Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Российский университет дружбы народов

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXV»

Воронеж — 2014

УДК 517.94 (92; 054, 97)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 14–01–06813–мол_г

Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXV». – Воронеж: ВГУ, 2014. 204 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, Московским государственным университетом и Российским университетом дружбы народов.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

ISBN

ТРЕНАЖЁР «ЧАС ЕГЭ»

Авдеев Н.Н., Червинская А.С. (Воронеж)
nickkolok@mail.ru

«Час ЕГЭ» (www.math.vsu.ru/chas-ege) — компьютерный образовательный проект, разработанный при Математическом факультете ВГУ и предназначенный для того, чтобы помочь учащимся старших классов подготовиться к тестовой части единого государственного экзамена.

Задания в «Час ЕГЭ» генерируются случайным образом по специализированным алгоритмам, называемым шаблонами, что приводит к существенному увеличению текстово-графических формулировок задач.

Другой отличительной особенностью «Час ЕГЭ» является то, что в нём реализована интеллектуальная система подготовки. Компьютер подбирает задания таким образом, чтобы школьник более часто сталкивался с задачами такого типа, при решении которых у него возникают проблемы.

«Час ЕГЭ» является полностью открытым (код находится под лицензией GNU GPLv3) и бесплатным. Проект расширяется как вертикально, так и горизонтально.

В настоящее время в проекте полностью реализованы тесты по математике, часть B. Начата разработка тестов по русскому и информатике. Также планируется с течением времени включить в проект тесты по другим предметам школьной программы.

На настоящий момент проект «Час ЕГЭ» интегрирован в сайты нескольких образовательных учреждений (сайт Лосевской СОШ №1, сайт Новотроицкой СОШ, сайт математического факультета ВГУ, сайт Областного Центра технического творчества учащихся), планируется дальнейшая интеграция и взаимодействие с другими образовательными учреждениями.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ТРИ ПРИМЕРА

Авраменко Л.Г., Гончаренко Ю.В. (Киев)
yuragoco@mail.ru

На ВВМШ авторами неоднократно обсуждалось введение метрики в первом семестре сразу после элементов теории множеств и отношений. Для студентов первого семестра первого курса (даже математических специальностей) очень сложно воспринимать абстрактные понятия безотносительно к повседневному опыту.

Так, на вопрос: "Как измеряется расстояние между двумя точками?" все отвечают: "Как длина отрезка прямой с концами в этих точках."Всякая попытка указать другие метрики в конечномерных пространствах отторгается непониманием того, зачем это нужно. А замечание, что это понадобится в дальнейшем, не убеждает.

В то же время, предложение измерить расстояние между Москвой и Нью-Йорком по прямой (через литосферу, мантию и т.д.) сразу взламывает стену неприятия. После напоминания о способе измерения расстояний на поверхности Земли чрезвычайно полезно указать, что круг на поверхности Земли - это сферический сегмент и, определив число π как отношение длины окружности к ее диаметру, показать, что на земном шаре это число может принимать любые значения от 0 до 3.1415..., не включая последнее. Здесь же можно привести пример расстояния между пауком, сидящим на полу комнаты, и мухой, находящейся на потолке.

Множество, в котором расстояние между любыми двумя различными элементами равно единице, называется метрическим пространством изолированных точек. Примером такого расстояния служит множество абонентов мобильного оператора телефонной связи, если принять за единицу время установления связи между любыми двумя из них. В таком случае полезно указать круги радиусов 0,5 и 1,5.

В множестве n-значных двоичных чисел Хеминг определил расстояние между двумя числами как количество позиций, в которых у чисел стоят различные символы (например, $\rho(1010; 1110) = 1$). Такой способ измерения расстояний играет важную роль в теории кодов с исправлением ошибок. Посвятив этой теме 15 минут, вы успеете изложить способ кодирования Хеминга, позволяющий исправлять однократные ошибки.

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ПАРАМЕТРЕ АППРОКСИМАЦИИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Андрианова А.А. (Казань)

aandr78@mail.ru

Один из способов решения задачи условной оптимизации $f^* = \min\{f(x), x \in D\}$, где $D = \{x : x \in R_n, g(x) \leqslant 0\}$ ($f(x), g(x)$ непрерывные сильно квазивыпуклые функции в R_n), с заданной точностью $\varepsilon > 0$ заключается в замене исходного множества D на его удовлетворительную аппроксимацию и решении вспомогательной задачи методами последовательной безусловной минимизации ([1]).

Предлагается способ адаптации аппроксимации на основе использования мультипликативного параметра. Доказано, например, для внутренней аппроксимации множества вида $D(p,\alpha) = \{x : x \in R_n, \alpha g(x) + p \leqslant 0\}$ при $\alpha > 0, p > 0$, что аппроксимация будет удовлетворительной, если для зафиксированного значения $p > 0$ будет выбрано $\alpha \geqslant \dfrac{4L^2 p}{\kappa\varepsilon^2}$, где L - константа Липшица функции $f(x)$, $\kappa > 0$ - константа сильной выпуклости функции $g(x)$. Сформулируем алгоритм внешней точки на основании данной оценки.

Алгоритм. Зафиксируем $p > 0$. Выберем количество аппроксимаций $N > 0$ и непрерывную положительную монотонно возрастающую функцию $\varphi(t)$, для которой $\varphi(N) \geqslant \dfrac{4L^2 p}{\kappa\varepsilon^2}$. Положим $k = 1$.

1. Для аппроксимации $D_k = \{x : x \in R_n, \alpha_k g(x) + p \leqslant 0\}$, где $\alpha_k = \varphi(k)$, решается задача $\min\{f(x), x \in D_k\}$ с помощью методов внешней точки до получения точки $x_k \in D$. Обозначим последнюю полученную точку не из D через y_k.

2. Если $|f(x_k) - f(y_k)| \leqslant \varepsilon$, то $x_k \in X^*_\varepsilon$.

3. Если $k = N$, то $x_k \in X^*_\varepsilon$. Иначе переходим к п. 1 при $k = k+1$.

Доказано, что D_N - удовлетворительная аппроксимация D, поэтому для $x_N \in D$ выполняется $x_N \in X^*_\varepsilon$. Однако чаще остановка происходит по выполнению п. 2 алгоритма, т.е. удовлетворительная аппроксимация будет построена на более ранних этапах алгоритма.

Литература

1.*Андрианова А.А.* Применение удовлетворительной аппроксимации допустимого множества при решении задач оптимизации // Уч. зап. Казан. ун-та. Серия физ.-матем. наук. - Т.154, №3. - с.23-27.

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МОТИВАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аршава Е.А., Бабаева Е.В. (Харьков, Украина)
elarshava@mail.ru

Одной из важнейших проблем в педагогике является проблема мотивации обучения. В учебный процесс в высшем учебном заведении вовлечены молодые люди, у которых продолжается формирование личности; поэтому проблема состоит в том, чтобы найти методы и средства повышения мотивации обучения, способствующие максимальному развитию личностных качеств студентов, необходимых для их успешной профессиональной деятельности. Преподавателям нередко приходится сталкиваться с проблемой непонимания студентами необходимости изучения тех или иных дисциплин. У студентов-первокурсников часто возникает вопрос: «Зачем студенту технического вуза изучать высшую математику?». Причины отсутствия у студентов интереса к занятиям высшей математикой различны. Способ выбора абитуриентом специальности значительно сказывается на мотивации обучения студента: если будущая профессия выбрана неосознанно, случайно, то у студента, как правило, слабая мотивация к обучению. Доминирующими мотивами, как правило, оказываются такие, как «стать высококлассным специалистом», «обеспечить успешность будущей профессиональной деятельности», «получить диплом», «постоянно получать стипендию», «приобрести глубокие и прочные знания».

Кроме того, студенты-первокурсники имеют различную базовую подготовку по элементарной математике. Студенты, слабо освоившие школьный курс математики, испытывают большие трудности по преодолению отставания. Это приводит к потере интереса к предмету, а в дальнейшем появляются трудности в усвоении специальных дисциплин по вопросам, связанным с высшей математикой. Немаловажным также является отсутствие или недостаточность у студентов навыков самостоятельной работы.

Основными средствами разрешения этой проблемы, на взгляд авторов, являются следующие средства:

— ликвидация пробелов в знаниях элементарной математики,

— демонстрация необходимости математических знаний для будущей профессиональной деятельности,

— формирование познавательного интереса при организации учебного процесса,

— организация самостоятельной работы студентов,

— контроль учебной деятельности.

НЕЧЕТКАЯ ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА В ОБРАЗОВАНИИ

Астахова И.Ф., Сухотерина И.В. (Воронеж)

Развитие дистанционного образования потребовало создание обучающих и контролирующих курсов. К тому же, в связи с высокими темпами развития этого направления большинство аналогичных разработок устарело, так как произошел бурный скачок развития Интернет-технологий.

Требуется создать нечеткую гибридную систему по учебному курсу “Базы данных и экспертные системы”. Таким образом, реализация проекта сводится к решению следующих задач [2-4]:

— подбор теоретических сведений по данному курсу;

— разработку базы данных;

— программной реализации Web-страниц и связь их в единый узел;

— разработку тестов, которые будут представлены при проверке знаний;

— обеспечение хранения результатов тестирования в базе данных;

— классификацию студентов с помощью нейронных сетей;

— нечеткая модель прогноза развития курса.

В реализацию данного проекта входит задача подбора теоретической части по курсу “Базы данных и экспертные системы” и разработки тестов по данному курсу. Вопросы были разработаны по темам:

— типы данных языка SQL;

— SQL- запросы;

— типы и взаимосвязи моделей данных;

— архитектура клиент/сервер;

— реляционная алгебра и реляционное исчисление;

— вопросы по проектированию базы данных;

— транзакции.

На каждую тему было представлено несколько вариантов вопросов, разработанные вопросы имеют различную сложность. Каждый вопрос имеет несколько вариантов ответов.

Интерфейс сайта был специально разработан для корректного отображения в браузере Mozila Firefox 2.0. Интерфейс рассчитан на обладающего минимальными компьютерными навыками пользователя.

Для реализации структуры данных были построены модели данных.

Главным результатом проведенной работы является создание нечеткой гибридной системы в образовании по курсу “Базы данных и экспертные системы”, которая выполняет требуемый круг задач по обучению и тестированию студентов, осуществляет прогноз с помощью нечеткой логики развития курса по результатам тестирования нескольких лет, классификуцию студентов с помощью нейронной сети по первому этапу тестирования. Построена математическая модель для оценки знаний студентов. [1].

Коэффициент правильности ответа обучаемого на контрольные вопросы для блоков контрольных вопросов, относящихся непосредственно к данной учебной цели, определим следующим образом [1]:

$$NK_r = \begin{cases} \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_{QB}} K_{ri}}{N_{QB}}, N_{QB} > 0 \\ 0, N_{QB} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где N_{qB} — количество блоков контрольных вопросов, непосредственно связанных с данной учебной целью, на которые ответил обучаемый; K_{ri} — коэффициент правильности ответа обучаемого на i-й блок контрольных вопросов по пятибалльной шкале. NK_r определяется как среднее значение коэффициентов правильности ответов обучаемого на блоки контрольных вопросов, непосредственно связанных с данной учебной целью.

Для хранения персональной информации используются профили обучаемых и преподавателей. Трек обучаемого – это информация о том, как обучаемый перемещается в обучающем пространстве. Трек учебного курса – это информация об оценке учебного курса обучаемыми, а коммуникационный трек - информация о коммуникации между обучаемыми и преподавателями. Трек обучения -совокупность данных элементов.

Обучающее пространство учебного курса (S) представляет собой [1]:

$$S = <CRST, G, LGR, CT, EM, Q, LNK, EVT>,$$

где CRST - информация об учебном курсе; G - дерево учебных целей; LGR - множество исходных требований к подготовке обучаемого; CT - дерево курса; EM - множество учебных материалов; Q - множество контрольных вопросов; LNK - множество внутренних связей; EVT- параметры оценки учебного курса.

“Теоретической” учебной целью назовем цель, которая направлена на приобретение знаний обучаемыми, “практической” - цель, направленную на применение полученных знаний. “Обобщенная” учебная цель объединяет “теоретические” и “практические” цели. На основании изложенного, определим учебные цели следующим образом:

$$G = \langle GN, GS \rangle, GN = \{g_i\},$$

где G - дерево учебных целей; GN - множество вершин дерева учебных целей; GS - множество ребер дерева, отражающее иерархические связи между учебными целями; g_i- учебная цель.

Множество учебных материалов определим следующим образом:

$$EM = \{P, E\},$$

где P - множество обучающих страниц; E - множество учебных элементов.

Под обучающей страницей будем понимать следующее:

$$p_i = \langle p_{nm}, p_T, \{ U_i\}, \{ e_i\} \rangle, p_i \in P, p_T \in PT, PT = \{ pt_T, pt_P \},$$

где p_i - обучающая страница; p_{NM}— наименование обучающей страницы; p_T - тип обучающей страницы; U_i - уровень подробности представления учебного множество типов обучающих страниц, e_i-учебный элемент.

Множество типов обучающих страниц PT содержит два элемента: pt_T -“теоретическая” обучающая страница, pt_P - “практическая” обучающая страница.

Литература

1. Гапанюк Ю.Е. Исследование и разработка модели, методики и средств создания автоматизированных учебных пособий с использованием технологии XML/ автореф. дис. на соиск. степени канд. техн. наук.05.13.17-М., 2006.-18 с.

2. Освой самостоятельно PHP4 за 24 часа/ Мэт Зандстра ; пер. с англ.- М.:Издательский дом “Вильямс”, 2004 г.-384с.

3. СУБД: Язык SQL в примерах и задачах/ И.Ф.Астахова, А.П.Толстобров, В.М.Мельников – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 176с.

4. Системы искусственного интеллекта. Практический курс/ И.Ф.Астахова и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 310 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С РЕГУЛЯРНОЙ И СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

Асташова И.В. (Москва)

ast@diffiety.ac.ru

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + p_0\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n > 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 0, \quad k \neq 1 \quad p_0 \neq 0. \tag{1}$$

Результаты об асимптотическом поведении решений (1) подробно описаны в [1] и [4]. Другие результаты о существовании решений этого уравнения с асимптотикой специального вида содержатся в [2], [3], [5]–[7].

Приведем результаты о существовании колеблющихся решений специального вида уравнения (1). При этом будет использоваться обозначение

$$\alpha = \frac{n}{k-1}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для любого целого $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{\frac{1}{k-1}}(x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x)), \qquad -\infty < x < x^*, \tag{3}$$

является решением уравнения (1).

Следствие 1. *Для любого четного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\log(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{4}$$

является решением уравнения (1).

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00989)

Следствие 2. *Для любого нечетного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 < 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = |p_0|^{\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\log(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{5}$$

является решением уравнения (1).

Аналогичные результаты о существовании колеблющегося решения специального вида были доказаны для уравнения (1) с сингулярной нелинейностью ($0 < k < 1$).

Замечание. Отметим, что в работе [5] было доказано существование решений вида (4) с положительной периодической функцией $h(s)$ для уравнения (1) с достаточно большим n и $p_0 = (-1)^{n+1}$. Аналогичный результат для $n = 12, 13, 14$ был доказан в работе [7].

Литература

[1] *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. – 432 с.

[2] *Асташова И. В.* Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №12. С. 2185.

[3] *Кигурадзе И. Т.* Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравне- ний // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. №2. С. 207–219.

[4] *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. //Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой, с. 22–288, 2012, М.: ЮНИТИ-ДАНА.

[5] *Kozlov V. A.* On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. //Ark. Mat., 1999, v. 37, No 2, p. 305–322.

[6] *T. Kusano, J. Manojlovic.* Asymptotic behavior of positive solutions of odd order Emden-Fowler type differential equations in the framework of regular variation // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2012. №45. P. 1–23.

[7] *Astashova I.V.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. 2013. DOI: 10.1186/10.1186/1687-1847-2013-220

О ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

Баев А.Д., Давыдова М.Б., Садчиков П.В., Ракова С.А. (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty\left(R^1_+\right)$. Свойства этого преобразования исследованы в [1]. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, и рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$.

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, \ldots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0, 1]$ такое, что $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 = s_1(\nu)$.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$, $x \in R^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K(x, t, D_x, D_{\alpha,t})\, v(x, t) = F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha \left[\lambda(x, t, \xi, \eta)\, F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x, t)\right]\right]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ принадлежит классу символов $S_\alpha^m(R^1 \times \Omega \times R^1 \times R^1)$, $m \in R^1$, $\Omega \subseteq (0;+\infty)$, $x \in R^1$, $t \in (0;+\infty)$, $\xi \in R^1$, $\eta \in R^1$, если $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in C^\infty\left(\Omega \times R^1 \times R^1 \times R^1\right)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \frac{\partial^l}{\partial \xi^l}\frac{\partial^p}{\partial \eta^p}\lambda(x,t,\xi,\eta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\tau,m,l,p}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)},$$

где $\tau,m,l,p = 0,1,2,\ldots$; $c_{\tau,m,l,p} > 0$ — некоторые константы, не зависящие от x,t,ξ,η,σ.

Определение 5. Сопряженным оператором к весовому псевдодифференциальному оператору $P(t,D_x,D_{\alpha,t})$ назовем оператор $P^*(t,D_x,D_{\alpha,t})$, удовлетворяющий равенству

$$(P(t,D_x,D_{\alpha,t})u(x,t),v(x,t))_{L_2(R^n_+)} =$$

$$= (u(x,t),P^*(t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t))_{L_2(R^n_+)}$$

для всех $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, $u(x,t) \in L_2(R^n_+)$ таких, что $P(t,D_x,D_{\alpha,t})u(x,t) \in L_2(R^n_+)$.

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(R^n_+)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $p(t,\xi,\eta) \in S_\alpha^m(R^1 \times \Omega \times R^1 \times R^1)$, $m \in R^1$. Тогда оператор $P^*(t,D_x,D_{\alpha,t})$, сопряженный к весовому п. д. о. $P(t,D_x,D_{\alpha,t})$ с символом $p(t,\xi,\eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $p^*(t,\xi,\eta) \in S_\alpha^m(R^1 \times \Omega \times R^1 \times R^1)$. Причём справедливо соотношение

$$p^*(t,\xi,\eta) - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(i)^j}{j!}(\alpha(t)\partial_t)^j\partial_\eta^j\bar{p}(t,\xi,\eta) \in S_\alpha^{m-N}(\Omega)$$

для любых $N = 1,2,\ldots$.

Если символ $p(x,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора не зависит от x, то утверждение, аналогичное теореме 1 доказано в [2].

Литература

1. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка

/ А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

2. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ВЫРАЖЕННЫЕ В ТЕРМИНАХ РАЗНОСТИ ПЕРЕСТАНОВОК

Барсукова Я.С. (Москва)

Пусть $L_0 = L_0(\mathbb{R})$ - пространство всех (классов эквивалентности) измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$. Определим *функцию распределения* для $f \in L_0$, как

$$\lambda_f(t) = |\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > t\}|, \ t > 0,$$

где $|\cdot|$ - мера Лебега и *убывающую перестановку* f на полуось $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$:

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leqslant t\}, \ \ t > 0.$$

На множестве $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ всех локально суммируемых функций определим
оператор осреднения Харди по формуле

$$Ph(t) := \frac{1}{t}\int_0^t h(s)ds, \ \ t > 0.$$

Тогда

$$f^{**}(t) := Pf^*(t)$$

обычно называют *второй перестановкой* функции f или *максимальной функцией.*

Пусть $w(x) \geqslant 0$ заданная весовая функция на полуоси $\mathbb{R}^+$. Рассмотрим пространства $S_p(w)$ и $S_{p,\infty}(w)$ такие, что $f^*(\infty) = 0$ и

$$S_p(w) := \left\{ f : \|f\|_{S_p(w)} := \left(\int_0^\infty \left(f^{**}(s) - f^*(s)\right)^p \omega(s) ds \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$$S_{p,\infty}(w) :=$$

$$= \left\{ f : \|f\|_{S_{p,\infty}(w)} := \sup_{t>0} t\left(f^{**}(t) - f^{*}(t)\right) \left(\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{s^p} ds \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

В докладе будем рассматривать функциональные свойства приведенных пространств.

ГРУППОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА[1]

Бекларян Л.А. (Москва)
beklar@cemi.rssi.ru

Рассматривается уравнение

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t), \ldots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R, \tag{1}$$

где $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса $C^{(0)}$; $q_j(.),\ j = 1, \ldots, s$ — гомеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию; B_R — замкнутый интервал, замкнутая числовая полупрямая, или числовая прямая. Оно при $q_j(t) \equiv t, \quad j = 1, \ldots, s$ — является обыкновенным дифференциальным уравнением, при $q_j(t) \leqslant t, \quad j = 1, \ldots, s$ — уравнением с запаздываниями, при $q_j(t) \geqslant t, \quad j = 1, \ldots, s$ — уравнением с опережениями. Функции $[q_j(t) - t], \quad j = 1, \ldots, s$ называются отклонениями аргумента. Будем предполагать, что отклонения аргумента удовлетворяют условиям

$$h_j = \sup_{t \in \mathbb{R}} |q_j(t) - t| < +\infty, \qquad j = 1, ..., s.$$

Если правая часть дифференциального уравнения и отклонения являются функциями класса $C^{(1)}$, то с помощью замены времени произвольные отклонения аргумента могут быть сведены к рассматриваемому типу. При такой замене времени мы можем получить сильный рост правой части уравнения относительно переменной времени t.

Определение. *Абсолютно непрерывная функция $x(.)$, определенная на $\mathbb{R}$, называется решением уравнения* (1), *если при почти всех $t \in B_R$ функция $x(.)$ удовлетворяет этому уравнению.*

[1] Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант № 12-01-00768-а) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5998.2012.1)

Основная цель – это исследование краевой задачи

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t), \ldots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R, \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}\backslash B_R, \quad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

которую будем называть *основной краевой задачей.*

В случае отсутствия отклонения аргумента ($q_j(t) \equiv t, j = 1, \ldots, s$) краевая задача переходит в задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Если $B_R = [t_0, t_1]$, или $B_R = [t_0, +\infty[$, то, при $\bar{t} = t_0$ для уравнения с запаздываниями ($q_j(t) \leqslant t,\ j = 1, \ldots, s$), или при $\bar{t} = t_1$ для уравнения с опережениями ($q_j(t) \geqslant t,\ j = 1, \ldots, s$), краевая задача переходит в хорошо известную постановку начальной задачи для уравнения с запаздываниями, или опережениями аргумента. Важно, что в выделенных случаях рассматриваемая краевая задача имеет *локальные краевые условия.*

В ситуации общего положения, когда $\bar{t} \neq t_0, t_1$, или отклонения аргумента произвольны, мы имеем краевую задачу с *нелокальными краевыми условиями.*

Подход, предлагаемый для исследования основной краевой задачи, основан на формализме, центральным элементом которого является структура конечно-порожденной группы гомеоморфизмов прямой $Q =< q_1, \ldots, q_s >$ (групповой операцией в такой группе является суперпозиция двух гомеоморфизмов). Свойства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, а также вариационных задач и задачи оптимального управления с дифференциальными связями, описываемые функционально-дифференциальными уравнениями точечного типа, тесно связаны со структурой указанной группы [1] – [2].

Для любого $\mu \in R_+$ определим банахово пространство (пространства функций с весами)

$$\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R}) = \Big\{ x(.) :\, x(.) \in C^{(k)}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\right),$$

$$\max\nolimits_{0 \leqslant r \leqslant k} \sup\nolimits_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t) e^{-\delta|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \Big\}.$$

Будем полагать, что функция g непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по последним ns переменным. В случае, когда B_R полупрямая или прямая, имеет место дополнительное предположение на функцию g в виде ограничения на рост по переменной t.

Теорема. *Если для некоторого* $\mu \in]\,0, \mu^*[\bigcap]\,0, 1[$ *выполняется неравенство*

$$L \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|h_j|} < \ln \mu^{-1},$$

то для любых фиксированных $\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ *существует решение* $x(.) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ *основной краевой задачи* (2)-(4). *Такое решение является единственным.* ■

Такая теорема существования и единственности лежит в основе исследований вопроса существования решений типа бегущей волны для конечноразностного аналога волнового уравнения и уравнения теплопроводности, вопроса существования периодических решений для функционально-дифференциального уравнения точечного типа с легко проверяемыми достаточными условиями, задачи вариационного исчисления и оптимального управления с дифференциальной связью в виде функционально-дифференциального уравнения.

Литература

[1] *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функцинально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. – М.: Факториал Пресс, (2007). - 288 с.

[2] *Beklaryan L. A.* Group Specialities in the Problem of the Maximum Principle for Systems with Deviating Argument// J. Dynamical and Control Systems. (2012), V.18, №1, P. 21-34.

[3] *Бекларян Л.А.* О квазибегущих волнах// Матем. Сборник, (2010) 201:12, 21-68.

ТЕХНОЛОГИЯ РАЗРАБОТКИ ДАННЫХ В МЕДИЦИНЕ

Бикмаева И.Р. (Москва)

bikmaeva90@mail.ru

Данная работа посвящена проблеме обнаружения нового знания в хранилищах медицинских данных – KDD, и основному этапу этого процесса – data mining. После применения традиционных методов анализа, например, анализ хода течения болезни и предполагаемого лечения перед практическими врачами встает задача по дальнейшему увеличению эффективности лечения каждого пациента . Методы KDD переводят процесс поиска нового знания на качественно иной уровень и могут облегчить и дополнить традиционные методы анализа человека.

В работе рассмотрена задача классификации на примере анализа цитологической диагностики рака молочной железы, для которой требуется найти правила, позволяющие отнести записи базы данных к одному из двух или нескольких классов. И провдена оценка качества получаемых моделей.

Литература

1. *Амосов Н.М., Зайцев Н.Г., Мельников В.Г., Попов А.А.* Медецинская информационная система . Киев, Наукова думка, 1975. 508 с.

2. *Баргесян А.А., Куприянов М.С., Степаненко В.В., Холод И.И..* Технология анализа данных. Data Mining, Visual Mining, OLAP. БХВ-Петербург, 2007. – 384 с.

КЛАССИФИКАЦИЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПО НИЛЬСЕНУ-ТЁРСТОНУ И $SU(2)$-ТКТП

Бирюков О.Н. (Коломна)

oleg_biryukov@mail.ru

В работе [1] предложен алгоритм линейной сложности распознавания типа косы из 3-х нитей по классификации Нильсена-Тёрстона. В основу алгоритма положено задание кос образующими специального типа: u, d, r, l, a, b, Δ.

Каждая коса из 3-х нитей кодирует класс изотопных гомеоморфизмов сферы с четырьмя отмеченными точками. В статье [2] изложена связь между этими классами гомеоморфизмов и квантовыми представлениями группы $SU(2)$.

В докладе будут выписаны матрицы представления, соответствующие образующим u, d, r, l, a, b, Δ, и вычислены их собственные значения, из которых конструируются коэффициенты дилатации псевдоаносовских гомеоморфизмов.

Литература

1. *Бирюков О.Н.* Эффективное распознавание типа косы по Нильсену-Тёрстону в случае трёх нитей // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Суздаль, 2012. С.32-33.

2. *Andersen J.E., Masbaum G., Ueno K.* Topological Quantum Field Theory and the Nielsen-Thurston classification of M(0,4). Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 141 (2006) 477-488.

О ЧИСЛЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $f(x, y) = 0$

Близняков Н.М. (Воронеж)

Рассматривается классическая задача алгебры многочленов о числе различных вещественных корней вещественного многочлена. В случае многочлена от одной переменной задача рассматривалась разными авторами в разных терминах. Алгебраическое решение задачи, т.е., позволяющее найти число различных вещественных корней многочлена в результате конечного числа арифметических операций и функций sign над его коэффициентами, дают, например, теоремы Ж. Штурма и Ш. Эрмита – А. Гурвица – Ф. Фробениуса (см. напр. [1]).

В докладе предлагаются вполне обозримые алгебраические правила, позволяющие выяснить в результате конечного числа арифметических операций и функции sign над коэффициентами вещественного многочлена от двух переменных $f(x, y) \in R[x, y]$, следующую информацию о множестве $Z(f)$ решений уравнения $f(x, y) = 0$:

1) компактно или некомпактно множество $Z(f)$;

2) конечно или бесконечно множество $Z(f)$, если оно компактно;

3) число элементов множества $Z(f)$, если оно конечно.

Все правила используют теорему Эрмита-Гурвица-Фробениуса о вычислении индекса Коши рациональной функции. Основным вычислительным элементом в правилах является нахождение знаков определителей, зависящих от параметра, при малых значениях параметра.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 567 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА-ПУАССОНА

Блинова Е.А. (Москва)

aelena.blinova@gmail.com

Рассматривается система уравнений Власова-Пуассона для случая электромагнитного взаимодействия плазмы.

Метод конечных расностей (метод сеток), описанный в данном докладе, базируется на уже установленных фактах существования решений смешанных задач для систем уравнений Власова-Пуассона [1]. Ранее применялся метод Галеркина для построения решений систем уравнений Власова-Пуассона для гравитационного взаимодействия частиц [2].

Искомыми функциями являются плотности распределения частиц и потенциал самосогласованного электрического поля. В качестве исходных данных рассматриваются начальные плотности распределения частиц (ионов и электронов) с компактным носителем на ограниченной пространственной области. Реализуется метод с помощью программы Maple.

В докладе также упоминаются некоторые вопросы, касающиеся устойчивости и «насыщения» предложенного метода и возможные пути решения данных вопросов.

Литература

[1] *Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова-Пуассона в полупространстве. ДАН УДК 517.9 МАТЕМАТИКА 2011.

[2] *Коньшева В.Г.* Метод Галеркина для уравнений Власова-Пуассона. М.: Выпускная работа магистра, 2012.

[3] *Федоренко Р.П* Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994. — 377-396 с.

ИЛЛЮЗИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ[1]

Боровских А.В. (Москва)

bor.bor@mail.ru

Линейно-квадратичная зависимость скорости движения центра кривизны фронта от радиуса кривизны для неоднородных сред, установленная в [1], распространяется на случай сред анизотропных, где зависимость оказывается уже трёхчленной. Интерес к этой зависимости связан с тем, что она аналогична известному закону Хаббла, но порождена не движением источника и не расширением пространства, а обычной неоднородностью среды.

Фронт волны как параметризованное (параметром является время t) семейство поверхностей задается в виде $t = \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, где функция ψ является решением *уравнения эйконала* $g^{ij}(x)\psi_i\psi_j = 1$. Здесь $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – контравариантный вектор координат точ-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00155)

ки, $g^{ij}(x)$ – матричная функция, заданная в $\mathbb{R}^n$ (она рассматривается как реализация некоторого тензора), нижними индексами обозначаются частные производные, знак суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам опущен.

Лучи (характеристики уравнения эйконала) описываются системой

$$\dot{x}^i = g^{ij}(x)\tau_j, \qquad \dot{\tau}_j = -\frac{1}{2}\partial_j g^{kl}\tau_k\tau_l, \tag{1}$$

где τ_j – компоненты ковариантного вектора.

Определение. *Будем говорить, что гиперповерхность* Γ *вполне регулярна в некоторой точке, если она является дважды непрерывно дифференцируемой, и удовлетворяет, помимо обычного условия регулярности (возможность задания регулярных локальных координат), условию конечности в этой точке всех нормальных кривизн.*

Теорема. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^3$, $G(x) = (g^{ij}(x))$ *– произвольная дважды непрерывно дифференцируемая матричная функция,* $\nabla G(x)$ *– её градиент,* $D_l G(x)$ *и* $D_l^2 G(x)$ *– её первая и вторая производные по направлению* l *(то есть* $D_l = (l, \nabla)$*).*

Пусть M *– некоторая фиксированная точка в* $\mathbb{R}^3$, Γ *– проходящая через эту точку вполне регулярная в окрестности этой точки поверхность (фронт),* ν *и* h *– нормальный и некоторый касательный к поверхности* Γ *в точке* M *единичные (в евклидовой метрике) векторы,* $h^\perp = [\nu, h]$ *– касательный к* Γ *вектор, ортогональный* h. *Пусть* γ_h *и* ε_h *– нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности* Γ *в точке* M, *отвечающие вектору* h.

Тогда скорость движения $\dot{x}_h^*$ *соответствующего центра кривизны* x_h^* *при сдвиге* Γ *вдоль лучей (2) определяется формулой (употребление функции* G *и её производных без аргумента означает их значения в точке* M*)*

$$\dot{x}_h^* = \left[\frac{G\nu}{(G\nu,\nu)^{1/2}} - \nu\frac{(Gh,h)(G\nu,\nu) - (G\nu,h)^2}{(G\nu,\nu)^{3/2}}\right] +$$

$$+\frac{1}{\gamma_h}\left[\frac{(\nabla G\nu,\nu)}{2(G\nu,\nu)^{1/2}} - \nu\frac{2(D_hG\nu,h)(G\nu,\nu) - (D_hG\nu,\nu)(G\nu,h)}{(G\nu,\nu)^{3/2}}\right] -$$

$$-\frac{\nu}{\gamma_h^2}\left[\frac{(D_h^2G\nu,\nu)}{2(G\nu,\nu)^{1/2}} - \frac{(D_hG\nu,\nu)^2}{4(G\nu,\nu)^{3/2}} - \varepsilon_h^2\frac{(Gh^\perp,h^\perp)(G\nu,\nu) - (G\nu,h^\perp)^2}{(G\nu,\nu)^{3/2}}\right].$$

Литература

Боровских А.В. Иллюзия движущегося источника в геометрической оптике неоднородных сред // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. N 7. С. 867-873.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Брызгалова М.А. (Воронеж)

pochta@mail.ru

Пусть $M : D(M) \subseteq E \to E$ – ограниченный линейный оператор и $L : D(L) \subseteq E \to E$ – замкнутый линейный оператор в сепарабельном банаховом пространстве E, удовлетворяющие условиям:

$$(ML)D(L) \subseteq D(M);$$

$$(M(D(L))) \subseteq R(M).$$

Функции импульса будем обозначать

$$I_k : \mathcal{B} \to E, \ k = 1, \ldots, N,$$

где $\mathcal{B}$ - фазовое пространство функций $\psi : (-\infty, 0] \to E$.

Будем рассматривать нелинейные системы управления, описываемые вырождающимися (типа Соболева) функционально дифференциальными включениями в E вида:

$$\frac{(dMx(t))}{dt} \in Lx(t) + F(t, Mx_t) + Bu(t), t \in [0, T] := I \qquad (1)$$

где $x_t \in \mathcal{B}$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$ и для функции $x : (-\infty; T] \to E$ выполняются условия:

$$Mx_0 = \tilde{\psi} \in \mathcal{B} \qquad (2)$$

$$y(t_k^-) = y(t_k), k = 1, \ldots, N \qquad (3)$$

$$y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{(t_k)}), k = 1, \ldots, N, \qquad (4)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00468)

где $y(t) = Mx(t)$, управление $u \in L_2(I;\mathfrak{U})$; $\mathfrak{U}$ - банахово пространство управлений, $B : \mathfrak{U} \to E$ - ограниченный линейный оператор.

Определение 1. *Кусочно-непрерывная функция* $x : (-\infty; T] \to E$ *называется интегральным решением задачи* $(1) - (4)$, *если она удовлетворяет условиям* $(2) - (4)$*и в интервале* I *она принимает вид:*

$$y(t) = U(t)y(0) + \sum_{0<t_k<t} U(t)I_k(y[\psi]_{t_k}) +$$

$$+ \int_0^t U(t-s)f(s)ds + \int_0^t U(t-s)Bu(s)ds,$$

где $f(s) \in F(s, Mx_s)$ *– суммируемое сечение, а* $U(t)$ *– обобщенная полугруппа, порожденная многозначным линейным оператором* $A = LM^{-1}$.

В предположении, что начальная функция $\tilde{\psi} \in \mathcal{B}$ и точка $x_1 \in E_0$ даны, в докладе описываются условия, которые гарантируют существование интегрального решения задачи $(1) - (4)$, которое будет удовлетворять условию

$$Mx(T) = x_1 \tag{5}$$

Литература

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Berlin - New York, Walter de Gruyter, 2001.

2. Obukhovskii V., Zecca P. Controllability for systems governed by semilinear differential inclusions in a Banach space with a non-compact semigroup, Nonlinear Anal., 70, 2009, 3424-3436.

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Бунеев С.С. (Елецк)

В работах А. Д. Баева [1]-[2] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В данной работе получена априорная оценка решения краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$- некоторое число, рассматривается уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t). \qquad (1)$$

Здесь

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - \partial_t^3 v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\, a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается условие вида

$$B_j(D_x)\ v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leqslant m^* - m(j-1)} b_\tau D_x^\tau \partial_t^j\ v|_{t=0} = G_j(x), \ \ j = 1; 2 \qquad (2)$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Пусть что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $ReL_{2m}(\xi, \eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $B_j(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, $j = 1, 2$..

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)–(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ — действительное число) состоит из тех функций $v(x,t) \in S'$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} =$$

$$= \{ \sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha} [(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|^2_{L_2(R^n_d)} \}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{3s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s — целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l\leqslant s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R^n_d)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_s(R^{n-1})$ (s — действительное число) состоит из всех функций $u(x) \in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_s = \left\| F^{-1}_{\xi\to x}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u(x)]] \right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant \max\{2m, m^*+m\}$ - целое число и выполнены условия 1 - 3. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,m}(R^n_d)$, $G(x) \in H_{s-m^*-m(j-1)-\frac{m}{3}}(R^{n-1})$, $j=1,2$. Тогда существует единственное решение $v(x,t)$ задачи (1)–(3), принадлежащее пространству$H_{s,\alpha,m}(R^n_d)$.

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240 с.

2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727 – 728.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)

bmsh2001@mail.ru

В работе исследуется решение смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, 14-01-00867)

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad {u'}_t(x,0)=0, \quad x\in[0,1]. \tag{3}$$

Дополнительно предполагаем, что $q(0)=q(1)$.

При применении метода Фурье здесь возникают трудности из-за возможной кратности собственных значений соответствующей спектральной задачи. Резольвентный подход, описанный в [1], позволяет успешно справиться с этими трудностями и получить классическое решение при естественных минимальных требованиях: $\varphi(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi^{(j)}(0)=\varphi^{(j)}(1)$, $(j=0,1,2)$.

Формальное решение задачи (1)-(3) есть

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda-\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde\gamma_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda, \tag{4}$$

но теперь $\gamma_n=\{\rho\,||\rho-2n\pi|=\delta\}$, L — соответствующий задаче оператор (с условиями $y^{(j)}(0)=y^{(j)}(1)$, $j=0,1$). Для $u(x,t)$ справедливо представление (5) из [1]. При этом имеем

$$u_0(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde\gamma_n}\Bigg)(R^0_\lambda\varphi_1)\cos\rho t d\lambda, \quad \varphi_1=R^0_{\mu_0}g.$$

Используя свойства проекторов Рисса, отсюда получаем

$$u_0(x,t)=(\varphi_1,1)+2\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi_1(\xi),\cos 2n\pi\xi)\cos 2n\pi x+ \\ +(\varphi_1(\xi),\sin 2n\pi\xi)\sin 2n\pi x]\cos 2n\pi t,$$

откуда следует теорема 2 из [1] для задачи (1)-(3) при $q(x)\equiv 0$ (только теперь $\tilde\varphi_1(x)\in C^2(-\infty,\infty)$, $\tilde\varphi_1(x)=\tilde\varphi_1(1+x)$, и $\tilde\varphi_1(x)=\varphi_1(x)$ при $x\in[0,1]$).

Исследуя резольвенту оператора L, оценивая ее компоненты (используя также как и в [1] операторы преобразования), получим

Теорема 1. *Формальное решение (4) есть классическое решение задачи (1)-(3) при указанных условиях на* $\varphi(x)$.

Литература

1. *Хромов А.П.* // (настоящий сборник)

О ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА

Васильева С.Д. (Москва)
vasilyevasd@gmail.com

В настоящем докладе исследуется непрерывная дифференцируемость функции Беллмана в некоторых линейных задачах оптимального управления, сформулированы необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Для рассматриваемых задач выведено уравнение Беллмана, которое является необходимым условием оптимальности в методе динамического программирования. Поскольку уравнение выражается неклассическим уравнением в частных производных функции Беллмана $w(x)$, требуются некоторые предположения о гладкости функции. Предположения не вытекают из постановки задачи и в большинстве простых примеров не выполняются.

В связи с этим, приводится теорема о гладкости функции Беллмана $w(x)$ и сопряженной вектор-функции $\psi(x_0)$.

Теорема. *Пусть U - выпуклый компакт некоторой дважды непрерывно дифференцируемой сильно выпуклой функции $J(u)$ такой, что $U = \{u \in R^m | J(u) \leqslant 0\}$. Тогда функция Беллмана $w(x)$ при $x \neq 0$ и сопряженная вектор-функция $\psi(x_0)$ непрерывно дифференцируемы.*

Рассмотрен случай, когда начало координат является внутренней точкой U, и далее $0 \notin U$. Для линейной задачи быстродействия приведен метод нахождения начальных условий сопряженной системы принципа максимума Понтрягина и построена функция Беллмана в случае кососимметрической матрицы.

Литература

1. *Тынянский Н.Т., Арутюнов А.В.* Линейные процессы оптимального быстродействия. - Вестник МГУ, выпуск 2, 1979, С. 32–37.

2. *Арутюнов А.В.* Об одном классе линейный процессов оптимального быстродействия. - Дифференциальные уравнения, выпуск 4, 1982, стр. 555 - 560.

ЗАДАЧА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Васильева Т.С. (Москва)

tanivasileva89@yandex.ru

Рассматривается управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{z_1} = v_1 \\ \dot{z_2} = v_2 \\ \dot{v_1} = f_1(t, z_1, z_2) + u_1 \\ \dot{v_2} = f_2(t, z_1, z_2) + u_2 \end{cases} \tag{1}$$

$t \in [t_0, T]$, допустимые управления удовлетворяют условиям: $u = (u_1, u_2), u(\cdot) \in L_\infty[t_0, T], |u_1| \leqslant 1, |u_2| \leqslant 1, u(t) \in \mathbb{R}^2$. Пусть заданы множества $M_0, M_1 \in \mathbb{R}^4$ - выпуклые компакты : $intM_0 \neq 0, intM_1 \neq 0$; $f(t, z_1, z_2) = (f_1(t, z_1, z_2), f_2(t, z_1, z_2))$ - непрерывна по совокупности переменных при $t \in [t_0, T]$ и не возрастает по z_1 и z_2.

Задача I. Найти условия, при которых существует допустимое управление $u(\cdot)$ и $t_1 \in [t_0, T]$ такое, что решение системы (1) $(z_1(t), z_2(t), v_1(t), v_2(t))$, соответствующее этому $u(\cdot)$, удовлетворяет условиям : $(z_1, z_2, v_1, v_2)|_{t_0} \in M_0, (z_1, z_2, v_1, v_2)|_{t_1} \in M_1$, то есть система (1) управляема из M_0 в M_1 за конечное время.

Система (1) эквивалентна системе дифференциальных уравнений (2):

$$\begin{cases} \ddot{z_1} = f_1(t, z_1, z_2) + u_1 \\ \ddot{z_2} = f_2(t, z_1, z_2) + u_2 \end{cases} \tag{2}$$

для которой рассматривается следующая краевая **задача II**: $z_1(t_0) = z_{10}, z_2(t_0) = z_{20}, z_1(t_1) = z_{11}, z_2(t_1) = z_{21}$.

Используя условия разрешимости краевой задачи II, получены условия разрешимости задачи I.

Утверждение. *Если $\dot{z}_{10}, \dot{z}_{20}$ и $\dot{z}_{11}, \dot{z}_{21}$ выбраны так, что z_{10}, z_{20} и z_{11}, z_{21} принадлежат отрезкам, лежащим в M_0 и M_1, соответственно, и найдутся допустимые управления u_1, u_2 такие, что выполняется условие:*

$|\lambda| = \left|\frac{v_2(t_1) - \xi_{21}}{\xi_{22} - \xi_{21}}\right| \leqslant 1$, *то система (1) управляема из M_0 в M_1.*

Литература

Розова В.Н. Вестник РУДН,серия математика,2012,5-8 с.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ватолкин М.Ю. (Ижевск)

pmi@istu.ru

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^n$ — нижняя треугольная матрица, $p_{ik} : I \to \mathbb{R}$, такая, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а $1/p_{ii}(\cdot)$ $(i \in 1 : n-1)$, $p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot)$ $(i \in 1 : n, k \in 0 : i-1)$ локально суммируемы в I. Определим квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k \in 0 : n)$ функции $x : I \to \mathbb{R}$ равенствами

$${}^{0}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{00}x,\ {}^{k}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{kk}\frac{d}{dt}({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x) + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}({}^{\nu}_{\mathcal{P}}x)\ (k \in 1 : n).$$

Квазидифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение [1]

$${}^{n}_{\mathcal{P}}x(t) = f(t), \quad t \in I \quad (f : I \to \mathbb{R}). \tag{1}$$

Его решением называется всякая функция $x : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k \in 0 : n-1)$ и почти всюду в I удовлетворяющая уравнению (1). Уравнение (1) обладает формально сопряжённым в смысле Лагранжа уравнением [1, 2] $(-1)^n\ {}^{n}_{\mathcal{R}}y(t) = g(t), \quad t \in I \quad (g : I \to \mathbb{R})$, где $\mathcal{R} = (r_{\nu k})_0^n$ — нижняя треугольная матрица,

$$r_{\nu k} = (-1)^{\nu+k} p_{n-k,n-\nu} p_{n-\nu,n-\nu}/p_{n-k,n-k}\ (k \in 0 : \nu, \nu \in 0 : n).$$

Скажем, что функция $x(\cdot)$ имеет в точке $a_i \in I$ $\mathcal{P}$-нуль кратности μ_i $(1 \leqslant \mu_i \leqslant n)$, если квазипроизводная ${}^{\mu_i}_{\mathcal{P}}x(a_i) \neq 0$, а все квазипроизводные меньшего порядка обращаются в нуль в этой точке. Однородное квазидифференциальное уравнение n-го порядка называется неосцилляционным [3] на промежутке $J \subset I$ (здесь $J = (a, b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), если общее число $\mathcal{P}$-нулей с учётом их кратностей любого его нетривиального решения на J не превосходит $n-1$.

Рассмотрим квазидифференциальные уравнения

$${}^{n}_{\mathcal{P}}x(t) + q_1(t)\,{}^{0}_{\mathcal{P}}x(t) = 0, \quad t \in J, \quad q_1 : J \to \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$(-1)^n\ {}^{n}_{\mathcal{R}}y(t) + q_2(t)\,{}^{0}_{\mathcal{R}}y(t) = 0, \quad t \in J, \quad q_2 : J \to \mathbb{R}. \tag{3}$$

Обозначим через a_1 и a_2 любые такие два последовательные $\mathcal{P}$-нуля кратности $n-1$ решения уравнения (2), что у него в интервале (a_1, a_2) нет перемен знака.

Получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ — решения квазидифференциальных уравнений (2) и (3) соответственно, и выполнены следующие условия:*

а) имеет место неравенство $q_1(t)/p_{nn}(t) \leqslant q_2(t)/p_{00}(t)$ при всех $t \in J$;

б) квазипроизводные ${}_{\mathcal{P}}^{n-1}x(a_1)$ и ${}_{\mathcal{P}}^{n-1}x(a_2)$ разных знаков, знак ${}_{\mathcal{P}}^{n-1}x(a_1)$ совпадает со знаком решения уравнения (2) в интервале (a_1, a_2).

Тогда между точками a_1 и a_2 заключён, по крайней мере, один нуль решения уравнения (3).

Теорема 2. *Пусть уравнение*

$$ {}_{\mathcal{P}}^{n}y(t) + q_2(t)\,{}_{\mathcal{P}}^{0}y(t) = 0, \quad t \in J, \tag{4}$$

неосцилляционно на промежутке J, функции $x(t)$ и $y(t)$ суть решения квазидифференциальных уравнений (2) и (4) соответственно, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям в точке a, и выполнено неравенство $q_1(t) \leqslant q_2(t)$ при всех $t \in J$.

Тогда до первого нуля функции ${}_{\mathcal{P}}^{0}x(t)$ содержится, по крайней мере, один нуль функции ${}_{\mathcal{P}}^{0}y(t)$.

Заметим, что приведённые здесь утверждения для случая квазидифференциального уравнения второго порядка получены ранее в работе [4] (см. теорему 1.1 на стр.35 и теорему 1.4 на стр. 39–40).

Литература

1. *Дерр В. Я.* Об адекватном описании сопряжённого оператора // Вестник Удмуртского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. — С. 43–63.

2. *Шин Д. Ю.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сб. 1940. Т.7. №3. — С. 479–532.

3. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 1(16). — С. 3–105.

4. *Ватолкин М. Ю.* К определению размерности спектральной проекции оператора, порождённого самосопряжённым вазидифференциальным выражением второго порядка // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2000. Вып. 3(20). — С. 31–46.

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ В МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Вахитова Е.В., Вахитова С.Р. (Воронеж)

В настоящей работе получено неравенство, связанное с весовой функцией в методе весового решета.

Метод решета является одним из немногих общих методов, позволяющих решать различные задачи теории чисел и ее приложений. Для решения бинарных аддитивных задач применяются различные варианты эратосфенова решета (Эратосфен, 276 – 196 гг. до нашей эры).

Известны методы решета В. Бруна (1918 г.), А.А. Бухштаба (1938 г.), В.А. Тартаковского (1939 г.), Б. Россера (не был опубликован автором), А. Сельберга (1949 г.), Б.В. Левина (1963 г.) и другие. Это методы решета в чистом виде, без применения весов. Известны методы весового решета П. Куна (1941 г.), Н. Энкени и Х. Ониши (1965 г.), А.А. Бухштаба (1967 г.), Х.–Э. Рихерта (1969 г.), М. Лабордэ (1979 г.), А.А. Бухштаба (1985 г.) и другие.

Будем рассматривать весовую функцию, анонсированную А.А. Бухштабом в 1985 г. [1] и изученную первым автором в работах [2] и [3].

Приведем веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г., обозначив весовую функцию через $T(X)$:

$$T(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+\frac{1}{2c-b-1}\Big\{(c-b) \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+ \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} (c - a\frac{\ln p}{\ln X}) S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+a \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1+a(g'-1)}{ag'^2}} \Big(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{1-g'z}} S_k(A_p; X^z) \Big) dz +$$

$$+\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S_k\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)+$$

$$+\frac{1}{g'}\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{\frac{a-g'}{a}}}\left(bg'-a+g'-a(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X}\right)S_k\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\Bigg\},$$

где $k\in\mathbf{N}$, $a,b,c,g'\in\mathbf{R}$, $1\leqslant b\leqslant c\leqslant a$, $2c-b-1>0$, $1\leqslant g'\leqslant a-1$, $S_k(A_d;z):=|\{a_n\in A|a_n\equiv 0\pmod d),(a_n,P_k(z))=1\}|$, $P_k(z)=\prod\limits_{p<z}p$, $A=\{a_n\in\mathbf{Z}|a_n\leqslant X\}$, $X>1$, $A_d=\{a_n\in A|a_n\equiv 0(mod\, d)\}$, $d\in\mathbf{N}$.

После проведенных преобразований в методе весового решета возникает необходимость исследования некоторой величины, зависящей от параметров весового решета.

Получим неравенство для величины $B(\alpha,a,b,c,g')$, определенной равенством:

$$B(\alpha,a,b,c,g'):=$$

$$:=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\int\limits_{\alpha a-c}^{g'}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz+\int\limits_{\frac{g'^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+$$

$$+\frac{g'}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}F(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz+$$

$$+\frac{g'}{\alpha a}\int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}F(g')\frac{(b+1-(\alpha a/g'))z-(\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz\Bigg\},\qquad(1)$$

где $\alpha,a,b,c,g'\in\mathbf{R}$, $0<\alpha<1$, $1\leqslant b<c<\alpha a$, $2c-b-1>0$, $1\leqslant g'\leqslant\alpha a-1$, $F(z)$ – функция решета.

Теорема 1. *Пусть $B(\alpha, a, b, c, g')$ определено равенством (1), $g' = 3,\ \alpha a = 8$. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$B(\alpha, a, b, c, 3) \leqslant \frac{1}{2c-b-1}\frac{e^{\gamma}}{4}\Big\{c\ln c + (8-c)\ln(8-c)+$$

$$+3,148612\,c - 0,7804296\,b - 15,828204\Big\}, \qquad (2)$$

где γ— постоянная Эйлера.

В работе [4] (теорема 1) получено неравенство при выборе $\alpha a = 6$. Для получения более точных результатов лучше применять неравенство (2), полученное при $\alpha a = 8$, но при этом вычисления будут технически более сложными.

Литература

[1] *Бухштаб А.А.* Новый тип весового решета / А.А. Бухштаб // Всесоюз. конф. "Теория чисел и её приложения". Тез. докл. – Тбилиси, 1985. – С. 22–24.

[2] *Вахитова Е.В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа / Е.В. Вахитова // Математические заметки. – 1999. – Т. 66. – N 1. – С. 38–49. (РЖ Матем. – 2000. – 00.02 – 13А.91).

[3] *Вахитова Е.В.* О приложении функций Бухштаба / Е.В. Вахитова // Математические заметки. – 1995. – Т. 57. – N. 1. – С. 121–125 (РЖ Матем. – 1995. – 7А75).

[4] *Вахитова Е.В.* О неравенстве, связанном с весовой функцией в методе весового решета / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Чебышевский сборник. – 2013. – Т. 14. – Вып. 2 (46). – С. 50 – 67.

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННОГО С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ В МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Вахитова Е.В., Вахитова С.Р. (Воронеж)

В работе рассмотрено приложение неравенства, связанного с весовой функцией в методе весового решета.

Будем рассматривать весовую функцию, анонсированную А.А. Бухштабом в 1985 г. [1] и изученную первым автором в работах [2] и [3].

М. Лабордэ [4] упростил веса Бухштаба (1967 г.), получил непрерывную форму и показал, что веса Рихерта являются частным случаем, получаются при $b = 1$ и заведомо хуже.

В работе [5] проведено сравнение метода весового решета Х.–Э. Рихерта и метода весового решета Н. Энкени и Х. Ониши. Мтод весового решета с весами Рихерта в большинстве случаев позволяет получить результат лучше, чем метод весового решета с весами Энкени и Ониши.

В работе [6] проведено сравнение весов Рихерта, Лабордэ и Бухштаба. Веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г., позволяют получить преимущества в выборе параметров весового решета в сравнении с более ранними весами Бухштаба (1967 г.) и их непрерывной формой, полученной Лабордэ (1979 г.), частным случаем которых являются веса Рихерта (1969 г., в которых, кроме того, имеется ограничение на параметр: $\alpha a \leqslant 4$).

Для последовательности A:

$$A := \{\Phi(n) | n \in \mathbf{N},\, n \leqslant x\}, \tag{1}$$

где $\Phi(n)$ — неприводимый полином с целыми коэффициентами, $x \in \mathbf{R}$, $x > 1$, имеет место теорема:

Теорема 1. *Пусть последовательность A определена условием* (1), выполнены условия на последовательность, $\alpha, a, b, c, g' \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha a - c \leqslant g'$, $1 \leqslant b < c < \alpha a$, $g' + 1 \leqslant \alpha a \leqslant 2g' + 2$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$, $r \in \mathbf{N}$, $r \geqslant 2$, $1 \leqslant g' \leqslant \alpha a - 1$, *$M$ определено условием:* $(\forall a_n \in A)\,(|a_n| \leqslant x^M)$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 \geqslant \frac{a\bar{e}^{\,\gamma}}{2}\Big(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g')\Big) \prod_p \frac{1 - \dfrac{\rho(p)}{p}}{1 - \dfrac{1}{p}} \frac{x}{\ln x}$$

для достаточно больших x, где $\nu(a_n)$ – число положительных простых множителей в разложении a_n с учетом их кратности, γ – постоянная Эйлера, $\rho(p)$ – число решений сравнения $\Phi(n) \equiv 0 (mod\, p)$, p – положительное простое число. $B(\alpha, a, b, c, g')$ определенно равенством:

$$B(\alpha, a, b, c, g') :=$$

$$:= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \frac{1}{2c-b-1} \Bigg\{ (c-b) \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} +$$

$$+ \int\limits_{\alpha a - c}^{g'} F(z) \frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz + \int\limits_{\frac{{g'}^2 \alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a} \left(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g' \alpha a} v} F(z) \frac{dz}{v - z} \right) \frac{dv}{v} +$$

$$+ \frac{g'}{2\alpha a} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1} F(g') \frac{(b+1)z - (2\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz +$$

$$+ \frac{g'}{\alpha a} \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}} F(g') \frac{(b+1-\alpha a/g')z - (\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz \Bigg\}, \qquad (2)$$

$F(z)$, $f(z)$ – функции решета.

О функциях решета можно узнать из монографии [7] (гл. 6 и 7).

Теорема 1 доказана в работе [8] (гл. 2, § 6, теорема 4, с. 102).

Осуществим теперь выбор параметров весового решета и найдем числовое значение величины $\frac{a\bar{e}^{\gamma}}{2}\Bigg(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g')\Bigg)$.

При этом будем применять теорему 1 из работы [9].

Теорема 2. *Пусть $\Phi(n)$ – неприводимый полином степени g с целыми коэффициентами, n, $g \in \mathbf{N}$, $\rho(p)$ – число решений сравнения $\Phi(n) \equiv 0 (\bmod\, p)$, p – положительное простое число, x –*

достаточно большое положительное число. Тогда имеет место оценка:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(\Phi(n))\leqslant g+1}} 1 \geqslant K_1 \prod_p \frac{1-\dfrac{\rho(p)}{p}}{1-\dfrac{1}{p}}\,\frac{x}{\ln x}$$

для $x \geqslant x_0$ $(x_0 = x_0(\Phi))$, *где* $K_1 = 0,9583$ при $g = 1$, $\nu(\Phi(n))$ – число положительных простых множителей в разложении $\Phi(n)$ с учетом их кратности.

Применяя веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г., уже при $\alpha a = 6$ при $g = 1$ получено числовое значение K_1 лучше, чем было получено ранее первым автором [10] с помощью метода весового решета Бухштаба (1967 г.) в непрерывной форме Лабордэ при $\alpha a = 8: K_1 = 0,92$ при $g = 1$, $K_1 = 0,87$ при $g = 2$, $K_1 = 0,88$ при $g \geqslant 3$.

Отметим, что в 1962 г. Б.В. Левин [11] доказал, что существует бесконечно много $(g+\delta)$ - почти простых чисел, являющихся значениями неприводимого полинома $\Phi(n)$ степени g $(g \in \mathbf{N})$ с целыми коэффициентами, где $\delta = 1,\ 1 \leqslant g \leqslant 4,\ \ \delta = 2,\ 5 \leqslant g \leqslant 12,$ $\delta = 3,\ 13 \leqslant g \leqslant 28,\ \delta = 4,\ 29 \leqslant g \leqslant 417.$

В 1967 г. А.А. Бухштаб [12] доказал, что существует бесконечно много $(g+1)$-почти простых чисел для любого натурального g.

В 1969 г. Х.–Э. Рихерт [13] получил оценку с $K_1 = 2/3$.

В 1978 г. Х. Иванец [14] получил оценку с $K_1 = \frac{1}{154}$ и $\nu(\Phi(n)) \leqslant g$, $g = 2$ для $\Phi(n) = an^2 + bn + c$, $a > 0$, $c \equiv 1(mod\ 2)$ (в частности, $\Phi(n) = n^2 + 1$).

Литература

[1] *Бухштаб А.А.* Новый тип весового решета / А.А. Бухштаб // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. – Тбилиси, 1985. – С. 22–24.

[2] *Вахитова Е.В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа / Е.В. Вахитова // Математические заметки. – 1999. – Т. 66. – N. 1. – С. 38–49 (РЖ Матем. – 2000. – 00.02 – 13А.91).

[3] *Вахитова Е.В.* О приложении функций Бухштаба / Е.В. Вахитова // Математические заметки. – 1995. – Т. 57. – N. 1. – С. 121–125 (РЖ Матем. – 1995. – 7А75).

[4] *Laborde M.* Buchstabs sifting weights / M. Laborde // Mathematika. – 1979. – V. 26. – P. 250–257.

[5] *Diamond Harold G.* A comparison of two sieve / G. Diamond Harold, H. Halberstam // Period. Math. hang. – 2001. – V. 43. – N. 1–2. – P. 1–13 (РЖ Матем. – 2002. –02.05. – 13A. 96).

[6] *Вахитова Е.В.* Сравнение весовых функций в методе весового решета / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Ученые записки Орловского государственного университета. Труды X Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Волгоград, 10 – 16 сентября 2012 г. – Орел: Изд-во ОрлГУ, 2012. – № 6. – Ч. 2. – С. 51 – 59.

[7] *Halberstam H.* Sieve methods. / H. Halberstam, H.–E. Richert – London: Acad. Press, 1974. – 364 P.

[8] *Вахитова Е.В.* Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е.В. Вахитова. – М.: Изд–во МПГУ "Прометей", 2002. – 268 с. (РЖ Матем. – 2003. – 03.11-13А.115К).

[9] *Вахитова Е.В.* О неравенстве, связанном с весовой функцией в методе весового решета / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Чебышевский сборник. – 2013. – Т. 14. – Вып. 2 (46). – С. 50 – 67.

[10] *Вахитова Е.В.* О некоторых приложениях одномерного решета с весами / Е.В. Вахитова // Математические заметки. – 1992. – Т. 51. – N. 6. – С. 139–141 (РЖ Матем. – 1993. – 2А85).

[11] *Левин Б.В.* Распределение "почти простых" чисел в целозначных полиномиальных последовательностях / Б.В. Левин // ДАН Узб. ССР. – 1962. – Т. 11. – С. 7–9.

[12] *Бухштаб А.А.* Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета / А.А. Бухштаб // УМН. – 1967. – Т. 22. – N. 3 (135). – С. 199–226.

[13] *Richert H.–E.* Selbergs sieve with weights / H.–E. Richert // Mathematika. – 1969. – V. 16. – N. 31. – P. 1–22.

[14] *Iwaniec H.* Almost-primes represented by quadratic polynomials / H. Iwaniec // Invent. math. – 1978. – V. 47. – P. 171–188.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ

Вервейко Н.Д. (Воронеж), Ноаман Салам Абдулкхалек (Диала, Ирак)

Исследование задач течения микроструктурной вязкой жидкости при её вращательном течении в зазорах сводится к решению обыкновенного линейного с переменными коэффициентами дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производном [1]. Приближенное решение такой задачи приводит к введению пограничного слоя и разделению решения на внутренее (погранслойное) и внешнее (вне пограничного слоя).

Дискретизация исследуемой задачи методом конечных элементов с выбором линейных базисных функции [2] невозможна в силу высокого порядка дифференциального уравнения и наличия малого параметра.

Одним из возможных методов предлагается использовать не линейные базисные функции вида $\Psi_i = \exp\left(-\left(x - x_i\right)/\sigma\right)$, где σ — малый параметр. Изменение параметра σ в зависимости от шага Δ дискретизации позволяет: 1) выделять область существенного изменения решения (пограничный слой) и не детализировать решение в области его гладкого поведение [3];

2) рекуррентно вычислять производные от базисной функции $\Psi_i^k\left(x\right) = \left(-1/\sigma\right)^k \ \Psi_i\ \left(x\right)$ — что приводит к алгоритмическому закону построения матрицы A системы линейных алгебраических уравнений $Ay = b$ используя метод Галёркина.

Литература

1. Быкова М. И , Вервейко Н. Д. , Сумец П.П. , Шашкина С. А. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры. Воронеж , Из-до. ВГУ. — 2010. — 192 с.

2. Митчел, Уэйт МКЭ решения уравнений в частных производных . М.: Мир.

3. Блаттер. Вейвлет – анализ. Основы теории. М.: техносфера. — 2006. — 271с.

НЕЯВНАЯ КОНЕЧНО - РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РАСЧЕТА ОДНОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ И ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ

Вервейко Н.Д., Егоров М.В. (Воронеж)

ver38@mail.ru, egorovmv89@mail.ru

Численное решение задач нестационарного течения сжимаемого газа осложнено нелинейностью самих уравнений газовой динамики и возникающей в ходе вычислений неустойчивостью. Неустойчивость расчетов обусловлена как нелинейностью, так и самими типами конечно - разностных схем. Известные методы повышения устойчивости газодинамических расчетов состоят в привлечении искусственных диссипативных слагаемых и разглаживании решений на каждом временном слое, пересчете решений со слоя на слой и др.

Авторы предлагают в сами уравнения газовой динамики включить слагаемые, обусловленные временем релаксации газодинамических параметров в элементарном объеме. Уравнения движения вдоль линии тока показывают диссипативность таких слагаемых. Повышение порядка производных по времени и смешанных уравнений в частных производных приводит к неявным конечно - разностным схемам, устойчивость которых обусловлена временем релаксации.

Литература

Самарский А. А. Теория разностных схем. / А. А. Самарский. - М.: Наука, 1977. - 657 с.

Вервейко Н. Д., Быкова М. И., Шашкина С. А., Сумец П. П. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры. /М.: Издательско - полиграфический центр ВГУ, 2010. 191 с.

V. I. Prosvetov, P. P. Sumets, N. D. Verveyko. Modeling of flow of medium with homogenoius microstructure // International journal of mathematical models and methods in applied sciences Issue 3, Volume 5, 2011 - pp. 508-516.

Елизарова Т. Г. Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости. М.: Изд. МГУ. 2005. - 224 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ Xu

Вишневская Н.И. (Воскресенск)

01nadya1984@mail.ru

Работа посвящена исследованию функций гипергеометрического типа, связанных с решениями модели Калоджеро - Сазерленда. Функция следа этих решений в простом случае является гипергеометрической функцией Гаусса. Обобщение этого результата для функций следа при $n > 2$ привело к новому семейству гипергеометрических функций многих переменных, дифференциальные свойства и интегралы которых описываются интегралами по некоторым траекториям от степенных функций с иррациональными (или комплексными) показателями.

В случае $n = 2$, след может быть представлен с помощью гипергеометрической функции Гаусса

$$E(z_1, z_2) = \frac{z_1^{\lambda_1+1} z_2^{\lambda_2}}{z_1 - z_2} F(\mu + 1, -\mu; \lambda_2 - \lambda_1, \frac{z_2}{z_2 - z_1})$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ - комплексные константы.

В настоящей работе изучается функция следа при $n = 3$, которая представляется рядом

$$\chi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta; x, y, z) = \sum_{m,n,k}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m+n}(\alpha_2 - m)_k(\alpha_3)_{n+k}}{(\beta)_{n+k} m! n! k!} x^m y^n z^k,$$

где $(a)_n = a(a+1)...(a+n-1)$. Далее изучаются аналитические свойства этой функции, которые можно представить следующим образом

$$\chi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta; x, y, z) =$$

$$= (1-z)^{-\alpha_2}(1-y)^{-\alpha_1}\chi_A(\alpha_1, \alpha_2, \beta - \alpha_3; \beta; \frac{x(1-z)}{1-y}, \frac{y}{y-1}, \frac{z}{z-1}) =$$

$$= (-x)^{-\alpha_1}(1-z)^{-\alpha_3}\chi_A(\alpha_1, \beta - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3; \beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x(z-1)}, \frac{z}{z-1}) =$$

$$= (1-z)^{\beta-\alpha_2-\alpha_3}(xz - x - y)^{-\alpha_1} \times$$

$$\times \chi_A(\alpha_1, \beta - \alpha_1 - \alpha_2, \beta - \alpha_3; \beta; \frac{1}{x+y-xz}, \frac{y}{x+y-xz}, z)$$

Для функции следа при $n = 4$ имеют место аналогичные соотношения.

Литература

1. И.Н.Бернштейн,*Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами*, Функц.анализ и его приложения, т.5, вып. 2, 1971, 1–16.

2. M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov. *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Li Algebras*, Inventiones math., 37,1976, 93–108.

3. Xiaoping Xu,*Etingof trace, path hypergeometric functions and integrable systems*, Institute of Mathematics, Academy of Mathematics

and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 10080, P.R.China.

МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. (Калуга)

losh-elena@yandex.ru

Показано, что использование матричного метода позволяет предложить схему для расчета решения краевых задач теории переноса на геометрическом графе. Ранее были введены матрицы P и R, дающие связь потенциалов и потоков на концах ребра, соответствующие первой и второй краевым задачам теории переноса.

В данном сообщении введена матрица K, устанавливающая зависимость между потенциалом и потоком в начальной точке ребра, и потенциалом и потоком в конечной точке. Это позволяет ввести вектор-столбец $V(x_1)$ из потенциала и потока и, используя матрицу K, найти соответствующий вектор $V(x_2)$ в конечной точке ребра. Далее применив условия непрерывности потенциала и потока, получена формула для последовательно соединенных элементов. Показано, трансформационные условия в точках контактов могут быть значительно усложнены. Например, поставлены условия неидеального контакта с разрывом потенциала или наличие источников. В рамках предложенного метода изучен случай параллельного соединения ребер и показано, что в этом случае неизбежно приходим к матрице P. Для матрицы P при параллельном соединении элементы матриц можно получить простым сложением.

Предложенные методы далее применены к случаю контакта трех и более ребер, составляющих геометрический граф. Введен вектор-столбец B, учитывающий условие суммарной непрерывности потока. Показано, что параметры деления дают возможность построить матрицу P для графа, которая определяет решение первой краевой задачи.

Доказано, что свобода в выборе параметров деления дает возможность замкнуть определенное количество ребер и образовать циклы. В работе при представлении решений краевых задач использован формальный аппарат теории Берса.

Метод дает возможность решения нестационарных задач, ибо основные уравнения, используемые при построении решений с помощью ряда Фурье, отличаются только значением параметра во всех результатах.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ К ГРАНИЦЕ ТРЕЩИНОЙ

Глушко А.В., Мальцева Е.О., Рябенко А.С. (Воронеж)
kuchp2@math.vsu.ru

Рассматривается задача, описывающая стационарное распределение температуры в двумерном однородном материале с трещиной. Уравнение стационарного распределения поля температуры $u(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = 0, \; x \in \mathbb{R}^2_+ \setminus l. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R}^2_+ = \{x \mid -\infty < x_1 < \infty; x_2 > 0\}$, разрез $l = \{x \mid x_1 = \pm 0, x_2 \in [0;1]\}$ описывает трещину по отрезку $[0;1]$ оси ординат. Граничное условие на части границы, не являющейся трещиной, задано следующим образом

$$u(x_1,x_2)\mid_{x_2=0} = \psi(x_1), \; x_1 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Условия сопряжения на трещине $x \in l$ имеют вид

$$u(+0,x_2) - u(-0,x_2) = q_0(x_2), \frac{\partial u(+0,x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(-0,x_2)}{\partial x_1} = q_1(x_2). \tag{3}$$

Пусть функции $q_i(x_2) \in C^2[0;1]$, $i = 0,1$; $\psi(x_1) \in C^2(-\infty;0] \cap C^2[0;\infty)$, тогда решение задачи (1)-(3) $u(x_1,x_2)$ есть ограниченная на множестве $B_R^+ = \{x \mid |x| < R, x_2 > 0\}$ при любом $R > 0$ функция, тепловые потоки $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ имеют асимптотические представления в окрестности трещины вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{q_0(x_2)}{2\pi} \cdot \frac{x_2 - 1}{x_1^2 + (x_2-1)^2} - \frac{q_0'(x_2)}{4\pi} \cdot \ln\left(x_1^2 + (x_2-1)^2\right) + R_1(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{q_1(x_2)}{4\pi} \cdot \ln\left(x_1^2 + (x_2-1)^2\right) - \frac{q_0(x_2)}{2\pi} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2-1)^2} + R_2(x_1,x_2).$$

Здесь функции $R_1(x_1,x_2)$ и $R_2(x_1,x_2)$ ограничены в $B_R^+ = \{x \mid |x| < R, x_2 > 0\}$ при любом $R > 0$.

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В СМО M/M/1 С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ И СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА[1]

Головко Н.И., Бондрова О.В. (Владивосток)

bondrova.ov@dvfu.ru

Основной задачей теории массового обслуживания (ТМО) является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания. Следовательно, в ТМО возникают задачи оптимизации определенного уровня обслуживания при минимальных затратах, связанных с простоем обслуживающих устройств. Для решения указанных задач оптимизации часто используются математические модели систем массового обслуживания (СМО). В данной работе рассматриваются модель СМО с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором, с экспоненциальным законом обслуживания интенсивности μ. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток интенсивность которого $\lambda(t)$ является скачкообразным процессом, изменяющимся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа плотность распределения $\varphi(x) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx\}/dx$. Предполагается условие отсутствия перегрузок $b < \mu$.

В работе введены обозначения: $f(x)$ – стационарная плотность λ, где λ – процесс $\lambda(t)$ в стационарном режиме; ν – число заявок в стационарном режиме; $q_k(x), k \geqslant 0$ – совместное стационарное распределение числа заявок и интенсивности входного потока в стационарном режиме.

В данной работе для $q_0(x)$ разработан эффективный вычислительный метод расчета; исследованы стационарные условия нормировки; получена стационарная производящая функция; вычислены стационарные характеристики числа заявок в СМО, такие как сумма сходящегося ряда и моменты числа заявок.

Литература

Клейнрок Л. Теория массового обслуживания – М.: Машиностроение. 1979.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В СМО СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ, БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ И РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Головко Н.И., Крылова Д.С. (Владивосток)
krylovadiana@mail.ru

Модель системы массового обслуживания (СМО), рассматриваемая в работе, применяется при исследовании функционирования библиотечных серверов с резервным прибором. При этом возникает ряд вопросов: существования, единственности стационарного режима и некоторые другие.

В работе рассматривается СМО с бесконечным накопителем и двумя приборами: основным с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ и резервный-интенсивности Δ, который включается, если число заявок в СМО станет больше или равным ν. На вход данной СМО поступает дважды стохастический (ДС) пуассоновский поток (ПП), интенсивность которого $\lambda(t)$ является скачкообразным процессом, изменяющимся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. Предполагается условие отсутствия перегрузок, $b < \mu + \Delta$. Значения процесса в точках разрыва справа не зависят от значений процесса в точках разрыва слева и имеют плотность распределения $\varphi(x)$. В работе проводится анализ существования стационарного режима данной СМО по числу заявок в СМО.

В результате исследований было получено: формальное представление стационарной функции распределения числа заявок; доказано существование и единственность стационарного режима; получено необходимое условие существования стационарного режима.

Литература

Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания//Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1979.Е.9. - 110с.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕННЫХ АМПЛИТУД

Головцов А.В., Мокейчев В.С. (Казань)
Golovtsov@mail.ru, Valery.Mokeychev@ksu.ru

Речь пойдёт о нахождении вещественных, постоянных коэффициентов в волновом уравнении $U_{tt}^{(2)} + b_1 U_t^{(1)} + b_2 U_{xx}^{(2)} + b_3 U_x^{(1)} + b_4 U = 0$, по данным $U(t_j, x_k) = A_{j,k}$, где $U_a^{(r)}$ — производная порядка r по a.

Если использовать произвольно фиксированную волну $U(t,x)$, то решить поставленную задачу практически невозможно. Поэтому считаем, что известны амплитуды $A_{j,k}$ элементарной волны $U(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$, где φ не зависит от x, ψ не зависит от t. Однако и в этом случае при произвольно выбранных $t_j,\ x_k$ задача трудно решаемая в практическом смысле. Решая поставленную задачу, следует установить минимальное количество данных. Поэтому считаем известными $\varphi(jT)\psi(0) = A_{j,o}, j = 0,1,2,3,\ \varphi(0)\psi(kT_1) = A_{0,k}, k = 0,1,2,3$, где $T > 0,\ T_1 > 0$ — фиксированные числа. Разделение переменных ведёт к задачам

$$\varphi^{(2)} + b_1\varphi^{(1)} - \lambda\varphi = 0,\ \varphi(jT)\psi(0) = A_{j,0}, j = 0,1,3,4, \tag{2}$$

$$b_2\psi^{(2)} + b_3\psi^{(1)} + (b_4+\lambda)\psi 0,\ \psi(kT_1) = A_{0,k}, k = 0,1,2,3, \tag{3}$$

где λ не известно. В случае $b_2 \neq 0$ задача (3) только обозначениями отличается от задачи (2). Поэтому наибольшее внимание уделяется задаче (2).

Теорема 1. $\varphi(t)\psi(0) = C_1\exp(\mu_1 t) + C_2\exp(\mu_2 t)$, *где* $\mu_1 \neq \mu_2$ — *вещественные, тогда и только тогда, когда уравнение* $y^2(A_{1,0}^2 - A_{2,0}A_{0,0}) - y(A_{2,0}A_{1,0} - A_{3,0}A_{0,0}) + (A_{2,0}^2 - A_{3,0}A_{1,0}) = 0$ *имеет положительные корни* $y_1 \neq y_2$ *и* $|A_{0,0}| + |A_{1,0}| \neq 0$; *при этом* $b_1 = -T^{-1}\ln(y_1y_2),\ -\lambda = T^{-2}\ln y_1 \ln y_2,\ C_1 = (A_{1,0} - y_2A_{0,0})/(y_1 - y_2),\ C_2 = (A_{1,0} - y_1A_{0,0})/(y_2 - y_1)$.

Если все коэффициенты в уравнении для y — нули, то существует не счётное множество волн, что соответствует хаосу в точке $x = 0$.

Теорема 2. $\varphi(t)\psi(0) = (C_3t + C_4)\exp(\mu_1 t)$, *где* μ_1 — *вещественное, тогда и только тогда, когда уравнение* $\tau^2A_{0,0} - 2\tau A_{1,0} + A_{2,0} = 0$ *имеет корень* $\tau > 0,\ |A_{0,0}| + |A_{1,0}| \neq 0$, *и* $3A_{1,0}\tau^2 - 2A_{0,0}\tau^3 = A_{3,0}$; *при этом* $C_4 = A_{0,0},\ C_3 = (A_{1,0} - \tau A_{0,0})/(\tau T),\ b_2 = -2T^{-1}\ln\tau,\ -\lambda = (T^{-1}\ln\tau)^2$.

Теорема 3. *Два утверждения равносильны: 1)* $\varphi(t)\psi(0) = \big(C_5\cos(\beta t) + C_6\sin(\beta t)\big)\exp(\alpha t)$,

$\alpha,\ \beta \neq 0$ — вещественные; 2) уравнение $y^2(A_{1,0}^2 - A_{2,0}A_{0,0}) = A_{2,0}^2 - A_{1,0}A_{3,0}$ имеет корень $y > 0$; если $|A_{0,0}| + |A_{1,0}| \neq 0$, то при $A_{2,0} \neq 0$ выполняется $|(A_3 + A_1 y^2)/(2A_2)| \leqslant 1$, при $A_{2,0} = 0$ выполняется $|A_0 y/(2A_1)| < 1$; если $A_{0,0} = 0, A_{1,0} = 0$, то $A_{2,0} = 0, A_{3,0} = 0$, и волна имеет вид $C\sin(\pi q t/T)$, где $q \neq 0$ — целое число; при этом $b_1 = -(2/T)\ln y,\ -\lambda = b_1^2 + \beta^2$.

В случае $\beta = \pi q/T$ для вычисления C_6 необходимо $\varphi(t_4)\psi(x_0) = A_4,\ \sin(\pi q t_4/T) \neq 0$.

Не выполнение предположений теорем 1 — 3 означает, что либо переменные t, x в исходном дифференциальном уравнении не разделяются, либо они разделяются, но в (1) хотя бы один коэффициент не постоянен.

Итак, выделены случаи, можно вычислить $b_1,\ -\lambda$. Если $b_2 \neq 0$, то аналогично выделим случаи, когда можно вычислить $(b_4 + \lambda)/b_2,\ b_3/b_2$, а значит и b_2, b_3, b_4, λ, ибо один из коэффициентов b_2, b_3, b_4 известен. Очевидно, что замена $U(t,x) = \exp(-b_1 t/2 - b_3 x/(2b_2))V(t,x)$ приведёт к уравнению $V_{tt}^{(2)} + b_2 V_{xx}^2 + (b_4 - b_1^2/4 - b_3^2/(4b_2))V = 0$. В частности, если $b_2 < 0,\ b_4 - b_2^2/4 - b_3^2/(4b_2) = 0$, то $U(t,x)$ имеет вид $\exp(-b_1 t/2 - b_3 x/(2b_2))\big(F(t - x b_2^{1/2}) + G(t + x b_2^{1/2})\big)$. Меняя F и G, получим все волны, а не только элементарные.

ОБ УСТОЙЧИВОМ СЕКВЕНЦИАЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА[1]

Горшков А.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

tiger-nn@mail.ru, m.sumin@mail.ru

Благодаря неустойчивости задач оптимизации по отношению к возмущению их исходных данных и наследуемой неустойчивости классических условий оптимальности формальные оптимальные “возмущенные” элементы могут, вообще говоря, сколь угодно сильно отличаться как по аргументу, так и по функции от их “точных” оптимальных аналогов. Сказанное в полной мере относится к рассматриваемой задаче оптимального управления вида

$$f(u) \to \min,\ g_1(u)(x,t) = 0,\ g_2(u)(x,t) \leqslant 0,\ (x,t) \in Q,\ u \in \mathcal{D}, \quad (1)$$

где целевой функционал $f : \mathcal{D} \to R^1$ является строго равномерно выпуклым на $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(Q_T) : u(x,t) \in U$ п.в. на $Q_T\} \subset$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00199-а).

$L_p(Q_T)$, $g_1(u)(x,t) \equiv \langle \varphi_1(x,t), z[u](x,t) \rangle$, $\varphi_1 \in C(Q)$, $g_2(u)(x,t) \equiv \varphi_2(x,t,z[u](x,t))$, $\varphi_2 : Q \times R^1 \to R^1$ – непрерывная выпуклая по z при всех $(x,t) \in Q$ функция, $Q \subset \overline{Q}_T$, $Q = \mathrm{cl}\ \mathring{Q}$, $U \subset R^1$ – выпуклый компакт, $z[u]$ – решение класса $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ третьей начально-краевой задачи для дивергентного параболического уравнения $z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t) z_{x_j}) + a(x,t)z + u(x,t) = 0$, $z(x,0) = v_0(x)$, $x \in \Omega$, $\frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x,t)z = w_0(x,t)$, $(x,t) \in S_T$, в которой $a \in L_p(Q_T)$, $\sigma \in L_r(S_T)$, $v_0 \in C(\overline{\Omega})$, $w_0 \in L_r(S_T)$ – заданные функции. В докладе обсуждается как может быть преодолена указанная выше неустойчивость в задаче (1) с фазовыми ограничениями и получен так называемый устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина на пути применения в ней идеологии двойственной регуляризации. Основными при этом являются соображения, связанные: 1) с погружением допустимого множества управлений $\mathcal{D}$ в рефлексивное (лебегово) пространство $L_p(Q_T)$ и принадлежностью коэффициентов a и σ, w_0 начально-краевой задачи соответственно пространствам $L_p(Q_T)$ и $L_r(S_T)$ с достаточно большими показателями p, $r > 2$; 2) с использованием рефлексивного (лебегова) пространства $L_s(Q)$ с показателем $s \in (1,2)$ в качестве пространства образов задающих фазовые ограничения операторов.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ „СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ“

Горюнова И.С. (Москва)

irina_g90@mail.ru

Для того, чтобы экономическая система была работоспособной, нужно, чтобы реализующееся состояние ее оказалось сбалансированным по материальным потокам продуктов, т. е. чтобы суммарное производство (предложение) каждого продукта было не меньше его суммарного потребления (спроса) или чтобы было в точности равно ему. В этом случае состояние системы называется экономическим равновесием, а цены, при которых установилось равновесие, называются равновесными.

С помощью теорем теории накрывающих отображений получены достаточные условия существования положения равновесия в модели „спрос-предложение“, а также изучены их свойства для некоторых видов функций полезности и производственных функций.

Определение 1. Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $S : X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$S(B_X(r, x)) \supseteq B_Y(\alpha r, S(x)) \ \ \forall r \geqslant 0, \ \forall x \in X.$$

Теорема 1. Пусть пространство X полно, а S, $D : X \to Y$ — произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что

$$S(\xi) = D(\xi), \quad \rho_X(\xi, x_0) \geqslant \rho_Y(S(x_0), D(x_0))/(\alpha - \beta). \tag{1}$$

Литература

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. N 2.

О СХОДИМОСТИ И ЛОКАЛИЗАЦИИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ С "J_k- ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ"[1]

Графов Д.А. (Москва)

grafov.den@yandex.ru

Пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geqslant 3$, разложена в кратный интеграл Фурье $g(x) \sim \int \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi$, и $J_\alpha(x; g)$, $\alpha \in \mathbb{R}^N_+$, — собственный интеграл Фурье.

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, N\}$, $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset M$, $j_1 < \cdots < j_k$, $1 \leqslant k \leqslant N - 2$, и пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}^k_+$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \ldots, k$. Символом $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N_+$ обозначим N-мерный вектор у которого компоненты α_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) обобщенных вещественных лакунарных последовательностей (данное понятие было введено в работе [1]), т.е. для $j \in J_k$: $\alpha_j = \alpha_j^{(\lambda_j)}$, $|\alpha_j^{(\lambda_j)} - n_j^{(\lambda_j)}| \leqslant \varrho$, где $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)} \geqslant q > 1$, $\lambda_j = 1, 2, \ldots$, ϱ – некоторая постоянная.

Обозначим $\mathbb{R}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$, и $\mathbb{T}[M \setminus J_k] = \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_k] : -\pi \leqslant x_j < \pi \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417)

Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$, — произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$, $J_2 \subset M$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$. Положим $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$ и $\widehat{W}[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{R}[M \setminus J_2]$.

Фиксируем произвольную выборку J_k из M, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, и определим следующие множества:

$$\widehat{W}(J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} \widehat{W}[J_2], \;\; W^0(J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2].$$

Теорема 1. *Для любого* $J_k \subset M$, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, $N \geqslant 3$, *и для любой функции* $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, $g(x) = 0$ *на* $\widehat{W}(J_k)$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} J_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; g) = 0 \;\; \textit{для почти всех } x \in W^0(J_k).$$

Заметим, что если мы уменьшим число "свободных" компонент в векторе $\alpha = \alpha^{(\lambda)}[J_k]$ (сведя их количество до единицы, а остальные компоненты оставив лакунарными), то, как следует из результатов [1; теорема 2] и [2; теорема 2], справедлив более сильный результат.

Теорема 2. *Для любого* $J_{N-1} \subset M$, $N \geqslant 3$, *и для любой функции* $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_{N-1}, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_{N-1}}} J_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; g) = g(x) \;\; \textit{для почти всех } x \in \mathbb{T}^N.$$

Литература

1. *Блошанский И. Л., Графов Д. А.* Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае "лакунарной последовательности частичных сумм" // Доклады РАН. 2013. Т. 450, № 3. С. 260–263.

2. *Kojima M.* On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series // Sci. Repts. Kanazava Univ. 1977. Т. 22, № 2. С. 163–177.

НЕЙТРАЛЬНОСТЬ ПОДПРОСТРАНСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА[1]

Гриднева И.В. (Воронеж)

gridneva_irina@bk.ru

Рассмотрим в пространстве Крейна $(\mathcal{K}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathcal{K}})$ нетривиальные подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ такие, что

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} \dot{+} \mathcal{M} \quad \text{прямая сумма.} \tag{1}$$

В работе исследуется вопрос: при каких условиях $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ являются нейтральными подпространствами $\mathcal{K}$? Полученные результаты сформулированы в виде следующих утверждений.

Утверждение 1 *Для слагаемых $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в разложении (1) следующие утверждения :*

(*i*) *$\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ - нейтральные подпространства;*

(*ii*) *$\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ - максимальные нейтральные подпространства;*

(*iii*) *$P_{\mathcal{L}} = P^*_{\mathcal{M}}$, где $P_{\mathcal{L}}(P_{\mathcal{M}})$ - проекция на $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ параллельная $\mathcal{M}(\mathcal{L})$.*

Утверждение 2 *Пусть A - плотно заданный симметрический оператор в пространстве $\mathcal{K}$. Если подпространство $\mathcal{L}$ в разложении (1) является A-инвариантным и $\sigma(A|_{\mathcal{L}})$ - ограниченное подмножество C_+ или C_-, то $\mathcal{L}$ - нейтральное подпространство.*

Утверждение 3 *Пусть A - ограниченный самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{K}$, для которого* 0 *лежит в непрерывном спектре $\sigma_c(A)$. Предположим, что в разложении (1) подпространство $\mathcal{L}$ - A-инвариантное и $\sigma(A|_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathbb{C}_+ \cup \{0\}$ или $\sigma(A|_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathbb{C}_- \cup \{0\}$. Тогда $\mathcal{L}$ является нейтральным тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ - семидефинитное подпространство.*

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$, то $\Gamma^* = \{\lambda : \lambda^* \in \Gamma\}$.

Утверждение 4 *Пусть A - ограниченный самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{K}$ и Γ - непустое подмножество $\mathbb{C}$. Если (1) является единственным разложением $\mathcal{K}$ в прямую сумму, в котором $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ - A-инвариантные подпространства такие, что $\sigma(A|_{\mathcal{L}}) \subseteq \Gamma$ и $\sigma(A|_{\mathcal{M}}) \subseteq \Gamma^*$, то $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ - максимальные нейтральные подпространства.*

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00102-а.

Утверждение 5 *Пусть $\mathcal{G}$ - гильбертово пространство и Γ - непустое подмножество $\mathbb{C}$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$ самосопряженные унитарные операторы J и $\mathfrak{J}$, представленные в матричной форме*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ - ограниченный $\mathfrak{J}$-самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Предположим, что $\mathcal{H}$ допускает единственное разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_+ \dot{+} \mathcal{L}_-, \quad \text{прямая сумма}, \tag{2}$$

в котором $\mathcal{L}_+$ - J-неотрицательное $\mathfrak{A}$-инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ такое, что $\sigma(\mathfrak{A}|_{\mathcal{L}_+}) \subseteq \Gamma$ и $\mathcal{L}_-$ - J-неположительное $\mathfrak{A}$-инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ такое, что $\sigma(\mathfrak{A}|_{\mathcal{L}_+}) \subseteq \Gamma^*$. Тогда $\mathcal{L}_\pm$ являются максимальными $\mathfrak{J}$-нейтральными подпространствами.

КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВУЗЕ

Гриднева И.В., Кораблина Н.А., Федулова Л.И.
(Воронеж)
gridneva_irina@bk.ru

В современной высшей школе компетентностный подход в обучении основан на реализации образовательных программ, направленных на формирование у выпускников не только конкретных знаний, умений и навыков, но и на способность применять их в профессиональной деятельности. В условиях рыночной экономики выросли требования к качеству подготовки выпускников экономических направлений, что ориентирует нас на совершенствование подготовки в высшей школе с учетом этих требований. Все значительней становится роль математической подготовки, которая является составляющей большинства дисциплин высшего профессионального экономического образования. Формирование математической компетентности будущих специалистов как составляющей его профессиональной компетентности должно лежать в основе обучения математике в вузе.

Компетентностная модель преподавания математики в университете предполагает усиление акцента на практическую реализацию математических методов и междисциплинарную интеграцию. Студенты университета должны научиться компетентно использовать полученные математические знания в профессиональных областях. С этой целью при изложении теоретического материала необходимо давать экономический смысл математических понятий (например, производной, определенного интеграла, частных производных) и рассматривать приложения высшей математики в экономике (балансовые модели, предельный анализ, эластичность функции, производственные функции).

На практических занятиях необходимо не только формировать навыки решения математических задач, но и уделять внимание задачам, связанных с реальными профессиональными ситуациями. Так, например, в курсе математического анализа одним из основных понятий является понятие предела. Большинство студентов легко постигают формальную технику вычисления пределов, а затем в результате рассмотрения различных приложений (предельный анализ экономических показателей,анализ поведения функций спроса и предложений) принимают само понятие в обобщенном смысле. Важно научить студентов переводить задачу профессиональной деятельности на математический язык и интерпретировать полученное решение на язык реальной ситуации. Например, при изучении теории вероятностей и математической статистики можно рассмотреть задачи на нахождение вероятности разорения фирмы, возврата средств предприятием банку, прибыли банков, завершения проекта фирмами, участвующими в нескольких проектах.

Использование в учебном процессе программных математических пакетов для решения профессионально ориентированных задач также способствует формированию математической компетентности студентов.

В результате правильно организованного преподавания дисциплин математического цикла студенты осознают значимость математики в их будущей профессиональной деятельности, что способствует более успешному изучению специальных дисциплин и формированию профессиональной компетентности будущих специалистов экономической сферы.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ „СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ“

Дементьева С.А. (Москва)
dementevasophia@gmail.com

При исследовании моделей, описывающих экономические процессы, важным является вопрос об условиях существования положения равновесия, то есть такого состояния экономической системы, включающей в себя несколько взаимосвязанных участников, что ни один из них не заинтересован в изменении своего экономического состояния в рамках имеющихся у него возможностей [1].

Не менее значимым этапом анализа экономических моделей является изучение свойств положения равновесия экономической системы. Данное исследование позволяет корректно определить входящие параметры экономической модели, необходимые для достижения положения равновесия и получения соответствующего вектора цен.

