17)

Если Вы честно разобрались, как упрощаются эти схемы, то на самом деле Вы значительно продвинулись в понимании того, на каких основах квантовые схемы можно оптимизировать [6, 7].

Задача II.6

В квантовых вычислениях зачастую важно рассматривать операции из списка

$$I, X, Y, Z, H, S, CX, CZ, \mathrm{SWAP}. \tag{18}$$

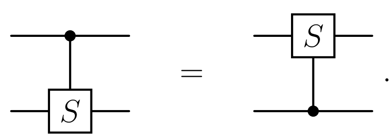
Покажите, что эти операции можно выразить при помощи словаря $\{H, S, C\mathrm{NOT}\}$. Выпишите для каждой операции U из списка, как она действует на наблюдаемые Паули I, X, Y, Z при отображении $O \mapsto UOU^\dagger$ (для двухкубитных вентилей рассмотрите действие на матрицах вида X_1, Z_1, X_2, Z_2).

Группа унитарных операций, порождённая $\langle H, S, C\mathrm{NOT}\rangle$, называется *группой Клиффорда*[2] *на n кубитах* $\mathcal{C}\ell^n$ [8, 9]. Она возникает в связи с теорией квантовой коррекции ошибок, вентили из этой группы оказываются устойчивыми к ошибкам. Покажите, что группа Клиффорда конечная, и как-нибудь оцените сверху число её элементов. Оказывается, что добавление *любой* унитарной операции к группе Клиффорда делает её универсальной [10, Corollary 6.8.2].

Задача II.7

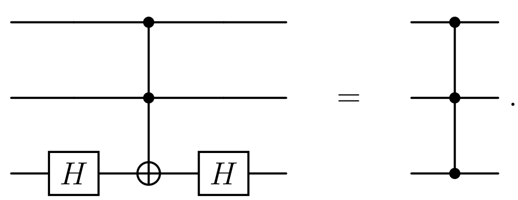
Допустим, что мы можем свободно (то есть, бесплатно) делать операции Клиффорда $\langle H, S, C\mathrm{NOT}\rangle$. Чтобы иметь возможность делать произвольные операции, к ним можно добавить не-клиффордовы операции вида $T, CS, \mathrm{Toffoli}$. Полезно разобраться, как эти три операции можно выразить друг через друга. Докажите правильность следующих соотношений:

1. Операция CS симметрична по перестановкам:



(19)

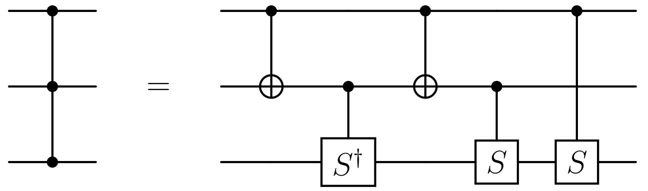
2. Вентиль Toffoli связан с C^2Z при помощи вентилей H:



(20)

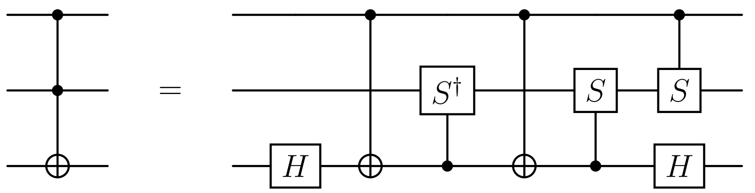
[2] Не следует путать это с понятием алгебр Клиффорда.

3. Вентиль C^2Z выражается при помощи 3-х вентилей CS:



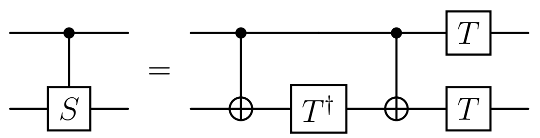
(21)

4. Вентиль Toffoli выражается при помощи 3-х вентилей CS:



