Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Молодёжный коллоквиум по математической логике и её приложениям

Москва, Россия
31 августа – 4 сентября 2026

— Сборник тезисов —

Москва · 2026

Цель **коллоквиума** — познакомить молодых исследователей, включая студентов и аспирантов, с перспективными направлениями развития математической логики и предоставить им возможность выступить с докладами по результатам своих исследований. Параллельно с выступлениями молодых исследователей в рамках коллоквиума планируется чтение четырёх мини-курсов, ориентированных на широкую аудиторию.

Страница коллоквиума на портале MathNet.ru: https://www.mathnet.ru/conf2744

Программный комитет: С. Л. Кузнецов, С. О. Сперанский.

Молодёжный коллоквиум по математической логике и её приложениям проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2025-303).





ОГЛАВЛЕНИЕ

— К У Р С Ы —

И. Ш. Калимуллин. Теорема рекурсии и критерии полноты . . . 3

А. А. Разборов. Элементы теории сложности доказательств . . . 4

А. Л. Таламбуца. Алгоритмические проблемы для матричных полугрупп . . . 5

В. Б. Шехтман. Семантики модальных предикатных логик . . . 6

— Д О К Л А Д Ы —

Р. Р. Багавиев. Критерии полноты в терминах креативности . . . 7

Ю. А. Бушакова, С. И. Башмаков. О свойствах многоагентной логики ступенчатого времени с доступом в прошлое $p\mathcal{LTK}.sl$ . . . 9

М. Е. Вишникин. О редуцируемости регулярных языков ординальной длины . . . 11

Л. В. Дворкин. О бисимуляционных произведениях и интерполяционном свойстве Линдона в монотонных модальных логиках . . . 13

А. В. Ерёмин. Модальная логика ω-итерированной непротиворечивости . . . 15

В. Е. Карпов, С. О. Сперанский. О Σ_2-теории натуральных чисел со стандартным порядком и свободной эквивалентностью . . . 17

Н. В. Лукашов. Унификация и допустимые правила вывода для модальных логик $\mathrm{K} + \Box^n \bot$ . . . 19

А. А. Оноприенко. О классе функций конечнозначной логики Даммета со всеми константами . . . 21

Ф. Н. Пахомов, К. А. Ковалёв. О стандартных системах моделей арифметики Бюхи . . . 23

К. К. Пчелин. Решение проблемы Поста о tag-системах: доказательство роста для примера Куриленко . . . 25

Т. Г. Пшеницын. О свойствах языков, задаваемых коммутативными грамматиками Ламбека . . . 27

Ю. Д. Теляковская. Влияние операции пересечения на звёздную высоту регулярных языков . . . 29

Д. С. Трофимов. О дизъюнктных фрагментах полимодальных логик доказуемости . 31

А. Р. Углев. О специальных базисах тождеств некоторых решёток 32

Д. О. Фролов. Формальная модель пространства нейросетевых ранжирующих функций и теорема о существовании оптимальной архитектуры 34

И. Н. Шиманогов. Вычислимые изоморфизмы относительно регулярных булевых алгебр 36

Теорема рекурсии и критерии полноты

Искандер Шагитович Калимуллин

Мини-курс посвящен двум взаимосвязанным классическим темам теории вычислимости. Первая тема связана с теоремой Клини о неподвижной точке и её различными модификациями, в том числе с критерием Арсланова о полноте. С помощью оракульного построения будет доказана теорема Джокуша–Соара о низком базисе, из которой следует, что критерий Арсланова не может быть обобщен на произвольные оракулы. Вторая тема связана с проблемой Поста о существовании промежуточной перечислимой тьюринговой степени и подходам к её решению. Будет дано приоритетное построение, решающее проблему Поста (теорема Мучника–Фридберга). Будет дано также альтернативное доказательство, основанное на теореме о низком базисе.

И. Ш. Калимуллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань

ikalimul@gmail.com

Элементы теории сложности доказательств

Александр Александрович Разборов

Теория сложности доказательств изучает насколько простыми могут (или не могут) быть формальные доказательства истинных утверждений в различных естественных системах доказательств. Классы рассматриваемых утверждений и систем могут существенно варьироваться в зависимости от контекста, что определяет целый ряд неожиданных и важных взаимосвязей между теорией сложности доказательств и многими областями в математике и компьютерных науках.

Наш мини-курс начнётся с краткого введения в теорию ограниченной (англ. *bounded*) арифметики и её связей с теорией сложности вычислений. После этого мы перейдём к рассмотрению пропозициональных систем доказательств, естественно возникающих при изучении доказательств Σ_0^b-формул в ограниченной арифметике. В зависимости от наличия времени, я надеюсь рассказать как о традиционных системах «в стиле Гильберта» (системы Фреге, резолюции и т.д.) так и системах, основанных на простых идеях из алгебраической и полу-алгебраической геометрии: полиномиальное исчисление, «сумма квадратов», «секущие плоскости» и др.

А. А. Разборов

Чикагский университет, г. Чикаго, США

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

razborov@mi-ras.ru

Алгоритмические проблемы для матричных полугрупп

Алексей Леонидович Таламбуца

Первые примеры алгоритмически неразрешимых проблем для матриц были найдены А. А. Марковым (мл.) в 1947 году с использованием результата Поста 1946 года о проблеме соответствия (ПСП). В дальнейшем, ПСП и её модификации много раз использовались для доказательства неразрешимости других алгоритмических проблем для матриц. Так, в 1970 году Патерсон доказал, что при $n \geqslant 3$ не существует алгоритма, проверяющего по набору S целочисленных матриц размера $n \times n$, выразима ли через произведения из S нулевая матрица, а в 1991 году Кларнер, Бирже и Саттерфилд доказали, что неразрешима задача проверки, существует ли нетривиальное полугрупповое соотношение между матрицами из S. Алгоритмическая разрешимость каждой из этих проблем для $n = 2$ до сих пор остаётся открытым вопросом. Курс будет посвящён этим задачам, а также смежным к ним.

А. Л. Таламбуца

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

altal@mi-ras.ru

Семантики модальных предикатных логик

Валентин Борисович Шехтман

В курсе излагаются некоторые результаты о полноте и неполноте модальных предикатных логик в различных семантиках. Для семантики шкал Крипке рассматриваются канонические модели и их модификации. В частности, описывается игровой метод для построения селективной фильтрации. Вводятся обобщения семантики шкал Крипке: семантика Крипке-расслоений, функциональная семантика Гиларди, симплициальная семантика Скворцова. Для симплициальной семантики обсуждается теорема корректности и доказывается теорема полноты на основе канонических моделей. Устанавливаются теоремы о неполноте более слабых семантик (шкалы Крипке, Крипке-расслоения) с помощью более сильных семантик Гиларди и Скворцова.

В. Б. Шехтман

Московский физико-технический институт,
г. Долгопрудный

vshehtman@gmail.com

Критерии полноты в терминах креативности

Рамиль Радифович Багавиев

В теории вычислимости особый интерес представляют вопросы, связанные с характеризацией множеств, обладающих наибольшей алгоритмической сложностью в некотором классе. Сложность множеств можно сравнивать между собой путём введения различных отношений предпорядка, именуемых *сводимостями*. Например, классической является *m-сводимость*, определяемая следующим образом: множество A m-сводится к B (обозн. $A \leq_m B$), если существует такая вычислимая функция f, что для любого x имеет место $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Рассмотрим класс т.н. *вычислимо перечислимых (сокр. в.п.) множеств*, задаваемых как области определений частично вычислимых функций. Примером в.п. множества служит множество *проблемы остановки*. Оно же является в.п. множеством, к которому m-сводятся все в.п. множества; такие в.п. множества называются *m-полными*.

Хорошо известны следующие критерии m-полноты в.п. множеств:

Теорема ([1, 2]). *Для в.п. множества A следующие условия эквивалентны:*

0) A m-полно,

1) $(\exists$ *вычислимая* $f)(\forall x)[f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x]$,

2) $(\exists$ *вычислимая* $f)(\forall x)[\overline{A} \subseteq W_x \Rightarrow f(x) \in A \cap W_x]$,

3) $(\exists$ *вычислимая* $f)(\forall x)[W_x \subseteq \overline{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{A} \cap \overline{W_x}]$.