Также результатом данного исследования является получение достаточных условий существования положения равновесия экономической модели и условий устойчивости системы (включающей в себя функцию полезности и бюджетные ограничения).

Результаты получены как для функций общего вида, так для формализованной статической экономической модели общего равновесия в условиях совершенной конкуренции – модели Эрроу Дебре.

При решении данной задачи использовались результаты, полученные как следствия теоремтеории α - накрывающих отображений о существовании и устойчивости точек совпадения [2-3], теории чувствительности в оптимизации [4].

Литература

1 Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984

2 Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки. Докл. РАН. 2007. Т.416. N 2.

3 Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points J.Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. N 1

4 Измаилов А.Ф. Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Дерр В.Я., Ким И.Г. (Ижевск)
derr@usu.udm.ru

Задача Коши

$$\dot{x} = b'(t)x, \quad x(t_0) = x^0 \quad (\mathcal{I} = (\alpha,\, \beta),\, t,\, t_0 \in \mathcal{I},\, x,\, b : \mathcal{I} \to \mathbb{R}) \qquad (1)$$

"погружается" в пространство обобщенных функций Коломбо [1]. Ей соответствует задача в представителях

$$R'(\varphi_\mu, t) = R_b(\varphi_\mu, t)R(\varphi_\mu, t), \quad R(\varphi_\mu, t_0) = x^0. \qquad (2)$$

A_p $(p \in \mathbb{N})$ — множество финитных функций из C^∞, таких что $\int_{\mathcal{I}} \varphi(t)dt = 1, \int_{\mathcal{I}} t^k \varphi(t)dt = 0$ $(k = \overline{1,p})$, $\varphi_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{1}{\mu}\right)$, $\varphi_\mu \in A_p$, $\mathcal{R} : A_1 \to \mathbb{R}$ — "умеренная" функция из C^∞, $\mathcal{R}_b(\varphi, t) = \int_{\mathcal{I}} \varphi(t-s)db(s)$.
Если $b(t)$ — ступенчатая функция, то решение $R(\varphi_\mu, t)$ задачи (2) находится в явном виде и $x(t) \doteq \lim\limits_{\mu \to 0} R(\varphi_\mu, t)$ объявляется решением исходной задачи.

Таким образом, появляется оператор $\mathbf{T}$, ставящий в соответствие исходной задаче ее решение в виде правильной функции, определенный сначала лишь на плотном множестве. С помощью теоремы о продолжении по непрерывности $\mathbf{T}$ продолжается до оператора $\widehat{\mathbf{T}}$, определенного на всем пространстве $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ правильных функций, то есть таких функций $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, имеющих в каждой точке $t \in \mathcal{I}$ конечные односторонние пределы $x(t-)$, $x(t+)$, а также пределы $x(\alpha+)$, $x(\beta-)$. В работе сформулирована
Теорема 1. *С точностью до значений функций в точках разрыва для любой $b \in \mathbf{R}(\mathcal{I})$ существует единственное решение $x \in \mathbf{R}(\mathcal{I})$ задачи (1).*

Литература

1 *Дерр В. Я., Дизендорф К. И.* О дифференциальных уравнениях в С-обобщенных функциях. Ижевск: Известия высших учебных заведений. Математика. 1996. № 11. С. 39–49.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Дж. Аль-Обаиди (Воронеж)
alobadi@mail.ru

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $X \subseteq E$ – замкнутое подмножество, $K(E)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств E.

Определение 1. *Мультиотображение $F : X \to K(E)$ называется псевдоациклическим, если существует топологическое пространство Z и непрерывное отображение $\Theta : Z \to E$ такое, что F представимо в виде композиции*

$$F = \Theta \circ \widetilde{F},$$

где $\widetilde{F} : X \to K(Z)$ почти ациклическое мультиотображение (см. [1]).

Определение 2. *Выпуклое замкнутое множество $T \subseteq E$ называется фундаментальным для мультиотображения $F : X \to K(E)$ (или соответствующего ему мультиполя $\Phi = i - F$), если:* 1) $F(X \cap T) \subseteq T$; 2) *Из $x_0 \in \overline{co}(F(x_0) \cup T)$ следует $x_0 \in T$.*

Определение 3. *Если мультиотображение $F : X \to K(E)$ имеет такое фундаментальное (возможно, пустое) множество T, что сужение F на $X \cap T$ компактно, то F и соответствующее ему мультиполе $\Phi = i - F$ называется фундаментально сужаемыми (на T).*

Определение 4. *Фундаментальное множество T мультиотображения $F : X \to K(E)$ такое, что $X \cap T \neq 0$ и сужение F на $X \cap T$ компактно, называется существенным. Мультиотображение $F : X \to K(E)$, обладающее существенным фундаментальным множеством, называется вполне фундаментально сужаемым.*

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке.

Теорема 1. *Пусть U – выпуклое ограниченное подмножество E; однозначное отображение $f : \bar{U} \to E$ и псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ вполне фундаментально сужаемы на существенное фундаментальное множество T и не имеют неподвижных точек на ∂U. Пусть, далее*

1) $\gamma_T(i - f, \bar{U}) \neq 0$, *где γ_T обозначает топологическую степень поля $i - f$ относительно T;*

2) $\mu\varphi(x) \notin \Phi(x)$*для всех $\mu < 0$, $x \in \partial U$, где $\Phi = i - F$.*

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset U$, *где* $FixF$ *обозначает множество неподвижных точек* F.

Для уплотняющих отображений эта теорема приобретает следующий вид.

Теорема 2. *Пусть непрерывное однозначное отображение* $f : \bar{U} \to E$ *и псевдоациклическое мультиотображение* $F : \bar{U} \to K(E)$ *являются* (k, β)*-уплотняющими относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной меры некомпактности* β *и не имеют неподвижных точек на* ∂U. *Если топологическая степень* $\gamma(i - f, \bar{U}) \neq 0$ *и выполнено условие (2) предыдущей теоремы, то* $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Следствие (Теорема Шефера). *Пусть псевдоациклическое мультиотображение* $F : \bar{U} \to K(E)$ *является* (k, β)*-уплотняющим относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной меры некомпактности* β.

Пусть $\mu x \notin F(x)$ для всех $\mu > 1$, $x \in \partial U$.

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset \bar{U}$.

Следствие (Теорема Роте). *Пусть мультиотображение* $F : \bar{U} \to K(E)$ *– такое же как в следствии 3. Если*

$$F(\partial U) \subset \bar{U}, \text{то } \varnothing \neq FixF \subset \bar{U}.$$

Литература

1. Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский, Многозначный анализ и операторные включения, Итоги науки и техники. Соврем. пробл. мат. Новейшие достижения. Т. 29, ВИНИТИ, М., 1986, 151-211.

О ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дикарева Е.В., Телкова С.А. (Воронеж)
tsa76@inbox.ru

Рассмотрим при $[0, l]$ дифференциальные уравнения

$$\left(p_1 u_1''\right)'' = f_1(x), \quad x \neq \xi, \tag{1}$$

$$-\left(p_2 u_2'\right)' = f_2(x), \quad x \neq \xi. \tag{2}$$

с дополнительными условиями склейки (3), трансмиссии (4), непрерывности производной (5), и закрепления (6):

$$u_1(\xi \pm 0) = u_2(\xi \pm 0), \tag{3}$$

$$\delta\big(p_1 u_1''\big)'(\xi) + \delta\big(p_2 u_2'\big)(\xi) = 0, \tag{4}$$

$$\big(p_1 u_1''\big)(\xi - 0) = \big(p_1 u_1''\big)(\xi + 0) = 0, \tag{5}$$

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_1(l) = u_1'(l) = 0, \quad u_2(0) = u_2(l) = 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Для любых* F_1, F_2 *из* $\mathrm{BV}[0,l]$ *задача (1)–(6) однозначно разрешима (при* $f_1 = F_1'$ *и* $f_2 = F_2'$*).*

Теорема 2. *Пусть* F_1 *и* F_2 *— первообразные функций* f_1 *и* f_2*. Тогда для любых неубывающих* F_1, F_2 *при наличии хотя бы одной точки роста* F_1 *или* F_2 *решение* $u(x) = \big\{u_1(x), u_2(x)\big\}$ *строго положительно в* $(0,l)$*, т. е.* $u_1(x) > 0$ *и* $u_2(x) > 0$ *на* $(0,l)$*. Более того, для любых двух "неотрицательных"пар* $\{f_1, f_2\}$ *соответствующие им решения* $u(x) = \big\{u_1(x), u_2(x)\big\}$ *и* $v(x) = \big\{v_1(x), v_2(x)\big\}$ *соизмеримы по конусу неотрицательных функций в* $\mathrm{C}[0,l] \times \mathrm{C}[0,l]$*, т. е.*

$$\sup_{x,s} \frac{u_i(x)}{v_i(x)} \frac{v_i(s)}{u_i(s)} < \infty \qquad \textit{при} \quad i = 1, 2.$$

Литература

1. *Покорный Ю.В., Мустафокулов Р.* Дифференц. уравнения, № 33:10.-1977.- С. 1358—1365.

2. *Покорный Ю.В.* Дифференц. уравнения, № 33:10.-1977.- С. 1358—1365.

3. *Покорный Ю.В., Белоглазова Т.В., Дикарева Е.В., Перловская Т.В.* Матем. заметки, № 74:1.-2003.- С. 146—148.

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗМУЩЕННЫХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Дорохов А.Н. (Воронеж)

dor-an@mail.ru

В F-пространстве (пространстве Фреше) приводится теорема существования неподвижных точек у сжимающих операторов, возмущённых вполне непрерывными операторами.

Определение 1. *Число* $\|x\|_\rho = \rho(x,0)$, $(x \in X)$ *назовем* ρ-*нормой элемента* x *в* F-*пространстве* X.

Теорема 1. *Пусть*

1) *в* F-*пространстве* X *оператор* A *преобразует непустое замкнутое ограниченное по* ρ-*норме* $\|x\|_\rho$ *выпуклое множество* $V \subset X$ *в себя;*

2) *оператор* A *представляется в виде:* $A = B + C$, *где* B *- сжимающий с константой сжатия* $\alpha \in (0,1)$, *а* C *- вполне непрерывный на множестве* V *операторы;*

3) *существует число* $l: \ 1 \leqslant l < \frac{1}{\alpha}$ *такое, что* $\|tx\|_\rho \leqslant lt\,\|x\|_\rho$ $(x \in X, \ t \in [0,1])$;

4) *выполняется по крайней мере одна из совокупностей условий:*

а) *сопряжённое пространство* X^* *достаточно в* X;

для любого относительно компактного множества $M \subset X$ *множество* coM *так же относительно компактно;*

б) $\forall x \in X \setminus \{0\}$ *функция* $\varphi_x(t) = \|tx\|_\rho$ *возрастает по переменной* t *в промежутке* $[0, +\infty)$;

в X *существует норма* $\|x\|$ *и числа* $a > 0$ *и* $r_0 > 0$, *такие, что*

$$a\,\|x\| \leqslant \|x\|_\rho \ \ (x \in X, \ \|x\|_\rho \leqslant r_0);$$

в) *сопряжённое пространство* X^* *достаточно в* X;

оператор A *усиленно непрерывен на множестве* V;

г) *сопряжённое пространство* X^* *достаточно в* X;

оператор A *слабо непрерывен на множестве* V;

Тогда существует элемент $x_* \in V$, *такой, что* $Ax_* = x_*$.

Литература

Бахтин И.А. Нелинейные уравнения с монотонными операторами: учебное пособие для спецкурса / И.А. Бахтин. - Воронеж: ВГПИ, 1988. - 64 с.

Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. - М.: Физматгиз, 1962. - 394 с.

К ВОПРОСУ ОБРАТИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дуплищева А.Ю. (Воронеж)
dupl_ ayu@mail.ru

Пусть X - банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейных операторов, $A, C_k \in EndX,\ k = 1, 2$.

Рассмотрим операторы $\mathcal{A} \in EndX$ и ассоциированный с ним $\mathbb{A} \in End(X \times X)$ соответственно вида

$$\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2, \tag{1}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для рассматриваемых операторов получен явный вид проекторов на ядро и образ, исследованы свойства их одновременной обратимости.

Литература

Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж.: изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ВЫЯВЛЕНИЯ ВЗАИМОБЛОКИРОВКИ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ БАЗЕ ДАННЫХ

Евстратова Е.А. (Фрязино)
katya-pill@rambler.ru

Если выбрать один усредненный узел для представления сети и установить возможность наличия глобального ребра или последовательности, которая была произведена в данной итерации выявления взаимоблокировки в этом узле, мы сможем выявить сообщение для выявления блокировки.

Дано:

L – количество конкурентно обрабатывающихся локальных транзакций за узел.

D – количество конкурентно обрабатывающихся распределенных транзакций за узел.

$D1$ – распределенные транзакции, которые находятся в состоянии «ожидания получения» (не активны и не в блокировке).

$D2$ – распределенные транзакции, которые либо активно обрабатываются, либо в блокировке.
$A + 1$ – общее количество конкурентно обрабатывающихся агентов на данном узле.
PW – возможность, что агент подвергается блокировке каждый раз во время воспроизведения данной транзакции (мы не волнуемся о том, что блокировка произойдет, но полагаем что все ожидания будут видны обнаружителю взаимоблокировок).
SW – доля D ожидающих получения сообщения
E – ожидаемое количество глобальных ребер в узле.

Блокировки, в которых мы заинтересованы, это те, которые формируют глобальные потенциальные циклы. Это подразумевает то, что мы имеем дело с ситуацией $D2 \to ... \to D1$. Возможность того, что агент, представляющий распределенную транзакцию из класса тех, которые либо активно обрабатываются, либо находятся в блокировке $D2$ для ресурса, содержащегося в распределенных транзакциях, которые ожидают получения $D1$, может быть показана как:

$$D2 \to D1 = \frac{D2 * PW * D1}{A} \tag{1}$$

Вероятность того, что агент, представляющий распределенную транзакцию в классе активных или находящихся в блокировке распределенных транзакций ($D2$), находится в блокировке с ресурсом, удерживаемым локальной транзакцией, может быть выражен в следующем:

$$D2 \to L = \frac{D2 * PW * L}{A} \tag{2}$$

Вероятность того, что агент, представляющий распределенную транзакцию, из числа тех, которые не ожидают получения ($D2$), находится в блокировке с локальным агентом, который в свою очередь находится в блокировке с ресурсом, удерживаемым распределенной транзакцией, которая ожидает получения, может быть выражено как:

$$D2 \to L \to D1 = (\frac{D2 * PW * L}{A}) * (\frac{PW * D1}{A}) \tag{3}$$

Вероятность того, то агент, представляющий распределенную транзакцию, не из числа тех, которые ожидают получения ($D2$) находится в блокировке с локальным агентом, который, в свою очередь находится в блокировке со вторым локальным агентом, который, в свою очередь, находится в блокировке с ресурсом, удерживаемым распределенной транзакцией, которая ожидает получения, может быть выражена как:

$$D2 \to L \to L \to D1 = D2 * (\frac{PW * L}{A})^2 * (\frac{PW * D1}{A}) \qquad (4)$$

Затем следует, что ожидаемое количество глобальных ребер, которые нормально происходят в данном узле может быть представлено как:

$$E = \frac{D2 * PW * D1}{A} * (1 + \frac{PW * L}{A} + (\frac{PW * L}{A})^2 + ...) \qquad (5)$$

Пример: Есть 5 транзакций, созданных в данном узле ; восемьдесят процентов всех транзакций – распределенные ; Каждая распределенная транзакция имеет 1 агента (вовлечено 3 узла) ; двадцать процентов потенциально активных агентов в блокировке ; D-SW=0,3*D Получаем:$A+1$= 4 ; L= 1 ; D= 3 ; $D2$=1 ; $D1$=2 ; A=3
$D2 = 0,133$
$D2 \to L \to D1 = 0,008$
$D2 \to L \to L \to D1 = 0,0005$
Следовательно ожидаемое количество глобальных ребер в узле $<$ 0,14
Итак, ожидаемое количество строк, отправляемое узлом будет меньше 0,07 , потому что алгоритм определения будет отправлять только половину (в среднем) глобальных ребер (или граней). Вероятность благоприпятствует короткому $D2 \to D1$ циклу. В самом деле, по предположению, почти все глобальные циклы будут длинной 2, поэтому вовлекаются только два узла.

Литература

1. *R. Obermarck* “Distributed Deadlock Detection Algorithm” ACM Trans. Database Systems,June 1982

2. *Goldman B.* "Deadlock detection in computer networks"Tech. Rep. M.I.T.-LCS TR-185, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge Sept. 1977

О МОТИВАЦИИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Егармина Н.Н. (Липецк)

При строго дедуктивном построении математики очень трудно содержательно мотивировать изучение предмета. Мотивация изучения предмета представляется нам важной, особенно в вузах, где математика не является профильным предметом.

Последствия немотивированного преподавания часто ведут к формальному усвоению материала: студенты вроде бы знают теоретический материал и умеют решать типовые задачи, но при иной формулировке начальных условий совершенно теряются. Возможно, это происходит по следующим причинам: во-первых, при дедуктивном преподавании материала не учитываются первоначальные интуитивные представления о важных идеях математики. Например, изучение предела функции в точке изучается через сложную систему неравенств. Связь с интуитивным пониманием предела в этом случае очень сложно установить. Разрушается связь с реалиями окружающего мира. Во-вторых, не осознав содержательных мотивов изучения абстрактных математических понятий, студенты заучивают их, не понимая их сути. В-третьих, упускаются из виду исторические истоки: вопросы разрешаются, но для студентов остается неясным, как они были поставлены. В-четвертых, при немотивированном преподавании может исчезнуть интерес к математике, даже если раньше он был.

Студентам может сообщаться, что изучаемый материал потребуется им в дальнейшем. Но такое обещание вряд ли помогает делу, так как оно не является содержательной мотивацией. В современных учебниках по высшей математике для студентов непрофильных специальностей стали появляться примеры приложения основных математических понятий. Но часто на лекциях для них не хватает учебного времени. Также, на наш взгляд, такой подход не обеспечивает достаточной мотивации.

Представляется целесообразным начать изменять подход в изложении математики таким образом, чтобы студенты сами чувствовали необходимость введения того или иного математического понятия, видели связи между формальными определениями и своими интуитивными представлениями, понимали несовершенство последних, и осознавали место и значение основных математических структур.

О СИСТЕМЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Ерусалимский Я.М. (Ростов-на-Дону)

ymerusalimskiy@sfedu.ru

Мы будем говорить не обо всем курсе линейной алгебры, а только о двух его разделах: «Матрица перехода от базиса к базису» и «Линейные операторы и их матрицы». Несмотря на то, что курс линейной алгебры уже достаточно стабилен и существуют канонические учебники, нам представляется, что сложившаяся система обозначений не вполне логична и недостаточна. Используемая нами система обозначений (см. [1], [2]), по нашему мнению, удачнее и приводит к лучшему усвоению студентами учебного материала.

Базис пространства $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ обозначим коротко $\{e\}$. Матрицу перехода от базиса$\{e\}$ к базису $\{f\}$ обозначаем ${}_{\{f\}}T_{\{e\}}$. Координатный столбец вектора x в базисе $\{e\}$ обозначаем $(x)_{\{e\}}$. Возникает формула перехода от базиса к базису:

$$(x)_{\{f\}} = {}_{\{f\}}T_{\{e\}} \cdot (x)_{\{e\}}. \tag{1}$$

Совершенно естественно и понятно выглядят формулы:

$${}_{\{g\}}T_{\{e\}} = {}_{\{g\}}T_{\{f\}} \cdot {}_{\{f\}}T_{\{e\}}, \tag{2}$$

$${}_{\{e\}}T_{\{e\}} = E, \tag{3}$$

$$\left({}_{\{f\}}T_{\{e\}}\right)^{-1} = {}_{\{e\}}T_{\{f\}}. \tag{4}$$

Пусть A – линейный оператор, действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y. Зафиксируем в них базисы $\{e\}$ и $\{f\}$. Матрицу оператора A в паре базисов $\{e\}$ и $\{f\}$ обозначим ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$. В координатах действие оператора на вектор выглядит следующим образом:

$$(Ax)_{\{f\}} = {}_{\{f\}}A_{\{e\}} \cdot (x)_{\{e\}} \tag{5}$$

Естественно выглядят формулы:

$${}_{\{f\}}A_{\{e\}} = {}_{\{f\}}T_{\{g\}} \cdot {}_{\{g\}}A_{\{s\}} \cdot {}_{\{s\}}T_{\{e\}}, \tag{6}$$

$${}_{\{f\}}(AB)_{\{e\}} = {}_{\{f\}}A_{\{g\}} \cdot {}_{\{g\}}B_{\{e\}}. \tag{7}$$

Ясно, что матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису$\{f\}$ это матрица тождественного оператора в паре базисов $\{e\}$ и $\{f\}$, т. е.

$$ {}_{\{f\}}T_{\{e\}} = {}_{\{f\}}E_{\{e\}}. \tag{8} $$

Литература

Владимирский Б. М., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. М. Математика. Общий курс. 4-е изд., стер.-СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 960 с.: ил.

Ерусалимский Я. М., Чернявская И. А. Алгебра и геометрия: теория и практикум. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2011. — 360 с.

О ВСПЛЕСКАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА И МИНИМАЛЬНЫХ РАЗРЕЗАХ

Ерусалимский Я.М., Куликовский А.Е. (Ростов-на-Дону)
ymerusalimskiy@sfedu.ru

Рассматриваются динамические потоки в ориентированных сетях (см. [1]). Всплеском динамического потока называют явление, состоящее в том, что в какой-то момент времени величина потока, приходящего в сток, превосходит величину максимального стационарного потока. Впервые определение всплеска дано в работе [2], там же приведены примеры сетей и потоков в них имеющих всплески. Приведенные в этой работе примеры показывают, что имеются сети, в которых всплески потоков невозможны. Нами получены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять сеть, чтобы в ней существовали динамические потоки со всплесками. Эти условия состоят в следующем: среди дуг ближайшего к стоку минимального разреза должна существовать такая дуга, для которой существует такой максимальный стационарный поток, что после «снятия его», множество путей начинающихся от этой дуги и ведущих в сток удовлетворяет двум условиям:

1. их суммарная пропускная способность больше чем пропускная способность рассматриваемой дуги ближайшего к стоку минимального разреза;

2. это множество путей асинхронно, т. е. в нем имеются пути разной длины.

Литература

Водолазов Н. Н., Ерусалимский Я. М. Нестационарный поток в сети. Вестник ДГТУ, т.9 (2009), №3, с. 402–409

Водолазов Н. Н., Ерусалимский Я. М. Максимальный всплеск в сети и максимальный объём сети. Известия вузов. Северо-Кавказский регион, ест. науки. 2010, №6. с. 9–13

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

Заболоцкий С.А. (Москва)

nugget13@mail.ru

Рассмотрим дифференциальные уравнения типа Лейна-Эмдена:

$$y'' + \frac{n-1}{r}y' \pm |y|^k \mathrm{sign}\ y = f(r), \qquad (1_\pm)$$

$$z'' + \frac{n-1}{r}z' \pm |z|^k \mathrm{sign}\ z = 0, \qquad (2_\pm)$$

где $r > 0,\ k > 1,\ n \in \mathbb{R}$, а $f(r)$ – непрерывная функция.

Теорема 1. *Пусть $n \leqslant 1$, а $f(r)$ удовлетворяет условию*

$$|f(r)| = O\left(r^{-2-\beta}\right), \quad r \to \infty,$$

где $\beta > 0$. Тогда для каждого решения $y(r)$ уравнения (1_-), стремящегося к нулю при $r \to \infty$, существует такое единственное решение $z(r)$ уравнения (2_-), что

$$|y(r) - z(r)| = O\left(r^{-\beta}\right), \quad r \to \infty.$$

Замечание. *Теорема 1 остаётся верной для пары уравнений* (1_+), (2_+).

Теорема 2. *Пусть $1 < n < 2$, а $f(r)$ удовлетворяет условию*

$$|f(r)| = O(r^{2-2n}e^{-\alpha r^{2-n}}), \quad r \to \infty,$$

где $\alpha > 0$. Тогда для каждого решения $y(r)$ уравнения (1_-), стремящегося к нулю при $r \to \infty$, существует такое единственное решение $z(r)$ уравнения (2_-), что

$$|y(r) - z(r)| = O(e^{-\alpha r^{2-n}}), \quad r \to \infty.$$

Литература

Асташова И. В. Об асимптотической эквивалентности уравнений типа Эмдена-Фаулера с растущим коэффициентом. Самара: СамГУ, 1996, том 1, с. 6

Astashova I. V. Some problems in the qualitative theory of differential equations. Journal of natural Geometry, 2003, v. 23, № 1&2, p.16-17.

Заболоцкий С. А. Об асимптотическом поведении решений одного обобщения уравнения Лейна-Эмдена и соответствующего неоднородного уравнения. Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, № 6, 895-896с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НА ГРАФЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ В УЗЛЕ И КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА[1]

Зверева М.Б., Залукаева Ж.О. (Воронеж)

margz@rambler.ru

В настоящей работе рассматривается модель колебаний системы из n струн длины l, расположенной вдоль геометрического графа-звезда. При этом предполагается, что в узле графа расположена пружина, деформация которой не подчиняется закону Гука и задается некоторой функцией. Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1, 2, \dots n) \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \psi_i(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(+0, t) = \alpha(u_1(0, t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_1(0, t) = u_i(0, t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_i(l, t) = \mu_i(t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{1}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i \in C^2[0, l]$, $\psi_i \in C^1[0, l]$, $\mu_i \in C^2[0, T]$, $\varphi_i(l) = 0$, $\psi_i(l) = 0$, $\varphi_i''(l) = 0$, $\psi_i(0) = 0$, $\psi_i'(0) = 0$. При этом

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ВГУ (№ ПСР-МГ/ 04-13), грантов РФФИ № 12-01-00392 и № 14-01-00867

функция $\alpha(x)$ непрерывно дифференцируема на всей оси и удовлетворяет условию Липшица $|\alpha(x_2)-\alpha(x_1)| \leqslant m|x_2-x_1|$. Кроме того, должны выполняться условия согласования.

Тогда функции $\mu_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots n)$, позволяющие перевести механическую систему из заданного начального состояния в заданное финальное состояние $u_i(x, T) = \varphi_i^*(x)$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x, T) = \psi_i^*(x)$, где $0 < T < l$, должны быть равными

$$\mu_i(t) = \frac{1}{2}(\varphi_i^*(t+l-T) + \widehat{\psi_i^*}(t+l-T) + \varphi_i(l-t) - \widehat{\psi}_i(l-t)).$$

Здесь первообразные первообразные $\widehat{\psi_i^*}$ и $\widehat{\psi}_i$ выбираются так, чтобы

$$\varphi_i^*(t_0) + \widehat{\psi}_i^*(t_0) - \varphi_i(t_0+T) - \widehat{\psi}_i(t_0+T) = 0,$$

где $t_0 \in [0, l-T]$.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ И КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА[1]

Зверева М.Б., Мартиросян М.М. (Воронеж)
margz@rambler.ru

В настоящей работе рассматривается задача об управлении колебаниями механической системы, состоящей из струны длины l, пружины с разными витками, прикрепленной на левом конце струны и пружины жесткости γ, прикрепленной на правом конце струны. Целью работы является предъявить в явном виде функцию, определяющую граничное управление, позволяющее перевести систему из начального состояния в заданное финальное состояние.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ВГУ (№ ПСР-МГ/ 04-13), грантов РФФИ № 12-01-00392 и № 14-01-00867

Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \\ u'_x(0,t) = \alpha(u(0,t)), \\ u'_x(l,t) + \gamma u(l,t) = \mu(t). \end{cases} \tag{1}$$

Найдем функцию $\mu(t) \in C^2[0,T]$, позволяющую перевести механическую систему из заданного начального состояния в заданное финальное состояние $u(x,T) = \varphi^*(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T) = \psi^*(x)$, где $0 < T < l$. Будем предполагать, что функция $\alpha(x) \in C^1$ и удовлетворяет условию Липшица. При этом выполняются условия согласования, а также условия $\alpha(0) = 0$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi(l) = \psi'(l) = 0$. Функции $\varphi, \varphi^* \in C^2[0,l]$, $\psi, \psi^* \in C^1[0,l]$. Тогда

$$\mu(t) = \frac{1}{2}(\gamma\widehat{\psi}^*(t+l-T) + \gamma\widehat{\psi}(l-t) - \psi(l-t) + {\varphi^*}'(t+l-T) + \psi^*(t+l-T) +$$

$$+\gamma\varphi(l-t) + \varphi'(l-t) + 2\gamma\int\limits_{l-t}^{l}\psi(\xi)d\xi + \gamma\varphi^*(t+l-T)),$$

где $\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi}^*$ —первообразные для соответствующих функций, выбираемые специальным образом.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ РАСПОЗНАВАНИЯ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Зеркалов Л.Г., Васильев Д.В., Остапов В.А.

В работе изучается ряд алгоритмов, позволяющих оптимизировать процедуры обработки и распознавания бинарных изображений. В основу методики построения алгоритмов положено понятие индекса пиксела, представляющего собой эйлерову характеристику его границы в изображении ([1])

Пусть X- бинарное изображение и $ind_X(p)$ - индекс пиксела p в X.

Алгоритм 1

Алгоритм является модификацией алгоритма комбинаторного стягивания.

По сути данный алгоритм схож с алгоритмом утоньшения изображения: он выделяет остов изображения, сохраняя хвостики и не меняя его гомотопический тип.

1. Находим пиксел $p \in X : ind_X(p) = 1, |O_X(p)| \neq 1$ (индекс пиксела равен единице, количество соседей пиксела (валентность) не равна единице).

2. Если такой пиксел найден, то удаляем его из изображения, т.е. $X = X \setminus p$ и переходим к шагу 1. Иначе конец алгоритма.

Алгоритм 2

Рекурсивный алгоритм для вычисления точной площади дыры. Для применения алгоритма важно выбрать пиксел фона $q \notin X$, лежащий в дыре.
Положим $S = 0$

1. Если выбранный пиксел q - пиксел фона, то $S = S+1, X \cup q$ (закрашиваем/добавляем к изображению пиксел фона q) и переходим к шагу 2.

2. Выполняем шаг 1 для каждого 4-соседа пиксела q.

S - площадь дыры.

Замечание

Если в качестве первого пиксела выбрать пиксел фона, не лежащий в дыре, то рекурсия будет бесконечной, если учитывать что фон не ограничен. Иначе, алгоритм посчитает площадь связного фона.

Алгоритм 2.1 (итерационный)

Пусть q_0 - пиксел фона, лежащий в дыре O.
Положим $S = 1$. Пиксели изображения X имеют метку 1, пиксели фона имеют метку 0, пиксел q_0 имеет метку 2.

1. Ищем пиксел p с меткой 2, если такой пиксел найден, то переходим к шагу 2. Иначе, конец алгоритма.

2. Среди 4-соседей пиксела p ищем пиксел q с меткой 0, если такой найден, то меняем метку пиксела q на 2, $S = S + 1$, иначе, меняем метку пиксела p с 2 на 1. Переходим к шагу 1.

Получаем: $S = |O|, q_0 \in O$

Литература

[1] *E.V. Shchepin, G.M. Nepomnyashchyi*, On topology analysis of images, Mezvuzovskii Sbornik Nauchnih Trudov.MIP, Moscow, 1990 (in Russian)

[2] *A.I. Bykov, L.G. Zerkalov, M.R. Pineda*, Index of a point of 3-D digital binary image and algorithm for computing its Euler characteristic, Pattern Recognition 32 (1999) 845-850.

[3] *A.I. Bykov, L.G. Zerkalov, F.J. Albores, M.R. Pineda*, New connected components algorithms and invariant transformations of digital images, Pattern Recognition 31 (8) (1998) 1089-1098.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЁТЕРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ПОД ЗНАКОМ ПРОИЗВОДНОЙ

Зубова С.П., Раецкая Е.В. (Воронеж)

spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается задача

$$\frac{d}{dt}Ax(t) = Bx(t), \tag{1}$$

с условием

$$x(0) = x^0 \in E_1, \tag{2}$$

где A, B: $E_1 \to E_2$; E_1, E_2 — банаховы пространства; A, B — линейные, замкнутые, dom A = dom B, $\overline{dom}\ A = E_1$; $t \in [0, T]$, T — конечно или бесконечно; A — нётеров оператор, то есть

$$E_1 = CoimA\dot{+}KerA, \quad E_2 = ImA\dot{+}CokerA, \tag{3}$$

где Coker A — дефектное подпространство для A, Coim A — прямое дополнение к Ker A в E_1, dim Ker $A < \infty$, dim Coker $A < \infty$, æ(A) =dim Ker $A-$ dim Coker A может быть $\neq 0$. $Q(A)$ — проектор на Coker A, отвечающий разложению (3), $P(A)$ — проектор на Ker A. Сужение $\tilde{A}$ оператора A на Coim $A \bigcap$ dom A имеет обратный $\tilde{A}^{-1}$; оператор $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q(A)) \in L($ Im A, Coim $A)$ называют полуобратным.

От B требуем: A^-B и $Q(A)B$ — ограниченные операторы.

Решением задачи (1), (2) называется функция $x(t) \in$ dom A, если $\exists \dfrac{d}{dt}Ax(t)$, $x(0) = x^0$ с некоторым $x^0 \in E_1$, и соотношение (1) с этим $x(t)$ есть тождество.

Постановка такой задачи отличается от постановки задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной отсутствием требования существования производных от $P(A)x(t)$, отсутствующих в уравнении.

Известно, что в случае фредгольмовского, или радиального, или секториального оператора A свойство единственности решения задачи (1), (2) с x^0 из некоторого подпространства напрямую связано со свойством регулярности пары $(A,\, B)$.

В случае нётерова оператора A такой связи нет, например, если $A,\, B \in L(R^n,\, R^m)$, $n \neq m$, то пара $(A,\, B)$ не может быть регулярной. Тем не менее задача (1), (2) может быть однозначно разрешима в некотором подпространстве.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\frac{d(I-P)x}{dt} = \big(A^{-}B(I-P)\big)\big((I-P)x(t)\big) + \big(A^{-}BP\big)\big(Px(t)\big), \\ &0 = \big(QB(I-P)\big)\big((I-P)x(t)\big) + \big(QBP\big)\big(Px(t)\big) \end{aligned} \tag{4}$$

с условиями

$$\begin{aligned} &(I-P)x(0) = (I-P)x^0, \\ &Px(0) = Px^0. \end{aligned} \tag{5}$$

Задача (4), (5) имеет единственное решение $\big((I-P)x(t),\, Px(t)\big)$ (а следовательно и задача (1), (2) имеет единственное решение $x(t) = (I-P)x(t) + Px(t)$ при x^0 из некоторого подпространства в том и только том случае, когда $\mathrm{Ker}\ (A - \lambda B) = 0$ при всех достаточно малых по модулю $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$.

Такое свойство операторного пучка называем свойством псевдорегулярности пары $(A,\, B)$.

Условие псевдорегулярности пары $(A,\, B)$ эквивалентно условию конечности длин B-жордановых цепочек для оператора A, отвечающих нулевому собственному значению.

Литература

1. Zubova S.P. Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative / Doklady Mathematics. 2009. — Vol. 80, № 2. — P. 710–712.

2. Zubova S.P. Solution of the Cauchy Problem for Two Differential-Algebraic Equations with a Fredholm Operator / Mathematical Notes .- New York, 2005 .- Vol. 41, № 10. - P. 1486-1489.

АЛГОРИТМ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Иванищева О.И. (Воронеж)
ivanischeva_ oi@mail.ru

Рассматривается алгоритм оценки статистических характеристик решения стохастической системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Математическая модель соответствует задаче о напряженно-деформированном состоянии упругой сферы из стохастически неоднородного материала и описывается стохастической системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sigma_{\theta r,r} + 2(\sigma_r - \sigma_{\theta r})/r = 0, \quad \varepsilon_{\theta r,r} + (\varepsilon_{\theta r} - \varepsilon_r)/r = 0,$$
$$\varepsilon_{\theta r} = (2\sigma_{\theta r} + \sigma_r)/9K + (\sigma_{\theta r} - \sigma_r)/6G(r),$$
$$\varepsilon_r = (2\sigma_{\theta r+\sigma_r})/9K + (\sigma_r - \sigma_{\theta r})/3G(r).$$

Здесь $G = G(r)$ случайная дифференцируемая функция, описывающая зависимость модуля сдвига материала от радиуса сферы. Очевидно, что тезорные поля напряжений и деформаций $\sigma_r(r)$, $\sigma_{\theta r}(r)$, $\varepsilon_r(r)$, $\varepsilon_{\theta r}(r)$ также являются случайными. Их источником является внутреннее и внешнее давление, которые предполагаются детерминированными

$$\sigma_r\Big|_{r=a} = -p_1, \quad \sigma_r\Big|_{r=b} = -p_2,$$

Имитационное моделирование полей $\sigma_r(r)$, $\sigma_{\theta r}(r)$ предлагается проводить с использованием метода Монте-Карло [1]. В качестве примера можно привести оценку безразмерного математического ожидания одной из компонент случайного тензорного поля напряжений

$$\tilde{\sigma}_{rN}(r) = -1 + (1-p)(d-c)N^{-1}\sum_{i=1}^{N} J(r,\eta_i)f(\eta_i)/J(b,\eta_i), \ p = p_2/p_1.$$

Здесь принято, что $G(r) = G_0(1 + r^n)$, где K/G_0 – случайная величина с законом распределения $f(x)$, $x \in (c;d)$, γ_i – стандартная случайная величина $\eta_i = c + \gamma_i(d-c)$, N – количество реализаций η,

$$J(r,\eta) = \int_a^r 4(1+x^n)\cdot x^{-4}(4(1+x^4)+3\eta)^{-1}dx.$$

При каждом значении r полученная оценка при $N \to \infty$ стремится по вероятности к математическому ожиданию. Полученное выражение для $\tilde{\sigma}_{rN}(r)$ позволяет формулировать алгоритм оценки математического ожидания при различных значениях параметров неоднородности материала, граничных условий, размеров полой сферы. Аналогичным образом можно получить оценки для дисперсий компонент тензорного поля напряжений и деформаций. Заданная точность достигается при увеличении N.

Литература

1. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. – М. : Наука, 1978. – 311 с.

ЧАСТОТНЫЕ ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Иванова Е.В. (Воронеж)
lena.ivanova.lica@yandex.ru

В комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассматривается слабо нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

где оператор $\mathbf{A}$ из банаховой алгебры End$\mathbb{H}$ является линейным и ограниченным с нормой

$$|\mathbf{A}| = sup\{|\mathbf{A}\mathbf{x}|/|\mathbf{x}| : 0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{H}\}. \tag{2}$$

Норма $\mathbf{x}$ в пространстве $\mathbb{H}$ обозначается

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}. \tag{3}$$

Оператор $\mathbf{A}$ называется гурвицевым, если его спектр лежит в открытой левой полуплоскости:

$$Re\lambda < 0, \lambda \in \sigma(\mathbf{A}). \tag{4}$$

Функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ удовлетворяет условию Каратеодори, то есть измерима по t при любом фиксированном $\mathbf{x}$ из $\mathbb{H}$ и непрерывна почти при всех t из $\mathbb{R}$, и либо удовлетворяет условию Липшица

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leqslant l|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \tag{5}$$

либо удовлетворяет условию типа Липшица

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leqslant m + l|\mathbf{x}|, \tag{6}$$

где l и m-некоторые положительные постоянные. В обоих случаях положим

$$\mathbf{f_0}(t) \equiv \mathbf{f}(t, 0), -\infty < t < +\infty \tag{7}$$

и будем предполагать, что эта измеримая векторная функция является ограниченной.

Выпишем интегральную и частотную постоянные:

$$k(\mathbf{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}(\mathbf{t})dt| \tag{8}$$

$$s(\mathbf{A}) = max_{-\infty<\theta<+\infty}|(i\theta\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}|, \tag{9}$$

где **I**-единичный оператор, $\mathbf{G}(\mathbf{t})$ - приведённая операторная функция Грина, а также основное частотное условие:

$$q_\sigma = s(\mathbf{A})l < 1. \tag{10}$$

Для нас будет важна оценка, полученная А.Г. Баскаковым:

$$c = 4d(1 + (|\mathbf{A}| + l)d), \tag{11}$$

где d определяется следующим образом:

$$d = s(\mathbf{A})/(1 - q_\sigma). \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия Липшица (5), условие (7) и основное частотное условие (10). Тогда слабо нелинейное дифференциальное уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(\mathbf{t})$. *Для этого решения справедлива оценка*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant c\|\mathbf{f_0}\|_\infty, \tag{13}$$

где постоянная с определяется формулой (11).

Если оператор $\mathbf{A}$ *гурвицев, то ограниченное решение* $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ *абсолютно устойчиво, причём*

$$|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})|e^{t\gamma} \longrightarrow 0, t \longrightarrow +\infty, \tag{14}$$

для любого другого решения $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ *уравнения (1), где* γ*-фиксированная постоянная,* $0 < \gamma < 1/d$, *и постоянная* d *определяется формулой (12).*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие типа Липшица (6). Пусть выполнено основное частотное условие (10). Пусть выполнено условие компактности : для любых отрезка* $[a, b]$ *и числа* $r > 0$ *множество* $\{\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\}$ *при* $t \in [a, b]$ *и* $|\mathbf{x}| \leqslant r$ *компактно в* $\mathbb{H}$.

Тогда слабо нелинейное дифференциальное уравнение (1) имеет имеет по крайней мере одно ограниченное решение. Для любого ограниченного решения $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ *этого уравнения справедлива оценка*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant cm \equiv r, \tag{15}$$

где постоянная c определена формулой (11), а постоянная m взята из условия типа Липшица (6).

Если оператор $\mathbf{A}$ *гурвицев, то уравнение (1) является равномерно* S*-диссипативным, где*

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H} : |\mathbf{x}| \leqslant r\}. \tag{16}$$

Литература

Перов А.И. Частотные признаки существования ограниченным решений. Дифференциальные уравнения, 2007, т. 43, № 7. — с. 896-904.

Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва, Наука, 1970.— с. 536

Баскаков А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 2003, т. 39, № 3. — с. 413-415

КРИТЕРИЙ СИЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В L^{∞}[1]

Иноземцев А.И. (Липецк)

inozemcev.a.i@gmail.com

Работа содержит критерий сильной непрерывности в пространстве L^{∞} оператор-функции $K(\varphi)x(t) = \sum\limits_{\alpha} \int_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) x(s_\alpha)\, dS_\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\alpha_j = \{0; 1\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $D_\alpha = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j]^{\alpha_j}$, k_α — измеримые по совокупности переменных $\varphi \in J$, $t_\alpha, \tau_\alpha \in D_\alpha$ функции, $J \subset (-\infty, +\infty)$, $S_\alpha \subset \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ и $dS_\alpha \subset \{d\tau_1, d\tau_2, \ldots, d\tau_n\}$. Вектор s_α получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами S_α.

Оператор-функция $K(\varphi)$ со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$, действующих в X операторов с многомерными частными интегралами вида $(Kx)(t) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(t, S_\alpha) x(s_\alpha)\, dS_\alpha$, называется сильно непрерывной, если $\lim_{\varphi \to \varphi_0} \|K(\varphi)x - K(\varphi_0)x\|_X = 0$ для любого $x \in X$. При $n = 2$ критерий сильной непрерывности оператор-функции $K(\varphi)$ в L^{∞} приведен в [1,2].

Пусть $\gamma(\varphi, t) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)|\, dS_\alpha$. Тогда справедлива

Теорема. *Оператор-функция $K(\varphi)$ сильно непрерывна в пространстве $\mathcal{L}(L^{\infty})$ тогда и только тогда, когда функция $\gamma(\varphi, t)$ ограничена в существенном на $J \times D$, для каждого ограниченного промежутка J, вектор-функция $\varphi \to k_{(0,\ldots,0)}(\varphi, t)$ непрерывна как функция со значениями в $L^{\infty}(D)$, а вектор-функции аргумента φ $\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)\, dS_\alpha$ непрерывны по φ при каждом измеримом $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$, как функции со значениями в $L^{\infty}(D)$.*

Литература

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro–Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА НАГЛЯДНОСТИ В НАЧАЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ КАК ПУТЬ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ УСВОЕНИЯ МЛАДШИМИ ШКОЛЬНИКАМИ ИЗУЧАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Исаева Е.В., Фадина Е.В. (Воронеж)

Совершенствование содержания образования закономерно требует совершенствования форм, методов, приемов и средств обучения. Создание средств обучения находится в тесной связи с развитием техники, уровнем педагогической и психологической мысли, передовым педагогическим опытом. Наряду с центральным звеном системы средств обучения (учебники, учебные пособия), большое внимание в настоящее время уделяется совершенствованию наглядных пособий. Дидактический принцип наглядности является ведущим в обучении, но его, как и в познании, следует понимать шире чем возможность зрительного восприятия. Наглядные методы обучения - это такие методы, при которых усвоение учебного материала в процессе обучения зависит от применения наглядных пособий и технических средств. Такие методы обучения необходимо использовать на уроках в начальной школе. Это правило вытекает из психологических особенностей младшего школьного возраста. Наглядные методы способствуют развитию памяти, мышления, воображения. Средства наглядности по их роли в учебном процессе школьников могут быть разделены на две большие группы: средства предметно-образной наглядности (картины, рисунки, объемные модели, натуральные объекты), которые помогают учителю опираться на чувственно воспринимаемые учащимися образы и знаковую наглядность (чертежи, схемы), нужные для передачи сложных связей, взаимосвязей и отношений. Очень важно использовать наглядные средства целенаправленно, не загромождать уроки большим количеством наглядных пособий, так как это мешает учащимся сосредоточиться и обдумать наиболее существенные вопросы. Такое применение наглядности в обучении не приносит пользы, а скорее вредит и усвоению знаний, и развитию школьников. Когда у учащихся имеются необходимые образные представления, следует использовать их для формирования понятий, для развития отвлечённого мышления учащихся. Каждое средство наглядности отличается и той специфической функцией, которую оно может выполнять в учебном процессе, обеспечивающем его высокую эффективность. В связи с различными дидактическими функциями и возможностями средств наглядности требуется их комплексное применение на уроке. Только в этом случае будет достигнута максимальная эффективность в решении каждой познавательной задачи урока. Комплексное применение различных средств наглядности объясняется и тем, что оно обеспечивает совместную работу на уровне различных анализаторов. Это положение хорошо раскрыто в одной из работ М.Н. Скаткина. "Когда предмет как известный комплекс раздражителей, объединенных в пространстве и во времени, воздействует на ряд анализаторов, происходит образование временных связей между соответствующими группами нервных клеток в коре больших полушарий, - пишет М.Н. Скаткин. - Это дает возможность организму реагировать на предмет как целое. Таким образом, совместная работа разных анализаторов служит важнейшим условием перехода от отдельных ощущений, представляющих отражение свойств предмета, к восприятию предмета в целом. Дети с помощью глазного и кожного анализаторов воспринимают свойства снега как целостную совокупность его свойств: белый цвет, холод, твердость снежинок. Держа снег в руке, дети наблюдают определенные изменения: белые снежинки превращаются в капли воды, отличающиеся по своим свойствам от снега. Такой же результат получается, если внести стакан со снегом в теплую комнату. Еще более быстро происходят эти изменения, если нагревать снег на огне. Наличие этих восприятий является необходимым условием осознания учащимися причиной связи между явлениями: "Снег от тепла тает, превращается в воду". [3] Этот простой пример показывает, как совместная работа разных анализаторов обеспечивает отражение сложных связей явлений объективного мира. Все сказанное позволяет сделать вывод о необходимости значительно шире использовать в школе такие виды и формы учебных занятий, которые открывают большой простор для совместной деятельности различных анализаторов. Эффективность применения средств наглядности в учебном процессе зависит не только от педагогически оправданного сочетания на уроке разных его видов, но и от правильного соотношения наглядности и других источников знаний, в частности слова учителя. Таким образом, наименее эффективным оказывается такое применение средств наглядности, когда они не используются в качестве одного из источников новых знаний, а служат лишь иллюстрацией к слову учителя. К сожалению, в школьной практике пока еще в наибольшей мере распространена именно эта форма сочетания слова учителя и средств наглядности. А значит, одна из задач совершенствования учебного процесса состоит в широком использовании на уроках наглядных пособий как самостоятельных источников информации. С изменением содержания образования, развитием технического процесса меняется и сама наглядность, и ее содержание (использование диафильмов сменяется использованием интерактивной доски, граммпластинки заменяют аудиодиски и т.д.), но основная функция наглядности остается неизменной - наглядность необходима (особенно в младших классах), чтобы поддерживать внимание ребенка, повышать интерес к знаниям и делать более легким процесс их усвоения. Поэтому учителю начальных классов при построении урока необходимо опираться на принцип наглядности, но умело использовать и распределять средства наглядности, чтобы урок не был перегружен наглядным материалом, а непосредственно включал его в свою систему и целостно воспринимался детьми.

