Задачи к спецкурсу "Топосы и логика" (2026)

1. Докажите, что категория **SET** не изоморфна никакой полной подкатегории в **SET**$^\circ$.

2. Докажите, что категория **SET**$^\circ$ конкретна.

3. Приведите пример не локально малой категории.

4. а) Докажите, что категории **SET** и **SET**$^\circ$ не эквивалентны.

б) Эквивалентны ли категории **FINSET** и **FINSET**$^\circ$?

5. Рассмотрим категорию **pSET** множеств с отмеченной точкой: ее объекты – множества с отмеченной точкой, а стрелки из (X,x) в (Y,y) – это отображения X в Y, переводящие x в y. Докажите, что **pSET** эквивалентна категории, в которой объекты - множества, а морфизмы - частичные функции.

6. Докажите, что **pSET** и **SET** не эквивалентны.

7. (a) Докажите, что если в категории существуют произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любых 3 объектов, причем $A\times B\times C \cong (A\times B)\times C \cong A\times(B\times C)$.

(b) Докажите, что если в категории существует финальный объект и произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любого конечного семейства объектов.

8. Докажите, что **CAT** - категория с конечными произведениями и суммами.

9. Докажите, что функтор $\mathbb{Hom}_C(-, A)$ переводит копределы в пределы.

10. В категории с конечными произведениями и суммами постройте функторы

$(A \times -), (A + -)$, такие что для любого объекта X

$(A \times -)(X) = A \times X$, $(A + -)(X) = A + X$.

11. Докажите, что если категория **J** имеет начальный объект, то любой функтор вида **D**: **J** $\rightsquigarrow$ **C** имеет предел.

12. Пусть A – объект категории **C**. В *категории* **C**$\downarrow$A *стрелок над* A объекты – стрелки с концом A, а стрелки – коммутативные треугольники. Докажите, что если категория **C** полна, то и любая категория **C**$\downarrow$A полна.

13. Для малой категории **C** постройте функтор **C**$\downarrow(-)$: **C** $\rightsquigarrow$ **CAT**, переводящий A в **C**$\downarrow$A . Является ли он вложением?

14. Постройте забывающий функтор $\mathbb{Ob}$**: CAT** $\rightsquigarrow$ **SET**. Покажите, что $\mathbb{Ob}\cdot$**C**$\downarrow(-)$ **–** вложение **C** в **SET**.

15. Докажите, что если функтор сохраняет произведения и уравнители, то он непрерывен.

16. Верно ли, что вложение категорий – непрерывный функтор?

17. Верно ли, что эквивалентность категорий – конепрерывный функтор?

Обозначение Стрелка $X\rightarrow X_1 \times X_2$, задающая морфизм конуса $(f: X\rightarrow X_1, g: X\rightarrow X_2)$ в произведение
$(p_1:X_1 \times X_2 \rightarrow X_1, p_2: X_1 \times X_2\rightarrow X_2)$ обозначается $\langle f, g\rangle$.

18. Если в категории существует произведение A×A, то *диагональный морфизм* для A (обозначение: Δ_A)– это $\langle id_A,id_A\rangle$: $A \rightarrow A \times A$. Докажите, что Δ_A – уравнитель пары проекций $p_1, p_2 : A \times A \rightarrow A$.

19. *Монострелка (мономорфизм)* в категории **C** - это стрелка, которая превращается в инъекцию под действием любого Hom-функтора $\mathbb{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$.

(а) Докажите, что $\alpha: A \to B$ – монострелка, если и только если на нее можно сокращать слева, т.е. для любых стрелок β, γ ($\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$).

(б) Докажите, что композиция монострелок – монострелка.

(в) Докажите, что если $\alpha \cdot \beta$ – монострелка, то β – монострелка.

20. Докажите, что монострелки в категории $\mathbf{C}\downarrow A$ получаются из монострелок в **C**.

21. Какие функторы являются монострелками в **CAT**?

22. Пусть $(X, \alpha_i, A_i)_{i\in I}$ – конус в категории **C** над семейством объектов $(A_i)_{i\in I}$.
Докажите, что если для любого объекта A категории **C** конус $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,X), (\alpha_i)_*, \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,A_i))$ является произведением в **SET**,то $(X, \alpha_i, A_i)_{i\in I}$ – произведение в **C**.

