



Sirius

International Mathematics Center

014s: Six Topics in Analysis

FEBRUARY 17–23 | 2025

Школа для молодых исследователей

Шесть сюжетов в анализе

17–23 февраля 2025 года

Расписание и аннотации сюжетов

Цель школы состоит в углубленном изучении нескольких разделов современного математического анализа в широком смысле в связи с теорией вероятности и теорией дифференциальных уравнений в частных производных, на примере нескольких – шести – сюжетов, состоящих из серии открытых вопросов, относящихся к частотно-временному анализу, теории аппроксимаций аналитическими и гармоническими функциями, теории потенциала, теории точечных и детерминантных процессов, ортогональных многочленов, пространств аналитических функций и других близких областей.

Международный математический центр «Сириус», ФТ «Сириус»

Оглавление

Расписание школы	4
17 февраля	4
18 февраля	5
19 февраля	6
20 февраля	7
21 февраля	8
22 февраля	9
23 февраля	9
Аннотации сюжетов	10
Сюжет 1. Задача Сильвестра	10
Сюжет 2. Теорема Понселе и ортогональные многочлены . .	11
Сюжет 3. Гармонические автоморфизмы единичного круга с полиномиальной антиголоморфной частью	11
Сюжет 4. HRT-гипотеза	13
Сюжет 5. Случайные поля и случайные меры	14
Сюжет 6. Гармонические потенциалы на графах и в $\mathbb{R}^n$: переход между дискретным и непрерывным	14
A limiting Kato–Ponce inequality: the martingale model . . .	19

Расписание школы

17 ФЕВРАЛЯ, ПОНЕДЕЛЬНИК

ЗАВТРАК (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

10⁰⁰ — 10¹⁵ ОТКРЫТИЕ ШКОЛЫ (НТУ «СИРИУС», АЛЬФА 5.7)

10¹⁵ — 11⁴⁵ Запорожец Дмитрий Николаевич
Задача Сильвестра. Лекция I

12⁰⁰ — 13³⁰ Белов Юрий Сергеевич
HRT-гипотеза. Лекция I

ОБЕД (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

14⁴⁵ — 16¹⁵ Белов Юрий Сергеевич
HRT-гипотеза. Лекция II

16³⁰ — 18⁰⁰ Буфетов Александр Игоревич
Случайные поля и случайные меры. Лекция I

18¹⁵ — 19⁴⁵ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

18 ФЕВРАЛЯ, ВТОРНИК

ЗАВТРАК (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

10¹⁵ — 11⁴⁵ Буфетов Александр Игоревич
Случайные поля и случайные меры. Лекция II

12⁰⁰ — 13³⁰ Федоровский Константин Юрьевич
Гармонические автоморфизмы единичного круга с полиномиальной антиголоморфной частью. Лекция I

ОБЕД (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

14⁴⁵ — 16¹⁵ Федоровский Константин Юрьевич
Гармонические автоморфизмы единичного круга с полиномиальной антиголоморфной частью. Лекция II

16³⁰ — 18⁰⁰ Буфетов Александр Игоревич
Случайные поля и случайные меры. Семинар I

18¹⁵ — 19⁴⁵ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

19 ФЕВРАЛЯ, СРЕДА

ЗАВТРАК (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

10¹⁵ — 11⁴⁵ Запорожец Дмитрий Николаевич

Задача Сильвестра. Лекция II

12⁰⁰ — 13³⁰ Лысов Владимир Генрихович

Теорема Понселе и ортогональные многочлены. Лекция I

ОБЕД (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

14⁴⁵ — 16¹⁵ Мозоляко Павел Александрович

Гармонические потенциалы на графах и в $\mathbb{R}^n$: переход между дискретным и непрерывным. Лекция I

16³⁰ — 18⁰⁰ Буфетов Александр Игоревич

Случайные поля и случайные меры. Семинар II

18¹⁵ — 19⁴⁵ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

20 ФЕВРАЛЯ, ЧЕТВЕРГ

ЗАВТРАК (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

10¹⁵ — 11⁴⁵ Лысов Владимир Генрихович

Теорема Понселе и ортогональные многочлены. Лекция II

12⁰⁰ — 13³⁰ Мозоляко Павел Александрович

Гармонические потенциалы на графах и в $\mathbb{R}^n$: переход между дискретным и непрерывным. Лекция II

