Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Российский университет дружбы народов

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIV»

Воронеж – 2013

УДК 517.94 (92; 054, 97)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 13-01-06805-г

Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXIV». – Воронеж: ВГУ, 2013. 246 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, Московским государственным университетом и Российским университетом дружбы народов.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

ISBN

Владимир Александрович Ильин

2 мая 2013 года исполнилось 85 лет выдающемуся математику и блестящему педагогу, академику РАН Владимиру Александровичу Ильину.

Владимир Александрович Ильин родился в городе Козельске Калужской области.

В 1936 году Владимир Александрович поступил в Москве сразу во второй класс средней школы № 345. В 1945 году с золотой медалью окончил московскую среднюю школу № 273. В том же году поступил и в 1950 году с отличием окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по кафедре математики.

В 1950-1953 годах обучался в аспирантуре физического факультета МГУ по специальности "математическая физика". Кандидат физико-математических наук (1953), тема диссертации: "Дифракция электромагнитных волн на некоторых неоднородностях" (научный руководитель А.Н. Тихонов). Доктор физико-математических наук (1958), тема диссертации: "О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа". Ученое звание - профессор (1960).

Член-корреспондент АН СССР (1987), академик АН СССР (1990), действительный член РАН (1991). Академик Международной академии наук высшей школы (1996). Награжден орденами Трудового Красного Знамени (1980), Дружбы Народов (1988), Почёта (1998), "За заслуги перед Отечеством" IV степени (2004), "За заслуги перед Отечеством" III степени (2012). Лауреат Государственной премии СССР (1977, 1980), лауреат премии Президента РФ в области образования (2004), лауреат двух Ломоносовских премий МГУ (за научную работу — 1980, за педагогическую работу — 1992), лауреат премии Министерства высшего и среднего специального образования СССР "За лучшую научную работу" (1988). Заслуженный профессор МГУ (1993).

С момента окончания аспирантуры и по настоящее время основным местом работы Владимира Александровича является Московский государственный университет. Он работал сначала на кафедре математики физического факультета в должностях: ассистента (1953-1957), доцента (1957-1959), профессора (1959-1970). С 1970 года — профессор, а затем (с 1974) — заведующий кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики. С 1973 года и по настоящее время по совместительству — главный научный сотрудник отдела теории функций Математического института РАН им. В.А. Стеклова. В.А. Ильин — главный редактор ежемесячного математического журнала РАН "Дифференциальные уравнения", заместитель главного редактора журнала РАН "Доклады Академии Наук". Член комиссии по присуждению Государственных Премий Российской Федерации, член научно-методического совета по математике при Министерстве Образования РФ. В течение ряда лет являлся председателем экспертного Совета ВАК.

Область научных интересов: математическая физика, теория дифференциальных уравнений, спектральная теория дифференциальных операторов, информатика и математическое моделирование. В.А. Ильин установил разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения в произвольном нормальном цилиндре. Получил точные условия разрешимости краевых и смешанных задач для уравнений в частных производных второго порядка с разрывными коэффициентами. Для произвольных самосопряженных расширений эллиптических операторов в произвольных (не обязательно ограниченных) областях и с любыми спектрами установил окончательные в каждом из классов функций Никольского, Соболева-Лиувилля, Бесова и Зигмунда-Гельдера условия равномерной сходимости как самих спектральных разложений, так и их средних Рисса. Эти условия явились новыми и окончательными и для разложений в кратный интеграл Фурье и в кратный тригонометрический ряд Фурье. Для несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов L любого порядка получил конструктивные необходимые и достаточные условия базисности систем собственных и присоединенных функций и конструктивные необходимые и достаточные условия для того, чтобы разложение произвольной функции из класса L_p равномерно на любом компакте основного интервала равносходилось с разложением той же функции в обычный тригонометрический ряд Фурье. Доказал, что эти же условия являются необходимыми и достаточными для существования полной системы интегралов движения у нелинейной эволюционной системы, порождаемой $(L - A)$ представлением П. Лакса. Для оператора Шредингера с матричным потенциалом установил справедливость покомпонентного принципа локализации. Для самосопряженного расширения на всей прямой $\mathbb{R}$ оператора Шредингера с сингулярным потенциалом, удовлетворяющим лишь так называемому условию Като, установил факт равномерной на всей прямой R равносходимости спектрального разложения произвольной функции из класса $L_p(R)$ с разложением той же функции в интеграл Фурье. В последние несколько лет нашел явные аналитические выражения для граничных управлений, переводящих за различные промежутки времени процесс, описываемый гиперболическим уравнением, из произвольного начального состояния в произвольно заданное финальное состояние (результаты отнесены к числу лучших достижений РАН за 2001 год).

Владимир Александрович подготовил 27 докторов и свыше 90 кандидатов физико-математических наук. За время педагогической деятельности В.А. Ильиным прочитано множество лекционных курсов. В.А. Ильин — автор ряда широко известных учебников. Признан лучшим лектором МГУ в 2000 году. В.А. Ильин является автором более 300 научных публикаций.

Все знают и любят Владимира Александровича как замечательного, чуткого, необыкновенно образованного человека, интересного и остроумного собеседника, обладающего удивительной памятью и тонким вкусом, способного часами читать наизусть стихи, в том числе собственного сочинения, и, конечно же, бесконечно влюбленного в математику.

ТЕОРЕМА КРЕЙНА-МИЛЬМАНА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И ЭКОНОМИСТОВ

Авраменко Л.Г. (Киев)
yuragoco@mail.ru

В курсе математики для экономистов обязательно присутствуют задачи линейного программирования, излагаемые в виде алгоритмов решения без должного обоснования. Как правило, ограничиваются геометрической иллюстрацией на плоскости задачи поиска экстремальных значений линейных функционалов на выпуклых множествах. Теорема Крейна-Мильмана (1940 г.), лежащая в основе методов линейного программирования, в своей общей формулировке для выпуклых множеств в линейных топологических пространствах выходит за все мыслимые рамки курса высшей математики для ВТУЗов. Однако, изложение конечномерного варианта этой теоремы вполне возможно уже во втором, третьем семестрах после знакомства с основами линейной алгебры.

Определение 1. *Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ — разные точки. Множество $\{(1-\lambda)\bar{a} + \lambda\bar{b} \mid \lambda \in (0;1)\}$ называется открытым интервалом.*

Определение 2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Точка $\bar{x} \in A$ называется крайней точкой множества A, если она не содержится ни в одном интервале, принадлежащем A.*

Определение 3. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклой оболочкой множества M, если оно состоит из всех конечных сумм вида $\sum\limits_k \lambda_k \bar{x}_k$, где $\bar{x}_k$ — произвольные элементы из A, $\lambda_k \in [0;1]$ и $\sum\limits_k \lambda_k = 1$.*

Теорема Крейна-Мильмана. *Всякое выпуклое ограниченное замкнутое множество являеся выпуклой оболочкой своих крайних точек.*

Доказательство проведем индукцией по размерности пространства. Пусть $n = 1$. Всякое выпуклое множество на прямой является отрезком. Его концы — крайние точки. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ у всякого ограниченного замкнутого множества крайние точки существуют и само множество является выпуклой оболочкой своих крайних точек. Пусть теперь выпуклое ограниченное замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Покажем, что у него есть крайние точки. Для любой гиперплоскости $L(\bar{x}) = 0$ в $\mathbb{R}^n$ в силу замкнутости и ограниченности множества A существует точка $\bar{x}_0 \in A$, наиболее от нее удаленная. Проведем через нее гиперплоскость $L(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$, параллельную исходной. Пересечение множества A и гиперплоскости $L(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$ будет выпуклым множеством размерности $n - 1$, по предположению индукции у него существует крайняя точка $\bar{y}$. Покажем, что она крайняя и для множества A. От противного. Пусть это не так. Тогда $\bar{y} = (1 - \lambda)\bar{a} + \lambda\bar{b}$. Поскольку точка $\bar{x}_0$ наиболее удалена от гиперплоскости, то множество A лежит по одну сторону от гиперплоскости и $L(\bar{a} - \bar{x}_0)$ и $L(\bar{b} - \bar{x}_0)$ одного знака. Например, положительные. Тогда $L(\bar{y} - \bar{x}_0) = (1 - \lambda)L(\bar{a} - \bar{x}_0) + \lambda L(\bar{b} - \bar{x}_0) > 0$, что противоречит тому, что $L(\bar{y} - \bar{x}_0) = 0$. Итак, в n-мерных пространствах у выпуклого ограниченного замкнутого множества есть крайние точки. Рассмотрим выпуклую оболочку всех крайних точек множества A. Покажем, что она совпадает с A. От противного. Выберем в A точку, не входящую в выпуклую оболочку крайних точек. Проведем через нее гиперплоскость, не пересекающую выпуклую оболочку точек. Выпуклая оболочка крайних точек будет лежать по одну сторону от гиперплоскости. По другую сторону от выпуклой оболочки выберем точку множества A, наиболее удаленную от гиперплоскости. Ее пересечение с множеством A будет выпуклым замкнутым ограниченным множеством размерности $n - 1$, а значит содержащим крайнюю точку, что противоречит предположению.

Следствие. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, тогда линейная функция достигает на A своего наибольшего (наименьшего) значения по меньшей мере в одной крайней точке.*

Каждый шаг доказательства хорошо иллюстрируется рисунком на плоскости, что делает их интуитивно очевидными. Изложение теоремы занимает полупару.

Литература

Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1960. — 1071 с.

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОРНЕЙ СКОЛЬЗЯЩИХ ЛАКУНАРНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДЛЯ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Агранович Ю.Я., Шелудяков А.Н. (Воронеж)

agyrya19591212@yandex.ru, tander2006@rambler.ru

Процессы скользящего суммирования достаточно часто используются для обработки динамических рядов различной природы и давно завоевали себе репутацию одного из наиболее надежных методов извлечения информации из числовых данных. Процессы скользящего суммирования чрезвычайно часто используются для обработки динамических рядов и давно снискали себе репутацию надежного метода извлечения информации из числовых данных. Некоторые недавние результаты, полученные в области весового скользящего сглаживания методом многоугольных чисел [1,2,3] показывают важность полиномиальных интерполяций при выборе ширины и расположения окна сглаживания[4,5,6,7,8,9]. В связи с этим возникает ряд новых неожиданных задач. Одна из таких задач состоит в исследовании предельного поведения корней многочленов с коэффициентами, скользящими вдоль некоторой числовой последовательности, определенной линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами. Решение одной из таких задач представлено ниже.

Рассмотрим двустороннюю последовательность чисел Фибоначчи: $\Phi_n, n \in \mathbb{N}, \Phi_0 = 0, \Phi_1 = 1, \ldots, \Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots \qquad (1)$$

и семейство скользящих многочленов степени n с коэффициентами из последовательности (1):

$$P_{n+m}(z) = \Phi_{n+m} \cdot z^n + \Phi_{n+m+1} \cdot z^{n-1} + \ldots + \Phi_{2\cdot n+m}, m \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

Нас интересует предельное поведение корней многочленов (2) при $m \to +\infty$.

Отметим, что производящей функцией для чисел Фибоначчи является рациональная функция с числителем равным 1. Поэтому корни конечных сумм соответствующего степенного ряда расходятся. Однако совсем по-другому ведут себя корни скользящих многочленов.

Не ограничивая общности, будем сразу считать, что $m \geqslant M \geqslant -n$. Φ_{n+m}.. Φ_{n+m} в форме Бинэ:

$$\Phi_{n+m} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [\varphi^{(n+m)} - (-\tilde{\varphi}^{(n+m)})], \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \tilde{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{3}$$

из (3) и (2) получим следующую цепочку равенств:

$$P_{n+m}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \{z^n \cdot [\varphi^{(n+m)} - (-\tilde{\varphi}^{(n+m)})] +$$

$$+z^{n-1} \cdot [\varphi^{(n+m+1)} - (-\tilde{\varphi}^{(n+m+1)})] + \ldots + [\varphi^{(2\cdot n+m)} - (-\tilde{\varphi}^{(2\cdot n+m)})]\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^{(n+m)} \{z^n + z^{n-1} \cdot \varphi + z^{n-2} \cdot \varphi^2 + \ldots + z \cdot \varphi^{n-1} + \varphi^n - \tag{4}$$

$$-\left[z^n \cdot \left(-\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}\right)^{(n+m)} + z^{n-1} \cdot (-\tilde{\varphi}) \cdot \left(-\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}\right)^{(n+m)} + \ldots +\right.$$

$$\left. +z \cdot (-\tilde{\varphi})^{n-1} \cdot \left(-\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}\right)^{(n+m)} + (-\tilde{\varphi})^n \cdot \left(-\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}\right)^{n+m}\right]\}$$

В силу непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов, немедленно следует, что корни рассматриваемых многочленов стремятся к корням многочленов:

$$F_n(z) = z^n + z^{n-1} \cdot \varphi + \ldots + z \cdot \varphi^{n-1} + \varphi^n \tag{5}$$

и, следовательно, стремятся к корням уравнения

$$z^{n+1} - \varphi^{n+1} = 0, \text{кроме} \quad z = \varphi \tag{6}$$

Можно показать, что справедлива следующая верхняя оценка разности корней:

$$\varepsilon_n(m) \leqslant (3 - \sqrt{5}) \cdot n \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{m}{n}} \tag{7}$$

Иными словами, приближение к корням предельных многочленов имеет скорость убывающего слагаемого в представлении чисел Фибоначчи формулой Бинэ.

В общем случае (необходимые определения см. например, в [3] и имеющимся там списке литературы), справедлива следующая

Теорема. *Пусть числовая последовательность определяется линейным рекуррентным соотношением, удовлетворяющим свойству Пизо. Тогда корни скользящего вправо многочлена с убывающими степенями приближаются к вершинам правильного многоугольника, вписанного в окружность с радиусом равным наибольшему характеристическому числу данного рекуррентного соотношения.*

Аналогичные результаты получены также для последовательностей "близких"к арифметическим прогрессиям . При этом члены последовательности перемещаются в степени аргумента полинома.

Такой подход позволяет трансформировать плотностные характеристики (банахова плотность, асимптотическая плотность) линейно расположенных множеств на множества точек расположенных на плоскости.

Литература

1. *Агранович Ю.Я., Концевая Н.В., Подвальный С.Л., Хацкевич В.Л.* Метод многоугольных чисел в прцедуре сглаживания временных рядов // Системы управления и информационных технологии, 2009, 4(38), с. 30-34.

2. *Агранович Ю.Я., Концевая Н.В., Хацкевич В.Л.* Сглаживание временных рядов показателей финансовых рынков на основе многоугольных чисел // Прикладная эконометрика, 2010, 3(19), с. 3-8.

3. *Агранович Ю.Я., Концевая Н.В., Хацкевич В.Л.* Метод многоугольных чисел в процедуре сглаживания временных рядов и приложения к исследованию финансовых рынков // Экономика и математические методы, 2010, 3(46), с. 71-81.

4. *Агранович Ю.Я., Концевая Н.В., Подвальный С.Л., Хацкевич В.Л.* Синтез статистического и детерминистского методов в проблеме сглаживания временных рядов // Системы управления и информационных технологии, 2011, 4(46), с. 4-7.

5. *Агранович Ю.Я., Концевая Н.В., Подвальный С.Л., Хацкевич В.Л.* Скользящее усреднение на основе минимизации невязки в формуле Эйлера-Маклорена // Вестник воронежского государственного технического университета, 2011, 12(7), с. 4-6.

6. *Агранович Ю.Я., Концевая Н.В.* Метод определения параметров сглаживания временных рядов на основе минимизации невязки в формуле Эйлера-Маклорена // Современная экономика. Проблемы и решения, 2011, 7(18), с. 131-137.

7. *Агранович Ю.Я., Концевая Н.В.* Формула Эйлера-Маклорена

в теории скользящего усреднения // Международный научно- исследовательский журнал, 2012, ч.1 5(5), с. 5-6.

8. *Концевая Н.В.* Анализ методов заполнения пропусков во временных рядах показателей финансовых рынков // Вестник воронежского государственного технического университета, 2012, 8(8), с. 18-20.

9. *Концевая Н.В.* Метод рандомизации заполнения пропусков во временных рядах при исследовании рыночных показателей // Системы управления и информационных технологии, 2012, 2.2(48), с. 259-263.

10. *Elsner L* On the Variation of the Spectra of Matrices/ // Linear Algebra and its applications, 1982, №47, с. 127-138.

ОРТОПОДОБНАЯ СИСТЕМА И НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ПОЛИНОМОВ [1]

Акишев Г. (Караганда)

akishev@ksu.kz

Пусть X – σ-конечное измеримое пространство с неотрицательной мерой ν,$\nu(X) = 1$ и $q, \theta \in (1, +\infty), \alpha \in R = (-\infty, +\infty)$. Пространством Лоренца-Зигмунда $L_{q,\theta}(\log L)^{\alpha}$ называется множество всех ν – измеримых на X функций f для которых

$$\|f\|_{q,\theta,\alpha} = \left\{ \int\limits_0^1 (f^*(t))^{\theta} (1 + |\ln t|)^{\alpha\theta} \cdot t^{\frac{\theta}{q}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где f^* - невозрастающая перестановка функции $|f|$.

Будем рассматривать счетную ортоподобную систему $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_2(X)$ ([1], стр. 58) удовлетворяющая условию

$$\|\varphi_n\|_r \equiv \left(\int_X |\varphi_n(x)|^r d\nu \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant M_n, \ \ n \in N \tag{1}$$

при некотором $r \in (2, +\infty]$. Здесь $M_n \uparrow$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть ортоподобная система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1). Если $1 < q < 2$, $0 \leqslant \alpha < \infty$, то для любого*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РК

полинома $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ *выполняется неравенство*

$$\|f_n\|_{2,q,\alpha} \leqslant C(p)\|f_n\|_2 \Big(\ln\Big(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2\Big)\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\alpha}.$$

Если $1 < p < 2 < q < +\infty$ *или* $2 < p < q < +\infty$, *то*

$$\|f_n\|_{2,p,\alpha} \leqslant C(p,q)\|f_n\|_{2,q,\alpha} \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Литература

1. *Лукашенко Т. П.* О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным. Матем. сб. 1997. Т.188, №12. С. 57-72.

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алексеева С.М., Алексеева О.Ю. (Калининград)

alekseeva-sm@yandex.ru

Рассматриваются методы регуляризации в обратной задаче для уравнения теплопроводности с условием интегрального типа - модифицированный метод квазиобращения, состоящий в замене оператора задачи соответствующим корректным для обратного направления времени оператором и метод регуляризации, в котором меняется область определения оператора теплопроводности.

Регуляризация первым методом предполагает введение в уравнение квазиобратной задачи соответствующего дополнительного слагаемого с малым параметром, а для регуляризации задачи вторым методом вместо «малого» изменения уравнения квазиобратной задачи меняется область определения оператора теплопроводности, которая заменяется «близкой» областью определения с нелокальным условием по времени.

Приведены численные примеры применения методов.

Литература

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.

2. Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений. – Дифференц. уравнения, 1986, т.22 №12, с.2117-2126.

3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. – Дифференц. уравнения, 1977, т.13, №2, с.294-304.

4. Алексеева С.М., Юрчук Н.И. Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым условием. – Дифференц. уравнения, 1998 т.36, №4, с.495-502.

5. Алексеева С.М. Моделирование управления в неклассической задаче теплопроводности. //Тезисы докл. VIII Белорусской Международной математической конференции. Часть 1. Минск, Беларусь: изд-во Института математики НАНБ, 2000, с.172.

6. Алексеева С.М. О регуляризации нелокальным условием по времени в задаче теплопроводности с интегральным условием //тезисы докл. 11 Саратовской зимней школы. – Саратов, 2002, с.6-7.

7. S.M. Alekseeva. Modelling of two regularization methods in nonclassical heat conduction problem. //Тезисы международной научной конференции, приуроченной к 200-летию со дня рождения Карла Густава Якоби и 750-летию со дня основания Кёнигсберга. Изд. КГУ, 2005, с.66-68.

8. M. Denche and K. Bessila. Quasi-boundary value method for nonwell posed problem for a parabolic equation with integral boundary condition. //Journal of Mathematical Analysis and Applications, V.301, I.2, 2005, pp. 419-426.

9. Pham Hoang Quan, Le Minh Triet, Dang Duc Trong. A Regularization of Backward Problem for Nonlinear Parabolic Equation with Time-Dependent Coefficient. – International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, V.2012, Article ID 943621, 20 p.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Аль-Кхазраджи Сундус Х.М., Костин В.А. (Воронеж)
vlkostin@mail.ru

В работе [1] процесс нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в пористой среде в полубесконечной области при изменении давления $P_s(t)$ на границе описывается задачей

$$(1-\nu)\frac{\partial P_2}{\partial t} + \nu\frac{\partial P_1}{\partial t} = a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x,\, t < \infty. \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \sigma(P_1 - P_2) \quad (2)$$

$$P_1(t,0) = P_s(t),\ P(t,\infty) = 0,\ P_1(0,x) = 0,\ P_2(0,\infty) = P_2(0,x) = 0.$$

где ν — доля объема пористых зон, P_1 и P_2 – давление в проточных и застойных зонах, соответственно; σ – константа массообмена между проточными и застойными зонами, a – коэффициент тепломассопереноса.

Требуется найти градиент давления у границы области $P_s(t) = \frac{P_1}{x}|_{x=0}$. Эта величина определяет скорость течения жидкости в соответствии с равенством $u = -k(\mu x)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial x}$, где k – проницаемость сред, μ – вязкость жидкости, x – пористость отнесенная к объему проточных зон.

Применение метода теории сильно непрерывных полугрупп дает следующее представление для решения этой задачи

$$q(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^3/2}[U(x) - I]dt$$

где

$$U(x,-A)p(t) = e^{-\frac{(1-\nu)\sigma}{a}x}\left[p(-\nu x) + \right.$$
$$\left. + \sigma\left[\frac{(1-\nu)x}{a}\right]^{\frac{1}{2}}\int_0^{t-\nu x} I_0\left[2\sigma\left(\frac{1-\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}}(x\xi)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot e^{-\sigma\xi}p(t-\sigma-\nu x)d\xi\right],$$

Литература

1. Бабенко Ю.И. Методы дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассопереноса.— СПб: «Профессионал» – 584 с.

АДАПТАЦИОННАЯ СХЕМА ПОДБОРА АППРОКСИМАЦИИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА ДЛЯ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Андрианова А.А. (Казань)
aandr78@mail.ru

Пусть имеется задача нахождения $f^* = \min\{f(x), x \in D\}$, где $D = \{x : x \in R_n, g(x) \leqslant 0\}$, где $f(x), g(x)$ являются непрерывными и сильно квазивыпуклыми функциями. Требуется найти решение этой задачи с заданной наперед точностью $\varepsilon > 0$.

В [1] было введено понятие $\varepsilon-$удовлетворительной аппроксимации множества D, применение которого в алгоритмах методов последовательной безусловной минимизации позволяет получить решение задачи с требуемой точностью за конечное число итераций. Подходы к построению таких алгоритмов в [1] предполагают наличие априорных знаний о функциях задачи (например, константы Липшица, констранты сильной квазивыпуклости). Однако такие данные или их приемлемые оценки получить достаточно сложно.

Адаптационная схема решения задачи основана на том, что параметры, задающие аппроксимацию допустимого множества адаптируются в процессе решения и за конечное число итераций достигают уровней, соответствующих параметрам $\varepsilon-$удовлетворительной аппроксимации. Тогда вычисления можно будет закончить, так как будет получено решение заданной точности для исходной задачи.

Сформулируем адаптационную схему для методов внешней точки. Выберем внутреннюю аппроксимацию G допустимого множества ($G \subset D$). Проводим вычисление методом внешней точки до попадания очередной итерационной точки $x_k (k > 0)$ в множество D. Обозначим предыдущую итерационную точку y_k. Изменяем параметры аппроксимации так, что точка x_k принадлежит новому множеству-аппроксимации. С учетом точки y_k и новой аппроксимации повторяем этот процесс. Остановка вычислений производится, когда $|f(x_k) - f(y_k)| \leqslant \varepsilon$. Тогда x_k удовлетворяет точности $\varepsilon > 0$.

Литература

1. *Андрианова А.А.* Применение удовлетворительной аппроксимации допустимого множества при решении задач оптимизации // Ученые записки Казанского университета. Серия Физ.-мат. наук. – Т.154, кн.3, 2012. - с. 190 - 201.

РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ОБУЧАЮЩИХ СИСТЕМ В ДИСТАНЦИОННОМ ОБРАЗОВАНИИ

Аршава Е.А. (Харьков, Украина)
elarshava@mail.ru

Трудно переоценить роль компьютерных обучающих систем в дистанционном образовании. Стратегическая цель дистанционного образования в мире состоит в предоставлении возможности для каждого обучающегося в любом месте изучить программу любого колледжа или университета. Выполнение этой цели потребует перехода от обмена идеями и знаниями к обмену образовательными ресурсами [1]. Образование становится инструментом взаимопроникновения не только знаний и технологий, но и капитала, инструментом борьбы за рынок.

Примерный набор материалов, который используется перед началом дистанционного образования для получения инженерного образования, выглядит следующим образом: — текст с изложением теоретического материала,
— видеозаписи лекций,
— вопросы для самоконтроля с подробными ответами на них,
— задачи для самоконтроля с подробными решениями,
— контрольные вопросы для проверки знаний,
— методические указания по лабораторному практикуму,
— задания для типовых расчетов (курсовых работ, проектов) и методические указания по выполнению этих работ,
— справочные материалы, необходимые для работы над курсом.

При регулярной работе над курсом к концу его изучения у преподавателя накапливается достаточно большой материал, позволяющий судить об уровне знаний каждого студента и приобретенных навыках. Заключительный экзамен по курсу должен быть письменно-устным и очным, чтобы объективно оценить, насколько самостоятельно выполнялась студентом работа в семестре. Такой подход к дистанционному образованию открывает большие перспективы и в деле послевузовского образования и при переподготовке кадров. Работа над внедрением дистанционного образования соответствует логике развития системы образования в обществе, где приоритетной становится потребность каждого отдельного человека, и по мере накопления опыта будут совершенствоваться как технические средства, так и учебно-методические приемы этой новой технологии обучения.

Литература

Тихомиров В.П. Дистанционное образование: ожидания и реальность // Развитие образования и науки на пороге XXI века. М.: МАН ВШ, 1996. № 2. С. 29–42.

ОБ ОСНОВНЫХ ЭТАПАХ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ

Асадулаева Т.Г. (Махачкала)
tamillka84@mail.ru

Для эффективного функционирования образовательного процесса целесообразно выделить некоторые основные этапы управления. На наш взгляд, таковыми являются:

1. Аналитический этап. На этом этапе выполняется выделение наиболее остро стоящих проблем во внешней среды и формирование на этой основе проблемной ситуации. Затем проводится анализ проблемной ситуации, и формируется для всех имеющихся в ней проблем множество допустимых альтернативных путей изменения состояния школы.

2. Постановка задачи. На этом этапе происходит определение приоритетов деятельности, направленной на обеспечение требуемого качества образовательного процесса в школе и обеспечение устойчивого финансового состояния. Затем формулируются, и структурируются в виде дерева подцелей задачи, связанные с их реализацией.

3. Принятие управленческого решения. На этом этапе осуществляется выбор наиболее эффективных альтернатив устранения наблюдаемых в проблемной ситуации проблем, определяется технология и алгоритм их реализации, задаются промежуточные результаты - подцели, позволяющие оценивать промежуточные результаты, связанные с реализацией различных проблем.

4. Реализация решения. В ходе этого этапа происходит планирование и реализация сформированных планов, позволяющих эффективным образом реализовать выбранные управленческие мероприятия в виде последовательности организационно-управленческих действий, направленных на достижение поставленных целей.

5. Оценка результатов и корректировка принятых решений. В ходе этого этапа проводится анализ результатов деятельности, определяется, насколько полученные результаты совпадают с целью, и на этой основе принимается решение о необходимости или корректировки полученных результатов, или корректировки выполняемых управленческих мероприятий. В последнем случае этот этап предшествует очередному аналитическому этапу и новому циклу управления, связанному с реализации заданной цели.

Из анализа рассмотренных этапов становится ясным, что при построении организационной структуры управления школой необходимо учитывать то обстоятельство, что все эти этапы должны быть структурно охвачены в ходе управленческой деятельности. При этом каждое структурное подразделение должно четко осознавать пределы своей компетенции при решении различных задач управления и специфику принимаемых им управленческих решений.

Определенный интерес для формирования эффективной системы управления школой представляет используемый при этом принцип организации. В общем случае могут быть использованы, как принцип организации ориентированный на "процесс так и принцип организации ориентированный на "результат". Таким образом, для формирования эффективной системы управления определенный интерес представляет сравнительный анализ между собой различных подходов организации управления образовательным процессом в школе. Результаты такого анализа показывают, что эффективное управление образовательными услугами должно быть ориентированным на результат.

Основная же цель управления, определяющая его основной результат, будет определяться повышением качества образовательных услуг, оказываемых школой. При этом следует иметь в виду, что цель и результаты образовательного процесса должны измеряться в одних и тех же единицах.

Литература

Ерошин В. Финансово-экономические отношения в образовании. М.:Педагогика,1999 - №3.

Заболотный Е.Б., Майсаков Д.Л. Некоторые аспекты распределения внебюджетных средств в учреждениях высшего профессионального образования. Университетское управление, 2001- № 2(17).

Гамдрович С.Р., Крутак А.Б. Новые информационные системы в малом бизнесе. В сб. международного конгресса "Маркетинг и системы информатизации предпринимательства". СПб.: СПбУЭФ, 1996.

Дахин А. Российское образование: модернизация или развитие?М.: Народное образование,2003- №2.

Тони Блер. Новая экономика требует новой системы образования. М.: Высшее образование в России,2000 - №2.

СХЕМА РАБОТЫ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ЗАНЯТИЙ ВУЗА

Астахова И.Ф., Асвад Фирас М. (Воронеж)

В статье рассматривается схема работы генетического алгоритма [1-2]. Данная схема предназнвчена для составления расписания. В нее входят следующие шаги: инициализация данных, получение первой популяции, селекция, кроссовер и затем мутация (рис. 1).

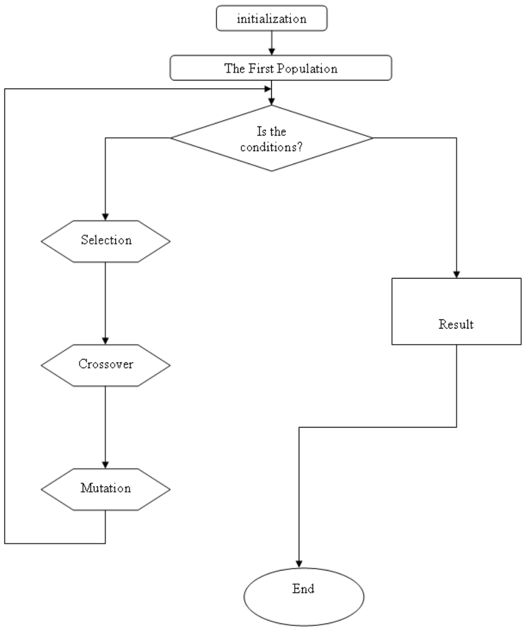

Рис. 1. Схема работы алгоритма.

Описание работы алгоритма.

1. Инициализация

Первоначальная инициализация особей проходит в 2 этапа.