Литература

Артемов В.А. Психология наглядности при обучении. - М.: Просвещение, 2004. - 345 с. 2.

Занков Л.В. Избранные педагогические труды. - 3-е изд., дополн. - М.: Дом педагогики, 1999. - 608 с.

Скаткин М.Н. Некоторые вопросы дидактики в свете учения академика И.П. Павлова о высшей нервной деятельности. М., 1952, с. 48-49

Стрезикозин В.П. Актуальные проблемы начального обучения. Пособие для учителя. М.: "Просвещение 1976. - 207 с.

Суворова Г.В. Средства обучения и методика их использования в начальной школе / Г.Ф. Суворова, Я.В. Владимиров, А.В. Полякова и др.; Под ред. Г.Ф. Суворовой. - 2 изд., перераб. - М.: Просвещение,1990. - 160 с.

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА С "ДЕШЕВЫМИ" УПРАВЛЕНИЯМИ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ МАЛОСТИ

Калашникова М.А. (Воронеж)

margarita.kalashnikova@mail.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(\overset{(1)}{v}, \overset{(2)}{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (< z(t,\varepsilon), W(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) > +$$

$$+\varepsilon^2 < \overset{(1)}{v}(t,\varepsilon), \overset{(1)}{R}(t,\varepsilon)\overset{(1)}{v}(t,\varepsilon) > +\varepsilon^4 < \overset{(2)}{v}(t,\varepsilon), \overset{(2)}{R}(t,\varepsilon)\overset{(2)}{v}(t,\varepsilon) >)\, dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} = A(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) + \overset{(1)}{C}(t,\varepsilon)\overset{(1)}{v}(t,\varepsilon) + \overset{(2)}{C}(t,\varepsilon)\overset{(2)}{v}(t,\varepsilon), \tag{2}$$

$$z(0,\varepsilon) = z^0, \tag{3}$$

где $\varepsilon \geqslant 0$, T - фиксировано, $< \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение; $\overset{(j)}{v}(t,\varepsilon)$ - управление, $\overset{(j)}{v}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r_j}$; $z(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r_0}$; $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{C}(t,\varepsilon)$, $W(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам, $W(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$ - симметрические, $W(t,0)$, $\overset{(j)}{R}(t,0)$ - положительно определены, $\overset{(j)}{C}(t,0)$ - отличны от нуля при всех $t \in [0,T]$, $j = 1,2$.

При $\varepsilon = 0$ из (1) - (3) получаем задачу с особым управлением. При помощи линейной замены переменных, осуществляется переход к линейно-квадратичной сингулярно возмущенной задаче оптимального управления с трехтемповым уравнением состояния, асимптотику которой можно найти, используя метод прямой схемы, заключающийся в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения в условие преобразованной задачи и последующим построением серии задач для нахождения членов асимптотики.

О СУЩЕСТВЕННОМ МУЛЬТИСПЕКТРЕ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ[1]

Калитвин А.С. (Липецк)

kalitvinas@mail.ru

К зависящим от параметров линейным интегральным уравнениям с частными интегралами приводятся некоторые задачи механики сплошных сред, что приводит к необходимости изучения содержащих параметры операторов с частными интегралами. Важнейшее значение при этом имеет исследование мультиспектра и частей мультиспектра линейных операторов.

Пусть $C(D)$ и $C(L^1(\Omega))$ — пространства непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций и вектор-функций со значениями в $L^1(\Omega)$, где $\Omega \in \{[a,b],[c,d],D\}$ соответственно, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $(t,s) \in D$, интегралы в дальнейшем понимаются в смысле Лебега и

$$A(\lambda)x(t,s) = c(t,s)x(t,s) - \lambda_1 \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau -$$

$$\lambda_2 \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma - \lambda_3 \int_a^b \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Теорема. *Пусть $c \in C(D)$, $l \in C(L^1([a,b]))$, $m \in C(L^1([c,d]))$ и $n \in C(L^1(D))$. Тогда существенные мультиспектры оператора $A(\lambda)$ в смысле Густавссона-Вайдмана, Като, Вольфа и Шехтера совпадают и справедливы следующие утверждения:*

1. Если $c(t,s) \neq 0$ на D, то n-нормальность, d-нормальность, фредгольмовость и нетеровость оператора $A(\lambda)$ в $C(D)$ равносильны обратимости в $C([a,b])$ и в $C([c,d])$ соответственно операторов следующих двух семейств операторов:

$$A_{\lambda_1}(s)x(t) = x(t) - \lambda_1 \int_a^b \frac{l(t,s,\tau)}{c(t,s)} x(\tau)d\tau \ (s \in [c,d]),$$

$$A_{\lambda_2}(t)y(s) = y(s) - \lambda_2 \int_c^d \frac{m(t,s,\sigma)}{c(t,s)} y(\sigma)d\sigma \ (t \in [a,b]).$$

2. Если $c(t_0,s_0) = 0$, где $(t_0,s_0) \in D$, то оператор $A(\lambda)$ — ни фредгольмов, ни нетеров, ни n и ни d-нормальный в $C(D)$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ[1]

Калитвин В.А. (Липецк)

kalitvin@gmail.com

В заметке рассматриваются интегральные уравнения вида

$$x(t,s)=\int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau+\int_a^t\int_c^d k(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma+f(t,s), \quad (1)$$

где $t\in[a,b]$, $s\in[c,d]$, $a\leqslant\tau\leqslant t$, $u\in(-\infty,+\infty)$, заданные функции $c(\tau,s)$, $k(\tau,s,\sigma,u)$, $f(t,s)$ и функция $f_t'(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, функция $k(\tau,s,\sigma,u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной u: $|k(\tau,s,\sigma,u)-k(\tau,s,\sigma,v)|\leqslant N|u-v|$.

Пусть $C(D)$ — множество непрерывных на прямоугольнике $D=[a,b]\times[c,d]$ функций с супремум нормой и X — множество функций из $C(D)$, имеющих непрерывную частную производную по t. Под решением уравнения (1) будем понимать непрерывную функцию $x(t,s)$, подстановка которой в уравнение (1) обращает уравнение (1) в тождество. Это решение $x\in X$ и оно единственно в $C(D)$. Уравнение (1) эквивалентно двумерному интегральному уравнению

$$x(t,s)=\int_a^t\int_c^d r(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma+g(t,s)\equiv(Rx)(t,s)+g(t,s), \quad (2)$$

где $r(t,s,\tau,\sigma,u) = e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi}k(\tau,s,\sigma,u)$, $g(t,s) = \int\limits_a^t e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi}f_t'(\tau,s)d\tau + f(a,s)e^{\int\limits_a^t c(\xi,s)d\xi}$. Для численного решения интегрального уравнения Урысона (2) с вполне непрерывным в $C(D)$ оператором R могут быть использованы различные методы численного решения нелинейных интегральных уравнений, в частности, метод механических квадратур. Таким образом, при численном решении уравнения (1) с частными интегралами целесообразно перейти к уравнению (2). Непосредственные вычисления удобно проводить с применением пакетов Mathcad и Scilab или с использованием языка Python.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

РОЛЬ И МЕСТО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Канатникова Н.Н. (Воронеж)

В настоящее время основной задачей школьного образования является переориентация на приоритет развивающей функции обучения. Это означает, что на первый план выходит задача интеллектуального развития личности, т.е. развитие учебно-познавательной деятельности. Пожалуй, ни один школьный предмет не может конкурировать с возможностями математики в воспитании мыслящей личности.

Уже несколько десятилетий тригонометрия, как отдельная дисциплина школьного курса математики не существует, она плавно растеклась не только в геометрию и алгебру основной школы, но и в алгебру и начала анализа.

Исторически сложилось, что тригонометрическим уравнениям и неравенствам уделялось особое место в школьном курсе. Еще греки на заре человечества, считали тригонометрия важнейшей из наук. Поэтому и мы, не оспаривая древних греков, будем считать тригонометрию одним из важнейших разделов школьного курса, да и всей математической науки в целом.[6]

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы, как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые могут и должны быть сформированы при их изучении и применены к решению большого числа задач теоретического и прикладного характера.[3]

В школьном математическом образовании с изучением тригонометрических уравнений и неравенств связаны несколько направлений:

Решение уравнений и неравенств;

Решение систем уравнений и неравенств;

Доказательство неравенств.

Анализ учебной, научно-методической литературы показывает, что

большое внимание уделяется первому и второму направлениям.[1],[2],[4] Требованием нашего времени является необходимость усиления прикладных направлений в обучении математике. Как показал анализ содержания школьного математического образования, возможности решения тригонометрических уравнений, а особенно тригонометрических неравенств в этом плане достаточно широки.

Так же, следует заметить, что решение тригонометрических уравнений и неравенств создаёт предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных со всем учебным материалом по тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приёмы преобразования тригонометрических выражений и т.д.) и даёт возможность установить действенные связи с изученным материалом по алгебре (уравнения, равносильность уравнений, неравенства, тождественные преобразования алгебраических выражений и т.д.).[5]

Иначе говоря, рассмотрение приёмов решения тригонометрических уравнений и неравенств, предполагает своего рода перенос этих умений на новое содержание.

Опыт преподавания математики показывает, что осознание важности изучаемого материала приходит к ученикам не в процессе его изучения, а в процессе его применения при решении других заданий, т.е. тогда когда он становится средством для решения других задач.

Таким образом, при любом подходе к изучению тригонометрии, роль изучения уравнений и неравенств неизмеримо велика, не зависимо от места их изучения. Ну и как следствие из этого велико и неизмеримо место изучения методов решения и тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств.

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают достойное место в процессе обучения математики и развитии личности в целом.

Литература

1. *БашмаковМ.И.* Алгебра и начала анализа. 10-11. Учебное пособие для 10 – 11 кл. средней школы. М. Просвещение, 1998. – 335 с.: ил.

2. *Колмогоров А.Н.* и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 10 – 11 кл. средней школы. М. Просвещение, 2008. – 366 с.: ил.

3. *Мордкович А.Г.* Беседы с учителем. М.: ООО “Издательский дом “ОНИКС 21 век”:ООО “Издательство “Мир и Образование”, 2005”

4. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2009. – 399с.:ил.

5. *Мордкович А.Г.* Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. №6.

6. *Решетников Н.Н.* Тригонометрия в школе: М. Педагогический университет "Первое сентября", 2006, лк 1.

ОБ УСТОЙЧИВОМ СЕКВЕНЦИАЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА В НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Канатов А.В., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

alexkanatov@yandex.ru, m.sumin@mail.ru

При условии точного задания исходных данных в задаче оптимального управления, вообще говоря, выполняется необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Однако, в случае их неточного задания формальное применение этого классического результата каждый раз, строго говоря, должно сопрягаться с анализом устойчивости оптимизационной задачи по отношению к возмущению исходных данных. Это в полной мере относится и к рассматриваемой задаче оптимального управления

$$g_0(u) \to \inf, g_1[u](t) = p_1(t) \dot{\forall}\, t \in X,\ g_2(u) = p_2,\ h(u) \leqslant r,\ u \in \mathcal{D}, \quad (1)$$

где $g_0(u) \equiv g_0(x[u](T))$, $g_1[u](t) \equiv g_1(t, x[u](t))$, $g_2(u) \equiv g_2(x[u](T))$, $h(u) \equiv h(x[u](T))$, $p = (p_1, p_2) \in L_2(X) \times R^k$, $r \in R^l$ – параметры, $X \subset [0,T]$, $X = \operatorname{cl}\operatorname{int} X$, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,T) :\ u(t) \in U \,\dot{\forall} t \in (0,T)\}$, $U \subset R^m$ – компакт, $x[u](t)$, $t \in [0,T]$ – решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, u(t))$, $x(0) = x_0 \in R^n$, $t \in [0,T]$.

В докладе, в целях преодоления проблем, связанных с неустойчивостью задачи (1), формулируется так называемый устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина для этой задачи. Его получение основывается на результатах работы [1]. Основным при этом является предположение регулярности задачи (1), состоящее в требовании непустоты проксимального субградиента ее полунепрерывной снизу функции значений как функции параметров $(p, r) \in L_2(X) \times R^k \times R^l$. В докладе обсуждается: 1) в каком смысле

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00199-а).

понимается устойчивость получаемых условий на элементы минимизирующих последовательностей в задаче (1); 2) как в результате предельного перехода в этих условиях секвенциального характера получается и классический принцип максимума Понтрягина.

Литература

1. *Канатов А.В., Сумин М.И.* Секвенциальная устойчивая теорема Куна-Таккера в нелинейном программировании // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т.53. №8. С.23-45.

АДМИНИСТРАТИВНАЯ ГИПЕРНАДСТРОЙКА: НОВОЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Каплан А.В. (Воронеж)
avkaplan@mail.ru

Схема функционирования педагогической системы, которую мы будем использовать, сложилась к концу прошлого века. От классической она отличается лишь добавлением верхней строки, символизирующей появление административной "гипернадстройки", практически подмявшей под себя все системообразующие элементы вместе с их взаимными функциональными связями. Попытка если не проанализировать, то хотя бы обозначить факторы влияния этой надстройки на российское образование и является целью моих заметок. При этом меня особенно интересует взаимодействие *трех субъектов* образовательной системы: *преподавателей*, *студентов* и собственно *администрации*.

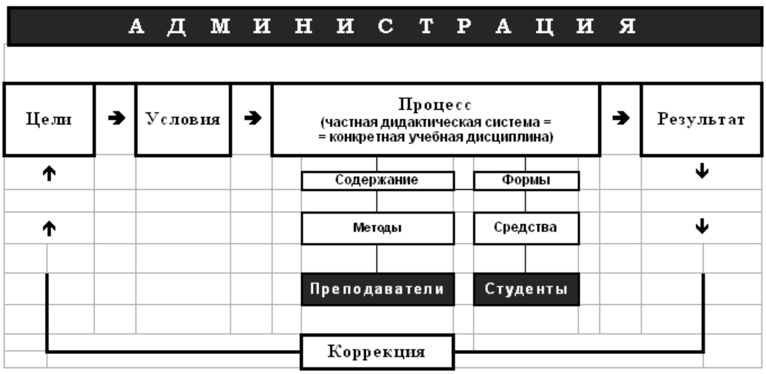

Схема функционирования педагогической системы

Упомянутые факторы можно условно разделить на две группы: внешние и внутренние.

1. Внешние факторы (глобальный уровень)

а) постоянно действующие: недофинансирование образования; растущая учебная нагрузка; угроза сокращения профессорско-преподавательского состава, вообще маргинализация положения преподавателей; чрезмерная обязательная аудиторная нагрузка студентов, не оставляющая времени для нормальной самостоятельной работы, и многое другое;

б) длительного действия: узурпация руководства образованием административно-бюрократической верхушкой на всех уровнях (около 20 лет); всеобщая и окончательная ЕГЭзация образования (12 лет); присоединение России к Болонскому процессу (10 лет);

в) факторы двух последних лет:переход на двухуровневую систему высшего образования (бакалавриат – магистратура); введение государственных стандартов (ФГОС) третьего поколения и новых учебных планов; декларативный отказ от "знаниевого" подхода и всеобщая ориентация на компетентностный подход;

г) новейшие факторы: закон об образовании (вступил в силу 1 сентября 2013 г.); нормативно-подушевое финансирование вузов (распоряжение подписано Д.Медведевым в августе 2013 г.); несколько последних постановлений и нововведений ("5/100", о поддержке региональных университетов, о "прикладном бакалавриате").

Каждый из этих факторов, проникая во все уровни образовательного пространства, действует на все или на некоторые элементы конкретных (частных) педагогических систем.

Но действует так, что вся система и все образовательное пространство в лучшем случае деформируется, а в худшем – разрушается. Об этом говорят и пишут тысячи людей (и я в том числе), но..."The Show Must Go On!".

2. Внутренние факторы (университетский, факультетский, кафедральный уровни)

– нежелание администрации и неготовность студентов и преподавателей к работе не только в условиях модернизации образования, но и в рамках традиционной педагогической системы.

За недостатком места ограничусь, используя знаменитую формулу: "верхи не могут, а низы не хотят", лишь самым общим утверждением: в рамках любой педагогической системы или при решении любой образовательной проблемы – администраторы *'могут'*, но *‘не хотят’*, преподаватели *‘хотят’*, но *‘не могут’*, а студенты *‘не могут’* и *‘не хотят’*.

Пикантность ситуации в том, что если администрация, занятая общим руководством, не участвует в реальном учебном процессе, то действующие профессора и преподаватели, в этом процессе участвующие, в определенных условиях выполняют *роль администрации* со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Заключение.

В 1931 году И.Ильф и Е.Петров вложили в уста великого комбинатора фразу:

“...на каждого человека, даже партийного, давит атмосферный столб весом в 214 кило”.

Замечательно точное описание сегодняшнего состояния большинства из нас.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Карпикова А.В. (Воронеж)
karpikovaav@mail.ru

Рассматривается одномерный оператор Хилла—Шредингера $L : D(L) \subset L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$, который определяется дифференциальным выражением $l(y) = -y'' - vy$, с областью определения

$$y \in D(L) = \left\{ y \in W_2^2[0,2\pi] : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi) \right\}.$$

Для исследования спектральных свойств оператора Штурма-Лиувилля используется метод подобных операторов, разработанный в [1]-[3]. Одним из основных результатов является теорема 1.

Теорема 1. Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора L представим в виде $\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup\limits_{n \geqslant m+1} \sigma_n \right)$, где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}$, $n \geqslant m+1$, не более чем двухточечные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00378, 14-01-31196)

и определяются равенствами

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 - \frac{1}{2n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{v_k v_{-k}}{k} \pm \sqrt{v_{2n} v_{-2n}} + \frac{\beta_n^{\pm}}{\sqrt{n}}, \qquad n \geqslant m+1,$$

где последовательность $\beta_n^{\pm}$ обладает свойством $\sum\limits_{n\geqslant m+1} |\beta_n^{\pm}|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Литература

1. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов // Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та. 1987. -165 с.

2. *Баскаков А.Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов// Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. №1. - 21–39 с.

3. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазипериодических и спектральных операторов// Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №4. - 3–32 с.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ЛИНИИ ТОКА

Клодина Т.В., Задорожная Н.С. (Ростов-на-Дону)

simon@sfedu.ru

Нахождение точных аналитических решений сложных задач теории фильтрации связано с серьезными математическими трудностями. Поэтому в последнее время часто используются приближенные аналитические и численные методы решения краевых задач теории фильтрации. Метод мажорантных областей занимает особое место среди методов, позволяющих находить приближенные решения таких задач. Это объясняется тем, что на основе строгих математических утверждений он дает возможность найти приближенное решение практически для любой сложной задачи плоской установившейся фильтрации, причем, что также немаловажно, для полученных решений всегда можно указать погрешность, с которой определяются основные фильтрационные характеристики.

В работе [1] была предложена методика решения плоских и осесимметричных задач стационарной фильтрации

$$div\overline{V} = 0, \overline{V} = -\kappa_0\, grad\, h, \tag{1}$$

($\overline{V} = (V_x, V_y)$ - скорость фильтрации, $h(x, y)$ - напорная функция, κ_0 - коэффициент фильтрации), когда область фильтрации ограничена

1) двумя потенциальными линиями и двумя линиями тока,

2) двумя потенциальными линиями и одной линией тока,

3) одной потенциальной линией и двумя линиями тока.

Авторами рассмотрен вопрос об изменении давления при решении задачи (1) , когда варьируется область фильтрации, ограниченная тремя потенциальными линиями и одной линией тока. Краевые условия имеют вид

$$\varphi|_{AB} = -\kappa_0 H, \varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{AD} - \kappa_0 H_0, \varphi|_{BC} = 0, H < H_0, \qquad (2)$$

где $\varphi(x, y)$ - потенциальная функция, $\varphi(x, y)$ - линия тока, H и H_0 - величины напоров на границе области фильтрации.

Теорема *При вдавливании линии тока на ее неизменной части давление уменьшается со стороны линии наименьшего напора и увеличивается со стороны линии промежуточного напора.*

Доказательство базируется на методе, предложенном Г.Н. Положим [1] для решения краевых задач математической физики.

Литература

Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. Киев, Наукова думка, 1973. - 423 с.

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Кобылинский П.А. (Воронеж)

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t),\ t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ интегральное преобразование, определенное формулой

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

Свойства этого преобразования исследованы в [1]. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau,\ \eta \in R^1$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) =$

$F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, здесь $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. В [1] и [2] показано, что преобразование F_α может быть продолжено до преобразования, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование пространств $L_2(R^1_+)$ и $L_2(R^1)$, а также может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функций.

Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье. Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, \ldots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $P(D_x, D_{\alpha,t})$ оператор по формуле $P(D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F_\alpha^{-1}[p(t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]]$, где символ $p(t,\xi,\eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным ξ, η не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. Будем говорить, что символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,\rho}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ (открытое множество), если функция $p(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,1,2,\ldots$, $l = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки $\left|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(t,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(1 + |\xi|^+ |\eta|)^{\sigma-\rho l}$ с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число, $\rho \in (0;1]$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\lambda(t,\xi,\eta) \in S^\sigma_{\alpha,\rho}(\Omega)$ (σ — действительное число), $\Omega \subset \bar{R}^1_+$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор

$K^{\sigma}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теореме 1, доказана в [3].

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А. Д., Садчиков П. В. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2010, № 1. — С. 162–168.

О КОММУТАЦИИ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА С ОПЕРАТОРАМИ ДИФФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Ковалевский Р.А. (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_{\alpha}[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^{\infty}(R^1_+)$. Свойства этого преобразования доказаны в [1] и [2]. Для преобразования F_{α} справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_{\alpha}[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Это равенство позволяет также рассмотреть преобразование F_{α} на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования

F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ — обратное преобразование Фурье. В [1] показано, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, \ldots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор с символом, зависящим от комплексного параметра p. Этот оператор определен формулой $K^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})\, v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha \left[\lambda(p,t,\xi,\eta)\, F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ открытое множество, $p \in Q$, где Q — некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ — действительное число, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы оценки

$$\left| \left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \lambda(p,t,\xi,\eta) \right| \leqslant c_{m,l} \left(|p| + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-m-l)}$$

с константами $c_{m,l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $p \in Q$, $t \in \Omega$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha,p} = \int\limits_{R^n} (|p| + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть σ, s — действительные числа, $v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $\partial^l_t v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $l = 1, 2, \ldots$. Пусть символ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$. Тогда для оператора

$$M_{l,\sigma} = \partial^l_t K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t}) - K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})\partial^l_t$$

справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leqslant c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha}.$$

Константа $c>0$ не зависит от v.

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

ПОСТРОЕНИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДУЧП С ОТКЛОНЯЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

Колесникова И.А. (Москва)

vipkolesnikov@mail.ru

Для потенциальных операторов и соответствующих систем уравнений с отклоняющими аргументами найдены необходимые и достаточные условия допускающие группу точечных бесконечно малых преобразований, также показана связь между лагранжианом и группой точечных бесконечно малых преобразований.

Нахождение групп симметрий ДУЧП с отклоняющимися аргументами представляет значительный интерес, т.к. если найдена группа симметрий можно в первую очередь строить новые решения по уже известным. Для уравнений найдены соответствующие функционалы. Необходимо отметить, что при решении задач вариационными методами большую роль играют группы симметрий, т.к. группа симметрий потенциального оператора является группой симметрий соответствующего функционала.

Литература

Kolesnikova I.A. Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Symmetry Groups for Systems of Differential-Difference Equations with Partial Derivatives, Journal of Ma-thematical Sciences, Vol. 180, №6, 2012, p.673-684.

Kolesnikova I.A., Savchin V.M. On the Existence of Varia-tional Principles for a Class of the Evolutionary Differential-Difference Equations // Journal of Function Spaces and Ap- plications Volume 2012 (2012), Article ID 780382, 9 pages.

РОЛЬ УМК В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Колесникова И.В., Машкова С.В. (Воронеж)
kolinna@inbox.ru

Характерными чертами реформирования и модернизации образования в России являются стремление к повышению качества образования, фундаментальности и интеграции, усиление гуманистической направленности, увеличение вариативности, роли самостоятельной работы обучающихся и технологизации процесса обучения. Целью информатизации является создание условий для развития личности, ее самоопределения и самореализации. На достижение этой цели направлен образовательный процесс в учебном заведении. Учебно-методическое обеспечение образовательного процесса должно отличаться разнообразием, соответствовать вариативным образовательным программам, разрабатываться для всех видов учебной деятельности учащихся и отличаться комплексностью. Требования к содержанию отдельных компонентов учебно-методических комплексов зависят от вида учебно-методического материала, но общим должен быть комплексный подход. Это означает, что УМК дисциплины представляется в виде некоторого комплекса, который в той или иной форме должен:
1) отражать содержание дисциплины, обоснование уровня усвоения;
2) содержать дидактический материал, адекватный организационной форме обучения и позволяющий ученику достигать требуемого уровня усвоения;
3) представлять учащемуся возможность в любой момент времени проверить эффективность своего труда, самостоятельно проконтролировать себя и откорректировать свою учебную деятельность;
4) максимально включать объективные методы контроля качества образования со стороны администрации и педагогов.

Цель УМК - обеспечение высокого качества подготовки специалистов. Задачами УМК, его элементов (или составляющих) являются:

1. создание наилучших условий для управления образовательным процессом путем систематизации учебно-методических материалов и сведения к минимуму нормативно-методических, стандартно реализуемых документов, обеспечивающих подготовку выпускников;

2. оптимизация подготовки и проведения занятий, интенсификация всего учебно-воспитательного процесса;

3. активизация деятельности как обучаемого, так и обучающего, развитие познавательной активности учащихся через дифференциацию заданий с учетом их индивидуальных способностей;

4. обеспечение единства требований к учащимся;

5. организация и регулирование методической работы преподавателей, классных руководителей, предметных комиссий, совершенствование мастерства преподавателей с передачей педагогического опыта;

6. обеспечение учебно-методическими материалами всех видов занятий и учебной и внеаудиторной деятельности;

7. оказание методической помощи: ученикам в учебной, учебно-исследовательской, научной и прочих видах деятельности; учителям, не имеющим достаточного опыта работы.

8. обеспечение непрерывности и продуктивности внутренней системы повышения квалификации работников образовательного процесса.

Структура УМК можно представить в виде трех блоков

1) нормативно-методические материалы;
2) учебно-информационные материалы;
3) учебно-методические материалы.

Содержание каждого блока является примерным, выявленным на основе анализа действующих нормативно-правовых документов в системе образования. Дополнительный перечень материалов должно определять учебное заведение с учетом содержания реализуемых образовательных программ, особенностей и условий образовательной деятельности. Создавая учебно-методические материалы, обеспечивающие самостоятельную работу учащихся, целесообразно учитывать: предельный объем домашних заданий, оптимальные затраты времени на их выполнение; типичные ошибки при выполнении различных видов работ, их причины и меры по их усвоению; вариативность практических работ (задачи, отдельные расчеты, составление опорных конспектов, построение различных графических и табличных работ и т.д.); инструкции: по изучению наиболее "трудных" тем (вопросов); по подготовке к контрольным работам и экзаменам; по оформлению итогов самостоятельной работы; по оценке и самооценке итоговых работ. Информатика - одна из самых изменяющихся предметов в школьном курсе. Причиной этого является обновление информационно-коммуникационных технологий и их совершенствование. В связи с этим учитель тоже должен усовершенствоваться, обновлять свои знания, разрабатывать более новые учебные программы. Педагог концентрируясь на тех сведениях, которые потребуются ученикам в реальной жизни, и, используя методически правильные приемы обучения, должен найти правильное соотношение между огромными ресурсами информации и ограниченным количеством учебных часов. Обеспечение учащихся учебно-методическим комплексом поможет усвоить новый материал, дифференцировать, индивидуализировать обучение, совершенствовать контроль и самоконтроль, высвободить время для творческой, исследовательской работы, а значит, повысить эффективность учебного процесса.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Корнев С.В., Обуховский В.В. (Воронеж)

kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

В настоящем докладе предлагается использовать негладкую направляющую функцию для исследования асимптотического поведения решений дифференциальных включений следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые компактные значения и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори (по поводу терминологии см., напр., [1]).

Определение 1. *Локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется прямым потенциалом, если для некоторого $r_\upsilon > 0$ выполнено соотношение $\langle \upsilon, \tilde{\upsilon} \rangle > 0$, для всех $\upsilon, \widetilde{\upsilon} \in \partial V(x), \|x\| \geqslant r_\upsilon$, где $\partial V : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ – субдифференциал функции V (см., напр., [2]).*

Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - четная, непрерывно дифференцируемая функция, для которой $\inf\{g(t),\ t \in R\} \geqslant 1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №№ 12-01-00392, 14-01-00468)

Определение 2. *Прямой потенциал $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется направляющим потенциалом для включения (1) вдоль функции $g(\cdot)$, если найдется $r_0 \geqslant r_\upsilon$ такое, что*

$$\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \rangle \geqslant 0, \quad \textit{почти для всех}\, t > 0;$$

$$\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \rangle \leqslant 0, \quad \textit{почти для всех}\;\, t < 0;$$

для всех $y \in F(t,x),\ \upsilon \in \partial V(g(t)x),\ \|x\| \geqslant r_0$.

Пусть регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является направляющим потенциалом для включения (1) вдоль функции $g(\cdot)$.

Теорема. *Если выполнено условие $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = -\infty$, то каждое решение включения (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ удовлетворяет оценке $\|x(t)\| \leqslant k \cdot \frac{1}{g(t)}$ для некоторого $k > 0, t \in \mathbb{R}$.*

Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, 2-е изд.— М.: Книжный дом „Либроком“, 2011.— 224 с. *2. Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ.— М.: Наука, 1988.— 280 с.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Костин В.А., Небольсина М.Н., Салим Бадран (Воронеж)

marinanebolsina@yandex.ru

В банаховом пространстве E рассматривается однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad t \in [0, \pi], \tag{1}$$

где A-линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с плотной в E областью определения $D(A)$.

Рассматриваются задачи:

а) Дирихле

$$u(0) = \varphi, \qquad u(\pi) = \psi, \tag{2}$$

б) Неймана

$$u'(0) = \varphi, \qquad u'(\pi) = \psi, \qquad \varphi, \psi \in D(A). \tag{3}$$

Корректная разрешимость общих краевых задач для уравнения (1) рассматривалась в [1] при условии позитивности оператора A. Из которого, в частности, следует существование квадратного корня у оператора A, в терминах которого и выписываются решения краевых задач.

Следующая теорема позволяет выписать решения задач (1)-(2) и (1)-(3) непосредственно через оператор A.

Теорема 1. *Если оператор A такой, что $-A$ является генератором C_0-полугруппы $U(t,-A)$ с оценкой*

$$\|U(t,-A)\| \leqslant Me^{-\omega t}, \qquad \omega > 0, \tag{4}$$

задачи (1)-(2) и (1)-(3) равномерно корректны в смысле С.Г.Крейна ([1]) и их решения имеют вид:

$$u(t) = F(t)\varphi + F(\pi - t)\psi, \tag{5}$$

где

$$F(t)\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\Theta_3(\frac{t}{2}, e^{-s})U(s,-A)\varphi ds, \tag{6}$$

$\Theta_3(\frac{t}{2}, e^{-s})$*-тэтта функция Якоби, в случае задачи Дирихле. И*

$$F(t)\varphi = \frac{1}{\pi}[A^{-1}\varphi + \int_0^\infty (\Theta_3(\frac{t}{2}, e^{-s}) - 1)U(s,-A)ds], \tag{7}$$

в случае задачи Неймана.

Важными следствиями из этой теоремы являются результаты для решений нестационарных задач для дифференциальных операторов с вырождающимися коэффициентами. Например, для оператора A, заданного дифференциальным выражением $\ell\varphi = x\frac{d\varphi}{dx}, x \geqslant 0$ с областью определения

$$D(A) = \{\varphi \in C_{[0,\infty]}, \ell\varphi \in C_{[0,\infty]}\}$$

соответствующая полугруппа имеет вид

$$U(s,-A)\varphi(x) = \varphi(xe^s). \tag{8}$$

Что при подстановки в (6) или (7) дает простой вид точных решений задач Дирихле и Неймана для соответствующих уравнений с частными производными.

Литература

Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. –464 с.

Костин В.А., Костин А.В., Костин Д.В. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения. Доклады Академии Наук, 2014, Том 455 №2. С. 142–146.

Небольсина М.Н. Исследование корректной разрешимости некоторых математических моделей тепломассопереноса методом С.Г. Крейна. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук. – Воронеж, ВГУ, 2009, 102 с.

УСЛОВИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ДУЧП С ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ[1]

Костина Я.Д. (Москва)

jasenka2006@mail.ru

Найдены необходимые и достаточные условия потенциальности дифференциального уравнения в частных
производных с отклоняющимися аргументами весьма общего вида относительно следующей билинейной формы

$$< v, g > = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} e^{Ct} v(x,t) g(x,t) dx dt, \text{ где } C\text{-const.}$$

Теорема 1. Для потенциальности оператора на множестве его определения относительно заданной билинейной формы $\Longleftrightarrow$ выполнялись условия

$$\sum_{k=0}^{l} \sum_{|\alpha|=0}^{s} C^k (-1)^{|\alpha|+k+\nu} C_k^{\nu} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot D^{k-\nu} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{\alpha}^{(k)}(x,t+\lambda\tau)} \right) \Big|_{t \to t-\lambda\tau} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_{\beta}^{(\nu)}(x,t-\lambda\tau)} \forall u \in D(N), \forall (x,t) \in Q = \Omega \times (t_0, t_1),$$

$$\lambda = -1, 0, 1, \nu = \overline{0,l}, |\beta| = \overline{0,s}.$$

Литература

Колесникова И.А., Костина Я.Д. Вариационный множитель для некоторого ДУЧП 2-го порядка // Отраслевые аспекты технических наук. 2012. № 10. С. 18-19.

Колесникова И.А., Костина Я.Д. Необходимые и достаточные условия для нелинейного дифференциально-разностного операто-

[1]РУДН

ра в частных производных // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2013. № 3. С. 36-41.

ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ МНОГОГРАННИКОВ В НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ[1]

Краснов В.А. (Коломна)

vladimir.krasnov3107@gmail.com

Рассматривается задача вычисления объемов выпуклых многогранников на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ постоянной кривизны $K = +1$ и в трехмерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$ постоянной кривизны $K = -1$.

Одним из основных инструментов вычисления объемов неевклидовых многогранников является дифференциальная формула Шлефли [8]. Однако во многих случаях для получения формул объема можно использовать идею правильной триангуляции (без новых вершин) выпуклого многогранника и последующего исключения возникающих при этом дополнительных параметров. Для исключения последних применяются как классические методы неевклидовых геометрий, разработанные еще Л. Шлефли [8], Н.И. Лобачевским [6] и Я. Больяи [2], так и метод, основанный на применении теоремы Е.М. Андреева [1], утверждающей существование гиперболического остроугольного многогранника с заданным набором двугранных углов фиксированного комбинаторного типа, единственного с точностью до движения пространства. В свою очередь, объемы тетраэдров триангуляции могут быть вычислены по формулам Мураками [7] (для $\mathbb{S}^3$) и Деревнина–Медных [4] (для $\mathbb{H}^3$).

В работе [5] с помощью идеи правильной триангуляции были получены явные интегральные формулы объема гиперболических октаэдров, обладающих mmm- и 2|m-симметриями.

В докладе мы представим формулы объема неевклидовых октаэдров с $4|m$- и $mm2$-симметриями в терминах двугранных углов, которые также получаются с помощью правильной триангуляции и последующего исключения появляющихся дополнительных параметров и являются обобщениями результатов Галиулина-Михалева-Сабитова [3] на сферический и гиперболический случаи.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00830-А)

Литература

1. *Андреев Е.М.* О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *81 (123)*. — С. 445–478.

2. *Bolyai J.* Appendix. The Theory of Space // Janos Bolyai (F. Karteszi ed.). — Budapest:1987. — 239 p.

3. *Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х.* Некоторые приложения формулы для объема октаэдра // Математические заметки. — 2004. — *1 (76)*. — С. 27–43.

4. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron // Rus. Math. Surv. — 2005. — *60(2):346*.

5. *Краснов В. А.* Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями // Совр. математика. Фундам. направления. — 2013. — *51*. — С. 74–86.

6. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия // Полное собр. соч. Т. 3. — М.-Л.:1949. — 536 с.

7. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron // Arxiv e-prints, Arxiv:1011.2584v4. — 2011. — 7 pp.

8. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität, In: Gesammelte mathematische Abhandlungen. — Basel: Birkhäuser, 1950.

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

Кувардина Л.П. (Саратов)

KuvardinaLP.info.sgu.ru

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{p(x)} A(p(x),t)f(t)dt,$$

где $p(x) = \frac{1-x}{ax+1}$, $a > -1$. Предполагается, что $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, кроме того,

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{0,j} \quad (j = 0,\ 1),$$

$\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Обозначим обобщенные средние Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора A через

$$\sigma_r\left(x,f,g\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}g\left(\lambda,r\right)R_\lambda f\,d\lambda,$$

где $R_\lambda=(E-\lambda A)^{-1}A$ - резольвета Фредгольма оператора A, функция $g\left(\lambda,r\right)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $g\left(\lambda,r\right)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda|\leqslant r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda|<r$ при любом $r>0$; 2) существует такая константа $C>0$, что $|g\left(\lambda,r\right)|\leqslant C$ при всех $r>0$ и $|\lambda|\leqslant r$; 3) существуют положительные β и h, такие что $g\left(re^{i\,\theta},r\right)=O\left(|\theta|^\beta\right)$, при $|\theta|\leqslant h$, $g\left(re^{i\,\theta},r\right)=O\left(|\theta-\pi|^\beta\right)$, при $|\theta-\pi|\leqslant h$; 4) $g\left(\lambda,r\right)\to 1$ при $r\to\infty$ и фиксированном λ.

Теорема. *Для того, что бы выполнялось*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|f\left(x\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}g\left(\lambda,r\right)R_\lambda f\,d\lambda\right\|=0$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f\left(x\right)\in C\left[0,1\right]$ и удовлетворяла условию $f\left(1\right)=0$.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 6-ГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ ПЕРВОЙ И ПЯТОЙ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Кущев А.Б. (Воронеж)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$x^{(6)}+a_5x^{(5)}+a_4x^{(4)}+a_3x'''+a_2x''+a_1x'+$$

$$+f(x)+\varphi(t,x,x',x'',x''',x^{(4)},x^{(5)})=0, \qquad (1)$$

где функции $f(x)$, $\varphi(t,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ непрерывны по совокупности переменных $(-\infty<t,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6<\infty)$, а функция $\varphi t,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=phi(t,X)$ ω-периодична по t:

$$\varphi(t+\omega,X)=\varphi(t,X). \qquad (2)$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании ω-периодических решений у уравнения (1). Исследование проводится методом направляющих функций [1].

Мы будем также предполагать, что

$$k_1 < f(x)/x < k_2 (|x| > R_1, k_1 k_2 > 0), \tag{3}$$

и равномерно относительно t

$$\lim_{||X|| \to \infty} \frac{\varphi(t, X)}{||X||} = 0, \tag{4}$$

где $||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_6^2}$.

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2)-(4) и, кроме того,

$$a_1 = a_5 = 0, a_3 \neq 0. \tag{5}$$

Тогда у уравнения (1) есть хотя бы одно ω-периодическое решение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение шестого порядка с простейшим запаздыванием

$$x^{(6)} + a_5 x^{(5)} + a_4 x^{(4)} + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' + f(x) +$$
$$+\varphi\Big(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), x^{(4)}(t), x^{(5)}(t), x(t-h), x'(t-h),$$
$$x''(t-h), x'''(t-h), x^{(4)}(t-h), x^{(5)}(t-h)\Big) = 0, \tag{6}$$

где функции $f(x)$, $\varphi(t, x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)$ непрерывны по совокупности переменных, а последняя функция ω-периодична по t

$$\varphi(t + \omega, X, X_1) = \varphi(t, X, X_1) \tag{7}$$

и равномерно относительно t, X, X_1

$$\lim_{||X|| \to \infty} \frac{\varphi(t, X, X_1)}{||X||} = 0. \tag{8}$$

Нас будет интересовать ω-периодические решения уравнения (6). Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (3), (7) и (8). Пусть выполнены условия (5) теоремы 1.

Тогда у уравнения (6) есть хотя бы одно ω-периодическое решение.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

2. Кущев А.Б. Достаточный признак существования правильной направляющей функции для одного класса систем дифференциальных уравнений. // Прикл. методы функц. анализа. – Воронеж: изд-во ВГУ, 1985. С. 100-110.

3. Кущев А.Б. О существовании периодических решений одного класса дифференциальных уравнений 6-го порядка в случае отсутствия двух последних нечетных производных в линейной части. // Современные методы теории краевых задач. МАТЕРИАЛЫ ВВМШ "Понтрягинские чтения – XXXIII". – Воронеж, ВГУ, 2012. С. 103-104.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

Левенштам В.Б. (Ростов-на-Дону)

vleven@math.rsu.ru

Работы [1], [2] посвящены построению и обоснованию полных асимптотических разложений периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, для которых старший матричный коэффициент A задачи имеет простое нулевое собственное значение. Так, в [1] по данным возмущенной системы построена некоторая матрица B и предполагается, что собственный вектор a_0, соответствующий нулевому собственному значению A, не имеет обобщенных присоединенных векторов относительно пары матриц A, B.

В работе [3] некоторые результаты [1, 2], относящиеся к построению формальных асимптотик перенесены на случай линейных параболических задач второго порядка.

В данном докладе результаты [2,3] об асимптотиках перенесены на определенный класс линейных параболических задач второго порядка с полным обоснованием.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00402)

Литература

1. *До Н. Т., Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // Журн. выч. матем. и мат. физ. — 2011. — Т. 51, № 6. С. 1043–1055.

2.*До Н. Т., Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Дифференц. уравн. — 2012. — Т. 48, № 8. С. 1190–1192.

3.*Гусаченко В. В., Ильичева Е. А., Левенштам В. Б.* Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае // Журн. выч. матем. и мат. физ. — 2013. — Т. 53, № 7. С. 1067–1081.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Леженина И.Ф. (Воронеж)

if.lezhenina@yandex.ru

Рассматривается дифференциальный оператор

$$(Bu)(x) = u''(x) + \frac{a_1(x)}{x(1-x)}u'(x) + \frac{a_0(x)}{x^2(1-x)^2}u(x)$$

в пространстве $C_\rho[0,1]$ с областью определения

$$D = \{u : u'' \in C_\rho[0,1] \wedge u(0) = u(1) = 0\}.$$

Предполагается, что функции a_1, a_0 непрерывны на [0,1].

Пространство $C_\rho[0,1]$ определяется следующим образом:

$$C_\rho[0,1] = \{u \in C(0,1) : \rho u \in C[0,1] \ \wedge \ \lim_{x\to 0} \rho(x)u(x) = \lim_{x\to 1} \rho(x)u(x) = 0\}.$$

Норма в пространстве $C_\rho[0,1]$ задается формулой

$$\|u\|_\rho = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \rho(x)|u(x)|,$$

где весовая функция $\rho(x) = x^{1+\alpha}(1-x)^{1+\beta}$ с $0 < \alpha, \beta < 1$.

Установлено,что функции из D непрерывны на [0,1], дважды непрерывно дифференцируемы на (0,1) и удовлетворяют соотношениям:

$$\lim_{x\to 0} u(x)x^{\alpha-1} = \lim_{x\to 1} u(x)(1-x)^{\beta-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} u'(x)x^{\alpha} = \lim_{x\to 1} u'(x)(1-x)^{\beta} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} u''(x)x^{1+\alpha} = \lim_{x\to 1} u''(x)(1-x)^{1+\beta} = 0.$$

Получены условия на коэффициенты a_1, a_0 при выполнении которых, оператор B является производящим оператором аналитической полугруппы в пространстве $C_\rho[0,1]$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лепилов А.Н. (Самара)

lepilov_aleksand@mail.ru

Пусть функция $f \in \mathcal{F}$, если $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(t,y) \to f(t,y)$, $y = (y_1,\dots,y_m)$; T-периодическая по $t, y_1,\dots,y_m$; $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$. Для $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим предел максимального среднего

$$M_f = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} f(t,\gamma(t))\,dt,$$

супремум берется по множеству решений $\Gamma(0,y_0)$ дифференциального включения $\dot\gamma \in G$, $\gamma(0) = y_0$, где $G = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_m,b_m] \subset \mathbb{R}^m$ – параллелепипед, $0 < a_i < b_i$, $i = 1,2,\dots,m$.