ОБЕД (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

14⁴⁵ — 16¹⁵ Белов Юрий Сергеевич

HRT-гипотеза. Семинар I

16³⁰ — 18⁰⁰ Федоровский Константин Юрьевич

Гармонические автоморфизмы единичного круга с полиномиальной антиголоморфной частью. Семинар I

18¹⁵ — 19⁴⁵

Обсуждение: неравенство Като-Понсе в мартингальной постановке

21 ФЕВРАЛЯ, ПЯТНИЦА

ЗАВТРАК (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

10¹⁵ — 11⁴⁵ Запорожец Дмитрий Николаевич
Задача Сильвестра. Семинар I

12⁰⁰ — 13³⁰ Запорожец Дмитрий Николаевич
Задача Сильвестра. Семинар II

ОБЕД (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

14⁴⁵ — 16¹⁵ Федоровский Константин Юрьевич
Гармонические автоморфизмы единичного круга с полиномиальной антиголоморфной частью. Семинар II

16³⁰ — 18⁰⁰ Белов Юрий Сергеевич
HRT-гипотеза. Семинар II

18¹⁵ — 19⁴⁵ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

22 ФЕВРАЛЯ, СУББОТА

ЗАВТРАК (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

10¹⁵ — 11⁴⁵ Лысов Владимир Генрихович
Теорема Понселе и ортогональные многочлены. Семинар I

12⁰⁰ — 13³⁰ Лысов Владимир Генрихович
Теорема Понселе и ортогональные многочлены. Семинар II

ОБЕД (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

14⁴⁵ — 16¹⁵ Мозоляко Павел Александрович
Гармонические потенциалы на графах и в $\mathbb{R}^n$: переход между дискретным и непрерывным. Семинар I

16³⁰ — 18⁰⁰ Мозоляко Павел Александрович
Гармонические потенциалы на графах и в $\mathbb{R}^n$: переход между дискретным и непрерывным. Семинар II

18¹⁵ — 19⁴⁵ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

23 ФЕВРАЛЯ, ВОСКРЕСЕНЬЕ

ЗАВТРАК (РЕСТОРАН «ВЕГА», НТУ «СИРИУС»)

Аннотации сюжетов

Сюжет 1. Задача Сильвестра

Дмитрий Николаевич Запорожец, ПОМИ РАН

Классическая задача Сильвестра заключается в нахождении вероятности того, что четыре случайные точки, независимо и равномерно выбранные внутри выпуклой фигуры, находятся в выпуклом положении. Бляшке показал, что эта вероятность максимальна для эллипсов и минимальна для треугольников. Позднее первая часть этого утверждения была обобщена на многомерные эллипсоиды, в то время как соответствующее утверждение для симплексов до сих пор остается гипотезой для размерностей выше 2. Интересно отметить, что из этой гипотезы вытекает знаменитая проблема Бургейна о сечениях (Bourgain's Slicing Problem), решение которой было получено совсем недавно (<https://arxiv.org/abs/2412.15044>).

В литературе существуют различные обобщения задачи Сильвестра, однако в большинстве из них прогресс остается ограниченным. Мы обсудим наиболее интересные из этих обобщений, предложим возможные новые естественные постановки и коллективными усилиями попытаемся продвинуться в каких-то их них. *Для полноценной работы не требуется предварительных специальных знаний или обязательного ознакомления с литературой.*

Сюжет 2. Теорема Понселе и ортогональные многочлены

Владимир Генрихович Лысов, ИПМ РАН

Известный поризм Понселе (1813 г.) можно сформулировать так. Пусть эллипс лежит в единичном круге. Если существует n -угольник, вписанный в единичную окружность и описанный вокруг эллипса, то такой n -угольник можно провести из произвольной точки на единичной окружности. Оказывается (см., например, работу A. Martinez-Finkelshtein, B. Simanek, and B. Simon. Poncelet's theorem, paraorthogonal polynomials and the numerical range of compressed multiplication operators. Adv. Math., 349:992–1035, 2019]), этот результат проективной геометрии тесно связан с алгоритмом Шура, произведениями Бляшке и ортогональными многочленами на окружности. Мы обсудим эту связь и вместе подумаем, к каким обобщениям она может привести. *Предварительных специальных знаний от слушателей не требуется.*