1 этап - построение допустимых значений. В него входят:

- выборка из базы данных ID аудиторий по типам: лекционные, практические, (по всем уникальным значениям таблицы AudType ID);

- сохранение полученных данных в коллекции LectionAuds, PracticalAuds, Эти коллекции содержат допустимые значения для Хромосомы.Аудитории;

- выборка всех Time.ID из таблицы Times, сохранение ее в таблицу TimeData, т.е. таблица TimeData содержит все возможные пары за одну неделю;

- в массив BlockInfo[] Blocks (id_block, id_group, id_subject, id_teacher, id_Type_Lectuer} выбираются соответствующие столбцы из таблицы Block_БД. Информация массива Blocks в дальнейшем используется для записи в БД конечного результата.

Хранение данных в оперативной памяти целесообразно, поскольку они выбираются единственный раз и используются для всех особей на каждом этапе работы алгоритма (инициализация, скрещивание, мутация, селекция).

2 этап. Инициализация

- создание n экземпляров класса Особь, где n – указанный в настройках алгоритма размер популяции;

- выборка m - общего числа блоков занятий из таблицы Blocks;

- вызов конструктор класс Особь с параметром m;

- конструктор класса Особь создает экземпляр класса Хромосома. Аудитории и Хромосома.Время, каждая из которых имеет m экземпляров класса Ген;

- конструктор класса Хромосома.Аудитории создает массив из m генов. Номер гена в массиве соответствует номеру блока занятий;

- инициализация генов класса Хромосома.Аудитории – по номеру гена (номеру блока занятий) из массива BlockAudtypes – тип подходящей аудитории. Из этой таблицы случайным образом выбирается номер подходящей аудитории. Если значение соответствующего значения BlockIntencity 1, то для следующего гена из Хромосомы.Время выполняется принудительное назначение того же времени, что и у предыдущего;

- инициализация генов класса Хромосома.Время – каждому гену присваивается случайное значений из таблицы TimeData.

2- Create the First Population:- На первом этапе случайным образом формируется исходная популяция,состоящая из заданного числа M особей, где каждая особь популяции представляет собой отдельный вариант расписания (решение задачи).

3- Conditions:- Определение условия остановки генетического алгоритма, зависит от его конкретного применения.

4-Select:- Селекция особей На этапе происходит отбор (селекция) наиболее приспособленных особей (вариантов расписания), имеющих более предпочтительные значения функции пригодности по сравнению с остальными особями.

5- Crossover:- (Скрещивание) – Скрещивает родителей, чтобы получить нового потомка. Скрещивание происходит с определенной вероятностью. Если скрещивание не выполнилось, то потомок – это точная копия одного из родителей.

6- Mutation:-(Мутация) Изменяет несколько отличительных признаков нового потомка в локусе (участок хромосомы) с определенной вероятностью. Если мутации не произошло, потомок является прямым результатом скрещивания, или копией одного из родителей.

По рассмотренному алгоритму в среде C# разработан программный комплекс, выполняющий все шаги алгоритма и позволяющий построить расписание занятий в определенный интервал времени с известными ограничениями.

Литература

1. Низамова Г.Ф. Математическое обеспечение составления расписания учебных занятий на основе генетических алгоритмов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата наук – Уфа: УГАТУ, 2006, 135с.

2. Гладков Л.А. Генетические алгоритмы. / Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. – М.: “Физматлит”, 2006 г., 320 стр.

ВЫБОР МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ТРАНСЛЯТОРА

Астахова И.Ф., Малиев А.А. (Воронеж)

Транслятор является программой, которая способна воспринимать строку символов определенного вида (т.е. текст программы на исходном языке) и выдавать другую строку символов (объектную программу). Трансляторам присущ ряд общих черт, что упрощает их процесс создания. В состав любого транслятора входят три основных компонента [1-2]:

- лексический анализатор (блок сканирования);
- синтаксический анализатор;
- генератор кода машинных команд.

Для разработки лексического и синтаксического анализатора можно воспользоваться так называемыми компиляторами компиляторов. Компилятор компиляторов — программа, воспринимающая синтаксическое или семантическое описание языка программирования и генерирующая компилятор для этого языка.

Синтаксис выражается в виде БНФ или её производной и должен удовлетворять правилам того метода синтаксического анализа, который будет использоваться в генерируемом компиляторе.

Грамматика определяется как четверка (Vt, Vn, P, S), где Vt – алфавит, символы которого называются терминальными (терминалами), из них строятся цепочки порождаемые грамматикой. Vn – алфавит, символы которого называется нетерминальными (нетерминалами), используются при построении цепочек; они могут входить в промежуточные цепочки, но не должны входить в результат порождения. Vt и Vn не имеют общих символов, т.е. $Vt \cap Vn = \varnothing$, полный алфавит (словарь) грамматики V определяется как объединение Vt и Vn. P – набор порождающих правил, каждый элемент которых состоит из пары (α, β), где α находится в V+, а β в V*. α – левая часть правила, а β – правая, т.е. цепочки, построенные из символов алфавита V. Правило записывается $\alpha \rightarrow \beta$. S принадлежит Vn и называется начальным символом (аксиомой). Этот символ – отправная точка в получении любого предложения языка.

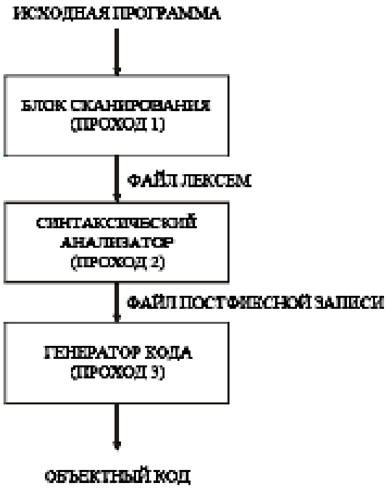

Рис. 1. Трехпроходный транслятор.

Каждая строка, которую можно вывести из начального символа, называется сентенциальной формой. Предложение – сентенциальная форма, содержащая только терминалы.

Как правило, предложения языка можно генерировать с помощью более чем одной грамматики. Две грамматики, генерирующие один и тот же язык, называют эквивалентными. С точки зрения разработчика транслятора одна грамматика может быть гораздо удобней другой.

Рассмотрим наиболее распространенные варианты взаимосвязи между компонентами транслятора (рис. 1).

Существует полное соответствие между регулярными выражениями (а поэтому и грамматиками типа 3) и конечными автоматами, которые определяются следующим образом и используются в этой работе :

Конечный автомат – это устройство для распознавания строк какого-либо языка. У него есть конечное множество состояний, отдельные из которых называются последними. По мере считывания каждой литеры строки контроль передается от состояния к состоянию в соответствии с заданным множеством переходов. Если после считывания последней литеры строки автомат будет находиться в одном из последних состояний, о строке говорят, что она принадлежит языку, принимаемому автоматом. В ином случае строка не принадлежит языку, принимаемому автоматом [3].

Конечный автомат формально определяется пятью характеристиками [4]:

- конечным множеством состояний (K)
- конечным входным алфавитом (Σ)
- множеством переходов (δ)
- начальным состоянием (S0 из K)
- множеством последних состояний (f из K)

M = (K , Σ , δ , S0 , f).

Такой автомат называют детерминированным, потому что в каждом элементе таблицы переходов содержится одно состояние. В недетерминированном конечном автомате это положение не выдерживается.

С точки зрения разбора важно, что КС язык в состоянии распознавать автомат магазинного типа, эквивалентный конечному автомату, к которому добавлена память магазинного типа (стек). В функции автомата магазинного типа входит:

- чтение входного символа, замещение верхнего символа стека строкой символов (возможно, пустой) и изменение состояния или
- все то же самое, но без чтения входного символа.

Автомат магазинного типа можно представить кратным (K, S, Г, δ, S0 , Z0), где K – конечное множество состояний, S – входной алфавит, Г –алфавит магазинный, δ – множество переходов, S0 – начальное состояние, Z0 – символ магазина, который первоначально находится в стеке.

Что же касается конечных автоматов, то мы можем также определять недетерминированные автоматы магазинного типа, содержащие множество переходов для заданного входа, состояния и содержания стека.

При разборе происходит эффективное моделирование соответствующего автомата магазинного типа. Некоторые КС языки не могут анализироваться детерминированным образом (т.е. без возврата). Язык, допускающий детерминированный анализ, называется детерминированным; большинство языков программирования являются детерминированными или, по крайней мере, почти таковыми.

Между КС-грамматиками и автоматами магазинного типа существует полное соответствие, и детерминированность автомата может зависеть от того, какая грамматика используется для генерирования языка. Метод разбора является детерминированным (для конкретной грамматики), если при разборе данной грамматики не требуется делать возврат. Некоторые языки можно разбирать детерминировано с помощью только одного из методов грамматического разбора. В частности, ряд языков можно разбирать детерминировано снизу вверх, но не сверху вниз.

Итак, в качестве способа описания синтаксиса языка следует выбрать синтаксические диаграммы Вирта (СД) исходя из следующего:

• просты в разработке;

• наглядны и легко читаемы;

• СД и конечные автоматы имеют тесную связь: любой автоматный язык задаётся синтаксической диаграммой и обратно, по любой синтаксической диаграмме можно построить конечный автомат (в общем случае недетерминированный), распознающий тот же язык, который задаёт диаграмма. Построив по синтаксической диаграмме соответствующий распознающий конечный автомат, можно затем реализовать этот автомат либо аппаратно, либо программно. Таким образом, синтаксические диаграммы могут служить не только для порождения, но и для распознавания автоматных языков.

Для выполнения функций трансляции программы в данном случае, по мнению автора, наиболее подходит небольшая программа-транслятор, построенная на основе автомата с магазинной памятью построенного на основе LL(1) грамматики, т.к.

• LL(1) грамматики будет дотаточно для расспознавания разрабатываемого языка;

• Автоматы с магазинной памятьб удобно расширять из за удобства читаемости кода.

Литература

1. Альфред Ахо, Рави Сети, Джеффри Ульман Компиляторы: принципы, технологии и инструменты / Ахо А., Сети Р., Ульман Д.; Пер. с англ. - М.: Издательский дом "Вильямс 2003. - 768 с.

2. Альфред Ахо, Джеффри Ульман Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т1 / Ахо А., Ульман Д.; Пер. с англ. В.Н. Агафонова - М.: Издательство "Мир 1978. - 613 с.

3. И.Г. Кревский, М.Н. Селиверстов, К.В. Григорьева Формальные языки, грамматики и основы построения трансляторов: Учебное пособие / И.Г. Кревский, М.Н. Селиверстов, К.В. Григорьева – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2002.– 124 с.

4. Льюис Ф., Розенкранц Д., Стирнз Р. Теоретические основы проектирования компиляторов / Льюис Ф., Розенкранц Д., Стирнз Р.; Пер. с англ. - М.: Мир, 1979

О СТЕПЕННЫХ И НЕСТЕПЕННЫХ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[1]

Асташова И.В. (Москва)

ast@diffiety.ac.ru

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} = |y|^k \operatorname{sgn} y, \qquad n \geqslant 1, \quad k > 1. \tag{1}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для всех $x^* \in \mathbb{R}$ функции

$$Y_{x^*}(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}, \;\; \alpha = \frac{n}{k-1}, \;\; C^{k-1} = \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j), \tag{2}$$

являются решениями уравнения (1). В работе [1] при $n = 2$, в работах [2,3] при $n = 3, 4$ доказано, что все положительные решения уравнения (1) с вертикальной асимптотой $x = x^*$ имеют вид

$$y(x) = Y_{x^*}(x)(1 + o(1)), \;\; x \to x^* - 0. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00989)

Из результатов работы [4] следует, что для любого $N > 1$ существуют такие $n > N$, $k > 1$, что уравнение (1) имеет другие положительные решения, с вертикальной асимптотой $x = x^*$, а именно

$$y(x) = (x^* - x)^{-\alpha}\, h(\,\ln(x^* - x)\,), \tag{4}$$

где h — непостоянная непрерывная положительная периодическая функция. Остается открытым вопрос, насколько маленьким может быть $n \geqslant 5$, для которого при некотором $k > 1$ существует решение с нестепенной асимптотикой.

Теорема 1. *При $n = 12$, 13, 14 существуют такие $k > 1$, что уравнение (1) имеет решение, для которого*

$$y^{(j)}(x) = (x^* - x)^{-\alpha - j}\, h_j(\,\ln(x^* - x)\,), \quad j = 0, 1, \ldots, n - 1,$$

где h_j — непостоянные непрерывные положительные периодические функции.

Для $n = 12$ этот результат приведен в [6].

Следствие. *При $n = 12, 13, 14$ существует такое $k > 1$, что уравнение*

$$y^{(n)} = (-1)^n |y|^k \operatorname{sgn} y$$

имеет решение $z(x) = x^{-\alpha}\, h(\,\ln x\,)$, $x > 0$, где h — непостоянная непрерывная положительная периодическая функция.

Для доказательства теоремы 1 в уравнении (1) делаем замену переменных:

$$x^* - x = e^{-t}, \quad y = (C + v)\, e^{\alpha t} \tag{5}$$

(подробнее см. [3], ч. 1, гл. 5), приводящую его к системе

$$\dot V = AV + F(V), \tag{6}$$

где A — постоянная матрица $n \times n$, собственные значения которой являются корнями многочлена

$$\textstyle\prod_{j=0}^{n-1} (\lambda + \alpha + j) - \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \alpha + j), \tag{7}$$

$V(t)$ — вектор-функция с компонентами $V_j = \dfrac{d^j v}{dt^j}$, $j = 0, \ldots, n-1$, а отображение $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет при $t \to \infty$ условиям

$$\|F(V)\| = O\big(\|V\|^2\big) \ \text{ и } \ \|F'_V(V)\| = O\big(\|V\|\big). \tag{8}$$

Далее к системе (6) применяется бифуркационная теорема Хопфа [5, гл.5], использование которой возможно ввиду условий (8) и наличию некоторых специальных свойств корней многочлена (7).

Лемма 1. *Для любого целого* $n \geqslant 12$ *найдутся такие* $\alpha > 0$ *и* $q > 0$, *что многочлен (7) имеет чисто мнимые корни* $\lambda = \pm qi$.

Для доказательства этой леммы вводятся положительные функции $\rho_n(\alpha)$ и $\sigma_n(\alpha)$, определенные для всех $\alpha > 0$ с помощью уравнений $\prod\limits_{j=0}^{n-1} \left(\rho_n^2 + (\alpha+j)^2 \right) = \prod\limits_{j=0}^{n-1} (1+\alpha+j)^2$ и $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \arg \left(\sigma_n \, i + \alpha + j \right) = 2\pi$ в предположении, что $\arg z \in [0, 2\pi)$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и доказывается, что

1) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\sigma_n(\alpha)}{\alpha} = \operatorname{tg} \dfrac{2\pi}{n} > 0 = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\rho_n(\alpha)}{\alpha}$;

2) *для любого* $\alpha > 0$ *выполняются неравенства* $\rho_{n+1}(\alpha) > \rho_n(\alpha)$ *и* $\sigma_{n+1}(\alpha) < \sigma_n(\alpha)$;

3) *для малых* $\alpha > 0$ *справедливо* $\sigma_{12}(\alpha) < 2 < \rho_{12}(\alpha)$.

Лемма 2. *Для всех* $\alpha > 0$ *и всех целых* $n > 1$ *все корни* $\lambda \in \mathbb{C}$ *многочлена (7) являются простыми.*

Лемма 3. *Пусть* $12 \leqslant n \leqslant 14$ *и* λ_α *— такое семейство корней многочленов (7), что* $\mathrm{Re}\lambda_\alpha = 0$ *при некотором* $\alpha = \alpha_0$. *Тогда* $\left.\dfrac{d}{d\alpha} \mathrm{Re}\lambda_\alpha \right|_{\alpha=\alpha_0} < 0$.

Применим теорему Хопфа к системе (6). Из теоремы следует, что при $n = 12, 13, 14$ существует семейство таких $\alpha_\varepsilon \in (0;1)$, что система (6) при каждом ε имеет периодическое решение $V_\varepsilon(t)$ с периодом $T_\varepsilon \to T = \frac{2\pi}{q}$, $\varepsilon \to 0$. В частности, компонента $V_{\varepsilon,0}(t) = v(t)$ вектора $V_\varepsilon(t)$ — тоже периодическая функция. Тогда, с учетом (5), получим

$$y = (C + v(t))\; e^{\alpha t} = (C + v(-\ln(x^* - x)))\,(x^* - x)^{-\alpha},$$

причем при достаточно малых ε функция $C + v(t)$ положительна. Введя обозначение $h(s) = C + v(-s)$, получим (4).

Литература

[1] *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. – 432 с.

[2] *Асташова И. В.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. //В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И. Н. Векуа. Тбилиси. 1985. т. 1, No 3, с. 9–11.

[3]*Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. //Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой, с. 22–288, 2012, М.: ЮНИТИ-ДАНА.

[4]*Kozlov V. A.* On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. //Ark. Mat., 1999, v. 37, No 2, p. 305–322.

[5]*Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. – 368 с.

[6]*Асташова И. В., Вьюн С. А.* О положительных решениях с нестепенной асимптотикой уравнения типа Эмдена–Фаулера двенадцатого порядка. //Дифференц. уравнения, 2012, т. 48, No 11, с. 1568–1569.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ СТЕНКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А. (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

В ряде технических устройств возникает необходимость поддерживать постоянную или переменную во времени температуру в некоторой области, окруженной твердыми стенками. С этой целью внутри стенки помещают источник или, наоборот, поглотители тепла. В работе рассмотрена задача нахождения поля температур и потоков тепла в неоднородной стенке при наличии источников (стоков) тепла, работающих в заданном режиме. Для решения задач использован математический аппарат, развитый Л.Берсом [1].

Поставлена задача, найти распределения температур в твердой стенке. Известны температуры на границах стенки x_1, x_2 :

$$T|_{x_1} = T_1, T|_{x_2} = T_2.$$

В точке $x = x_0$ расположены источники тепла заданной зависящей от времени мощности

$$D_1T|_{x_0+} - D_2T|_{x_0-} = J(t)$$

За начальную температуру обычно принимается стационарное распределение. Процесс теплопроводности подчинен уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = c(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t},$$

где $\lambda(x)$ - переменный по координате коэффициент теплопроводности, $\rho(x)$ - плотность вещества стенки, а $c(x)$ - удельная теплоемкость.

Среди различных режимов работы тепловых источников изучен случай, когда $J(t)$ аппроксимирована многочленами.

Особо выделен случай периодического режима, когда нет необходимости разложения в ряд (задача без начальных условий). А периодический режим исследован на примере функции $J(t)$. Метод построения решения (1) содержит большое число частных случаев [1]. Как по геометрии (оболочка может быть искривлена), так и по законам изменения параметров.

Литература

1. *Гладышев Ю.А.* Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике. - Калуга, 1997. - 310 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ ПОДЗЕМНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ[1]

Бадриев И.Б. (Казань)
Ildar.Badriev@ksu.ru

Изучаются установившиеся процессы подземной фильтрации несжимаемых высоковязких жидкостей, следующих многозначным законам фильтрации с предельным градиентом [1], а также при рассмотрении задач об определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязко-пластической нефти в многослойных пластах [2].

Указанные задачи, играющие важную роль в вопросах увеличения нефтеотдачи, оптимизации разработки нефтяных месторождений привлекают внимание многих специалистов. Для этих задач для ряда областей и законов фильтрации известны точные решения. Однако случаи произвольных областей и законов фильтрации,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00955, 12-01-97022)

требующие, в силу сложности возникающих здесь задач, применения приближенных методов, изучены недостаточно.

Обобщенные постановки указанных задач формулируется в виде смешанного вариационного неравенства с монотонным оператором и вообще говоря, недифференцируемым, функционалом. Установлены свойства оператора, входящего в эти неравенства (псевдомонотонность [3], коэрцитивность), а также свойства функционалов: липшиц-непрерывность и выпуклость. Это дало возможность применить для доказательства теоремы существования известные результаты теории монотонных операторов [3].

Литература

1. *Лапин А. В.* Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1979. - Т. 19, № 3. - С. 689-700.

2. *Ентов В. М., Панков В. Н., Панько С. В.* Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. - Томск: Изд-во Томского государственного университета. - 1989. - 196 с.

2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир, 1972. - 588 с.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ[1]

Бадриев И.Б., Сингатуллин М.Т. (Казань)

Ildar.Badriev@ksu.ru, m.t.singatullin@gmail.com

Изучаются установившиеся процессы подземной фильтрации несжимаемых высоковязких жидкостей, следующих многозначным законам фильтрации с предельным градиентом [1]. Обобщенные постановки задач формулируется в виде смешанных вариационных неравенств с обратно сильно монотонным оператором и выпуклым, липшиц-непрерывным, вообще говоря, недифференцируемым, функционалом. Для решения вариационных неравенств с операторами монотонного типа предложены итерационные методы расщепления, не требующие обращения исходного оператора. Основную трудность при этом представляет решение возникающих на каждой итерации задач минимизации. В случае задач фильтрации эту задачу удалось решить в явном виде благодаря тому, что

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00667, 12-01-00955, 12-01-97022)

можно эффективно вычислить субдифференциал функционала, сопряженного к минимизируемому. При этом каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к решению краевой задачи для оператора Лапласа. Следует отметить, что предложенные методы позволяют находить приближенные значения не только самого решения, но и его характеристик, для задач фильтрации – это приближенные значения градиента решения, а также приближенные значения скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации, что весьма полезно с практической точки зрения. Был разработан комплекс программ в среде MatLab. Проведены численные эксперименты для модельных задач. Исследована зависимость границ застойных зон (множеств в области фильтрации, где модуль градиента давления меньше предельного, т.е. движение фильтрующейся жидкости отсутствует).

Литература

1. *Лапин А. В.* Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1979. - Т. 19, № 3. - С. 689-700.

О НЕРАВЕНСТВЕ ГОРДИНГА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

Баев А.Д., Давыдова М.Б., Ковалевский Р.А., Садчиков П.В. (Воронеж)

alexsandrbaev@mail.ru

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty\left(R^1_+\right)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau \to \eta}$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, и рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$.

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, \ldots,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha\,(t) \in C^{s_1}\,[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 = s_1(\nu)$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda\,(x, t, \xi, \eta)$ принадлежит классу символов $S^m_\alpha(R^1 \times \Omega \times R^1 \times R^1)$, $m \in R^1$, $\Omega \subseteq (0; +\infty)$, $x \in R^1$, $t \in (0; +\infty)$, $\xi \in R^1$, $\eta \in R^1$, если $\lambda\,(x, t, \xi, \eta) \in C^\infty\left(\Omega \times R^1 \times R^1 \times R^1\right)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \frac{\partial^l}{\partial \xi^l}\frac{\partial^p}{\partial \eta^p}\lambda\,(x, t, \xi, \eta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\tau,m,l,p}\left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma - l - p)},$$

где $\tau, m, l, p = 0, 1, 2, \ldots$; $c_{\tau,m,l,p} > 0$ — некоторые константы, не зависящие от t, x, ξ, η.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$, $x \in R^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K\,(x, t, D_x, D_{\alpha,t})\,v\,(x, t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha\left[\lambda\,(x, t, \xi, \eta)\,F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v\,(x, t)\right]\right]$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $P(x, t, D_x, D_{\alpha,t})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $p(x, t, \xi, \eta) \in S^m_\alpha(R^1 \times \Omega \times R^1 \times R^1)$, $m \in R^1$, $\Omega \subseteq (0; +\infty)$, $x \in R^1$, $t \in (0; +\infty)$. Пусть $Rep(x, t, \xi, \eta) \geqslant c(1 + |\xi| + |\eta|)^m$ для всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in \mathrm{R}^1$, $t \in \mathrm{K} \subset \Omega$, где К –

произвольное компактное множество. Тогда для любого $s \in R^1$ и любой функции $u(x,t) \in C_0^\infty(R^{n-1} \times K)$ справедливо неравенство

$$Re(P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})u(x,t),u(x,t)) \geqslant c_0 \|u\|^2_{\frac{m}{2},\alpha} - c_1 \|u\|^2_{s,\alpha}$$

с некоторыми константами $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$.

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ЦЕНЫ И ГРАНИЦЫ ИСПОЛНЕНИЯ VANILLA PUT ОПЦИОНА АМЕРИКАНСКОГО ТИПА

Батаев Е.С. (Москва)
bataev.evgeny@gmail.com

В работе описывается численный алгоритм, положенный в основу программного обеспечения для решения задачи нахождения цены и границы исполнения vanilla put опциона американского типа.

Мы будем решать следующую задачу: возможно ли рассчитать рыночную цену $P(S,t)$ опциона в момент t, $0 \leqslant t \leqslant T$?
Введем следующие обозначения:

- $S(t)$ — цена актива в момент t;
- $r(t) \in C^1 : [0,T] \to [0,+\infty]$ — ставка безрискового актива;
- $\sigma(S,t) \in C^1 : [0,+\infty] \times [0,T] \to [0,+\infty]$ — волатильность;
- T — время исполнения контракта;
- K — цена исполнения опциона;
- $P_0(S,t) = (K-S)_+$ — функция выплат опциона put.

В работах [2], [3] доказано, что $P(S,t)$ является решением вариационного неравенства, полученного из системы дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S,t)S^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \leqslant 0 \\ P \geqslant P_0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S,t)S^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP\right)(P - P_0) = 0 \\ P|_{t=T} = P_0. \end{aligned}$$

Доказано, что для функции цены $P(S,t)$ американского опциона vanilla put существует функция $\gamma(t)$, разделяющая область на две части: где $P(S,t) = P_0(S)$, и где $P(S,t) > P_0(S)$. Функция $\gamma(t)$ называется свободной границей или границей исполнения опциона. Если цена актива попадает в первую часть, то опцион должен быть исполнен, тем самым снимаются риски по выполнению контракта.

На основе работы [1] разработано программное средство, позволяющее численно находить границу исполнения опциона и функцию цены.

Литература

[1] *Y. Achdou, O. Pironneau.* Computational methods for Option Pricing. SIAM., 2005. — 316 с.

[2] *Ж. Лионс, Э. Мадженес.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: МИР, 1971. — 372 с.

[3] *Jailet P., Lamberton D., Lapeyre B.* Variational inequalities and the pricing of American options.// Acta Appl. Math., 21, 1990. — с.263-289.

О РЕДУКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИНДЕКСА ОСОБОЙ ТОЧКИ

Близняков Н.М. (Воронеж)

nmbliznyakov@yandex.ru

Пусть

$$\Phi(x,y) = \{F(x,y), G(x,y)\} - \tag{1}$$

полиномиальное векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с изолированной нулевой особой точкой: $\Phi(0,0) = 0$. Пусть для степеней по переменной x многочленов $F(x,y)$, $G(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ выполнено неравенство $deg_x F(x,y) \geqslant deg_x G(x,y)$. Разделим многочлен $F(x,y)$ на многочлен $G(x,y)$ как многочлены переменной x, коэффициенты которых – многочлены по переменной y:

$$P(y)F(x,y) = Q(x,y)G(x,y) + R(x,y), \tag{2}$$

где $deg_x R(x,y) < deg_x G(x,y)$, а $P(y)$ – многочлен, зависящий только от переменной y. Пусть $P(y) = y^m P_0(y)$, $P_0(0) \neq 0$.

Теорема 1. *Если компонента $G(x,y)$ векторного поля (1) не имеет множителей вида y^q, $q \in \mathbb{N}$, то*

1) при $m \equiv 0(mod\ 2)$ 0 – изолированная особая точка векторного поля $\Phi_1(x,y) = \{R(x,y), G(x,y)\}$ и

$$ind(\Phi, 0) = ind(\Phi_1, 0) sgn P_0(0);$$

2) при $m \equiv 1(mod\ 2)$ 0 – изолированная особая точка векторного поля $\Phi_2(x,y) = \{yR(x,y), G(x,y)\}$ и

$$ind(\Phi, 0) = ind(\Phi_2, 0) sgn P_0(0).$$

Теорема 2. *Если компонента $G(x,y)$ векторного поля (1) имеет множители вида y^q, $q \in \mathbb{N}$ и $G(x,y) = y^k G_0(x,y)$, $G_0(x,0) \not\equiv 0$, то*

1) при $k \equiv 0(mod\ 2)$ 0 – изолированная особая точка векторного поля $\Phi_3(x,y) = \{F(x,y), G_0(x,y)\}$, компонента $G_0(x,y)$ которого не имеет множителей вида y^q, и

$$ind(\Phi, 0) = ind(\Phi_3, 0);$$

2) при $k \equiv 1(mod\ 2)$ 0 – изолированная особая точка векторного поля $\Phi_4(x,y) = \{yF(x,y), G_0(x,y)\}$, компонента $G_0(x,y)$ которого не имеет множителей вида y^q, и

$$\begin{aligned} ind(\Phi, 0) = ind(\Phi_4, 0) + \tfrac{1}{2}[sgn\, fir\, (F(-\varepsilon, 0)G_0(-\varepsilon, 0)) - \\ - sgn\, fir\, (F(\varepsilon, 0)G_0(\varepsilon, 0))] \end{aligned}$$

(здесь $fir\, H(\varepsilon)$ – первый в ряду коэффициентов многочлена $H(\varepsilon) \in \mathbb{R}[\varepsilon]$, записанного по возрастающим степеням ε).

Теоремы 1, 2 позволяют в результате конечного числа арифметических и логических операций свести задачу вычисления индекса нулевой особой точки полиномиального векторного поля к тривиальной задаче вычисления индекса нулевой особой точки полиномиального векторного поля, одна из компонент которого зависит только от переменной y.

Литература

1. *Красносельский М.А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М. : Наука, 1975. – 512 с.

2. Векторные поля на плоскости / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Физматгиз, 1963. – 248 с.

3. *Bliznyakov N.M.* Cauchy Indices and the Index of a Singular Point of a Vector Field / N.M. Bliznyakov // Lecture Notes in Mathematics. – 1986. – V. 1214. – P. 1-20.

МИНИМАЛЬНЫЕ ПЕРИОДЫ НЕПОСТОЯННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И КОНСТАНТЫ БОРА-ФАВАРА

Бравый Е.И. (Пермь)

bravyi@perm.ru

Исследуется задача о минимальном времени возвращения в исходное состояние объекта, поведение которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Показано, что задача связана с условиями однозначной разрешимости периодической краевой задачи для линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений, а наилучшие константы в оценках минимального времени возвращения (минимального периода непостоянного периодического решения) являются известными константами Бора-Фавара.

Константами Бора-Фавара K_n [1, с. 385, Д. 27] называются наилучшие постоянные в неравенстве

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t)| \leqslant K_n \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} |x^{(n)}(t)|,$$

которое должно выполняться для всех $x \in \mathbf{AC}^{n-1}([0,1],\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющих условиям $x^{(n)} \in \mathbf{L}_\infty([0,1],R^1)$, $x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1)$, $i = 0,\ldots,n-1$, $\int_0^1 x(t)\,dt = 0$. Определим эти рациональные константы равенствами

$$K_n = \begin{cases} \dfrac{(2^{n+1}-1)|B_{n+1}|}{2^{n-1}(n+1)!}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \dfrac{|E_n|}{4^n n!}, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

где B_n — числа Бернулли, E_n — числа Эйлера. Тогда

$$K_{n+1} = \frac{1}{8(n+1)} \sum_{k=0}^{n} K_k K_{n-k}, \quad n \geqslant 1,\ K_0 = 1,\ K_1 = 1/4,$$

$$\frac{1}{\cos(t/4)} + \operatorname{tg}(t/4) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n t^n, \quad |t| < 2\pi,$$

кроме того, $K_1 = 1/4,\ K_2 = 1/32,\ K_3 = 1/192,\ K_4 = 5/6144,\ K_5 = 1/7680$, $\lim_{n\to\infty} K_n (2\pi)^n = 4/\pi$.