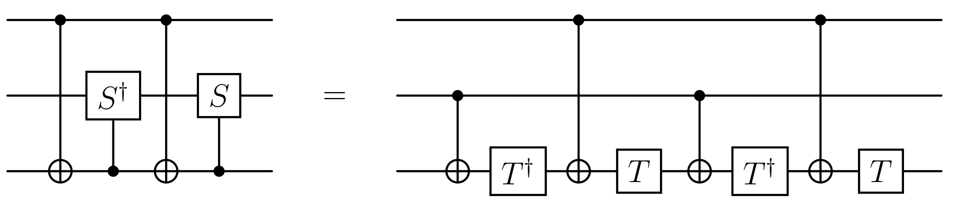
(22)

5. Вентиль CS выражается при помощи 3-х вентилей T:



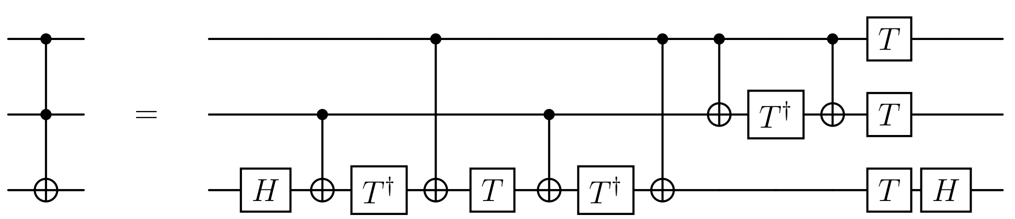
(23)

6. Выполнено следующее соотношение:



(24)

7. Вентиль Toffoli выражается при помощи 7-ми вентилей T:



(25)

Оказывается, что приведённые схемы для выражения Toffoli через CS и T почти оптимальны. Про ещё более удачные схемы и рассуждения о способах их нахождения можно прочитать в [11]. С другой стороны, при помощи взаимодействия с классическим управлением (адаптивности) можно ещё больше оптимизировать эти схемы [12], и можно точно выразить вентиль T при помощи Toffoli и CS. Но это уже другая история...

Задача II.8

Нередко можно услышать идею о том, что для построения квантовой механики необходимы комплексные числа. Полезно иметь в виду, что эта идея в некоторых случаях может оказаться несколько наивной: существует множество математических моделей, описывающих те или иные свойства квантовой механики, и не связанных напрямую с комплексными гильбертовыми пространствами. В качестве яркого примера, обсудим, почему *вещественнозначная* квантовая механика является вычислительно универсальной.

Ребитом (real bit) называют двухуровневую вещественную квантовую систему. Так, если дано *вещественное* гильбертово пространство кубита $\mathcal{H}$ с заданным вычислительным базисом $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, то состояниями ребита называют векторы нормы один с точностью до знака. Их можно запараметризовать как

$$|\theta\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle, \tag{26}$$

где $0 \leqslant \theta < 2\pi$ некоторый угол. Смешанными состояниями ребита называют матрицы плотности с вещественными элементами. В терминах шара Блоха следует считать, что состояния ребита лежат на большом круге на плоскости Oxz

$$\rho = \frac{1}{2}\left[I + r\cos\theta Z + r\sin\theta X\right], \tag{27}$$

где $0 \leqslant \theta < 2\pi$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$. Аналогичным образом определяются любые d-мерные вещественные системы. Вентили на ребитах соответствуют ортогональным вещественным матрицам.

В ранних работах было замечено [13], что систему n кубитов можно закодировать в $n+1$ ребит. Так, если дано комплексное состояние вида

$$|\psi_{\mathbb{C}}\rangle = \sum_j r_j e^{i\theta_j}|j\rangle, \tag{28}$$

то к системе n кубитов добавляется дополнительный ребит с базисом $\{|R\rangle, |I\rangle\}$, и состояние кодируется как

$$|\psi_{\mathbb{R}}\rangle = \sum_j r_j\cos\theta_j|j\rangle|R\rangle + r_j\sin\theta_j|j\rangle|I\rangle. \tag{29}$$

То есть, дополнительный ребит кодирует вещественную и мнимую части амплитуды.

При помощи такой кодировки в работе [14] была показана универсальность вычислений на ребитах со всеми двухребитными вентилями. Для этого достаточно продемонстрировать, как в такой кодировке выглядят однокубитные операции и CNOT. Но CNOT и $R_Y(\theta)$ являются вещественными, а операцию $R_Z(\theta)$ можно закодировать при помощи $F(\theta)$, где

$$F(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Убедитесь, таким образом, что вычисления на n кубитах можно эффективно свести к вычислениям на $n+1$ ребитах (и, конечно, наоборот). Докажите, что двухребитные вентили порождают любые ортогональные операции.