Введем максимальное среднее на периоде $[0,T]$

$$M_f^T = \sup_{y_0\in K}\ \sup_{\gamma\in\Gamma(0,y_0)} \frac{1}{T}\int_0^T f(t,\gamma(t))\,dt,$$

где $K = [y_{01}, y_{01}+T]\times\dots\times[y_{0m}, y_{0m}+T] \subset \mathbb{R}^m$ – n-мерный куб.

Обозначим $(y_0^{opt}, \gamma^{opt}(t))$ оптимальную пару для M_f^T, которую можно определить численным методом [1], основанным на принципе максимума Понтрягина. На $[0,T]$ от оптимального решения $\gamma_i^{opt}(t)$ строим скорректированное решение $\gamma_i^{\varkappa}(t)$ в точке $t_i^{\varkappa}$ такое, чтобы $|\gamma_i^{\varkappa}(0)-\gamma_i^{\varkappa}(T)| = nT$, $n\in\mathbb{Z}$. Точка $t_i^{\varkappa}$ в этом случае однозначно определяется. Управление $\dot\gamma_i^{\varkappa}(t)$ T-периодически продолжаем на $[0,\infty)$. Пусть $b_i > 1$, $C = \max_t |f(t,\gamma(t))|$, $t^{\varkappa} = \min_i\{t_i^{\varkappa}\}$, $i = 1,\dots,m$.

Теорема 1. *Если $f \in \mathcal{F}$, $\varkappa = 2C(T - t^{\varkappa})/T$, то справедлива оценка предела максимального среднего M_f:* $\quad M_f^T - \varkappa \leqslant M_f \leqslant M_f^T$.

Пределы M_f возникают при усреднении систем дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными [2].

Литература

[1] Лепилов А.Н. Численный метод вычисления пределов максимальных средних для периодических функций // Вестник СамГУ. 2011. № 8. — С. 45–49.

[2] Филатов О.П. Усреднение дифференциальных включений и пределы максимальных средних. Самара: Издательство "Универс групп 2009 — 176 с.

ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Литвинов Д.А. (Воронеж)

d77013378@yandex.ru

Рассматривается динамическая система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t),$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^k$; коэффициенты A, B — матрицы соответствующих размеров; $t \in [a_1,\, a_l]$.

Система предполагается полностью управляемой, то есть существует вектор-функция $u(t)$, под воздействием которой состояние $x(t)$ системы переводится из произвольного начального состояния $x(a_1) = x_1$ в произвольное конечное состояние $x(a_l) = x_l$ [1].

Ставится задача построения такой управляющей вектор-функции $u(t, \varepsilon)$, под воздействием которой траектория системы проходит кроме того через контрольные точки

$$x(a_i) = x_i, \quad a_1 < a_2 < \ldots < a_l, i = 2, 3, \ldots, l-1,$$

при этом управляющая функция принимает в начальной, конечной и контрольных точках произвольно заданные значения

$$u(a_i) = u_i.$$

Построение $x(t)$ и $u(t)$ ведется методом каскадной декомпозиции, разработанном в работе [2].

Метод состоит в переходе от исходного уравнения к уравнениям

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = A_k\,y_k(t) + B_k\,v_k(t),$$

в подпространствах уменьшающихся размерностей и пересчитывания многоточечных условий для новых функций.

Предлагается частичная автоматизация решения задачи методом каскадной декомпозиции с помощью программы, реализованной на языке Java в среде Eclipse. Результаты иллюстрируются графиками функций состояния и управления.

Литература

[1] *Дорф Р.* Современные системы управления / Р. Дорф, , Р. Бишоп. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. — 832 с.

[2] *Зубова С.П.* О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек. Автоматика и Телемеханика. — 2011. — № 1. — С. 27–41.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ НА ПРАВУЮ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Ломовцев Ф.Е., Новиков Е.Н. (Минск, Беларусь)

lomovcev@bsu.by, novikovevgenij@gmail.com

Методом сечения и сшивания вдоль характеристик Ломовцева Ф. Е., изложенного в [1], в явном виде решена смешанная задача:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ a > 0,\ \{x,t\} \in G = [0,d] \times [0,\infty[,\ d > 0, \quad (1)$$

$$(\alpha_i(t)u_t + \beta_i(t)u_x + \gamma_i(t)\,u)|_{x=d(i-1)} = \mu_i(t), \quad t \geqslant 0,\ i = 1,\,2, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant d. \quad (3)$$

Согласно этому методу решения смешанной задачи для уравнения колебаний *ограниченной* струны общего вида при любых нестационарных граничных условиях получаются сечением вдоль характеристик решений смешанной задачи для уравнения колебаний *полуограниченной* струны и их гладким сшиванием вдоль характеристик с помощью условий согласования граничных и начальных данных с правой частью уравнения. Уточнены необходимые и достаточные условия гладкости (4), (5) на f, μ_i, $i = 1,\,2$, φ, ψ и их условия согласования (6), (7). Задачу (1)–(3) достаточно решить при $a = d = 1$, так как задача (1)–(3) при любых $a > 0$ и $d > 0$ заменой $x' = x/d$, $t' = at/d$ сводится к задаче вида (1)–(3) при $a = d = 1$ и наоборот.

Область G разбивается на квадраты $G_n = [0,1] \times [n-1, n]$ и каждый квадрат G_n – характеристиками уравнения на треугольники $\Delta_{4n-3} = \{(x,t) : n-1 \leqslant t \leqslant x+n-1,\ t \leqslant n-x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $\Delta_{4n-2} = \{(x,t) : x+n-1 < t \leqslant n-x, 0 \leqslant x \leqslant 1/2\}$, $\Delta_{4n-1} = \{(x,t) : n-x < t \leqslant x+n-1,\ 1/2 \leqslant x \leqslant 1\}$, $\Delta_{4n} = \{(x,t) : x+n-1 \leqslant t \leqslant n,\ n-x < t,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $n = 1,\ 2, \dots$

Теорема. *Пусть $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i \in C^1[0,\infty[,\ \alpha_i(t) \neq (-1)^{i+1}\beta_i(t),\ t \in [0,\infty[,\ i = 1,\ 2$. Смешанная задача (1)–(3) при $a = d = 1$ имеет единственные классические решения $u(x,t) \in C^2(G)$ вида*

$$u_{4n-3}(x,t) = \frac{\varphi_n(x+t-n+1) + \varphi_n(x-t+n-1)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t+n-1}^{x+t-n+1} \psi_n(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{n-1}^{t}\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(s,\tau)\,ds\,d\tau,$$

$$u_{4n-2}(x,t) = \frac{\varphi_n(x+t-n+1) - \varphi_n(t-x-n+1)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x-n+1}^{x+t-n+1} \psi_n(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{n-1}^{t}\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(s,\tau)\,ds\,d\tau +$$

$$+\Phi_1^{(n)}(t-x) + F_1^{(n)}(t-x) + \varphi_n(0) e^{\int\limits_{t-x}^{n-1} \frac{\gamma_1(s)ds}{\alpha_1(s)-\beta_1(s)}},$$

$$u_{4n-1}(x,t) = \frac{\varphi_n(x-t+n-1) - \varphi_n(n+1-t-x)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t+n-1}^{n+1-t-x} \psi_n(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{n-1}^{t}\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(s,\tau) ds\,d\tau +$$

$$+\Phi_2^{(n)}(t+x-1) + F_2^{(n)}(t+x-1) + \varphi_n(1) e^{\int\limits_{t+x-1}^{n-1} \frac{\gamma_2(s)ds}{\alpha_2(s)+\beta_2(s)}},$$

$$u_{4n}(x,t) = -\frac{\varphi_n(n+1-t-x) + \varphi_n(t-x-n+1)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x-n+1}^{n+1-t-x} \psi_n(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{n-1}^{t}\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(s,\tau) ds\,d\tau +$$

$$+\Phi_1^{(n)}(t-x)+F_1^{(n)}(t-x)+\varphi_n(0)e^{\int\limits_{t-x}^{n-1}\frac{\gamma_1(s)ds}{\alpha_1(s)-\beta_1(s)}}+$$

$$+\Phi_2^{(n)}(t+x-1)+F_2^{(n)}(t+x-1)+\varphi_n(1)e^{\int\limits_{t+x-1}^{n-1}\frac{\gamma_2(s)ds}{\alpha_2(s)+\beta_2(s)}},$$

где $u_m(x,t)$ – *решения исходной задачи в треугольниках* Δ_m, $m = 1, 2, ...,$ $\varphi_k(x) = u_{4(k-1)}(x, k-1)$, $\psi_k(x) = (u_{4(k-1)})_t(x, k-1)$, $k = 2, 3, ...,$ $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $\psi_1(x) = \psi(x)$,

$$\Phi_i^{(n)}(\xi) = \int\limits_{n-1}^{\xi} e^{\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\gamma_i(s)ds}{\alpha_i(s)+(-1)^i\beta_i(s)}}(\alpha_i(s)+(-1)^i\beta_i(s))^{-1}\Big\{\mu_i(\eta)+(-1)^i\beta_i(\eta)\times$$

$$\times\Big((-1)^{i+1}\varphi_n'((-1)^i(n-\eta)+2-i)+\psi_n((-1)^i(n-\eta)+2-i)\Big)\Big\}d\eta,$$

$$F_i^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{n-1}^{\xi} e^{\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\gamma_i(s)ds}{\alpha_i(s)+(-1)^i\beta_i(s)}}((-1)^{i+1}\beta_i(s)-\alpha_i(s))^{-1}\times$$

$$\times\Big\{\gamma_i(\eta)\int\limits_{n-1}^{\eta}\int\limits_{\tau-\eta}^{\eta-\tau} f(i-1+(-1)^{i+1}s,\tau)dsd\tau+\alpha_i(\eta)\times$$

$$\times\int\limits_{n-1}^{\eta}[f(i-1+(-1)^{i+1}(\eta-\tau),\tau)+f(i-1+(-1)^{i+1}(\tau-\eta),\tau)]d\tau+$$

$$+(-1)^{i+1}\beta_i(\eta)\int\limits_{n-1}^{\eta}[f(i-1+(-1)^{i+1}(\eta-\tau),\tau)-$$

$$-f(i-1+(-1)^{i+1}(\tau-\eta),\tau)]d\tau\Big\}d\eta,\ i=1,\,2,$$

тогда и только тогда, когда

$$f\in C(G),\ \varphi\in C^2[0,1],\ \psi\in C^1[0,1],\ \mu_i\in C^1[0,\infty[,\ i=1,\,2, \tag{4}$$

$$\int_{n-1}^{t} f^{(1,0)}(x\pm(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C(G_n),\ n=1,\,2,..., \tag{5}$$

$$\alpha_i(0)\psi(i-1)+\beta_i(0)\varphi'(i-1)+\gamma_i(0)\varphi(i-1)=\mu_i(0),\ i=1,\,2, \tag{6}$$

$$\alpha_i(0)(\varphi''(i-1)+f(i-1,0))+(\alpha'_i(0)+\gamma_i(0))\psi(i-1)+$$
$$+\beta_i(0)\psi'(i-1)+\beta'_i(0)\varphi'(i-1)+\gamma'_i(0)\varphi(i-1)=\mu'_i(0),\ i=1,\ 2. \quad (7)$$

Здесь одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций, $C^i(\Omega)$ – множество i-раз непрерывно дифференцируемых функций в Ω, $i=1,2$, $C(\Omega)$ – множество непрерывных функций в Ω и индекс $(1,0)$ над $f(y,s)$ обозначает первую частную производную от f по y.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е., Новиков Е.Н. Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №1. С. 126–129.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АДАПТИРОВАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

Лылов Е.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)

zhenya86@mail.ru, margz@rambler.ru, shaspoteha@mail.ru

Пусть Γ - граф-звезда, состоящий из рёбер γ_i $(i=1,2,...,M)$ и узла a. Множество граничных вершин графа Γ обозначим через $\partial\Gamma$. Всюду далее будем использовать терминологию и обозначения из [1]. Обозначим через $R(\Gamma)=\bigcup\limits_{i=1}^{M}\gamma_i$, $\overline{\Gamma}=\Gamma\cup\partial\Gamma$. Пусть рёбра параметризованы отрезком $[0,1]$ и ориентированы к узлу. Рассмотрим на $\overline{\Gamma}$ следующую математическую модель:

$$\begin{cases} -D(pu')+uDQ=DF, \\ u|_{\partial\Gamma}=0, \end{cases} \quad (1)$$

где DG - дифференциал Стилтьеса от функции ограниченной вариации на графе. В математической модели (1) предполагаем, что функции p, Q, F ограниченной вариации непрерывны в точках $\partial\Gamma$, причем $\inf p(x)>0$. Пусть $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации. Решение модели (1) ищем в классе E абсолютно-непрерывных на Γ функций $u(x)$, производная которых является на каждом ребре γ_i функцией ограниченной вариации.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ВГУ (№ПСР-МГ/04-13), грантов РФФИ № 12-01-00392) и № 14-01-00867)

В этой работе мы адаптируем метод конечных элементов для нахождения приближенного решения модели (1). Для этого каждое ребро мы разбиваем на N частей точками $0 = x_0^i < x_1^i < ... < x_{n_i}^i = 1$ и строим базисные функции $\varphi_{k,i}(x)$ ($k = 1, 2, ..., n_i - 1$, $i = 1, ..., M$) так, что $\varphi_{k,i}$ равны нулю везде на $\overline{\Gamma}$, кроме промежутка (x_{k-1}^i, x_{k+1}^i) соответствующего ребра с номером i. При этом $\varphi_{k,i}(x_k^i) = 1$.

Приближенное решение будем искать в виде линейной комбинации этих функций

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i-1} v_j^i \varphi_{j,i}(x) + c\varphi(x),$$

где v_j^i, c - значения $v(x)$ в точках разбиения.

Для нахождения v_j^i мы получаем систему $AV = F$ с трехдиагональной матрицей A, где V - вектор-столбец, составленный из неизвестных v_j^i, F - вектор, составленный из правых частей.

Теорема. *Пусть $u(x)$ - точное решение математической модели (1); $v(x)$- приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда*

$$< u - v, u - v >\leqslant Ch$$

причем, константа C не зависит от $h = \frac{1}{N}$, где N - количество интервалов, на которые производится разбиение каждого ребра γ_i, $< u, v >= \int\limits_{\Gamma} p(x)\frac{du}{d\gamma}\frac{dv}{d\gamma}d\Gamma + \int\limits_{\Gamma} q(x)u(x)v(x)d\Gamma$ - энергетическое скалярное произведение в $H_0^1(\Gamma)$.

Литература

Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, А.В. Боровских, В.Л. Прядиев, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

ОТКРЫТЫЕ РЕГИОНАЛЬНЫЕ СОРЕВНОВАНИЯ СТУДЕНТОВ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ И ИНФОРМАТИКЕ КАК ОДНА ИЗ ФОРМ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Мамонов Д.С., Ускова О.Ф., Шашкин А.И., Шинкаренко А.Ю. (ООО Райк Ру, Воронежский государственный университет, Воронежский государственный университет, Murano Software Inc)

2013 год является юбилейным не только для Воронежского государственного университета. В этом году исполнилось 65 лет российской информатике – отрасли, которая существенным образом преобразовала не только учебный процесс, но и всю нашу жизнь. Одним из первых внес существенный вклад в развитие отечественной информатики С.Г.Крейн, математик с мировым именем, который в 60-е годы прошлого века работал в Воронежском государственном университете заведующим кафедрой уравнений в частных производных, воспитавший несколько поколений математиков – профессионалов. С.Г.Крейн был в числе первых разработчиков прикладной программы для решения дифференциальной краевой задачи второго порядка. Этим двум датам – 95-летию Воронежского госуниверситета и 65-летию российской информатики были посвящены открытые соревнования студентов нашего региона по программированию и информатике.

Ведущие компьютерные компании города Воронежа (Релэкс, Рет, DataArt, T – Systems, Mail.ru, MuranoSoft) впервые выступили не только как спонсоры [1,2] этого важного молодежного мероприятия, но и как его организаторы совместно с факультетом ПММ ВГУ. Сотрудники компаний успешно справились с разработкой интересных олимпиадных заданий, их тестированием, проверкой, анализом полученных результатов.

Всего в соревнованиях приняло участие свыше ста студентов различных вузов города Воронежа (Воронежский государственный университет, Воронежский государственный технический университет, Воронежский государственный педагогический университет, Воронежский институт высоких технологий, Военно – воздушная академия имени Н. А. Жуковского и Ю. А. Гагарина), Липецка, Тамбова, Курска.

Информация о студенческих соревнованиях была выставлена на сайт факультета ПММ и Воронежского государственного университета второго декабря 2013 года. В соревнованиях могли выступать студенты любых вузов, курсов, факультетов, специальностей и форм обучения. Правила участия в соревнованиях по информатике и программированию были выставлены на сайтах их организаторов Релэкс, Рет, Data Art, T – Systems, Mail.ru, MuranoSoft за неделю до начала самих соревнований.

Компания Murano Software Inc Head of Voronezh branch постоянно вносит вклад в развитие университета: учреждает призы победителям Всероссийских студенческих олимпиад "Информатика. Программирование. Информационные технологии", осуществляет руководство производственной практикой и дипломными работами. В 2007 году компания Murano Software была инициатором участия команды ВГУ в четвертьфинале мирового первенства по программированию и полностью оплатила все финансовые расходы команды на этом первенстве.

Компания Murano Software опубликовала задания соревнований, посвященных 95 – летию ВГУ, на своем сайте 10 декабря 2013 года и в течении двух дней студенты могли прислать по электронной почте свои решения, вопросы и замечания.

Безусловным победителем стал студент 3 курса факультета ПММ Перунов Николай, который в составе сборной факультета ПММ успешно выступал в течении двух лет в четвертьфинале (г. Саратов) и в полуфинале (г. Санкт-Петербург) мирового первенства по программированию. Второе место занял студент 4 курса факультета ПММ ВГУ Рочев Илья, на третье место вышел первокурсник факультета ПММ ВГУ Иванов Андрей. При проверке разработанных студентами программ использовалось соответствующее авторское программное обеспечение [3].

Проведение студенческих соревнований по информатике и программированию способствует повышению качества образовательного процесса, внедрению современных информационных и образовательных технологий в учебный процесс, развитию творческой активности студентов.

В заключении приведем текст задания студенческих соревнований, разработанного сотрудниками Murano Software.

В одной стране проходят парламентские выборы. На победу претендуют две партии A и B. Все граждане по своим убеждениям делятся на три группы: предпочитающие партию A, предпочитающие партию B и неопределившиеся. У некоторых граждан есть знакомые, мнению которых они доверяют. Первые две группы голосуют за свою партию Неопределившиеся поступают следующим образом. Если все люди, мнению которых он доверяет, предпочитают одну и ту же партию, то он также голосует за эту партию. Если же люди, которым неопределившийся доверяет, предпочитает разные партии или не определились, то он так и остается неопределившимся и на выборы не идет. Все граждане предварительно опрошены и информация собрана в файле. Необходимо написать программу, определяющую победителя на выборах. Входные данные представлены в текстовом файле. Файл состоит из строк данных, разделенных пробелом. Каждая строка имеет вид id_i[A|B|N] id_n id_m ... id_k , где id_i – целочисленный идентификатор гражданина, [A|B|N] – его предпочтения, N - неопределившийся, id_n id_m – идентификаторы граждан, мнению которых он доверяет, если такие есть.

Литература

1. Горбенко О.Д. Воронежский государственный университет – базовый вуз Всероссийских студенческих олимпиад "Информатика. Программирование. Информационные технологии"/ О.Д.Горбенко, О.Ф.Ускова, А.И.Шашкин. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Проблемы высшего образования. – 2012- №2-85с. С. 51-56

2. Информатика. Программирование. Информационные технологии: Всероссийские студенческие олимпиады. Воронеж, 11-12 ноября 2011 года./ Ответственный редактор О.Ф.Ускова, Воронеж. госуд. унив. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2011. – 48 с.

3. Мамонов Д.С. Об автоматизации проверки олимпиад по информатике/ Д.С.Мамонов //Черноземный альманах научных исследований: прикладная математика и информатика (спецвыпуск "Четвертая Всероссийская студенческая олимпиада "Информатика. Программирование. Информационные технологии" - 2006. – 145 с. С.53 – 57.

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРНЫХ РЯДОВ

Манько С.Н. (Орёл)
mankosvetlana88@mail.ru

Пусть дано операторное уравнение вида

$$F(A, u(t)) = 0, \quad F(A, u(t)) = \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(A)(t - t_0)^n, \qquad (1)$$

где $\psi_n(A)$ определяются равенством $\psi_j(A) = \{m_{ij}A^{k_{ij}}\} \times \{u_j\}$, $i, j = 0, ..., n...$, $m_{ij} \in \mathbb{C}$, $k_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u_n \in H$ — тейлоровские коэффициенты функции $u(t)$. Матрица $\{m_{ij}A^{k_{ij}}\}$ определяет оператор F.

Для решения уравнения данного рассмотрим вспомогательное семейство уравнений вида

$$G(a, \varphi(t)) = 0, \quad G(a, \varphi(t)) = \chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(a)(t - t_0)^n, \ t_0 \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где $\chi_n(a)$ определяются равенством $\chi_j(a) = \{m_{ij}a^{k_{ij}}\} \times \{u_j\}, i, j = 0, ..., n...$ $m_{ij} \in \mathbb{C}$, $k_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \varphi_n \in H$ — тейлоровские коэффициенты функции $\varphi(t)$. Матрица $\{m_{ij}a^{k_{ij}}\}$ определяет оператор G. Данное вспомогательное уравнение получается из исходного уравнения формальной заменой оператора A комплексным параметром a и где $G(a, \varphi(t))$ — линейный непрерывный оператор в пространстве H_0, зависящий от параметра $a \in \mathbb{C}$.

Пусть существует функция $\varphi(a; t) \in H(0)$ с тейлоровскими коэффициентами φ_n такая, что для каждого $a \in \mathbb{C}$ соответствующее уравнение семейства (2) имеет решение $\varphi(a; t)$, представимое в виде

$$\varphi(a; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n a^{c_n}(t - t_0)^n, \quad \varphi_n = \xi_n a^{c_n}. \qquad (3)$$

Теорема. *Если решением уравнения (2) является функция (3), то и соответствующее операторное уравнение (1) также имеет решение, представимое аналогичным степенным рядом*

$$u(a; t)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n A^{c_n}(x)(t - t_0)^n, \quad u_n = \xi_n A^{c_n}, x \in H,$$

при условии, что данный ряд сходится на $\mathbb{C}$ или в некотором круге с центром в точке t_0.

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С БЕЛЫМ ШУМОМ

Машков Е.Ю. (Курск)
mashkovevgen@yandex.ru

Введем в рассмотрение стохастическое уравнение леонтьевского типа в R^n, которое понимается в смысле Ито

$$d[AS(t)] + BS(t)dt = f(t)dt + \beta d\zeta(t) + \Lambda dw(t), 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (1)$$

где A, B, β – квадратные $n \times n$-матрицы, причем A вырождена; Λ – $n \times m$-матрица; $S(t)$ – n-мерный случайный процесс; $f(t)$ – n-мерная непрерывная вектор-функция; $\zeta(t)$ – n-мерный процесс скачков; $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс. Экономический смысл: вектор $S(t)$ описывает динамику основных производственных фондов корпорации из n предприятий; вектора $f(t)$ и $\zeta(t)$ отвечают внешним непрерывным и импульсным инвестициям, вложенным в каждое предприятие; белый шум отвечает влиянию случайной окружающей среды на динамику основных фондов; матрица A отражает корпоративное использование индивидуальных средств накопления предприятий; элементы матрицы B зависят от прибыли и фондоотдачи предприятий. Матрица B может быть вырожденной. Такая ситуация возникает, когда каждое предприятие направляет на другие предприятия значительно меньшую долю своей чистой прибыли на реинвестирование и погашение долгов, чем оставляет себе для этих же целей. Подобные математические модели финансово-экономической деятельности корпорации предприятий описаны в работах [1,2]. Специфика уравнений леонтьевского типа предполагает использование производных высших порядков от правой части. Поэтому, следуя работе [3], для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат так называемых производных в среднем по Нельсону от случайных процессов и тем самым не задействуем аппарат теории обобщенных функций.

Изучим уравнение (1) и приведем явную формулу для его решений в терминах производных в среднем винеровского процесса. Пусть $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ - полное вероятностное пространство с неубывающим семейством σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T} (\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$, порожденным винеровским процессом $w(t)$ со значениями в R^m и выходящим из нуля. Винеровский процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$ (см. [3]):

(i) "прошлое"$\mathcal{P}_t^w$ – порожденное прообразами борелевских множеств в R^n при всех отображениях $w(s) : \Omega \to R^n$ для $0 < s < t$;

(ii) "будущее"$\mathcal{F}_t^w$ – порожденное аналогичным образом для $t < s < T$;

(iii) "настоящее"$\mathcal{N}_t^w$ – порожденное самим отображением $w(t)$. Все семейства мы считаем полными, то есть пополняем всеми множествами вероятности нуль. Введем обозначения: $L_1(0, T; R^n)$ – пространство вектор-функций со значениями в R^n, суммируемых на $[0, T]$; $W_1^l(0, T; R^n)$ – пространство Соболева вектор-функций из $L_1(0, T; R^n)$, у которых обобщенные производные до порядка l включительно принадлежат $L_1(0, T; R^n)$. Относительно уравнения (1) предполагаем: матрицы и вектор-функции, входящие в уравнение, являются вещественными; $B + \lambda A$ – регулярный пучок матриц ($det(B + \lambda A)$ не равен нулю тождествено, и, следовательно, A и B могут вырождаться); $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ – процесс скачков

$$\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\zeta}_k(\omega)\chi(t - t_k), 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = T, \quad (2)$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для положительных; $\hat{\zeta}_k(\omega)$ – $\mathfrak{F}_{t_k}$-измеримые случайные величины со значениями в R^n.

Уравнение (1) с процессом скачков (2) переписывается в виде

$$A\acute{S}(t) + BS(t) = f(t) + \beta \sum_{k=1}^{N} \hat{\zeta}_k(\omega)\delta(t - t_k) + \Lambda\acute{w}(t), 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (3)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\acute{w}(t)$ – обобщенная производная винеровского процесса ("белый шум"). Начальное условие для уравнения (3) задается в виде

$$(AS)(0, \omega) = \xi_0, \quad (4)$$

где ξ_0 – постоянный вектор. Отметим сразу, что выписанное ниже решение этому условию не удовлетворяет, и, более того, при $t = 0$ оно не определено. Оно представляет собой аппроксимацию решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию. но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$.

Определение 1. *Решением задачи (1), (2), (4) называется неупреждающий случайный процесс* $S(t,\omega) \in L_1(0,T;R^n)P$*-п. н., который удовлетворяет стохастическим уравнениям*

$$d[AS(t)] + BS(t)dt = f(t)dt + \Lambda dw(t), \;\; t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1},$$

при всех $k = 0,1,\ldots,N$*, в точках* t_k P*-п. н. удовлетворяет равенствам*

$$(AS)(t_k+0,\omega) - (AS)(t_k-0,\omega) = \beta\hat{\zeta}_k(\omega), k = 1,2,\ldots,N,$$

и в начальный момент времени $t_0 = 0$ P*-п. н. удовлетворяет начальному условию (4).*

Итак, решение $S(t)$ задачи (1), (2), (4) определяется последовательно для $k = 0,1,\ldots,N$ через неупреждающие случайные процессы $S_k(t) \in L_1(t_{k,k+1}\,; R^n)$ P-п. н., которые удовлетворяют уравнениям

$$AS_k(t) - \hat{\xi}_k + \int_{t_k}^{t} BS_k(s)ds = \int_{t_k}^{t} f(s)ds + \Lambda w(t), \tag{5}$$

п. в. $\;t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $\omega \in \Omega$, где

$$\hat{\xi}_0(\omega) = \xi_0, \;\; \hat{\xi}_k(\omega) = (AS_{k-1})(t_k,\omega) + \beta\hat{\zeta}_k(\omega), \;\; k = 1,\ldots,N. \tag{6}$$

Пусть пучок матриц $B+\lambda A$ регулярен и контур Γ в комплексной плоскости охватывает все собственные числа пучка. Введем матрицу

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(B+\lambda A)^{-1}d\lambda$$

Тогда из классической теоремы Рисса следует (см. [4]), что пространство R^n распадается в прямые суммы

$$R^n = X_1 \oplus X_2 = Y_1 \oplus Y_2, \;\; X_j = P_jR^n, \;\; Y_j = Q_jR^n, \;\; j = 1,2,$$

где проекционные матрицы P_j, Q_j определяются так

$$P_1 = IA, \;\; P_2 = E - P_1, \;\; Q_1 = AI, \;\; Q_2 = E - Q_1,$$

где E – еденичная матрица. Далее, матрица

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1A + Q_2B, \;\; GP_j = Q_jG, \;\; j = 1,2,$$

обратима и обратная G^{-1} обладает следующими свойствами ([1]):

$$AG^{-1}Q_1 = Q_1, BG^{-1}Q_2 = Q_2, G^{-1}AP_1 = P_1, G^{-1}BP_2 = P_2.$$

Матрица $H = AG^{-1}Q_2 = Q_2AG^{-1} = AP_2G^{-1}$ является нильпотентной с индексом нильпотентности r. Обозначим $C = -Q_1BG^{-1} = -BG^{-1}Q_1 = -BP_1G^{-1}$.

Имеет место теорема о разрешимости задачи (1), (2), (4).

Теорема 1. *Пусть выполняются такие условия: пучок матриц $B + \lambda A$ регулярен; $Q_2 f(t) = h(t)$ – непрерывная функция такая, что если $r \geqslant 2$, то $H^j h(t) \in W_1^j(0, T; R^n), j = 1, 2, \ldots, r-1$; $\hat{\zeta}_k(\omega)$ – $\mathfrak{F}_{t_k}$-измеримые случайные величины, $k = 1, \ldots, N$; $Q_2\xi_0$ – такой вектор, что*

$$Q_2\xi_0 = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{d^j}{dt^j}[H^j h(0)].$$

Тогда с точностью до стохастической эквивалентности относительно σ-алгебры "настоящее"$\mathcal{N}_t^w$ винеровского процесса существует единственное решение $S(t)$ задачи (1), (2), (4) и это решение P-п. н. допускает представление

$$S(t) = G^{-1}\{e^{Ct}Q_1\xi_0 + \int_0^t e^{C(t-s)}Q_1 f(s)ds + \int_0^t e^{C(t-s)}\Lambda dw(s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \chi(t - t_k)e^{C(t-t_k)}\beta\hat{\zeta}_k - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{d^j}{dt^j}[H^j Q_2 f(t)] -$$

$$- \sum_{j=2}^{r-1}[H^j Q_2(-1)^{j-1} \frac{\prod\limits_{i=1}^{j-1}(2i-1)}{2^j} \frac{w(t)}{t^j}] -$$

$$-HQ_2\frac{w(t)}{2t} - Q_2 w(t)\}, \;\; t \in [0, T],$$

где случайные векторы $\hat{\zeta}_k$ последовательно определяются в (6)

Вернемся к вопросу о начальных условиях. Полученное решение описывается как суммы, где имеются слагаемые, которае содержат сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geqslant 1$. Так что решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют. Один из вариантов разрешения указанной ситуации состоит в следующем (см.[3]). Зафиксируем сколь угодно малый момент времени

$t_0 \in (0, l)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant t_0; \\ t, \text{ если } t_0 \leqslant t. \end{cases}$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в решении заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нужные значения, однако они станут решениями только при $t > t_0$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п. н. совпадают.

Литература

1. *Власенко Л. А., Лысенко Ю. Г., Руткас А. Г.* Математические модели динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. Экономическая кибернетика. - 2009.- №5-6 (59-60).- С. 64-71.

2. *Winkler R.* Stochastic differential algebraic equation of index 1 and applications in circuit simulation // J. Computat. and Appl. Math.- 2013.- 157, №2.- P.477-505

3. *Гликлих Ю. Е., Машков Е. Ю.* Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов. Вестник Южно-Уральского государственного университета. - 2013. - Том 6, №2. С.25-39.

4. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $A\dot{x}(t)+Bx(t) = f(t)$. Дифференциальные уравнения.- 1975.- 11 №11. С.1996-2010.

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Меач Мон (Воронеж)

В работе метод конечных элементов применяется для нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial \sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma}, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Модель (1) возникает при описании малых поперечных собственных колебаний, растянутой с силой $p(x)$ вдоль отрезка $[0;\ell]$ и закрепленной на концах, струны с произвольным распределением масс на ней; система помещена во внешнюю среду с локальным коэффициентом упругости dQ. Скачки $Q(x)$ соответствуют локализованным особенностям типа пружина. Функции $\overline{\varphi}_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ — начальные отклонение и скорость соответственно. Решение (1) мы ищем в классе E непрерывных по совокупности переменных на $[0;\ell]\times[0;T]$ функций, которые имеют непрерывные частные производные u'_t и u''_{tt} при каждом фиксированном $x\in[0;\ell]$; $u(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$ при фиксированном t; $p(x)u'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$ для каждого постоянного $t\in[0;T]$; смешанные частные производные u''_{tx} и u''_{xt} равны почти всюду. Функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру, содержит все особенности системы, а именно, у $\sigma(x)$ скачок в тех и только тех точках, в которых скачок хотя бы у одной из функций $p(x)$, $Q(x)$ или $M(x)$. Величина скачка функции $M(x)$, которая отвечает за распределение масс, равна сосредоточенной в этой точке массе.

Для нахождения приближенного решения (1) мы применяем адаптированный метод конечных элементов. Суть его в следующем. Решение $u_N(x,t)$ будем искать в виде $\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k(t)\varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ — классические базисные функции, $a_k(t)$ — неизвестные; $\varphi_k(x)$ строятся следующим образом. Отрезок $[0;\ell]$ разобьем на N равных частей точками x_k, $k=0,1,\ldots,N$ ($x_0=0$, $x_N=\ell$); $\varphi_k(x)$ равна единице в точке x_k, нулю на $[0;x_{k-1}]\cup[x_{k+1};\ell]$, и продолжена линейной функцией на оставшуюся часть отрезка $[0;\ell]$.

Применяя стандартную схему метода конечных элементов (умножая уравнение в (1) на базисную функцию, интегрируя по мере σ (отличие от классического метода), и интегрируя по частям интеграл $\int\limits_0^\ell (p(x)u'_x)'_\sigma\varphi_k(x)\,d\sigma$ для нахождения $a_k(t)$ получим линейную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, для численного решения которой можно применять различные разностные схемы. Отметим, что получающаяся система, дополненная начальным данными, которые определяются из начальных условий модели (1), имеет единственное решение.

Показано, что скорость сходимости приближенного решения к точному имеет порядок $\sqrt{\frac{1}{N}}$.

Литература

[1] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167-169.

[2] Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, АДАПТИРОВАННОГО ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Меач Мон (Воронеж)

Доклад посвящен адаптации метода конечных элементов для нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)u''_{tt} = -\left(p(x)u''_{xx}\right)''_{x\sigma} - uQ'_\sigma, \\ u(0,t) = u''_{xx}(0,t) = u''_{xx}(\ell,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Модель (1) возникает при описании малых поперечных собственных колебаний стержня, закрепленного шарнирно на концах отрезка $[0;\ell]$, с произвольным распределением масс на нем; система помещена во внешнюю среду с локальным коэффициентом упругости dQ. Скачки $Q(x)$ соответствуют локализованным особенностям типа пружина. Функция $p(x)$, отделенная от нуля, характеризует материал из которого сделан стержень. Функции $\overline{\varphi}_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ — начальные отклонение и скорость соответственно. Решение (1) мы ищем в классе E непрерывных по совокупности переменных на $[0;\ell] \times [0;T]$ функций, которые имеют непрерывные частные производные u'_t и u''_{tt} при каждом фиксированном $x \in [0;\ell]$; $u(x,t)$, $u'_x(x,t)$ и $p(x)u''_{xx}$ — абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$ при фиксированном t; $(p(x)u''_{xx})'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$ для каждого постоянного $t \in [0;T]$; смешанные частные производные u'''_{txx} и u'''_{xxt} равны почти всюду. Функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру, содержит все особенности системы, а именно, у $\sigma(x)$ скачок в тех и только тех точках, в которых скачок хотя бы у одной из функций $p(x)$, $Q(x)$ или $M(x)$. Величина скачка функции $M(x)$, которая отвечает за распределение масс, равна сосредоточенной в этой точке массе.

Для приближенного решения уравнения (1) разобьем отрезок $[0;1]$ на равные части (узловыми) точками $\{x_k\}_{k=0}^{k=n+1}$, положив $x_k = \ell\dfrac{k}{h}$, где $h = \dfrac{1}{n}$. Базисные функции зададим следующим образом $\varphi_{2k-1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^3$, если $x \in [x_k - h, x_k]$, $\varphi_{2k-1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^3$, если $x \in [x_k, x_k + h]$, нуль для остальных x; $\varphi_{2k}(x) = (x - x_k)\left(1 + \frac{x-x_k}{h}\right)^2$ для $x \in [x_k - h, x_k]$, $\varphi_{2k}(x) = (x - x_k)\left(1 - \frac{x-x_k}{h}\right)^2$ для $x \in [x_k, x_k + h]$, 0 для остальных x.

Решение $u_N(x,t)$ будем искать в виде $\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_{2k-1}(t)\varphi_{2k-1}(x) + \sum\limits_{k=0}^{N} a_{2k}(t)\varphi_{2k}(x)$, где $a_k(t)$ — неизвестные функции. Применяя стандартную схему метода конечных элементов (умножая уравнение в (1) на базисную функцию, интегрируя по мере σ (отличие от классического метода), и интегрируя дважды по частям интеграл $\int\limits_0^\ell (p(x)u''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k(x)\,d\sigma$ для нахождения $a_k(t)$ получим линейную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, для численного решения которой можно применять различные разностные схемы. Отметим, что получающаяся система, дополненная начальным данными, которые определяются из начальных условий модели (1), имеет единственное решение. Найдена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному.

Литература

[1] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167-169.

[2] Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО МНОГОЧЛЕНОВ БУРЧНАЛЛА — ЧАУНДИ[1]

Мещеряков В.В. (Коломна)
metcherykov@mail.ru

В современной математической физике (см. [3] и цитированную там литературу) важную роль играют так называемые многочлены Бурчналла-Чаунди, которые определяются рекуррентным соотношением

$$\mathcal{P}'_{k+1}\mathcal{P}_{k-1} - \mathcal{P}_{k+1}\mathcal{P}'_{k-1} = (2k+1)\mathcal{P}_k^2,\ \mathcal{P}_0 = 1, \mathcal{P}_1 = x. \qquad (1)$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_k$ зависит от $(k-1)$ постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}$, возникающих при интегрировании (1). Известно [2], что $\deg \mathcal{P}_k = \frac{k(k+1)}{2}$ и что если $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{k-1} = 0$, то $\mathcal{P}_k(x) = x^{\frac{k(k+1)}{2}}$. В работах [1], [2] многочлены $\mathcal{P}_k$ записаны в виде отношения определителей Вронского. Представляет интерес задача о вычислении коэффициентов многочленов Бурчналла — Чаунди. Нами доказано

Предложение. *Разложение многочлена $\mathcal{P}_k$ по степеням переменной x имеет вид*

$$\mathcal{P}_k(x) = x^{\frac{k(k+1)}{2}} + \gamma_1 \binom{k+2}{4} x^{\frac{k(k+1)}{2}-3} + \gamma_2 \binom{k+3}{6} x^{\frac{k(k+1)}{2}-5} + \ldots.$$

В [4] найден явный вид собственных функций операторов

$$\widehat{\nabla}_k = \frac{d}{dx} - \left(\ln\left|\frac{\mathcal{P}_k}{\mathcal{P}_{k-1}}\right|\right)' s$$

в терминах специальных функций Ch_k и Sh_k, где s — оператор отражения, действующий на функции f по правилу $(sf)(x) = f(-x)$.

Используя сформулированное предложение, мы находим линейное приближение по параметру γ_1 собственной функции оператора $\widehat{\nabla}_k$ в терминах функций Бесселя.

Литература

[1] *Berest Y.* Hierarchies of Huygens' operators and Hadamard's conjecture, Acta Applicandae Mathematicae, 53:2 (1998).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00669)

[2] *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* A set of differential equations which can be solved by polynomials, Proc. London Math. Soc. 30 (1929-30), 401-414.

[3] *Берест Ю. Ю., Веселов А. П.* Принцип Гюйгенса и интегрируемость//УМН, №6, 1994, с. 8–78.

[4] *Хэкало С. П.* Дифференциально-разностные аналоги операторов Дункла на прямой, ассоциированные с многочленами Бурчналла-Чаунди. Препринт ПОМИ РАН, 1, 2013.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Мухамадиев Э., Наимов А.Н., Сатторов А.Х. (Вологда)

emuhamadiev@rambler.ru, nan67@rambler.ru

Рассматривается вопрос о представлении ограниченных на всей плоскости решений гиперболических уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + cu(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in R^2. \tag{1}$$

Здесь комплексные числа $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ и комплекснозначная функция $f(x,y)$, которая непрерывна и ограничена на всей плоскости R^2, считаются известными. Ограниченным решением уравнения (1) называем комплекснозначную функцию $u(x,y)$, непрерывную и ограниченную на всей плоскости R^2 вместе с частными производными $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial^2 u/\partial x\partial y$, $\partial^2 u/\partial y\partial x$, и удовлетворяющую уравнению (1). Существование ограниченных решений уравнения (1) исследовано в работе [1]. В этой работе, используя свойства обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве ([2]), доказано, что уравнение (1) для любой непрерывной и ограниченной функции $f(x,y)$ имеет единственное ограниченное решение только в том случае, когда коэффициенты a, b, c уравнения удовлетворяют условию

$$|ab - c| < |Re(a\overline{b} + c)|. \tag{2}$$

Представление ограниченного решения уравнения (1) в работе [1] не рассматривается.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ и выполнено условие (2). Тогда ограниченное решение $u(x,y)$ уравнения (1) представимо в виде*

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} G(x-\xi, y-\eta) f(\xi,\eta) d\eta d\xi,$$

где функция $G(x,y)$ определена формулой

$$G(x,y) = e^{-ay-bx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ab-c)^k}{(k!)^2} x^k y^k,$$

и абсолютно интегрируема в области $x > 0$, $y > 0$

$$\int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} |G(x,y)| dx dy < \infty.$$

Литература

1. *Мухамадиев Э., Байзаев С.* Ограниченные решения гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Известия АН Республики Таджикистан. 2011. Т.142. №1. С.20-25.

2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. - 534 с.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КУРСА АКЦИЙ В РАМКАХ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ (ЭБД)

Нилова Е.В. (Москва)

katerina-nilva@mail.ru

В настоящей работе проводится прогнозирование курса акций в рамках модели ЭБД.

Финансовый индекс A_t представлен в виде модели (ЭБД) [1].

$$A_t = A_0 \cdot e^{H_t},\ H_t = h_0 + h_1 + ... + h_i + ... + h_t,\ h_i = \begin{cases} 0 \text{ при } i = 0 \\ ln\frac{A_i}{A_{i-1}} \text{ при } i > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Члены последовательности h_i независимы, нормально распределены и обладают едиными числовыми характеристиками.По имеющимся A_t и h_i построен прогноз A_{n+k} в момент t=n+k :

$$\hat{A}_{n+k} = A_n \cdot e^{\Delta\hat{H}} = A_n \cdot exp\left\{\Delta\hat{H}\right\} \tag{2}$$

Оценка $\Delta\hat{H} = k \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i = k \cdot \hat{m}$, где

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i, \qquad (3)$$

находится в классе линейных процедур, выбор коэффициентов g_i подчиняется требованиям: математическое ожидание ошибки прогноза равно нулю, средняя квадратическая ошибка прогноза минимальна.[2].

Проведено моделирование курса акций для периода A_{11}.

По известным значениям курса акций вычислены по формуле (1) значения логарифмической прибыли, а также значение среднего по выборке (3): $\hat{m} = 0,0005353672$. Соответственно по формуле (2) вычислен прогноз A_{11} и его ошибка: 110,5591739127 и 0,0408260873.

Литература

*1 Бывшев В.А., Бабешко Л.О.*Алгоритм прогнозирования финансовых индексов в рамках стационарной модели Колмогорова–Винера.Финансовая математика.М.: ТЕИС, 2001. С. 156–165.

2 Бабешко Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности: Учебное пособие. М.: Финакадемия. 2008. С.168-171.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ТИПА ЛАНЖЕВЕНА

Новиков В.В. (Курск)

v.nowikow@yandex.ru

Мы используем обозначения и предварительные сведения из [1 – 3]. Рассматривается стохастическое дифференциальное включение типа Ланжевена на полном римановом многообразии M.

Теорема. Пусть $\mathfrak{a}(t, m, X)$- многозначное векторное силовое поле, имеющие разложимые и замкнутые образы, $\mathfrak{A}(t, m, X)$ – $(1, 1)$-тензорное поле и

$$\xi(t) \in S(\int_0^t \Gamma\mathfrak{a}(\tau, \xi(\tau), \dot{\xi}(\tau))d\tau + \int_0^t \Gamma\mathfrak{A}(\tau, \xi(\tau), \dot{\xi}(\tau)dw(\tau))$$

– стохастическое дифференциальное включение типа Ланжевена. Пусть $\mathfrak{a}$ – ограниченное, полунепрерывное снизу мультиотображение, $\mathfrak{A}(t, m, X) : T_mM \to T_mM$ – однозначный линейный оператор, непрерывный по совокупности переменных и невырожденный при всех $t \in \mathbb{R}, (m, X) \in TM$, а также пусть выполнено условие Ито для $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{U}$. Тогда для всех $m_0 \in M$ и для всех $C \in T_{m_0}M$ включение типа Ланжевена имеет слабое решение с начальными условиями $\xi(0) = m_0 \in M, \dot{\xi}(0) = C$, которое существует при $t \in [0; +\infty)$.

Литература

1. *Богатырёв А. В.* Непрерывные ветви многозначных отображений с невыпуклой правой частью. Математический сборник. - 1983.- №120.- С. 344-353.

2. *B. D. Gelman, Z.Kucharski* The Mixed control problem // J. Computat. and Appl. Math.- 2013.- 157, №2.- P.477-505

3. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. М. КомКнига - 2005. С.319-331.

ПИКСЕЛЬНЫЙ МЕТОД. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Новикова А.О. (Москва)

novikova.a.o@gmail.com

В задачах оптимального управления важную роль играет множество достижимости [1], описывающее все возможные положения управляемой системы в заданный момент времени. Пиксельный метод построения множеств достижимости позволяет решать широкий круг задач, но требует больших вычислительных затрат. Алгоритм позволяет эффективно разделить процедуру вычислений на множество независимых параллельных процессов, поэтому для программирования используется технология CUDA [3]. Применение такой технологии эффективно сокращает время вычислений.