Рассмотрим периодическую краевую задачу для системы из m функционально-дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (Fx)(t), \quad t \in [0,T], \\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(T), \quad i = 0,\dots,n-1, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^m$, отображение $F : \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^m) \to \mathbf{L}_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$ таково, что при некоторой константе L для каждой функции $x \in \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$ выполнено неравенство

$$\begin{gathered} \max_{i=1,\dots,m} \left(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} (Fx)_i(t) - \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[0,T]} (Fx)_i(t) \right) \leqslant \\ \leqslant L \max_{i=1,\dots,m} \left(\max_{t\in[0,T]} x_i(t) - \min_{t\in[0,T]} x_i(t) \right). \end{gathered} \tag{2}$$

Если $(Fx)(t) = f(x(\tau(t)))$ при измеримой функции $\tau : [0,T] \to [0,T]$, то условие (2) эквивалентно липшицевости функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: при всех $y,\ z \in \mathbb{R}^m$

$$\max_{i=1,\dots,m} |f_i(y) - f_i(z)| \leqslant L \max_{i=1,\dots,m} |y_i - z_i|. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если периодическая задача* (1) *имеет непостоянное решение, то*

$$T \geqslant \frac{1}{(L\,K_n)^{1/n}}. \tag{4}$$

Пусть теперь оператор F действует в пространство суммируемых функций и не обязан отображать множество постоянных функций в себя (как оператор F в условиях теоремы 1). Предположим, что существуют такие положительные функции $p_i \in \mathbf{L}_1([0,T],\mathbb{R}^1)$, $i = 1,\dots,m$, что для каждого $x \in \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}&\max_{i=1,\dots,m}\left(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]}\frac{(Fx)_i(t)}{p_i(t)} - \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[0,T]}\frac{(Fx)_i(t)}{p_i(t)}\right)\\ &\leqslant \max_{i=1,\dots,m}\left(\max_{t\in[0,T]} x_i(t) - \min_{t\in[0,T]} x_i(t)\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Например, $(Fx)(t) = p(t)f(x(\tau(t)))$ или $(Fx)(t) = p(t)\max\limits_{s\in[\tau(t),\theta(t)]} x(s)$.

Теорема 2. *Пусть* $F : \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^m) \to \mathbf{L}_1([0,T],\mathbb{R}^m)$ *удовлетворяет* (5). *Если периодическая задача* (1) *имеет непостоянное решение, то для всех* $i = 1,\dots,n$ *выполнены неравенства*

$$\|p_i\|_{\mathbf{L}_1} \geqslant 4 \quad \text{при} \quad n = 1, \qquad \|p_i\|_{\mathbf{L}_1} > 4/(K_{n-1}T^{n-1}) \quad \text{при} \quad n \geqslant 2. \tag{6}$$

Оценки (4), (6) минимальных периодов являются точными, ни одна из констант K_n в теоремах 1, 2 не может быть уменьшена. Точные константы в неравенстве (4) для систем автономных липшицевых обыкновенных дифференциальных уравнений определены Дж. Йорком [2] для $n = 1$, Дж. Мовеном и В. Вальтером [3] для $n \geqslant 1$ (в евклидовой норме), А.А. Зевиным [4] (для четных n и удовлетворяющих условию (3) функций f). Для уравнений с отклоняющимся аргументом $x^{(n)}(t) = f(x(\tau(t))$ при условии (3) А.А. Зевин нашел наилучшие константы только при $n = 1$ [4] и четных n [3] (в последнем случае константы были определены с помощью решений некоторой краевой задачи для уравнений n-го порядка).

Условия (4), (6) теорем 1 и 2 совпадают с необходимыми условиями существования нетривиального периодического решения периодической задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения с положительным функциональным оператором [6].

Литература

1. *Левин В.И., Стечкин С.Б.* Дополнения к книге *Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: Иностранная литература, 1948. — 456 с.

2. *Yorke J.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant. Proc. Amer. Math. Soc. 1969 (22). P. 509–512.

3. *Mawhin J., Walter W.* A General Symmetry Principle and Some Implications. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1994. V. 186 (3). P. 778–798.

4. *Zevin A. A., Pinsky M. A.* Minimal periods of periodic solutions of some Lipschitzian differential equations. Applied Mathematics Letters. 2009. V. 22 (10). P. 1562–1566.

5. *Зевин А. А.* Точные оценки периодов и амплитуд периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Докл. АН. 2007. Т. 415, № 2. С. 160–164.

6. *Бравый Е.И.* О наилучших константах в условиях разрешимости периодической краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков. Дифференц. уравн. 2012. Т. 48, № 6. С. 773–780.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

Бунеев С.С. (Елец)
limes88@mail.ru

Краевые задачи для уравнений с вырождением относятся к “неклассическим” задачам математической физики. Главная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1]. В работе В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [3]-[4] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В данной работе получена априорная оценка решений краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных. Уравнение, рассмотренное в данной работе отличается от уравнения рассмотренного в [5] знаком при не вырождающейся производной третьего порядка. Изменение знака при этой производной приводит к изменению граничных условий на границе $t = 0$ полосы. В этой работе устанавливается априорная оценка решений в пространствах, подпространствами которых являются пространства, рассмотренные в [5].

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассматривается уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t). \qquad (1)$$

Здесь

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - b\partial_t^3 v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\,\bar{b}a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)\, v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m^*-m(j-1)} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^j\, v|_{t=0} = G_j(x), \;\; j = 1;2 \qquad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\, v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\, v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $B(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m,k}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ — действительное число, m — натуральное число, k — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in S'$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m,k} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]} \Big\|(1+|x|^2)^k F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)} \times$$

$$\times F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\Big\|^2_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{3s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s - целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l\leqslant s} \left\|(1+|x|^2)^k D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v\right\|_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_s(R^{n-1})$ (s — действительное число, k — целое число) состоит из всех функций $u(x)\in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{s,k} = \left\|(1+|x|^2)^k F^{-1}_{\xi\to x}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u(x)]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $s\geqslant \max\{2m, m^*+\frac{m}{3}\}$ — целое число, k- целое число и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1)–(3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,m,k}(R_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,m,k} \leqslant c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,m,k} + \|B_j\ v|_{t=0}\|_{s-m^*-\frac{2m(j-1)}{3}-\frac{m}{3},k}),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от v.

Литература

1. Вишик М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25, вып. 4. – С. 29-56.

2. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048 – 79.

3. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

4. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/А. Д. Баев // Доклады Академии наук, 2008, т. 422, №6, с. 727 – 728.

5. Бунеев С.С. Об оценках решений одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка /С.С. Бунеев// Материалы Международной конференции "Зимняя математическая школа", Воронеж, 2013, с. 36-38.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

Бунеев С.С. (Елец)

limes88@mail.ru

В работах А. Д. Баева [1]-[2] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работе [3] была доказана теорема о существовании и единственности решения одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, содержащего не вырождающуюся производную третьего порядка по переменной t.

В данной работе доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных, отличающегося от уравнения, рассмотренного в [3] знаком при не вырождающейся производной третьего порядка. Показано, что при изменении знака при этой производной происходит изменение количества граничных условий на границе $t = 0$. Существование решения устанавливается в пространствах, частными случаями которых являются пространства, рассмотренные в [1].

В полосе $R^n_d = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t). \tag{1}$$

Оператор $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)$ имеет вид:

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b\partial_t^3 v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\, a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается условие вида

$$B(D_x)\, v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m^*} b_\tau D_x^\tau \partial_t^j\, v|_{t=0} = G(x) \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\, v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\, v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Пусть что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\bar{b}L_{2m}(\xi, \eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max(m_1, m_2)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $B(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3). Следуя [2], рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Обратное преобразование F_α^{-1} к преобразованию F_α можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)},$$

где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m,k}(R^n_d)$ ($s \geqslant 0$ — действительное число, k — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in S'$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]} \left\|(1+|x|^2)^k F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)} \times \right.$$

$$\left. \times F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{3s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s — целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l\leqslant s} \left\|(1+|x|^2)^k D^\tau_x D^j_{\alpha,t}\partial^l_t v\right\|_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,k}(R^{n-1})$ (s — действительное число, k — целое число) состоит из всех функций $u(x) \in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_s = \left\|(1+|x|^2)^k F^{-1}_{\xi\to x}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u(x)]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $s \geqslant \max\{2m, m^* + \frac{m}{3}\}$ — целое число, $m \geqslant 3$, k- целое число, и выполнены условия 1–3. Тогда для любых $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},k}(R^n_d)$, $G(x) \in H_{s-m^*-\frac{m}{3},k}(R^{n-1})$ существует единственное решение задачи (1)–(3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}(R^n_d)$.

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/А. Д. Баев // Доклады Академии наук, 2008, т. 422, №6, с. 727 – 728.

3. Бунеев С.С. О существовании решений одной краевой задачи в полосе/ С.С. Бунеев// Материалы Международной научной конференции "Зимняя математическая школа, 2012, с. 33-35.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж), Хромов А.П. (Саратов)
bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Методом Фурье с применением идей А.Н. Крылова [1] и В.А. Чернятина [2] по улучшению сходимости рядов, подобных рядам Фурье, получается классическое решение смешанной задачи:

$$u_t(x,t) = u_x(x,t) + q(x)u(1-x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{3}$$

при минимальных условиях на $\varphi(x)$. Ранее в [3] и [4] рассматривался случай, когда инволюция $\nu(x) = 1-x$ была в производной по x от $u(x,t)$. Предполагаем, что комплекснозначная функция $q(x)$ из $C^1[0,1]$, причем $q(0) = q(1)$. Минимальные требования на $\varphi(x)$ таковы: $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Обозначим через L оператор:

$$(Ly)(x) = y'(x) + q(x)y(1-x), \ y(0) = y(1).$$

Лемма 1. *Собственные значения оператора L достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы*

$$\lambda_n = 2\pi ni + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(1/n^2\right), \qquad (n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots),$$

где одним и тем же α обозначаются произвольные числа из некоторого набора чисел, и через α_n тоже произвольные числа, лишь бы $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

Лемма 2. *Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы*

$$y_n(x) = e^{2\pi nix} + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\Omega_{1n}(x) =$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238)

$$= \frac{1}{n}\left[b(x)e^{2\pi nix} + b(x)e^{-2\pi nix} + b(x)\alpha_n e^{2\pi nix} + b(x)\alpha_n e^{-2\pi nix}\right],$$

$$\Omega_{2n}(x) = \tfrac{1}{n}\left[b(x)\int\limits_0^x e^{2\pi nit} q'\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\,dt + b(x)\int\limits_0^x e^{-2\pi nit} q'\left(\tfrac{x+t}{2}\right)\,dt\right],$$

$O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ не зависит от x. Здесь одним и тем же $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора и $q'\left(\frac{x\pm t}{2}\right) = q'(\xi)\Big|_{\xi=(x\pm t)/2}$.

Лемма 3. *Для собственных функций оператора L^* имеют место асимптотические формулы*

$$z_n(x) = e^{-2\pi nix} + \widetilde{\Omega}_{1n}(x) + \widetilde{\Omega}_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $\widetilde{\Omega}_{kn}(x)$ имеет вид $\overline{\Omega_{kn}(x)}$ $(k = 1, 2)$ с заменой $q'\left(\frac{x\mp t}{2}\right)$ на $p'\left(\frac{x\pm t}{2}\right)$, и где $p(x) = -\overline{q(1-x)}$.

Формальное решение смешанной задачи (1)–(3) по методу Фурье имеет вид:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \left(R_\lambda\varphi\right)(x)e^{\lambda t}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)}y_n(x)e^{\lambda_n t}, \quad (4)$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$, $r > 0$ — некоторое фиксированное число.

Лемма 4. *Для формального решения (4) имеет место формула:*

$$\begin{aligned} u(x,t) = \widetilde{\varphi}(x+t) - \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(R_\lambda\varphi - R^0_\lambda\varphi\right)(x)e^{\lambda t}d\lambda + \\ + \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\tfrac{(\varphi,z_n)}{(y_n,z_n)}\,y_n(x)e^{\lambda_n t} - \left(\varphi, e^{2\pi nix}\right)e^{2\pi ni(x+t)}\right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\widetilde{\varphi}$ есть непрерывно дифференцируемая функция на всей оси $(-\infty,\infty)$, причем $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(1+x)$, $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, $L_0 y = y'(x)$, $y(0) = y((1)$. Ряд в (5) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$ при любом $T > 0$.

Теорема. *При указанных условиях смешанная задача (1)–(3) имеет классическое решение $u(x,t)$, представимое формулой (5).*

Литература

1. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах/ ГИТТЛ. Л, 1950. – 368 с.

2. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ. 1991. 112 с.

3. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. РАН. - 2011. - Т. 441, № 2. - С. 151-154

4. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. вып. 4. - С.3-12

ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ[1]

Васильев А.В. (Белгород), Васильев В.Б. (Липецк)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru

Мы рассматриваем многомерный сингулярный интеграл [1]

$$(Ku)(x) = v.p. \int\limits_D K(x-y)u(y)dy, \ x \in D, \tag{1}$$

и его дискретный аналог

$$(K_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbf{Z}_h^m \cap D} K(\tilde{x}-\tilde{y}) u_d(\tilde{y}) h^m, \ \tilde{x} \in \mathbf{Z}_h^m \cap D, \tag{2}$$

где $K(x)$ – ядро Кальдерона – Зигмунда [1], $K(0) \equiv 0, \mathbf{Z}_h^m$ – кубическая решетка в $\mathbf{R}^m$ с шагом $h > 0$, u_d – функция дискретного аргумента $\tilde{x} \in \mathbf{Z}_h^m$, D – либо m-мерное пространство $\mathbf{R}^m$, либо полупространство $\mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x_1, ..., x_m), \ x_m > 0\}$. Для исследования операторов (1), (2) выбираются пространства $L_2(D)$, $L_2(\mathbf{Z}_h^m \cap D)$. Обозначим l_h оператор сужения на точки решетки $\mathbf{Z}_h^m$, который определен по крайней мере для непрерывных функций, и $\sigma(\xi)$ символ оператора (1) [1], дополнительно предполагая выполненным условие $\sigma(0, ..., 0, -1) = \sigma(0, ..., 0, +1)$. Тогда для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

произвольной компактной подобласти $D' \subset D$ справедлива следующая

Теорема. *1) Если $D = \mathbf{R}^m$, то спектры операторов (1) и (2) совпадают.*

2) Если $D = \mathbf{R}^m_+$, то уравнения $aI + K$ и $aI_d + K_d$ одновременно разрешимы или неразрешимы в пространствах $L_2(\mathbf{R}^m_+)$ and $L_2(\mathbf{Z}^m_h \cap \mathbf{R}^m_+)$ соответственно.

3) Если $u(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$, то

$$|((l_h K - K_d l_h)u)(\tilde{x})| \leqslant ch^{\alpha},\ \tilde{x} \in D'.$$

Литература

1. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1962. — 256 с.

О КРИТЕРИИ ПОРОЖДЕНИЯ ДЛЯ ПРОИНТЕГРИРОВАННЫХ ПОЛУГРУПП

Васильев В.В., Хливненко Л.В. (Воронеж)

vvv-252v@yandex.ru

Семейство $S(t)$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве E, называют n раз проинтегрованной полугруппой, если оно обладает следующими свойствами

(i) при каждом $t \geqslant 0$ оператор $S(t)$ есть линейный ограниченный оператор;

(ii) семейство $S(t)$ сильно непрерывно по t при $t \geqslant 0$;

(iii) $S(0) = 0$;

(iv) при любых $t, s \geqslant 0$ и $x \in E$ имеет место следующее операторное тождество $(n-1)! \cdot S(t)S(s) =$

$$= \int_t^{t+s} (t+s-\tau)^{n-1} S(\tau)x\,d\tau - \int_0^s (t+s-\tau)^{n-1} S(\tau)x\,d\tau.$$

Основы теории проинтегрированных полугрупп и библиография приведены в учебном пособии [1].

Теорема. *Для того, чтобы плотно определенный замкнутый оператор A был производящим оператором экспоненциально ограниченной проинтегрированной полугруппы порядка n (где $n \geqslant 1$, целое), необходимо и достаточно, чтобы* *(i) при некотором вещественном ω область $\{\lambda : Re\lambda > \omega\}$ содержала только регулярные точки оператора A, и в этой области на резольвенту $R(\lambda; A)$ имела место оценка*

$$\left\|\frac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^n}\right\| \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - \omega)};$$

(ii) при любом $\sigma > \omega$ имела место равномерная по $\varepsilon \in (0, \delta)$ с некоторым $\delta > 0$ и по $t \in [0, T]$ ограниченность нормы интеграла

$$S_\varepsilon(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\varepsilon\lambda^2} e^{\lambda t} \cdot \frac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^n}\, d\lambda.$$

Литература

1. Васильев В.В., Хливненко Л.В. Проинтегрированные полугруппы. Воронеж, ИПЦ ВГУ, 2009. — 60 с.

О МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Виноградова П.В., Королева Т.Э. (Хабаровск)
vpolina17@hotmail.com, koroleva0180@mail.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается следующая задача

$$u'''(t) + Au(t) + Ku(t) = h(t), \quad u(0) = u(T) = u'(0) = 0, \qquad (1)$$

где $h(t) \in L_2(0, T; H)$, A – самосопряженный, отрицательно определенный оператор, монотонный оператор K подчинен (см. [1]) оператору A с порядком $0 \leqslant \alpha < 1$.

Используя метод Галёркина с базисом специального вида, в [2] доказаны существование и единственность сильного решения рассматриваемой задачи. Кроме того для галёркинских приближений установлены интегральные оценки скорости сходимости. Данная работа является непосредственным продолжением [2]. Здесь для указанной задачи получена новая равномерная оценка скорости сходимости приближенных решений, построенных по методу Галёркина, которая не следует из результатов работы [2].

Литература

[1] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967.– 464 с.

[2] *Виноградова П.В., Самусенко А.М.* Проекционный метод для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с нелинейным монотонным оператором // Сибирский журнал инд. математики. 2012.– Т.15.– №4.– Р. 64–70.

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ ПО ТЕМЕ «СИММЕТРИЯ ВОКРУГ НАС»

Глазкова И.В. (Воронеж)

В обучении большинству дисциплин всё больше используются методы и средства, позволяющие сделать учебный процесс более интересным и естественным для школьников, повысить их мотивацию к учению, приблизить изучаемый материал к повседневной жизни детей. Во многих случаях такого результата можно достичь за счёт использования активных методов, при которых ученик перестаёт быть пассивным слушателем и зрителем, а становиться активным участником образовательного процесса. К числу подобных методов, безусловно, можно отнести методику обучения, основанную на активной творческой проектной деятельности школьников. «Всё, что я познаю, я знаю, для чего это мне надо и где и как я могу эти знания применять»- вот основной тезис современного понимания метода проектов, который и привлекает многие образовательные системы. Практика показывает, что использование проектной деятельности возможно при обучении различным дисциплинам, входящим в школьную программу. Проектная деятельность оказывается достаточно эффективным методом обучения практически по всем естественнонаучным дисциплинам, к числу которым относиться и математика. Когда школьники работают над проектом вместе с учителем, рождается единый дух творчества, единый порыв, единство мыслей и чувств. Учитель находится на равных с ребёнком, он тоже исследователь, и так же ищет истину, а значит, вместе с учеником может удивляться, радоваться находкам. Работа по подготовке проекта всегда начинается с постановки цели, с обдумывания того, зачем проект нужен учителю и учащимся. Необходимо понимать, что работа над проектом объёмная, кропотливая, но польза от проектной деятельности несомненная. Проектную деятельность школьников условно можно разделить на несколько основных этапов. В рамках первого из них осуществляется погружение в проект. Этот этап должен быть проведён так, чтобы школьники заинтересовались работой в рамках проекта. После появления интереса, его необходимо сохранять и развивать. В основе большинства проектов лежит групповая работа школьников, при этом работа в группах организуется с учётом индивидуальных способностей, возможностей и межличностных отношений конкретных учащихся. Сами ребята определяют старшего в каждой группе и распределяют роли. Очевидно, что при таком подходе школьники работают активно и самостоятельно. Роль учителя в этом случае - ненавязчивый контроль и, по необходимости, консультации перед их выходом на защиту проекта. На протяжении веков человечество не переставало пополнять свои научные знания в той или иной области наук. Учёные и простые люди интересовались симметрией на плоскости и в пространстве. Изучение археологических памятников показывает, что человечество на заре своей культуры уже имело представление о симметрии и осуществляло её в рисунке и предметах быта. Деятельность школьников в рамках проекта начиналась с изучения истории возникновения терминов симметрия. Современное определение симметрии выглядит так: симметричным называется такой объект, который можно как – то изменить, получая в результате то же, с чего начинали. Благодаря этому учащиеся многое прочитали, выполнили задания на построение графиков функций с опорой на преобразования, познакомились с симметрическими многочленами от двух переменных, рассмотрели различные виды симметрии, их свойства, познакомились с зеркальной симметрией, симметрией в физике, в архитектуре древнего мира, в предметах декоративно - прикладного искусства, в музыке, в литературе. В результате проект позволил детям через исследование, эксперимент и наблюдение увидеть, что у человечества с симметрией связывались представления о красоте, порядке и гармонии, о созвучных аккордах в музыке, а так же о многом и другом. Активная проектная деятельность позволили учащимся убедиться, что симметрия действительно рядом с нами: в скульптуре, в архитектуре, в музыке, в природе. Это подчёркивает не только «жизненность» изучаемого материала, но и формирует у учеников представление о том, что математика носит междисциплинарный характер, а её методы и подходы используются человеком в самых различных областях своей деятельности. В результате работы над проектом школьники смогли проявить себя. Испытать успех, показать себя перед одноклассниками с привлекательной стороны, приобрести немаловажные умения: отмечать успехи друг друга, обсуждать совместно изучаемый материал, анализировать задачи и определять их виды, работать с книгами и другими публикациями по математике и истории математики, преобразовывать информацию в другие формы (слова, рисунки, диаграммы), радоваться опыту совместной работы, выступать перед аудиторией, занимать активную позицию при защите результатов своей работы.

ЗАДАЧА О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕЩИНОЙ

Глушко А.В., Глушко Е.Г., Просвирина Ю.О.
kuchp@math.vsu.ru

Изучается задача о стационарном распределении поля температуры в области, представляющей собой трехмерное пространство с разрезом по квадрату.

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3^2}+$$

$$+k\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}=0,\ R^3\backslash\Pi.$$

$$u(x_1,x_2,+0)-u(x_1,x_2,-0)=q_0(x_1,x_2);\ x_1,x_2\in\Pi;$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,+0)}{\partial x_3}+\frac{ku(x_1,x_2,+0)}{2}-\frac{\partial u(x_1,x_2,-0)}{\partial x_3}-\frac{ku(x_1,x_2,-0)}{2}=$$

$$=q_1(x_1,x_2).$$

Здесь $\Pi=\{x_1,x_2,x_3|x_3=0;x_1\in[-1;1],x_2\in[-1;1]\}$.

Справедливы следующие асимптотические представления первых производных решения:

1. При $x\in\mathrm{Int}\Pi$:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k}=-2\pi\mathrm{sgn}x_3\left(q_0(x_1,x_2)+\frac{\partial q_0(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)+$$

$$+R_k(x_1,x_2,x_3);\quad k=1;2;$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}=\frac{4\pi}{|x_3|}\cdot q_0(x_1;x_2)-2k\pi\ln|x_3|\cdot q_0(x_1;x_2)+$$

$$+R_3(x_1,x_2,x_3).$$

2. При $x \in \partial\Pi\backslash\{(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)\}$:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k} = -\pi \mathrm{sgn} x_3 \left(q_0(x_1,x_2) + \frac{\partial q_0(x_1,x_2)}{\partial x_1} \right) +$$

$$+R_k(x_1,x_2,x_3); \quad k=1;2;$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = \frac{2\pi}{|x_3|} \cdot q_0(x_1;x_2) -$$

$$-\pi \ln|x_3| \cdot \left(k q_0(x_1;x_2) - 2\frac{\partial q_0(x_1;x_2)}{\partial x_2} \right) + R_3(x_1,x_2,x_3).$$

3. При $x \in \{(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)\}$:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k} = -\frac{\pi}{2} \mathrm{sgn} x_3 q_0(x_1,x_2) + \frac{1}{|x_3|} \cdot q_0(x_1;x_2) -$$

$$-\pi \mathrm{sgn} x_3 \left(\frac{\partial q_0(x_1;x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial q_0(x_1;x_2)}{\partial x_2} \right) + R_k(x_1,x_2,x_3); \quad k=1;2;$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = \frac{\pi}{|x_3|} \cdot q_0(x_1;x_2) - \pi \ln|x_3| \left(\frac{k}{2} q_0(x_1;x_2) \right. -$$

$$\left. - \left(\frac{\partial q_0(x_1;x_2)}{\partial x_1} + \frac{partial q_0(x_1;x_2)}{\partial x_2} \right) \right) + R_3(x_1,x_2,x_3).$$

Функции $R_k(x_1,x_2,x_3)$; $k=1;2;3$ равномерно ограничены.

Температурное поле $u(x_1,x_2,x_3)$ является ограниченным в окрестности границы.

НЕПРЕРЫВНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ВЕТВЬ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО РАДОНА–НИКОДИМА

Голованева Ф.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)

В работе проводится анализ нелинейной модели четвертого порядка, реализуемой в виде краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = \lambda F(x,u), \\ u(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

получаемой при описании деформаций стержневой системы, имеющей шарнирное закрепление, возникающих под воздействием силы, зависящей как от самой точки x, так и от отклонения $u(x)$ точки x стержня от положения равновесия. В точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$ (см. далее), уравнение в (1) понимается как равенство $\Delta\left(pu''_{xx}\right)'_x(\xi)+u(\xi)\Delta Q(\xi)=\lambda F(\xi,u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ; $\lambda>0$ — спектральный параметр. Через Λ обозначим множество положительных значений λ, при каждом из которых (1) имеет хотя бы одно решение. Будем считать действительное число собственным значением задачи (1), если при этом λ (1) имеет нетривиальное решение.

Уравнение в (1) задано почти всюду (в смысле меры σ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\sigma(x)$ определяет неполное метрическое пространство $J_S=[0;\ell]\setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ с метрикой $\varrho(x,y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi-0,\xi+0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$ и $S(\sigma)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $Q(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}} p(x)>0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x,u)$ при почти всех x (относительно σ-меры) определена и непрерывна по u; 2) функция $F(x,u)$ измерима по x при каждом u; 3) $|F(x,u)|\leqslant m(x)$, где $m(x)$ — σ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Решение (1) будем искать в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$.

Будем говорить, что однородное уравнение $\left(pu''_{xx}\right)''_{x\sigma}+uQ'_\sigma=0$ не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое нетривиальное решение имеет не более трех нулей с учетом кратностей.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $F(x,0)\equiv 0$; $F(x,u)$ строго возрастает по $u>0$ и каждом x, $F(x,u)$ допускает представление $F(x,u)=f(x,u)\cdot u$, где $f(x,u)$ не возрастает по u при $u>0$ и каждом x; однородное уравнение не осциллирует на $[0;\ell]$. Тогда множество Λ собственных значений задачи (1), отвечающих неотрицательным на $[0;\ell]$ собствен-*

ным функциям, обладает следующими свойствами: 1) Λ связно; 2) при каждом $\lambda \in \Lambda$ задача (1) имеет единственное положительное в $(0;\ell)$ решение $u(x,\lambda)$; 3) $u(x,\lambda)$ строго возрастает по λ; при каждом $\lambda^* \in \Lambda$ соответствующее решение $u(x,\lambda^*)$ задачи (1) является равномерным пределом последовательности $u_n(x)$, определяемой итерационными равенствами:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = \lambda^* F(x, u_{k-1}(x)), \\ u(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0, \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \dots)$ *при любой начальной непрерывной неотрицательной функции $u_0(x)$.*

О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МОДЕЛИ

Головко Н.И., Иванникова Т.А., Тимашова Е.В., Шабров С.А. (Воронеж)

В работе метод конечных элементов адаптируется для математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u''(0) = 0, \\ u'(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $p(x) > 0$ на $[0;\xi)$, $p(x) = 0$ для всех $x \geqslant \xi$, $r(x) \equiv 0$ на $[0;\xi]$ и $r(x) > 0$ для $x > \xi$, $Q(x)$ и $F(x)$ σ-абсолютно непрерывные на $[0;\ell]$ функции и $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$, $Q(\ell) - Q(0) > 0$, которая описывает малые деформации системы состоящей из стержня, расположенного вдоль отрезка $[0;\xi]$, и припаянной к точке ξ растянутой вдоль отрезка $[\xi;\ell]$ струны; система закреплена шарнирно в точке $x = 0$, и правый конец которой свободен.

В дифференциальном уравнении из (1) внешнее дифференцирование производится по мере σ, которая содержит все особенности системы; уравнение определено на специальном расширении $\overline{[0,l]}_\sigma$ отрезка $[0,\ell]$, которое строится следующим образом. На $[0,\ell]$ определим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$, где $\sigma(x)$ — функция порождающая меру σ. Если $S(\sigma)$ непусто, то метрическое пространство $([0,\ell],\rho)$ не является полным. Пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную тройку $\{\xi - 0, \xi, \xi + 0\}$ собственных элементов, мы и обозначим через $\overline{[0,\ell]}_\sigma$.

Уравнение в (1) в точках $\xi \in S(\sigma)$ принимает вид:

$$\Delta \left(pu''_{xx}\right)'_x (\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Решение модели (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0,\ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, имеет конечное на $[0,\ell]$ изменение; квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$ — абсолютна непрерывна на $[0,\ell]$; $\left(pu''_{xx}\right)'_x (x)$ и $(ru'_x)(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$.

Для приближенного решения (1) разобьем отрезок на (вообще говоря неравные) части, и выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Выбирая базисные функции $\varphi_i(x)$, мы получим линейную систему

$$\sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^{\xi} p{\varphi_i}''_{xx}{\varphi_j}''_{xx}\, dx + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^{\ell} r{\varphi_i}'_x{\varphi_j}'_x\, dx + \\ + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^{\ell} \varphi_i\varphi_j\, dQ = \int_0^{\ell} \varphi_j\, dF, \quad (2)$$

$j = 1, 2, \ldots, 3N-1$, которая имеет единственное решение. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели* (1) , *$v(x)$ — решение* (2). *Тогда справедлива оценка*

$$\langle u-v, u-v\rangle \leqslant C\cdot h,$$

где h — максимальная длина отрезков разбиения, и

$$\langle u,v\rangle = \int_0^{\xi} pu''v''\, dx + \int_{\xi}^{\ell} ru'v'\, dx + \int_0^{\ell} uv\, dQ$$

— энергетическое скалярное произведение в пространстве E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых суммируема с квадратом на $[0;\ell]$ и абсолютно непрерывна на $[0;\xi]$, вторая производная (определенная только на $[0;\xi]$)

суммируема с квадратом на $[0;\xi]$, *удовлетворяющих условиям* $u(0) = u''_{xx}(0) = u'_x(\ell) = 0$. *(Последний интеграл понимается по Риману–Стилтьесу.)*

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ЧИСЛА ЗАЯВОК В СМО С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ, РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ И СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Головко Н.И., Крылова Д.С. (Владивосток)
krylovadiana@mail.ru

Для оптимизации показателей эффективности функционирования социальных систем часто используются модели систем массового обслуживания (СМО). Работа ряда серверов (например, proxy, библиотечного и т.д.) в локальных информационных сетях описывается следующей моделью СМО. На вход СМО поступает дважды стохастический (ДС) пуассоновский поток (ПП), интенсивность которого $\lambda(t)$ является скачкообразным процессом, изменяющимся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. СМО имеет бесконечный накопитель и два прибора: основной с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ и резервный - интенсивности $\mu + \Delta$, который включается, если число заявок в СМО станет больше или равным ν. Предполагается условие отсутствия перегрузок, $b < \mu$, $b < \mu + \Delta$. Значения процесса в точках разрыва справа не зависят от значений процесса в точках разрыва слева и имеют плотность распределения $\varphi(x)$.