Задача II.9

Докажите, что набор вентилей $\langle H, CS\rangle$ универсален, если в системе два или более кубитов. Для этого, научитесь реализовывать вентиль T. Другой способ доказательства изложен в [15].

Докажите, что при помощи словаря $\langle \text{Toffoli}, H\rangle$ можно проводить любые квантовые вычисления (используйте одну анциллу и Задачу с прошлой Лекции). Заметим, что операции, получаемые из вентиля Тоффоли и вентиля Адамара, являются вещественными. В то же время, словарь $\langle \text{Toffoli}\rangle$ является универсальным для классических вычислений. Это свойства было впервые замечено в [16], после доказательство упростили в [17].

Задача II.10

Докажите, что для того, чтобы аппроксимировать вентилями словаря $\langle H, T\rangle$ произвольный однокубитный вентиль $U \in \mathrm{SU}(2)$ с точностью $\varepsilon > 0$ требуется по крайней мере

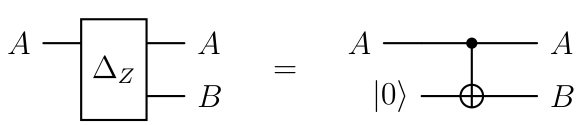
$$L \geqslant K + 3\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \tag{31}$$

вентилей, где K некоторая константа (попробуйте оценить её!).

Для базиса $\langle H, T\rangle$ существует алгоритм, аппроксимирующий любой $U \in \mathrm{SU}(2)$ с точностью $\varepsilon > 0$ при помощи схем длины $\mathcal{O}(\log \frac{1}{\varepsilon})$ (эта оценка лучше, чем оценка из алгоритма Соловея-Китаева). Если использовать два кубита в качестве анциллы, то существует довольно простой алгоритм добиться этого ускорения, используя теорему о четырёх квадратах [3]. Прочитайте эту статью и разберитесь, как работает такой алгоритм. Алгоритмы, которые реализуют такую аппроксимацию, не используя анциллы, заметно более сложные [18, 19].

Задача II.11

Пусть Δ_Z – канал, осуществляющий “копирование” в Z-базисе $|x\rangle \mapsto |x\rangle|x\rangle$. Допустим, что этот канал реализует некоторую коммуникацию между A и B:



(32)

Такой канал зачастую называют когерентным битовым каналом (coherent bit channel) [20, Section 7], его можно воспринимать как классический канал с квантовой обратной связью. Ресурс такого канала принято обозначать как

$$[q \to qq] \tag{33}$$

Докажите следующие соотношения на ресурсы:

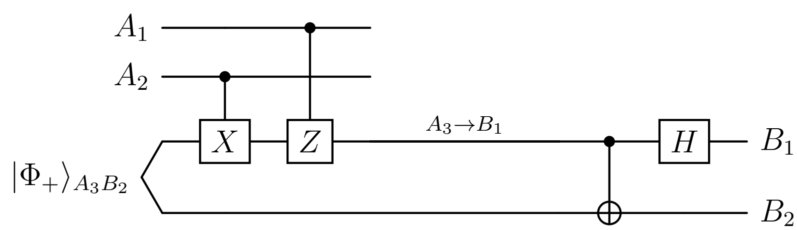
1. При помощи когерентного битового канала можно передать классический бит информации:
$$[q \to qq] \geqslant [c \to c]. \tag{34}$$

2. При помощи квантового канала можно реализовать когерентный битовый канал:
$$[q \to q] \geqslant [q \to qq]. \tag{35}$$

3. Придумайте, как реализовать когерентную передачу информации при помощи запутанности и классического канала:
$$[qq] + [c \to c] \geqslant [q \to qq]. \tag{36}$$
Пусть у Алисы имеется кубит A_1 в состоянии $|\psi\rangle$. Пусть между A и B имеется бит запутанности $|\Phi_+\rangle_{A_2B}$. Добавим ещё один кубит A_3 и подготовим на A_2A_3B при помощи CNOT состояние
$$|\mathrm{GHZ}\rangle_{A_2A_3B} = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{37}$$
Какие операции должны провести Алиса и Боб с состоянием $|\psi\rangle_{A_1}|\mathrm{GHZ}\rangle_{A_2A_3B}$, чтобы получить отображение $|x\rangle_{A_3} \to |x\rangle_{A_3}|x\rangle_B$?