Здесь W_x обозначает в.п. множество с номером x в некоторой фиксированной гёделевской нумерации всех в.п. множеств. Как можно заметить, выписанные выше условия основаны на том, что имеется вычислимая функция, которая по индексу в.п. множества W_x задаёт элемент $f(x)$, различающий множества A и $\overline{W_x}$. Другими словами, на каждое в.п. множество можно эффективно указать «контрпример». Данное обстоятельство побудило Эмиля Поста назвать подобные множества *креативными*.

В докладе будут изложены три подхода к тому, каким образом можно сформулировать аналогичные условия для других алгоритмических сводимостей: для т.н. *основных сводимостей табличного типа* (см. [3]), для слабой табличной (или wtt) сводимости, а также для сводимости по Тьюрингу (T-сводимость) (см., напр., [4]).

Первый подход основан на том, что функция f берётся не вычислимой, а вычислимой относительно оракула A. Доказана следующая

Теорема. *Пусть A в.п. Тогда*

1) A tt-полно тогда и только тогда, когда существует такой тотальный функционал Φ, что $(\forall x)[\Phi^A(x) \in A \triangle \overline{W_x}]$;

2) A wtt-полно тогда и только тогда, когда существует такой wtt-функционал Φ^A, мажорируемый вычислимой функцией, что $(\forall x)[\Phi^A(x) \in A \triangle \overline{W_x}]$.

Второй подход использует понятие *сводимости первого порядка*, введённое В.Д. Соловьёвым в [5]. С его помощью для каждой из основных сводимостей табличного типа либо устанавливается критерий полноты, либо строятся опровергающие контрпримеры. В третьем подходе вычисление характеристической функции одного элемента $f(x)$ на множествах A и $\overline{W_x}$ заменяется рассмотрением тьюрингова функционала, который на оракулах A и $\overline{W_x}$ даёт разные результаты. Наконец, в докладе будут изложены актуальные открытые вопросы по данной тематике.

Финансовая поддержка. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №24-11-00227) в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение №075-02-2025-1725/1).

Список литературы

[1] J. R. Myhill. Creative sets. *Zert. Math. Log. Grund. Math.* 1, 97–108, 1955.

[2] А. А. Мучник. Изоморфизм систем рекурсивно перечислимых множеств с эффективными свойствами. *Тр. ММО* 7, 407–412, 1958.

[3] А. Н. Дёгтев. *Рекурсивно перечислимые множества и сводимости табличного типа.* М., Наука: Физматлит, 1998. 175 с.

[4] Р. И. Соар. *Вычислимо перечислимые множества и степени.* Пер. с англ. Казань: Казанское математическое общество, 2000. 576 с.

[5] В. Д. Соловьёв. Некоторые обобщения понятий сводимости и креативности. *Изв. вузов. Матем.* 3, 65–72, 1976.

Р. Р. Багавиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО, г. Казань

ramilbagaviev@mail.ru

О свойствах многоагентной логики ступенчатого времени с доступом в прошлое $p\mathcal{LTK}.sl$

Юлия Александровна Бушакова Степан Игоревич Башмаков

Неклассические логики, и в особенности временные, предоставляют богатый формальный аппарат для рассуждений о динамике и эволюции систем, находя применение в верификации программных протоколов, спецификации поведения интеллектуальных агентов и обработке временной информации в базах знаний, [1]. В настоящей работе объектом исследования выступает представитель класса временных логик — логика $pLTK.sl$. Она принадлежит семейству расширений ступенчатой логики линейного времени $Ext(LTL.sl)$, где индекс sl (step-like) указывает на дискретный, пошаговый характер времени, [2].

Семантически $pLTK.sl$ определяется на шкалах Крипке с нерефлексивным и нетранзитивным отношением между временными сгустками. Также определены отношения агентов R_i, которые выделяют сегменты доступной информации в каждом временном сгустке. Выбор именно такой нерефлексивной нетранзитивной природы перехода продиктован стремлением адекватно моделировать вычислительные процессы, в которых возможна потеря информации на отдельных шагах либо её принципиальная недоступность при переходе от одного состояния к другому. Язык логики $pLTK.sl$ включает стандартные булевы связки и дополнен временными операторами будущего N (Next) и прошлого P (Previous), что позволяет проверять истинность формул в следующем и предыдущем сгустке соответственно.

В докладе рассматриваются вопросы семантической характеризации логики, её свойств и аксиоматизации, доказывается проективность унификации $pLTK.sl$ с ограничениями на отношения агентов в виде сериальности или транзитивности. Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *унифицируемой* в логике $\mathcal{L}$, если $\exists\sigma\colon p_i \mapsto \sigma_i$ — подстановка (унификатор) для каждой переменной $p_i \in Var(\varphi)$ такая, что $\sigma(\varphi) = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$. *Корневым gu* называется унификатор, получаемый подстановкой констант вместо переменных формулы (т.е. $gu : p_i \mapsto \{\top, \bot\}, \forall p_i \in Var(\varphi)$).

Проективной в $\mathcal{L}$ назовём формулу $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ для которой найдётся унификатор τ, удовлетворяющий условию: $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} [p_i \equiv \tau(p_i)]$ для всех переменных $p_i \in Var(\varphi)$. Такой унификатор τ будем называть *проективным*.

Теорема *Любая унифицируемая формула в $p\mathcal{LTK}.sl$ проективна.*

Доказывается, что унификатор следующего вида

$$\sigma(p_i) = (\zeta_j(\varphi) \wedge p_i) \vee (\neg\zeta_j(\varphi) \wedge gu(p_i)),$$

где gu — корневой унификатор формулы φ, является проективным.

Финансовая поддержка. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).

Список литературы

[1] M. Fisher. An introduction to practical formal methods using temporal logic. *John Wiley & Sons*, 2011.

[2] С. И. Башмаков, Т. Ю. Зверева. Линейная ступенчатая логика знания LTK.sl. *Сиб. электрон. матем. известия* 20:2, 1361–1373, 2023.

Ю. А. Бушакова, С. И. Башмаков

Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета

u_bushakova@vk.com

О редуцируемости регулярных языков ординальной длины

Максим Евгеньевич Вишникин

Регулярные языки над ω-словами играют важную роль в теоретической информатике и математической логике. Данный формализм введён Бюхи в [1, 2] для изучения разрешимости монадической логики второго порядка для ординала ω. Впоследствии автоматы Бюхи были обобщены на случай произвольного счётного ординала [3]. Основной идеей является добавление переходов на предельных ординалах, а форма этих переходов восходит к автоматам Мюллера. Другая модель автоматов, работающих со словами длины больше ω, была исследована Чойкой [4], и в дальнейшем Бедоном было доказано, что данные модели эквивалентны [5, 6] (для ординалов, меньших ω^ω).

Исследования автоматов на словах произвольной ординальной длины тесно связаны с исследованием иерархий получаемых языков. Одной из классических иерархических конструкций является иерархия Бореля и её Σ^0_n- и Π^0_n-уровни. На пространстве слов над конечным алфавитом рассматривается произведение дискретной топологии. Естественно рассмотреть сужение этой иерархии на класс регулярных языков. В случае ω-языков свойства полученной иерархии хорошо известны. Так, тривиальным наблюдением является то, что все регулярные ω-языки лежат в классе Δ^0_3. Более того, любой регулярный ω-язык является булевой комбинацией языков из класса Σ^0_2, а следовательно, уже Σ^0_3-уровень суженной иерархии в точности совпадает с классом всех регулярных ω-языков. Данное свойство естественно сохраняется и для регулярных α-языков при $\alpha < \omega^2$, но для больших ординалов появляются дополнительные нетривиальные уровни сложности, а именно Σ^0_3 и Σ^0_4. Соответственно, два следующих уровня появляются на ординале ω^3 и далее на каждом ординале ω^n.

Однако, в отличие от случая ω-языков, случай больших ординалов мало изучен. В данной работе предлагается рассмотреть часть свойств регулярных α-языков, где $\alpha > \omega$. Особый интерес представляет редуцируемость, т.е. возможность для любых $A, B \in \Sigma^0_n$ найти непересекающиеся $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$ того же класса, для которых $A' \cup B' = A \cup B$. Оказывается, что для языков предельной длины $\alpha > \omega$ редуцируемость ведёт себя иначе, чем для регулярных ω-языков. В ω-случае оба уровня Σ^0_1 и Σ^0_2 обладают редуцируемостью [7] (на тривиальном уровне Σ^0_3 редуцируемость также имеется в силу замкнутости относительно естественных операций). Автором показано, что уже в случае языков длины $\omega \cdot 2$ классы Σ^0_1 и Σ^0_2 не обладают редуцируемостью.

Финансовая поддержка. Работа выполнена в Международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2025–343).