Подготовленная программа позволила провести численные исследования множеств достижимости ряда линейных и нелинейных двумерных управляемых систем. Результаты вычислений сопоставлены с известными аналитическими решениями [1,2]. Проведённые исследования показывают эффективность предлагаемых алгоритмов.

С целью дальнейшего рассмотрения задачи более высокой размерности исследована двумерная нелинейная задача быстродействия — прототип задачи управления ракетой-носителем. Для решения данной задачи привлекается принцип максимума Понтрягина. Дано описание множества управляемости объекта. Показано, что изучаемый объект обладает свойством неколебательности. Построена линия переключения, проходящая через точку финиша (точку предполагаемой цели). Интерес к изучаемым вопросам мотивируется прикладной интерпретацией модели.

Литература

1. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2007.

2. *Киселёв Ю.Н.* Построение точных решений для нелинейной задачи быстродействия специального вида: Фундаментальная и прикладная математика. Т. 3. Выпуск 3, 847–868. 1997.

3. *Боресков А.В., Харламов А.А.* Основы работы с технологией CUDA: Учебное пособие. М.: ДМК-Пресс, 2010.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Новикова О.В. (Ставрополь)

oly-novikova@yandex.ru

Для нахождения автомодельного решения исследуемого уравнения использован алгоритм, описанный в [1].

Теорема 1. *Комплекснозначное нелинейное уравнение в частных производных*

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \overline{p}^2) = 0$$

имеет решения следующего вида

$$p_1(x,t) = \frac{(1+i)C\sqrt{t}e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x^2t^{-1})^{n+1}}}{2} + \frac{(1-i)x}{8C\sqrt{t}e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x^2t^{-1})^{n+1}}}\times$$

$$\times\Bigg[\frac{1}{t}\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\big(4n-2-\frac{x^2}{t}\big)(x^2t^{-1})^n a_n +$$

$$+\frac{4x^2}{t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(x^2t^{-1})^n a_n\Big)^2 + \frac{1}{2}\Bigg) - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4}\Bigg];$$

$$p_2(x,t) = \frac{(1+i)Cxe^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x^2t^{-1})^{n+1}}}{2\sqrt{t}} + \frac{(1-i)\sqrt{t}}{8Cxe^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x^2t^{-1})^{n+1}}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\big(4n+6-\frac{x^2}{t}\big)\big(x^2t^{-1}\big)^n a_n+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4x^2}{t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\big(x^2t^{-1}\big)^n a_n\Big)^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right];$$

где C – const, коэффициенты ряда $a_0=\frac{1}{12}$, a_1 – свободный, последующие коэффициенты определяются по рекуррентной формуле

$$a_{m+2}=$$

$$=-\frac{1}{m\big(7-24(m+2)-4m^2\big)-21}\left[12\sum_{i=0}^{m}a_i\sum_{n=0}^{m-i}(2n+1)a_n a_{m-i-n}+\right.$$

$$+\frac{m+2}{4}a_m-\sum_{n=0}^{m}(6n+5)a_n a_{m-n}\pm(3m+5)a_{m+1}\mp$$

$$\left.\mp 6\sum_{n=0}^{m+1}(4n+1)a_n a_{m+1-n}\right].$$

Литература

1.*Полянин А.Д.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 256 с.

ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ В СРЕДНЕЙ И СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

Оглинда А.В. (Воронеж)

pochta@mail.ru

В представленной работе излагаются схемы курсов по теории цепных дробей. Данный материал предназначен для студентов физико-математических факультетов педагогических университетов, математических факультетов университетов и элективных курсов в средней школе. В курсах, предназначенных, для высшей школы изложение ведется в терминах абстрактных коммутативных колец, и элементарная теория получается как следствие абстрактных результатов. Для средней школы соответствующий курс построен на основе анализа кольца целых чисел и содержит любые приложения цепных дробей в элементарной математике.

Литература

1. Арнольд В.И. Цепные дроби / В.И.Арнольд. – Москва. : изд-во московского центра непрерывного математического образования, 2001.

2. Казачек Н.А., Перлатов Г.Н., Виленкин Н.Я., БородинА.И. Алгебра и теория чисел. М.: Просвещение, 1984.

3. Обуховский В.В., Корнев С.В. Теория чисел часть I. Воронеж: изд-во ВГПУ, 2006.

4. Обуховский В.В., Корнев С.В. Теория чисел часть II. Воронеж: изд-во ВГПУ, 2006.

5. Родосский К.А. Алгоритм Евклида. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1988.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ПАМЯТЬЮ

Орлов В.П., Паршин М.И. (Воронеж)

orlov_ vp@mail.ru, parshin_ maksim@mail.ru

В $Q_T = [0,T]\times\Omega$, где $\Omega\subset R^2$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega\in C^2$ рассматривается начально-граничная задача

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v - \\ -\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))]\,ds + \nabla p = f,\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{1}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\,\theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \\ \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))]\,ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{3}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$, θ и p скорость, температура и давление среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + c\partial v_j/\partial x_i)$ - тензор скоростей деформаций, $\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{ij}$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, $\mu_1(s) \in C^2(-\infty,+\infty)$, $0 < m_1^* < \mu_1(s) < m_1^{**}$, а z - решение задачи Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau \hat{v}(s,z(s;t,x))\,ds, \quad \tau,t\in[0,T], \quad x\in\Omega \tag{5}$$

Регуляризация поля v задается как $\hat{v} = S_\delta v = (I+\delta B)^{-1}v$, $\delta > 0$, где B - действующий в H оператор $Bu = -\mathcal{P}\triangle : D(B)\to H$ с областью определения $D(B) = W^2_{p,0}(\Omega)\cap H$.

Пара (v,θ), где

$$v \in L_2(0,T;V) \cap W_2^1(0,T;V^{'}) \cap C_w(0,T;H) \equiv U(0,T), \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}\theta \in L_1(0,T;W_p^1(\Omega)) \cap W_1^1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))\cap \\ \cap C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)) \equiv \Upsilon,\ 1<p<+\infty,\end{gathered} \qquad (7)$$

называется слабым решением задачи (1)-(4), если выполняются соотношения

$$d(v,\varphi)/dt - (v_i v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + (\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + \\ \mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f,\varphi\rangle$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t,

$$d(\theta,\varphi)/dt - (v_i\theta, \partial\varphi/\partial x_i) + \chi(\partial\theta/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_i) = \langle g,\varphi\rangle + \\ (\tilde{\mu}_1(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v),\varphi) + \mu_2(\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)) : \mathcal{E}(v)(t,x))\,ds, \varphi),$$

где $\tilde{\mu}_1(\theta) = \mu_0 + \mu_1(\theta)$, в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t, и условиям (2) и (4).

Выше $(u,w) = \int_\Omega u(x)w(x)\,dx$ для скалярных, векторнозначных или матричнозначных функций , $C_w(0,T;E)$ обозначает пространство слабо непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве E, H и V являются замыканием $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ соответственно, $'$ обозначает сопряжение пространства.

Теорема 1. *Пусть функция* $\mu_1(s) \in C^2(-\infty,+\infty)$*, монотонно возрастает и*

$$0 < m_1^* < \mu_1(s) < m_1^{**},\ s \in (-\infty,+\infty),$$

$$f \in L_2(0,T;V^{'}),\ v^0 \in H,$$

$$g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega)),\ \theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)).$$

Тогда при $1<p<4/3$ *существует по крайней мере одно решение задачи (1)-(4).*

Литература

Орлов В.П., Паршин М.И. Об одной задаче динамики термовязкоупругой среды типа Олдройта / В.П. Орлов, М.И. Паршин // Известия ВУЗов. Математика. – 2014. – №5. – С. 68-74.

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ МЕТРИЧЕСКИ РЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ МОДЕЛИ ЭРРОУ-ДЕБРЕ С ТРАНЗАКЦИОННЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ

Павлова Н.Г. (Москва)
natasharussia@mail.ru

Исследуется вопрос о существовании положения равновесия в модели Эрроу-Дебре с транзакцонными издержками. В рассматриваемой модели функция спроса получена как решение задачи максимизации функции полезности при бюджетных ограничениях, а функция предложения как решение задачи максимизации прибыли. В результате применения теорем из [1]- [3] о существовании точек совпадения α-накрывающего и липшицева отображений получены достаточные условия существования вектора равновесных цен, изучена устойчивость вектора равновесных цен к малым возмущениям модели..

Будем рассматривать метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y). $B_X(r, x) = \{\xi \in X : \rho_X(x, \xi) \leqslant r\}$, $B_Y(r, y) = \{\xi \in Y : \rho_Y(y, \xi) \leqslant r\}$.

Определение (см. [1]).*Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $S : X \to Y$ называется α-накрывающим, если $S(B_X(r, x)) \supseteq$ $\supseteq B_Y(\alpha r, S(x))$ $\forall r \geqslant 0$, $\forall x \in X$.*

Теорема о точках совпадения (см.[1]). *Пусть пространство X полно, а S, $D : X \to Y$ – произвольные отображения, S непрерывно и является α-накрывающим, D липшицево с константой $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует $\xi = \xi(x_0) \in X$:*

$$S(\xi) = D(\xi), \quad \rho_X(\xi, x_0) \leqslant \frac{\rho_Y(S(x_0), D(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Литература

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах. Докл. РАН, 2007. Т. 416. N 2. С. 151-155.

2. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. J. Fixed Points Theory and Applications, 2009. V. 5. N 1. P. 105-127.

3. *Арутюнов А. В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений. Математические заметки, 2009. Т. 86. N 2. С. 163-169.

ОЦЕНКА И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА СИЛЬНЫХ ЛЕТНИХ ОСАДКОВ С ПРОГНОЗАМИ ЗАРУБЕЖНЫХ И ОТЕЧЕСТВЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ПО СТАНЦИЯМ ЦЕНТРАЛЬНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

Переходцева Э.В. (Москва)

perekhod.mecom.ru

В докладе приводятся результаты гидродинамико-статистического прогноза сильных летних полусуточных осадков количеством $Q > 14$мм/12 в сравнении с результатами прогноза таких осадков, даваемого отечественными и зарубежными гидродинамическими моделями (глобальными, региональными и мезомасштабными), которые используются в отечественной синоптической практике. Оценивались дневные прогнозы с заблаговременностью 12ч и 36ч, а ночные — с заблаговременностью 24ч. Ранее, более 10 лет назад, гидродинамико-статистический прогноз дневных осадков количеством Q>14мм/12ч с заблаговременностью 12ч и 24ч уже был внедрен в пяти региональных управлениях по гидрометслужбе европейской территории России (в том числе в УГМС ЦЧО). Тогда была разработана статистическая модель диагноза и прогноза сильных ливней, т.е. статистическая модель распознавания с помощью полученной на архиве фактических данных дискриминантной функции F(X) ливнеопасных метеорологических ситуаций. Для прогноза заданной заблаговременности в функции F(X) в качестве переменных использовались выходные прогностические значения семи ранее выбранных наиболее информативных и мало зависимых параметров из первой оперативной полусферной модели по полным уравнениям (уравнения будут приведены в докладе). Сравнение предсказанных по данному методу сильных осадков с фактическими проводилось синоптиками по областям 300х300км. Оценки предупрежденности этих явлений Ря и критерия успешности Т=1-а-в (а - ошибка «пропуска цели», в – ошибка «ложной тревоги») оказались существенно выше, чем для инерционных прогнозов и прогнозов синоптиков (для территории Центрально-Черноземных Областей - ЦЧО - Ря. =90%, Т=0,55).

В настоящее время полусферная модель в Гидрометцентре заменена на оперативную региональную модель с горизонтальным разрешением 75х75км. Нами была проведена адаптация статистической модели распознавания сильных ливней к м прогностическим значениям параметров из региональной модели. В связи с появлением новых мезомасштабных (WRF и COSMO) и усовершенствованием основных зарубежных моделей NCEP (Вашингтон), UKMO (Англия) и DWD (Германия) большой интерес представлял анализ и сравнительная автоматизированная оценка прогноза явлений по разным моделям, проведенная точно по станциям, которые присылают в телеграммах свои сведения о количестве выпавших осадков. Для территории Центрального Федерального Округа (ЦФО), в который входит 17 областей, была проведена двоякая оценка. В теплый период 2013 года (15.05.2013г-13.09.2013г) по всем моделям, включая COSMO-2.2, была сделана сравнительная оценка по всем 155 станциям. К сожалению, все мезомасштабные модели и все остальные гидродинамические модели даже в прогнозе на 12ч-18ч дают очень низкие оценки предупрежденности сильных летних полусуточных осадков (P=7%-21%). Лучшим по результатам предупрежденности явлений P=70% и критерию успешности Пирси-Обухова (T) T=0,442 оказался гидродинамико-статистический прогноз с использованием данных региональной модели. Следующий вариант оценки по 17 областным центрам ЦФО, где давались и синоптические прогнозы, показал те же результаты. Самым успешным прогнозом оказался представляемый гидродинамико-статистический прогноз. В докладе будут даны примеры этого прогноза сильных осадков в Московской, Брянской, Орловской, Белгородской и Воронежской областях.

ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ ПОПУЛЯЦИЯМИ ЛЮДЕЙ

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)
anpokrovski@gmail.com

В России после отмены рабовладения (освобождение крепостных крестьян в 1862 г.) возникли революционные организации (и затем в полиции появилось "третье отделение"). Никто из бывших рабов и их детей в этих организациях не участвовал.

Полиция, десятилетиями подавлявшая революционные действия политических партий и групп, постепенно стала вербовать своих тайных агентов в этих партиях и группах, прежде всего в столице.

Благодаря этому тайная полиция частично контролировала все эти группы и партии.

В феврале 1917 г. было опубликовано сообщение об отречении царя Николая Второго от престола (за себя и за сына). Страна осталась без верховной власти. В столице в первый день безвластия на все полицейские участки напали группы революционеров, заняли их и сожгли все полицейские документы. Полиция осталась без архивов и без тайной агентуры, а бывшие полицейские агенты стали её смертельными врагами. На следующий день государственная дума объявила страну республикой, а себя высшей властью.

В.И. Ульянов (Ленин), вернувшийся после многих лет жизни за границей, вероятно не знал о масштабах агентуры охранки и тайных причин разногласий в партии. Его первая крупная ошибка - расстрел рабочей демонстрации в январе 1918 г. в Петрограде - вынудила его перенести столицу в Москву. По окончании гражданской войны его полностью отстранили от власти и изолировали под предлогом болезни.

Ещё до отъезда за границу Ленин поручил хранение старых документов партии студенту (потом инженеру железнодорожной станции между Петроградом и Москвой), который формально не был даже членом партии. В начале 1919-го года к нему приехали из Москвы три вооруженных человека, просмотрели его библиотеку, изъяли документы 1918-го года и уехали. На следующий день он дозвонился до Ленина, сообщил ему об изъятии документов, и Ленин сказал ему, что документы ему вернут. Не вернули, но в следующие 20 лет к нему таких визитов не было.

Хранитель партийных документов даже не мог познакомить с этими документами И.В. Сталина, три заместителя которого в этих самых документах упоминались как бывшие агенты охранки. К началу великой отечественной войны он был пенсионером. Перед тем, как немцы захватили станцию, он нанял извозчика и с его помощью спрятал всю свою библиотеку в лесу. После войны он этих книг не нашёл. Ещё лет через 20, за год-другой до смерти, он опубликовал свою историю. Его библиотека попала сначала к немцам, потом к англичанам, которые послали копию американцам. Эти книги до сих пор там секретны и нам не доступны.

Иосиф Виссарионович Джугашвили (Сталин) в гражданскую войну проявил себя и как крупный военачальник, а не только как политик. Царицинский фронт, которым он командовал, разделял северную и южную группы белых войск и был единственным путём в советскую среднюю Азию в то время. После разгрома белых армий он вернулся в Москву, где занял должность генерального секретаря правительства. Там уже работали три его заместителя, которых он раньше не знал.

И.В. Сталин в 1930-х годах очень интересовался историей партии и даже инициировал издание книги "Краткий курс истории ВКПб". Но не смог найти нужных исторических документов. В конце 1936 г. он решил передать часть власти знаменитому лётчику Валерию Павловичу Чкалову. Но в начале 1937 г. Чкалов погиб в авиационной катастрофе. (Лет 20 спустя выяснилось, что эта катастрофа была специально организована!) Тогда Сталин назначил одного из своих заместителей правителем, а сам ушёл в отпуск и занялся другими срочными делами. За несколько месяцев Сталин получил много писем от людей с жалобами на незаконные репрессии. Вернувшись в Москву, он сразу поехал к оставленному им правителю, и вероятно услышал такое, что приказал немедленно того расстрелять. Партии и стране за эти месяцы был нанесён колоссальный ущерб. После этого Сталин стал присматриваться и к оставшимся двум своим помощникам, но никаких поводов для их увольнения не обнаружил (так же, как и ранее у третьего), и они работали до пенсии.

В 1939 - 1940 г. была война с Финляндией, и граница СССР была отодвинута от Ленинграда на десятки километров. В 1941 году Адольф Гитлер напал на СССР, и началась Великая отечественная война, продолжавшаяся четыре года, а потом ещё война с Японией для возвращения земель, потерянных в войне 1905 года.

После войны был трудный период восстановления страны, вся экономика которой была в тяжёлом состоянии, а в оккупированных областях разрушена. При этом было необходимо срочно создавать ядерное оружие для того, чтобы избежать следующей (ядерной) войны со стороны США. Кроме того, в высших слоях руководства ВКП(б) часть патриотов (сторонников Сталина) за войну погибла, а противники, избегавшие фронта, сохранились и повышались в должностях. При этом они подбирали кадры и организовывали карьеру в партии людям, имевшим какие-либо неявные провинности в молодости, и зависящим от знающих их секреты руководителей.

В конце 1952 г. был съезд ВКП(б), на котором большинство было у врагов Сталина. 1 марта 1953 г. в печати и по радио было объявлено, что И.В. Сталин заболел. Со 2-го по 5-е марта сообщалось, что здоровье Сталина ухудшается, а 6-го марта было объявлено в печати и по радио, что И.В. Сталин умер третьего марта 1953 года. Но фундаментально изменить ситуацию в стране (как это было сделано в 1991 году) тогда не удалось.

Заключение. Длительная внутренняя борьба в партии ВКП(б) и в органах власти вообще не комментировалась в средствах массовой информации.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ, СВЯЗАННОЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ, В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Пчелова А.З. (Чебоксары)

apchelova@mail.ru

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f_0 + f_1 y(x) + f_2 y^2(x) + f_3 y^3(x) + f_4 y^4(x) + f_5 y^5(x) \qquad (1)$$

(где f_i, $i = 0, 1, ..., 5$, — функции вещественной переменной x), в общем случае не разрешимое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками. С помощью подстановки

$$y = w(x)u(\xi) - \frac{f_4}{5f_5},$$

при условиях

$$\frac{f_4}{5f_5} = \frac{f_3}{2f_4} = \frac{f_2}{f_3},$$

где

$$w = \exp\int\left(f_1 - \frac{f_2 f_4}{10 f_5}\right)dx, \quad \xi = \int f_5 w^4 dx,$$

уравнение (1) приводится к нормальной форме

$$u'(\xi) = u^5(\xi) + I(x).$$

Рассматривается задача Коши

$$y'(x) = y^5(x) + r(x), \qquad (2)$$

$$y(x_0) = y_0. \qquad (3)$$

Применяется приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными точками алгебраического типа, идея которого изложена в работах [1–8]. В настоящей работе представлен случай области аналитичности.

Теорема 1. *Пусть функция $r(x)$ задачи Коши (2)–(3) удовлетворяет следующим условиям:*

1) $r(x) \in C^{\infty}$ в области $|x - x_0| < \rho_1$, где $\rho_1 = \mathrm{const} > 0$,

2) $\exists M_1\colon\ \dfrac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \leqslant M_1$, где $M_1 = \mathrm{const}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Тогда решение этой задачи является аналитической функцией

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{4}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, где

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1,\ \frac{1}{4(M_2+1)^4}\right\}, \quad M_2 = \max\left\{|y_0|,\ \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\},$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе доказывается единственность представления решения в виде степенного ряда (4), а на втором этапе — сходимость этого ряда.

Оценки, полученные в теореме 1 для коэффициентов C_n ряда (4), позволяют построить приближенное решение

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n (x - x_0)^n \tag{5}$$

задачи Коши (2)–(3).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения (5) задачи Коши (2)–(3) справедлива оценка погрешности*

$$|y(x) - y_N(x)| \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{N}(4i+1)}{(N+1)!} \cdot \frac{M_2(M_2+1)^{4N+4}|x - x_0|^{N+1}}{1 - 4(M_2+1)^4|x - x_0|}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, где ρ_2 и M_2 — из теоремы 1.

Доказательство теоремы основано на оценке $|y(x) - y_N(x)|$, с учетом оценок для коэффициентов C_n, полученных в теореме 1.

Пример. Найдем приближенное решение задачи Коши (2)–(3), где $r(x) \equiv 0$, $y(1) = 1/\sqrt[4]{2}$.

Эта задача имеет точное решение $y = 1/\sqrt[4]{6-4x}$.

Вычислим радиус аналитичности с учетом начального условия задачи Коши: $\rho_2 = 0,021768204$. Выберем значение $x = 1,014$, принадлежащее области аналитичности $|x - x_0| < \rho_2$. Расчеты приведем в табл. 1.

Таблица 1

Оценка приближенного решения уравнения в случае точных значений начальных условий в области аналитичности

x	y	y_3	Δ	Δ_1	Δ_2
$1,014$	$0,846887914$	$0,846887863$	$5 \cdot 10^{-8}$	$0,038385825$	10^{-5}

Здесь y — значение точного решения данного уравнения, y_3 — значение приближенного решения; Δ — абсолютная погрешность, Δ_1 — априорная погрешность, полученная по теореме 2, а Δ_2 — апостериорная погрешность.

Литература

1. *Орлов В. Н., Лукашевич Н. А.* Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения. Т.25, №10. 1989. — С. 1829–1832.

2. *Орлов В. Н., Фильчакова В. П.* Об одном конструктивном методе построения первого и второго мероморфных трансцендентных уравнений Пенлеве // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. Т.19. IM НАН Украіни, Киев. 1998. — С. 155–165.

3. *Орлов В. Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2008. №2. — С. 42–46.

4. *Орлов В. Н.* Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. СПб., 2008. №4. — С. 102–108.

5. *Орлов В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник МАИ. Т.15, №5. М., 2008. — С. 128–135.

6. *Орлов В. Н.* Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки // Вестник Воронежского государственного технического университета. Т.5, №10. Воронеж, 2009. — С. 192–195.

7. *Орлов В. Н., Редкозубов С. А.* Математическое моделирование решения дифференциального уравнения // Известия института инженерной физики. 2010. №3(17). — С. 2–3.

8. *Орлов В. Н.* Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. Серия «Механика предельного состояния». 2010. №2(8). — С. 399–405.

УПРАВЛЕНИЕ ПОЛНОСТЬЮ НАБЛЮДАЕМОЙ СИСТЕМОЙ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ЦЕПЬ

Раецкая Е.В., Зубова С.П. (Воронеж)
raetskaya@inbox.ru, spzubova@mail.ru

Объектом управления является электрическая сеть, описываемая уравнениями Кирхгофа ([1]), которые специальной заменой переменных сводятся к дифференциально-алгебраической системе:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Du(t) + f(t), \tag{1}$$

$$F(t) = Bx(t). \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ - функция состояния, $u(t) \in R^k$ - управление, $f(t) \in R^n$ - входная измеряемая функция, $F(t) \in R^m$ - измеряемая функция выхода, A, B, D - соответствующие матричные коэффициенты, $t \in [0, T]$, T — конечно или бесконечно.

Система предполагается полностью наблюдаемой, то есть при каждом $u(t)$ по известным, реализуемым входной и выходной функциям состояние системы в каждый момент времени определяется однозначно.

Строится управляющая функция, которая обеспечивает на выходе изначально заданный результат.

Исследование ведется методом каскадного расщепления исходного пространства и перехода к системам в подпространствах.

Данный метод является экономичным при решении практических задач, он применялся при исследовании полной наблюдаемости различных систем, при исследовании инвариантности динамических систем относительно различных возмущений, при решении задач управления с контрольными точками ([2] – [6]).

Решение поставленной задачи реализуется за несколько шагов (их максимальное количество не превосходит размерности исходного пространства).

Приводится четкий алгоритм и блок-схема поэтапного построения управления. Приведены структурные схемы расщеплений пространств.

Получена формула для построения функции состояния.

Литература

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев . — М. : Наука, 1976. — 424 с.

2. Зубова С.П. О полиномиальных решениях линейной системы управления/ С.П.Зубова, Е.В. Раецкая, Ле Хай Чунг// Автоматика и телемеханика, № 11, 2008. — С.41 — 47.

3. Зубова С.П. Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально—алгебраической системы/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж. — 2010. Том 6. № 8. — С. 82 —86.

4. Раецкая Е.В. Полная наблюдаемость сингулярно возмущенной нелинейной нестационарной системы / Раецкая Е.В. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 2012. — Стр.146 — 147.

5. Раецкая Е.В. Исследование полной наблюдаемости динамической системы, моделирующей распространение информации в обществе / Драпалюк М.В., Зубова С.П., Фам Туан Кыонг, Раецкая Е.В.// Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж.— 2012. Том 8. № 5. 2012 г. — С. 10 — 14.

6. Zubova S.P. Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations/ Zubova S.P., Raetskaya E.V.// Journal of Mathematical Sciences. New york. — 2013. Vol. 188, № 3. — С. 218-226.

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ КДВ

Редькина Т.В. (Ставрополь)

tvr59@mail.ru

Лемма 1. *Уравнение на комплекснозначную функцию $u(x,t)$ [1]*

$$u_t = 6\overline{u}_x u + 3(\overline{u} - u)u_x + \frac{1}{2}(u - 3\overline{u})_{xxx} \tag{1}$$

эквивалентно системе на две действительные функции

$$v_t = 6vv_x + 12\omega\omega_x - v_{xxx}, \quad \omega_t = 2\omega_{xxx} - 6v\omega_x. \tag{2}$$

Воспользуемся определением оператора D Хироты [2].

Лемма 2. *Система (2) эквивалентна* $(D_t - 2D_x^3)P \circ Q = 0, (D_xD_t + +D_x^4)Q \circ Q + 6P^2 = \alpha Q^2$, *где* $v(x,t) = -2\partial_x^2 \ln Q(x,t)$, $\omega(x,t) = \frac{P(x,t)}{Q(x,t)}$.

Лемма 3. *Система (2) имеет решение* $\omega(x,t) = \pm\frac{k_1^2}{2}\frac{1-e^{k_1x+2k_1^3t+\mu_1}}{1+e^{k_1x+2k_1^3t+\mu_1}}$, $v(x,t) = -2\partial_x^2 \ln(1+e^{k_1x+2k_1^3t+\mu_1})$, *а (1) — односолитонное решение*

$$u(x,t) = \frac{k_1^2}{2}\Big[-sech\frac{1}{2}(k_1x+2k_1^3t+\mu_1) \pm i\,\mathrm{th}\,\frac{1}{2}(k_1x+2k_1^3t+\mu_1)\Big],$$

где k_1, μ_1 *— произвольные постоянные,* i *— мнимая единица.*

Лемма 4. *Система (2) эквивалентна уравнению*

$$(D_t^2 - D_tD_x^3 - 2D_x^6)Q \circ Q = 0, \tag{3}$$

где $v(x,t) = -2\partial_x^2 \ln Q(x,t)$, $\omega(x,t) = \pm\sqrt{a^2 - \frac{1}{6Q^2}(D_xD_t + D_x^4)Q \circ Q}$, a *— const.*

Теорема. *Уравнение (3) имеет 2-солитонное решение*

$$Q = 1 + e^{\tau_i+\mu_i} + e^{\tau_2+\mu_2} + e^{\tau_1+\tau_2+\mu_{12}},$$

где $\tau_i = k_ix + r_it$, μ_i, k_i, r_i *— постоянные, удовлетворяющие уравнению* $r_i^2 - r_ik_i^3 - 2k_i^6 = 0$, $e^{\mu_{12}} = -\frac{1}{2}\frac{(r_1-r_2+(k_1-k_2)^3)(r_1-r_2-2(k_1-k_2)^3)}{(r_1+r_2+(k_1+k_2)^3)(r_1+r_2-2(k_1+k_2)^3)}e^{\mu_1+\mu_2}$.

Литература

1.*Редькина Т.В.* Некоторые свойства комплексификации уравнения КдВ // Известия АН СССР. Сер. матем. Т.55, №6, 1991.

2.*Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — М.: МИР, 1987. — 479 с.

ФАКТОРИЗАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С α - ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ИЗ L^p - ПРОСТРАНСТВ[1]

Родикова Е.Г. (Брянск)

evheny@yandex.ru

Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций, $B^s_{1,p}$ — класс О. Бесова порядка s (см. [1, с. 47]), $\pi_\beta(z, z_k)$, $\beta > -1$, — бесконечное произведение М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ (см. там же, с. 70), $T_\alpha(r, f)$ — α - характеристика функции f (см. [2]). При всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$ рассмотрим класс

$$N^p_{\alpha,\gamma} := \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T^p_\alpha(r, f) dr < +\infty \right\}.$$

Справедлива

Теорема. *Пусть $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $f \in N^p_{\alpha,\gamma}$ $(0 < p < +\infty,\ \alpha > -1,\ \gamma > -1)$;
2. $f(z)$ *может быть представлена в виде:*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - e^{-i\theta} z)^{\beta+1}} \right),\ z \in D,$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность точек из D, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^p_{\alpha,\,k}}{2^{k(\gamma+1)}} < +\infty,$$

$n_{\alpha,\,k} = N_\alpha\left(1 - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{f}\right)$ *(см. [2])*, $\psi \in B^s_{1,p}$, $s = \beta - (\alpha+1) - \frac{\gamma+1}{p}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $c_\lambda \in \mathbb{C}$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97508)

Литература

1. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций, РИО БГУ, Брянск, 2009. – 152 с.

2. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157.—№ 5. —С. 1024–1027.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМОЖНОСТИ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ НА ПЦО

Родин В.А., Синегубов С.В. (Воронеж)

В предыдущих работах авторов, на основе эмпирических данных, изучались стохастические модели информационных потоков ПЦО крупного городского района. Исследования базировались на применении показательного распределения вероятностей. В настоящей работе продолжено исследование по проверке гипотез о виде распределений отесывающих случайные потоки ПЦО в экстремальных режимах работы с учетом возможностей обработки информации оператором. Эти исследования позволяют моделировать реальную работу ПЦО крупного городского района. Большинство реальных,

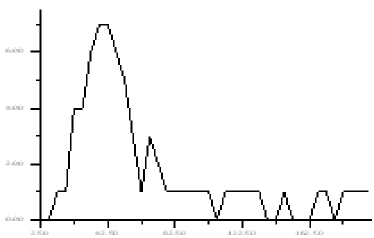

Рис. 1.

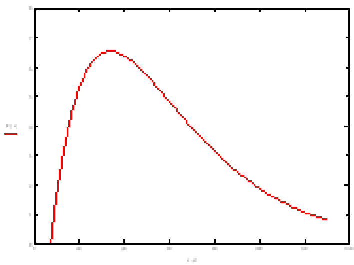

Рис. 2.

применимых в практике, распределений имеют следующую особенность: в окрестности нуля распределение описывается одним видом функций, а при удалении от нуля - другим. К таким распределениям относятся: *гамма - распределение*; *бета - распределение*; *логнормальное распределение* и др. Эмпирические диаграммы (рис.1) показывают значительное расхождение с графиком *показательного распределения*. Это расхождение не случайное и не имеет отношение к объективно поступающим на линию информационным сигналам, которые имеют экспоненциальный закон [1]. Заметим, что на оси абсцисс в модели мы откладываем расстояние между соседними сигналами, приходящими на одну линию. Опытный оператор ПЦО "обслуживает" один сигнал в среднем в течении 10 секунд. Следовательно, промежуток около нуля объективно равен нулю, что и показывает диаграмма. По какому закону повышается производительность обслуживания линии оператором при увеличении времени $t > 10$ сек. неизвестно и является предметом исследования. В работе по эмпирическим данным построены разные модели распределений и проведена статистическая проверка выдвигаемых гипотез с помощью критерия Пирсона. Наилучшие результаты по верификации получены *гамма 2 - распределением* следующего вида: $f(x) = \begin{cases} \lambda^2(x - 10\text{сек.})\, e^{-\lambda(x - 10\text{сек.})}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 10\text{сек} \end{cases}$, рис. 2.

Литература

1. Синегубов С.В., Родин В.А. Применение метода наименьших квадратов для выравнивания экспериментальных данных, характеризующих поток информации интенсивного режима работы ПЦО // Вестник Воронежского института МВД России. Воронеж: Изд-во ВИ МВД РФ, 1999. № 2(4), С. 152-155.

ОБ n-КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим в L_2 пучок $L(\lambda)$ вида: $\sum_{s+k\leqslant n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}$, $p_{sk} \in \mathbf{C}$, $p_{0n} \neq 0$, $\sum\limits_{s+k\leqslant\kappa_{i0}} \lambda^s\alpha_{isk}y^{(k)}(0) + \sum\limits_{s+k\leqslant\kappa_{i1}} \lambda^s\beta_{isk}y^{(k)}(1) = 0$, $i = \overline{1,n}$, где $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbf{C}$, $\kappa_{i0}, \kappa_{i1} \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Пусть корни $\{\omega_j\}$ характеристического уравнения удовлетворяют условию: $\omega_n < \cdots < \omega_{k+1} < 0 < \omega_1 < \cdots < \omega_k,\ n-k < k$. Считаем, что краевые условия упорядочены так, что при $s_0 = l$, $s_{r+1} = n$ имеем $\kappa_{s_0+1,1} - \kappa_{s_0+1,0} = \cdots = \kappa_{s_1,1} - \kappa_{s_1,0} < \cdots < \kappa_{s_r+1,1} - \kappa_{s_r+1,0} = \cdots = \kappa_{s_{r+1},1} - \kappa_{s_{r+1},0}$; γ, δ таковы, что $s_\gamma + 1 \leqslant n-k+1 \leqslant s_{\gamma+1}$, $s_\delta + 1 \leqslant k+1 \leqslant s_{\delta+1}$, . Пусть: $a_{ij} = \sum_{s+k=\kappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k$, $b_{ij} = \sum_{s+k=\kappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k$; $\kappa_i = \min\{\kappa_{i0}, \kappa_{i1}\}$, $i = \overline{1,n}$; $[n]_+ = n$ при $n \geqslant 0$ и 0 при $n < 0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238)

Теорема 1. *Если при* $k = n$ $\det(a_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} \neq 0$, $\det(b_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} \neq 0$, *а при* $k < n$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{s_\gamma,k+1} & \dots & a_{s_\gamma,n} \\ b_{s_\gamma+1,1} & \dots & b_{s_\gamma+1,k} & a_{s_\gamma+1,k+1} & \dots & a_{s_\gamma+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s_\delta,1} & \dots & a_{s_\delta,k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{s_\delta+1,1} & \dots & a_{s_\delta+1,k} & b_{s_\delta+1,k+1} & \dots & b_{s_\delta+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & b_{n,k+1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система корневых функций пучка $L(\lambda)$ n*-кратно полна в пространстве* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим* $\sum_{i=1}^{n}[n-1-\kappa_i]_+$ *в случае, если выполняется хотя бы для одного* i *неравенство* $\max\{\kappa_{i0}, \kappa_{i1}\} > n-1$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рябенко А.С. (Воронеж)
alexr-83@yandex.ru

Рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \tag{1}$$

$$u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем предполагается, что γ – комплексный параметр, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C\left([0;\,d]\right)$ и существует константа c_1 такая, что при $x \in [0;d]$ $0 < c_1 \leqslant |b(x)|$. Также предполагается, что при каждом фиксированном γ, фигурирующем в соответствующих утверждениях, функция $f(x,\gamma)$ непрерывна по переменной $x \in [0;d]$ и принадлежит пространству $L_2\left([0;d]\right)$ по переменной x.

Пользуясь методом продолжения по параметру (см. [1]) и априорными оценками для задачи (1)-(2) (см. [2]), были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть ε_0 – произвольная константа, такая что $0 < \varepsilon_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, тогда при $|\varphi| \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$ у задачи (1)-(2) существует решение.

Теорема 2. Существует такая положительная константа ε_1, что при $|\gamma| \leqslant \varepsilon_1$ задача (1)-(2) имеет решение.

Используя априорные оценки для задачи (1)-(2) (см. [2]) и методы из работ [3], [4], были доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть ε_0 – произвольная константа, такая что $0 < \varepsilon_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если при $|\varphi| \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$ функция $f(x, \gamma)$ дифференцируема по γ, а функция $\frac{\partial f(x, \gamma)}{\partial \gamma}$ принадлежит пространству $L_2\left([0; d]\right)$ по переменной x, то при $x \in [0; d]$ решение задачи (1)-(2) будет аналитической функцией по переменной γ при $|\varphi| \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$.

Теорема 4. Если существует такая положительная константа ε, что при $|\gamma| \leqslant \varepsilon$ функция $f(x, \gamma)$ дифференцируема по γ, а функция $\frac{\partial f(x, \gamma)}{\partial \gamma}$ принадлежит пространству $L_2\left([0; d]\right)$ по переменной x, то найдется такая положительная константа ε_1, что при $|\gamma| \leqslant \varepsilon_1$ и $x \in [0; d]$ решение задачи (1)-(2) будет аналитической функцией по переменной γ.

Литература

1. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин // – М.: Физматлит., 2002. – 448 с.

2. Рябенко А. С. Априорные оценки краевой задачи с комплексным параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для волнового уравнения на отрезке / А. С. Рябенко // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. VI междунар. Конф. "ПМТУКТ - 2013"/ под ред. А. П. Жабко. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2013. – С. 207-210.

3. Глушко А. В. Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости / А. В. Глушко, А. С. Рябенко // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 4. – С. 585-593.

4. Рябенко А. С. Изучение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко, Ю. Ю. Карпова // Вестник ВГУ серия физика и математика. – 2011. – № 1. – С. 168-173.

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ

Рябенко А.С. (Воронеж)
alexr-83@yandex.ru

В монографии [1] была доказана следующая лемма.

Лемма. Пусть $f(t)$ – вещественнозначная функция, такая что $f(t) \in C([0;\infty)) \cap L_p([0;\infty))$, где $p > 1$, а $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, тогда если при $t \in [0;\infty)$ $f(t) \geqslant 0$, то справедлива оценка:

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^\infty (f(x))^p dx.$$

В предыдущей лемме можно отказаться от условия $f(t) \geqslant 0$ и доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $f(t)$ – вещественнозначная функция, такая что $f(t) \in C([0;\infty)) \cap L_p([0;\infty))$, где $p = 2, 4, 6, ...$, а $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, тогда справедлива оценка:

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^\infty (f(x))^p dx.$$

Результаты из первых двух лемм могут быть использованы для получения априорных оценок решений уравнений с растущими коэффициентами (см. [2], [3]).

Часто изучение эволюционных уравнений можно свести к изучению дифференциальных уравнений с комплекснозначными коэффициентами (см. [4], [5]), для которых оценки первых двух лемм неприменимы. Пользуясь результатами леммы 1 неравенство Харди можно доказать для комплекснозначных функций. В частности, будет справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $u(x)$ – комплекснозначная функция, такая что $u(0) = 0$, $u(x) \in C^1([0;\infty))$, а $u'(x) \in L_2([0;\infty))$, тогда справедлива оценка:

$$\int\limits_0^\infty \left|\frac{u(x)}{x}\right|^2 dx \leqslant 4 \int\limits_0^\infty \left|u'(x)\right|^2 dx.$$

Литература

1. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа; пер. с англ. В. И. Левина. – М.: Гос. изд-во иностран. лит., 1948. – 456 с.

2. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин // – М.: Физматлит., 2002. – 448 с.

3. Рябенко А. С. Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2007. – № 1. – С. 95-99.

4. Глушко А. В. Асимптотические методы в задачах гидродинамика / А. В. Глушко. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2003. – 300 с.

5. Глушко А. В. Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости / А. В. Глушко, А. С. Рябенко // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 4. – С. 585-593.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Савин А.Ю., Стернин Б.Ю. (Москва)

a.yu.savin@gmail.com, sternin@mail.ru

Доклад посвящен комплексной теории дифференциальных уравнений. Именно, изучаются линейные дифференциальные уравнения в $\mathbb{C}^n$ и, более общим образом, на комплексных многообразиях. Теория таких уравнений является необычайно богатой и интересной. Оказывается, что для исследования уравнений в комплексной теории необходимо применять существенно новые методы, нежели в классической (вещественной) теории. Эти методы будут обсуждены в докладе, в частности, будет описано преобразование Стернина-Шаталова, которое позволяет выписать точно решение уравнений с постоянными коэффициентами.

Комплексная теория имеет важные приложения в математике и физике. Так в докладе будет показано, как описанными методами может быть решена задача Пуанкаре о заметании заряда.

Литература

B.Yu. Sternin, V.E. Shatalov. Differential equations on complex manifolds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, 504 pp.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ДИФФУЗОРЕ[1]

Сапронов Ю.И. (Воронеж)
yusapr@mail.ru

Ряд известных подходов к построению точных и приближенных аналитических решений уравнения Навье-Стокса основан на редукции к конечномерным динамическим системам и краевым задачам для ОДУ [1] – [3]. Получаемые при этом упрощенные системы гидродинамического типа [2] – [3] позволяют достаточно точно моделировать течения жидкости в областях достаточно произвольных геометрических форм. Упрощенные уравнения используются, в частности, при изучении течений в диффузоре, начиная с основополагающих работ Джеффри [4] и Гамеля [5] (1915 и 1917 гг.).

В настоящей работе использован подход, основанный на двухшаговой редукциии: сначала к краевой задаче для ОДУ с квадратичной нелинейностью, а затем к конечномерному уравнению — через нелинейную галеркинскую аппроксимацию по схеме Ляпунова-Шмидта.

1. Двумерная жидкость, уравнение Гельмгольца.

Обратимся к двумерному уравнению Навье-Стокса (см., например, [1])

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x}\, v = \nu\Delta(v) + \mathrm{grad}\,(p). \tag{1}$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двумерный лапласиан, $\frac{\partial v}{\partial x}$ — матрица Якоби вектора скорости v по компонентам точки $x = (x_1, x_2)$. Искомое поле векторов скорости $v = v(x_1, x_2, t)$ считается заданным на некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и «стандартными» краевыми условиями. Для получения упрощенных уравнений используется соотношение $\mathrm{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \mathrm{grad}\,(\Delta\psi)$; $\mathrm{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\, v\right) = [\psi, \Delta(\psi)]$, где $\mathrm{rot}\,(v) := [\nabla, v] = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, $[\psi, \varphi]$ — якобиан функций ψ, φ. Условие неразрывности $\mathrm{div}(v) = 0$ приводит к записи решения в виде $v := \mathrm{sgrad}(\psi) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^{\top}$, где $\psi(x_1, x_2, t)$ — так называемая вихревая функция. Для функции φ

[1] Работа выполнена при поддержке ОАО «Турбонасос».

естественно требуется выполнение граничных условий

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi)\Big|_{\partial\Omega} := (\mathrm{grad}\,, n)(\varphi)\Big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2}$$

Пусть $u := \mathrm{rot}(v) = \Delta(\psi)$, тогда $\dot{u} = \mathrm{rot}(\dot{v}) = \Delta(\dot{\psi})$. После применения двумерного ротора к левой и правой частям уравнения (1) получим уравнение в форме Гельмгольца ([1], стр. 406)

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi),\, \psi] + \nu\, \Delta^2(\psi)\,. \tag{3}$$

2. Подстановка Гамеля.

Наиболее известной является редукция Гамеля, которая осуществляется посредством сужения уравнения Гельмгольца на класс функций вида (см. [1], стр. 478) $\varphi = Q\, q(\theta)$, где $Q := \int_0^\beta r\, u\, d\theta$ — поток жидкости через диффузор. Используя соотношения $\Delta(\varphi) = Q \frac{q''}{r^2}$, $[\Delta(\varphi),\, \varphi] = -Q^2\, \frac{2\, q'' q'}{r^4}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{q''}{r^2}\right) = \frac{6\, q''}{r^4}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q''}{r^2}\right) = -\frac{2\, q''}{r^4}$, $\frac{1}{r^2}\left(\frac{q''}{r^2}\right)'' = \frac{q''''}{r^4}$, получим вместо стационарного варианта уравнения (3) следующее ОДУ: $q'''' + 4\, q'' + 2\mathcal{R}\, q'' q' = 0$, где $\mathcal{R} = \frac{Q}{\nu}$ — число Рейнольдса. В случае плоского диффузора это уравнение дополняется краевыми условиями (см. (2)) $q(0) = 0$, $q(\beta) = 1$, $q'(0) = q'(\beta) = 0$. Условие $q(\beta) = 1$ вытекает из-за того, что $\int_0^\beta q'\, d\theta = \frac{1}{Q}\int_0^\beta r\, u\, d\theta = 1$ — (нормированный) поток через диффузор (см. [6],[7]). После масштабирующего преобразования угловой переменной $\theta \longrightarrow \beta\theta$ приходим к краевой задаче

$$q'''' + \lambda\, q'' + 2\widetilde{\mathcal{R}}\, q'' q' = 0\,, \tag{4}$$

$$q(0) = 0\,, \qquad q(1) = 1\,, \qquad q'(0) = q'(1) = 0\,, \tag{5}$$

где $\lambda = 4\beta^{-2}$, $\widetilde{\mathcal{R}} = \beta^{-1}\mathcal{R}$. Последняя краевая задача является вариационной: левая часть уравнения (4) является градиентом функционала

$$V = \int_0^1 L(q'', q')\, d\theta\,, \quad L(q'', q') = \frac{(q'')^2}{2} - \lambda\frac{(q')^2}{2} + \widetilde{\mathcal{R}}\,\frac{(q')^3}{3}\,. \tag{6}$$

В работах [6] – [7] представлены результаты построения приближенных решений задачи (4) – (5) на основе метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений в противовес методу точного аналитического решения в эллиптических функциях (возможность точного аналитического решения имеется вследствие полной интегрируемости уравнения (4)). Но представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к приближениям вследствие недостаточной точности ($10^{-4} - 10^{-6}$) существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. Требуемая точность в современных прикладных задачах: $10^{-8} - 10^{-10}$ и выше.