Сюжет 3. Гармонические автоморфизмы единичного круга с полиномиальной антиголоморфной частью

Антон Дмитриевич Баранов, СПбГУ &
Константин Юрьевич Федоровский, МГУ & СПбГУ

Данная задача возникла в связи с понятием квадратурной области. Напомним, что ограниченная область D в комплексной плоскости называется квадратурной (точнее говоря, квадратурной в классическом смысле), если найдется распределение (обобщенная функция) F с конечным носителем, лежащим в данной области такое, что для любой голоморфной и интегрируемой в этой области функции f (интегрируемость рассматривается относительно классической меры Лебега) выполняется равенство $\int_D f \, dx dy = F(f)$. Другими словами, для любой такой функции f ее интеграл по области D можно вычислить как конкретную конечную линейную комбинацию значений функции и, возможно, некоторых ее производных, в фиксированных

(зависящих только от области) точках области D . Простейшим примером квадратурной области является круг, несложно привести более содержательные примеры. Так, можно доказать, что среди жордановых областей с аналитическими границами квадратурным будут те и только те области, которые являются образами единичного круга $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ при (конформном) отображении рациональными функциями, однолиственными в $\mathbb{D}$.

Приблизительно 20 лет назад возникла задача описания однолистных гармонических отображений круга $\mathbb{D}$ на квадратурные области. Напомним, что однолистное гармоническое отображение — это взаимно однозначное отображение круга $\mathbb{D}$, осуществляемое гармонической функцией, т.е. функцией вида $h(z) + g(\bar{z})$ (напомним, что комплексная гармоническая функция — это сумма голоморфной и антиголоморфной компонент). Особый интерес представляет задача описания гармонических отображений круга $\mathbb{D}$ на квадратурные области в классе гармонических функций с полиномиальной антиголоморфной частью. Долгое время не удавалось найти примеры таких областей и лишь недавно были построены первые нетривиальные примеры гармонических автоморфизмов единичного круга с полиномиальной антиголоморфной частью.

В рамках школы планируется обсудить предысторию задачи, конструкции известных примеров и продвинуться дальше в описании всех соответствующих автоморфизмов.

Специальных знаний для понимания задачи и участия в ее обсуждениях не требуется, но материал стандартного курса комплексного анализа (теории функций комплексного переменного) считается известным. Также желательно знакомство с элементами теории ограниченных голоморфных функций и с началами теории пространств Харди H^p (в этой связи можно рекомендовать книги Д. Гарнетта «Ограниченные аналитические функции» и П. Кусиса «Введение в теорию пространств H^p »).

Сюжет 4. HRT (Heil–Ramanathan–Topiwala) гипотеза

Юрий Сергеевич Белов, СПбГУ

Пусть f – ненулевая квадратично-суммируемая функция. Верно ли, что если система ее частотно-временных сдвигов линейно независима, т.е. $\sum_{k=1}^N a_k e^{i w_k t} f(t - t_k) = 0$, то $f = 0$?

Несмотря на важность этого вопроса для частотно-временного анализа, гипотеза далека от своего решения. Тем не менее, есть много специальных частных случаев (при дополнительных предположениях о функции и/или наборе параметров (w_k, t_k)) когда гипотеза верна. Причем методы доказательства варьируются от самых элементарных до очень сложных.

Предполагается, что в рамках школы мы обсудим некоторые известные результаты и попробуем обобщить их на более широкие классы функций и параметров.