4. Осознайте, почему протокол однокубитной телепортации реализует ресурсное соотношение
$$[q \to qq] + [c \to c] \geqslant [q \to q]. \tag{38}$$
Кстати говоря, при помощи комбинации этого и предыдущего пунктов получается ресурсное соотношение на квантовую телепортацию:
$$[qq] + 2[c \to c] \geqslant [q \to qq] + [c \to c] \geqslant [q \to q]. \tag{39}$$

5. Докажите, что протокол когерентного сверхплотного кодирования

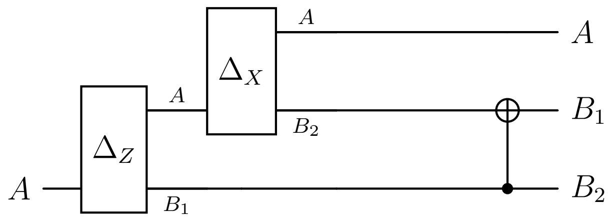


(40)

Реализует ресурсное соотношение
$$[qq] + [q \to q] \geqslant 2[q \to qq]. \tag{41}$$

6. При помощи принципа отложенного измерения, приведите схему протокола квантовой телепортации к когерентному виду: замените два измерения с классическим контролем на квантовый контроль, вычеркните сами измерения, и сделайте ещё шаг, чтобы получить ресурсное соотношение
$$[qq] + 2[q \to qq] \geqslant [q \to q] + 2[qq]. \tag{42}$$

7. Рассмотрим *протокол когерентной телепортации* вида



(43)

, здесь Δ_X – копирование в X-базисе. Докажите, что такой протокол реализует ресурсное соотношение вида

$$2[q \to qq] \geqslant [qq] + [q \to q]. \tag{44}$$

Вместе с предпоследим пунктом, получаем равенство

$$[qq] + [q \to q] = 2[q \to qq]. \tag{45}$$

Протоколы когерентной передачи информации оказываются полезны при изучении классической пропускной способности каналов с использованием сцепленности.

Задача II.12

Если сильный симулятор способен вычислять вероятность $p(x)$ произвольного исхода x с точностью $\varepsilon > 0$, то при последовательной генерации генерации m битов в схеме статистическая точность распределения вероятности $\|\tilde{p} - p\|_1$ имеет вид $\mathcal{O}(m\varepsilon)$.

Оказывается, что можно позволить симулятору быть вероятностным, и иметь довольно большую вероятность неуспеха [21, Section IV]. Так, допустим, что сильный симулятор выдаёт ответ $\tilde{p}(x)$, который может лежать в близости ε от искомого результата $p(x)$ с вероятностью неуспеха p_f:

$$\mathbb{P}\left[\, |\tilde{p}(x) - p(x)| < \varepsilon \,\right] \geqslant 1 - p_f. \tag{46}$$

Докажите, что можно допустить вероятность неуспеха $p_f = \mathcal{O}(\varepsilon)$, чтобы результирующая статистическая погрешность также была равна $\|\tilde{p} - p\|_1 = \mathcal{O}(m\varepsilon)$.

Задача II.13

Допустим у нас есть сильный симулятор квантовых схем. Для решения задачи слабой симуляции, можно последовательно генерировать биты исхода (bit-by-bit sampling). В то же время, можно придумать другой алгоритм генерации исходов [22, 23]. Такой алгоритм будет генерировать некоторый возможный исход схемы на каждом шаге, обновляя только те биты, на которые действуют вентили (gate-by-gate sampling). Пусть нам задана некоторая последовательность вентилей $U_1, \ldots, U_L$. Алгоритм выглядит следующим образом:

Здесь $\mathrm{supp}(U_t) \subseteq \{1, \ldots, n\}$ задаёт индексы кубитов, на которые действует вентиль U_t, а вероятность $p_t(x) = |\langle x|U_t \cdots U_1|0\rangle|^2$. Докажите, что такой алгоритм корректен, то есть что сгенерированный x имеет верное распределение вероятности p_t на каждом

Gate-by-gate sampling

Вход:
Сильный симулятор квантовых схем,
квантовая схема $U = U_L \cdots U_1$.