Список литературы

[1] J. R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 6, 66–92, 1960.

[2] J. R. Büchi. On a decision method in restricted second order arithmetic. In *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, 1–11, 1962.

[3] J. R. Büchi, D. Siefkes. *The Monadic Second Order Theory of All Countable Ordinals*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 328, Springer, 1973.

[4] Y. Choueka. Finite automata, definable sets, and regular expressions over ω^n-tapes. *Journal of Computer and System Sciences* 17, 81–97, 1978.

[5] N. Bedon. Finite automata and ordinals. *Theoretical Computer Science* 156, 119–144, 1996.

[6] N. Bedon. *Langages reconnaissables de mots indexés par des ordinaux*. Ph.D. thesis, Université de Marne-la-Vallée, January 1998.

[7] V. L. Selivanov. Fine hierarchy of regular ω-languages. *Theoretical Computer Science* 191, 37–59, 1998.

М. Е. Вишникин

Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург

st812176@spbu.ru

О бисимуляционных произведениях и интерполяционном свойстве Линдона в монотонных модальных логиках

Лев Вениаминович Дворкин

Бисимуляционные произведения шкал Крипке были введены Марксом [1] для доказательства наличия интерполяционного свойства Крейга (CIP) в широком классе нормальных модальных логик. Основной результат состоял в том, что любая каноническая нормальная логика, сохраняющаяся при бисимуляционных произведениях, обладает CIP. Так как бисимуляционные произведения являются частным случаем подпрямых произведений, отсюда следует CIP для логик классов шкал Крипке, задаваемых специальными хорновыми условиями (в частности, для K, K4 и S4).

Хансен [2] обобщила данный результат на ненормальные модальные логики, доказав наличие CIP для всех монотонных σ- и π-канонических логик, сохраняющихся при бисимуляционных произведениях (понятия σ- и π-каноничности являются одними из возможных обобщений каноничности на ненормальные монотонные логики). В той же работе устанавливается σ-каноничность логик, аксиоматизируемых над EM формулами вида $\chi \to \bigvee_{i<n} p_i \vee \bigvee_{j<m} \Diamond q_j$, где χ позитивна, и π-каноничность двойственных к ним логик. Однако сохранение при бисимуляционных произведений было доказано Хансен только для нескольких простейших аксиом, таких как 4, B, T, P и D.

В недавней работе докладчика [3] удалось усилить приведённые выше результаты двух направлениях. Во-первых, было показано, что каноничности и сохранения при бисимуляционных произведениях достаточно для доказательства не только CIP, но и более сильного интерполяционного свойства Линдона (LIP), то есть справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть монотонная логика Λ σ- или π-каноническая и сохраняется при бисимуляционных произведениях. Тогда Λ обладает LIP.*

Отметим, что предшествующие результаты опирались на критерий наличия CIP через амальгамируемость многообразия алгебр [4], тогда как аналогичный критерий для LIP не известен [5]. В теореме 1 мы применяем прямой подход, использующий бисимуляцию на канонической модели, что позволяет обойти данное препятствие.

Во-вторых, было установлено сохранение при бисимуляционных произведениях широкого класса ненормальных монотонных логик:

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda = \mathrm{EM} + \Gamma$*, где все формулы из* Γ *либо замкнуты, либо имеют вид* $\alpha(p) \to \Diamond p$*, где* $\alpha(p)$ *позитивна. Тогда* Λ *сохраняется при бисимуляционных произведениях и, следовательно, обладает LIP.*

Финансовая поддержка. Данная работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Список литературы

[1] M. M. Marx. Algebraic Relativization and Arrow Logic. PhD thesis, University of Amsterdam, 1995.

[2] H. H. Hansen. Monotonic Modal Logics. Master's thesis, University of Amsterdam, 2003.

[3] L. V. Dvorkin. Monotonicity versus positivity in modal logics. arXiv:2602.02837 [math.LO], 2026.

[4] Л. Л. Максимова. Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр. *Алгебра и логика* 18(5), 556–586, 1979.

[5] L. L. Maksimova. Amalgamation and interpolation in normal modal logics. *Studia Logica* 50, 457–471, 1991.

Л. В. Дворкин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, г. Москва

lev_135@mail.ru

Модальная логика ω-итерированной непротиворечивости

Андрей Викторович Ерёмин

За последние годы возрос интерес к применению модально-логических методов в теории доказательств. В [1], одной из ключевых работ в этом направлении, разрабатывается альтернативный подход к ординальному анализу PA, опирающийся на арифметическую интерпретацию полимодальной логики Джапаридзе (**GLP**).

Оказывается, для этого приложения достаточно рассматривать строго позитивный фрагмент **GLP**. В общем случае в языке с модальностями $\Box_1, \Box_2, \ldots$ строго позитивным называются формулы, составленные из переменных, $\top$, $\wedge$ и $\Diamond_n$. Утверждениями этого языка считаем импликации между строго позитивными формулами, которые записываем в виде $A \vdash B$. Строго позитивный фрагмент **GLP** (**RC**) аксиоматизирован в [3], там же доказана его полиномиальная разрешимость. Сама **GLP**, при этом PSPACE-полна [5].

Помимо снижения алгоритмической сложности, бедный язык позволяет сформулировать более общую арифметическую интерпретацию. В ней строго позитивные формулы интерпретируются как теории, а $A \vdash B$ как одноименное отношение между ними. Эта семантика впервые введена в [2], там же доказана полнота **RC** относительно неё. Практика показывает, что доказательство арифметической полноты для подобного рода интерпретаций требует существенно новых идей и техник. В настоящей работе исследован с виду простой, но нетривиальный пример логики подобного вида. Мы надеемся, что методы, полученные в результате, помогут в исследовании более сложных и принципиальных случаев.

Язык рассматриваемой логики задается следующим образом:

$$\Phi ::= p \mid \top \mid \Phi \wedge \Phi \mid \Diamond\Phi \mid \Diamond^{\omega}\Phi$$

В подразумеваемой семантике переменные оцениваются перечислимыми расширениями PA, а операции интерпретируются следующим образом:

- $\top = \mathrm{PA}$.
- $A \wedge B = A \cup B$.
- $\Diamond A = \mathrm{PA} + \mathrm{Con}(A)$.

- $\Diamond^\omega A = \bigcup_{n \geqslant 1} \Diamond^n A$.

Нас интересует вопрос модальной характеризации множества секвенций $A \vdash B$, общезначимых в описанной семантике. В [4] введена логика $\mathbf{K4}^+_\omega$, доказана её полнота по Крипке и высказана гипотеза о полноте относительно рассматриваемой семантики. Мы покажем, что эта гипотеза верна. Кроме того, будет показано, что, несмотря на бесконечность естественных моделей $\mathbf{K4}^+_\omega$, она является разрешимой за полиномиальное время.

Список литературы

[1] L. D. Beklemishev. Provability algebras and proof-theoretic ordinals. I. *Annals of Pure and Applied Logic* 128, 1-3, 2004.

[2] L. D. Beklemishev. Positive provability logic for uniform reflection principles. *Annals of Pure and Applied Logic* 165, 1, 82–105, 2014.

[3] Е. В. Дашков. О позитивном фрагменте полимодальной логики доказуемости **GLP**. *Математические заметки* 91, 3, 331-346, 2012.

[4] Т. М. Якобовская. Строго позитивная бимодальная логика омега-итерированной непротиворечивости: семантика Крипке. Курсовая работа, 2021.

[5] F. N. Pakhomov. On the complexity of the closed fragment of Japaridze's provability logic. *Archive for Mathematical Logic* 53, 949-967, 2014.

А. В. Ерёмин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва

aerem05@inbox.ru

О Σ_2-теории натуральных чисел со стандартным порядком и свободной эквивалентностью

Владимир Евгеньевич Карпов Станислав Олегович Сперанский

Класс LEq всех пар, состоящих из строгого линейного порядка и отношения эквивалентности на общем носителе, и его подклассы играют важную роль в теории вычислимости и её применениях. Это связано с универсальным характером LEq. В частности, мы имеем следующее свойство:

> для каждой конечной предикатной сигнатуры σ существует Σ_1-интерпретация (в терминологии [3]) класса всех конечных σ-структур в классе LEq_{fin} всех конечных структур из LEq.

Это следует из того, что:

i. как было доказано в [2], класс BiG_{fin} всех конечных двудольных графов является Σ_1-интерпретируемым в LEq_{fin};

ii. как было показано в [3], BiG_{fin} обладает соответствующим свойством.[1]

То же самое верно для не более чем счётных структур.