Рекомендуемая литература:

- https://norbertwiener.umd.edu/Research/lectures/2018/rschram_prelim_slides.pdf
- <https://heil.math.gatech.edu/papers/hrtzero.pdf>
- Heil, C.: Linear independence of finite Gabor systems, In: Heil, C. (Ed.), Harmonic Analysis and Applications. Birkhauser, Boston, 171–206 (2006).
- Bownik, M., Speegle, D.: Linear independence of time-frequency translates of functions with faster than exponential decay. Bull. Lond. Math. Soc., 45, 554–566 (2013).
- Demeter, C.: Linear independence of time frequency translates for special configurations. Math. Res. Lett., 17, 761–779 (2010).
- Demeter, C., Gautam, S.Z.: On the finite linear independence of lattice Gabor systems. Proc. Amer. Math. Soc., 141, 1735–1747 (2013).
- Demeter, C., Zaharescu, A.: Proof of the HRT conjecture for (2, 2) configurations. J. Math. Anal. Appl., 388, 151–159 (2012).

Сюжет 5. Случайные поля и случайные меры

Александр Игоревич Буфетов, МИАН & СПбГУ

Рассмотрим характеристический многочлен случайной матрицы, распределенной по мере Хаара — случайную голоморфную функцию с нулями в точках спектра. Предельное распределение логарифма модуля этого поля при устремлении размера к бесконечности в комплексной плоскости без единичной окружности следует из теоремы Сошникова, утверждающей, что распределение суммы значений гладкой функции в спектре большой случайной унитарной матрицы асимптотически гауссово.

Подобные рассуждения продолжаются и на предел мер Хаара при некотором скейлинге спектра — синус процесса — меры на дискретных счетных подмножествах прямой. Ввести можно и аналог характеристического многочлена — случайную голоморфную функцию, равную нулю в точках случайного подмножества. Аналогично по теореме Сошникова логарифм модуля данного поля сходится к гауссовому распределению на комплексной плоскости без действительной оси при стягивании частиц. Для самой же случайной функции на действительной оси в пределе получается не функция, а мера — гауссов мультипликативный хаос, неформально понимаемый как экспонента случайной обобщенной функции.

В рамках школы мы будем пробовать выводить из центральной предельной теоремы сходимость к гауссову мультипликативному хаосу.

Сюжет 6. Гармонические потенциалы на графах и в $\mathbb{R}^n$: переход между дискретным и непрерывным

Павел Александрович Мозоляко, СПбГУ

1. CAPACITY DEFICIT

Question. *Can we make a more precise comparison between discrete and continuous capacities?*

Introduction. We are working with a) a rooted infinite dyadic uniform tree with a boundary (leaf set) ∂T and with b) a unit disc $\mathbb{D}$ with boundary $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$.

On ∂T we define a *discrete capacity* and compare it with the classical *logarithmic capacity* on $\mathbb{T}$ via the standard pullback/pushforward mapping $\partial T \longleftrightarrow \mathbb{T}$.

It is well known (Peres, Lyons, Pemantle, Arcozzi, Rochberg, etc. etc.) that these two capacities are equivalent up to a multiplication by some absolute constant. What is not clear, is if their deficits are comparable as well. Namely, if there is a compact set E , say on ∂T , of almost full capacity (in this case $\frac{1}{2} - \varepsilon$), will its continuous image $F \subset \mathbb{T}$ have almost full capacity as well — so that of $\text{Cap } \mathbb{T} - \kappa(\varepsilon)$ with a decent estimate on $\kappa(\varepsilon)$?

Statement of the problem. We start with the discrete setting. The tree T is identified with its vertex set — we do not use edges. Each vertex $\alpha \in T$ corresponds to a unique geodesic/ray that starts at the root o and ends at α . In a similar fashion, the boundary ∂T is just a collection of all infinite geodesics starting at the root, we keep the same notation for the boundary points. Once can endow ∂T with a metric structure making it a compact totally disconnected metric space. We write $\bar{T} = T \cup \partial T$.

The least common ancestor $\alpha \wedge \beta$ of two vertices (or boundary points) α and β is the smallest (in the natural order relation = farthest from the root) point γ such that $\gamma \geq \alpha$; $\gamma \geq \beta$, clearly γ is the endpoint of the intersection of two geodesics that end at α and β . Given $f : T \rightarrow \mathbb{R}_+$ let