Выход:
Исход $x \in \{0,1\}^n$ с вероятностью $p(x) = |\langle x|U|0\rangle|^2$.

$x \leftarrow 0^n$.
Для всех $t = 1, \ldots, m$ **:**
  $S \leftarrow \{y \in \{0,1\}^n \ : \ y_i = x_i$ для всех $i \notin \mathrm{supp}(U_t)\}$.
  Сгенерировать $x \in S$ с распределением $p_t(x)/\sum_{y \in S} p_t(y)$.
Вернуть x.

шаге t. Если вентиль U_t действует на k кубитов, то $|S| \leqslant 2^k$, значит на этом шаге требует посчитать 2^k амплитуд. Если в схеме встречается CNOT, то для обновления x не нужно проводить сильную симуляцию. Таким образом, для симуляции CNOT+U(2)-схем длины L требуется обратиться к симулятору не более $2L$ раз. В ряде случаев, такой симулятор оказывается эффективнее побитового симулятора [22].

Покажите, что ошибка слабой симуляции растёт линейно с размером схемы. То есть, если сильный симулятор выдаёт вероятность исхода с точностью ε, то статистическая ошибка растёт как

$$\|\tilde{p} - p\|_1 = \mathcal{O}(L\varepsilon). \tag{47}$$

Задача II.14

Метод симуляции Фейнмана оказывается полезен при описании шумных квантовых схем [24]. Допустим, есть квантовая схема C на n кубитах с начальным состоянием $|0\rangle$ и с вентилями $U_1, \cdots, U_L$. Чтобы симулировать зашумление, полезно работать с матрицами плотности, и удобно разложить множество матриц плотности по базису Паули.

Будем называть *оператором Паули (Паули-строкой)* P на n кубитах произведение однокубитных операторов Паули:

$$\mathcal{P}_n = \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}. \tag{48}$$

Весом $\mathrm{wt}(P)$ Паули-строки P называется число не-тождественных операторов в P. Операторы Паули образуют ортонормированный базис в пространстве всех $2^n \times 2^n$ матриц:

$$\mathrm{Tr}(PQ) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } P = Q, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad \rho = \frac{1}{2^n} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \mathrm{Tr}(\rho P) P. \tag{49}$$

Отсюда следует, что можно разложить вычисление по всем путям из Паули-строк:

$$\begin{aligned} p(x) &= |\langle x|U_L \cdot U_1|0\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2^{nL}} \sum_{P_0,\ldots,P_L \in \mathcal{P}_n} \mathrm{Tr}(|x\rangle\langle x|P_L)\,\mathrm{Tr}(P_L U_L P_{L-1} U_L^\dagger) \cdots \mathrm{Tr}(P_1 U_1 P_0 U_1^\dagger)\,\mathrm{Tr}(P_0|0\rangle\langle 0|). \end{aligned} \tag{50}$$

Чтобы найти $p(x)$, в этом случае надо посчитать сумму по всем 4^{nL} путям из Паули-строк $\mathbf{P} = (P_0, \ldots, P_L)$. Заметьте, что если U_t переводит Паули-операторы в Паули-операторы (то есть U_t вентиль Клиффорда), то число путей в сумме можно уменьшить. (Почему?)

Пусть теперь на каждом шаге работы на каждый кубит схемы действует деполяризация вида

$$\mathcal{D}[\rho] = (1-\gamma)\rho + \gamma\chi, \tag{51}$$

где χ максимально смешанное состояние (то есть, после каждого U_t добавляется операция $\mathcal{D}^{\otimes} n$). Как деполяризация действует на Паули-операторы? Как на Паули-операторы действует полная дефазировка?

$$\mathcal{D}_{deph}[\rho] = (1-\gamma)\rho + \frac{\gamma}{2}(\rho + Z\rho Z) \tag{52}$$

Заметьте, что в результате действия таких шумных каналов амплитуды путей значительно падают. Насколько упадёт амплитуда пути $\mathbf{P} = (P_0, \ldots, P_L)$ в зависимости от его веса?