Для рассматриваемой СМО разработан численный метод расчета характеристик числа заявок, созданный на основе теории, сообщения о которой приведено в опубликованных тезисах авторов на конференции в г. Воронеж в 2011, 2013 годах. С помощью численного метода вычисляются: производящие функции; совместные распределения числа заявок интенсивности входящего потока; плотности распределения среднего и дисперсии числа заявок; средние значения и дисперсии числа заявок. Разработанный численный метод получил в работе название метода Эйлера-Лорана, суть которого заключается в численном решении задачи Коши относительно производящих функций методом Эйлера с последовательным пересчетом на каждом шаге неизвестных функций распределения по формуле Эйлера для производящих функций и по формуле Лорана для коэффициентов производящих функций.

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМОВ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

Головко Н.И., Терентьева Е.И. (Владивосток)
enyagenya@mail.ru

В результате стремительного развития новых технологий и научных направлений увеличиваются возможности прогнозирования, предсказывания путей развития отраслей экономики, различных экономических процессов. В построении прогнозирующих моделей широко используют математические методы моделирования. Например, в банковской сфере прогнозирование очень важно для оптимизации работы по использованию финансовых ресурсов. Для этого традиционно применяют регрессионный анализ [3]. К сожалению, он обладает тем недостатком, что при каждом прогнозировании приходится подбирать регрессионную модель для прогнозируемых трендов финансовых ресурсов, идентифицировать параметры модели и затем ее использовать. Проблема состоит в том, что регрессионную модель подбирать очень сложно. В последнее время растет интерес к авторегрессионному анализу [1], в котором значительно облегчено построение прогнозирующей модели. Но авторегрессионный анализ тоже имеет свои недостатки, например, построенный прогноз представляет собой стохастический процесс, вокруг которого строится доверительная трубка. В данной работе предлагается новый метод прогнозирования, который заключается в объединении регрессионного и авторегрессионного анализа, и который позволяет с помощью регрессионного анализа проводить построение детерминированной составляющей прогнозируемого процесса на наблюдаемом периоде. Исходя из того, что любую непрерывную функцию, бесконечное число раз непрерывно дифференцируемую, можно разложить в ряд Тейлора, то в качестве универсальной регрессионной модели применялся полином высокой степени m. Используя конечные суммы m первых членов ряда Тейлора можно, таким образом, получать детерминированную составляющую прогнозируемого процесса. Затем в работе строился прогноз для детерминированной составляющей с помощью метода авторегрессионного анализа АРПСС (ARIMA) [2]. В настоящей работе этот метод был апробирован, проведены тестовые вычислительные эксперименты, которые дали положительные результаты: прогнозные модели, полученные этим комбинированным методом оказались более адекватными, нежели чем модели, полученные с помощью непосредственного применения метода АРПСС (ARIMA).

Литература

1. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов, прогноз и управление (часть 1)/ Дж Бокс, Г. М. Дженкинс. - М.: Мир, 1974. - 405с.

2. *Боровиков В. П.* Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере: Учеб. пособие/В. П. Боровиков, Г. И. Ивченко. - М.: Финансы и статистика, 2000. - 384 с.: ил.

3. *Дрейпер Н.* Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. - Кн. 2/Н. Дрейпер, Г Смит. - М.: Финансы и статистика, 2005.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ, ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ

Головцов А.В. (Казань)

golovcov-anton@mail.ru

Ненулевое решение $U(t,x), x \in R^n$, линейного, однородного, дифференциального уравнения в частных производных второго порядка по t называется собственной волной. Если $U(t,x) = u(t+bx)$, где bx — скалярное произведение векторов b, x, то волна называется специальной. Функция u является ненулевым решением дифференциального уравнения $c_1u^{(2)} + c_2u^{(1)} + c_3u = 0$, где производная вычисляется по $\xi = bx$.

Постановка задачи *Известны* $u(\xi_j) = A_j, j = 1, ..., m$, *и* c_1, c_2, c_3 *найти специальную волну* (**прямая задача**); *неизвестна часть* c_k, *найти их и волну* (**обратная задача**); *каково наименьшее* m*?*

Задача решена в случае, когда $c_1 \neq 0, c_2, c_3$, известны все b_k и $\xi_j = 0, T, 2T, 3T$.

Теорема 1. *Пусть* c_j *— постоянные,* $c_1 \neq 0$.

Если уравнение $(A_1^2 - A_2A_0)\tau^2 + (A_3A_0 - A_1A_2)\tau + (A_2^2 - A_1A_3) = 0$ *имеет положительные корни* $\tau_1 \neq \tau_2$, *то* $u(\xi) = C_{11}\tau_1^{\xi/T} + C_{12}\tau_2^{\xi/T}$, $c_2/c_1 = -T^{-1}\ln(\tau_1\tau_2)$, $c_3/c_1 = T^{-2}\ln(\tau_1)\ln(\tau_2)$;

если уравнение $A_0\tau^2 - 2A_1\tau + A_2 = 0$ *имеет корень* $\tau_3 > 0$, *то* $u(\xi) = (C_{21}\xi + C_{22})\tau_3^{\xi/T}$, $c_2/c_1 = -2T^{-1}\ln(\tau_3)$, $c_3/c_1 = 4T^{-2}(\ln(\tau_3))^2$, *в случае* $3C_{21} + C_{22}\tau_3^3 = A_3$;

если уравнение $(A_1^2 - A_2A_0)\tau^2 = (A_2^2 - A_1A_3)$ *имеет корень* $\tau_4 > 0$, $|A_3 + A_1\tau_4^2| \leqslant 2|A_2|\tau_4$, *то* $u(\xi) = (C_{31}\cos(\beta\xi) + C_{32}\sin(\beta\xi))\tau_4^{\xi/T}$, $c_2/c_1 = -2T^{-1}\ln(\tau_4)$, $c_3/c_1 = (T^{-1}\ln(\tau_4))^2 + \beta^2$. *В остальных случаях либо отсутствуют специальные волны, либо хотя бы один из коэффициентов* c_k *не постоянен*

В явном виде выписаны C_{jk}, β.

ПРОГРАММНАЯ НАДЕЖНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Гончаренко В.Ю. (Киев)

victoriagonc@gmail.com

Доступность вычислительных кластеров ставит вопрос о надежности аппаратных и программных средств и достоверности получаемых результатов. Рассмотрим модельный пример.

Решить систему линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$, вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сведем решение системы к задаче поиска неподвижной точки отображения $A\bar{x} = \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{x} = (I - A)\bar{x} + \bar{b}$. Для отыскания неподвижной точки организуем итерационный процесс

$$\overline{x}(n) = (I - A)\overline{x}(n-1) + \overline{b}, \quad n \in N, \quad \overline{x}(0) = \overline{b} = (1; 1).$$

Собственными числами матрицы $(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ будут $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Отображение $F(\overline{x}) = (I - A)\overline{x} + \overline{b}$ является сжимающим, а итерационный процесс сходящимся.

Модификация координаты прекращается, если расстояние между соседними итерациями составляет 0,01. Что соответствует критерию остановки итерационного процесса в норме $\max\{|x_1|, |x_2|\}$. Одиннадцатая итерация дает $\bar{x}_{11} - \bar{x}_{10} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{4096} \\ \frac{68}{4096} \end{pmatrix}$, т.е. $|x_1(11) - x_1(10)| = 0,00756... < 0,01$ и $|x_2(11) - x_2(10)| = 0,0166... > 0,01$. Модификация первой координаты будет остановлена, а второй продолжена. Обозначим $\bar{x}(11) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, тогда вторая координата, вычисляемая при фиксированной первой координате будет $x_2(n) =$

$(n-11)(a-1)+b$. Что приводит к расходящейся последовательности. Более того. При вычислениях с однократной точностью на двадцать девятой итерации приращение по первой координате равно машинному нулю, а продолжение итераций второй координаты дает расходящуюся последовательность.

УСТОЙЧИВАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА КУНА–ТАККЕРА В РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Горшков А.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)
tiger-nn@mail.ru, m.sumin@mail.ru

Доклад посвящен регуляризованной теореме Куна-Таккера в недифференциальной форме для параметрической задачи выпуклого программирования в рефлексивном пространстве в случае строго равномерно выпуклого функционала цели. Рассмотрим задачу

$$f(z) \to \min,\ Az = b + p,\ g_i(z) \leqslant r_i,\ i = 1, \ldots, m,\ z \in D \subset Z, \quad (1)$$

где $f : D \to R$ – липшицевый строго равномерно выпуклый функционал, $A : Z \to B$ – линейный непрерывный оператор, $g_i : D \to R$, – липшицевы выпуклые функционалы, $p \in B$ и $r_i \in R$ – параметры, $b \in B$ – заданный элемент, D – выпуклое замкнутое ограниченное множество, Z, B – рефлексивные пространства.

Как известно, классическая теорема Куна-Таккера имеет ряд особенностей. К ним относится, тот факт, что при отсутствии условия регулярности теорема, вообще говоря, не верна, и то, что классическая теорема неустойчива по отношению к возмущению исходных данных. Можно утверждать, что эффективным средством преодолония отмеченных особенностей является переход от языка оптимальных элементов на язык минимизирующих последовательностей, что и реализованно в устойчивой параметрической теореме Куна-Таккера в рефлексивных пространствах.

Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера для задачи (1) является естественным обобщением аналогичной теоремы Куна-Таккера в секвенциальной дифференциальной форме в случае гильбертова пространства [1]. Переход от гильбертовых пространств к рефлексивным значительно расширяет область применимости теоремы.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00199-а) и Минобрнауки РФ (шифр заявки 1.1907.2011).

Литература

1. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. №9. С. 1594-1615.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Губина С.С. (Воронеж)

rydanova_ vrn@mail.ru

В работе [1] доказаны некоторые теоремы существования и получены оценки на топологическую размерность множества решений уравнений вида $A(x) = f(x)$, где A — линейный сюрьективный оператор, а f — вполне непрерывное отображение. Даются приложения доказательных теорем к существованию локальных решений вырожденных дифференциальных уравнений. В настоящей работе будет описано еще одно приложение этих теорем.

Пусть $E_1, E_2, ...E_{n+1}$ — банаховы пространства, $A_i : D(A_i) \subset E_i \to E_{i+1}$, $i = 1, 2, ...n$, — замкнутые сюрьективные линейные операторы. Рассмотрим оператор $C = A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_1$. Пусть $x_0 \in D(C)$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $B_R[x_0] = \{x \in E_1 \mid ||x - x_0|| \leqslant R\}$. Пусть $f : [0, T] \times B_R[x_0] \to E$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим следующую задачу:

$$C(x') = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

Решением задачи (1) на промежутке $[0, h]$, $0 < h \leqslant T$, называется непрерывно дифференцируемая функция $x_* : [0, h] \to E_1$ такая, что $C(x'_*(t)) = f(t, x_*(t))$ для любого $t \in [0, h]$ и $x_*(0) = x_0$. Обозначим $N(x_0, [0, h])$ — множество решений задачи (1) на промежутке $[0, h]$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *При сделанных предположениях существует число $h > 0$ такое, что задача (1) имеет решение на промежутке $[0, h]$. Если $Ker(C) \neq 0$, то $dim(N(x_0, [0, h_0])) = \infty$.*

Справедливость теоремы вытекает из теоремы о существование решений и топологической размерности множества решений уравнений с сюрьективными операторами, которая содержится в [1],[2].

Литература

1. Гельман Б. Д., Рыданова С. С. Об операторных уравнениях с сюрьективными операторами. Вестник ВГУ, серия: физика, математика, 2012. — С. 93 - 98.

2. Рыданова С. С. Об одном классе операторных уравнений. Вестник ТГУ, серия: естественные и технические науки, 2011. — С. 1173 - 1174.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСАМИ

Гудошников И.М. (Воронеж)
gudoshnikov@yandex.ru

В следующих теоремах приведены утверждения об устойчивости решений возмущенной задачи Коши

$$\begin{cases} y' = (-\Gamma + M)y, \\ y(0) = x. \end{cases}$$

для конечномерного случая.

Теорема 1. *Пусть F — конечномерное банахово пространство, $K \subset F$ — воспроизводящий нормальный косус с константой нормальности, равной 1. Пусть заданы линейные операторы:*
$\Gamma : F \to F$ такой что $\Gamma^{-1} \geqslant 0$ и $e^{-\Gamma} \geqslant 0$ в смысле K.
$M : F \to F, M \geqslant 0$ в смысле K
Тогда

$$\rho(e^{-\Gamma+M}) < 1 \Longrightarrow \rho(\Gamma^{-1}M) < 1.$$

Теорема 2. *Пусть F — конечномерное банахово пространство, а $K \subset F$ — воспроизводящий конус, удовлетворяющий условию*

$$\forall(x_0, y_0 \in F)\exists(\xi \in K)\forall(t \in R)[x_0 \cos t - y_0 \sin t \leqslant \xi].$$

Пусть заданы линейные операторы:
$\Gamma : F \to F$, такой, что существует Γ^{-1}, а $e^{-\Gamma}$ положителен в смысле K и устойчив.
$M : F \to F$ положителен в смысле K и имеет ненулевую точку спектра. Тогда

$$\rho(\Gamma^{-1}M) < 1 \Longrightarrow \rho(e^{-\Gamma+M}) < 1.$$

Литература

Kamenskii M., Nistri P. An averaging method for singularly perturbed systems of semilinear differential inclusions with C_0-Semigroups. Set-Valued Analysis 11: 345-357, 2003. Kluwer Academic Publishers.

Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. — 396 с.

ИНТЕГРАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Демченко Д.А. (Россошь)

Интеграция предметов в современной школе - одно из направлений активных поисков новых педагогических решений, развития творческого потенциала педагогических коллективов с целью эффективного и разумного воздействия на учащихся. Интеграция способствует преодолению фрагментарности и мозаичности знаний учащихся, обеспечивает овладение ими целостным знанием, комплектом универсальных человеческих ценностей. В отечественной и зарубежной педагогической науке имеется богатый опыт исследования проблем интеграции. Задачу использования межпредметных связей в учебном процессе в разные периоды выдвигали Я.А.Коменский, И.Г.Песталоцци, Л.Н.Толстой, К.Д.Ушинский. Необходимость обращения к интегрированному обучению в современной школе вызвана рядом проблем, с которыми приходится сталкиваться учителям-предметникам при реализации образовательной программы в основной и старшей школе.

Одна из них - заметное снижение интереса учащихся к предметам естественно-математического цикла, что во многом обусловлено сложностью программного материала по физике и математике. Сама специфика предметов естественно-математического цикла побуждает к комплексному подходу в обучении школьников, т.е. логика данных наук ведёт к их интеграции, объединению отдельных тем.

Практика показывает, что нередко одно и то же понятие в рамках каждого конкретного предмета определяется по-разному — такая многозначность научных терминов затрудняет восприятие учебного материала. Несогласованность программ по изучаемым в школе предметам естественно-математического цикла приводит к тому, что одна и та же тема по физике и математике изучается в разное время. Например, в 7 классе по физике при изучении понятия скорости, перемещения, силы, равнодействующей всех сил необходимы знания из курса математики для 9 класса: понятия вектора, умножение вектора на число, сложение и вычитание векторов, коллинеарность векторов. В 9 классе по физике при изучении понятие ускорения, гармонического колебания, движения маятников, нахождение пути по графику скорости необходимо знать понятия первой и второй производной, площадь криволинейной трапеции, дифференциальные уравнения. Эти понятия изучаются в 10-11 классах (примеры по физике приведены по УМК Перышкина, Гутник; по математике – УМК Атанасяна, УМК Колмогорова). Эти противоречия легко снимаются в интегрированном обучении, которое позволяет учителю экономить учебное время, давать материал на более высоком уровне. Примеры таких интегрированных уроков по математике и физике: в 7 классе по теме "Линейная функция и ее график"; в 8 классе по теме "Расчет электрических цепей"; в 9 классе по теме "Графики функций на уроках математики и физики"; в 11 классе по теме "Техника дифференцирования и применение производной в физике".

Однако не всякое объединение различных дисциплин в одном уроке автоматически становится интегрированным уроком. Необходима ведущая идея, которая обеспечивает неразрывную связь, целостность данного урока. Например, на интегрированном уроке в 9 классе по теме "Тригонометрия при решении физических задач" выполняются практические задания по определению угла подъема солнца над горизонтом, определению размера удаленных объектов (диаметр Луны); решается следующая задача:

На плоскопараллельную пластину падает свет под углом 45 градусов. После преломления свет отражается от внутренней грани пластины и выходит наружу. Расстояние между отраженным лучом и вышедшим из пластины равно 2 см. Показатель преломления пластины равен 1,4. Найти толщину преломления.

Решение задачи разбивается на два этапа. Сначала рассматривается задача с точки зрения физики (построение чертежа, нахождение угла преломления), потом - математики. Для выполнения практических работ и решения данной физической задачи используются следующие знания из математики: признаки подобия треугольников, основное свойство пропорции, теорема Пифагора, определение равнобедренного треугольника, определения тригонометрических функций, теорема косинусов. Данный урок помогает достичь следующих целей: выяснить практическое применение тригонометрии при решении физических задач, подготовить к ГИА по математике и физике.

Интеграция позволяет реализовать принцип системности обучения, создает оптимальные условия для развития мышления. Преимущество интеграции в обучении — это создание предпосылок для формирования не узко информированного специалиста, а творческой личности, которая целостно воспринимает мир и способна активно действовать в социальной и профессиональной сфере. Система образования реализует и предъявляет все большие требования к человеку, а в соответствии с этим, и к качеству образования, и задачей учителя является стремление все к большему повышению качества преподавания урока, качества предоставляемых знаний и связи с другими предметами за счет интегрированного обучения. Интегрированный подход требует от учителя повышенного уровня педагогического мастерства и универсальности его образования.

МАТЕМАТИКА В ЖИВОПИСИ НА ПРИМЕРЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

Демченко Д.А. (Россошь)

> “Все проблемы Перспективы можно пояснить
> при помощи пяти терминов Математики:
> точка, линия, угол, поверхность и тело”.
> Леонардо да Винчи.

В современной школе все больше приобретают актуальность связи математики с другими науками. Для привития интереса к предмету современному ученику постоянно приходится доказывать, что ни одна другая наука не может существовать без математики. На протяжении веков пути математики и различных видов искусства, в том числе и живописи, нередко переплетались. Геометрические мотивы, схемы нередко присутствуют в картинах великих живописцев.

На уроках геометрии в 10-11 классах одними их основных являются задачи развития пространственного воображения и умения изображать пространственные фигуры на плоскости. Наука, помогающая правильно изображать предметы в пространстве так, как мы видим их в натуре, носит название перспективы. Самый ранний пример использования перспективы в живописи - наскальная живопись пещеры Ласко. Речь идет о совокупности галерей различной величины, на стенах которых представлен огромный репертуар изображений животных, населявших Землю в разные эпохи. Например, в изображении голов быков использована "полуразвернутая" перспектива. Передняя часть тела объемно акцентирована, а ноги кажутся коротковатыми по сравнению с телом, что создает впечатление тяжести фигур.

Основы математической теории изображения пространственных тел на плоскости были разработаны *Ж.Дезаргом* и *Г.Монжем*, труды которых привели к созданию новых разделов геометрии: начертательной и проективной. В основе начертательной геометрии лежит метод проекций. Приложение начертательной геометрии к технике выдвинуло требование "обратимости" чертежа, то есть возможности точного определения пространственной фигуры по плоскому чертежу. Нетрудно убедиться в том, что для определения положения точки в пространстве по ее чертежу, необходимо иметь две проекции точки, полученные из двух центров или при двух направлениях проектирования. Эта гениально простая мысль и составляет основу начертательной геометрии, заложенную выдающимся французским математиком Гаспаром Монжем (1746-1818). Суть метода Монжа заключается в следующем: пространственный объект проектируется ортогонально (т.е. перпендикулярами) на плоскость и также проектируется на некоторую другую ей перпендикулярную плоскость, и затем одна из этих плоскостей поворачивается вокруг прямой пересечения этих плоскостей, пока не совместится с другой. В результате на одной и той же плоскости оказываются две различные проекции рассматриваемого объекта, по которым уже можно, методами Монжа, восстановить размеры, углы и т.д., имеющиеся у данного пространственного объекта в натуре. При ортогональном проектировании сохраняются истинные размеры контуров тела. Более наглядное представление о форме тела дают аксонометрические проекции. Однако перспектива наиболее адекватно, т.е. "похоже" передает видимый нами объект.

Реально существующий мир и видимый нами мир – не одно и то же. Вспомним хорошо знакомый пример: рельсы железной дороги кажутся нам сходящимися на горизонте, хотя мы прекрасно знаем, что это не так. В своем сочинении Евклид утверждал, что мы воспринимаем предметы, когда исходящие от них прямолинейные лучи света сходятся в нашем глазу. Т.о. всю систему лучей зрения можно представить в виде "пирамиды зрения", вершина которой находится в глазу, а основанием служит рассматриваемый объект. Перспектива была не просто объективным геометрическим методом построения изображения, но и “физиологическим” методом, т.е. методом, учитывающим закономерности работы человеческого глаза. Именно поэтому перспектива давала изображения, столь “похожие” на видимую глазом натуру. Перспектива открыла перед живописцами небывалые возможности. Впервые у художников появился геометрический метод изображения не отдельного предмета, а всего видимого трехмерного пространства, всего окружающего мира. Невиданные возможности перспективы наиболее ярко раскрывались в изображении интерьера. Вот почему художники Возрождения так любили изображать интерьер.

Перспектива применялась и в архитектурных сооружениях. Ярким примером является лестница в пирамиде Майя. При взгляде снизу на лестницу не чувствуешь перспективы, кажется, что ширина ступеней внизу и наверху пирамиды одна и та же. Этот оптический обман, по-видимому, создан для усиления магического действия сооружения. В действительности лестница расширяется кверху таким образом, чтобы в точности компенсировать эффект перспективы.

Знакомство с понятием перспективы позволяет решать следующие задачи на уроках геометрии: построение объемных фигур, развитие пространственного воображения. Использование данных межпредметных связей поможет учителю математики показать ученикам, что математика не теряет своей актуальности и в наши дни, она просто показывает нам свои все новые и новые аспекты, которые, безусловно, приходятся ко двору. Казалось бы, что после школы математика нигде не пригодится. Увы! Тут приходится использовать математику ещё чаще. Она следует за человеком везде, помогает ему решать задачи, делает его жизнь намного удобнее.

ОБ ИНДЕКСЕ СОВПАДЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ КВАЗИАЦИКЛИЧЕСКИХ МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЙ

Дж. М. Аль-Обаиди (Воронеж)
alobadi@mail.ru

Пусть X, Y - банаховы пространства, $K(Y)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств Y, $l : doml \subseteq X \to Y$ - линейный фредгольмов оператор нулевого индекса.

Пусть $F : X \to K(Y)$ квазиациклическое мультиотображение, это означает, что F может быть представлен в виде композиции $F = f \circ G$, где $G : X \multimap Z$ - полунепрерывное сверху мультиотображение в метрическое пространство Z с компактными значениями, $f : Z \to Y$ непрерывное отображение.

При этом предполагается, что существует такое $n \geqslant 1$, что

$$dim_X M_G^i \leqslant n - 2 - i$$

для всех $i \geqslant 0$, где $M_G^i \subset X$ - множество таких точек $x \in X$, в которых $G(x)$ не является i-ацикличным относительно когомологий Чеха с целыми коэффициентами, dim_X обозначает относительную топологическую размерность множества.

В предположении, что мультиотображение F является l-компактным, определяется индекс $ind(l, F)$ совпадения для включения

$$lx \in F(x).$$

Описываются основные свойства этой характеристики и даются приложения к существованию точек совпадения l и F.

Литература

Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Многозначный анализ и операторные включения. Итоги науки и техники ВИНИТИ, сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т.29, 1986, 151-211с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕСТОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Донская Е.Ю. (Бобров)

Важным звеном учебного процесса является контроль за знаниями, умениями и навыками. От его правильной организации зависит результат обучения. В процессе контроля выявляются достоинства и недостатки знаний и умений учащихся, что даёт возможность управлять учебным процессом, совершенствовать формы и методы обучения. Одной из форм контроля, позволяющей оперативно и эффективно проверить результаты обучения математике, являются тесты.

Тест - это стандартизированное задание с вариантами ответов.

Основные функции тестов:

1. Социальная функция выражается в требованиях, предъявляемых обществом к уровню подготовки учащихся. В ходе оценки

знаний с помощью тестов определяется соответствие умений и навыков, достигнутых учащимися, установленным государственным стандартам.

2. Образовательная функция состоит в закреплении и систематизации знаний, практических умений и навыков, повышении их качества (точность, полнота, осознанность, отсутствие пробелов, ошибок). Тесты совершенствуют умения школьников применять знания в стандартных и нестандартных ситуациях, выбирать рациональные способы решения учебной задачи, глубже овладевать методами получения информации. В ходе выполнения тестовых заданий устанавливается связь предыдущего материала с последующим, что позволяет ученику воспринимать его целостную структуру.

3. Воспитательная функция тестов заключается в формировании положительных мотивов учения, способов самостоятельной познавательной деятельности умения ставить и достигать определённых целей, а также навыков самоконтроля и самооценки, следствием которых является адекватная самооценка и снижение тревожности.

4. Развивающая функция тестов направлена на развитие памяти, внимания, мышления, творческих способностей, эмоциональной сферы и таких качеств личности, как трудолюбие, умение слушать, исполнительность и обязательность, самостоятельность и аккуратность.

5. Контролирующая функция тестов даёт возможность учителю получить информацию о достижениях своих учеников, определить их динамику, а также уровень развития личностных качеств детей и степень усвоения ими программного материала.

6. Функция творческого роста учителя связана с тем, что тесты помогают учителю оценить свои достижения, обнаружить недостатки и ошибки в своей педагогической деятельности.

На мой взгляд, применение разнообразных тестов на уроках является актуальной проблемой преподавания математики. В прошлом году департаментом образования Воронежской области было предложено провести он-лайн тестирование для выявления уровня обученности учащихся 5-8 классов на конец учебного года, поэтому передо мной встала непростая задача - подготовить детей к данному тестированию. Для этого я немного изменила структуру своего урока, внедрив в него тренировочные тестовые задания 4 видов: задания с выбором одного ответа, задания с выбором нескольких вариантов ответов, задания на установление соответствия, задания с кратким ответом. Также эти тестовые задания уже готовят детей к итоговой аттестации в форме ГИА в 9 классе и к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Для решения предлагаемых математических тестов, кроме знаний из школьной программы, необходимо умение наблюдать, сравнивать, обобщать, проводить аналогии, делать выводы и обосновывать их. Помимо этого, знания учащихся должны выходить за рамки школьного учебника математики.

На своих уроках я часто сталкиваюсь с самой трудной и почти неразрешимой проблемой – нехваткой времени. Ведь хочется за один урок выполнить и устный счет, и тренировочные упражнения, и проверочную работу. При этом на рассказы об ученых и истории развития математики практически не остается времени, поэтому я пытаюсь совместить “приятное” с “полезным”, предлагая учащимся для выполнения и проверки своих знаний серию тестовых заданий по различным темам курса математики. Самое интересное в том, что эти работы сопровождаю маленькой интересной информацией о математике. Практика показывает, что ребятам интересно выполнять эти тесты. А где интерес, там и результат. Учащиеся сами выставляют себе оценку, осуществляя взаимопроверку за знания математических вопросов данной темы, да еще и знакомятся с интересными фактами из истории математики.

Данные тесты легко составить самим учащимся. Они часто увлеченно занимаются созданием новых заданий во внеурочное время, что, конечно же, оценивается дополнительно. Составление таких заданий – тестов побуждает не только хорошо разобраться в материале данной темы, но и открыть энциклопедию, отыскать ученого, деятельность которого была связана с данным разделом математики и который пока еще незнаком учащимся (иначе при выполнении теста можно “угадывать” ученого, а это неинтересно).

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Дуденков В.М. (Воронеж)

vldud@mail.ru

В качестве альтернативы многослойному персептрону была разработана модель сверточной нейронной сети. За счет использования общих синаптических весов, удается минимизировать необходимые ресурсы. Работа данного типа нейронных сетей базируется на трех основных принципах: локальном извлечении признаков, формировании карт признаков и чередовании сверточных слоев и слоев подвыборки. Сверточные нейронные сети часто используются при классификации рукописных символов. Протестируем их на задаче распознавания изображений. Пусть необходимо классифицировать изображения кораблей, отделив корабли-цели от кораблей-ловушек. Для передачи локальных признаков необходимо провести операцию свертки. Обычно ее проводят с помощью квадратных матриц ядер свертки. Однако не любое изображение можно свернуть с помощью квадратных ядер. Пусть размер изображения - 383x82. Нетрудно убедится, что изображение невозможно свернуть подобным образом, для равномерной свертки необходимо добавить пустую область в конец или начало изображения. К примеру, добавив участок 27x82 пикселей в конец изображения, мы сможем равномерно свернуть все изображение с шагом 82 пикселя. Очевидно, что пустая область неинформативных пикселей должна отрицательно сказаться на распознавательной способности нейронной сети. В тоже время, при свертке с помощью ядер с размерностью пропорциональной исходной размерности изображения (383x82), пустой неинформативной области не возникнет.

Однако проведенные эксперименты показывают, что в обоих случаях процент корректно распознанных образов будет приближенно равен 95

Литература

Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. - М.:«И.Д.Вильямс», 2006.-1104с

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРАМИ[1]

Дулина К.М. (Москва)
sun-ksi@mail.ru

В работе рассматривается вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнений вида

$$y'' + 2\sigma\mu y' - \Big(k^2\mu^2 - \mu\varphi(\tau)\Big)\sin y = 0, \quad \sigma > 0, \quad k > 0,\ \mu \approx 0, \quad (1)$$

где $\varphi(\tau)$– непрерывная T-периодическая функция.

Уравнение движения перевернутого маятника в случае, когда перемещение точки подвеса задается произвольной T-периодической функцией, является частным случаем уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(\tau) = \varphi(\tau + T)$, $\int\limits_0^T \varphi(\tau)d\tau = 0$, *где* $\varphi(\tau)$ – *непрерывная функция, и выполнено условие*

$$k^2 < -\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T \tau\varphi(\tau)d\tau\right)^2 - \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^\tau (T-\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau_1\ \varphi(\tau)d\tau.$$

Тогда при достаточно малых $\mu > 0$ *нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.*

Опираясь на результаты работ [1–3], получены области притяжения, установлены оценки убывания решений уравнения (1). Полученные результаты справедливы и в случае кусочно-непрерывной функции $\varphi(\tau)$, имеющей конечное число разрывов первого рода.

Литература

1. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, №6. С. 1271-1284.

2. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, №2. С. 332-348.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

3. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* On asymptotic stability of solutions to nonlinear systems of differential equations with periodic coefficients // Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, № 2. P. 37–48.