Обозначим за LEq_ω класс всех структур из LEq, в которых порядок имеет тип ω (а эквивалентность остаётся «свободной»). Разумеется, с точностью до изоморфизма LEq_ω равен классу $\underline{LEq}_\omega$ всех структур из LEq с носителем $\mathbb{N}$, в которых порядок интерпретируется стандартным образом.

Нами доказана Π^1_1-полнота Σ_2-теории LEq_ω. Тут префикс Σ_2 является оптимальным, поскольку Π_2-теория LEq_ω оказывается разрешимой. Аналогичные результаты верны для $LEq_\omega \cup LEq_{\text{fin}}$. Стоит отметить, что:

- теорию LEq_ω можно отождествить с естественным фрагментом второпорядковой теории $\langle \mathbb{N}; <_{\mathfrak{N}} \rangle$, где $<_{\mathfrak{N}}$ — стандартный порядок на $\mathbb{N}$;
- добавление свободных одноместных предикатов к $\langle \mathbb{N}; <_{\mathfrak{N}} \rangle$ не может привести нас к неразрешимой теории, в силу известного результата Дж. Бюхи о разрешимости монадической (второпорядковой) теории $\langle \mathbb{N}; <_{\mathfrak{N}} \rangle$;

[1] Тут (ii) можно воспринимать как усиление результата И. А. Лаврова о наследственной неразрешимости теории конечных простых графов; см. доказательство теоремы 3.3.3 в [1].

- разрешимость Π_2-теории LEq_ω можно получить путём сведения указанной теории к монадической теории $\langle \mathbb{N}; <_{\mathfrak{N}} \rangle$.

Кроме того, из Π^1_1-полноты Σ_2-теории LEq_ω легко следует Π^1_1-полнота Σ_2-теории $\langle \mathbb{N}; <_{\mathfrak{N}} \rangle$ со свободной одноместной функцией.

Финансовая поддержка. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-21-00632; см. https://rscf.ru/project/25-21-00632/.

Список литературы

[1] Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин. Элементарные теории. *Успехи математических наук* 20(4), 37–108, 1965.

[2] В. Е. Карпов, С. О. Сперанский. О наследственно неразрешимых фрагментах базовых элементарных теорий. *Математические заметки* 118(1), 77–90, 2025.

[3] A. Nies. Undecidable fragments of elementary theories. *Algebra Universalis* 35(1), 8–33, 1996.

Владимир Евгеньевич Карпов

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

ve.karpov@yandex.ru

Станислав Олегович Сперанский

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

katze.tail@gmail.com

Унификация и допустимые правила вывода для модальных логик $\mathrm{K} + \Box^n \bot$

Никита Вадимович Лукашов

Конечный тип унификации нормальных модальных логик $\mathrm{K} + \Box^n \bot$ (для краткости мы будем обозначать их K_n) был установлен в 2023 году Ф. Бальбиани с соавторами [3]. В сущности, они обобщили свой комбинаторный метод с ранее решённого случая $n = 2$ (см. [4]) и, используя ряд нетривиальных лемм, показали, что для всех $n \geqslant 2$ унификация в K_n является конечной и нефильтрованной. В настоящей работе мы предлагаем альтернативное доказательство их результатов и затем применяем разработанную технику для построения явного базиса K_n-допустимых обобщённых правил вывода, при всех натуральных n.

Для установления конечного типа унификации логик $\mathrm{K} + \Box^n \bot$, мы адаптируем подход С. Гиларди из [1]. К сожалению, имеется два фундаментальных препятствия для прямого применения методов С. Гиларди к логикам K_n:

(i) K_n не транзитивны при $n \geqslant 3$;

(ii) шкалы Крипке для K_n не являются расширяемыми.[1]

Для преодоления первой трудности (i), мы модифицируем базовые подстановки θ^A_φ и, как в транзитивном случае, показываем, что формула φ является K_n-проективной тогда и только тогда, когда класс её K_n-моделей обладает некоторым так называемым свойством K_n-расширения. Определение свойства K_n-расширения по существу такое же, как в [1]; однако теперь из-за отсутствия транзитивности мы должны быть осторожными с порождёнными подмоделями.

Чтобы решить вторую трудность (ii), мы проверяем, что построение сумм (или дизъюнктных объединений) K_n-моделей высоты ровно n не требуется, и что K_n-модели обладают всеми необходимыми свойствами. Далее мы замечаем, что для проблемы унификации в K_n достаточно рассматривать формулы модальной глубины не более n и, комбинируя это наблюдение с характеризацией K_n-проективных формул, мы устанавливаем, что все логики K_n имеет конечный тип унификации. Как следствие, мы получаем разрешимость проблемы унификации для логик K_n и даём описание K_n-допустимых правил с помощью

[1] т.е. сумма K_n-шкал не обязательно является K_n-шкалой

K_n-проективной аппроксимации (небольшой модификации обычной проективной аппроксимации для нашего случая).

Анализ сложности вычислительной показывает, что каждая логика K_n является полиномиальный аппроксимируемой, а значит, как нетрудно показать, их проблема выполнимости является NP-полной. Отсюда мы получаем, что K_n-проективные формулы лежат в Π_2^p (второй уровень полиномиальной иерархии) и что проблема K_n-унификации принадлежит EXPSPACE.

Наконец, семантически охарактеризовав K_n-проективные формулы, мы также можем адаптировать подход Э. Ержабека [2] и предъявить явный базис обобщённых K_n-допустимых правил. А именно, мы доказываем, что секвенции вида

$$\Box\varphi \to \bigvee_{i<k} \Box\psi_i \ \rhd\ \{\varphi \wedge \Box^{n-1}\bot \to \psi_i |\ i < k\} \qquad (\star_n)$$

образуют базис K_n-допустимых обобщённых правил вывода. Основное отличие между ($\star_n$) и базисом для $\mathrm{GL} + \Box^n\bot$, представленным в [2], состоит в том, что мы не помещаем φ под $\boxdot$ в правой части, по причине того что логики K_n не являются транзитивными в общем случае.

Список литературы

[1] S. Ghilardi. Best solving modal equations. *Annals of Pure and Applied Logic* 102, 183–198, 2000.

[2] E. Jeřábek. Admissible rules of modal logics. *Journal of Logic and Computation* 15, 411–431, 2005.

[3] P. Balbiani, C. Gencer, M. Rostamigiv, T. Tinchev. Remarks about the unification types of some locally tabular normal modal logics. *Logic Journal of the IGPL* 31, 115–139, 2023.

[4] P. Balbiani, C. Gencer, M. Rostamigiv, T. Tinchev. About the unification type of K+□□⊥. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 90, 481–497, 2022.

Н. В. Лукашов

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва

lnv619@gmail.com

О классе функций конечнозначной логики Даммета со всеми константами

Анастасия Александровна Оноприенко

Классическая логика, т.е. двузначная логика, хорошо исследована в отношении вопросов функциональной полноты и выразимости одних функций через другие. Значительно менее полно исследованы многозначные логики. Но ещё менее изучена в этом отношении интуиционистская логика, возникшая в работах Л. Э. Я. Брауэра [1, 2] и в дальнейшем формализованная А. Гейтингом [3]. Очевидная трудность исследования связана с тем, что, во-первых, интуиционисткая логика строится не на основе таблиц истинности, а на основе исчисления; а, во-вторых, интуиционистская логика в принципе не может быть задана конечной таблицей [4].

Один из возможных подходов к изучению вопросов функциональной полноты в интуиционистской логике состоит в исследовании логик, промежуточных между интуиционистской и классической (т.е. суперинтуиционистских), которые строятся при помощи таблиц. Простейшей из таких логик является трёхзначная логика Гейтинга H_3, являющаяся, по существу, определённым замкнутым классом функций трёхзначной логики P_3. Класс функций логики Гейтинга детально исследовал М. Ф. Раца [5].

Трёхзначная логика Гейтинга H_3 является логикой линейно упорядоченной двухточечной шкалы Крипке. Естественное обобщение — логика Даммета **LC** [6]. Логика Даммета характеризуется классом конечных линейно упорядоченных шкал Крипке и также не является табличной. Вместе с тем логика единственной линейно упорядоченной шкалы Крипке из n точек является табличной, а класс функций этой логики представляет собой замкнутый класс функций $(n+1)$-значной логики.