23. Докажите, что если **C** - категория с конечными произведениями и $\mathscr{D} \sim \mathbf{C}$, то и $\mathscr{D}$ - с конечными произведениями.

24. Докажите, что эквивалентность категорий сохраняет полноту.

25. В категории **SET** опишите явным образом конструкцию обратного предела последовательности множеств и отображений $(\alpha_n: X_n \to X_{n-1})_{n\geq 1}$.

26. В категории **SET** опишите явным образом конструкцию прямого предела последовательности множеств и отображений $(\alpha_n: X_n \to X_{n+1})_{n\geq 1}$.

27. Докажите, что любое множество мощности континуум является обратным пределом счетной последовательности конечных множеств.

28. Докажите, что квадрат в категории **C**

$$\begin{array}{ccc} & \overset{h}{} & \\ Y & \to & A \\ k\downarrow & & \downarrow f \\ & \underset{g}{} & \\ B & \to & X \end{array}$$

декартов, если и только если его диагональ fh (=gk) и два треугольника задают произведение f и g в категории $\mathbf{C}\downarrow X$.

29. Предположим, что **C** - категория с расслоенными произведениями.

а) Докажите, что стрелка $f: A \to X$ – моно, если и только если квадрат

$$\begin{array}{ccc} & \overset{id}{} & \\ A & \to & A \\ id\downarrow & & \downarrow f \\ & \underset{f}{} & \\ A & \to & X \end{array}$$

декартов.

б) Докажите, что стрелка $f: A \to X$ – моно, если и только если $f \cong f \times f$ в категории $\mathbf{C}\downarrow X$.

30. Докажите, что изоморфизм функторов сохраняет унивалентность и полноту.

31. Докажите, что всякий функтор, изоморфный эквивалентности, — эквивалентность.

32. Докажите, что если функтор $\mathbf{F}$ сохраняет пределы над схемой $\mathbf{J}$ и $\mathbf{G} \cong \mathbf{F}$, то и $\mathbf{G}$ сохраняет пределы над $\mathbf{J}$.

33. Докажите, что непрерывный функтор переводит мономорфизмы в мономорфизмы.

34. Докажите, что если диаграмма имеет предел, то и любая изоморфная ей диаграмма имеет предел, и эти пределы изоморфны.

35. (а) Докажите, что если функторы $\mathbf{F, G : C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$ изоморфны и $\mathbf{H: D} \rightsquigarrow \mathbf{E}$, то и $\mathbf{H \cdot F, H \cdot G}$ изоморфны.

(б) Докажите, что если функторы $\mathbf{F, G : C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$ изоморфны и $\mathbf{H: E} \rightsquigarrow \mathbf{C}$, то и $\mathbf{F \cdot H, G \cdot H}$ изоморфны.

36. Докажите, что если $\mathbf{F, G : C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$ - произвольные функторы, $\mathbf{H: D} \rightsquigarrow \mathbf{E}$ - полный унивалентный, и $\mathbf{H \cdot F, H \cdot G}$ изоморфны, то и $\mathbf{F, G}$ изоморфны.

37. Докажите, что всякая эквивалентность $\mathbf{SET} \rightsquigarrow \mathbf{SET}$ изоморфна тождественному функтору $\mathbb{Id}_{\mathbf{SET}}$.

38. Пусть $\mathbf{C}$ - категория с конечными произведениями.
(a) Для фиксированных объектов Y, Z из $\mathbf{C}$ постройте функторы $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ такие, что $\mathbf{F}(X) = X \times (Y \times Z)$, $\mathbf{G}(X) = (X \times Y) \times Z$.
(b) Докажите, что $\mathbf{F} \cong \mathbf{G}$.

39. Опровергните следующее утверждение: если τ: $\mathbb{Hom}_{\mathbf{C}}(A,–) \to \mathbb{Hom}_{\mathbf{C}}(B,–)$ - морфизм функторов, то $\tau_A(id_A) : B \to A$ – изоморфизм.

40. Докажите, что существует единственный морфизм $\mathbb{Id}_{\mathbf{SET}} \to \mathbb{Id}_{\mathbf{SET}}$

41. Докажите, что если $\mathbf{F}_1 \dashv \mathbf{G}$ и $\mathbf{F}_1 \cong \mathbf{F}_2$, то $\mathbf{F}_2 \dashv \mathbf{G}$.