---

[1] K. Matsumoto and K. Amano, Representation of quantum circuits with Clifford and $\pi/8$ gates (2008), arXiv:0806.3834 [quant-ph].

[2] B. Giles and P. Selinger, Remarks on Matsumoto and Amano's normal form for single-qubit Clifford+T operators (2019), arXiv:1312.6584 [quant-ph].

[3] V. Kliuchnikov, D. Maslov, and M. Mosca, Fast and efficient exact synthesis of single qubit unitaries generated by Clifford and T gates (2013), arXiv:1206.5236 [quant-ph].

[4] C. King and M. B. Ruskai, Minimal entropy of states emerging from noisy quantum channels (2000), arXiv:quant-ph/9911079 [quant-ph].

[5] M. B. Ruskai, S. Szarek, and E. Werner, An analysis of completely-positive trace-preserving maps on 2×2 matrices (2001), arXiv:quant-ph/0101003 [quant-ph].

[6] D. Maslov, G. Dueck, D. Miller, and C. Negrevergne, Quantum circuit simplification and level compaction, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems **27**, 436–444 (2008).

[7] R. Iten, R. Moyard, T. Metger, D. Sutter, and S. Woerner, Exact and practical pattern matching for quantum circuit optimization, ACM Transactions on Quantum Computing **3**, 1–41 (2022).

[8] D. Gottesman, Stabilizer codes and quantum error correction (1997), arXiv:quant-ph/9705052 [quant-ph].

[9] D. Gottesman, The heisenberg representation of quantum computers (1998), arXiv:quant-ph/9807006 [quant-ph].

[10] G. Nebe, E. M. Rains, N. J. A. Sloane, *et al.*, *Self-dual codes and invariant theory*, Vol. 17 (Springer, 2006).

[11] M. Amy, D. Maslov, M. Mosca, and M. Roetteler, A meet-in-the-middle algorithm for fast synthesis of depth-optimal quantum circuits, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems **32**, 818–830 (2013).

[12] C. Jones, Low-overhead constructions for the fault-tolerant toffoli gate, Physical Review A **87**, 10.1103/physreva.87.022328 (2013).

[13] E. Bernstein and U. Vazirani, Quantum complexity theory, SIAM Journal on Computing **26**, 1411 (1997), https://doi.org/10.1137/S0097539796300921.

[14] T. Rudolph and L. Grover, A 2 rebit gate universal for quantum computing (2002).

[15] Китаев, Алексей Юрьевич, Квантовые вычисления: алгоритмы и исправление ошибок, Успехи математических наук **52**, 53 (1997).

[16] Y. Shi, Both Toffoli and Controlled-NOT need little help to do universal quantum computation (2002), arXiv:quant-ph/0205115 [quant-ph].

[17] D. Aharonov, A simple proof that Toffoli and Hadamard are quantum universal (2003), arXiv:quant-ph/0301040 [quant-ph].

[18] P. Selinger, Efficient Clifford+T approximation of single-qubit operators (2014), arXiv:1212.6253 [quant-ph].

[19] N. J. Ross and P. Selinger, Optimal ancilla-free Clifford+T approximation of z-rotations (2016), arXiv:1403.2975 [quant-ph].

[20] M. M. Wilde, *Quantum Information Theory* (Cambridge University Press, 2016).

[21] S. Bravyi and D. Gosset, Improved classical simulation of quantum circuits dominated by clifford gates, Physical Review Letters **116**, 10.1103/physrevlett.116.250501 (2016).

[22] S. Bravyi, D. Gosset, and Y. Liu, How to simulate quantum measurement without computing marginals, Physical Review Letters **128**, 10.1103/physrevlett.128.220503 (2022).

[23] A. Shapiro and R. LaRose, BGLS: A Python package for the gate-by-gate sampling algorithm to simulate quantum circuits, in *Proceedings of the SC '23 Workshops of The International Conference on High Performance Computing, Network, Storage, and Analysis*, SC-W 2023 (ACM, 2023).

[24] D. Aharonov, X. Gao, Z. Landau, Y. Liu, and U. Vazirani, A polynomial-time classical algorithm for noisy random circuit sampling, in *Proceedings of the 55th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '23 (ACM, 2023).