$$\begin{aligned} \mathbf{I}f(\alpha) &:= \sum_{\beta \geq \alpha} f(\beta); \\ K(\alpha, \beta) &:= \mathbf{I}1(\alpha \wedge \beta) = \text{dist}(\alpha \wedge \beta, o); \\ \mathcal{S}(\alpha) &:= \{\tau \in \bar{T} : \tau \leq \alpha\}, \quad \mathcal{P}(\alpha) := \{\beta \in T : \beta \geq \alpha\}; \\ \mathbf{I}^*\mu(\alpha) &:= \int_{\mathcal{S}(\alpha)} d\mu; \\ \mathbf{V}^\mu(\alpha) &:= \mathbf{I}^*\mu = \int_{\partial T} K(\alpha, \beta) d\mu(\beta), \\ \mathcal{E}[\mu] &:= \int_{\partial T} \mathbf{V}^\mu(\tau) d\mu(\tau) = \sum_{\alpha \in T} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha))^2; \\ \text{Cap } E &:= \inf\{\mathcal{E}[\mu] : \text{supp } \mu \subset E, \mathbf{V}^\mu(\tau) \geq 1, \tau \in E\} = \\ &= \inf\{\|g\|_{l^2(T)}^2 = \sum_{\alpha \in T} g^2(\alpha) : \mathbf{I}g(\tau) \geq 1, \tau \in E\}. \end{aligned}$$

here we assume that μ is some finite Borel measure on the boundary ∂T . The relations above are standard, one can easily check them (see also [1, Chapter 2], [13, Chapter 15] or [18]).

Now we do the continuous half of the picture. Given a compact $F \subset \mathbb{T}$ its logarithmic capacity $\text{Cap } F$ is

$$\text{Cap}_{\log} F := \sup \left\{ \exp \left(- \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \log \frac{1}{z-w} d\nu(z) d\nu(w) \right) : \text{supp } \nu \subset F, \nu(F) = 1 \right\},$$

see [18].

We identify $\mathbb{T}$ and $[0, 1]$ in the usual way, we keep same notation for sets on $\mathbb{T}$ and $[0, 1]$. Now it is more convenient to us to use a slightly different version of the capacity, basically we change the potential kernel and the normalization a bit,

$$\text{Cap } F := \inf \left\{ \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \log \frac{2}{z-w} d\nu(z) d\nu(w) : \text{supp } \nu \subset F, \int_{\mathbb{C}} \log \frac{2}{z-w} d\nu(z) \geq 1, w \in F \right\}.$$

It is standard to check the relation between these two capacities,

$$\text{Cap } F \asymp \frac{1}{\log \frac{10}{\text{Cap}_{\log} F}},$$

see [1, Chapter 2.3-2.5] for various ways to define a capacity.

Now we are ready to compare the discrete and continuous pictures. It is well known that T can be represented as a collection of dyadic intervals of the form $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$, $0 \leq k$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$, in the same way ∂T 'almost' corresponds to $[0, 1]$ - there is an issue of dyadic-rational points which are counted twice, intersecting intervals etc., but it is not really important. In other words, there is a canonical map $\Lambda : \partial T \rightarrow [0, 1]$, which is 'almost a bijection', and pushforward/pullback maps

$$\begin{aligned} \Lambda_* \mu(F) &:= \mu(\Lambda^{-1}(F)), \quad F \subset [0, 1] \\ \Lambda^* \nu(E) &:= \int_0^1 \frac{\#\{\tau \in E : \Lambda(\tau) = x\}}{\#\{\tau \in \partial T : \Lambda(\tau) = x\}} dx, \quad E \subset \partial T, \end{aligned}$$

where μ, ν are Borel measures on ∂T and $[0, 1]$ respectively.

Consider now a compact set $F \subset [0, 1]$ and/or, what is essentially the same, a compact set $E \subset \partial T$. One has the following two-sided estimate

Theorem. *One has*

$$\begin{aligned} \text{Cap } E &\asymp \text{Cap } \Lambda(E), \\ \text{Cap } F &\asymp \text{Cap } \Lambda^{-1}(F). \end{aligned}$$

Here the capacities are discrete or continuous depending on where the set is.

The proof can be found in (more like extracted from) [2] or [13, Chapter 15], essentially it boils down to approximating the potential kernel by sums of indicators of dyadic intervals and some related energy estimates.

This Theorem however is useful only when dealing with sets of small capacity, since the constants in the inequalities above can not be pushed down to 1. The main **question** is therefore as follows.