42. Докажите, что если $\mathbf{D}$ - категория с конечными произведениями, то и категория функторов $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ - с конечными произведениями.

43. Пусть даны функторы $\mathbf{F : C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$, $\mathbf{G : D} \rightsquigarrow \mathbf{E}$ и функторные изоморфизмы $\mathbb{Id}_{\mathbf{C}} \cong \mathbf{G \cdot F}$, $\mathbb{Id}_{\mathbf{D}} \cong \mathbf{F \cdot G}$. Докажите, что $\mathbf{F}$ – эквивалентность.

44. Пусть $\mathbf{F : C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий. Постройте функтор $\mathbf{G : D} \rightsquigarrow \mathbf{E}$, для которого существуют функторные изоморфизмы $\mathbb{Id}_{\mathbf{D}} \cong \mathbf{G \cdot F}$, $\mathbb{Id}_{\mathbf{C}} \cong \mathbf{F \cdot G}$.

45. Пусть $\mathbf{C}$ – локально малая категория с конечными произведениями. Докажите, что функтор Йонеды $\mathbf{y: C} \rightsquigarrow \mathbf{SET}^{\mathbf{C}^{\circ}}$ сохраняет конечные произведения.

46. Докажите, что если для функторов $\mathbf{F : C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$, $\mathbf{G : D} \rightsquigarrow \mathbf{E}$ имеются правые сопряженные, то и $\mathbf{G \cdot F}$ обладает правыми сопряженным.

47. Докажите, что для всякой эквивалентности $\mathbf{F : C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$ имеется правая сопряженная эквивалентность.

48. Рассмотрим произведение категорий $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ (см. задачу 8).

a) Постройте диагональный функтор $\Delta : \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

b) Докажите, что Δ имеет левый сопряженный, если и только если $\mathbf{C}$ - категория с суммами.

49. Найдите левый и правый сопряженный функторы для диагонального функтора $\Delta : \mathbf{SET} \rightsquigarrow \mathbf{SET} \times \mathbf{SET}$.

50. Докажите, что функтор Йонеды непрерывен. (Указание: используйте ко-непрерывность $\mathbb{Hom}_C(-, A)$).

51. Докажите, что произведение двух топосов – топос.

52. Докажите, что если $(X,\leq)$ – частичный порядок и $|X| > 1$, то $\mathbf{CPO}(X,\leq)$ – не топос.

53. Существует ли малый невырожденный топос?

54. Существует ли топос, в котором $|\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\Omega})| = 8$?

55. Для декартово замкнутой категории с суммами докажите, что $a^{b+c} \cong a^b \times a^c$ для любых объектов a,b,c.

56. Для категории с суммами и произведениями докажите, что $a\times(b+c) \cong (a\times b)+(a\times c)$ для любых объектов a, b, c.

57. Для категории с суммами докажите, что $\mathrm{Hom}(a+b,c) \cong \mathrm{Hom}(a,c)\times\mathrm{Hom}(b,c)$ для любых объектов a,b,c.

58. Для декартово замкнутой категории докажите, что $(a\times b)^c \cong a^c \times b^c$ для любых объектов a,b,c.

59. Для декартово замкнутой категории докажите, что $a^{b\times c} \cong (a^c)^b$ для любых объектов a,b,c.

60. Докажите, что категория функторов $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$ является экспонентой объектов $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ в $\mathbf{CAT}$.

61. Является ли категория $\mathbf{SET}^{\circ}$ декартово замкнутой?

62. Функтор $\mathbb{F} : \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$ *отражает пределы*, если для любой диаграммы $U: \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, если $(\mathbb{F}(A) \to \mathbb{F}(U_j))_{j\in J}$ – предел $\mathbb{F}U$, то $(A \to U_j)_{j\in J}$ – предел U. Докажите, что строгий полный функтор отражает пределы.

63. Докажите, что если функтор отражает уравнители, то он полный.