О СОСТОЯНИЯХ ОБРАТИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Дуплищева А.Ю. (Воронеж)
dupl_ayu@mail.ru

Пусть X - банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейных операторов, $A, B_k \in EndX,\ k = 1, 2$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A} = A^2 + B_1 A + B_2,\ \mathcal{A} \in EndX$ и ассоциированный с ним оператор

$\mathbb{A} \in End(X \times X)$, определяемый матрицей $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}$.

Определение 1. *Рассмотрим следующие условия:*
1). $Ker\ \mathcal{B} = 0$ (т. е. оператор $\mathcal{B}$ инъективен);
2). $1 \leqslant n = dim\ Ker\ \mathcal{B} \leqslant \infty$;
3). $Ker\ \mathcal{B}$ - дополняемое подпространство в X;
4). $\overline{Im\ \mathcal{B}} = Im\ \mathcal{B}$, что эквивалентно положительности величины $\gamma(\mathcal{B}) = \inf\limits_{x \in D(\mathcal{B}) \setminus Ker\mathcal{B}} \frac{||\mathcal{B}x||}{dist(x, Ker\mathcal{B})}$, где $dist(x, Ker\mathcal{B}) = \inf\limits_{x_0 \in Ker\mathcal{B}} ||x - x_0||$ - расстояние от вектора x до подпространства $Ker\mathcal{B}$.
5). $\mathcal{B}$ - равномерно инъективен, т.е. $Ker\ (\mathcal{B}) = 0$ и $\gamma\ (\mathcal{B}) > 0$;
6). $Im\ \mathcal{B}$ - замкнутое подпространство из X коразмерности $codim\ Im\ \mathcal{B} = m \geqslant 1$;
7). $Im\ \mathcal{B}$ - замкнутое дополняемое в X подпространство;
8). $Im\ \mathcal{B} = X$ ($\mathcal{B}$ - сюръективный оператор);
9). Оператор $\mathcal{B}$ обратим.

Если для оператора $\mathcal{B} \in End\mathcal{X}$ выполнены все условия из совокупности условий $S = i_1, \ldots, i_k$, где $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant 9$, то будем говорить, что оператор $\mathcal{B} \in End\mathcal{X}$ находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{B} \in End\mathcal{X}$ обозначим символом $St_{inv}(\mathcal{B} \in End\mathcal{X})$.

Теорема 1. $St_{inv}(\mathcal{A}) = St_{inv}(\mathbb{A})$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00378)

Литература

Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж.: изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

УСТНЫЙ СЧЕТ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Евтехова И.А., Блинова И.В. (Воронеж)

Одной из основных задач преподавания курса математики в школе является формирование у учащихся сознательных и прочных вычислительных навыков. Вычислительная культура формируется у учащихся на всех этапах изучения математики, но основы её закладываются в первые 5-6 лет обучения. В этот период школьники отрабатывают умение осознанно использовать законы математических действий (сложение, умножение, деление, возведение в степень). Хорошо развитые навыки устного счёта – одно из условий успешного обучения в старших классах, где полученные знания совершенствуются и закрепляются в процессе изучения математики, физики, химии.

Вычислительные умения и навыки можно считать сформированными только в том случае, если учащиеся умеют с достаточной беглостью выполнять математические действия с натуральными числами, десятичными и обыкновенными дробями, рациональными числами, а также производить тождественные преобразования различных числовых выражений и приближённые вычисления.

В наше время бытует мнение, что вычислительная работа должна стать уделом компьютеров, а человек может отойти от этого рутинного занятия. При этом многие не понимают, что освобождая ученика от вычислений, мы фактически освобождаем его от умственного развития. Недостаточное умение школьников производить вычисления создаёт дополнительные трудности при выполнении работ практического характера, в том числе при решении задач группы Б на ЕГЭ, где использование калькулятора запрещено.

Учитель на уроке не должен забывать о том, что правильно организованная вычислительная работа учащихся позволяет воспитывать у них ценные трудовые качества: ответственное отношение к своей работе, умение обнаруживать и исправлять допущенные ошибки, аккуратное исполнение задания, творческое отношение к труду. Поэтому на каждом уроке необходимо использовать возможность для тренировки устного счёта.

Можно использовать различные формы организации счёта. Например, записывать или показывать на экране задания, или читать их вслух. Наиболее эффективна работа будет в том случае, если она воспринимается учащимися, как интересная игра и несёт в себе элементы новой занимательной информации.

Приведём несколько примеров форм устного счёта.

Беглый счёт. Учитель показывает карточку с заданием и тут же прочитывает его. Ученики устно выполняют действия и демонстрируют ответы на планшетах. Карточки быстро сменяют одна другую, но последнее задание предлагается без карточки устно.

Равный счёт. Учитель записывает на доске пример с ответом и предлагает ученикам придумать свои примеры, но с тем же ответом. Их примеры на доске не записываются. Ребята должны на слух воспринимать названные числа и проверять друг друга.

Лесенка. На ступеньке записано задание в одно действие. Каждому ряду учеников предлагается своя “лесенка” с примерами. Ребята по одному выходят и вписывают ответ. Побеждает тот ряд, который быстро и правильно всё решил.

Эстафета. Ученики каждого ряда получают по карточке с примером. У первого задание записано полностью, а у всех остальных вместо первого числа стоит многоточие. Что скрыто за многоточием ученик узнаёт только тогда, когда его товарищ, сидящий впереди, сообщит ему ответ своего задания. Этот ответ и есть недостающее число в карточке. В такой игре все должны быть предельно внимательны, так как ошибка одного зачёркивает работу остальных.

Дешифровщик. На доске шифруется слово из какой-нибудь области знаний (не обязательно из математики). Предварительно учитель делает небольшое сообщение, связанное с данным словом, чтобы заинтересовать учащихся в его расшифровке. Для угадывания слова предлагаются задания, количество которых совпадает с количеством букв в слове. К каждому заданию даются 4 варианта ответа, записанных напротив некоторых букв русского алфавита. Выбрав верный ответ, учащиеся подставляют букву, соответствующую ему в зашифрованное слово. Решая задания и записывая буквы, ученики получат нужное слово.

Кто быстрее. На карточке в столбики написаны примеры определённой тематики (действия с дробями, степень с рациональным показателем, логарифмы и их свойства, вычисление производных и др.). За минуту учащимся предлагается решить правильно эти примеры. Сам пример можно не читать, а говорить только ответ. В ходе игры выявляется самый быстрый и умный ученик на сегодняшнем уроке.

Мы привели небольшое количество примеров для устной работы на уроке и уверены, что каждый учитель может предложить свои интересные формы работы. В заключении ещё раз подчеркнём, что устный счёт развивает механическую память учащихся, а поиски и обоснования новых приёмов способствуют формированию логических умений.

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ С НЕЕДИНСТВЕННЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

Екимов А.В. (Санкт-Петербург)
alex.ekimov@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка, которое является некоторым обобщением классического уравнения Ван-дер-Поля [1].

$$\ddot{x} + (\mu + x^2)\dot{x} + (1 - x^2)x = 0, \tag{1}$$

где μ-параметр. Эквивалентная уравнению (1) система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(\mu + x^2)y - (1 - x^2)x, \end{cases} \tag{2}$$

Система дифференциальных уравнений (2) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три положения равновесия: два седла (±1.0) и положение равновесия в начале координат, которое является простым узлом (фокусом) при $\mu \neq 0$ и сложным фокусом при $\mu = 0$.

Теорема 1. *При переходе через $\mu = 0$ из области положительных в область отрицательных значений происходит бифуркация рождения единственного устойчивого предельного цикла из сложного фокуса. При $\mu > 0$ предельные циклы отсутствуют.*

Теорема 2. *Существует такое значение параметра , что*

1. При $\mu = \mu*$ имеет место сепаратрисный контур, окружающий начало координат;

2. При $\mu < \mu* < 0$ система имеет единственный устойчивый предельный цикл;

3. При $\mu < \mu*$ система не имеет предельных циклов.

С ростом $|\mu|$ предельный цикл расширяется и при $\mu = \mu*$ влипает в сепаратрисы седел, образуя сепаратрисный контур. Далее этот контур размыкается без образования предельного цикла.

Теорема 3. *При $|\mu| > 1$ система (2) не имеет предельных циклов.*

Литература

Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.

О ЧИСЛЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ МАРКОВСКОГО ТИПА ВНУТРИ ЭЛЛИПСОИДОВ

Ермаков В.В. (Москва)

ermakov-vv2010@yandex.ru

В теории чисел часто рассматриваются вопросы о количестве целочисленных или рациональных точек на различных поверхностях. Пусть $V_k = \{(x, y, z) : x^2a^{-2} + y^2b^{-2} + z^2c^{-2} < k^2\}$, $M-$ поверхность Маркова $x^2+y^2+z^2 = 3xyz$, $G-$ группа, свободно порожденная преобразованиями $t_1(x, y, z) = (3yz - x, y, z)$, $t_2(x, y, z) = (x, 3xz - y, z)$, $t_3(x, y, z) = (x, y, 3xy - z)$. M_0- фундаментальная область относительно действия группы G [1]. Зададим на M_0 непрерывную меру μ и с помощью группы G продолжим ее на M.

Обозначим через $N(M \cap V_k)$ – число целочисленных точек на поверхности M, лежащих внутри эллипсоида V_k.

Теорема. $\lim_{k\to\infty} N(M \cap V_k)\mu(M_0)\mu^{-1}(M \cap V_k) = 1.$

Результат легко переносится на поверхности марковского типа [2].

Литература

Ермаков В.В.. О группе преобразований, связанной с кубической поверхностью Маркова//Матем. заметки, 1976, том 19, №3, с.419-428.

Эль-Хути М.Х. Кубические поверхности марковского типа// Матем. сб., 1974, том 93(135), №3, с.331-346.

ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ НА ГРАФАХ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРИ УСЛОВИИ СЛУЧАЙНЫХ ЗАДЕРЖЕК НА ДУГАХ

Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. (Ростов-на-Дону)
dnjme@math.sfedu.ru, pdvaskor@yandex.ru

Рассмотрим граф $G(X, U, f)$ с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени ([1], [2]), у которого для каждой дуги u ∈U заданы:

1. $d(u, t)$ — длительность прохождения по ней при условии начала движения в момент времени $t \in T$, здесь и далее считаем, что $T = [t_0;\ t_1]_Z$;
2. $p(u)$ — вероятность задержки на дуге u;
3. $c(u)$ — величина (длительность) такой задержки.

Рассмотрим задачу о нахождении средней длительности кратчайшего пути из вершины x в вершину y на графе G. Как было показано в работе [3], для ее решения классическими методами могут быть применены только переборные алгоритмы нахождения кратчайшего пути. Также отметим тот факт, что для графов с зависимостью весов дуг от времени в задаче нахождения кратчайшего пути возникает вопрос о моменте времени начала движения по такому пути, поскольку для различных моментов времени начала движения кратчайшие пути могут быть различны.

Для нахождения средней длительности кратчайшего пути будем применять подход, описанный в работе [1]. Согласно этому подходу, строится вспомогательный граф большего размера, но на котором длительности дуг не зависят от времени. Вспомогательный граф G' будем строить следующим образом: для каждой вершины x исходного графа G поставим в соответствие $|T|$ вершин $\{x_i\}_{i \in T}$ на вспомогательном графе G'. Дуги вспомогательного графа строятся по следующему правилу:

Для каждой дуги $u \in U$ (будем считать, что $f(u) = (x, y)$) исходного графа G на вспомогательном графе G' строим дуги $\{u_i\}$ по следующему правилу:

1. для каждого значения $i \in T$ если $i + d(u, i) \leqslant t_1$, то на вспомогательном графе достраиваем дугу u_i такую, что $f'(u) = \big(x_i, y_{(i+d(u,i))}\big)$.

2. вес каждой достроенной дуги u_i полагаем равным значению $c(u_i) = (1 - p(u)) \cdot d(u, i) + p(u) \cdot c(u)$.

Обозначим через $V_x = \{x_{t_0}, x_{t_0+1}, \ldots, x_{t_1}\}$ — множество вершин вспомогательного графа G', соответствующих вершине x.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Средняя длительность кратчайшего пути из вершины x в вершину y на исходном графе G равна длине кратчайшего пути из множества вершин V_x во множество вершин V_y на вспомогательном графе G'.*

Теорема 2. *Кратчайшему пути из множества вершин V_x во множество вершин V_y на вспомогательном графе G' соответствует средне вероятный кратчайший путь из вершины x в вершину y на исходном графе G.*

Литература

Скороходов В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения.// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2011. №1. С. 21–26.

Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьминова М. В., Петросян А. Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 с.

Скороходов В. А., Чеботарева А. С. Графы с зависимостью некоторых характеристик от времени: достижимость, случайные процессы. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. №3. С. 13–18.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ НА КОМПАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

Желтикова О.О. (Воронеж)

ksuola9@gmail.com

Рассмотрим управляемую систему с обратной связью вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t), u_1(t, \xi(t))), \;\; u_1(t, \xi(t)) \in U_1(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t), u_2(t, \xi(t))), \;\; u_2(t, \xi(t)) \in U_2(t, \xi(t)). \end{cases} \tag{1}$$

где $a(t, m)$ и $\alpha(t, m)$ являются векторным и (2,0)-тензорным полем на M; U_1, U_2 - мультифункции обратной связи. Введём многозначные поля $\mathbf{a}(t, m) = a(t, m, U_1(t, m))$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, m) = \alpha(t, m, U_1(t, m))$ и перейдём к включению

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)). \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{a}(t,m), \boldsymbol{\alpha}(t,m)$ являются многозначными полунепрерывными сверху, равномерно ограниченными, симметрическим полуположительно определённым (2,0)-тензорным и векторным полем с замкнутыми выпуклыми значениями; $U_1(t,m)$, $U_2(t,m)$ - полунепрерывные сверху векторные поля, и (2) выполнено почти для всех $t \in I$. Тогда существуют измеримые сечения $u_1 \in S_{U_1}$, $u_2 \in S_{U_2}$, что выполнено (1) почти для всех $t \in [0,T]$.*

Теорема 2. *В условиях Теоремы 1 для любой последовательности $\xi_q \to 0, \xi_q > 0$, каждая пара последовательностей $a_q(t,m)$ и $\alpha_q(t,m)$ ξ_q - аппроксимаций $\boldsymbol{a}(t,m)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$, соответственно, образует совершенное решение (2) с начальным условием $\xi(0) = m_0$.*

Теорема 3. *Среди совершенных решений (2) Теоремы 2 существует решение, на котором значение функционала качества $J(\xi(\cdot)) = E\int_0^T f(t,\xi(t))dt$, где f - непрерывная ограниченная функция, минимально.*

Литература

Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh.- Springer-Verlag London, 2011.- 460 p.

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ ИЗ ТЕОРЕМЫ БОРСУКА-УЛАМА

Жук Н.М. (Воронеж)
chuk_n_m@mail.ru

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $S_1[0] \subset E_1$ — единичная сфера, $F : S_1[0] \to Kv(E_2)$ — многозначное вполне непрерывное нечетное отображение.

Следствие. *Если $dim\ E_1 = \infty$, то $0 \in \overline{F(S_1[0])}$.*

Доказательство. Пусть $K = \overline{F(S_1[0])}$. Предположим противное, тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\rho(0, \overline{F(S_1[0])}) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ — конечная $\frac{\varepsilon_0}{3}$-сеть компактного множества K. В силу нечетности отображения F множество K симметрично относительно нуля. Рассмотрим множество $\tau = \{x_1, \ldots, x_n, -x_1, \ldots, -x_n\}$. Обозначим $A = co\{\tau\}$ — выпуклую оболочку, а $L = L(\tau)$ — линейную оболочку этих точек. Пусть $F_1 : S_1[0] \to L(x_1, \ldots, x_n)$ —

многозначное отображение, $F_1(x) = \overline{U_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(F(x))} \cap A$, где множество $U_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(F(x))$ является $\frac{\varepsilon_0}{3}$-раздутием множества $F(x)$. Очевидно, что F_1 имеет выпуклые образы, вполне непрерывно и нечетно. Пусть $e_1, \ldots, e_n \in S_1[0]$ линейно независимые вектора, E^n – линейная оболочка этих векторов. Тогда пространство E_1 можно разложить в прямую сумму $E_1 = E^n \oplus E_1'$. Пусть $A : E_1 \to L \subset E_2$ – оператор определенный следующим образом: $A(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ для любого $x \in E^n$, и $A(x) = 0$ для любого $x \in E_1'$. Очевидно, что оператор $A : E_1 \to L$ является линейным непрерывным сюръективным оператором. Рассмотрим включение $\eta\, A(x) \in F_1(x)$ на сфере $S_1[0]$, где число $\eta \in (0, \frac{\varepsilon_0}{3\,||A||})$. В силу теоремы Борсука-Улама (см. [1]) это включение имеет решение x_*. Пусть $y_* = A(x_*)$, тогда $\eta\, y_* \in F_1(x_*)$. Имеем, $||y_*|| = ||A(x_*)|| \leqslant ||A||$, следовательно, $||\eta\, y_*|| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3}$. Так как $\eta\, y_* \in F_1(x_*)$, то существует точка $\hat{y}_* \in F(x_*)$ такая, что $||\hat{y}_* - \eta\, y_*|| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3}$. Тогда $||\hat{y}_*|| < \varepsilon_0$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Литература

[1] *Гельман Б.Д., Жук Н.М.* О бесконечномерной версии теоремы Борсука-Улама для многозначных отображений // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. -2011. - №2. - С. 78-84.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Заборский А.В. (Обнинск)

alexander.zaborskiy@mail.ru

В настоящей работе построено формальное асимптотическое разложение (далее ФАР) решения начальной задачи для сингулярно возмущённого дифференциально-операторного уравнения с гиперболической дифференциальной частью:

$$\epsilon^2(U(x,t,p)_t + D(p)U(x,t,p)_x) = L_p U(x,t,p), \tag{1}$$

$$U(x,0,p) = \omega(x/\epsilon, p). \tag{2}$$

Здесь $U(x,t,p)$ - искомая функция; ϵ - малый параметр; L_p - линейный оператор, действующий по переменной p и имеющий нулевое однократное собственное значение; $D(p)$ - непрерывная и ограниченная функция; $\omega(x/\epsilon, p)$ - финитная функция начального условия. В ходе работы по мере необходимости накладываются дополнительные требования.

Алгоритм построения ФАР решения основывается на модифицированном методе пограничных функций, в котором ФАР решения представляется в виде суммы функции всплеска S, пограничной функции P и функции остаточного члена R:

$$U(x,t,p,\epsilon) = S(\zeta,t,p) + P(\xi,\tau,p) + R =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i (s_i(\zeta,t,p) + p_i(\xi,\tau,p)) + R. \qquad (3)$$

Здесь ζ, ξ, τ - вспомогательные переменные. Примечательно, что уравнение полученное для функции всплеска S является уравнением параболического типа.

В работе получены формулы для нахождения членов асимптотики и произведены их оценки. Алгоритм продемонстрирован на конкретной задаче. Доказана теорема об оценке остаточного члена по невязке.

Литература

Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях. М.:Изд-во Моск.Ун-та, 1978, 106 с.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Задорожний В.Г., Сухарев А.Ю. (Воронеж)
zador@amm.vsu.ru

Рассматривается двухточечная краевая задача

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon_1^2 x = \varepsilon_2(t), \qquad (1)$$

$$x(t_0) = 0, \frac{dx(t_1)}{dt} = 0, \qquad (2)$$

где ε_1 - случайная величина, заданная характеристической функцией $\varphi_1(u) = M(\exp(i\varepsilon_1 u))$ (M - знак математического ожидания), $\varphi_2(t)$ - независимый с ε_1 случайный процесс, заданный характеристическим функционалом $\varphi_2(v(\cdot)) =$

$M(\exp(i\int_{t_0}^{t_1}\varepsilon_2(s)v(s)ds)), v(\cdot)\in L_1(t_0,t_1)$ [1, стр. 30]. Задача состоит в нахождении математического ожидания решения задачи (1), (2).

Введем в рассмотрение отображение

$$y(t,u,v(\cdot)) = M(x(t)\exp(i\varepsilon_1 u + i\int_{t_0}^{t_1}\varepsilon_2(s)v(s)ds))).$$

Умножим равенства (1), (2) на $\exp(i\varepsilon_1 u + i\int_{t_0}^{t_1}\varepsilon_2(s)v(s)ds)$ и выпишем математическое ожидание полученных равенств. Эти равенства можно записать с использованием отображения $y(t,u,v(\cdot))$ в виде

$$\frac{\partial^2 y(t,u,v(\cdot))}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(t,u,v(\cdot))}{\partial u^2} = -i\varphi_1(u)\frac{\delta\varphi_2(v(\cdot))}{\delta v(t)}, \tag{3}$$

$$y(t_0,u,v(\cdot)) = 0, \frac{\partial y(t_1,u,v(\cdot))}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

где $\frac{\delta\varphi_2(v(\cdot))}{\delta v(t)}$ - вариационная производная [1, стр. 14].

Определение. Математическим ожиданием $M(x(t))$ решения задачи (1), (2) называется $y(t,0,0)$, где $y(t,u,v(\cdot))$ - решение детерминированной задачи (3), (4).

Получена формула для нахождения $M(x(t))$

$$M(x(t)) = -\int\limits_{t_0-t}^{t-t_0}\frac{\varphi_1(\sigma)d\sigma}{2(\varphi_1(t_1-t_0)+\varphi_1(t_0-t_1))}\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}(\varphi_1(t_1-s)+\varphi_1(s-t_1))M(\varepsilon_2(s))ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}ds\int\limits_{s-t}^{t-s}\varphi_1(\sigma)M(\varepsilon_2(s))d\sigma,$$

где $M(\varepsilon_2(s))$ — математическое ожидание случайного процесса $\varepsilon_2(s)$.

Литература

1.Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа. М.-Ижевск, РХД, 2006. — 316 с.

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКОМ ТОРЕ В ТЕРМИНАХ ПРОИЗВОДНЫХ В СРЕДНЕМ

Залыгаева М.Е. (Воронеж)
zalygaeva@math.vsu.ru

В рамках лагранжева подхода к гидродинамике нами исследуется анизотропная вязкая жидкость. Заметим, что данный подход был предложен В.И. Арнольдом, Д. Эбином и Дж.Марсденом и был реализован в последующих работах Ю.Е. Гликлиха. Здесь мы обобщим некоторые полученные в них результаты. Используя аппарат производных в среднем по Нельсону, мы предложим специальное стохастическое описание движения вязкой жидкости на плоском n-мерном торе T^n, у которой вязкий член имеет вид дифференциального оператора второго порядка $\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\tilde{B}^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$. Через $D^s(T^n)$ мы обозначим группу соболевских H^s-диффеоморфизмов тора T^n, где $s > \frac{n}{2}+1$. Пусть $g(t)$ - геодезическая связности Леви-Чивита слабой римановой метрики на $D^s(T^n)$. Напомним, что $g(t)$ представляет собой поток так называемой пылевидной материи на торе T^n. Введм в рассмотрение вектор $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t)$ и построим векторное поле $V(t,m) = E(v(t, m - Bw(t)))$.

Теорема 1. *Векторное поле $V(t,m)$ удовлетворяет следующему аналогу уравнения Бюргерса*

$$\frac{\partial V(t,m)}{\partial t} + (V(t,m)\cdot\nabla)V(t,m) - \tilde{\boldsymbol{B}}V(t,m) = 0.$$

Литература

Ebin D.G., Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. Annals of Math., 92, No. 1, 1970, 102-163.

Gliklikh Yu.E. Solutions of Burgers, Reynolds, and Navier-Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows. ournal of Nonlinear Mathematical Physics, vol. 17, No. Supplementary Issue 1, 2010, 15-29.

ТИПЫ УЧЕБНЫХ ЗАДАНИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Запорожцева С.В. (Воронеж)

Любой учитель знает, что каждый урок имеет свои учебные, развивающие и воспитательные цели. Для реализации этих целей необходимы специальные задания, выполняя которые, учащиеся будут изучать материал, обучаться учебным, интеллектуальным, практическим умениям и нравственной оценке деятельности человека. Таким образом, на каждом уроке по каждой теме должны быть задания, которые достигали бы все три цели урока.

Подготовить такие задания – это, прежде всего, продумать возможность объединения репродуктивных, информационно-аналитических, интеллектуальных, практических и нравственно-оценочных учебных заданий; например: практическое задание сделать творческим, а в условие творческой задачи внести ситуацию для нравственного анализа, репродуктивное задание объединить с заданием на формирование учебных умений.

Какие же виды учебных заданий по математике должны быть на каждом уроке, чтобы были реализованы учебные, развивающие и воспитательные цели урока?

Репродуктивные задания – это учебные задания, которые выполняются с помощью изученных закономерностей (правил, формул, теорем). Репродуктивные задания выполняются до формирования умения применять изученное правило у большинства учащихся в классе. Как это проверить? Очень просто: “Поднимите руки те, кто умеет применять это правило для решения задач”. То есть необходимо включать обратную связь. Что дальше? Те ученики, у которых уже сформировано репродуктивное умение, приступают к выполнению творческих заданий, а те, у которых это умение еще не сформировано, продолжают выполнять репродуктивные задания. При этом выбор заданий предоставляется ученикам.

Практические задания – это задания, с помощью которых у учащихся формируются и развиваются правильные практические действия. На уроках математики используют следующие виды практических заданий:

- измерение;
- опыт;
- моделирование (текстовое, графическое);
- конструирование;
- проектирование;
- исследование.

Творческие задания. Творчество – это процесс создания объективно новых культурных ценностей. Различают учебное и научное творчество. Учебное творчество – это решение учащимися задач, уже решенных наукой. Научное творчество – это решение учащимися нерешенных научных задач. Понятно, что многие нерешенные научные задачи ученики не смогут решить, но выдвинуть с помощью алгоритмов интеллектуальной деятельности гипотезы им вполне по силам.

Какие виды творческих заданий необходимо применять на уроках по каждой теме, чтобы комплексно формировать интеллект детей? Психологи выделяют следующие виды творческих заданий, которые являются основой для интеллектуальной деятельности человека:

1) выбор требуемой информации из предложенной;
2) исправление ошибок;
3) установление взаимосвязей-закономерностей;
4) объединение (систематизация) закономерностей;
5) сравнение;
6) доказательство, опровержение;
7) составление плана деятельности;
8) моделирование;
9) установление причин;
10) решение противоречий;
11) анализ научных закономерностей и теорий.

Творческие задачи первых шести видов решаются с помощью учебной информации, имеющейся в учебниках.

Исследовательские задания – это задания по поиску в научно-популярной литературе, природной и культурной среде нерешенных проблем, их решение и практическая проверка полученных решений. Изучение каждой темы должно заканчиваться этапом научной творческой деятельности учащихся. К исследовательским заданиям относятся следующие материалы в научно-популярных изданиях:

1) теоретический анализ нерешенной проблемы;
2) создание новых методов исследований;
3) анализ научных теорий и определение “белых пятен” – фактов, которые теория не может объяснить;
4) описание открытий и изобретений;
5) описание новых нерешенных проблем;
6) творческие биографии ученых.

Все типы предложенных заданий способствуют:

• созданию оптимальных условий для формирования общеучебных умений и навыков (работать с информацией, проектировать, планировать, контролировать свою деятельность, работать самостоятельно и в команде, участвовать в дискуссии и др.);

• формированию познавательных умений (поиск противоречий и формулировка проблем, выдвижение предположений и обоснование гипотез, разработка программ и проектов, проверка правильности решений и др.);

• развитию сознания, мышления, интеллектуальных и творческих способностей учащихся, умения сравнивать, обобщать и систематизировать;

• развитию креативности учащихся, их рефлексивных умений.

АТТРАКТОРЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ С ОБЪЕКТИВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Звягин А.В. (Воронеж)

zvyagin.a@mail.ru

Рассматривается следующая начально–краевая задача, описывающая модель движения слабо концентрированных водных растворов полимеров с регуляризованной объективной производной Яуманна в реологическом соотношении:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \operatorname{grad} p - 2\varkappa \operatorname{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) -$$

$$-2\varkappa \operatorname{Div}\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) = f, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \quad (2)$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty), \quad (3)$$

$$v(x,0) = a, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Определение 1. *Функцию $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ будем называть траекторией задачи (1)–(4), если она является слабым решением этой задачи с некоторым начальным условием $a \in V^1$ и удовлетворяет для почти всех $t \geqslant 0$ оценке $\|v(t)\|_1 + \|v'(t)\|_{-1} \leqslant R\left(1 + \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+,V^1)} e^{-\alpha t}\right)$, где $R > 0$ – константа.*

Множество траекторий данной задачи будем называть её пространством траекторий и обозначать $\mathcal{H}^+$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31188)

Теорема 1. *Пусть система (1)–(4) автономна и* $f \in L_2(\Omega)^n$, $0 < \delta < 1$. *Тогда существует минимальный траекторный аттрактор* $\mathcal{U}$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$. *Аттрактор ограничен в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, *компактен в* $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$; *он притягивает в топологии пространства* $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ *семейства траекторий, ограниченные в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует глобальный аттрактор* $\mathcal{A}$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$. *Аттрактор ограничен в* V^1, *компактен в* $V^{1-\delta}$; *он притягивает в топологии пространства* $V^{1-\delta}$ *семейства траекторий, ограниченные в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ТИПА ДЖЕФФРИСА[1]

Звягин В.Г., Орлов В.П. (Воронеж)
zvg@math.vsu.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$, ограниченная область с границей $\partial\Omega \subset C^2$. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$ рассматривается задача **A**:

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i + \nabla p + \nabla \theta = \mathrm{Div}\, \sigma + f(t, x),\ (t, x) \in Q_T;$$

$$\mathrm{div}\, v = 0,\ (t, x) \in Q_T;$$

$$\sigma + \lambda_1(\partial\sigma/\partial t + v_i \partial\sigma/\partial x_i + \sigma W_\rho(v) - W_\rho(v)\sigma) = 2\eta(\mathcal{E} + \lambda_2(\partial\mathcal{E}(v)/\partial t +$$

$$v_i \partial\mathcal{E}(v)/\partial x_i + \mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)));$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi\Delta\theta = \sigma : \mathcal{E}(v) + \omega(t, x),\ (t, x) \in Q_T;$$

$$\theta(0, x) = \theta^0(x),\ x \in \Omega;\ \ \theta|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$v(0, x) = v^0(x),\ x \in \Omega;\quad v|_{\partial\Omega} = 0;\ \ \sigma(0, x) = \sigma^0(x),\ \ x \in \Omega.$$

Здесь $v(t, x) = (v_1, \ldots, v_n)$, $p(t, x)$, $\theta(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ неизвестные скорость, давление, температура, и девиатор тензора напряжений соответственно; $f(t, x)$, $\omega(t, x)$, $v^0(x)$, $\theta^0(x)$, $\sigma^0(x)$ заданы; обозначения $\mathcal{E}(v)$, $W_\rho(v)$, V, H см. в [1], $\eta > 0$, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Теорема 1 *Пусть* $f \in L_2(0, T; V')$, $v^0 \in H$, $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega)$, $\sigma^0 - 2\eta\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathcal{E}(v^0) \in L_2(\Omega)$. *Пусть* $\omega \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0 \in L_p(\Omega)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13–01–00041)

Тогда при $p\in(1,4/3)$ для $n=2$ и для $p\in(1,5/4)$ при $n=3$ существует слабое решение (v,σ,θ) задачи **A**, *и справедливы оценки*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V)}+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(t,x)\|_H+\|\sigma\|_{L_2(Q_T)}\leqslant M(\|f\|_{L_2(0,T;V')}+|\sigma^0|_0+$$

$$+\|v^0\|_H)\equiv M_0;\ \|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}+\|\theta\|_{L_1(0,T;W_p^1(\Omega))}+$$

$$\sup_t\|\theta(t,x)\|_{L_p(\Omega)}\leqslant M(\|\omega\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))}+\|\theta_0\|_{L_p(\Omega)}+M_0).$$

Слабое решение задачи удовлетворяет уравнениям **A** в интегральном смысле, аналогично [1].