Перейдём к точным определениям. Переменные и формулы могут принимать $n+1$ значение: $0 < 1 < \ldots < n$ (количество точек интуиционистской шкалы Крипке, в которых переменная истинна). Значение формулы определяется индуктивно в соответствии с определением отношения истинности в модели Крипке. Через LC_n будем обозначать класс функций, которые могут быть выражены некоторой формулой.

Индукцией по построению формулы нетрудно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция f принадлежит классу LC_n. Тогда для неё верно следующее:*

1) f сохраняет множество $\{0, n\} \cup A$ для любого $A \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$;

2) f сохраняет разбиение $\{0\}$ и $\{1, \ldots, n\}$.

В случае $n = 2$ указанные в лемме необходимые условия принадлежности функции классу LC_n являются достаточными [5]. Для $n > 2$ это нарушается. Судя по всему, описание множества всех функций из класса LC_n является довольно нетривиальной задачей. Поэтому рассмотрим следующую вариацию: добавим к исходной системе функций $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ функции-константы $0, 1, \ldots, n$. Получившийся класс обозначим через LC_n^c. Для этого класса функций выполнено следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция f принадлежит классу LC_n^c тогда и только тогда, когда она удовлетворяет двум условиям:*

1) f сохраняет разбиение $\{0\}$ и $\{1, \ldots, n\}$;

2) если $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \gamma$, $\alpha_i > \gamma$ (для некоторого i) и $\beta > \gamma$,
то $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_s) = \gamma$.

В заключение отметим, что класс функций LC_2 является предполным в классе функций, сохраняющих разбиение $\{0\}$ и $\{1, 2\}$ [5], а при $n > 2$ аналогичное утверждение ложно.

Список литературы

[1] L. E. J. Brouwer. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. — J. Müller, 1918. — Т. 12. — №. 5.

[2] L. E. J. Brouwer. Consciousness, philosophy, and mathematics //Philosophy and foundations of mathematics. – North-Holland, 1975. — С. 480–494.

[3] А. Гейтинг. Интуиционизм. Введение. Мир, М., 1965, 200 с.; пер. с англ.: Heyting A., Intuitionism. An introduction, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956, viii+133 pp.

[4] A. Chagrov, M. Zakharyashev. Modal logic, Oxford University Press, 1997.

[5] М. Ф. Раца. О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского //Проблемы кибернетики. — 1969. — №. 21. — С. 185–214.

[6] M. Dummett. A propositional calculus with denumerable matrix //The Journal of Symbolic Logic. — 1959. — Т. 24. — №. 2. — С. 97–106.

А. А. Оноприенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва

ansidiana@yandex.ru

О стандартных системах моделей арифметики Бюхи

Фёдор Николаевич Пахомов Константин Андреевич Ковалёв

Арифметикой Бюхи BA_k называют элементарную теорию структуры натуральных чисел со сложением и функцией V_k, отображающей каждое натуральное число n в наибольшую степень k, делящую n, где $k \geq 2$ фиксированно. Известно, что данная структура является автоматной и, как следствие, разрешимой (см. [4, 3]). Более того, она является универсальной в классе всех автоматных структур с точки зрения интерпретируемости: любая автоматная структура интерпретируема в арифметике Бюхи (см. [2]). Вопросы, связанные с выразительной силой и алгоритмической сложностью в арифметике Бюхи, широко изучались ранее, см., например, [9, 1, 7]. Однако вопросы, связанные с теорией моделей арифметики Бюхи практически не затрагивались ранее.

Напомним определение *стандартной системы* модели $\mathcal{M}$ арифметики Пеано. Нам будет удобен следующий способ кодирования подмножеств $\mathbb{N}$. Зафиксируем натуральное число $k \geq 2$ и обозначим через $(x)_d$ определимую функцию, возвращающую по x и d коэффициент перед d в k-ичном разложении x, где d — некоторая степень k. Скажем, что $a \in M$ *кодирует* $A \subseteq \mathbb{N}$, если для любого $n \in \mathbb{N}$

$$n \in A \iff \mathcal{M} \vDash (a)_{k^n} \neq 0.$$

Тогда стандартной системой $\mathcal{M}$ называется множество

$$\mathrm{SSy}(\mathcal{M}) := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ кодируется некоторым элементом } \mathcal{M}\}.$$

Д. Скотт [8, 6] доказал, что счетное множество $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ является стандартной системой некоторой нестандартной модели арифметики Пеано тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ является *множеством Скотта*, т.е. замкнуто относительно сводимости по Тьюрингу и для любого кода бесконечного бинарного дерева $T \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ содержит код некоторой бесконечной ветви T.

В этой работе мы получим аналогичный результат для моделей арифметики Бюхи. Назовем $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *слабым множеством Скотта*, если выполнены условия

(i) $\mathcal{X}$ замкнуто относительно применения машин Мили (частный случай конечного преобразователя, см. [5]);

(ii) для любого бесконечного дерева ограниченной ширины, кодируемого в $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ содержит код некоторой его бесконечной ветви.

Мы докажем, что $\mathcal{X}$ является стандартной системой некоторой нестандартной модели арифметики Бюхи тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ является слабым множеством Скотта. Имеются и альтернативные описания стандартных систем моделей BA_k. Например, если в условии (ii) заменить деревья на ориентированные ациклические графы ограниченной ширины, то условие (i) можно ослабить до замкнутости относительно булевых операций.

Список литературы

[1] A. Bés. Undecidable extensions of Büchi Arithmetic and Cobham-Semënov theorem. *Journal of Symbolic Logic* 62(4), 1280–1296, 1997.

[2] A. Blumensath, E. Grädel. Finite presentations of infinite structures: Automata and interpretations. *Theory of Computing Systems* 37(6), 641–674, 2004.

[3] V. Bruyère, G. Hansel, C. Michaux, R. Villemaire. Logic and p-recognizable sets of integers. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* 1(2), 191–238, 1994.

[4] J. R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Mathematical Logic Quarterly* 6(1-6), 66–92, 1960.

[5] J. Endrullis, J. W. Klop, A. Saarela, M. Whiteland. Degrees of Transducibility *In: Manea, F., Nowotka, D. (eds) Combinatorics on Words. WORDS 2015.* Lecture Notes in Computer Science, vol. 9304. Springer, Cham.

[6] R. Kaye. *Models of Peano Arithmetic*. Oxford University Press, 1991. 302 c.

[7] R. Meyer. Weak monadic second order theory of succesor is not elementary-recursive. *Logic Colloquium. Lecture Notes in Mathematics* 453, 132–154, 1975.

[8] D. Scott. Algebras of sets binumerable in complete extensions of arithmetic. *1962 Proc. Sympos. Pure Math.* 5, 117–121 American Mathematical Society, Providence, R.I.

[9] А. Л. Семёнов. Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления. *Сибирский математический журнал* 18:2, 403–418, 1977.

Ф. Н. Пахомов, К. А. Ковалёв

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

kovalyov.ka@mi-ras.ru

Решение проблемы Поста о tag-системах: доказательство роста для примера Куриленко

Константин Константинович Пчелин

Пост [1] рассматривал слова в алфавите $\{0, 1\}$ и следующее частично определённое преобразование. Если $w = a_0 a_1 a_2 u$, то

$$T(w) = uP(a_0), \qquad P(0) = 00, \qquad P(1) = 1101.$$

При $|w| < 3$ процесс останавливается. *Проблема Поста* состоит в том, обязательно ли траектория любого начального слова останавливается или становится периодической. Периодические неостанавливающиеся траектории этой системы были известны ранее [2]. Вольфрам сообщил о полном переборе начальных слов до длины 84: все они остановились или пришли к циклу, хотя отдельные траектории продолжались более $6 \cdot 10^{11}$ шагов [3].

Куриленко [4] нашёл явное слово с непериодической неостанавливающейся траекторией. Запишем $s = 00$, $t = 1101$ и определим три слова (строки в записи B нужно соединить в одно слово):

$A =$ ssttts,
$B =$ sssttsssttstsstttttttsssttttsssttttsssttttsssttttsssttttttttttttttsssssttts
sttsssttttsssttttsssttttsssttttttttsttttsttsttttttststtttsssttttsssttttsss
tttttstssttstsstttstsstttstsstttstsssssstsstssttttsssssssstsssssssttts
sstttsssttttttststststttsssttttttttttttttttttttttttttttsssssssttts
sstttststsssttttsssssttsssssttsssssttsssssssssssssssttstsstttststtttstttt
tstssttstststttsssttttsssssttstsstttststtttttttttsstttstsssttstsstts
tssttstttsssssttttsssttttsssttttstttsstttsssssttttsssttttsssttttttstttstttt
tsssttsssttttsssttttttttttttsstttstsssstsssssttttsssttttsssttttstttsts
tsssssttttttttstsstttsssttttstttstsstttsssttttstsstsstsstsstsssttttt
tstttsssttttstsstttstsssttttttttttttstsstttstsssstsssttttttttsssttttsssstt
tsssssttttsssttttttttttttsstttstsstttstsstttstsstttsssssttttsssttttsssttts
sstttsssssstsssssssssssttttttststststsstttttsssssssststsstttttsssstttts
tssttstsstttstsssssttt,
$C =$ sssttttsssttttssstttt.