Assume the $E \subset \partial T$ and $\text{Cap } E = \text{Cap } \partial T - \varepsilon = \frac{1}{2} - \varepsilon$. What can we say about $\text{Cap } \Lambda(E)$? Is it still of almost full capacity, so that $\text{Cap } \Lambda(E) = \text{Cap}([0, 1]) - \kappa(\varepsilon)$ with $\kappa = o(1)$? If so, what is order of decay of κ ? Also, playing around with potential kernels one can cook up several equivalent capacities, like the Bessel $\frac{1}{2}$ capacity, what can we say about this one? Does it really matter which capacity we choose as long as the set in question is of almost full capacity?

2. BIPARAMETER FROSTMAN

Question. *Can we emulate the proof of the Frostman lemma in two parameters?*

Statement of the problem. We recall that in the previous section we identified T with dyadic subintervals of $[0, 1]$. One of the proofs of the classical Frostman lemma (see, say, [14, Chapter 4]) basically boils down to the following fact.

Assume that there exists a subadditive function $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$, where $\mathcal{F} = \{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}), k \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq j \leq 2^k - 1\}$ is a collection of dyadic subintervals of $[0, 1]$, and subadditivity means that $\varphi(I) \leq \varphi(I_+) + \varphi(I_-)$ where I splits into the disjoint union $I_+ \cup I_-$ of two dyadic intervals of the next rank. Then there exists a Borel measure μ such that

$$\begin{aligned}\mu([0, 1]) &= \varphi([0, 1]), \\ \mu(I) &\lesssim \varphi(I), \quad I \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

The proof is quite straightforward (the main argument is almost obvious, and the rest is just taking care of various measure-related particulars).

Now let us think of dyadic rectangles, which are just subrectangles of $[0, 1]^2$ of the form $R = I \times J$, $I, J \in \mathcal{F}$. Let

$$R_{\pm} := I_{\pm} \times J, \quad R^{\pm} := I \times J_{\pm},$$

be the four immediate 'children' of R of the next rank. Assume that there exists a subadditive function $\varphi : \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\varphi(R) &\leq \varphi(R_+) + \varphi(R_-), \\ \varphi(R) &\leq \varphi(R^+) + \varphi(R^-), \\ R \in \mathcal{F}^2 &= \{I \times J, I, J \in \mathcal{F}\}.\end{aligned}$$

Does there exist a Borel measure μ on $[0, 1]^2$ such that

$$\begin{aligned}\mu(R) &\leq C\varphi(R), \quad R \in \mathcal{F}^2, \\ \mu([0, 1]^2) &= \varphi([0, 1]^2),\end{aligned}$$

where $C > 1$ is some absolute constant? Here C cannot be 1 like in the one-parametric case, since one can cook up an example with $C > 1 + 2^{-6}$ like, but can we find a constant that does not depend on φ ?

3. DISCRETE VARIATION

Question. Can we invent a discrete reformulation of a certain continuous problem and find a 'proper' proof?

3.1. Statement of the problem. Some 30 years ago Bourgain ([5, 6]) proved the (essentially, we restate it a bit) following result

Theorem. Assume that u is a positive harmonic function on the upper half-plane $\mathbb{R}_+^2$. Then there exists a set $E \subset \partial\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}$ of Hausdorff dimension 1 such that

$$\text{MVar } u := \int_0^1 |\nabla u|(z) P(\xi, z) dA(z) < +\infty, \quad \xi \in E,$$

where $P(\xi, z)$ is just the Poisson kernel for the upper half-plane at $z = x + iy$, i.e.

$$P(\xi, z) = \frac{y}{\pi((\xi - x)^2 + y^2)}.$$

The integral above is taken over $[0, 1]$ only because we do not want to bother with the behaviour of u at infinity, it really is a boundary problem.

Later on this result was extended to various other settings, see [9, 15] (and it was used in [?] to study the boundary behaviour of Bloch functions). However, even after some simplification of the original proof it does remain quite technical and probably involves too much 'hard analysis'.