После первичного интегрирования уравнения (4) и замены $q' = w$ получим краевую задачу

$$w'' + \lambda\, w + \widetilde{\mathcal{R}}\, w^2 = c\,, \qquad c - \mathrm{const}\,, \tag{7}$$

$$w(0) = w(1) = 0\,, \tag{8}$$

при дополнительном интегральном ограничении

$$\int_0^1 w\, d\theta = 1\,. \tag{9}$$

3. Случай нулевого значения числа Рейнольдса

Рассмотрим задачу (7) – (8) при $\widetilde{\mathcal{R}} = 0$:

$$u'' + \lambda\, u = c\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,, \quad \int_0^1 u\, d\theta = 1\,. \tag{10}$$

Ее решения являются критическими точками квадратичного функционала $V := \int_0^1 \frac{1}{2}\left((u')^2 - \lambda\, u^2\right) d\theta$ на гиперплоскости $\mathcal{M} = \{u \in H^1[0,1] : \int_0^1 u\, d\theta = 1\}$ в тройке $E = F = H = H^1[0,1]$ (см. [8]).

Теорема 1. *Совокупность экстремалей сужения функционала V на гиперплоскость $\mathcal{M}$ есть объединение следующих серий векторов (при соответствующих значениях параметра λ):*

$$s_{0,k} = \frac{\pi\, k}{2}\, \sin(\pi\, k\, \theta)\,, \qquad \lambda = \lambda_{0,k} := (\pi\, k)^2\,;$$

$$s_{\varepsilon,k} = a(\varepsilon)\, \sigma_\varepsilon(\theta)\,, \quad \sigma_\varepsilon(\theta) := \sin(\varepsilon + (\pi\, k - 2\varepsilon)\theta) - \sin(\varepsilon)\,,$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,k} := (\pi\, k - 2\varepsilon)^2\,; \qquad k = 2m - 1\,, \qquad m = 1,\, 2,\, \ldots\,,$$

$a(\varepsilon)$ — величина, обратная к среднему значению функции $\sigma_\varepsilon(\theta)$;

$$s_{\varepsilon,2m} = \frac{1}{\sin(\varepsilon)}(\sin(2\pi\, m\, \theta - \varepsilon) + \sin(\varepsilon)) =$$

$$= \frac{1}{\sin(\varepsilon)}(\cos(\varepsilon)\sin(2\pi\, m\,\theta)+\sin(\varepsilon)(1-\cos(2\pi\, m\,\theta)))\,, \qquad m=1,\,2,\,\dots\,,$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,2m} := (2\pi\, m)^2\,, \qquad m = 1,\,2,\,\dots\,;$$

$$f_{0,j} = 1-\cos(2\,j\,\pi\,\theta)\,, \quad \lambda = \mu_{0,j} := (2\,j\,\pi)^2\,;$$

$$f_{\varepsilon,j} = b(\varepsilon)\,\rho_\varepsilon(\theta)\,, \qquad \rho_\varepsilon(\theta) = \cos(\varepsilon + 2(j\pi-\varepsilon)\theta) - \cos(\varepsilon)\,,$$

$$\lambda = \mu_{\varepsilon,j} := 4\,(j\,\pi-\varepsilon)^2\,, \quad j = 1,\,2,\,\dots\,;$$

$b(\varepsilon)$ — *величина, обратная к среднему значению функции* $\rho_\varepsilon(\theta)$.

2. Случай конечного значения числа Рейнольдса

Для осуществления нелокальной редукции Ляпунова-Шмидта в краевой задаче (7) – (8) запишем ее в виде операторного уравнения

$$f(w) := \mathcal{A}w - \lambda\, w + g(w,w) + c = 0, \qquad w \in E, \tag{11}$$

где $E = C^2[0,1]\cap\{w(0)=w(1)=0\}$, $\mathcal{A} = -d^2/d\theta^2$, $g(w,w) := \widetilde{\mathcal{R}}\, w^2$, c — const. Оператор f действует из E в $F = C[0,1]$. Линейный оператор $\mathcal{A}$ является положительным и диагонализуемым: $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty}(\pi k)^2\xi_k e_k$, $e_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi k}\sin(\pi k\theta)$ — собственная функция оператора $\mathcal{A}$, отвечающая собственному значению $(\pi k)^2$. Собственные функции e_k образуют ортонормированную систему в H^1. Перепишем уравнение (11) в виде

$$w - \mathcal{A}^{-1}(g(w,w) + \lambda\, w - c), \quad w \in H^1[0,1]\,. \tag{12}$$

Используя процедуру ортогонального разложения пространства в сумму подпространств, разобьем уравнение (12) в систему двух уравнений

$$\left.\begin{array}{rcl} u - \mathcal{A}_1^{-1}(g_1(w,w)) + \lambda\, u - a) & = & 0\,, \\ v - \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(w,w)) + \lambda\, v - b) & = & 0\,, \end{array}\right\} \tag{13}$$

где $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}\big|_N$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}\big|_{N^\perp\cap E}$, $N := Lin(e_1,\dots,e_n)$, $w = u+v$, $u = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$, $v = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\xi_k e_k$, $a = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$, $b = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k e_k$, $\alpha_k = \langle c, e_k\rangle_1$. Ворое уравнение системы (13) рассмотрим в пространстве функций $N^\perp \cap H^1[0,1]$. Из спектральных свойств опратора A вытекает, что при достаточно больших размерностях редукции n норма оператора $\mathcal{A}_2^{-1} : N^\perp\cap H^1 \longrightarrow N^\perp\cap H^1$ становится малой и поэтому оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(u+v,u+v) + \lambda\, v - b)$ переводит некоторый шар $\|v\|_{H^1} \leqslant L$ (в $N^\perp\cap H^1$) в себя, являясь при этом сжимающим. То есть решения второго уравнения системы (13) можно получать в аналитической форме $v = \Phi(u)$. В итоге получим так называемое ключевое уравнение

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0 \qquad (14)\,.$$

Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется формулой $w = u + \Phi(u)$. Уравнение (14) является потенциальным с потенциалом (ключевой функцией) $W(u) := V(u + \Phi(u))$, $u \in N$. Поиск и анализ экстремалей функционала V можно осуществлять посредством изучения экстремалей ключевой функции W. Заключительный этап предложенной здесь вычислительной схемы состоит в отборе тех решений задачи (7) – (8), для которых выполняется ограничение (9).

Литература

1. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика, ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. – 728 стр.

2. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат. 1988. – 414 с.

3. *Арнольд В.И., Хесин Б.А.* Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО. 2007. – 392 с.

4. *Jeffery G.B.* The two-dimensional steady notion of a viskous fluid// Phil. Mag. 1915. Ser.6. V.29, N 172/ – P. 455-465.

5. *Hamel G.* Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten// Jahresber. Detsch. Math. Ver. 1917. Bd 25. – S. 34-60.

6. *Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А.* Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре// Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. – С. 25-36.

7. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. – С. 431-441.

8. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004). – С.3-140.

ФУНКЦИОНАЛ ДИРИХЛЕ НА ГРУППЕ ДВУМЕРНЫХ СФЕРОИДОВ В $SO(3)$

Сапронова Т.Ю. (Воронеж)

tsapr@mail.ru

Рассматривается "двумерный" функционал Дирихле

$$V(f) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{K}}\int \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,s) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) \right|^2 \right) dtds$$

на банаховой группе Ли $\mathcal{M}$ "сингулярных сфероидов"

$$\{f \in C^{2+\gamma}(\mathcal{K}, SO(3)), \quad f(\partial\mathcal{K}) = I\}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

где $\mathcal{K}$ — кольцо в $\mathbf{R}^2$ с центром в начале координат, ограниченное окружностями радиусов r_1 и r_2, $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2 < \infty$.

Функционал Дирихле является фредгольмовым на $\mathcal{M}$ и инвариантным относительно действия группы $G = SO(3)$ на $\mathcal{M}$, заданного формулой $\mathcal{T}_g(f) = g^{-1}fg$.

Перейдем к полярным координатам, совершив замену $t = r\cos\varphi$, $s = r\sin\varphi$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и положив $\bar{f}(r,\varphi) = f(t,s)$. В новых координатах функционал V выглядит следующим образом:

$$\bar{V}(\bar{f}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(r \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r,\varphi) \right|^2 + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi) \right|^2 \right) dr.$$

Условие на границе примет вид $\bar{f}(r_1,\varphi) = \bar{f}(r_2,\varphi) = I \quad \forall\varphi \in [0,2\pi]$.

Данная замена координат не изменяет тип гладкости сфероидов. Сфероид $\bar{f}$ естественно продолжается (с сохранением типа гладкости) на всю полосу $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, причем для него выполняется соотношение (условие $2\pi-$периодичности по φ) $\bar{f}(r,\varphi) = \bar{f}(r,\varphi+2\pi)$. Это же соотношение сохранится и для всех производных сфероида (все производные будут $2\pi-$периодическими) [1].

Теорема 1. *Для первого кодифференциала функционала $\bar{V}$ имеет место представление*

$$\nabla^1\bar{V}(\bar{f}) = -\bar{f} \left(r\,\frac{\partial\Omega_r}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Omega_\varphi}{\partial\varphi}(r,\varphi) + \Omega_r \right),$$

где $\Omega_r = \bar f^{-1}\frac{\partial \bar f}{\partial r}, \quad \Omega_\varphi = \bar f^{-1}\frac{\partial \bar f}{\partial \varphi}.$

Вычисление экстремалей функционала $\bar V$ сводится к поиску решений уравнения

$$\nabla^1 \bar V(\bar f) = 0. \tag{1}$$

Для удобства изменим область значений "сфероидов": от $SO(3)$ перейдем к сфере S^3. Известно, что существует двулистное накрытие $P : S^3 \longrightarrow SO(3)$, являющееся локальным диффеоморфизмом, такое, что $P(-x) = P(x)$ [2]. В качестве $\mathbf{R}^4$ рассматривается линейная оболочка $\mathbf{H}$ матриц $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = -i\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (последние три известны как "матрицы Паули"). При таком задании пространства $\mathbf{R}^4$ сфера S^3 отождествляется с $SU(2)$. Группа $SU(2)$ действует на подпространстве $\mathbf{H}_1 = Lin\{e_1, e_2, e_3\}$ (мнимой части тела кватернионов) по закону

$$\mathcal{T}_g x = g^{-1} x g, \; g \in SU(2), \; x \in \mathbf{H}_1.$$

При этом множество $\{\mathcal{T}_g : g \in SU(2)\}$ совпадает с $SO(3)$. Таким образом, P — это отображение, переводящее каждый элемент $g \in SU(2)$ в оператор $\mathcal{T}_g \in SO(3)$.

Каждому "сфероиду" $f \in \mathcal{M}$ соответствуют два "сфероида" g_1 и g_2, лежащих на S^3, таких, что $P \circ g_1 = P \circ g_2 = f$ (см. в [3] лемму "о накрывающем пути"). Таким образом, P порождает гладкое субмерсивное отображение $\hat P : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$, где

$$\mathcal{L} = \{g \in C^{2+\gamma}(\mathcal{K}, S^3), \quad f(\partial\mathcal{K}) = \{\pm e_0\}\}.$$

Рассмотрим функционал

$$\bar U(\bar f) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(r\left|\frac{\partial \bar g}{\partial r}(r,\varphi)\right|^2 + \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \bar g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right|^2 \right) dr,$$

где $\bar g(r,\varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad g \in \mathcal{L}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$

Теорема 2. *Функционалы $\bar U$ и $\bar V$ связаны соотношением*

$$\bar U(\bar g) = \frac{1}{4}\bar V(\hat P(\bar g)).$$

Каждой экстремали $\bar{g}$ функционала $\bar{U}$ соответствует экстремаль $\hat{P}(\bar{g})$ функционала $\bar{V}$, поэтому от исследования уравнения (1) можно перейти к поиску решений уравнения $\nabla^1\bar{U}(\bar{g}) = 0$. Нетрудно установить, что первый кодифференциал сохраняет свой вид:

$$\nabla^1\bar{U}(\bar{g}) = -\bar{g}\left(r\frac{\partial\hat{\Omega}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\Omega}_\varphi}{\partial\varphi} + \hat{\Omega}_r\right),$$

где $\hat{\Omega}_r = (\bar{g})^{-1}\frac{\partial\bar{g}}{\partial r}$, $\hat{\Omega}_\varphi = (\bar{g})^{-1}\frac{\partial\bar{g}}{\partial\varphi}$.

Поиск общего решения уравнения $\nabla^1\bar{U}(\bar{g}) = 0$ связан с преодолением весьма серьезных препятствий. Поэтому, чтобы найти хотя бы частные решения, будем искать только экстремали вида

$$x(\alpha)(r,\varphi) = \cos\alpha(r)e_0 + \cos\varphi\sin\alpha(r)e_1 + \sin\varphi\sin\alpha(r)e_2, \qquad (2)$$

где $\alpha \in C^{2+\gamma}([r_1,r_2],\mathbf{R})$, $\alpha(r_1) = \pi m$, $\alpha(r_2) = \pi n$, $m,n \in \mathbf{Z}$.

Первый кодифференциал функционала $\bar{U}(\bar{g})$ в точке x имеет следующий вид:

$$\nabla^1\bar{U}(x) =$$

$$= -x(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi)\left(\alpha'(r) + r\alpha''(r) - \frac{1}{r}\cos\alpha(r)\sin\alpha(r)\right).$$

Таким образом, поиск экстремалей при $\bar{g} = x$ сводится к поиску решений интегрируемого уравнения

$$\alpha' + r\alpha'' - \frac{1}{r}\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Каждое решение (с учетом краевых условий) после подстановки в (2) дает экстремаль $\hat{x}_{m,n}$ функционала $\bar{U}$, а следовательно, и критическую орбиту $\{S^{-1}\hat{P}(\hat{x}_{m,n})S,\ S \in SO(3)\}$ для функционала $\bar{V}$.

Литература

1. *Сапронова Т.Ю.* О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов. // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. Воронеж, ВГУ. 2000. С. 107–124.

2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. М.: Наука. 1986. – 760 с.

3. *Фоменко А.Т., Фукс Д.Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука. 1989. – 528 с.

О ПОЛНОМ МОДУЛЕ ГЛАДКОСТИ И А – ИНТЕГРИРОВАНИИ РЯДОВ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx. \tag{2}$$

Определение 1 ([1]). Будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (B), если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\Delta a_n|<\infty$, где $\Delta a_n=a_n-a_{n+1}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (B), то ряды (1) и (2) сходятся всюду, кроме, быть может, точек $x\equiv 0(\mathrm{mod}2\pi)$. Обозначим сумму ряда (1) через $f(x)$, а сумму ряда (2) – через $g(x)$.

Определение 2 ([1]). Функция f $A-$интегрируема на $[a,b]$, если f определена почти всюду и измерима на $[a,b]$ и

1) мера $\mu\{x\in[a,b]:|f(x)|>n\}=o(\frac{1}{n})$ при $n\to\infty$,

2) существует предел интегралов Лебега $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b[f(x)]_n dx$, где

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x), & \text{если} \quad |f(x)|\leqslant n, \\ 0, & \text{если} \quad |f(x)|>n. \end{cases}.$$

Величину предела называют $A-$интегралом от функции f на $[a,b]$ и обозначают $(A)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение 3 ([1]). Тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00043) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3682.2014.1).

называется рядом Фурье (A) функции $f(x)$, если

$$a_k = \frac{1}{\pi}(A)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx (k=0,1,2,...) \text{ и}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}(A)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx (k=1,2,...).$$

Теорема П.Л.Ульянова([1]). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *удовлетворяет условию* (B), *то ряды (1) и (2) являются рядами Фурье (A) функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *соответственно.*

В данной работе теорема П.Л. Ульянова переносится на последовательности из класса $(OB_r)(r \in N)$.

Определение 4. Будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $(OB_r)(r \in N)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta_{1,r}a_{nr}| + ([\tfrac{r}{2}] - [\tfrac{r-1}{2}])\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta_{1,r}a_{nr+[\frac{r}{2}]}| + \mathrm{sign}[\tfrac{r-1}{2}]\sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(|\Delta_{1,r}(a_{nr+k}+a_{nr+r-k})| + |\Delta_{1,r}(a_{nr+k}-a_{nr+r-k})|) < \infty,$$

где $[a]-$целая часть числа a, $\Delta_{1,r}a_n = a_n - a_{n+r}$.

Заметим, что если $r=1$, то $\Delta_{1,r}a_n = \Delta_{1,1}a_n = \Delta a_n, [\frac{r}{2}] - [\frac{r-1}{2}] = = 0, \mathrm{sign}[\frac{r-1}{2}] = 0$, т.е. условие (OB_1) совпадает с условием (B).

Приведем примеры.

Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то она удовлетворяет условию (B), а также условию (OB_1).

Если взять последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_{2n} = \frac{1}{n+1}$ при $n = 0,1,2,...$ и $a_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$ при $n = 0,1,2,...$, то эта последовательность не удовлетворяет условию (B), но удовлетворяет условию (OB_2).

Если взять последовательность $\{a_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, и разбить ее на $r(r \in N)$ подпоследовательностей $\{a_{rn}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{a_{rn+1}\}_{n=0}^{\infty}, ..., \{a_{rn+r-1}\}_{n=0}^{\infty}$, каждая из которых монотонна, то эта последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (OB_r).

Утверждение. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *удовлетворяет условию* $(OB_r)(r \in N)$, *то ряды (1) и (2) сходятся почти всюду и являются рядами Фурье (A) функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *соответственно.*

Обозначим через

$-L_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$, – множество функций $f(x,y)$ двух переменных, $2\pi-$ периодических по каждому переменному, каждая из которых

при $1 \leqslant p < \infty$ измерима и $||f||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x,y)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$,
а при $p = \infty$ непрерывна и $||f||_\infty = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi} |f(x,y)|$,

$-L_p^0-$ множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x,y)dy = 0$ для почти всех x и $\int\limits_0^{2\pi} f(x,y)dx = 0$ для почти всех y,

$-V_{n_1 n_2}(f)(n_1 = 0,1,2,...,n_2 = 0,1,2,...)-$ суммы Валле-Пуссеена ряда Фурье функции $f \in L_p$, т.е.
$V_{n_1 n_2}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x+t_1, y+t_2) V_{n_1}^{2n_1}(t_1) V_{n_2}^{2n_2}(t_2) dt_1 dt_2$, где
$V_0^0(t) = D_0(t), V_n^{2n}(t) = \frac{1}{n}\big(D_n(t) + ... + D_{2n-1}(t)\big), n = 1,2,...,$
$D_k(t) = \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}, k = 0,1,2,...,$

$-T_{nn}(x,y) = \sum\limits_{k_1=-n}^{n} \sum\limits_{k_2=-n}^{n} c_{k_1 k_2} e^{i(k_1 x + k_2 y)}$, $D^{(\alpha,\beta)} T_{nn}(x,y) =$
$= \sum\limits_{k_1=-n}^{n} \sum\limits_{k_2=-n}^{n} c_{k_1 k_2} (i(k_1 \cos\beta + k_2 \sin\beta))^\alpha e^{i(k_1 x + k_2 y)}-$ производную по направлению $\overrightarrow{l} = (\cos\beta, \sin\beta)$ порядка $\alpha (\alpha > 0)$,

$-\Delta_{h_1 h_2}^\alpha (f) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha-\nu)h_1, y + (\alpha-\nu)h_2)$, где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geqslant 2$,

$-\omega_\alpha(f,\delta)_p-$ полный модуль гладкости положительного порядка α функции $f \in L_p^0$, т.е. $\omega_\alpha(f,\delta)_p = \sup\limits_{|h_1| \leqslant \delta, |h_2| \leqslant \delta} ||\Delta_{h_1 h_2}^\alpha(f)||_p$.

Утверждение. *Пусть* $f \in L_p^0, 1 \leqslant p \leqslant \infty, \alpha > 0, n \in N$. *Тогда*
$\omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n}\right)_p \asymp n^{-\alpha} \sup\limits_\beta ||D^{(\alpha,\beta)} V_{nn}(f)||_p + ||f - V_{nn}(f)||_p$.

Литература

[1] П.Л. Ульянов, Применение A–интегрирования к одному классу тригонометрических рядов, Матем. сб., 1954, т. 35 (77), N 3, с. 499 – 490.

ОБСКУРАНТИЗМ В НАШЕМ ОБРАЗОВАНИИИ

Скляднев С.А. (Воронеж)
prfa@main.vsu.ru

Качество образования в нашей стране падает [5], студенты приходят в состояние "самораспространяющейся псевдообразованности и

…выпуски специалистов в значительной мере являются обманом, липой и приписками: эти так называемые специалисты не в состоянии решить простейших задач, не владеют элементами своего ремесла” [2].

Это происходит по нескольким причинам: во-первых, мы, создавая рынок “образовательных услуг”, полагались исключительно на “невидимую руку рынка”. И поэтому на российском “рынке образовательных услуг” не только отсутствуют все известные механизмы противодействия деструк-тивным тенденциям рынка, но в рамках действующего законодательства эти механизмы и не могут быть созданы [3]. А значит, закономерно, что “…..по-ложение дел в образовании становится самой серьёзной угрозой нашей конкурентоспособности”. И это утверждение не лозунг, а теорема, которая доказывается в рамках знаменитой модели Дж. Акерлофа [1].

Во-вторых, сегодня почти во всех вузах нашей страны “отношения “преподаватель — студент” строятся как классический сговор [4]. То есть “представляют собой непроговоренные, но скоординированные стратегии двух групп участников, которые позволяют им увеличить субъективно оцениваемые индивидуальные выигрыши (простота работы для препода-вателя и простота учебы для студента) и при этом наносят ущерб общему благу и третьим лицам”.

Но, самое главное, сформировавшийся как на бытовом, так и на государственном уровне правовой нигилизм. Дело доходит даже до игнорирования основного закона нашей страны - Конституции. Так в п.3 статьи 43 Конституции Российской Федерации декларируется, что “Каждый вправе на конкурсной основе бесплатно получить высшее образование в государственном или муниципальном образовательном учреждении и на предприятии”. Однако, даже это очевидное требование часто игнорируется.

Литература

1. Akerlof G. The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism // Quarterly Journal of Economics, 1970, № 84, pp. 485-500),

2. В.И Арнольд Математический тривиум// УМН, 1991, 46:1(277) и Математический тривиум – II,// УМН, 1993, 48:1(289),

3. Розов Н.Х. Суждения о модернизации и постлиминиуме образования / Н.Х. Розов, А.В. Боровских, С.А. Скляднев // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы 9-й между-

народной научно-методической конференции, Воронеж, 12-13 февр. 2009 г. – Т.2. – С. 267,

4. Титаев К. Академический сговор // Отечественные записки, 2012, №2(47).

5. Иноземцев В. "Хорошее образование в России — миф", www.vedomosti.ru/opinion/news/1381026/zlokachestvennoe_obrazovanie

ВЫЧИСЛЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ФЛОКЕ

Соколова А.Н. (Москва)

san1slo@mail.ru

Рассматривается проблема сведения задачи на собственные значения оператора монодромии для периодического решения дифференциально-разностного уравнения к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. При этом существенным требованием является соизмеримость периода рассматриваемого решения и запаздывания в уравнении. Таким образом, возникает вопрос о зависимости собственных значений оператора, осуществляющего сдвиг вдоль решений линеаризованного уравнения, от величины этого сдвига [2]. В рамках данной работы построены два примера, в которых такая зависимость является и, соответственно, не является липшицевой. При этом один из этих примеров иллюстрирует метод сведения задачи на собственные значения оператора монодромии для периодического решения дифференциально-разностного уравнения к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. Skubachevskii A. L., Walther H.-O. On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations//J. Dynam. Differential Equations. – 2006. – V 18, № 2. – C. 257–355.

2. Журавлев Н. Б. Приближенное вычисление мультипликаторов Флоке для периодических решений дифференциально-разностных уравнений// Proceedings of the 21th Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2012. V. 22. P. 76-81.

НОВАЯ РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ

Стенюхин Л.В. (Воронеж)
stenyuhin@mail.ru

Задача о лежащей малой капли на поверхности является следствием минимизации следующих энергий:
1) энергии поверхностного натяжения;
2) потенциальной энергии силы тяжести;
3) энергии объёмных связей (постоянства объёма V).
Полная энергия определяется функционалом

$$E(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\Omega} \Upsilon \rho u \, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u \, dx, \qquad (1)$$

$E,\ G,\ F$ – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, σ – поверхностное натяжение, Υ – потенциальная энергия на единицу массы, ρ – плотность, λ – множитель Лагранжа, отвечающий за объём.

Первое слагаемое (1) является функционалом площади, вариация которого имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3 (EG - F^2)^{-\frac{3}{2}} (A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G), \qquad (2)$$

$A,\ B,\ C,\ G$ – аналитические функции на Ω. Линейная часть оператора (2) равна

$$L\eta = \Delta\eta + g\eta, \qquad (3)$$

где Δ – лапласиан, а функция g равна

$$g = (\bar{n}, \bar{n}_{xx} + \bar{n}_{yy}) + \frac{4}{E}\left[(\bar{n}, u_{xx})^2 + (\bar{n}, u_{yy})^2\right],$$

$\bar{n}$ – нормаль к поверхности.

Таким образом, линеаризованная задача, порождённая функционалом (1), имеет следующий вид:

$$\Delta\eta = -g\eta + E^{-3}(EG - F^2)^{3/2}(B\eta + \lambda), \qquad (4)$$

B – число Бонда. Перестройки состояний капли под действием внешних сил определяются спектром этой задачи.

Литература

[1] Финн Р. *Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория* (Мир, М., 1989)

[2] Стенюхин Л.В. *Об особых решениях задачи капиллярности с круговой симметрией* (Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. С. 242 - 245)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ 3-МЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Сурнева О.Б. (Ставрополь)

surnevao@mail.ru

Преобразование Бэклунда построено методом Клэрэна [1].

Теорема 1. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$v_{\eta\xi} + \frac{c}{\gamma^2} e^v (3\gamma v_\eta + v_\zeta + \gamma v_\xi) = 0 \tag{1}$$

связано с нелинейным уравнением

$$\varphi_\eta [\gamma \varphi_\xi + \varphi_\zeta + 3\gamma \varphi_\eta] = \varphi_{\xi\eta} \tag{2}$$

преобразованиями Бэклунда вида:

$$\gamma \varphi_\xi + 3\gamma \varphi_\eta + \varphi_\zeta = \gamma v_\xi,$$

$$\gamma[\varphi_{\eta\eta} + \varphi_\eta^2] + ce^v [\frac{c}{\gamma} e^v + v_\eta] = -2ce^v \varphi_\eta, \tag{3}$$

$$\gamma[\varphi_{\xi\eta} + \varphi_\xi \varphi_\eta] + \varphi_{\zeta\eta} + \varphi_\zeta \varphi_\eta - \gamma v_\xi \varphi_\eta - \frac{c}{\gamma} e^v [3ce^v - \gamma v_\xi - v_\zeta] = 6ce^v \varphi_\eta,$$

c, γ — постоянные, φ, v — функции независимых переменных ξ, η, ζ.

Теорема 2. *Уравнение (1) связано с классом уравнений*

$$\gamma \varphi_{\xi\eta} + \frac{\gamma f'(\xi - \gamma\zeta)}{[\eta + f(\xi - \gamma\zeta) - 3\gamma\zeta]^2} =$$

$$= (\varphi_\eta - \frac{1}{\eta + f(\xi - \gamma\zeta) - 3\gamma\zeta})[\gamma\varphi_\xi + \varphi_\zeta + 3\gamma\varphi_\eta] \tag{4}$$

преобразованиями (3), где $f(\xi - \gamma\zeta)$ — произвольная функция.

Лемма 1. *Функции* $\varphi = \ln[\eta + f(\xi - \gamma\zeta) - 3\gamma\zeta] + q(\xi, \zeta)$, *где* f *и* q *— произвольные, является решением (4).*

Лемма 2. *Функция* $F_1(3\gamma\zeta - \eta) + F_2(\xi - \gamma\zeta)$, *где* F_1, F_2 *— произвольные, является решением (1) и (2).*

Лемма 3. $v = C_0[C_1\xi + \zeta + C_2\eta] + C_3 - \ln[1 - \sigma e^{C_0[C_1\xi+\zeta+C_2\eta]+C_3}]$ *является решением (1), где* $\sigma = -\frac{c}{\gamma C_1 C_2}(C_1 + \frac{1}{\gamma} + 3C_2)$.

Литература

1. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. — 294 с.

СМЕШАННЫЕ МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Сухарев А.Ю. (Воронеж)

iplinir@gmail.com

Рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = i\varepsilon(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + f(t)u(t,x) + g(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \qquad (2)$$

где $u(t,x)$ - искомая функция, $u_0(x)$ - случайный процесс, $\varepsilon(t)$, $f(t)$, $g(t,x)$ - независимые от u_0 случайные процессы, заданные характеристическим функционалом $\varphi(v_1, v_2, w) =$
$= M(exp(i\int\limits_T(\varepsilon(s)v_1(s) + f(s)v_2(s))ds + i\iint\limits_{TR} g(s_1,s_2)w(s_1,s_2)ds_1ds_2))$,
$T = [t_0, t_1]$, $v_1, v_2 \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times R)$ [1, стр. 30]. Найдены смешанные моментные функции второго порядка решения задачи (1),(2):

$$M(u(t,x), \varepsilon(\tau)) = -iM(u_0(x))*^x$$
$$*^x F_\xi^{-1}\left[\frac{\delta\varphi\left(-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot), -i\chi(t_0,t,\cdot), 0\right)}{\delta v_1(\tau)}\right](x) -$$
$$-i\int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta^2\varphi\left(-\xi^2\chi(s,t,\cdot), -i\chi(s,t,\cdot), 0\right)}{\delta w(s,x)\delta v_1(\tau)}\right](\xi)\right](x)ds \qquad (3)$$

$$M(u(t,x),f(\tau)) = -iM(u_0(x))*^x$$
$$*^x F_\xi^{-1}\left[\frac{\delta\varphi\left(-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot),-i\chi(t_0,t,\cdot),0\right)}{\delta v_2(\tau)}\right](x)-$$
$$-i\int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta^2\varphi\left(-\xi^2\chi(s,t,\cdot),-i\chi(s,t,\cdot),0\right)}{\delta w(s,x)\delta v_2(\tau)}\right](\xi)\right](x)ds, \quad (4)$$

где $M(u_0(x))$ - математическое ожидание случайного процесса u_0, F_x - преобразование Фурье по переменной x, F_ξ^{-1} - обратное преобразование Фурье по переменной ξ, а запись вида $\frac{\delta\varphi}{\delta v_1(t)}$ обозначает вариационную производную [1, стр. 14].

Литература

Задорожний В. Г. Методы вариационного анализа. М.-Ижевск: РХД, 2006. — 316 с.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОРТОТРОПНЫМИ СЖАТИЯМИ[1]

Тасевич А.Л. (Москва)

atasevich@gmail.com

В двумерном круге рассматривается стационарное функционально-дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее в старшей части ортотропные сжатия аргументов неизвестной функции. Эта задача являются многомерным аналогом краевых задач, возникающих при исследовании уравнения пантографа и его обобщений. Последние имеют различные приложения, например, в технике, биологии, астрофизике.

Исследование разрешимости и спектральных свойств первой краевой задачи проводится на основе анализа неравенства Гординга. Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты уравнения, при которых оно будет сильно эллиптическим. Выполнение неравенства Гординга обеспечивает фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения. Также сильно эллиптический опе-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00422)

ратор удовлетворяет известной гипотезе Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора. Для дифференциально-разностных уравнений проблема нахождения алгебраического эквивалента неравенству Гординга была решена А.Л. Скубачевским, а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — Л.Е. Россовским.

Литература

Като Т. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Skubachevskii A. L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. J. Diff. Equat., 1986. T. 63, № 3. C. 332–361.

Россовский Л. Е. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений. Мат. зам., 1996. Т. 59, № 1. С. 103–113.

Россовский Л. Е. Об одном классе секториальных функционально-дифференциальных операторов. Дифф. ур., 2012. Т. 48, № 2. С. 227–237.

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ

Тельнова М.Ю. (Москва)

mytelnova@yandex.ru

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля:

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций, для которых выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1 \;\; (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0). \tag{3}$$

Под *решением* задачи (1)–(2) понимается функция y, абсолютно непрерывная на $[0,1]$, удовлетворяющая условиям (2), имеющая абсолютно непрерывную производную на любом отрезке, содержащемся в интервале $(0,1)$, и такая, что равенство (1) выполняется почти всюду на интервале $(0,1)$.

Изучается зависимость первого собственного значения λ_1 задачи (1)–(3) от потенциала Q при различных значениях параметров α, β, γ $(\gamma \neq 0)$. Пусть H_Q – замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ в норме $\|y\|^2_{H_Q} = \int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right) dx$, где $C_0^\infty(0,1)$ – множество функций из $C^\infty(0,1)$ с носителями, компактно вложенными в $(0,1)$, Q – произвольная функция из $T_{\alpha,\beta,\gamma}$. Доказано [1], что первое собственное значение λ_1 задачи (1)–(2) может быть найдено как $\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} R[Q,y]$, где $R[Q,y] = \int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right) dx \Big/ \int_0^1 y^2 dx\,$.

Для $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$ при $\gamma = 1, \alpha \leqslant 0,\ \beta \leqslant 0$ получена следующая точная оценка.

Лемма. *Для любых* $\alpha \leqslant 0,\ \beta \leqslant 0$ *система*

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{C}{2}}\right), \\ \displaystyle\int\limits_\tau^{1-\tau} 2k\cdot x^\alpha (1-x)^\beta dx = 1, \\ C\cdot k(1-2\tau) + \sqrt{k}\cdot\sqrt{1-C^2} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

имеет решение $(C,k,\tau) \in (0,\,1)\times(0,\,+\infty)\times\left(0,\,\frac{1}{2}\right)$, *причем из всех решений системы можно выбрать решение с наибольшим значением* k

Теорема. *Если* $\gamma = 1$, $\alpha,\beta \leqslant 0$, *то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} = k^*$, *где* k^* *– наибольшее из значений* k, *определяемых системой (4). Более того,* $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q^*, y^*]$, *где при* $\tau \in (0,\frac{1}{2})$, $k \in (\pi^2, \frac{5}{4}\pi^2)$ *и* $C \in (0,1)$

$$Q^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \tau\,; \\ 2k, & \tau \leqslant x \leqslant 1-\tau\,; \\ 0, & 1-\tau < x < 1\,, \end{cases}$$

$$y^*(x) = \begin{cases} \sin\sqrt{k}x, & 0 < x < \tau\,; \\ \sqrt{C}\cdot \operatorname{ch}\sqrt{k}\left(\dfrac{1}{2} - x\right), & \tau \leqslant x \leqslant 1-\tau\,; \\ \sin\sqrt{k}(1-x), & 1-\tau < x < 1. \end{cases}$$

Замечание. Результат теоремы совпадает с результатом работы [2] при $\delta = -1$ для $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 0$. Доказано [2], что $M_{0,0,1} = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+4}$.

Литература

1. *Тельнова М.Ю.* Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием// В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. с. 608–647. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. – 647 с. ISBN 978-5-238-02368-7647

2. *Ежак С.С.* Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием // Современная математика и ее приложения, 2005, Т. 36. – 56 – 69 с.

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ БЕССЕЛЯ И БАЗИСЫ РИССА[1]

Терехин П.А. (Саратов)

terekhinpa@mail.ru

Пусть функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1], \qquad \varphi \in L^2(0,1), \qquad \int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0.$$

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j).$$

Кроме того, положим $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$. Последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ.

Рассмотрим ряд Фурье-Хаара функции $f \in L^2(0,1)$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}(f,\chi_n)\chi_n = (f,\chi_{[0,1]})\chi_{[0,1]} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^k-1}(f,\chi_{k,j})\chi_{k,j}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-1354.2013.1) и РФФИ (проект № 13-01-00102)

Говорят, что ряд Фурье-Хаара *абсолютно сходится по пачкам*, если конечна величина

$$\|f\|^* = |(f, \chi_{[0,1]})| + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |(f, \chi_{k,j})|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Теорема 1. *Если функция φ имеет абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье-Хаара, то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является бесселевой с константой Бесселя $B = (\max\{1, \|\varphi\|^*\})^2$.*

Обозначим $\mathbb{A}$ - множество всех конечных наборов (слов) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, состоящих из нулей и единиц. Множество $\mathbb{A}$ можно рассматривать как свободную полугруппу с двумя образующими 0 и 1 относительно операции конкатенации $\alpha\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$. Укажем на естественное взаимнооднозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$ при котором каждому числу $n \in \mathbb{N}$ соответствует набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A}$, где $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ - двоичное разложение. Такое соответствие мы будем использовать в дальнейшем для замены индекса $\varphi_n = \varphi_{k,j} = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \varphi_\alpha$, где на месте φ может оказаться не только порождающая функция аффинной системы, но и числовая последовательность.

Обозначим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность коэффициентов Фурье-Хаара функции φ и предположим, что $x_1 = 1$. Определим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом. Пусть $y_1 = 1$ и для каждого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A}$ зададим $y_n = y_\alpha = y(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_k) = 0, \qquad k \geqslant 1.$$

Следует отметить, что указанные рекуррентные соотношения генерируются посредством операции некоммутативной свертки

$$(x * y)_\alpha = \sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_k) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} x_\beta y_\gamma$$

на свободной полугруппе $\mathbb{A}$.

Формальный ряд по системе Хаара

$$\widehat{\varphi} \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} y_{k,j} \chi_{k,j} = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} y_\alpha \chi_\alpha$$

назовем *дуальной функцией* к порождающей функции φ.

Теорема 2. *Пусть аффинная система* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является бесселевой и дуальная функция* $\widehat{\varphi}$ *принадлежит пространству* $L^2(0,1)$. *Тогда* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *- полная в* $L^2(0,1)$ *система.*

Теорема 3. *Пусть аффинная система* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является бесселевым базисом пространства* $L^2(0,1)$. *Тогда дуальная функция* $\widehat{\varphi}$ *принадлежит пространству* $L^2(0,1)$.

Теорема 4. *Пусть порождающая функция* φ *и дуальная к ней функция* $\widehat{\varphi}$ *имеют абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье-Хаара. Тогда аффинная система* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис Рисса.*

Следствие 1. *Для того, чтобы аффинная система* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы обе аффинные системы* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *являлись системами Бесселя.*

Следствие 2. *Предположим, что порождающая функция* φ *представима рядом по системе Радемахера*

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k$$

и ей соответствует аналитическая функция

$$\varPhi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Тогда для того, чтобы аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *была базисом Рисса, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$0 < \inf_{|z|<1} |\varPhi(z)|, \qquad \sup_{|z|<1} |\varPhi(z)| < \infty.$$

Следствие 3. *Если порождающая функция* φ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |(\varphi, \chi_{k,j})|^2 \right)^{1/2} < |(\varphi, \chi)|,$$

то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является базисом Рисса.*

Литература

Терехин П.А. Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке. Матем. заметки (2002), Т. 72, вып. 4, с. 547–560.

Терехин П.А. О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L^p[0,1]$. Матем. заметки (2008), Т. 83, вып. 5, с. 722—740.

Терехин П.А. О наилучшем приближении функций в метрике L^p полиномами по аффинной системе. Матем. сборник. (2011), Т. 202, № 2, с. 131—158.

РЕЗОЛЬВЕНТА ДВУМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ПОЛОСЕ

Тинюкова Т.С. (Ижевск)

Гамильтониан электрона на поверхности трехмерного топологического изолятора, покрытого слоем ферромагнетика, имеет вид двумерного безмассового оператора Дирака $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(q) = \overline{\sigma}(\overline{p}+\overline{q})$, где $\overline{p} = \big(-i\dfrac{\partial}{\partial x}, -i\dfrac{\partial}{\partial y}, 0\big)$ — оператор импульса, $\overline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — набор матриц Паули, $\overline{q} = (0,0,q)$ — вектор намагниченности.

Рассматривается разностный аналог H_0 оператора $\mathcal{H}_0$ в полосе $\Omega = \mathbb{Z}\times\{1,\ldots,N\}$ с периодическим граничным условием, который действует на функцию $\psi(n,m) = \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix}$, $\psi_j \in l^2(\Omega)$, $j = 1,2$ следующим образом:

$$H_0(q)\psi(n,m) = \begin{pmatrix} q & H_{01} - iH_{02} \\ H_{01} + iH_{02} & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $H_{01}\psi(n) = -i/2(\psi(n+1) - \psi(n-1)), \psi \in l^2(\mathbb{Z})$, оператор H_{02}, действует в $l^2\{1,\ldots,N\}$:

$$\begin{gathered}(H_{02}\psi)(m) = -i/2(\psi(m+1) - \psi(m-1)), \quad m = 2,\ldots,N-1,\\ (H_{02}\psi)(1) = -i/2(\psi(2) - \psi(N)),\\ (H_{02}\psi)(N) = -i/2(\psi(1) - \psi(N-1)).\end{gathered} \quad (2)$$

Обозначим $a_l = \sqrt{\lambda^2 - q^2 - \sin^2(2\pi l/N)}$, $\cos k_l = a_l$, $\sin k_l = -\sqrt{a_l^2 - 1}$, $l = 1,\ldots,N$.

Теорема 1. *Резольвента* $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda I)^{-1}$ *оператора* H_0 *имеет вид:*

$$(R_0(\lambda)\varphi)_1(n,m) =$$

$$= -\frac{1}{2N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m'=1}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} A\left[\frac{\lambda+q}{a_l}B\varphi_1(n',m') + C_-\varphi_2(n',m')\right],$$

$$(R_0(\lambda)\varphi)_2(n,m) =$$

$$= -\frac{1}{2N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m'=1}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} A\left[\frac{\lambda-q}{a_l}B\varphi_2(n',m') + C_+\varphi_1(n',m')\right],$$

где

$$A = A(n,n',m,m',l) = \frac{exp(i\frac{2\pi l}{N}(m-m'))i^{n-n'}}{\sqrt{a_l^2-1}},$$

$$B = B(n,n',m,m',l) = e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1}e^{-ik_l|n-n'|},$$

$$C_\pm = C_\pm(n,n',m,m',l) =$$

$$= e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'}e^{-ik_l|n-n'|} \pm \frac{i}{a_l}\sin\frac{2\pi l}{N}B.$$

Теорема 1 позволяет с помощью уравнения Липпмана-Швингера исследовать задачу рассеяния и резонансы для оператора $H = H_0 + V(n,m)$, где $V(n,m)$ — экспоненциально убывающая по переменной n функция.

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ НА n-МЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Томин Н.Г., Томина И.В. (Иваново)
nikolay.tomin@gmail.com

Пусть $n = 2,3,\ldots$, при $a > 0$ $F = \{x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant a\}$ — n-мерный симплекс, $\mathcal{A}$ — множество всех перестановок $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ натуральных чисел $1,2,\ldots,n$; $\tau(\alpha)$ — число инверсий в перестановке α. Пусть $m = (m_1,m_2,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\widetilde{m}_1 < \widetilde{m}_2 < \cdots < \widetilde{m}_r$ — все попарно различные координаты точки m. Для $k = \overline{1,r}$ через q_k обозначаем число равных $\widetilde{m}_k$ координат точки m. Используем обозначение $\alpha(x) = (x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$ при $\alpha \in \mathcal{A}$ и $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Если $E = \{e_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ есть ОНПС (ортонормированная полная система) функций в $L^2(0,a)$, то для $m \in \mathbb{N}^n$, $x \in [0,a]^n$, $i = 0,1$ полагаем $e_m(x) = \prod_{k=1}^n e_{m_k}(x_k)$, $e_m^{(i)}(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}}(-1)^{i\tau(\alpha)}e_{\alpha(m)}(x)$; в частности, $e_m^{(1)}(x) = \det(e_{m_k}(x_j))_{k,j=1}^n$. Через J_i обозначаем множество всех $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ таких, что $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n$ при $i = 0$ и $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ при $i = 1$.

Теорема. *Система* $E_i = \{e_m^{(i)}(x)/\sqrt{q_1!q_2!\dots q_r!}\,|\,m \in J_i\}$ *при любом* $i \in \{0,1\}$ *есть ОНПС в* $L^2(F)$.

В случае $n = 2$ и $a = \pi$ теорема (в равносильной форме) и ее доказательство приведены в [1]. В статье [2] доказаны ортогональность и полнота в $L^2(F)$ систем функций $\{\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\prod_{k=1}^n \cos m_{\alpha_k}x_k\,|\, 0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n\}$ и $\{\det(\sin m_k x_j)_{k,j=1}^n\,|\,0 < m_1 < m_2 < \dots < m_n\}$. Функции этих систем с точностью до постоянных множителей совпадают с функциями соответственно систем E_0 для $E = \{1/\sqrt{\pi}\}\bigcup\{\sqrt{2/\pi}\cos kt\}_{k=1}^\infty$ и E_1 для $E = \{\sqrt{2/\pi}\sin kt\}_{k=1}^\infty$ при $a = \pi$.

Литература

1. *Томина И.В.* Об одном способе построения ортонормированных полных систем на прямоугольном равнобедренном треугольнике. // Математика и ее приложения. Журнал Ивановского математического общества. – 2004. – № 1. – С. 119–122.

2. *Makai E.* Complete systems of eigenfunctions of the wave equations in some special cases. // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. – 1976. – no. 11.– P. 139–144.

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C^{(1),n}(D)$[1]

Трусова Н.И. (Липецк)

trusova.nat@gmail.com

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений

$$x_i(t,s) = \sum_{j=1}^n \Bigg(\int_a^t l_{ij}(t,s,\tau)x_j(\tau,s)d\tau + \int_c^s m_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+\int_a^t\int_c^s n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\Bigg) + f_i(t,s), i = 1,\cdots,n, \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

где $t \in [a,b]$, $\tau \in [a,t]$, $s \in [c,d]$, $\sigma \in [c,s]$, $l_{ij}(t,s,\tau)$, $m_{ij}(t,s,\sigma)$, $n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)$ и $f_i(t,s)$ — заданные вещественные функции. Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций, а $C^{(1),n}(D)$ — пространство вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s), \cdots, x_n(t,s))$ со значениями в R^n и с $x'_{i,t}, x'_{i,s} \in C(D)$ $(i = 1, \cdots, n)$.

Теорема 1. *Пусть ядра l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} и их частные производные по переменным t и s непрерывны. Тогда система (1) однозначно разрешима в пространстве $C^{(1),n}(D)$ при любой вектор-функции $f = (f_1, \cdots, f_n) \in C^{(1),n}(D)$, а ее решение находится по формуле*

$$x_i(t,s) = f_i(t,s) + \sum_{j=1}^{n} \int_a^t \varphi_{ij}(t,s,\tau) f_j(\tau,s)d\tau + \sum_{j=1}^{n} \int_c^s \psi_{ij}(t,s,\sigma) f_j(t,\sigma)d\sigma +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_a^t \int_c^s \varphi_{ij}(t,s,\tau,\sigma) f_j(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

где $\varphi_{ij}(t,s,\tau,\sigma) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} n_{ij}^{(p)}(t,s,\tau,\sigma)$, $\varphi_{ij}(t,s,\tau) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} l_{ij}^{(p)}(t,s,\tau)$, $\psi_{ij}(t,s,\sigma) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} m_{ij}^{(p)}(t,s,\sigma)$, *а* $l_{ij}^{(p)}$, $m_{ij}^{(p)}$ *и* $n_{ij}^{(p)}$ — *итерированные ядра.*

Отметим, что операторы Вольтерра с частными интегралами в различных классах функциональных пространств изучались в [1].