64. Для функтора $\mathbb{F} : \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{D}$ и малой категории $\mathbf{A}$ постройте функтор $\mathbb{F}^{\mathbf{A}}: \mathbf{C}^{\mathbf{A}} \rightsquigarrow \mathbf{D}^{\mathbf{A}}$. Докажите, что $\mathbb{F}$ – эквивалентность категорий, если и только $\mathbb{F}^{\mathbf{A}}$ – эквивалентность категорий для любой малой категории $\mathbf{A}$.

65. Докажите, что категория **MON** моноидов и гомоморфизмов полна. Является ли она декартово замкнутой?

66. Докажите, что категория **ABG** абелевых групп и гомоморфизмов полна.

67. Докажите, что в категории **ABG** не существует объекта X^Y ни для каких нетривальных групп X,Y.

68. Рассмотрим категорию **POS** частично упорядоченных множеств и (нестрого) монотонных отображений гомоморфизмов. Докажите, что она полна.

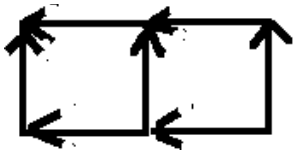
69. Докажите, что **POS** – категория с экспонентами (т.е. X^Y существует для всех X,Y).

70. Рассмотрим категорию $\mathbf{Z_2}$**-SET** , объекты которой имеют вид (X, f), где f – инволюция на X (т.е. 1-местная операция такая, что $f \cdot f = id_X$), а морфизмы – отображения, коммутирующие с инволюцией. Докажите, что $\mathbf{Z_2}$**-SET** декартово замкнута.

71. Пусть **C** – топос; $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ – категория стрелок над **C**, где объекты – стрелки, а морфизмы коммутативные квадраты. Докажите, что для различных классификаторов подобъектов в **C** соответствующие стрелки *true* изоморфны в категории $\mathbf{C}^{\rightarrow}$.

72. Докажите, что категория, эквивалентная топосу – топос.

73. (лемма о квадратах) Пусть дана коммутативная диаграмма



Докажите, что

(а) если оба квадрата декартовы, то прямоугольник декартов,

(б) если правый квадрат и прямоугольник декартовы, то левый квадрат декартов.

74. Постройте представимый функтор **SET** $\rightsquigarrow$ **SET,** который является вложением категорий.

75. Верно ли, что любой представимый функтор **SET** $\rightsquigarrow$ **SET** унивалентен?

76. Существует ли топос **C**, для которого любой представимый функтор **C** $\rightsquigarrow$ **SET** унивалентен?

77. Пусть функтор $\mathbb{H}$: **C** $\rightsquigarrow$ **SET** представим, а функтор $\mathbb{F}$: **D** $\rightsquigarrow$ **C** имеет левый сопряженный. Докажите, что функтор $\mathbb{H} \cdot \mathbb{F}$ представим.

78. Постройте подтопос в **SET**, где $\mathbf{\Omega} = 4$.

79. Верно ли, что в любой категории с конечными произведениями всякий функтор вида $(A \times -)$

(а) унивалентный? (б) полный?

80. Верно ли, что в любой декартово замкнутой категории всякий функтор вида $A^{(-)}$

(а) унивалентный? (б) полный?

81. Верно ли, что в любой декартово замкнутой категории всякий функтор вида $(-)^A$

(а) унивалентный? (б) полный?

82. Верно ли, что в любом топосе функтор **Sub**

(а) унивалентный? (б) полный?

83. Докажите, что если $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$ и $\mathbf{F} \dashv \mathbf{H}$, то $\mathbf{G} \cong \mathbf{H}$.

84. Докажите, что **POS** (задача 68) – топос.

85. Докажите, что $\mathbf{Z_2}$**-SET** (задача 70) – топос.

86. Для топоса постройте кофунктор пар подобъектов $\mathbf{Sub}^2$, переводящий объект X в множество **Sub**(X)×**Sub**(X). Докажите, что он копредставим и найдите соответствующий классификатор.

87. На монострелках зададим отношение $f \leq g \Leftrightarrow \exists h\ gh=f$.

(a) Постройте по нему отношение порядка $\leq$ на **Sub**(X).

(b) В категории **SET** постройте кофунктор вложенных пар подобъектов **Sub2**, переводящий объект X в множество$\{ (a,b) \in \mathrm{Sub}(X) \times \mathrm{Sub}(X) \mid a \leq b\}$.

(c) Докажите, что функтор **Sub2** копредставим и найдите соответствующий классификатор.