The core of the argument - as envisioned by Bourgain - seems to be a construction of some very non-Markov process which manages to catch the 'trajectories of monotonicity' of $|\nabla u|$, and whose boundary distribution has the appropriate Hausdorff dimension. One even can wonder if all the arguments could be somehow reduced to a few iterations of the Harnack and boundary Harnack inequalities. One possible way to investigate this is the following question.

What would be the proper discrete restatement of the Theorem above? There is already one, on a tree, see [7], but the tree seems to be too 'simple' (or not connected enough) to be really interesting. Can one ask this question for a 'reasonably decent' graph?

4. EXTRA PROBLEM (LOOKS DIFFICULT): ENCODING $\frac{1}{3}$ -CANTOR SET BY A 2-TREE AND A 3-TREE

See Question 16.7 in [13]. One can consider a toy situation replacing 3-tree by a 4-tree, say.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. ADAMS, L. HEDBERG, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer 1999.
- [2] N. ARCOZZI, R. ROCHBERG, E. SAWYER, B.D. WICK, *Potential theory on trees, graphs and Ahlfors-regular metric spaces*. Potential Anal. **41** (2014), no. 2, 317–366.
- [3] I. BENJAMINI, Y. PERES, *Random walks on a tree and capacity in the interval*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **28** (1992), no. 4, 557–592.
- [4] C. BISHOP, Y. PERES *Fractals in probability and analysis*, Cambridge University Press, 2017.
- [5] J. BOURGAIN, *On the radial variation of bounded analytic functions on the disk*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 671–682.
- [6] J. BOURGAIN, *Bounded variation of measure convolutions*, Math. Zametki **54** (1993), no. 4, 25–34 (transl. from Russian in J. Math Notes **54** (1993)).
- [7] A. CANTÓN, J.L. FERNÁNDEZ, D. PESTANA, J.M. RODRÍGUEZ, *On harmonic functions on trees*, Potential Analysis, **15** (2001), 199–244.
- [8] J.B. GARNETT, D.E. MARSHALL, *Harmonic measure*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [9] V.P. HAVIN, P.A. MOZOLYAKO, *Boundedness of variation of a positive harmonic function along the normals to the boundary*, Algebra and Analysis **28** (2016), no. 3, 67–110.
- [10] P. JONES, P.F.X. MÜLLER, *Radial variation of Bloch functions.*, Math. Res. Lett. **4** (1997), no. 3, 395–400.
- [11] R. LYONS, *Random walks and percolation on trees*, Ann. Probab. **18** (1990), no. 3 931–958.
- [12] R. LYONS, *Random walks, capacity and percolation on trees*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 4, 2043–2088.
- [13] R. LYONS, Y. PERES *Probability on trees and networks*, Cambridge, (2016).
- [14] P. MÖRTERS, Y. PERES *Brownian motion*, Cambridge, (2010).
- [15] M. D. O'NEILL, *Vertical variation of harmonic functions in upper half-spaces*, Colloq. Math. **87** (2001), 1–12.
- [16] M. PAOLO, P. M. SOARDI *Potential Theory on Infinite Networks*, Springer, 1994.
- [17] R. PEMANTLE, Y. PERES, *Galton-Watson trees with the same mean have the same polar sets*, Ann. Probab. **23** (1995), 1102–1124.
- [18] TH. RANSFORD, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge, (1995).

A limiting Kato–Ponce inequality: the martingale model

Дмитрий Михайлович Столяров¹, СПбГУ

Classical setting

The product rule says: $(fg)' = f'g + fg'$ for functions f and g of a single variable. For fractional derivatives, there is no exact generalization of this identity. There are several definitions of fractional derivatives. We choose

$$D^\alpha f = \left(\hat{f}(\xi) |\xi|^\alpha \right)^\sim, \quad \alpha > 0.$$

The symbols $\hat{\cdot}$ and $^\sim$ denote the Fourier transform and its inverse. We prefer to work with functions of a single variable and also assume they are smooth and compactly supported. The Kato–Ponce inequality says

$$\|D^\alpha(fg)\|_{L_p} \lesssim \|D^\alpha f\|_{L_p} \|g\|_{L_\infty} + \|D^\alpha g\|_{L_p} \|f\|_{L_\infty}, \quad p \in (1, \infty).$$

This bound serves as a substitute for the product rule. Seemingly, the case $p = 1$ has not been considered in the literature (however, see [?] for related inequalities in this regime and historical background). Is the inequality

$$\|D^\alpha(fg)\|_{L_1} \lesssim \|D^\alpha f\|_{L_1} \|g\|_{L_\infty} + \|D^\alpha g\|_{L_1} \|f\|_{L_\infty} \quad (1)$$

true? If it is not true in general, is it true at least for some non-integer indices α ?