После подстановки $s = 00,\ t = 1101$ их длины равны соответственно $18, 2402, 54$. Для этих конкретных слов справедливо следующее усиление утверждения Куриленко.

Теорема 1. *Для всех $n, m \geq 0$ можно выполнить $10444 + 78n + 234m$ последовательных шагов, причём*

$$T^{10444+78n+234m}(A^n BC^m) = A^{n+1} BC^{m+1}.$$

В частности, $T^{10444}(B) = ABC$, а затем возникают слова $A^k BC^k$ неограниченно возрастающей длины. Более точно, для моментов возврата к этой форме

$$t_k = 156k^2 + 10288k, \qquad |T^{t_k}(B)| = 2402 + 72k,$$

а оценка длин слов между возвратами даёт

$$|T^t(B)| = \Theta(\sqrt{t}), \qquad |T^t(B)| \longrightarrow \infty.$$

В опубликованном доказательстве Куриленко переходы между составными словами формулируются при предположении, что все участвующие части слова достаточно длинны; отдельно не разобраны граничные случаи $n = 0$ и $m = 0$ и определённость каждого шага. В настоящей работе эти ограничения устранены, все 13 указанных преобразований проверены независимо от исходной программы и найдено точное число шагов. Тем самым для конструкции Куриленко получено полное доказательство при всех $n, m \geq 0$.

Список литературы

[1] E. L. Post. Formal reductions of the general combinatorial decision problem. *Amer. J. Math.* 65(2), 197–215, 1943.

[2] S. Watanabe. Periodicity of Post's normal process of tag. In: *Proc. Symp. Mathematical Theory of Automata*, 83–99, 1963.

[3] S. Wolfram. After 100 Years, Can We Finally Crack Post's Problem of Tag? A Story of Computational Irreducibility, and More. *arXiv:2103.06931*, 2021.

[4] N. V. Kurilenko. Infinitely growing configurations in Emil Post's tag system problem. *Complex Systems* 31(3), 279–286, 2022.

К. К. Пчелин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва
Институт искусственного интеллекта AIRI, г. Москва

konstantin.pchelin@math.msu.ru

О свойствах языков, задаваемых коммутативными грамматиками Ламбека

Тихон Григорьевич Пшеницын

Категориальные грамматики Ламбека были введены в [4] для описания синтаксиса естественных языков. В [1, 5] доказано, что эти грамматики задают в точности контекстно-свободные языки без пустого слова. В коммутативном случае подобная эквивалентность не имеет места: в то время как любой коммутативный контекстно-свободный язык задается категориальной грамматикой над коммутативным исчислением Ламбека L_e (далее кратко — L_e-грамматикой) [3], обратное неверно [6]. В [6] были установлены некоторые свойства языков, задаваемых L_e-грамматиками: эти языки замкнуты относительно объединения, пересечения, (коммутативной) конкатенации и (коммутативной) положительной итерации Клини. Неизвестно, однако, замкнут ли этот класс относительно дополнения; также отсутствуют содержательные примеры языков, не задаваемых L_e-грамматиками.

В коммутативном исчислении Ламбека L_e выводятся секвенции вида $\Pi \Rightarrow A$, где Π — непустое мультимножество формул, а A — формула в сигнатуре $\otimes, \multimap$. Единственная схема аксиом в L_e — $A \Rightarrow A$. Правила L_e перечислены ниже.

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow C \quad \Pi \Rightarrow A}{\Gamma, \Pi, A \multimap B \Rightarrow C} \multimap_\mathsf{L} \qquad \frac{\Pi, A \Rightarrow B}{\Pi \Rightarrow A \multimap B} \multimap_\mathsf{R}$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \Rightarrow C} \otimes_\mathsf{L} \qquad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \otimes B} \otimes_\mathsf{R}$$

L_e-грамматики определяются следующим образом: каждому символу a некоторого конечного алфавита ставится в соответствие конечное число формул исчисления L_e (если формула A соответствует символу a, будем писать $a \triangleright A$); также фиксируется некоторая формула S. Тогда строка $a_1 \dots a_n$ принимается L_e-грамматикой в том и только в том случае, когда существуют формулы $A_1, \dots, A_n$, такие что $a_i \triangleright A_i$ и секвенция $A_1, \dots, A_n \Rightarrow S$ доказуема в L_e.

В [6] показана эквивалентность L_e-грамматик и ветвящихся систем сложения векторов с линейным ограничением на размеры выводов. В работе [2] 2026-го года исследуются множества достижимости ветвящихся систем сложения векторов, и из результатов этой статьи можно вывести следующие факты о языках, задаваемых L_e-грамматиками.

Теорема 1. *Класс языков, задаваемых L_e-грамматиками, не замкнут относительно дополнения: существует язык $L \subseteq \Sigma^+$, задаваемый L_e-грамматикой, такой что $\Sigma^+ \setminus L$ не задается L_e-грамматиками.*

Теорема 2. *Если $L \subseteq \{a\}^*$ — язык в односимвольном алфавите, задаваемый $\mathsf{L_e}$-грамматикой, то L регулярен.*

Также благодаря [2] можно показать эквивалентность $\mathsf{L_e}$-грамматик и систем сложения векторов с линейным ограничением на размеры выводов (без бинарных правил).

Финансовая поддержка. Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС", грант 24-7-5-15-1.

Список литературы

[1] Y. Bar-Hillel, C. Gaifman, E. Shamir. On categorial and phrase structure grammars. *Bull. Res. Counc. Israel* 9, 1–6, 1960.

[2] C. Biziére, J. Leroux, G. Sutre. Bridging the gap between plain VASS and branching VASS. In: N. Bertrand, S. Milius (eds.), *Foundations of Software Science and Computation Structures*, 65–87. Springer Nature Switzerland, Cham, 2026.

[3] W. Buszkowski. A note on the Lambek–van Benthem calculus. *Bulletin of the Section of Logic* 13(1), 31–35, 1984.

[4] J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *Amer. Math. Mon.* 65(3), 154–170, 1958.

[5] M. Pentus. Lambek grammars are context free. In: *Proceedings of the Eighth Annual Symposium on Logic in Computer Science*, 429–433. IEEE Computer Society, Montreal, 1993.

[6] T. Pshenitsyn. Commutative Lambek grammars. *Journal of Logic, Language and Information* 32(5), 887–936, 2023.

Т. Г. Пшеницын

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва

tpshenitsyn@mi-ras.ru

Влияние операции пересечения на звёздную высоту регулярных языков

Юлия Дмитриевна Теляковская

Звёздная высота регулярного выражения — максимальная глубина вложенности операции итерации Клини. Для регулярного языка она определяется как минимум звёздных высот задающих его регулярных выражений. Проблема вычисления этого параметра является одной из классических задач теории регулярных языков и конечных автоматов [3, 6].

Рассматривают несколько вариантов звёздной высоты. В случае *restricted star height* разрешены объединение, конкатенация и итерация Клини. В *intermediate star height* к этим операциям добавляется пересечение. В *extended star height* разрешается также дополнение.

Для restricted star height известны регулярные языки произвольной высоты; кроме того, задача вычисления этого параметра разрешима [2, 4, 5].

Отдельно рассматривается extended star height. Центральная содержательная проблема состоит в том, существуют ли регулярные языки extended star height больше 1. Эта проблема остаётся открытой. Открыта и алгоритмическая проблема: существует ли алгоритм, вычисляющий extended star height регулярного языка [6].

Промежуточный вариант занимает особое положение: в нём разрешено пересечение, но запрещено дополнение. Поэтому возникает естественный вопрос о влиянии пересечения на звёздную высоту. В докладе рассматривается класс регулярных языков звёздной высоты не более 1.