Литература

1. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред, М.: Красанд, 2012. - 412 с.

ОБ УПРАВЛЕНИИ НАБЛЮДАЕМОЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Зубова С.П., Раецкая Е.В. (Воронеж)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается динамическая система:

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt}=B(t,\varepsilon)\,x(t,\varepsilon)+D(t,\varepsilon)\,u(t,\varepsilon)+f(t,\varepsilon),\tag{1}$$

$$F(t,\varepsilon)=C(t,\varepsilon)\,x(t,\varepsilon)+G(t,\varepsilon)\,u(t,\varepsilon),\tag{2}$$

где $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)\in R^n$; $u(t,\varepsilon)\in R^k$; $F(t,\varepsilon)\in R^m$; коэффициенты $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$, $G(t,\varepsilon)$ — матрицы соответствующих размеров; $t\in[0,T]$ (T — конечно или бесконечно); $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ — малый параметр.

Система предполагается полностью наблюдаемой (идентифицируемой по Калману), то есть по известным реализуемым входной $f(t,\varepsilon)$ и выходной $F(t,\varepsilon)$ функциям состояние $x(t,\varepsilon)$ системы в каждый момент времени определяется однозначно.

Ставится задача построения такой управляющей вектор-функции $u(t,\varepsilon)$, под воздействием которой на выходе получается заданный результат (выход).

Исследование ведется методом каскадной декомпозиции ([1]-[4]), который предполагает поэтапный переход к редуцированным системам в подпространствах, размерности которых последовательно уменьшаются.

На каждом этапе упавляющая вектор-функция расщепляется на несколько векторов в подпространствах. В одних подпространствах выводятся формулы для построения соответствующих частей управления, в других подпространствах части управления произвольны, что даёт возможность построения оптимального управления при задании дополнительных требований. Третьи подпространства подвергаются следующему расщеплению.

Приводятся формулы для построения функций управления и состояния. Исследуется влияние малых возмущений, производится сравнение поведения указанных функций возмущенной и предельной (при $\varepsilon = 0$) систем.

Литература

[1]. *Zubova S.P.* On polinomial solution of thelinear stationary control system / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya, L.H. Thung // Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69, № 11. P. 1852–1858.

[2]. *Раецкая Е.В.* Полная наблюдаемость сингулярно возмущенной нелинейной нестационарной системы / Е.В. Раецкая // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль. 2012. С. 146–147.

[3]. *Zubova S.P.* Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Journal of Matematical Sciences. New York. 2013. V. 188, № 3. P. 1852–1858.

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Иваньшин П.Н. (Казань)

pivanshin@gmail.com

Построены сплайн-интерполяциоонные решения трехмерных задач для уравнения Лапласа, волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнений теории упругости.

Предлагаемый метод решения — аналог метода конечных элементов — состоит в сведении трехмерных задач к семейству плоских краевых задач, которые решаются с помощью стандартных приемов комплексного анализа. Построены решения для указанных задач в сильной постановке. Если обозначить пространственные координаты через (x, y, h), то конечным элементом является цилиндр или усеченный конус между плоскостями $h = h_k$, $h = h_{k+1}$. В каждом сегменте $[h_k, h_{k+1}]$ решение имеет вид [1], [2]:

$$u_p(x,y,h) = \sum_{k=0}^{p} h^k u_k(x,y).$$

Получены оценки приближения. Например, для задачи Дирихле оценка имеет вид [2]:

$$\int\int_{P_{\tilde{h}}} |u_p(x,y,\tilde{h}) - u(x,y,\tilde{h})| dxdy \leqslant Q\sqrt{\varepsilon}.$$

Здесь u_p — приближенное решение, u — точное решение, а ε — шаг разбиения интервала изменения h.

Доказано, что при увеличении p, приближенное решение сходится к точному. Отметим, что метод алгоритмизируем.

Литература

1. *E. A. Shirokova and P. N. Ivanshin*, Spline-Interpolation Solution of One Elasticity Theory Problem, Bentham Science E-books, 2011.

2. *P. N. Ivanshin and E. A. Shirokova*, Spline-interpolation solution of 3D Dirichlet problem for a certain class of solids, IMA Journal of Applied Mathematics. - 2012; doi: 10.1093/imamat/hxs009.

О ДЕЙСТВИИ ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C(D)$[1]

Иноземцев А.И. (Липецк)

inozemcev.a.i@gmail.com

Работа содержит критерий действия оператора с многомерными частными интегралами $(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} k_i(t, S_i)x(s_i)\, dS_i$ в $C(D)$, где $k_i \colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geqslant 2$), $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$, $T_1, T_2, \ldots, T_{2^n}$ — подмножества множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{2^n} = \tau$. S_i и dS_i — набор переменных τ_j из T_i и их дифференциалов $d\tau_j$ соответственно, а s_i получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами T_i. D_i — декартово произведение множеств, на которых определены $\tau_j \in T_i$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.4407.2011)

В случае $n = 2$ критерии действия оператора K в пространстве $C(D)$ содержатся в работе [1].

Рассмотрим функции $B(t) = k_1(t) + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} k_i(t, S_i)\, dS_i$, $B_\alpha(t) = \int\limits_{D} x_\alpha\, dg(t,\tau)$ и $\gamma(t) = |k_1(t)| + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} |k_i(t, S_i)|\, dS_i$, где $x_\alpha = \prod\limits_{i=1}^{n} x_{\xi_i}^{\alpha_i}(\tau_i)$ — всюду плотная в $C(D)$ линейная комбинация функций $1, x_{\xi_i}(\tau_i) = \begin{cases} \xi_i - \tau_i & \text{при } \tau_i \leqslant \xi_i, \\ 0 & \text{при } \tau_i > \xi_i \end{cases}$ всюду плотных в $C([a_i, b_i])$, а α — мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, α_i принимают значения 0 или 1.

Теорема. *Линейный оператор K действует в пространстве $C(D)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном τ функции $B(t)$ и $B_\alpha(t)$ непрерывны, а функция $\gamma(t)$ ограничена. При выполнении этих условий оператор K непрерывен и его норма определяется равенством $\|K\| = \sup\limits_{D} \gamma(t)$.*

Литература

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro—Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ТРЕХТЕМПОВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Калашникова М.А. (Воронеж)

margarita.kalashnikova@mail.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \int\limits_0^T F(x, y, z, u, t, \varepsilon)\, dt$$

на траекториях системы

$$\dot{x} = f(x, y, z, u, t, \varepsilon),\ \varepsilon\dot{y} = g(x, y, z, u, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \dot{z} = h(x, y, z, u, t, \varepsilon),\ x(0) = x^0,\ y(0) = y^0,\ z(0) = z^0.$$

Здесь $x = x(t, \varepsilon) \in R^{n_1}$, $y = y(t, \varepsilon) \in R^{n_2}$, $z = z(t, \varepsilon) \in R^{n_3}$, $u = u(t, \varepsilon) \in R^r$, T - фиксированный момент времени, $t \in [0, T]$, функции F, f, g, h предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам. Следуя методу пограничных функций [1] и прямой схеме построения асимптотического разложения решения задач оптимального управления с малым параметром, решение рассматриваемой задачи ищется в виде

$$v(t,\varepsilon) = (x', y', z', u')' = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j v_j(t,\varepsilon), \tag{1}$$

где $v_j(t,\varepsilon) = \bar{v}_j(t) + \Pi_{1,j}v(\tau_0) + Q_{1,j}v(\tau_1) + \Pi_{2,j}v(\eta_0) + Q_{2,j}v(\eta_1)$, $\bar{v}_j(t)$ - регулярные, $\Pi_{1,j}v(\tau_0)$, $\Pi_{2,j}v(\eta_0)$- правые пограничные, $Q_{1,j}v(\tau_1)$, $Q_{2,j}v(\eta_1)$ - левые пограничные члены экспоненциального типа; $\tau_0 = t/\varepsilon$, $\tau_1 = (t-T)/\varepsilon$, $\eta_0 = t/\varepsilon^2$, $\eta_1 = (t-T)/\varepsilon^2$. Разложение (1) подставляется в условия задачи, затем в уравнении состояния приравниваются коэффициенты по степеням ε отдельно зависящие от $t, \tau_0, \tau_1, \eta_0, \eta_1$, при этом минимизируемый функционал записывается в виде $J_\varepsilon(u) = \sum\limits_{j\geqslant 0} \varepsilon^j J_j$. Приводятся условия разрешимости задачи и формализм построения членов асимптотического разложения (1). Рассматривается иллюстративный пример.

Литература

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПРОВОДИМОГО УПРУГОЙ СИЛОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ ПРИ СВОБОДНОМ ВТОРОМ

Калистратова А.В. (Москва)

Цель работы:
определение оптимального граничного управления методом отыскания минимума интеграла граничной энергии.

Задачи:
1. Применить аналитический и численный подходы к решению нижеуказанной смешанной задачи:

$$\widehat{u}_{xx} - \widehat{u}_{tt} = 0 \tag{1}$$

$$\widehat{u}(x,0) = 0 \;\; \widehat{u}_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

$$\widehat{u}_x(0,t) - h\widehat{u}(0,t) = \widehat{\mu}(t) \;\; \widehat{u}_x(l,t) = 0 \tag{3}$$

2. Оценить поведение решения в критических точках путем визуализации с использованием библиотеки OpenGL. Определить расхождение численного и аналитического решений.

3. Определить условия связи, обеспечивающие выполнение заданных начальных и финальных условий:

$$u(x,0) = \varphi(t) \quad u_t(x,0) = \psi(t) \tag{4}$$

$$u(x,T) = \widehat{\varphi}(t) \quad u_t(x,T) = \widehat{\psi}(t) \tag{5}$$

Здесь Т принимается кратным $2l$, то есть равным $T = 2l(n+1), n = 0, 1, 2...$

4. Минимизировать интеграл граничной энергии $\int\limits_0^T (\mu(t)+hu(0,t))^2 dt$ при указанных условиях связи.

Получить в явном аналитическом виде оптимальное граничное управление.

Этапы исследования:

На первом этапе было получено решение смешанной задачи (1)-(3) с нулевыми начальными и финальными условиями из класса $\widehat{W}^1_\infty(Q_T)$, которое определяется равенством:

$$\widehat{u}(x,t) = -\sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t-x-2kl} \widehat{\mu}(\xi)d\xi - \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{t+x-2kl} \widehat{\mu}(\xi)d\xi -$$

$$-h\sum_{k=0}^{n} \int_0^t l_k^1(2h\tau) \left[\int\limits_0^{t-x-2kl-\tau} \widehat{\mu}(\xi)d\xi + \int\limits_0^{t+x-2l-2kl-\tau} \widehat{\mu}(\xi)d\xi \right] -$$

$$-h\sum_{k=0}^{n} \int_0^t l_k^1(2h\tau) \left[\int\limits_0^{t-x-2l-2kl-\tau} \widehat{\mu}(\xi)d\xi + \int\limits_0^{t+x-4l-2kl-\tau} \widehat{\mu}(\xi)d\xi \right] d\tau$$

Здесь $l_k^1(2h\tau) = e^{-h\tau} L_k^1(2h\tau)$, где $L_k^1(z)$ -полиномы Лагерра, функция $\widehat{\mu}(t)$ продолжена так, что она обращается в нуль при $t \leqslant 0$. Элементарными преобразованиями дополним функцию $\widehat{u}(x,t)$ до $u(x,t)$ так, чтобы она являлась решением смешанной задачи с неоднородными начальными данными.

На втором этапе исследования было обнаружено, что в связи с отсутствием в данной задаче условий закрепления необходимо установить не только условия связи, определяющее соотношение между начальными, финальными и граничными условиями, но и условие согласования.

Вывод:

Таким образом, на текущем этапе исследования необходимо проверить правильность гипотезы о выборе минимизируемого интеграла $\int\limits_0^T (\mu(t) + hu(0,t))^2 dt$ или же опровергнуть её.

Перспективы исследования:

В краткосрочной перспективе исследования будет произведена минимизация интеграла и получено оптимальное граничное управление как функция, доставляющая минимум интегралу граничной энергии.

Примечание:

В данном исследовании все функции приведены в явном аналитическом виде, что значительно увеличивает точность полученного решения.

Литература

Ильин В.А. Избранные труды т.2 МАКС Пресс, 2008. -692 с.

Никитин А.А. Третье краевое условие в задачах граничного управления для управления колебаний, Москва, 2008

Нестеренко Ю.Р. Оптимальное граничное управление процессами, описываемыми системой телеграфных уравнений, Москва, 2009

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ[1]

Калитвин В.А. (Липецк)

kalitvin@gmail.com

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций рассматривается уравнение Вольтерра с частными интегралами

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s),$$

где $(t,s) \in D$, l, m, f — заданные непрерывные на $D \times T$, $D \times S$, D соответственно функции, $T = \{\tau : a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b\}$, $S = \{\sigma : c \leqslant \sigma \leqslant s \leqslant d\}$. С применением квадратурных формул уравнение решается численно, изучается сходимость вычислительных процессов.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками $t_p = a + ph$ ($p = 0, 1, \ldots, P$, $a + Ph \leqslant b < (P+1)h$), $s_q = c + qg$ ($q = 0, 1, \ldots, Q$, $c + Qg \leqslant d < (Q+1)g$) соответственно. Полагая $t = t_p$, $s = s_q$ и применяя формулы $\int_a^{t_p} l(t_p, s_q, \tau)x(\tau, s_q)d\tau = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x(t_i, s_q) + r_{pq}^l$, $\int_c^{s_q} m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + r_{pq}^m$, где $l_{pqi} =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

$l(t_p,s_q,t_i)$, $m_{pqj}=m(t_p,s_q,s_j)$, а r^l_{pq}, r^m_{pq} — остатки квадратурных формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0},x_{0q},x_{pq} функции x в точках $(t_p,s_0),(t_0,s_q),(t_p,s_q)$ $(p=1,\dots,P;q=1,\dots,Q)$. Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда $x_{00}=f(a,c)$, $x_{p0}=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{p0i}x_{i0}+f_{p0}+\delta_{p0}$, $x_{0q}=g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{0qj}x_{0j}+f_{0q}+\delta_{0q}$, $x_{pq}=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{pqj}x_{p_j}+f_{pq}+\delta_{pq}$ $(p=1,\dots,P;$ $q=1,\dots,Q)$, где $f_{p0}=f(t_p,s_0)$, $f_{0q}=f(t_0,s_q)$, $f_{pq}=f(t_p,s_q)$.

Теорема 1. *Если r^l_{pq} и r^m_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0$; существуют такие числа A,B что $|\alpha_{pi}|\leqslant A<\infty$, $|\beta_{jq}|\leqslant B<\infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon>0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h<h_0$ и $g<g_0$ будут выполняться неравенства $|x_{pq}-x(t_p,s_q)|<\epsilon$ $(p=0,1,\dots,P;q=0,1,\dots,Q)$, а последовательность функций*
$x_{pq}(t,s)=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l(t,s,t_i)x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m(t,s,s_j)x_{pj}+f(t,s)$ *равномерно сходится на D к решению $x(t,s)$ при $p,q\to\infty$.*

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И S-ЧИСЛА ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО ПОТЕНЦИАЛА

Кальменов Т.Ш., Дауитбек Д.
kalmenov.t@mail.ru

В ограниченной области $\Omega\equiv\{(x,t):(0,l)\times(0,T)\}$ рассмотрим одномерный волновой потенциал

$$u(x,t)=\int_{\Omega}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad 1$$

где $\varepsilon(x-\xi,t-\tau)=\frac{1}{2}\theta(t-\tau-|x-\xi|)$ - фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения, т.е.

$$\frac{\partial^2\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial x^2}=\delta(x-\xi,t-\tau),$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau^2}-\frac{\partial^2\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi^2}=\delta(x-\xi,t-\tau), \qquad 2$$

$$\varepsilon(x-\xi,t-\tau)|_{\tau=t}=\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t}|_{\tau=t}=\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t}=0.$$

Известно что, если функция $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, то $u(x,t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ и объемный волновой потенциал (1) удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), (x,t) \in \Omega, f \in L_2(\Omega) \qquad 3$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, 0 < x < l. \qquad 4$$

Волновой потенциал (1) широко используется при решений различных краевых задач для волнового уравнения. Ниже находим боковые граничные условия, порождаемые волновым потенциалом (1).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, тогда $u(x,t)$-волновой потенциал (1) удовлетворяет боковым граничным условиям*

$$(u_x - u_t)(0,t) = 0, x = 0, 0 < t < T, (u_x + u_t)(l,t) = 0, x = l, 0 < t < T. \qquad 5$$

Обратно, если функция $u(x,t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ удовлетворяет уравнению (3) и начальным условиям (4), а также боковым граничным условиям (5) то функция $u(x,t)$ однозначно определяет одномерный волновой потенциал (1).

Отметим, что граничное условие (5) волнового потенциала (1) является локальным граничным условием в отличие от граничного условия объемного потенциала Лапласа приведенного в работе [1]. В этой работе, также найдены все s-числа волнового потенциала (1).

Литература

1. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.,* К спектральным вопросам объемного потенциала. Доклады академии наук России, 2009, Т. 428(4), с.16-19.

ОБ УСТОЙЧИВОЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ КУНА-ТАККЕРА В ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Канатов А.В., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

alexkanatov@yandex.ru, m.sumin@mail.ru

Доклад посвящен применению формализма двойственной регу-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00199-а) и Минобрнауки РФ (шифр заявки 1.1907.2011).

ляризации [1] к параметрической нелинейной задаче математического программирования общего вида в гильбертовом пространстве

$$f(z) \to \inf, \ \ g(z) = p, \ \ h(z) \leqslant r, \quad z \in D \subset Z, \qquad (1)$$

где $f : D \to R^1$ – непрерывный функционал, $g : D \to H$ – вполне непрерывный оператор, $h \equiv (h_1, ..., h_m) : D \to R^m$ – непрерывный векторный функционал, $D \subset Z$ – замкнутое ограниченное множество, $p \in H$ и $r \in R^m$ – параметры, Z и H – гильбертовы пространства. Применительно к задаче (1) обсуждается устойчивая к ошибкам исходных данных секвенциальная теорема Куна-Таккера в недифференциальной форме. Эта теорема формулируется в терминах минимизирующих последовательностей и модифицированных функций Лагранжа и представляет собой необходимые и достаточные условия на элементы указанных последовательностей. Главным при ее доказательстве является предположение о существовании так называемого проксимального субградиента функции значений (S-функции) задачи (1) в фиксированной точке (p, r). Именно это предположение и обуславливает использование в теореме конструкций модифицированной функции Лагранжа, а не ее классического аналога, что характерно в аналогичных случаях для задач выпуклого программирования.

Рассматриваются иллюстративные примеры, возможности приложения обсуждаемой теоремы для устойчивого конструирования минимизирующих последовательностей при решении нелинейных задач оптимального управления.

Литература

1. *Sumin M.I.* Parametric Dual Regularization in a Nonlinear Mathematical Programming // Advances in Mathematics Research, Vol. 11. New-York: Nova Science Publishers Inc., 2010, Chap. 5, pp. 103-134.

О НЕ ВПОЛНЕ СЕРЬЁЗНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТИПА УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Каплан А.В., Снегирева В.Р. (Воронеж)
avkaplan@mail.ru

Делается попытка проанализировать соотношение времени на самостоятельную работу студентов и их аудиторной нагрузки в российских и западных университетах. Вводится понятие типа учебного процесса. Сравниваются западные и российские типы учебных процессов в разных условиях.

1. 10 лет присоединения России к Болонской декларации, основная цель которой – формирование единого европейского образовательного пространства. Желание наших реформаторов: привести российскую систему высшего образования хотя бы в количественное соответствие с европейской, пытаясь при этом сохранить и развить традиции высшего профессионального образования (ВПО) в России.

Возникновение многочисленных проблем, которые до сих пор остаются нерешенными (см. статьи и выступления Т.Шанина, Н.С.Кирабаева, Б.А.Сазонова).

Одна из них – *проблема общего объема учитываемого учебного времени* (в частности, у нас на подготовку бакалавра планируется почти в два раза больше времени, чем на Западе).

2. Вторая проблема, тесно связанная с первой,– *соотношение аудиторной нагрузки и самостоятельной работы студентов* (СРС). Для сравнительного анализа удобнее всего использовать недельную учебную нагрузку студентов, выраженную в *академических часах.* По нашим законам и правилам её максимальный объём – 54 часа, что соответствует 40-часовой рабочей неделе (здесь часы уже не академические).Будем считать, что:

a) студенты на Западе – такие же люди, и их общая учебная нагрузка совпадает с нашей;

b) виды нагрузки студентов различаются только *по месту проведения* (например, *самостоятельные* работы в аудитории будем относить к *аудиторной* нагрузке).

Обозначим аудиторную нагрузку через a (часов), а время на СРС – через c (часов). Нас будет интересовать отношение $c : a$, которое мы обозначим через $\varepsilon :\ c : a = \varepsilon$.

(В теории кривых второго порядка так обозначаемая величина называется *эксцентриситетом* кривой и определяет её тип: *эллипс*, если $\varepsilon > 1$; *гиперболу*, если $\varepsilon < 1$; *параболе* можно приписать $\varepsilon = 1$).

По не очень серьёзной аналогии назовем учебный процесс *процессом «эллиптического» типа*, если $c : a < 1$; *«параболического»* типа, если $c : a \approx 1$; *«гиперболического»* типа, если $c : a > 1$.

3. Анализ данных из многочисленных и разнообразных источников. (Так как основные данные и рекомендации чаще всего относятся к *аудиторной* работе, то есть приводятся значения величины a, то величину c вычисляем по формуле $c = 54 - a$).

1) Россия (при максимальной недельной аудиторной нагрузке

40 ч.): $\frac{c}{a}=\frac{14}{40}$; $\varepsilon=0.35$

2) СССР (до 1991 года, норматив): $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}; \varepsilon=0.50$

3) Россия (ФГОС 3, декларация): $\frac{c}{a}=\frac{1}{1}; \varepsilon=1.00$

4) Великобритания (при максимальной недельной аудиторной нагрузке 16 ч.): $\frac{c}{a}=\frac{38}{16}; \varepsilon=2.37$

5) США (периодика): $\frac{c}{a}=\frac{3}{1}; \varepsilon=3.00$

6) Европа (максимальная недельная аудиторная нагрузка 10 ч., рекомендации): $\frac{c}{a}=\frac{44}{10}; \varepsilon=4.40$

7) Европа (максимальная недельная аудиторная нагрузка 8 ч., рекомендации): $\frac{c}{a}=\frac{46}{8}; \varepsilon=5.75$

8) Европа (максимальное соотношение, встречающееся в рекомендациях): $\frac{c}{a}=\frac{6}{1}; \varepsilon=6.00$

Добавим еще расчеты по *недельному расписанию* учебных занятий группы 1 курса математического факультета ВГУ (специальность «Фундаментальная математика и механика», набор 2012 года) и по *данным нагрузки* одного из авторов (семестровый курс «Аналитическая геометрия» в той же студенческой группе):

$\diamond$ студенты : $a=34, c=20, \varepsilon=0.59$;

$\diamond$ преподаватели: $a=132, c=120, \varepsilon=0.91$

Последнюю строку следует прокомментировать особо.

Если аудиторная нагрузка (132 часа лекций и лабораторных работ за семестр) соответствует реальному учебному процессу (точнее, наоборот: учебный процесс строится в соответствии с нагрузкой), то количество часов на самостоятельную работу (120 часов) взято практически ниоткуда: запланированная трудоёмкость дисциплины равна 7 ЗЕТ, то есть 252 часам; разность между 252 и обоснованными 132 аудиторными часами и составляет 120 часов, причем сюда же включаются никому не известные часы на некую «подготовку». Если еще вспомнить, что СРС в нагрузке лишь упоминается, но преподавателю не планируется, не засчитывается и не оплачивается, то становится понятным, что значение , близкое к декларированной единице,– очередной фиктивный показатель учебного процесса, с этим процессом никак не связанный.

4. Некоторые выводы.

✓Наши подсчеты и комментарии ясно показывают, что, несмотря на объявленную приверженность болонским принципам, за последние 20 лет в российском ВПО ничего не измени-лось, разве что учебный процесс из *нормативно-эллиптического* (строка 2 в списке) превратился в фактически *сильно эллиптический* (строка 1). В то же время в европейских (и американских) университетах при изначально *гиперболическом* типе учебного процесса наблюдается устойчивая тенденция к дальнейшему уменьшению аудиторной нагрузки и соответственному увеличению доли СРС. Переходя к пределу при $a \to 0$ можно получить $\varepsilon \to \infty$, что по форме и принципам организации приближается к бурно развивающемуся в настоящее время *дистанционному образованию.*

✓Никаких признаков кардинального изменения ситуации в ближайшем будущем не за-мечается. Это легко объяснить тем, что в нашей высшей школе существует жесткая зависимость количества преподавателей от количества студентов, причем решающую роль играет именно ау-диторная нагрузка преподавателя. Если снизить аудиторную нагрузку, придется сокращать ППС. И хотя перспектива такого сокращения отнюдь не невозможна, все же совершать резкие движения в этом направлении пока, кажется, не собираются.

Таким образом, Болонья остается Болоньей, а Россия – Россией.

✓... В период расцвета КВН у команды города Одессы была в ходу ключевая фраза: «Шампанским и не пахло»,– это про нас и про сейчас.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ И ТРЕНИЕМ

Карпова А.П., (Воронеж)
karpovaantonina@mail.ru

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x}\, v = \nu\Delta(v) + \mu v + c\, grad\,(P) + \lambda B\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \qquad (1)$$

(Δ — двумерный лапласиан) с условием несжимаемости

$$\mathrm{div(v)} = 0 \qquad (2)$$

на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и "какими-нибудь" стандартными краевыми условиями. Будем предполагать, что кроме вектора силы вязкости $\nu\Delta(v)$ уравнение содержит векторы силы торможения μv и упругой вязкости $\lambda B(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2})$.

Рассмотрев решения, периодические по x_1, x_2 и посредством одной из процедур дискретизации по пространственным переменным получим обобщенную конечномерную систему гидродинамического типа

$$\dot{w} = Aw + B(w, w) + C(w, w, w), \qquad w \in \mathbb{R}^6. \tag{3}$$

Записав уравнение в операторном виде и применив соотношения полученные в предыдущих работах, получим асимптотическое представление решения.

$$\left(r_1 \cos(\alpha + \widetilde{a}t), r_1 \sin(\alpha + \widetilde{a}t), r_2 \cos(\beta + \widetilde{b}t), r_2 \sin(\beta + \widetilde{b}t), 0, 0\right)^{\top} + o(r_1, r_2),$$

где r_1, α и r_2, β — полярные координаты в плоскостях переменных ξ_1, ξ_2 и ξ_3, ξ_4, $r_1 = O(\varepsilon)$, $r_2 = O(\varepsilon)$ — амплитудные переменные.

На его основе нетрудно получить компьютерные изображения, дающие представление о процессе зарождения волновых движений жидкости вблизи ламинарных течений.

Литература

1. *Карпова А. П., Сапронов Ю. И.* Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008, вып. 3. С.12-22.

2. *Арнольд В. И., Хесин Б. А.* Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО. 2007. – 392 с.

РАЗРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТРАХОВАНИЯ

Киселев С.С. (Воронеж)

serj_kiseleff@bk.ru

Целью данной работы является организация статистической проверки математических моделей страхования, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. В моделях находятся доход страховой компании, цена страхового полиса, зависимость страховой премии от вероятности разорения компании и процентной ставки вклада. Строится оценка для вероятности разорения компании.

Для проверки моделей рассматриваются процессы поступления страховых премий и выплат в страховой компании при различных распределениях числа страховых случаев и проверяется надежность модели на реальных статистических данных.

Предполагается, что процесс поступления страховых премий в компанию детерминированный, а процесс требований клиентов стохастический. В качестве потока требований берутся пуассоновский процесс, процесс Бернулли, отрицательный-биномиальный процесс и геометрический процесс. Деньги, полученные от клиентов, размещаются на депозит под сложную процентную ставку. Клиенту вместе с возмещением выплачивается дивиденд.

Модели проверяются в программе Mathematica 6.0.

Литература

1. Бондарев Б. В. Математические модели в страховании. Донецк: АПЕКС, 2002. – 116с.

2. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. Москва: Наука, 1964. – 280с.

3. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. Москва: Мир, АСТ, 2003. – 406с.

МЕТОД МАЖОРАНТНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Клодина Т.В., Задорожная Н.С. (Ростов-на-Дону)

simon@sfedu.ru

В работе поставлен и изучен вопрос о характере изменений вполне определенных интегральных характеристик плоских краевых задач стационарной фильтрации в зависимости от изменений области и краевых условий.

Для задач, имеющих сложные краевые условия, Г.Н.Положий предложил метод мажорантных областей, сущность которого заключается в следующем. Путем деформации границы области фильтрации строят две такие вспомогательные области, для которых задачу можно решать точно. Полученные характеристики таких областей заведомо должны давать их верхнюю и нижнюю оценки.

Если вспомогательные области выбраны удачно, то решение получается достаточно точным, а погрешность определяется строго обоснованно.

Авторы настоящей работы предлагают решение краевой задачи для уравнений

$$div\overline{V} = 0, \overline{V} = -\kappa \, grad \, h,$$

($\overline{V} = (V_x, V_y)$ - скорость фильтрации, $h(x, y)$ - напорная функция, κ - коэффициент фильтрации), для плоского и осесимметричного случаев. В задаче определяются интегральные характеристики областей в том случае, когда контурные условия представляют собой три потенциальные линии и одну линию тока.

Литература

Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. Киев, Наукова думка, 1973. - 423 с.
Ляшко И.И., Великоиваненко И.И., Лаврик В.И., Мистецкий Г.Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. Киев, Наукова думка, 1974. - 200 с.

СОВРЕМЕННЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Колесникова И.В. (Воронеж)
kolinna@inbox.ru

Роль информационно-коммуникационных технологий в общеобразовательном процессе определена в документах Правительства РФ, Министерства образования РФ, относящихся к стратегии модернизации образования. Информационно-коммуникативная компетентность - один из основных приоритетов в целях общего образования, и связано это не только с внутриобразовательными причинами. Меняется весь характер жизни, необыкновенно возрастает роль информационной деятельности, а внутри нее - активной, самостоятельной обработки информации человеком, принятия им принципиально новых решений в непредвиденных ситуациях с использованием технологических средств. Системное, эффективное формирование информационно-коммуникативной компетенции для основной массы учащихся сегодня возможно только при условии использования ИКТ. А значит успешность намеченных в школе преобразований во многом зависит от их применения. Другими словами, информатизация - это важнейшее направление модернизации системы образования.
Компьютерные технологии обучения - совокупность методов, приемов, способов, средств создания педагогических условий на основе компьютерной техники, средств телекоммуникационной связи и интерактивного программного продукта, моделирующих часть функций педагога по представлению, передаче и сбору информации, организации контроля и управления познавательной деятельностью. Применение компьютерных технологий обучения позволяет видоизменять весь процесс преподавания, реализовывать модель личностно-ориентированного обучения, интенсифицировать заня-

тия, а главное - совершенствовать самоподготовку обучающихся. Безусловно, современный компьютер и интерактивное программно-методическое обеспечение требуют изменения формы общения преподавателя и обучающегося, превращая обучение в деловое сотрудничество, а это усиливает мотивацию обучения, приводит к необходимости поиска новых моделей занятий, проведения итогового контроля (доклады, отчеты, публичные защиты групповых проектных работ), повышает индивидуальность и интенсивность обучения.
Компьютерные технологии обучения предоставляют большие возможности в развитии творчества, как учителя, так и учащихся. Мультимедиа технологии - способ подготовки электронных документов, включающих визуальные и аудиоэффекты, мультипрограммирование различных ситуаций. Применение мультимедиа технологий открывает перспективное направление развития современных компьютерных технологий обучения. Современные информационно-коммуникационные технологии обучения - совокупность современной компьютерной техники, средств телекоммуникационной связи, инструментальных программных средств, обеспечивающих интерактивное программно-методическое сопровождение современных технологий обучения.