The problem has a meaningful discrete version discussed in the forthcoming section.

Martingale setting

Let $\alpha \in (0, 1)$. Consider dyadic martingales and define the operator of fractional derivative on them:

$$D^\alpha F = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha n} (F_{n+1} - F_n), \quad F = \{F_n\}_n.$$

¹I wish to thank Daniel Spector for attracting my attention to the particular problem discussed in this text.

The question is whether the inequality

$$\mathbb{E} |D^\alpha[FG]| \lesssim \|F\|_\infty \mathbb{E} |D^\alpha G| + \|G\|_{L_\infty} \mathbb{E} |D^\alpha F|$$

hold true; this is a direct analog of (1). Here FG means the martingale generated by the product of terminate values of F and G : if $F_n = \mathbb{E}(F | \mathbb{D}_n)$ and $G_n = \mathbb{E}(G | \mathbb{D}_n)$, then $(FG)_n = \mathbb{E}(FG | \mathbb{D}_n)$. Here $\mathbb{D}_n$ means the σ -field generated by dyadic intervals of generation n . Let us start with a simpler quadratic version

$$\mathbb{E} |D^\alpha F^2| \lesssim \|F\|_\infty \mathbb{E} |D^\alpha F|.$$

Without loss of generality, we may assume $\|F\|_\infty \leq 1$. Maybe, there is an elementary answer to this question, but since I do not know one, I wish to apply the Bellman function method to the problem. To this end, introduce the Bellman function

$$\mathbb{B}(x, y, z, t, s) = \sup \left\{ \mathbb{E} |s + D^\alpha F^2| \mid F_0 = x, \mathbb{E} F^2 = y, \mathbb{E} |t + D^\alpha F| = z, \|F\|_\infty \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

This function is non-trivial on the domain

$$\left\{ (x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 \mid x^2 \leq y \leq 1, |t| \leq z, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(at least the supremum in the formula above is taken over an empty set when (x, y, z, t, s) lies outside the said domain) and satisfies the **main inequality**:

$$\mathbb{B}(x, y, z, t, s) \geq 2^{\alpha-1} \left(\mathbb{B}(x_+, y_+, z_+, t_+, s_+) + \mathbb{B}(x_-, y_-, z_-, t_-, s_-) \right),$$

for any points $(x_+, y_+, z_+, t_+, s_+)$ and $(x_-, y_-, z_-, t_-, s_-)$ in the domain that satisfy the **splitting rules**

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_+ + x_-}{2}, & y &= \frac{y_+ + y_-}{2}, \\ z &= 2^{\alpha-1}(z_+ + z_-), & t_\pm &= 2^{-\alpha}t + (x - x_\pm), & s_\pm &= 2^{-\alpha}s + (y - y_\pm). \end{aligned} \quad (3)$$

By plugging constant martingales into the definition of the Bellman function, we get the **boundary condition**

$$\mathbb{B}(x, x^2, |t|, t, s) = |s|.$$

The Bellman/Burkholder principle (which I can rigorously prove in our situation) says that if we construct some function G of five variables that satisfies the main inequality and the boundary condition, then

$$\mathbb{E} |D^\alpha F^2| \lesssim G\left(F_0, \mathbb{E} F^2, \mathbb{E} |\mathbb{D}^\alpha F|, 0, 0\right)$$

for any martingale F . In particular, if our function G (which is usually called a **supersolution**) also satisfies the bound

$$G(x, y, z, 0, 0) \lesssim z,$$

then we obtain the proof of the desired quadratic inequality. The Bellman function for the bilinear problem is a little bit more complicated, however, I believe the supersolution for the quadratic problem (if it exists) should lead to a supersolution for the bilinear problem. Can one find a finite supersolution for the Bellman problem stated above?