Теорема 1. *Для любых регулярных языков R_1 и R_2 таких, что*

$$h(R_1) \leq 1, \qquad h(R_2) \leq 1,$$

выполнено

$$h(R_1 \cap R_2) \leq 1.$$

Таким образом, класс регулярных языков звёздной высоты не более 1 замкнут относительно пересечения.

В то же время это свойство специфично для высоты 1. Из результатов Коэна и Бжозовского следует, что существуют регулярные языки $R_1, \ldots, R_n$, для которых

$$h(R_1 \cap \cdots \cap R_n) - \max_{1 \leq i \leq n} h(R_i) \geq n - 2.$$

Следовательно, операция пересечения в intermediate-формализме может приводить к неограниченному росту звёздной высоты [1].

Список литературы

[1] R. S. Cohen, J. A. Brzozowski. General properties of star height of regular events. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(3):260–280.

[2] F. Dejean, M.-P. Schützenberger. On a question of Eggan. *Information and Control*, 9(1):23–25.

[3] L. C. Eggan. Transition graphs and the star-height of regular events. *Michigan Mathematical Journal*, 10(4):385–397.

[4] K. Hashiguchi. Algorithms for determining relative star height and star height. *Information and Computation*, 78(2):124–169.

[5] D. Kirsten. A Burnside approach to the star-height problem. In *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, LNCS 3821, pages 375–386. Springer.

[6] J.-É. Pin. Open problems about regular languages, 35 years later. *Theoretical Computer Science*. https://www.irif.fr/~jep/PDF/Brzozowski.pdf.

Ю. Д. Теляковская

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва

jldjldt@mail.ru

О дизъюнктных фрагментах полимодальных логик доказуемости

Денис Сергеевич Трофимов

Пусть $\mathcal{L}_n$ — язык полимодальных логик с модальными операторами $\Box_1, \ldots, \Box_n$. Определим перевод $*$ модальных формул в формулы языка $\mathcal{L}_n$ следующим образом: $p^* = p$, $\bot^* = \bot$, $(A \to B)^* = A^* \to B^*$, $(\Box A)^* = \bigvee_{i=1}^{n} \Box_i A^*$. Дизъюнктным фрагментом полимодальной логики L в языке $\mathcal{L}_n$ назовём модальную логику $L^\vee$, состоящую из всех таких формул A, для которых верно, что $L \vdash A^*$.

Доклад посвящён дизъюнктным фрагментам логик CS_n и GL_n, где под GL_n понимается наименьшая логика в языке $\mathcal{L}_n$, в которой каждый модальный оператор удовлетворяет аксиомам и правилам вывода логики GL, а под CS_n — расширение GL аксиомами $\Box_i A \to \Box_j \Box_i A$. Оказалось, что эти логики не являются нормальными, но при этом являются расширениями логики mGL, задаваемой аксиомами классической логики высказываний, $\Box\top$ и $L\ddot{o}b : \Box(\Box A \to A) \to \Box A$, а также правилами вывода $MP : \frac{A, A \to B}{B}$ и $M : \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$. Доказано, что все рассматриваемые дизъюнктные фрагменты различны, а также что $GL_{n+1}^\vee \subset GL_n^\vee$ и $CS_{n+1}^\vee \subset CS_n^\vee$ при всяком натуральном n.

Также будут рассмотрены логики $CS_\omega^\vee = \bigcap_{n=1}^{\infty} CS_n^\vee$ и $GL_\omega^\vee = \bigcap_{n=1}^{\infty} GL_n^\vee$. Удалось установить, что $GL_\omega^\vee$ совпадает с mGL, а исчисление для $CS_\omega^\vee$ получается добавлением к исчислению mGL аксиомы $C^* : \Box A \wedge \Box B \to \Box(\Box A \wedge B)$.

Список литературы

[1] G. Boolos. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993. 276 p.

[2] K. Fine, G. Schurz. Transfer Theorems for Multimodal Logics. *Logic and Reality: Essays on the Legacy of Arthur Prior*, ed. by J. Copeland, Oxford University Press, Oxford, 1996, pp. 169–213.

[3] T. Carlson. Modal logics with several operators and probability interpretations. *Israel Journal of Mathematics* 54, 14–24, 1986.

Д. С. Трофимов

МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва

denis.trofimov@math.msu.ru

О специальных базисах тождеств некоторых решёток

Александр Ростиславович Углев

Классическая дуальность Биркгофа устанавливает дуальную эквивалентность между категорией биалгебраических дистрибутивных (0,1)-решёток с полными решёточными (0,1)-гомоморфизмами и категорией частично упорядоченных множеств с монотонными отображениями. В различных частных обобщениях этой дуальности для многообразий, порождённых конкретными недистрибутивными решётками (например, [2], [3]) играл существеную роль тот факт, что многообразие и квазимногообразие, порождённые этими решётками, совпадают.

В данной работе рассматриваются решётки, полученные из конечных булевых решёток добавлением элемента над коатомом или под атомом. В первое семейство входит пентагон N_5, поэтому для решёток из этого семейства вводится обозначение N_{2^n+1}, где 2^n+1 является порядком решётки. Решётки из второго семйства обозначаются $N^d_{2^n+1}$, поскольку являются дуальными к N_{2^n+1}. Дуальность для многообразия, порождённого пентагоном N_5, была построена в [2]. Диаграммы Хассе для решёток N_5 и N_9 приведены на рисунках 1, 2. В данной работе делается первый шаг к установлению дуальности для многообразий, порождённых решётками N_{2^n+1} и $N^d_{2^n+1}$. А именно, доказано совпадение порождаемых решётками N_{2^n+1} и $N^d_{2^n+1}$ многообразий и квазимногообразий, и найден конкретный базис тождеств, связанный со свойствами покрытий. Отметим, что в установленных ранее дуальностях все решётки удовлетворяли тождеству 2-дистрибутивности (D_2), введённому в [1]. В то же время решётка N_{2^n+1} удовлетворяет (D_n), но не удовлетворяет (D_m) при $m < n$.

Работа выполнена под руководством М.В. Швидефски.

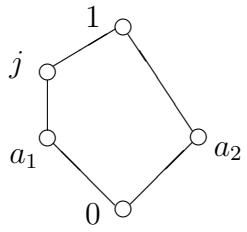


Рис. 1: Lattice N_5

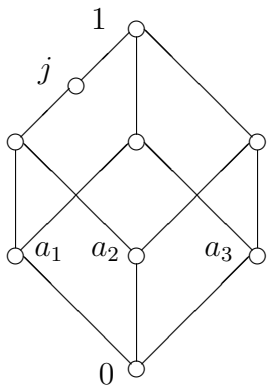


Рис. 2: Lattice N_9

Список литературы

[1] J. A.P. Huhn, *Schwach distributive Verbande*, Acta Sci. Math., 33 (1972), 297-305.

[2] В. Дзёбяк, М. В. Швидефски, *Дуальность для биалгебраических решёток, принадлежащих многообразию (0, 1)-решёток, порождённому пентагоном*, Алгебра и логика, 2024, том 63, номер 2, 167-208

[3] A. E. Izyurova, M. V. Schwidefsky, *A Duality for the Variety SP(M3)*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2025, Vol. 46, No. 12, pp. 6125–6142.

А. Р. Углев

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск

a.uglev@g.nsu.ru

Формальная модель пространства нейросетевых ранжирующих функций и теорема о существовании оптимальной архитектуры

Дмитрий Олегович Фролов

Задача релевантного поиска средствами искусственных нейронных сетей сводится к выбору архитектуры и параметров ранжирующей функции, обеспечивающих компромисс между качеством ранжирования и затратами. Строится формальная модель пространства нейросетевых ранжирующих функций и доказывается теорема о существовании оптимальной архитектуры.

1. Формальная модель. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$ — представления документа и запроса. *Архитектурой* назовём пару $(A, \mathcal{W}_A)$, где A — индекс класса функций, $\mathcal{W}_A \subseteq \mathbb{R}^{n_A}$ — множество допустимых параметров, а *ранжирующей функцией* архитектуры A — отображение $f_A \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{W}_A \to \mathbb{R}$.

Определение 1. *Пространством нейросетевых ранжирующих функций* назовём семейство

$$\mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_{\text{adm}}} \{\, f_A(\cdot, \cdot; W) : W \in \mathcal{W}_A \,\},$$

где $\mathcal{A}_{\text{adm}} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ — конечное множество допустимых архитектурных классов (полносвязные сети, трансформерные bi-encoder и cross-encoder [3], каскадные и ансамблевые схемы).