Основными задачами современных информационных технологий обучения являются разработка интерактивных сред управления процессом познавательной деятельности, доступа к современным информационно- образовательным ресурсам (мультимедиа учебникам, различным базам данных, обучающим сайтам и другим источникам).

Информационные технологии, наиболее часто применяемые в учебном процессе, можно разделить на две группы: 1) сетевые технологии, использующие локальные сети и глобальную сеть Internet (электронные вариант методических рекомендаций, пособий, серверы дистанционного обучения, обеспечивающие интерактивную связь с учащимися через Internet, в том числе в режиме реального времени) и 2) технологии, ориентированные на локальные компьютеры (обучающие программы, компьютерные модели реальных процессов, демонстрационные программы, электронные задачники, контролирующие программы, дидактические материалы).

С целью повышения эффективности современного урока математики можно использовать основные информационные возможности:

1. Программы - тренажеры, тесты, зачеты в приложении

Microsoft Office Excel:

Использование тренажеров, обучающих и контролирующих программ по отдельным темам курса математики удобно применять для работы с учащимися, способными достаточно быстро усваивать учебный материал на обязательном уровне. Такие ученики поочередно работают в индивидуальном режиме за компьютером и после успешного выполнения заданий переходят к упражнениям более высокого уровня сложности. Учитель в это время с классом отрабатывает материал обязательного уровня обучения. Такая деятельность позволяет этой группе учащихся не скучать, не расслабляться, а быть занятыми собственным делом. Использование компьютера позволяет создать информационную обстановку, стимулирующую интерес и пытливость ребенка. При этом практически неограниченно увеличивается количество тренировочных заданий; достигается оптимальный темп работы ученика; легко достигается уровневая дифференциация обучения; поддерживается интерес у ребенка, его активность на протяжении всего урока. При организации контроля знаний, умений и навыков учащихся можно использовать тестирование с помощью компьютера.

2. Мультимедийные диски фирмы "1С", "Физикон", "Дрофа", "Кирилл и Мефодий". Иллюстрированные учебники, интерактивные модели, виртуальные лаборатории, разноуровневые вопросы и задачи, справочники и поисковая система мультимедийных дисков позволяют применять на уроке математики различные виды учебной деятельности.

3. Математические сайты сети Интернет.

Математические этюды содержат занимательные научно-популярные рассказы о современных задачах математики и анимационные фильмы, которые можно использовать на уроках математики. Например, www.etudes.ru. Множество методических новинок, книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, истории из жизни математиков помогают окунуться в удивительный и увлекательный мир математики на сайте www.math.ru.

Такие сайты, как www.exponenta.ru, www.allmath.ru, graphfunk.narod.ru, www.neive.by.ru, www.problems.ru, zadachi.mccme.ru, www.mathtest.ru, www.math-on-line.com, tasks.ceemat.ru, www.uztest.ru, eqworld.ipmnet.ru и др. помогают проводить уроки с использованием новых современных технологий, добиваться высоких результатов при обучении математике.

4. Мультимедийные презентации уроков в среде Microsoft Office PowerPoint.

В процессе своей работы я широко использую электронные презентации при объяснении нового материала, решении задач, повторении, контроле знаний. Наглядное представление определений, формул, теорем и их доказательств, качественных чертежей к геометрическим задачам, предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения научными фактами обеспечивает эффективное усвоение учащимися новых знаний и умений. Динамические элементы на слайдах повышают наглядность, способствуют лучшему пониманию и запоминанию учебного материала. Применение мультимедейных технологий на уроках повышает статус учителя, идущего в ногу со временем.

5. Проектная деятельность.

Проектная деятельность является одним из приоритетных направлений работы. Проект - это научная, исследовательская, прикладная, творческая работа одного или группы учащихся, которая может быть представлена в виде сочинения, трактата, наблюдения, сценария, исследования, компьютерной программы, эссе, научной статьи, учебно-наглядного пособия и т.д. Целью любой проектной работы является: систематизация полученных знаний, их практическое применение, приобретение новых, более глубоких знаний по данной проблеме. Научно-исследовательская работа учащихся организуется для: развития творческих возможностей учащихся, стремящихся совершенствовать свои знания в определенной области наук; формирования первоначальных практических умений организации научной работы; улучшения профориентации учащихся. Проектное обучение рассматривается как: средство активизации познавательной деятельности учащегося, средство повышения качества образовательного процесса. Проектно-исследовательская деятельность осуществляется по определенной схеме, начиная с четкого выбора темы проекта и заканчивая его практическим воплощением. Темы проектов выбираются в зависимости от интересов учащихся и затрагивают разнообразные области. Кроме проектов в рамках одного предмета реализуются и межпредметные проекты, в которых дополнительно к изучаемой области от детей требуются знания в смежных науках При защите проекта учащиеся демонстрируют: понимание проблемы, целей и задач проекта, умение планировать и осуществлять деятельность, найденный способ решения проблемы, умения аргументировать свои выводы и оппонировать, участвуют в коллективном анализе и оценке результатов проекта.

ПУЛБЕК-АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЛАБОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

Кондратьев С.К. (Воронеж)

kondratev@math.vsu.ru

Рассматривается вопрос о предельных режимах слабых решений начально-краевой задачи для неавтономной модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров в смысле «обратного притягивания» (pullback attraction).

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Рассматривается начально-краевая задача для модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t} - 2\varkappa\,\mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) + \mathrm{grad}\,p = f,$$

$$\mathrm{div}\,v = 0,\ v\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ v\Big|_{t=0} = a.$$

где $v(x,t)$ — поле скоростей, $p(x,t)$ — давление, $f(x,t)$ — плотность внешних сил; $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформации. Для внешней силы допускается рост, при котором интеграл $\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s)\|_{-1}^{2}\,ds$ конечен при любом t (здесь α — некоторая постоянная, а норма рассматривается в пространстве V^{-1}, принадлежащем шкале пространств, порождённых оператором Стокса). Теоремы единственности слабых решений для данной модели не установлено.

Для модели вводится параметрическое семейство пространств траекторий, выделяется класс притягиваемых семейств множеств и устанавливается существование пулбек-аттрактора.

Литература

[1] *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Современная математика. Фундаментальные направления — 2009. — Т. 31. — С. 3—144.

[2] *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД, 2012. — 416 с.

[3] *D. Vorotnikov.* Asymptotic behaviour of the non-autonomous 3D

Navier–Stokes problem with coercive force. J. Differential Equations, 2011, V. 251, 2209–2225.

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ДВУХКОМПОНЕТНОГО СПЛАВА ВБЛИЗИ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ

Коротких А.С., Сапронов Ю.И. (Воронеж)
andrey@gmail.com, yusapr@mail.ru

При изучении динамики спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава) часто используется уравнение Кана-Хиллярда [1]-[2]:

$$\dot{u} = \Delta \operatorname{grad} V(u) := \mathcal{D}\,\Delta(u^3 - u - \gamma\Delta(u)),$$

где $u = u(x)$ — относительная коцентрация компонент вещества, $x \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (1 \leqslant n \leqslant 3,\ 3)$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии,

$$V(u) := \mathcal{D} \int\limits_U \left(\frac{(u^2-1)^2}{4} + \frac{\gamma}{2} |\nabla U|^2 \right) dx$$

— интеграл энергии, U — область, занятая сплавом.

Первым шагом в таких исследованиях является отыскание равновесных состояний w, в которых $\operatorname{grad} V(w) = 0$. В качестве порождающих состояний можно рассматривать те состояния, которые бифурцируют, например, из тривиального равновесия $w = 0$. Их поиск можно осуществлять посредством редукции Ляпунова-Шмидта к конечномерной задаче $\operatorname{grad} W(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где

$$W(\xi) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j} V(w)$$

— ключевая функция [3], построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора Лапласа на области U (при заданных краевых условиях) в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве состояний.

Литература

1. *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. J. Chem. Phys 28,1958 – pp. 258-266.

2. *Инфельд Э., Роуландс Дж.* Нелинейные волны, солитоны и хаос. – пер с англ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 480 с.

3. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004) – с.3-134.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Костин Д.В. (Воронеж)
dvkostin@rambler.ru

В [1], с. 351 при исследовании уравнения фильтрации в пористой среде рассматривается задача определения давления $p(t,x)$ в проточной зоне

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \left[\frac{\nu}{a}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(1-\nu)\sigma}{a} - (1-\nu)\sigma^2 \int_0^t e^{\sigma(s-t)}(\cdot)ds\right] p(t,x) = \\ = Lu(t,x) = 0.\end{gathered} \qquad (1)$$

$0 \leqslant x < \infty$, $0 < t < \infty$, $0 < \nu \leqslant 1$— доля объема проточных зон, σ— константа массообъема между проточными и застойными зонами, a— коэффициент пьезопроводимости. Ставятся условия

$$\mu p(t,0) - p'(t,0) = q(t), p(0,x) = \lim_{x\to 0} p(t,x) = 0. \qquad (2)$$

Запишем задачу(1)-(2) в операторной форме $\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = Ap(x)$, $\mu p(0) - p'(0) = q$, $p(\infty) = 0$, где оператор A задан дифференциальным выражением L и областью определения $D(A) = \{p \in C_{[0,\infty]}, \frac{dp}{dt} \in C_{[0,\infty]}, p(0) = 0\}$. Установлено, что оператор $-A$ является генератором сильно–непрерывной сжимающей полугруппы

$$\begin{gathered}U(x,-A)p(t) = e^{-\frac{(1-\nu)\sigma}{a}x}\left[p(-\nu x) + \right. \\ \left. + \sigma\left[\frac{(1-\nu)x}{a}\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^{t-\nu x} I_0\left[2\sigma\left(\frac{1-\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}}(x\xi)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot e^{-\sigma\xi} p(t-\sigma-\nu x)d\xi\right],\end{gathered}$$

если $t \geqslant \nu x$. $U(x,-A)p(t) = 0$, если $t < \nu x$. Здесь $I_0(s)$— функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка.

Доказывается, что в нормах $\|q\| = \sup_{t\geqslant 0}|q(t)|$ оператор A имеет квадратный корень $A^{\frac{1}{2}}$, а $-A^{\frac{1}{2}}$ генерирует сильно–непрерывную сжимающую полугруппу $U(x,-A^{\frac{1}{2}})$. Отсюда, по [2], следует, что задача (1)-(2) равномерно корректна, ее решение имеет вид $p(t,x) = \int_0^\infty \exp(-\mu s)U(x+s,-A^{\frac{1}{2}})q\,ds$ и справедлива оценка $\|p(x)\| \leqslant \frac{\|q\|}{\mu}$.

Литература

1. Бабенко Ю.И. Методы дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассопереноса.— СПб: «Профессионал» – 584 с.

2. Костин Д.В. О третьей краевой задаче для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве R^+ Современные методы теории краевых задач ВВМШ, «Понтрягинские чтения – XXIII» Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. – 212 с.

НЕЛОКАЛЬНЫЙ БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРОГО КЛАССА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Костина Т.И. (Воронеж)

tata_ sti@rambler.ru

Рассматривается уравнение Белецкого описывающее колебания спутника на эллиптической орбите:

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2q}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{dq}{d\nu} + \mu\sin q - 4e\sin\nu = 0,$$

(где e - эксцентриситет орбиты, μ - параметр, характеризующий распределение массы спутника, q - угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника, ν - угловая (полярная) координата центра масс спутника) и уравнения упругого равновесия круглой пластины, равномерно сжатой по краю (вдоль нормалей), в модели Кармана:

$$\Delta^2 w + \lambda\Delta w - [w,\varphi] = \Delta^2\varphi + \frac{1}{2}[w,w] = 0.$$

(здесь Δ - оператор Лапласа, $[w,\varphi] = w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$, w - функция прогиба, φ - функция напряжения, λ - параметр нагрузки) с краевыми условиями, отвечающими жесткому характеру закрепления края пластины: $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = w = w_x = w_y = 0|_{\partial\Omega}$, где $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. К данным уравнениям применена исследовательская схема, основанная на модифицированном методе Ляпунова-Шмидта.В результате чего описан алгоритм приближенного решения этих задач и дана его апробация в случае $n = 2$, а также получена визуализация нелокального рассмотрения бифуркационных эффектов — получение изображений линий уровней ключевых функций, сечений каустик и bif-раскладов критических точек ключевой функции, наглядно представленных линиями уровней ключевых функций.

Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника вокруг центра масс. – М. : Наука 1965. – 416 с.

2. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. – М. : Гостехиздат. 1956. - 419 с.

3. Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений. – Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2011 - С. 181-186.

ЦЕННОСТЬ ГЕОМЕТРИИ КАК СРЕДСТВА ВОСПИТАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ

Кошелева Л.Г., Ермаков В.В. (Москва)

vikvve@rambler.ru

Среди людей, далёких от математики, распространено мнение, что математика - это вычисления. Но как раз это и не является сутью математики: вычисления легко передать компьютеру, причём он выполнит их быстрее и точнее, чем человек. Главная ценность математики, из-за чего математическая культура важна каждому человеку, состоит в том, что она учит рассуждать логически, вырабатывает абстрактное мышление и, по словам Ломоносова, "ум в порядок приводит". Именно эти качества приобретаются при изучении геометрии, решении геометрических задач, при доказательстве геометрических теорем на основе строгих логических выводов из небольшого числа аксиом [1,2]. Поэтому тенденция к сокращению преподавания геометрии в школе, вытеснению ее алгеброй и анализом губительна с точки зрения формирования математической культуры и развития умственных способностей учащихся.

Литература

1. *Архангельский А.В.* Некоторые принципы преподавания математики// О математике: Проблемы преподавания. - М.: Знак, 2012. - С.101-114.

2. *Шарыгин И.Ф.* . Рассуждения о концепции школьной геометрии// О математике: Проблемы преподавания. - М.: Знак, 2012. - С.214-267.

ОБ ОБЪЕМАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРИЗМ И ОКТАЭДРОВ С СИММЕТРИЯМИ[1]

Краснов В.А. (Коломна)
vladimir.krasnov3107@gmail.com

Вычисление объема многогранника в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ – старая и трудная проблема. Что касается неевклидовых пространств $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{H}^3$, то здесь ситуация еще более сложная.

Так, формула объема произвольного гиперболического тетраэдра долгое время была неизвестна. И лишь совсем недавно эта проблема была полностью решена в работах Ю.Чо и Х.Кима [4], Дж.Мураками и У.Яно [3], а также Дж.Мураками и А.Ушиджимы [5]. Однако формулы, полученные вышеназванными математиками, являются довольно громоздкими и трудно обозримыми. Наконец, в 2004 году Д.А.Деревниным и А.Д.Медных [1] была получена явная интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах его двугранных углов.

Объемы симметричного идеального октаэдра и идеальной треугольной призмы были вычислены Я.Моханти [6], а Н.В.Абросимов, М.Годой–Молина и А.Д.Медных [7] получили интегральные формулы объемов трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, mmm- и $2|m$-октаэдров. В свою очередь, в работе [8] был вычислен объем гиперболического mmm-октаэдра в простейшей геометрической ситуации.

Мы же рассмотрим задачу вычисления объемов *произвольных* гиперболических mmm и $2|m$-октаэдров. Дело в том, что достаточно большое количество симметрий у рассматриваемых октаэдров позволяют свести задачу вычисления их объема к вычислению объемов тетраэдров подходящих триангуляций. Аналогично, используя идею триангуляции выпуклого многогранника, мы получим формулы объемов *собственных* гиперболических призм при некоторых ограничениях на их двугранные углы [2]. Заметим, что при таких ограничениях существует гиперболическая призма с указанным набором двугранных углов, единственная с точностью до движения пространства [2].

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00830-а и № 12-01-31507-мол_а)

Литература

1. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron // Rus. Math. Surv. — 2005. — *60(2):346.*

2. *Андреев Е. М.* О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *3 (123).* — С. 445–478.

3. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Comm. Anal. Geom. — 2005. — *V. 13.* — С. 379–400.

4. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. — 1999. — *V. 22.* — С. 347–366.

5. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths // Journal of Geometry. — 2005. — *V.83*, № 1-2. — С. 153–163.

6. *Mohanty Y.* The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space // Algebraic and Geometric Topology. — 2003. —*3.* — С. 1–31.

7. *Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д.* Об объеме сферического октаэдра с симметриями // Современная математика и ее приложения. —2008. —*60.* — С. 3–12.

8. *Байгонакова Г. А., Годой-Молина М., Медных А. Д.* О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией // Вестник Кемеровского госуд. университета. — 2011. — *3/1 (47).* — С. 13–18.

О ВОЗМОЖНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ КОНЕЧНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ О ТЕКУЩЕМ СОСТОЯНИИ

Крячков М.В. (Воронеж)

kryachkovm@gmail.com

В работе [1] Е.С. Пятницким была рассмотрена проблема стабилизации "черного ящика" механической природы при отсутствии количественной информации о текущем состоянии. Предполагалось, что для измерения доступны лишь знак отклонения координаты от желаемого положения и знак ее скорости. Данный подход применим только для систем с относительной степенью два. В настоящей работе рассматривается задача стабилизации конечномерной системы, представляющей собой цепочку интеграторов, с использованием информации только о знаках переменных состояния.

Динамика рассматриваемой системы описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$x^{(n)} = c\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right) + k\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right) u, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$ — выход системы, u — ограниченное управление: $|u| \leqslant U$. Для построения управления доступны величины $sign\left(x^{(i)}\right)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Кусочно-непрерывные функции c и k удовлетворяют следующим оценкам: $|c| \leqslant C, \quad 0 < \underline{K} \leqslant k \leqslant \overline{K}$.

Предлагаемый алгоритм управления имеет вид:

$$u = -U_{i(t)} sign(x_{i(t)}), \qquad (2)$$

где $i(t) \in \{0, \ldots, n-1\}$ представляет собой состояние конечного автомата, на вход которого подаются события смен знаков $x^{(i)}$.

Теорема. *При заданных константах $\underline{K}$, $\overline{K}$ и U найдутся константы C, U_0, U_1, ..., U_{n-1} такие, что алгоритм управления (2) стабилизирует систему (1) в нуле за конечное время.*

Литература

1. *Пятницкий Е.С.* Управление механическими системами в условиях неопределенности при отсутствии количественной информации о текущем состоянии // Автоматика и телемеханика, Т. 60, №. 5, 1999, С. 164-169.

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кудинов А.Ф., Задорожний В.Г.

В работе получено формальное решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. При этом используются явные формулы решений линейных разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами [1].

Обозначения. c, d, p_0, t_0 — фиксированные вещественные числа; p, t — вещественные переменные, $p \geqslant p_0$, $c < t_0 \leqslant t < d$; $t = \frac{t-t_0}{p}$, $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, \ldots, p$; $\varphi(t)$, $f(t)$ — заданные функции, непрерывные в интервале $]c, d[$; $a(n) = 2 + h\varphi(t_{n-2})$, $b(n) = h^2 f(t_{n-2}) - h\varphi(t_{n-2}) - 1$, $n \geqslant 2$, $c(m) = a(j+1) \ldots a(n) b(m)/a(m-1)a(m)$,

$j+2 \leqslant m \leqslant n$, $j=0;1$,

$$y_p^j(t) = \sum_{0\leqslant q\leqslant \frac{p-j}{2}} \sum_{1\leqslant i_1\leqslant \ldots i_q\leqslant p-j-q} c(p-i_1+1)\ldots c(p-i_q-q+2),$$

$$y_0^0(t)=1, y_1^0=a(1), y_0^1=0, y_1^1(t)=1, y_2^1=a(2).$$

Теорема. Если существуют конечные пределы

$$y^0(t)=\lim_{p\to\infty}\left(y_p^0(t)+(1-a(1))y_p^1(t)\right), y^1(t)=\lim_{p\to\infty}\frac{y_p^1}{p},$$

то функция $y(t)=\beta_0 y^0(t)+\beta_1(t-t_0)y^1(t)$, где β_0,β_1 — произвольные вещественные числа, является решением задачи Коши

$$\begin{cases} y''(t)=\varphi(t)y'(t)+f(t)y(t), \\ y(t_0)=\beta_0, y'(t_0)=\beta_1. \end{cases}$$

В частности, при: 1) $f(t)\equiv 0$, 2) $\varphi(t)=\alpha$, $f(t)=\beta$, где α,β — константы, получим известные результаты.

Литература

1. Кудинов А.Ф. Некоторые методы решений разностных уравнений второго порядка, Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики, выпуск 7, ВГУ,2009.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ ПАРЫ ПОЛЕЙ

Кунаковская О.В. (Воронеж)

ovk@math.vsu.ru

Проблема вычисления топологических инвариантов всегда стояла достаточно остро. Применимость топологических методов серьезно зависит от вычисленных топологических характеристик конкретных пространств и их морфизмов и от разработанных алгоритмов (или пошаговых инструкций) соответствующих вычислений. В этом направлении исследования велись как зарубежными (начиная с К. Гаусса и А. Пуанкаре), так и отечественными учеными. В представляемом докладе приводятся некоторые вычислительные формулы для топологических индексов особенностей пары сечений векторных расслоений (в частности, пары векторных полей или пары 1-форм) на конечномерных многообразиях с краем. Заметим, что конструкция аналогичных индексов в бесконечномерном случае содержит процедуру сведения их к конечномерному случаю посредством достаточно точной аппроксимации полей (см. [1], [3]).

План доклада:

1. Интегральные вычислительные формулы. В основе их конструкции [2] – двойственность Пуанкаре-Лефшеца для когомологий де Рама.

2. Вычислительные формулы для маломерных пространств.

3. Геометрические вычисления в явно заданных координатах.

Литература

1. *Borisovich Yu.G., Kunakovskaya O.V.* Boundary indices of nonlinear operators and the problem of eigenvectors // Methods and applications of global analysis: coll. of sc. proceedings. Voronezh: Voronezh University Press. — Voronezh, 1993. P. 39-44.

2. *Kunakovskaya O.V.* On additivity property of the boundary index of a pair of nonlinear operators // Труды междунар. конгресса Ассоциации "Женщины-математики". Вып. 3. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1994. – С. 23-28.

3. *Кунаковская О.В.* Топологические инварианты краевых и обобщенных особенностей нелинейных операторов и их приложения. Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. ВГУ, Воронеж, 2012. – 150 с.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Кутищев И.Н. (Воронеж)

iliakou@rambler.ru

В банаховом пространстве E рассмотрим ОДУ следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x) + \varepsilon\psi(t, x, \omega), \tag{1}$$

где A - ограниченный оператор, действующий из E в E, а ε -малый положительный параметр. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(t, x, \omega)$ - непрерывно - дифференцируемы по пространственной переменной x и действуют из E в E и $R^1 \times E \times \Omega$ в E соответственно, где $(\Omega, \Im, P)$ - вероятностное пространство. Элементарное событие $\omega \in \Omega$. Функция $\psi(t, x, \omega)$ - T-периодична по первой компоненте, удовлетворяет условиям Каратеодори, причем:

$$\begin{cases} \psi(t,x,\cdot):\Omega\to E \text{ , измерима } ((t,x)\in R^1\times E) \\ \psi(\cdot,\cdot,\omega):R^1\times E\to E \text{ , непрерывна почти при всех } \omega\in\Omega. \end{cases}$$

Предполагается, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &||\varphi(s,x)-\varphi(s,y)||\leqslant L_\varphi||x-y||;\\ &||\psi(s,x,\omega)-\psi(s,y,\omega)||\leqslant L_\psi||x-y||;\\ &||e^{(At)}||\leqslant e^{(-\delta t)};\\ &\frac{L_\varphi}{\delta}<1, \end{aligned} \tag{2}$$

где L_φ и L_ψ, δ - некоторые положительные константы.

При $\varepsilon=0$ уравнение (1) примет вид:

$$\dot{x}=Ax+\varphi(x). \tag{3}$$

Предположим, что уравнение (3) имеет нетривиальное T - периодическое решение, которое мы будем обозначать через $x_0(t)$. Так-как уравнение (3) автономное, то любая функция вида $x_0(t+\Theta)$, где Θ - некоторое число, будет его T-периодическим решением. Это решение мы будем обозначать x_Θ, т.е. $x_\Theta(t)\equiv x_0(t+\Theta)$. Рассмотрим линеризованное на x_Θ уравнение:

$$\dot{x}=Ax+\varphi'(x_\Theta(t))x. \tag{4}$$

Через $z_\Theta(t)$ обозначим T-периодическое решение сопряженного к (4) уравнения

$$\dot{z}=-A^*z-(\varphi'(x_\Theta(t))^*z.$$

Последнее уравнение рассматривается в E^*.

Пусть выполнено следующее $<x_0'(\Theta),z_0(\Theta)>\neq 0$. Тогда оперделим функцию M формулой:

$$M(\Theta,\omega)=\int_0^T<\psi(t,x_\Theta(t),\omega),z_0(t)>\,dt,$$

где через $<x,z>$ обозначено значение функционала $z\in E^*$, на векторе $x\in E$. Заметим, что $M(\Theta,\omega)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Предположим, что для любого $\omega\in\Omega$ существует $\Theta_0(\omega)$ - такое число что:

$$\begin{aligned} &M(\Theta_0,\omega)=0,\\ &M'(\Theta_0,\omega)\neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2),(5). Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, *уравнение (1) имеет T-периодическое решение* $x(t, \varepsilon, \omega)$. *Эти решения сходятся по распределению к решениям* $x_0(t + \Theta_0(\omega))$ *уравнения (2).*

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ[1]

Куценко И.Л., Павлова Н.Г. (Москва)
natasharussia@mail.ru

Исследуется вопрос существования вектора равновесных цен в одной нелинейной модели рынка. На примере исследуемой модели показано приложение теорем из [1]- [3] о точках совпадения α-накрывающего и липшицевого отображений к задачам математической экономики.

Будем рассматривать метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y). $B_X(r, x) = \{\xi \in X : \rho_X(x, \xi) \leqslant r\}$, $B_Y(r, y) = \{\xi \in Y : \rho_Y(y, \xi) \leqslant r\}$.

Определение (см. [1]).*Пусть задано* $\alpha > 0$. *Отображение* $S : X \to Y$ *называется* α*-накрывающим, если* $S(B_X(r, x)) \supseteq \supseteq B_Y(\alpha r, S(x))$ $\forall r \geqslant 0$, $\forall x \in X$.

Теорема о точках совпадения (см.[1]). *Пусть пространство* X *полно, а* S, $D : X \to Y$ *– произвольные отображения,* S *непрерывно и является* α*-накрывающим,* D *липшицево с константой* $\beta < \alpha$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in X$ *существует* $\xi = \xi(x_0) \in X$:

$$S(\xi) = D(\xi), \quad \rho_X(\xi, x_0) \leqslant \frac{\rho_Y(S(x_0), D(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Получены достаточные условия существования вектора равновесных цен, изучена устойчивость вектора равновесных цен к малым возмущениям модели.

Литература

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах. Докл. РАН, 2007. Т. 416. N 2. С. 151-155.

2. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31140)

points. J. Fixed Points Theory and Applications, 2009. V. 5. N 1. P. 105-127.

3. *Арутюнов А. В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений. Математические заметки, 2009. Т. 86. N 2. С. 163-169.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ СО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ломовцев Ф.Е., Новиков Е.Н. (Минск, Беларусь)
lomovcev@bsu.by, novikovevgenij@gmail.com

Методом характеристик решена смешанная задача:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ a > 0,\ \{x,t\} \in G = [0,\infty[\times[0,\infty[, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x < \infty, \qquad (2)$$

$$\big[\zeta(t)u_{tt} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u\big]\big|_{x=0} = \mu(t),\ 0 \leqslant t < \infty. \qquad (3)$$

Найдены необходимые и достаточные условия на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ для существования единственных классических решений $u \in C^{(2)}(G)$ этой задачи.

Теорема. *Пусть* $\zeta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in C[0,\infty[,\ \zeta(t) \neq 0,\ t \in [0,\infty[$, *и уравнение* $a^2\zeta(\rho/a)v''(\rho) + (a\alpha(\rho/a) - \beta(\rho/a))v'(\rho) + \gamma(\rho/a)v(\rho) = 0$, *имеет частное решение* $v \in C^{(2)}(G_2)$, $v(\rho) \neq 0$, $v'(\rho) \neq 0$, $\rho \in [0,\infty[$. *Существуют единственные классические решения смешанной задачи (1)–(3) во множестве* $G_1 = \{\{x,t\} \in G :\ x \geqslant at\}$ *вида* $u(x,t) =$

$$= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

и во множестве $G_2 = \{\{x,t\} \in G :\ x < at\}$ *вида* $u(x,t) =$

$$= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau +$$

$$+ \frac{v(at-x)}{2}\Bigg(\int\limits_0^{at-x} \frac{1}{v^2(\xi)} \int\limits_0^{\xi} \frac{v(\tau)}{a^2\zeta(\tau/a)}\Big[2\mu(\tau/a) -$$

$$-a\zeta(\tau/a)(a\varphi''(\tau)+\psi'(\tau))-(a\alpha(\tau/a)+\beta(\tau/a))\frac{a\varphi'(\tau)+\psi(\tau)}{a}-$$

$$-\gamma(\tau/a)(\varphi(\tau)+\varphi(0)+\frac{1}{a}\int\limits_0^\tau\psi(\eta)d\eta)\Big]e^{\int\limits_\xi^\tau\frac{a\alpha(\eta/a)-\beta(\eta/a)}{a^2\zeta(\eta/a)}d\eta}d\tau d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{at-x}\frac{1}{v^2(\xi)}\int\limits_0^\xi\frac{v(\rho)}{a^2\zeta(\rho/a)}\Big[2\zeta(\rho/a)f(0,\rho/a)+$$

$$+a\zeta(\rho/a)\int\limits_0^{\rho/a}[f^{(1,0)}(\rho-a\tau,\tau)-f^{(1,0)}(a\tau-\rho,\tau)]d\tau+$$

$$+\alpha(\rho/a)\int\limits_0^{\rho/a}[f(\rho-a\tau,\tau)+f(a\tau-\rho,\tau)]d\tau+$$

$$+\frac{\beta(\rho/a)}{a}\int\limits_0^{\rho/a}[f(\rho-a\tau,\tau)-f(a\tau-\rho,\tau)]d\tau+$$

$$+\frac{\gamma(\rho/a)}{a)}\int\limits_0^{\rho/a}\int\limits_{a\tau-\rho}^{\rho-a\tau}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\Big]e^{\int\limits_\xi^\rho\frac{a\alpha(\eta/a)-\beta(\eta/a)}{a^2\zeta(\eta/a)}d\eta}d\rho d\xi+$$

$$+\frac{\psi(0)-a\varphi'(0)}{a}v(0)\int\limits_0^{at-x}\frac{1}{v^2(\xi)}e^{\int\limits_\xi^0\frac{a\alpha(\eta/a)-\beta(\eta/a)}{a^2\zeta(\eta/a)}d\eta}d\xi\Bigg),$$

тогда и только тогда, когда

$$f\in C(G),\ \varphi\in C^{(2)}[0,\infty[,\ \psi\in C^{(1)}[0,\infty[,\ \mu\in C[0,\infty[,$$

$$\zeta(0)(a^2\varphi''(0)+f(0,0))+\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0),$$

$$\int_0^t f^{(1,0)}(x\pm a(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C(G),$$

$$\int_0^{t-x/a}\left[f^{(1,0)}(a(t-s)-x,s)-f^{(1,0)}(x-a(t-s),s)\right]ds\in C(G_2).$$

Ранее формулы классических решений задачи (1)–(3) при $f = 0$, $\zeta = 0$ с достаточными условиями на φ, ψ, μ найдены С.Н. Барановской, Н.И. Юрчук (2009г.) и формулы её классических решений при $f \neq 0$, $\zeta = 0$ с необходимыми и достаточными условиями на f, φ, ψ, μ – Ф.Е. Ломовцевым, Е.Н. Новиковым (2012г.).