Литература

1. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ n-МЕРНЫХ БЕГУЩИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ СКАЛЯРНЫЕ

Феоктистов В.В., Мякинник О.О. (Москва)

ww.pheoktistow@yandex.ru, olga.mknk@ipmtel.ru

Системе уравнений с двумя независимыми переменными

$$E\frac{\partial \vec{u}(t,x_k)}{\partial t} = A_k \frac{\partial \vec{u}(t,x_k)}{\partial x_k}, \; \vec{u}(t,x_k) = (u_1(t,x_k), \ldots, u_n(t,x_k))^{\top}, \quad (1)$$

свойства которой определяются алгебраическими свойствами числовой квадратной матрицы A_k порядка n (E — единичная матрица), поставлены в соответствие выражения

$$(Ex_k + A_k t), \quad (Ex_k + J_k t), \quad (x_k + \lambda_i^{(k)} t), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

где J_k — жорданова матрица подобная A_k, $\lambda_i^{(k)}$ — собственные значения матрицы A_k с учетом кратности. Выражения (2) рассматриваются как n-мерные бегущие [2] и (скалярные) бегущие волны [1] соответственно. Соотношение

$$(Ex_k + A_k t) = T_k\,(Ex_k + J_k t)\,T_k^{-1}, \qquad J_k = T_k^{-1} A_k\, T_k, \tag{3}$$

между подобными матрицами указывет на связь между волнами разной размерности. Если J_k диагональна, то выражения $(T_k^{-1}\vec{u})_i$, $i = \overline{1,n}$, $(T_k^{-1}\vec{u})_i = f_i(x_k + \lambda_i^{(k)} t)$, где произвольные функции f_i и их аргументы являются (скалярными) бегущими волнами [1], представляют собой инварианты Римана системы (1). В этом смысле выражение $T_k^{-1}\vec{u}$ рассматривается как n-мерный инвариант (1).

Для системы уравнений с $(s+1)$ независимыми переменными

$$E\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial x_k}, \quad x = (x_1, \ldots, x_s), \tag{4}$$

где A_k — произвольные некоммутативные, вообще говоря, числовые квадратные матрицы, в решение

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{\alpha, \|\alpha\|=0}^{\infty} W_s^{\alpha}((Ex_1 + A_1 t)^{\alpha_1}, \ldots, (Ex_s + A_s t)^{\alpha_s}) \cdot \vec{\gamma}_{\alpha} \tag{5}$$

($\vec{\gamma}_{\alpha}$ — неопределенный числовой вектор-коэффициент), построенное с использованием волнового взаимодействия W_s^{α} [2] посредством соотношения (2) введены собственные значения всех матриц A_k, $k = \overline{1,s}$, и соответствующие им (скалярные) бегущие волны, являющиеся характеристиками каждой из заданных A_k систем (1). Взаимодействие волн W_s^{α} размерности s порядка $\|\alpha\|$ представляет собой сумму всех возможных произведений волн-аргументов [2].

Эффективность построений продемонстрирована на решении задачи о распространении малых возмущений в одномерном идеальном газе, которой отвечает система (1) при $x_k = x_1$, $n = 3$ с диагональной матрицей J_1. Найдены три инварианта Римана, сохраняющие свои значения на трех скалярных волнах $(x_1 + \lambda_i^{(1)} t)$; элементы 3-х мерной волны $(Ex_1 + A_1 t)$ посредством матриц T_1 и T_1^{-1} представлены как линейные комбинации волн скалярных.

Распространению малых возмущений в двумерном идеальном газе отвечает система (4) при $s = 2$, $n = 4$. Решение этой системы построено по матричным коэффициентам A_1 и A_2 как разложение (5) по заданным этими матрицами 4-х мерным бегущим волнам. При помощи (2) в полученном решении использованы находящиеся во взаимодействии характеристики двух систем вида (1), которые заданы этими матрицами.

Литература

[1] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1962. — 829 с.

[2] *Феоктистов В. В., Мякинник О.О.* Структура ряда для решения системы уравнений с частными производными 1-го порядка // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2009. No 4. — С. 3–22.

ОБ ОЦЕНКАХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ[1]

Филиновский А.В. (Москва)

flnv@yandex.ru

Рассмотрим краевую задачу Робена на собственные значения

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1}$$

Область $\Omega \subset R^n$ с границей $\Gamma \in C^2$ будем считать ограниченной, ν – единичный вектор внешней нормали к Γ, α – вещественный параметр. Обозначим через $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность собственных значений задачи (1), занумерованных в соответствии с их кратностями. Рассмотрим также последовательность собственных значений $\{\lambda_k^D\}_{k=1}^{\infty}$ задачи Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

(заметим, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(\alpha) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k^D = +\infty$).

Теорема 1. *Собственные значения имеют следующие свойства:*

i) $\lambda_k(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots,$ *– непрерывные функции параметра* α *и* $\lambda_k(\alpha_1) \leqslant \lambda_k(\alpha_2)$ *при* $\alpha_1 < \alpha_2$*;*

ii) $\lambda_1(\alpha)$ *– выпуклая вверх функция* α*:*

$$\lambda_1(\beta\alpha_1 + (1-\beta)\alpha_2) \geqslant \beta\lambda_1(\alpha_1) + (1-\beta)\lambda_1(\alpha_2), \quad 0 < \beta < 1;$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00989)

iii) $\lambda_1(\alpha)$ *дифференцируема и*

$$\lambda_1'(\alpha) = \frac{\int_\Gamma \sigma u_{1,\alpha}^2 \, ds}{\int_\Omega u_{1,\alpha}^2 \, dx} > 0;$$

iiii)

$$\liminf_{\alpha \to -\infty} \frac{\lambda_1'(\alpha)}{-\alpha} \geqslant 1.$$

Теорема 2. *Для собственных значений* $\lambda_k(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$, *справедливы оценки*

$$0 \leqslant \lambda_k^D - \lambda_k(\alpha) \leqslant C\alpha^{-1} \left(\lambda_k^D\right)^2, \quad \alpha > 0,$$

с постоянной C, *не зависящей от* k.

Литература

Филиновский А.В. Асимптотическое поведение первого собственного значения задачи Робена // Дифференциальные уравнения, 2011, том 47, № 11, с. 1659 – 1660.

ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Фролова Е.В. (Липецк)

lsnn48@mail.ru

В докладе изучается фредгольмовость уравнения

$$x = Kx + g$$

в пространстве $C(D)$. Через $C(D)$ обозначено множество заданных на $D = [a, +\infty) \times [c, +\infty) \times [e, +\infty)$ равномерно непрерывных и ограниченных функций. Здесь $K = L + M + N$, операторы L, M, N определяются равенствами

$$(Lx)(t, s, r) = \int_a^{+\infty} l(t, s, r, \tau) x(\tau, s, r) \, d\tau,$$

$$(Mx)(t, s, r) = \int_c^{+\infty} \int_e^{+\infty} m(t, s, r, \sigma, \theta) x(t, \sigma, \theta) \, d\sigma d\theta,$$

$$(Nx)(t, s, r) = \int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} \int_e^{+\infty} n(t, s, r, \tau, \sigma, \theta) x(\tau, \sigma, \theta) \, d\theta d\sigma d\tau;$$

$t, \tau \in [a, +\infty), s, \sigma \in [c, +\infty), r, \theta \in [e, +\infty)$ l, m, n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1. Ядра l, m, n *имеют вид*

$$l(t,s,r,\tau)=\sum_{i=1}^{p} l_i(t)\bar{l}_i(s)\tilde{l}_i(r)a_i(\tau),$$
$$m(t,s,r,\sigma,\theta)=\sum_{j=1}^{q} m_j(t)\bar{m}_j(s)\tilde{m}_j(r)b_j(\sigma,\theta),$$
$$n(t,s,r,\tau,\sigma,\theta)=\sum_{k=1}^{r} n_k(t)\bar{n}_k(s)\tilde{n}_k(r)c_k(\tau,\sigma,\theta),$$
где $l_i,\bar{l}_i,\tilde{l}_i \quad (i=1,\dots,p)$, $m_j,\bar{m}_j,\tilde{m}_j \quad (j=1,\dots,q)$, $n_k,\bar{n}_k,\tilde{n}_k$ $(k=1,\dots,r)$ *— равномерно непрерывные и ограниченные функции;* $\int_a^{+\infty}|a_i(\tau)|d\tau<A<\infty \quad (i=1,\dots,p)$, $\int_c^{+\infty}\int_e^{+\infty}|b_j(\sigma,\theta)|d\theta d\sigma< B<\infty \quad (j=1,\dots,q)$, $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty}\int_e^{+\infty}|c_k(\tau,\sigma,\theta)|d\theta d\sigma d\tau<C<\infty$ $(k=1,\dots,r)$.

2. $|D_1(s,r)|=\big||\delta_{ik}-\mu_{ik}(s,r)|\big|>\alpha>0$, *где* $\delta_{ik}=1$ *при* $i=k$, $\delta_{ik}=0$ *при* $i\neq k$, $|D_2(t)|=\big||\delta_{jl}-\nu_{jl}(t)|\big|>\beta>0$, *где* $\delta_{jl}=1$ *при* $j=l$, $\delta_{jl}=0$ *при* $j\neq l$,; *здесь*
$$\mu_{ik}(s,r)=\int_a^{+\infty}a_i(\tau)l_k(\tau)\bar{l}_k(s)\tilde{l}_i(r)\,d\tau \ (i,k=1,\dots,p);$$
$$\nu_{jl}(t)=\int_c^{+\infty}\int_e^{+\infty}b_j(\sigma)m_l(t)\bar{m}_l(\sigma)\tilde{m}_j(\theta)d\theta d\sigma \ (j,l=1,\dots,q).$$
Тогда уравнение $x=Kx+g$ *фредогольмово.*

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ОЦЕНКИ ГЕЛЬФАНДА–ШИЛОВА НОРМЫ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Харитонов В.Д. (Воронеж)
kharvd@gmail.com

В монографии [1] приводится оценка нормы $\|e^{t\mathbf{A}}\|$ экспоненты квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размерности n. В [2] приводится уточнение этой оценки.

В данной работе получено обобщение этой оценки на случай оператора вида $\alpha I+F$, где $\alpha\in\mathbb{C}$, и F — оператор с конечным рангом.

Пусть X — банахово пространство над полем комплексных чисел, $\operatorname{End}X$ — банахова алгебра ограниченных операторов, действующих в X.

При получении основного результата используется следующее утверждение, сформулированное в [3].

Теорема 1.
Для любого оператора $F\in\operatorname{End}X$ *с конечным рангом существует разложение* X *в прямую сумму*

$$X=M_F\oplus N_F,$$

причем $\dim M_F = m < \infty$, $F(M_F) \subset M_F$, $N_F \subset \ker F$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2.
Для оператора $A = \alpha I + F$, *где* $\alpha \in \mathbb{C}$, *и* F *удовлетворяет условиям теоремы 1, справедлива следующая оценка:*

$$\|e^{tA}\| \leqslant e^{t(\mathrm{Re}(\alpha)+\Lambda)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2t\|F\|)^k}{k!}, \quad t \geqslant 0,$$

где $\Lambda = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(F)\}$, $m = \dim M_F$.

Литература

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений – Физматгиз. 1958. 274 с.

Былов Б. Ф. и др. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости – Наука. 1966. 576 с.

I. Gohberg, S. Goldberg, N. Krupnik. Traces and determinants of linear operators – Birkhäuser. 2000. 442 p.

КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА ВИЗУАЛИЗАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ[1]

Харламов М.П., Шведов Е.Г. (Волгоград)
mharlamov@vags.ru

Тонкий инвариант интегрируемой системы [1] — это граф, ребра и некоторые вершины которого снабжены числовыми метками. Точки ребер отвечают n-мерным торам Лиувилля в $(n+1)$-мерном инвариантном многообразии, на котором слоение Лиувилля задано одним боттовским интегралом. Граф без меток, но снабженный в вершинах обозначениями атомов, называется грубым топологическим инвариантом. Для классификации всех таких инвариантов при $n = 2$ разработан комплекс модулей в системе Mathematica, который позволяет построить область параметров с разделяющими кривыми и для каждой точки сформировать бифуркационную диаграмму пары интегралов. При движении указателя вдоль сечений бифуркационной диаграммы, параллельных осям, вычисляются количество торов Лиувилля для регулярной точки и показатели Морса–Ботта для критической точки. В результате имеем полное

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства ВО (проекты № 14-01-00119, 13-01-97025)

описание грубого инварианта. Компьютерная система требует наличия предварительных аналитических решений для разделяющих кривых, алгоритмов вычисления количества связных компонент и формул для показателей Морса–Ботта в терминах констант первых интегралов. В качестве примера представлены модули визуализации для интегрируемых систем, вся аналитическая база которых известна (см. [2,3]).

Литература

1. *Fomenko A.T., Zieschang H.* A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom, Math. USSR-Izv, 1991, 36(3). – P. 567–596.

2. *Харламова И.И., Шведов Е.Г.* Электронный атлас бифуркационных диаграмм тяжелого волчка в магнитном поле, Известия ВолгГТУ, 2011, 10(3). – С. 19–24.

3. *Савушкин А.Ю., Харламова И.И., Шведов Е.Г.* Электронный атлас изоэнергетических диаграмм гиростата Ковалевской–Яхья, Известия ВолгГТУ, 2012, 15(102). – С. 30–35.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХЧАСТОТНЫХ ДВИЖЕНИЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ[1]

Харламова И.И., Савушкин А.Ю. (Волгоград)

irinah@vags.ru

Задачи о пространственном движении тел описываются системами с числом степеней свободы больше двух. На сегодня неизвестны нетривиальные случаи разделения переменных в неприводимых задачах. Классические случаи интегрируемости сводятся к двум степеням свободы понижением порядка, и приведенные системы с разделенными переменными описывают движение лишь частично, с точностью до некоторых "вращений", являющихся орбитами групп симметрий. В работах [1,2] предложен подход к исследованию геометрии движения с помощью четырехмерных подмногообразий в исходных (непрофакторизованных) фазовых пространствах, на которых известно алгебраическое разделение переменных.

В качестве примера представлена визуализация движений в случае интегрируемости, найденном в [3]. Для почти всех наборов постоянных первых интегралов подвижный и неподвижный годографы всюду плотно заполняют двумерные поверхности. Получены

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства ВО (проект № 13-01-97025)

явные параметрические уравнения этих поверхностей и матрицы ориентации, где в качестве параметров выступают переменные разделения. Указаны формулы, применимые для компьютерной визуализации. Построены иллюстрации основных типов поверхностей. Сделаны выводы о характере движений.

Литература

1. *Kharlamova I.I., Savushkin A.Y.* On the geometry of motions in one integrable problem of the rigid body dynamics, arXiv:1312.6774, 2013.

2. *Харламов М.П., Харламова И.И., Савушкин А.Ю.* Визуализация одного класса двухчастотных движений твердого тела, Механика твердого тела, 2013, № 43.

3. *Харламов М.П.* Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле, Механика твердого тела, 2002, № 32.

К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Хартовский В.Е., Павловская А.Т. (Гродно)

hartovskij@grsu.by, pavlovskay_at@grsu.by

Исследуется система вида

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih),\ t \geqslant 0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – решение уравнения (1), $u \in \mathbb{R}^r$ – кусочно-непрерывное управление, $0 < h$ – постоянное запаздывние, $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Решение системы (1) абсолютно-непрерывная функция.

Под задачей модальной управляемости понимается задача построения регулятора вида (2), обеспечивающего замкнутой системе наперед заданный характеристический квазиполином $\Delta(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i r_i(e^{-\lambda h})$, где $r_i(z) = \sum_{j=0}^{s_1} r_{i,j} z^j$, $i = \overline{0,n}$, $r_n(0) = 1$.

Для модального управления системой (1) предлагается использовать регулятор динамической структуры

$$
\begin{gathered}
u(t)=\sum_{i=1}^{s} M_i\dot{x}(t-ih)+\sum_{i=0}^{s} N_i x(t-ih)+P\psi(t), t\geqslant t_0,\\
\psi(t)=S\psi(t-h)+\sum_{i=1}^{s}\widehat{M}_i\dot{x}(t-ih)+\sum_{i=0}^{s}\widehat{N}_i x(t-ih),\ t\geqslant t_0,\\
\psi(t)\equiv 0,\ t<t_0,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где s – некоторое натуральное число, $T_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $R_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $M_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $N_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $\widehat{M}_i\in\mathbb{R}^{r_1\times n}$, $\widehat{N}_i\in\mathbb{R}^{r_1\times n}$, $P\in\mathbb{R}^{r\times r_1}$, $S\in\mathbb{R}^{r_1\times r_1}$.

В работе получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модальной управляемости регулятором (2). Отличительной чертой регулятора (2) является возможность его реализации в случае нарушения условия $\operatorname{rank}[W(\lambda),B(e^{-\lambda h})]=n\ \ \forall\ \lambda\in\mathbb{C}$, где $W(\lambda)=\lambda(E_n-D(e^{-\lambda h}))-A(e^{-\lambda h})$, $D(z)=\sum\limits_{i=1}^{m}D_iz^i$, $A(z)=\sum\limits_{i=0}^{m}A_iz^i$, $B(z)=\sum\limits_{i=0}^{m}B_iz^i$, что существенно расширяет спектр его использования.

О РЕЗОЛЬВЕНТНОМ ПОДХОДЕ В МЕТОДЕ ФУРЬЕ[1]

Хромов А.П. (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

В работе предлагается схема применения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей, что позволяет получить классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения при минимальных требованиях гладкости начальных данных. При этом не используются уточненные асимптотики для собственных значений и какая-либо информация о собственных функциях.

Рассматривается задача:

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t),\tag{1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad u(x,0)=\varphi(x),\qquad {u'}_t(x,0)=0.\tag{2}$$

Считаем, что $q(x)\in C[0,1]$ и комплекснозначна, и

$$\varphi(x)\in C^2[0,1],\qquad \varphi(0)=\varphi(1)=\varphi''(0)=\varphi''(1)=0.\tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238)

Условия (3) на $\varphi(x)$ являются минимальными для существования классического решения. Условие $u'_t(x,0)=0$ берется для простоты. Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора:

$$Ly = y''(x) - q(x)y(x), \qquad y(0)=y(1)=0.$$

Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, и для них верна асимптотика: $\lambda_n = -\rho_n^2$, $\rho_n = n\pi + O(1/n)$, $(n = n_0, n_0+1, \ldots)$.

Обозначим $\gamma_n = \{\,\rho |\, |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geqslant n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному ρ_n. Пусть $\tilde{\gamma}_n$ образ γ_n в λ-плоскости $(\lambda = -\rho^2)$. Обозначим $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L (здесь E - единичный оператор, λ - спектральный параметр). Тогда формальное решение задачи (1)-(2) по методу Фурье можно представить в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda, \quad (4)$$

где $r>0$, фиксировано и взято таким, что все собственные значения λ_n, имеющие номер $n < n_0$, попадают в круг $|\lambda| < r$, на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений. Представим (4) в виде:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \quad (5)$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{(R^0_\lambda g)\cos\rho t}{\lambda - \mu_0}d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{(R^0_\lambda g)\cos\rho t}{\lambda-\mu_0}d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t d\lambda,$$

$R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L_0, получаемого из L при $q(x)\equiv 0$, $g = (L - \mu_0 E)\varphi$, μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0 и $|\mu_0| > r$.

Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями $z_1(0,\rho) = 1$, $z'_1(0,\rho) = 0$, $z_2(0,\rho) = 0$, $z'_2(0,\rho) = 1$. Тогда $z_j(x,\rho)$ целые по ρ и даже по λ, где $\lambda = -\rho^2$.

Теорема 1. *Имеет место формула:*

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \tag{6}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$, $(M_\rho f)(x) = \int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt$,
$v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$, $M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \end{vmatrix}$.

Для R_λ^0 имеет место (6), если вместо $v(x,\rho)$, $z_1(x,\rho)$, $z_2(x,\rho)$, M_ρ взять аналогичные $v^0(x,\rho)$, $z_1^0(x,\rho)$, $z_2^0(x,\rho)$, M_ρ^0 для оператора L_0.

Лемма 1. *Имеет место формула:*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right) v^0(x,\rho)(\varphi_1, z_2^0)\cos\rho t d\lambda,$$

где $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$.

Отсюда по теореме вычетов

$$u_0(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x\cos n\pi t. \tag{7}$$

Представим ряд (7) в виде суммы рядов Σ_+ и Σ_-, где

$$\Sigma_\pm = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi(x\pm t).$$

Тогда справедлива

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}_1(x+t) + \tilde{\varphi}_1(x-t)\right),$$

где $\tilde{\varphi}_1(x) \in C^2(-\infty,\infty)$, *нечетна,* $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(2+x)$, *и* $\tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

Таким образом, $u_0(x,t)$ есть решение задачи (1)-(2) при $q(x) \equiv 0$, и где $\varphi(x)$заменяется на $\varphi_1(x)$.

Лемма 2. *Имеет место формула:* $u_2(x,t) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n(x,t)$, *где* $a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right]\cos\rho t d\lambda$.

Используя формулу (оператор преобразования, [1], с.17, 23): $z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K(x,\tau)\frac{\sin\rho\tau}{\rho}d\tau$, где $K(x,\tau)$ непрерывно дифференцируема по x и τ, и $K(x,0) \equiv 0$ ($K(x,\tau)$ не зависит от ρ), получим

Лемма 3. *При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы:*

$$(g,z_2) = \rho^{-1}\left[(g_1(\xi)\cos\mu\xi, \sin n\pi\xi) + (g_1(\xi)\sin\mu\xi, \cos n\pi\xi)\right], \qquad (8)$$

$$(g,z_2 - z_2^0) = \rho^{-2}\left[(g_2(\xi)\cos\mu\xi, \cos n\pi\xi) - (g_2(\xi)\sin\mu\xi, \sin n\pi\xi)\right], \quad (9)$$

где $\rho = n\pi + \mu$, $\mu \in \gamma_0$, $g_1(\xi) = g(\xi) + \int\limits_\xi^1 K(\tau,\xi)g(\tau)d\tau$,

$g_2(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int\limits_\xi^1 K_\xi(\tau,\xi)g(\tau)d\tau$.

Лемма 4. *При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы: $v_x^{(j)}(x,\rho) = v_x^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1})$, $j = 0,1,2$, и оценка $O(...)$ равномерна по $x \in [0,1]$.*

Лемма 5. *Обозначим через $\psi(x)$ функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu),\psi(n\pi x))$, $\mu \in \gamma_0$. Тогда верна оценка: $\sum\limits_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant c\sqrt{\sum\limits_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}$, где $c > 0$ и не зависит от n_1, n_2, $\mu \in \gamma_0$.*

Лемма 6. *Ряды $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$, $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x,t)$ ($j = 0,1,2$) сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$, где $T > 0$ любое фиксированное число.*

Теперь из (5) с помощью теоремы 2 и лемм 2, 3, 4 получаем

Теорема 3. *Формальное решение (4) есть классическое решение задачи (1)-(2) при условиях (3) на $\varphi(x)$.*

При вещественной $q(x)$ теорема 3 получена В.А. Чернятиным [2].

Литература

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977. 340 с.

2. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ, 1991. 112 с.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЕ КОНЕЧНОГО ПОЛЯ[1]

Хэкало С.П. (Коломна)

khekalo@mail.ru

В математике есть несколько подходов к определению дифференцирования функций на конечном поле $\mathbb{F}_q$ из q элементов (см., например, [1]). Необходимость построения дифференциального исчисления на $\mathbb{F}_q$ связана с задачами математической физики.

Пусть $\mathbb{F}_q^*$ – мультипликативная циклическая группа поля $\mathbb{F}_q$, а $\hat{\mathbb{F}}_q^*$ – двойственная ей группа мультипликативных характеров с образующей π. Рассмотрим пространство $\Phi = \{f | f : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}\}$ комплекснозначных функций на $\mathbb{F}_q^*$. Очевидно, что $\forall f \in \Phi$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{q-2} f_m \pi^m(x), \quad \text{где} \;\; f_m = \frac{1}{q-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} f(x) \pi^{-m}(x).$$

Производную функции f, ассоциированную с характером π, определим равенством

$$\frac{d_\pi f}{dx}(x) = \sum_{m=0}^{q-2} m f_m \pi^{m-1}(x).$$

Очевидно, что если $\theta = \pi^k$ – другой образующий элемент из $\hat{\mathbb{F}}_q^*$, то производные, ассоциированные с π и θ, связаны соотношением

$$\frac{d_\theta f}{dx}(x) = \frac{d_\theta \pi}{dx}(x) \, \frac{d_\pi f}{dx}(x) = k \, \frac{\pi(x)}{\theta(x)} \, \frac{d_\pi f}{dx}(x).$$

Имеют место классические свойства дифференцирования:

$$1. \; \frac{d_\pi f}{dx} = 0 \Leftrightarrow f = const; \qquad 2. \; \frac{d_\pi (cf)}{dx} = c \, \frac{d_\pi f}{dx}, \; \text{где } c \in \mathbb{C};$$

$$3. \; \frac{d_\pi (f \pm g)}{dx} = \frac{d_\pi f}{dx} \pm \frac{d_\pi g}{dx}; \quad 4. \; \frac{d_\pi (fg)}{dx} = \frac{d_\pi f}{dx} \, g + f \, \frac{d_\pi g}{dx};$$

$$5. \; \text{Если } \alpha \in \mathbb{F}_q^* \text{ и } y = \alpha x, \text{ то } \frac{d_\pi f(y)}{dx} = \pi(\alpha) \frac{d_\pi f(y)}{dy}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 14-11-00669

Литература

[1] *Evans R.J.*Hermite character sums. Pacific journal of Math, 1986. V.122, N 2, p. 375-390.

[2] *Кириллов А. А.* Что такое число? М.:"Наука, 1993. - 80 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ВПОЛНЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

Царьков И.Г.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^3, рассмотрим функцию $F = F(x, w, u, p, r) : \Omega \times X \to \mathbb{R}$, где $X = W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2}$, W – некоторое банахово пространство параметров, а $\mathbb{R}^{2\times 2}$ – 3-мерное пространство действительных симметрических матриц $r = \{r_{ij}\}_{i,j=1,1}^{2,2}$ размера 2×2. Предположим, что при каждом значении параметра $w \in W$ функция F непрерывно дифференцируема по остальными переменным и для любого ограниченного множества $N \subset X$ найдется число $c = c(N) > 0$, для которого выполнены неравенства:

$$|F(v_1) - F(v_2)| \leqslant c\|v_1 - v_2\|, \ \|F'_r(v_1) - F'_r(v_2)\| \leqslant c\|v_1 - v_2\|,$$

где $v_j \in \Omega \times N$ $(j = 1, 2)$. Далее будем предполагать, что матрица $\mathfrak{M}(v) = \{F_{ij}(v) = \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(v)\}_{i,j=1,1}^{2,2}$ положительна определена для всех элементов $v \in \Omega \times X$. Будем предполагать, что для любого ограниченного множества параметров $R \subset W$ существуют положительные функции: λ – невозрастающая функция $|u|$, Λ и μ – неубывающие функции $|u|$, для которых выполнены неравенства:

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{2} F_{ij}(v)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2,$$

$$|F_p(v)|, |F_u(v)| \leqslant \mu\lambda, \ |F_x(v)| \leqslant \mu\lambda(1 + |p| + |r|)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x, w, u, p, r)$.

Теорема 1. *Пусть $M > 0$. Тогда найдутся числа $k, \varepsilon_0 > 0$, зависящие только от M, Ω и такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любой ε-сети Γ во множестве Ω, произвольных $w_j \in W$, $\psi_j \in C(\Omega)$ и произвольных решений $u_j \in$*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00022-а.

$C^3(\overline{\Omega})$ *задачи* $\begin{cases} F(x, w_j, u_j, Du_j, D^2u_j) = \psi_j & \text{на } \Omega \\ u_j = \varphi_j & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$ *таких, что* $\|w_j\|, \|u_j\|_{C(\Omega)}, \|\psi_j\|_{C^1(\Omega)} \leqslant M$, $\varphi_j \in C^3(\Omega)$ $(j = 1, 2)$, *верна оценка:*

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega})} \leqslant k\big(\|w_1 - w_2\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C^3(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{C^1(\Omega)}\big)\varepsilon^2 +$$

$$+2\|(u_1 - u_2)|_\Gamma\|_\infty.$$

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ПЛОСКОСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ, С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Черникова А.С. (Воронеж)
chernikova-an@mail.ru

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, функции $q_p(x_1) \in C^3([-1; 1])$ при $p = 0; 1$ и $\operatorname{supp} q_0(x_1) = \operatorname{supp} q_1(x_1) = [-1; 1]$. Рассматривается краевая задача для системы уравнений с частными производными

$$\Delta u_p(x) + k_p \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p = 1; 2, \tag{1}$$

$$u_1(x_1, +0) - u_2(x_1, -0) = q_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, +0) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, -0) = q_1(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Краевая задача (1)-(3) моделирует стационарное распределение тепла в биматериале с конечной межфазной трещиной, если $u_1(x)$ $(u_2(x))$ — температура в точке x верхней (нижней) полуплоскости.

При изучении задачи (1)-(3) было доказано, что сингулярные компоненты асимптотических представлений ее решения и его первых производных вблизи трещины совпадают с сингулярными составляющими соответствующих асимптотических разложений для задачи (1)-(3) с граничными функциями $Q_p(x_1)$ при $p = 0; 1$ вида

$$Q_p(x_1) = \sum_{n=1}^{2} (-1)^n e^{-\left(x_1 + (-1)^{n+1}\right)} \Theta(x_1 + (-1)^{n+1}) \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{3} (m!)^{-1} \left(x_1 + (-1)^{n+1}\right)^m \sum_{l=o}^{m} C_m^l q_p^{(l)}\left((-1)^n\right), p = 0; 1,$$

где $C_m^l = \dfrac{m!}{l!(m-l)!}$. Приведем асимптотическое разложение $\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$:

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} = e^{-o,5k_1x_2}\left(\frac{(x_1+1)\,q_0(-1)}{2\pi\,((x_1+1)^2+x_2^2)} - \frac{(x_1-1)\,q_0(1)}{2\pi\,((x_1-1)^2+x_2^2)} - \right.$$
$$\left. -\frac{q_0^{'}(-1)}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2} + \frac{q_0^{'}(1)}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2} + R(x)\right),$$

где $R(x)$ — равномерно ограниченная при $x_1 \in [-1;1]$, $x_2 \to +0$ функция.

ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В БИМАТЕРИАЛЕ С ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Черникова А.С. (Воронеж)

chernikova-an@mail.ru

Рассматривается задача трансмиссии о стационарном распределении тепла в плоскости, состоящей из двух неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности. Пусть $u_1(x)(u_2(x))$ — температура в точке $x = (x_1, x_2)$ верхней (нижней) полуплоскости. Данная задача моделируется следующей краевой задачей для системы уравнений с частными производными

$$\Delta u_1(x) + k_1\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_+, \tag{1}$$

$$\Delta u_2(x) + k_2\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_- \tag{2}$$

с условиями на границе материалов $\Gamma = \{x|x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0\}$:

$$u_1(x_1,+0) - u_2(x_1,-0) = \widetilde{\widetilde{q}}_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,+0) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1,-0) = \widetilde{\widetilde{q}}_1(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Функции $\widetilde{\widetilde{q}}_p(x_1)$ при $p = 0;1$ принадлежат классу $\Im = \{\, f(x)|\, f(x) \in \in C^3(\mathbb{R}); f(x) = 0, x < -1; f^{(k)}(-1) = 0, k = \overline{0;3}; \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant Ce^{-x}, x \geqslant -1, k = \overline{0;3}\}$.

Уравнения (1) и (2) получены из уравнения стационарной теплопроводности $\operatorname{div}(k_p(x)\operatorname{grad} u_p(x)) = 0$, $p = 1;2$ с коэффициентами внутренней теплопроводности $k_p(x) = e^{k_px_2}\cdot c_p$, $p = 1;2$.

Сформулировано определение решения задачи (1)-(4) и получено несколько явных формул его представления. Приведем одну из них:

$$u_p(x) = e^{-0,5k_p x_2} F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{(-1)^p x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\,\widetilde{\widetilde{w}}{}_p^0(s_1)\right],\ p=1;2,$$

где $\widetilde{\widetilde{w}}{}_p^0(s_1) = -\dfrac{\widetilde{\widetilde{P}}_1(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)\widetilde{\widetilde{P}}_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}$

при $p=1;2$, а $\widetilde{\widetilde{P}}_p(s_1) = F_{x_1\to s_1}[\widetilde{\widetilde{q}}_p(x_1)]$ при $p=0;1$.

К ПРОБЛЕМЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)
chavnn@mail.ru

Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная, выпуклая область; $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ – выпуклое множество управляющих параметров; $\gamma>0$; $\mathbb{A}$ – класс матричных функций $A(t,\upsilon):\Pi\times\mathcal{D}_1\to\mathbb{R}^{n\times n}$ таких, что: $A(.,\upsilon)\in L_\infty^{n\times n}(\Pi)$, $A(.,\upsilon)\xi\cdot\xi\geqslant\gamma\,|\xi|^2$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\upsilon\in\mathcal{D}_1$, $A'_\upsilon(t,\upsilon)$ ограничена на ограниченных множествах; $\mathbb{F}$ – класс всех функций $f(t,\upsilon):\Pi\times\mathcal{D}_2\to\mathbb{R}$, вместе с $f'_\upsilon(t,\upsilon)$ измеримых по $t\in\Pi$, непрерывных по $\upsilon\in\mathcal{D}_2$ и удовлетворяющих условиям: $f(.,\upsilon)\in L_2(\Pi)$ $\forall\upsilon\in\mathcal{D}_2$; $f'_\upsilon(.,u(.))\in L_2(\Pi)$ $\forall u\in L_\infty(\Pi)$. Для $A\in\mathbb{A}$, $b\in L_\infty^+(\Pi)$, $f\in\mathbb{F}$, $\upsilon\in\mathcal{D}$ рассмотрим задачу

$$-\mathrm{div}\,\big(A(t,\upsilon_1)\nabla x(t)\big)+b(t)x(t)=f\big(t,\upsilon_2\big),\ t\in\Pi,\ x\Big|_{\partial\Pi}=0. \qquad (1)$$

Обобщенное [1] решение (1) существует и единственно в $H_0^1(\Pi)$. На $\mathcal{D}$ определим функционал $J[\upsilon]=\int\limits_\Pi F\big(t,x[\upsilon](t),\upsilon\big)\,dt$, где функция $F(t,\xi,\upsilon):\Pi\times\mathbb{R}\times\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ вместе с $F'_\xi(t,\xi,\upsilon)$, $F'_\upsilon(t,\xi,\upsilon)$ измерима по $t\in\Pi$, непрерывна по $(\xi;\upsilon)\in\mathbb{R}\times\mathcal{D}$ и такова, что $F(.,x,\upsilon)\in L_1(\Pi)$ $\forall x\in W_2^1(\Pi)$, $\upsilon\in\mathcal{D}$; $F'_\upsilon(.,x,u)\in L_1(\Pi)$ $\forall x\in W_2^1(\Pi)$, $u\in L_\infty^2(\Pi)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. (шифр заявки 1.1907.2011).

Теорема 1. *Пусть* $F'_\xi(.,x,u) \in L_2(\Pi)$, $\forall x \in L_q(\Pi)$, $u \in L^2_\beta(\Pi)$ *при некоторых* $2 \leqslant q < (2n)/(n-2)$, $\beta \in [1;\infty)$. *Тогда существуют*

$$J'_{\upsilon_1} = \int\limits_\Pi \Big[-\big(A'_\upsilon(t,\upsilon_1)\big)^* \nabla p(t)\cdot\nabla x[\upsilon](t) + F'_{\upsilon_1}\big(t, x[\upsilon](t),\upsilon\big)\Big]\,dt,$$

$$J'_{\upsilon_2} = \int\limits_\Pi \Big[p(t)\, f'_{\upsilon_2}(t,\upsilon_2) + F'_{\upsilon_2}\big(t, x[\upsilon](t),\upsilon\big)\Big]\,dt,$$

где $p \in H^1_0(\Pi)$ *– единственное решение сопряженной задачи*

$$-\mathrm{div}\,\big(A^*\nabla p\big) + b\,p = F'_\xi\big(.,x[\upsilon],\upsilon\big); \quad p\Big|_{\partial\Pi} = 0.$$

Литература

1. *Вахитов И.С.* // Дальневост. мат. ж. 2010. Т.10, №2. С.93-105.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Черябкин А.П. (Коломна)
cheriabkin@rambler.ru

Геометрические решетки и их свойства на евклидовой плоскости хорошо изучены, получены свойства многоугольников, вершины которых расположены в узлах решетки, а также формула Пика для нахождения площадей произвольного многоугольника без самопересечений на решетке. Для нахождения площади многоугольника с самопересечениями используется обобщенная формула Пика.

В том случае, если переносить свойства решеток с евклидовой плоскости на плоскость Лобачевского возникает ряд трудностей, препятствующих полному переносу свойств евклидовых геометрических решеток в гиперболический случай.

Получение решетки путем разбиения плоскости двумя семействами параллельных прямых, при этом каждая прямая одного семейства расположена на определенном расстоянии от соседней прямой, является в гиперболическом случае нереализуемым, т.к. понятие параллельности на плоскости Лобачевского определяется иначе. Поэтому решетчатую структуру в гиперболическом случае удобно задать в виде разбиения плоскости на равные треугольники. В этом случае комбинаторные свойства решетки будут сохраняться, а также в частных случаях для многоугольников, стороны которых лежат на линиях, соединяющих узлы решетки, сохраняется справедливость формулы Пика. Справедливость этой формулы для произвольных многоугольников остается невыясненной.

Литература

Вавилов В.В., Устинов А.В. Многоугольники на решетках. М.: МЦНМО, 2006. — 72 с.

Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Государственное издательство технико - теоретической литературы, 1950. — 436 с.

Akihiro Higashitani, MikiyaMasuda. Lattice multi-polygons. ArXiv: 1204.0088v3 [math.CO].

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ[1]

Шамолин М.В. (Москва)

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к сферам. Так, например, физический маятник на цилиндрическом шарнире в плоскопараллельном силовом поле может быть рассмотрен на своем фазовом цилиндре, а изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере.

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле порождали системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. Результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость как раз и распространена со случаев движения в пространствах меньшей размерности.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00020)

В работе будет тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности.

Литература

Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 3–251.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ТЕПЛИЦЕВА ОПЕРАТОРА В ОДНОМ ВЕСОВОМ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИКРУГЕ[1]

Шамоян Ф.А. (Брянск), Повприц Е.В. (Новозыбков)

shamoyanfa@yandex.ru, mishinae.v@yandex.ru

Пусть $U^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n) : |z_j| < 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ - единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $T^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n) : |z_j| = 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ - остов поликруга U^n, $H(U^n)$ - множество всех аналитических в U^n функций, $Q^n = [0; 1)^n, H^p(U^n)$ - класс Харди в U^n.

Пусть $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ - вектор-функция типа модуля непрерывности, то есть ω_j - неотрицательные неубывающие функции на $[0; 1)$ такие, что функции $t_j \to \frac{\omega_j(t_j)}{t_j}$ не возрастают на $[0; 1), j = 1, ..., n$.

Если $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, тогда $\omega_\Pi(1 - r) := \prod\limits_{j=1}^{n} \omega_j(1 - r_j)$, $r \in Q_n$.

Если $f \in H(U^n)$ и $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $\beta_j > -1, 1 \leqslant j \leqslant \infty$, то назовем дробной производной порядка β в смысле Римана-Лиувилля следующую голоморфную функцию: $D^\beta f(z) = \sum\limits_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k$, где $|k| = k_1 + ... + k_n, \Gamma$ - функция Эйлера.

Через $A_\omega(\alpha, m)$ обозначим класс голоморфных в полидиске U^n функций f, для которых $\|f\|_{A_\omega(\alpha,m)} = \int\limits_{U^n} |D^m f(z)| \omega_\Pi(1 - |z|)(1 - |z|)^{\alpha-1} dm_{2n}(z) < +\infty$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$, dm_{2n} есть $2n-$мерная мера Лебега на U^n.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97508)

Далее нам потребуется класс голоморфных функций $\Lambda_\omega^\alpha(U^n)$ с естественной нормой

$$\|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha} = \sup_{z\in U^n}\left\{\left|D^{\alpha+2}f(z_1,...,z_n)\right|\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|z_j|)^2}{\omega_j(1-|z_j|)}\right\} < +\infty.$$

Кратным теплицевым оператором или операторм Теплица назовем интегральный оператор вида $T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}$, $z=(z_1,...,z_n)\in U^n$, где $h\in L^1(T^n), f\in C_A^\infty(U^n)$ (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть $m\in\mathbb{N}^n,\ \alpha\in\mathbb{R}^n,\ \alpha_j>0, \omega-$ функция типа модуля непрерывности, $h-$ плюригармоническая в U^n функция.*

1. *Предположим, что $m_j\leqslant\alpha_j,\ j=1,...,n,\ h\in h^1(U^n)$ (см. [2]) тогда следующие утверждения равносильны:*
   - **a.** $T_h\in L(A_\omega(\alpha,m))$;
   - **b.** *функция h допускает представление $h(\zeta)=h_1(\zeta)+\overline{h_2(\zeta)}$, $\zeta\in T^n$, где h_1,h_2 являются граничными значениями функций, голоморфных в U^n, при этом h_1 - мультипликатор пространства $A_\omega(\alpha,m)$, $D^{-m}h_2\in\Lambda_\omega^\alpha$, где $D^{-m}-$ оператор, обратный к оператору D^m.*
2. *Предположим, что $m_j\geqslant\alpha_j+2,\ j=1,...,n$, тогда следующие утверждения равносильны:*
   - **a.** $T_h\in L(A_\omega(\alpha,m))$;
   - **b.** *h допускает представление $h(\zeta)=h_1(\zeta)+\overline{h_2(\zeta)}$, $\zeta\in T^n$, где $h_1\in A_\omega(\alpha,m), h_2\in H^\infty(U^n)$.*
3. *Пусть $h\in H^1(U^n)$ и $m_j=\alpha_j+1, j=1,...,n$, тогда следующие утверждения равносильны:*
   - **a.** *T_h является ограниченным оператором в $A_\omega(\alpha,m)$;*
   - **b.** *функция $h\in H^\infty(U^n)$, причем*
     $$\sup_{z\in U^n}\left\{\left|\frac{\partial^n h(z_1,...,z_n)}{\partial z_1...\partial z_n}\right|\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|z_j|)^2}{\omega_j(1-|z_j|)}\int\limits_{1-|z_j|}^{1}\frac{\omega_j(u_j)}{u_j^2}du_j\right\}<\infty.$$

Литература

1. *Шамоян Ф.А.* Об ограниченности тёплицевых операторов в весовых соболевских пространствах голоморфных в круге функций. Исследования по линейным операторам и теории функций. 39, Зап. научн. сем. ПОМИ, 389, ПОМИ, СПб., 2011, 257–282.

2. *Рудин У.* Теория функций в полидиске. М.: Мир,1974. — 456 с.

О ПРОДОЛЖЕНИИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВДОЛЬ КРИВЫХ

Шананин Н.А. (Москва)

nshananin@sci.pfu.edu.ru

Пусть Ω — открытое множество в $\mathcal{R}^n$, $\langle\varrho,\alpha\rangle = \varrho_1\alpha_1 + \ldots + \varrho_n\alpha_n$-взвешенный порядок дифференцирования ∂^α, $\varrho \in \mathcal{N}^n$, $\mu = \min_j \varrho_j$, $x' = \{x_j|\varrho_j = \mu\}$ и $x'' = \{x_j|\varrho_j > \mu\}$, $J \subset \{\alpha|\langle\varrho,\alpha\rangle \leqslant m-\mu\}$, N - число элементов в J, $\partial_J u(x)$ - совокупность всех производных $\partial^\alpha u(x)$, $\alpha \in J$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(P(x,D)u =) \sum_{m-\mu<\langle\varrho,\alpha\rangle\leqslant m} a_\alpha(x)\ \partial^\alpha u = f(x, \partial_J u(x)), \qquad (1)$$

Предположим, что функция $f(x,v)$ определенна для почти всех $x \in \Omega$ и всех $v \in \mathbb{C}^N$, обладает свойством Каратеодори, $f(x,0) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и локально по переменным u при почти всех x удовлетворяет липшицевой оценке, $P(x,D)$ - оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, *главный пучок символов*

$$\mathcal{H}_u(x,\xi,h) = \sum_{k=0}^{\mu-1} h^k \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle=m-k} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha,$$

которого удовлетворяет условиям: если $\mathcal{H}_u(x,\xi',0,0) = 0$, то $\xi' = 0$, для каждой точки $y \in \Omega$ и любых неколлинеарных векторов (ξ'^0, ξ''^0) и $(\eta'^0, 0)$ существует окрестность W точки $(y, \eta'^0, \xi^0, 0)$, в которой уравнение

$$\mathcal{H}_u(x, z\eta' + \xi', \xi'', h) = 0$$

имеет только простые корни, причём для каждого из них либо мнимая часть тождественно равна нулю в этой окрестности, либо отлична от нуля во всех ее точках. Через $u_{[x]}$ обозначим росток обобщенной функции u в точке x.

Пусть $u^1(x)$ и $u^2(x)$ - два решения уравнения (1), у которых $\partial^\alpha u^j(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $\langle \varrho, \alpha \rangle \leqslant m - \mu$ и $\partial^\alpha u^j(x) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $\alpha \in J$, $j = 1, 2$, $\Gamma = \{x(t) | t \in [0, 1]|]$ - кусочно гладкая интеральная кривая дифференциальной системы $dx'' = 0$.

Теорема. *Если* $f(x, \partial_J u^1(x))_{[x]} = f(x, \partial_J u^2(x))_{[x]}$, $\forall x \in \Gamma$ *и* $u^1_{[x(0)]} = u^2_{[x(0)]}$, *то* $u^1_{[x]} = u^2_{[x]}, \forall x \in \Gamma$.

Именной указатель

Верстка и подготовка оригинал-макета:

Шабров С.А.

Издательство Воронежского государственного университета,
394053, г. Воронеж, Университетская пл., 1.
Тир. 500 экз. Подписано к печати 14.04.2014