Качество пары (A, W) оценивается составным функционалом

$$J(A, W) = -\,\mathrm{NDCG@}k(A, W) + \lambda_T\, T(A, W) + \lambda_M\, M(A, W), \qquad \lambda_T, \lambda_M \geq 0,$$

где NDCG@k — метрика качества ранжирования [2], T — время отклика, M — потребляемая память. Задача проектирования системы состоит в отыскании пары (A^*, W^*), минимизирующей J на $\mathcal{A}_{\text{adm}} \times \mathcal{W}_A$.

2. Теорема существования. Предположим: (i) $\mathcal{A}_{\text{adm}}$ конечно; (ii) для каждого $A \in \mathcal{A}_{\text{adm}}$ множество $\mathcal{W}_A \subset \mathbb{R}^{n_A}$ непусто, замкнуто и ограничено (что достигается, например, регуляризацией вида $\|W\| \leq R_A$); (iii) функция $J(A, \cdot)$ непрерывна на $\mathcal{W}_A$.

Теорема 2 (Существование оптимальной архитектуры)**.** *При условиях (i)–(iii) существует пара* (A^*, W^*)*,* $A^* \in \mathcal{A}_{\text{adm}}$*,* $W^* \in \mathcal{W}_{A^*}$*, такая что*

$$J(A^*, W^*) = \min_{A \in \mathcal{A}_{\text{adm}}} \min_{W \in \mathcal{W}_A} J(A, W).$$

Доказательство. Зафиксируем $A \in \mathcal{A}_{\text{adm}}$. Так как $\mathcal{W}_A$ компактно, а $J(A, \cdot)$ непрерывна, по теореме Вейерштрасса [1] существует $W_A^* \in \mathcal{W}_A$: $J(A, W_A^*) = \min_{W \in \mathcal{W}_A} J(A, W)$. Положим $g(A) := J(A, W_A^*)$; функция g определена на конечном $\mathcal{A}_{\text{adm}}$, поэтому достигает минимума: найдётся $A^* \in \mathcal{A}_{\text{adm}}$ с $g(A^*) = \min_{A \in \mathcal{A}_{\text{adm}}} g(A)$. Полагая $W^* := W_{A^*}^*$, для любых $A \in \mathcal{A}_{\text{adm}}$, $W \in \mathcal{W}_A$ получаем $J(A, W) \geq J(A, W_A^*) = g(A) \geq g(A^*) = J(A^*, W^*)$, что и требовалось. □

Следствие 3. *Задача выбора архитектуры и параметров корректно поставлена: множество решений непусто, а перебор конечного* $\mathcal{A}_{\text{adm}}$ *гарантированно даёт глобальный минимум* J*.*

3. Обсуждение. Компактность $\mathcal{W}_A$ обеспечивается весовым затуханием или ограничением $\|W\|_2 \leq R_A$ и не сужает класс моделей: регуляризованные схемы обучения сходятся к решениям конечной нормы. Теорема обосновывает корректность схемы отбора архитектуры (перебор $\mathcal{A}_{\text{adm}}$, сравнение по J) в противоположность эвристическим методам NAS, для которых сходимость к оптимуму не гарантируется.

Основные результаты. 1) Модель пространства нейросетевых ранжирующих функций $\mathcal{F}$ как объединения параметрических семейств по конечному множеству архитектурных классов. 2) Теорема о существовании оптимальной архитектуры при компактности пространств параметров и непрерывности критерия качества. 3) Обоснование корректности конечного перебора архитектур как метода решения двухуровневой оптимизации.

Список литературы

[1] Л. Д. Кудрявцев. *Курс математического анализа.* Т. 1. Высшая школа, 2003. 704 с.

[2] K. Järvelin, J. Kekäläinen. Cumulated gain-based evaluation of IR techniques. *ACM Transactions on Information Systems* 20(4), 422–446, 2002.

[3] A. Vaswani et al. Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems* 30, 5998–6008, 2017.

Д. О. Фролов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

universityandlifefor@gmail.com

Вычислимые изоморфизмы относительно регулярных булевых алгебр

Игорь Николаевич Шиманогов

Регулярные языки являются одним из ключевых объектов теории формальных языков. Важным классом алгоритмических задач является проверка существования в фиксированном языке слова, удовлетворяющего некоторому регулярному условию. Данные задачи называются задачами регулярной реализуемости и были введены М. Н. Вялым в [1]. Формальная постановка следующая: назовём задачей регулярной реализуемости для языка L следующий язык:

$$\mathtt{DRR}_L = \{\langle A\rangle \mid |L \cap \mathcal{L}(A)| \neq 0\}.$$

Аналогично введём задачу бесконечной регулярной реализуемости для языка L: Назовем задачей бесконечной регулярной реализуемости следующий язык:

$$\mathtt{DRR}_L^{\infty} = \{\langle A\rangle \mid |L \cap \mathcal{L}(A)| = \infty\}.$$

В данной статье мы работаем со следующим алгебраическим обобщением задачи регулярной реализуемости. По любому языку L можно построить булеву алгебру $\mathbf{REG}_L$, состоящую из всевозможных пересечений регулярных языков с L и операциями объединения, пересечения и дополнения до L. Данные булевы алгебры называются относительно регулярными алгебрами. Оказывается, что класс алгебр такого вида весьма широк: для любой счётной атомной булевой алгебры существует изоморфная ей относительно регулярная алгебра [2]. При этом существует естественный гомоморфизм алгебры регулярных языков $\mathbf{REG}$ на относительно регулярную алгебру языка L: $\varphi(R) = R \cap L$. Таким образом задача регулярной реализуемости является задачей проверки того, что данный элемент алгебры (регулярный язык) не лежит в ядре этого гомоморфизма.

В данном докладе речь идет про случай, когда относительно регулярная алгебра языка оказывается изоморфна алгебре регулярных языков. Оказывается, что существуют сколь угодно сложные языки с таким свойством, однако, достаточно «простые» языки, всегда им обладают.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольный нетривиальный язык L в алфавите из двух букв, то есть $L \neq \varnothing$ и $\bar{L} \neq \varnothing$. Тогда существует такой язык $\hat{L}$, что $\hat{L}$ и L эквивалентны по сводимости на логарифмической памяти, и при этом $\boldsymbol{REG}_L \simeq \boldsymbol{REG}$.*

Теорема 2. *Для бесконечного контекстно-свободного языка L выполняется $\boldsymbol{REG}_L \simeq \boldsymbol{REG}$.*

Оказывается, что в случае, если относительно регулярная алгебра изоморфна булевой алгебре регулярных языков, то для вычислимости изоморфизма достаточно разрешимости задач обычной и бесконечной регулярной реализуемости [3].

Теорема 3. *Пусть* $\boldsymbol{REG}_L \simeq \boldsymbol{REG}$ *и* $\mathtt{DRR}_L^\infty$ *разрешим. Тогда существует вычислимый изоморфизм* f *факторов по идеалам Фреше алгебр* $\boldsymbol{REG}_L$ *и* $\boldsymbol{REG}$.

Теорема 4. *Пусть* $\boldsymbol{REG}_L \simeq \boldsymbol{REG}$, *а* $\mathtt{DRR}_L$ *и* $\mathtt{DRR}_L^\infty$ *разрешимы. Тогда существует вычислимый изоморфизм* f *алгебр* $\boldsymbol{REG}_L$ *и* $\boldsymbol{REG}$.

Особый интерес представляет случай вычислимого изоморфизма алгебр регулярных языков над алфавитом из одной и из двух букв. В этом случае оказывается возможным дать нижнюю оценку на сложность такого изоморфизма.

Теорема 5. *Любой вычислимый изоморфизм из алгебры регулярных языков над алфавитом из двух букв в алгебру регулярных языков над алфавитом из одной буквы имеет сложность* $\Omega(2^{\frac{n}{2}})$, *где* n — *количество состояний автомата, поданного на вход.*

Список литературы

[1] M. Vyalyi. On models of a nondeterministic computation. *CSR 2009, Lecture Notes in Computer Science* 5675, 334–345, 2009.

[2] И. Н. Шиманогов, М. Н. Вялый. Классификация относительно регулярных алгебр. *Труды МФТИ* 64, 128–134, 2024.

[3] И. Н. Шиманогов, М. Н. Вялый. Задачи бесконечной регулярной реализуемости *Дискретный анализ и исследование операций* 32, 4, 213–230, 2025.

И. Н. Шиманогов

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
ул. Керченская, д. 1А, корп. 1, 117303, г. Москва, Россия

shimanogov.in@phystech.edu