ХАРАКТЕРИСТИКА ЛОКАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВСПЛЕСКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ[1]

Макаров К.С. (Курск)
runaway90@mail.ru

Локальная регулярность функций может быть охарактеризована с помощью непрерывного всплескового преобразования. Математическая основа этой идеи приведена в Daubechies I. "Ten Lectures on Wavelets". Для описания дифференцируемости функций высших порядков с использованием всплесков с большим числом нулевых моментов: для характеристики и производной , непрерывной по Гельдеру с показателем α, нам нужен вейвлет ψ такой, что $\int x^m \psi(x) dx = 0$ для $m = 0, 1, \ldots, n$.

Данная техника рассматривалась применительно к некоторым элементарным функциям. В качестве анализирующего всплеска использовался вейвлет wave. Данный всплеск имеет единственный нулевой момент, и может быть использован для анализа первой производной функции. В частности, непрерывное всплесковое преобразование линейной функции $y = kx$ имеет вид:

$$(W_\psi y)(a,b) = |a|^{-1/2} \int\limits_R kx \left(-\frac{x-b}{a} \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2} dx = -\sqrt{2\pi} k a^{3/2}$$

Мы наблюдаем линейную зависимость всплесковых коэффициентов от параметра масштабирования a. В случае обнаружения такой зависимости для временного ряда рассматривается возможность оценки соответствующего коэффициента k.

Для определения положения локальных особенностей сигналов используется масштабно-временное представление, которое входит в состав разработанного СПО.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

Описанная методика может применяться для анализа и определения параметров сигнальных конструкций различной сложности. Кроме того, очевидны приложения для решения различных задач дифференциальных уравнений математической физики.

Литература

Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets // CBMS-NSR Series in Appl. Math. - SIAM, 1992. 464 с.

ПРОБЛЕМА ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ БАКАЛАВРАМ

Малышева Л.А. (Москва)
love-1@mail.ru

В настоящее время осуществляется переход на многоуровневую Болонскую систему образования и разработаны ФГОС 3-го поколения. Образовательные стандарты 3-го поколения в отличие от стандартов 2-го поколения предусматривают сокращение аудиторных часов занятий за счет увеличения объема самостоятельной работы студентов. В преподавании математики бакалаврам инженерно-технических направлений это порождает значительные трудности. Во-первых, математика по своей сути такова, что нельзя болезненно исключить из программы отдельные разделы, так как они являются основой для понимания следующих тем. Например, без теории пределов нельзя изложить теорию рядов, а без теории рядов выпадают важные для инженеров приближенные методы. Курс математики оказывается сильно перегруженным.[1] Во-вторых, существенное уменьшение лекционных часов приводит к тому, что преподаватель излагает курс конспективно, опуская подробности, а из-за этого даже у хороших студентов знания предмета оказываются поверхностными. В-третьих , из-за многократно более высокой (по сравнению со странами Запада, откуда была взята в качестве образца Болонская система) учебной нагрузки, преподаватель не в состоянии эффективно контролировать самостоятельную работу студентов.

Литература

1. *Архангельский А.В.* Некоторые принципы преподавания математики.// О Математике : Проблемы преподавания. — М.: Знак, 2012. — С. 101-117

О КОРНЯХ НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ТЕОРИИ ВСПЛЕСКОВ

Меач Мон (Воронеж)
meach_simon@yahoo.com

При построении всплесков с компактным носителем, сохраняющих локализованность с возрастанием гладкости [1,2], лемма Рисса применяется к специальным полиномам Бернштейна. Для этого нужно знать корни используемых полиномов.

Пусть

$$A_{N,k}(t) = \sum_{l=0}^{k} \binom{N}{l} t^l (1-t)^{N-l}$$

Теорема. *Корни многочленов* $A_{N,k}(x), 0 \leqslant k \leqslant N$ *находящиеся в полуплоскости* $Re\ x \leqslant \frac{k}{N}$, *удовлетворяют неравенству*

$$\left|\frac{x}{\frac{k}{N}}\right|^{\frac{k+1}{N}} \left|\frac{1-x}{\frac{N-k}{N}}\right|^{\frac{N-k}{N}} \geqslant 2^{\frac{1}{N}}.$$

В работе используются методы из [3].

Литература

1. Novikov I.Ya. Modified Daubechies wavelets preserving localization with growth of smoothness// East J. Appr. 1995. V. 1. №3. P. 341-348.

2. Новиков И.Я. Константы неопределенности для модифицированных всплесков Добеши//Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информатика. Т. 4. Вып. 1 Тула: ТулГУ, 1988. С. 107-111.

3. Новиков И.Я. Асимптотика корней полиномов бернштейна используемых в построении модифицированных всплесков Добеши// Матем. Заметки. Т. 71. Вып. 2, 2002. С. 239-253.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭКСПЕРТИЗА ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОТЧЕТОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ВРЕМЕННОГО РЯДА[1]

Мельников А.В., Родин В.А. (Воронеж)

1. Обозначим последовательность показателей отчетности ста-

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00614-а.

бильно работающего предприятия (например: НБ – налогооблагаемая база для налога на прибыль [1], расходы по определенной статье и др.) через $(y_1, ..., y_n)$. В докладе предлагается рассматривать эту последовательность как последовательность уровней временного ряда. Планируется информацию, которую содержит данная последовательность использовать в двух направлениях. 1) С помощью моделирования уравнения тренда, с проверкой на его состоятельность, определить возможное уклонение (занижение, ниже определенного порога) от значения по тренду с последним, проверяемым показателем -y_{n+1}. 2) Провести статистическую проверку гипотезы об отсутствии тренда. Предполагается, что сложное, давно и стабильно работающее предприятие всегда имеет вероятностный тренд и стабильный “коридор” случайных отклонений. Поэтому подтверждение гипотезы об отсутствии тренда может косвенно свидетельствовать о нарушении правильности отчетов или даже существовании схемы хищений.

2. Первую задачу предлагается исследовать компьютерными методами. С помощью системы STATISTICA 6 строится тренд, проверяется состоятельность модели тренда и визуально, на графике можно увидеть и оценить возможное занижение исследуемого показателя. Вторая задача потребовала написания авторских, новых программ по автоматизированной проверки нулевой гипотезы об отсутствии тренда с помощью двух разных методов: “ метод медианы и метод Фостера-Стюарта ”.

Литература

1. Ясиненко Е.А. Применение пакета STATISTICA 6 для исследования налоговой отчетности предприятий на основе эмпирического материла // Евразийский международный научно-аналитический журнал. Современная экономика. №11 (11). 2010. – с.134-143.

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДУНКЛА[1]

Мещеряков В.В. (Коломна)
metcherykov@mail.ru

В работе [1] вводится семейство операторов вида

$$\tilde{\nabla} = \frac{d}{dx} - (\ln \omega(x))' \, \hat{s},$$

обобщающих классические операторы Дункла на прямой (см. [2] и цитированную там литературу). Здесь $x \in \mathbb{R}$, $\hat{s}$ — оператор отражения ($\hat{s}[f](x) = f(-x)$), ω — положительная чётная функция, выражающаяся через многочлены Бурчналла-Чаунди.

Собственные функции оператора $\tilde{\nabla}$ описаны посредством функций Sh и Ch (см. [3]), обобщающих гиперболические функции.

Определение. *Операторы* $\tilde{\nabla}$ *и* $\frac{d}{dx}$ *называются калибровочно эквивалентными (сплетёнными), если существует линейный оператор* V *(не обязательно обратимый), удовлетворяющий соотношению* $\tilde{\nabla} \circ V = V \circ \frac{d}{dx}$.

В ходе изучения свойств оператора $\tilde{\nabla}$ найдено представление сплетающего оператора V в виде ряда, члены которого выражаются через функцию ω. Пользуясь тем, что функция $V(e^x)$ является собственной для оператора $\tilde{\nabla}$, вычислены асимптотики функций Sh и Ch.

Литература

[1] *Хэкало С. П.* Дифференциально-разностные аналоги операторов Дункла на прямой, ассоциированные с многочленами Бурчналла-Чаунди. Препринт ПОМИ РАН, 1, 2013.

[2] *Берест Ю. Ю., Веселов А. П.* Принцип Гюйгенса и интегрируемость//УМН, №6, 1994, с. 8–78.

[3] *Хэкало С. П., Мещеряков В. В.* Семейство собственных функций операторов Дарбу-Дункла// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 29 июня–4 июля 2012 г. — М: МИАН, 2012. С. 175–177.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31507мол_а)

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ СЕМЕЙСТВУ БЕККЕРА B_1, ЕСЛИ ФУНКЦИОНАЛ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ ПОДЧИНЕН ОДНОЛИСТНЫМ

Микка В.П., Микка К.В., Пехтерева А.В. (Йошкар-Ола)
mikkav@marsu.ru

Обозначим через

$$S_{n;\Phi_p(\zeta)} =$$

$$= \left\{ f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots : \zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \prec \frac{\zeta}{(1-\zeta^p)^{2/p}} = \Phi_p(\zeta) \in S_p \right\}$$

и выясним вопрос о вложимости таких функций в семейство Беккера

$$B_1 = \left\{ f(\zeta) : \quad \left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leqslant \frac{1}{1-|\zeta|^2} \right\}.$$

Теорема 1. *Если $p \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$, то*

$$S_{n;\Phi_p(\zeta)} \subset B_1,$$

а при $p = 1$ и $n \geqslant 1$

$$S_{n;\Phi_1(\zeta)} \not\subset B_1.$$

В частности, при $p = 1$ экстремальные функции

$$f(\zeta) = \int\limits_0^\zeta \exp\left\{\frac{1}{n}\frac{\tau^n}{1-\tau^n}\right\} d\tau \notin B_1.$$

Таким образом, при $p = 1$ и $n \geqslant 1$ можем рассматривать вопрос о радиусе принадлежности $S_{n;\Phi_1(\zeta)}$ семейству B_1.

Теорема 2. *Значения радиусов*

$$r_{S_{n;\Phi_1(\zeta)}}[B_1] = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n^2+5}+n-1}{\sqrt{n^2+5}+n+1}} \cdot \sqrt{\frac{3n+2\sqrt{n^2+5}}{5n}}$$

являются точными из-за экстремальных функций

$$f(\zeta) = \int\limits_0^\zeta \exp\left\{\frac{1}{n}\frac{\tau^n}{1-\tau^n}\right\} d\tau,$$

порождающих $\psi_{r_0}(\zeta) = \frac{1}{r_0} f(r_0\zeta) \notin B_1$ *при* $r_0 > r_{S_{n;\Phi_1(\zeta)}}[B_1]$.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Мокейчев В.С. (Казань)
Valery.Mokeychev@ksu.ru

$\hat{u}$ — преобразование Фурье для медленно растущих обобщённых функций,$F(i\xi)$ — такая матричная (размерности n, n) функция, что $|F(i\xi)| \leqslant c_1(1+|\xi|)^{c_2}$ при некоторых c_j. Оператор $F(D) : (F(D)u)\hat{} = F(i\xi)\hat{u}$ называется псевдодифференциальным. *Какие предположения относительно линейного оператора* $Q(\lambda) \equiv F(D) + C(t,\lambda)$, *действующего из* $L^2 \equiv L^2(R^m)$ *в* L^2, *гарантируют существование собственных значений и характеристических чисел ?* Наибольшая трудность возникает тогда, когда оператор $C(t,\lambda)$ непрерывен. Причина этого — в отсутствии собственных значений у $F(D)$ в случае $det(F(i\xi) - \mu E) \not\equiv 0$ для каждого числа μ. При $n = 1, m \leqslant 3$, $F(D) = (\partial/\partial x_1)^2 + ... + (\partial/\partial x_m)^2$ ответ получен в [1]. Через 10 лет Maher перевёл её на английский язык и опубликовал под своим именем, что является плагиатом (2012:133,http://www.boundaryvalue-promblems.com/center/2012/1/133).

Теорема 1. *Пусть* $F(i\xi) = (F(i\xi))^*, C(t,\lambda)$ *— самосопряжённая матрица,* $C(t,\lambda) \equiv 0$ *вне ограниченного* $\Omega \subset R^m$, $C(t,\lambda)$ *— обратимая при* $t \in \Omega$, *при* $\mu \in J \subset R^1$ *выполняются*
1: матрица $F(i\xi) - \mu E$ *положительно определена,*
2: $|(F(i\xi)-\mu E)^{-1}| \in L^2$, $\int \left|(F(i\xi)-\mu E)^{-1} - (F(i\xi)-\mu_0 E)^{-1}\right|^2 d\xi \to 0$ *при* $J \ni \mu \to \mu_0 \in J$,
3: $\| C(t,\lambda) \| \left(\int\limits_{\Omega}(2\pi)^{-m} d\eta\right)^{1/2} \left(\int |(F(i\xi) - \mu E)^{-1}|^2 d\xi\right)^{1/2} < 1$ *хотя бы при одном* $\mu \in J$,
4: $\| (C(t,\lambda))^{-1} \|^{-1} \left(\inf\limits_{\Omega}\left|(C(t,\lambda))^{-1}\right|\right)^{-1} \left(\int\limits_{\Omega}(2\pi)^m d\eta\right)^{-1} \int \left|\int\limits_{\Omega} \exp(it\xi)dt\right|^2 (F(i\xi) - \mu E)^{-1} d\xi > 1$ *при некотором* $\mu \in J$.

Тогда оператор $Q(\lambda)$ *имеет хотя бы одно собственное значение* $\mu(\lambda)$. *Если* $< Q(\lambda)u, u >= 0$ *при каждом* $u \in L^2 :\| u \|= 1$ *и некотором* λ_0, *то* λ_0 *— характеристическое число для* $Q(\lambda)$.

Литература

Мокейчев В.С. Проблема собственных значений во всём пространстве для уравнений с разрывными коэффициентами// Известия вузов.Математика, 2002.-№ 6.- с.45-49.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

Нахушева З.А. (Нальчик)
Vnesh_ svyaz@niipma.ru

В односвязной области Ω плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, ограниченной кривой Ляпунова $\sigma \subset \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ с концами в точках $A : z = 0$, $B : z = r$ и отрезками $AC : 0 \leqslant x = -y \leqslant r/2$, $BC : r/2 \leqslant x = y + r \geqslant r/2$ рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$\mathrm{sign} y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Через Ω^+ и Ω^- обозначим подобласти смешанной области Ω в верхней $\mathrm{Im} z > 0$ и нижней $\mathrm{Im} z < 0$ полуплоскостях, а через $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Под решением уравнения (1) в области Ω будем понимать любую действительную функцию $u[x] = u(x, y)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, представимую в виде

$$u[z] = \begin{cases} \mathrm{Re} f(z), & z \in \Omega^+, \\ u[x+y] - u[\Theta_0(x+y)] + u[\Theta_0(x-y)], & z \in \Omega^-, \end{cases}$$

где $f(z)$ – аналитическая в области Ω^+ функция комплексной переменной z, $\Theta_0(\xi) = (1-i)\xi/2$ – точка пересечения характеристик $x + y = 0$, $x - y = \xi \in]0, r[$ волнового уравнения.

Пусть $L^{\mu,\varepsilon}[0, r]$ – пространство функций $\Phi(x)$ с конечной нормой, определяемой формулой $\|\Phi(x)\|_{\mu,\varepsilon} = \int\limits_0^r x^\mu |\log x|^\varepsilon |\Phi(x)| dx$; D^μ_{0x} – оператор Римана-Лиувилля; $E^{\alpha,\beta}_{0x} = x^{-\alpha-\beta} D^{-\alpha}_{0x} t^\beta$ – оператор Эрдейи-Кобера, который действует на функцию $\Phi(x) \in L^{\beta,0}[0, r]$ следующим образом:

$$E^{\alpha,\beta}_{0x} \Phi(t) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{t^\beta \Phi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \ \alpha > 0.$$

Задача E. Найти решение $u[z] = u(x, y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее внутреннекраевым условиям

$$u[z] = \varphi(z), \quad \forall\ z \in \sigma,$$

$$E_{0x}^{\alpha,\beta}\frac{d}{dx}u[\Theta_0(x)] = \lambda x^\gamma u[x] + \psi(x), \quad 0 < x < r,$$

здесь $\alpha > 0$, β, γ – заданные числа, λ – спектральный параметр, $\varphi(z)$ и $\psi(x)$ – заданные, непрерывные на кривой σ и на сегменте $[0, r]$ функции, соответственно.

Задача E примыкает к задаче Бицадзе-Самарского для уравнения эллиптического типа [1] и к задаче А.А. Дезина для уравнений смешанного типа [2] в том смысле, что значения $u[\Theta_0(x)]$ искомого решения $u[z]$ на части AC границы $\partial\Omega$ смешанной области повторяются во внутренних точках $z = x \in]0, r]$ области Ω.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть:* $0 < \alpha = -\beta - \gamma < 1$, $\lambda \leqslant 0$, $\psi(x) \equiv 0$. *Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) решения* $u[z]$ *задачи E в* $\overline{\Omega}^+$ *достигается только на кривой* σ *с концами в точках* $z = 0$, $z = r$.

Теорема 2. *Пусть:* $0 < \alpha = -\beta - \gamma < 1$, $\lambda \leqslant 0$. *Тогда задача E не может иметь более одного решения.*

Существование решения поставленной задачи доказывается методом интегральных уравнений.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. *Нахушева З.А.* Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1199-1203.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Небольсина М.Н., Салим Бадран (Воронеж)

marinanebolsina@yandex.ru

На полуоси $t \in [0, \infty)$ будем рассматривать гипервесовые пространства $\mathfrak{C}_{\rho_+}$ и $\mathfrak{C}_{\rho_-}$ непрерывных функций $f(t)$, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_+(t)}\right|, \quad \rho_+ \in \Phi_m^+;$$

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_-}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_-(t)}\right|, \quad \rho_- \in \Phi_m^-.$$

Функции $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}(0)$ удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Известно, что $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ – банаховы пространства.

Рассмотрим операторы $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ заданные дифференциальными выражениями

$$l_+\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad l_-\varphi(t) = -\frac{d\varphi(x)}{dt} \tag{1}$$

и областями определения:

$D(\mathfrak{D}_+)$ множество значений оператора $J_+\varphi = \int\limits_0^t \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

$D(\mathfrak{D}_-)$ множество значений оператора $J_-\varphi = \int\limits_t^\infty \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_-}$.

Рассмотрим задачу нахождения функции $u(x)$, $x \in (0, \infty)$ имеющей все производные порядка $m\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $m = 0, 1, ..., n$ и, удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathfrak{D}_\pm^{m\gamma} u(x) = f(x), \qquad a_n \neq 0. \tag{2}$$

где $f \in \mathfrak{C}_{\rho_\pm}$.

Теорема 1. *Задача (2) равномерно корректно разрешима в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ соответственно. Ее решение имеет вид*

$$u(x) = \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{n} R^{k_i}(\alpha_i, \mathfrak{D}_\pm^\gamma) f(x), \tag{3}$$

и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\rho_\pm} \leqslant \frac{M}{m^\gamma \prod_{i=1}^n (Re\alpha_i + m)^{k_i}} \|f\|_{\rho_\pm}, \tag{4}$$

где α_i-корни многочлена $P_n(\alpha) = \sum_{m=0}^n a_m \alpha^m$, k_i-их кратности, m-символ веса ρ_+ или ρ_- соответственно.

Заметим, что уравнение (2) в случае производных Капутто рассматривается в [1] с.222, когда $f(x)$ преобразуема по Лапласу, при этом приводится представление решения

$$u(x) = \int_0^x G(x-s) f(s) ds, \tag{5}$$

где $G(s)$-соответствующая функция Грина.

Таким образом, оценка (4) показывает ограниченность интегрального оператора (5) в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

Литература

*Учайкин В.В.*Методы дробных производных// Ульяновск, Изд. "Логос 2002. 512 с.

*Бабенко Ю.И.*Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена // СПб.: НПО "Профессионал 2009. 584 с.

НЕРАВЕНСТВО ТИПА РЕЛЕЙ-ФАБЕР-КРАХА ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Немченко М.Ю., Сураган Д.

suragan@list.ru

В этой работе мы докажем неравенство Релей - Фабер - Краха для Лапласиана со специальным граничным условием нелокального типа для любой пространственной размерности.

Рассмотрим спектральную задачу на собственные значения Лапласиана в ограниченной области Ω с граничным условием $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geqslant 2, \qquad 1$$

$$-\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) ds_y - \int\limits_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} ds_y = 0,\ x \in \partial\Omega, \quad 2$$

где

$$\varepsilon_d(x-y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} ln|x-y|, & d=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_d}|x-y|^{2-d}, & d \geqslant 3 \end{cases}$$

фундаментальное решение оператора Лапласа, то есть

$$-\Delta\varepsilon_d(x-y) = \delta(x-y)$$

в R^d, где δ - дельта функция, $|x-y| = \left[\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k-y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ - расстояние между точками $x = (x_1, ..., x_d)$ и $y = (y_1, ..., y_d)$ в d-мерном Евклидовом пространстве R^d, $\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$-площадь единичной сферы в R^d и Г-гамма функция.

Граничная задача (1)-(2) является самосопряженной (см. [1]). Следовательно, собственные значения спектральной задачи (1)-(2) дискретные и вещественнозначные. Обозначим минимальное собственное значение спектральной задачи (1)-(2) через λ_1^{NP}. Для спектральной задачи (1)-(2) получим следующий аналог неравенства Релей - Фабер - Краха:

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset R^d, d \geqslant 2$ *открытая ограниченная область с границей* $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ *и* $\Omega^{ball} \subset R^d$ *– шар одинаковой меры с* Ω, *то есть* $|\Omega^{ball}| = |\Omega|$, *тогда*

$$\lambda_1^{NP}(\Omega^{ball}) \leqslant \lambda_1^{NP}(\Omega). \qquad 3$$

Литература

1. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.,* К спектральным вопросам объемного потенциала. Доклады академии наук России, 2009, Т. 428(4), с.16-19.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ СИСТЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Нестеров А.В. (Обнинск, Москва)

andrenesterov@yandex.ru

Строится формальное асимптотическое разложение (ФАР) решения начальной задачи для сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений, содержащей быстрые и медленные переменные, в критическом случае [1]

$$\begin{cases} \epsilon^2 (u_t + d_1 u_{xx}) &= -au + bv + \epsilon^2 c_1 w, \\ \epsilon^2 (v_t + d_2 v_{xx}) &= \quad au - bv + \epsilon^2 c_2 w, \\ w_t + d_3 w_{xx} &= \quad a_3 u + b_3 v + c_3 w, \end{cases}$$

$-\infty < x < \infty, 0 < t < T,$

$u(x,0) = p_1\omega(x/\epsilon),\ v(x,0) = p_2\omega(x/\epsilon)\ w(x,0) = p_3\omega(x/\epsilon).$

Здесь $\epsilon > 0$ - малый параметр, $d_i, a, b, a_3, b_3, c_i, p_i$- константы, ($a, b$ -положительные), $\omega(z)$ - гладкая финитная функция.

ФАР решения схожей задачи без медленной переменной w строилось в работе [2]. Наличие медленной переменной w приводит к изменению вида и алгоритма построения ФАР, которое имеет вид суммы регулярного решения, погранфункций, функций всплеска и функций внутреннего переходного слоя. Функции всплеска и внутреннего слоя отличны от нуля в окрестности некоторй линии $l = \{x = Vt\}$, и описываются параболическим и обыкновенным уравнением соответственно.

Литература

Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978, 262 с.

Нестеров А.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений с малой нелинейностью в критическом случае. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012, т.52, №7, с.1267-1276.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК К ОДНОМУ НЕЛИНЕЙНОМУ СИНГУЛЯРНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ С ЯДРОМ КОШИ

Нурмагомедов А.М. (Махачкала)

Artsolav@mail.ru

Рассмотрим НСИУ вида

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f[\tau; u(\tau)]}{\tau - t} d\tau \tag{1}$$

где Γ - единичная окружность $|\tau| = 1$.

Для линейного сингулярного интегрального оператора $Au = \frac{1}{\pi} \oint_{\Gamma} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t}$ имеет место равенство $Re(Au, u) = 0$, т.е. оператор А является положительным.

Обозначим $Fu = f[t; u(t)]$ и перепишем уравнение (1) в виде: $u = A(Fu)$.

Очевидно, для кусочно-аналитической на плоскости функции

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma} \frac{Fu(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

имеют место формулы Племеля-Сохоцкого:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = i(Fu)(t), \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = u(t),$$

с учетом которых уравнение (1) сводится к следующей краевой задаче

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = iF[\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] \tag{2}$$

Теорема. *Пусть функция* $f(t,z)$ *удовлетворяет известным условиям Каратеодори и неравенству*

$$Re[if(t,z)\bar{z}] \geqslant m\,|z|^{1+\alpha} + |g(t)|\,|z| - N, \qquad (3)$$

где $\alpha > 1,\ m > 0$.

Тогда при $p = 1+\alpha$ *и* $g(t) \in L_q (q = 1+\alpha^{-1})$ *уравнение (1) имеет решение в* L_p.

Доказательство основано на том, что скалярное произведение в L_2

$$(\Phi^+(t) - \Phi^-(t), \overline{\Phi^+(t)} + \overline{\Phi^-(t)}) = \left\|\Phi^+(t)\right\|^2 - \left|\Phi^-(t)\right\|^2.$$

В равенстве (2) перенесем левую часть вправо и полученный оператор обозначим через $\Psi(\Phi^+,\Phi^-)$. По условиям теоремы этот оператор коэрцитивен в L_p как по Φ^+ , так и по Φ^- (а также и по u) . В таком случае при каждом фиксированном целом n существует многочлен вида $P_n(t) = [\Phi^+]_n + [\Phi^-]_n$, удовлетворяющий тождеству $[\Psi(P_n(t))]_n = 0$, причем $[\Phi^\pm]_n$ равномерно ограничены в L_2 . Отсюда следует равномерная ограниченность многочленов $[F(\Phi^+ + \Phi^-)]_n^\pm$ в L_2 . В операторе $\Psi(\Phi_n^+,\Phi_m^-) = \Psi_n^+ + \Psi_n^-$ фиксируем функцию Φ_m^- и найдём слабый предел оператора $\Psi(\Phi_n^+,\Phi_m^-)$ при $n \to \infty$. Этот предел имеет вид $\Psi^+(\Phi^+,\Phi_m^-)$. Переходя в последнем к пределу по m, получаем функцию $\Psi^+(\Phi^+,\Phi^-)$. Аналогичным путём получаем функцию $\Psi^-(\Phi^+,\Phi^-)$.Таким образом, доказано, что слабые пределы $\Phi^\pm(t)$ соответствующих многочленов $\Phi_n^\pm(t) = [\Phi^\pm(t)]_n$ являются решениями задачи (2). Отсюда следует, что $u = \Phi^=(t) + \Phi^-(t)$ является решением уравнения (1).

Замечание 1. *В теореме не затронут вопрос об единственности решения. Но при требовании строгой монотонности функций* f *по* z *почти при каждом* t *, единственность решения следует непосредственно из самого уравнения (1).)*

Замечание 2. *Утверждение, подобное теореме, можно получить, если заменить условие (3) некоторым ограничением справа, например:*

$$|f(t,z)| \leqslant M\,|z|^\alpha + |g(t)|\,,$$

где $0 \leqslant \alpha < 1, \quad g(t) \in L_2$.

Литература

Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977 - 360 с..

Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, -588 с.

Магомедов Г.М. Нелокальная теорема о неявной функции и её применение к нелинейному интегральному уравнению. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 5, с. 1056-1058.

Аржанов Г.В. О нелинейной краевой задаче типа задачи Римана. Докл. АН СССР,1960, т. 132, № 6, с.1227-1230.

ПОЛНЫЙ РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Огарков В.Б., Юдин Р.Л., Бухтоярова К.Е. (Воронеж)

Рассмотрим плоское напряженное состояние упругого цилиндра[1]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \tag{1}$$

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0; \tag{2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_\theta]; \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_r] \tag{3}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \tag{4}$$

$$r\frac{d\sigma_\theta}{dr} - r\mu\frac{d\sigma_r}{dx} + (1+\mu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0 \tag{5}$$

Сделаем замену переменной:

$$r = e^x; dr = e^x dx; x = lnr \tag{6}$$

$$\frac{d\sigma_r}{dx} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d\sigma_\theta}{dx} - \mu\frac{d\sigma_r}{dx} + (1+\mu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0 \tag{8}$$

Сделаем замену напряжений:

$$\sigma_r = A_1\bar{\sigma_r} + A_2\bar{\sigma_\theta}; \sigma_\theta = A_3\bar{\sigma_r} + A_4\bar{\sigma_\theta} \tag{9}$$

$$A_1\frac{d\bar{\sigma_r}}{dx} + A_2\frac{d\bar{\sigma_\theta}}{dx} + (A_1 - A_3)\bar{\sigma_r} + (A_2 - A_4)\bar{\sigma_\theta} = 0 \tag{10}$$

$$A_3\frac{d\bar{\sigma_r}}{dx} + A_4\frac{d\bar{\sigma_\theta}}{dx} + \mu[A_1\frac{d\bar{\sigma_r}}{dx} + A_2\frac{d\bar{\sigma_r}}{dx}]+$$
$$+(1+\mu[(A_3 - A_1)\bar{\sigma_r} + (A_4 - A_2)\bar{\sigma_\theta}] = 0 \tag{11}$$

Из предыдущих соотношений получи:

$$\frac{d\bar{\sigma_r}}{dx} = \frac{(A_1 + A_3)}{(A_4A_1 - A_3A_2)}[(A_1 - A_3)\bar{\sigma_r} + (A_2 - A_4)\bar{\sigma_\theta}] \tag{12}$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dx} = -\frac{(A_2 + A_4)}{(A_4A_1 - A_3A_2)}[(A_1 - A_3)\bar{\sigma}_r + (A_2 - A_4)\bar{\sigma}_\Theta] \tag{13}$$

$$\frac{dx}{d\bar{\sigma}_r} = -\frac{(A_4A_1 - A_3A_2)}{(A_2 + A_4)}\frac{1}{[(A_1 - A_3)\bar{\sigma}_r + (A_2 - A_4)\bar{\sigma}_\Theta]} \tag{14}$$

$$\frac{dx}{d\bar{\sigma}_\Theta} = \frac{(A_4A_1 - A_3A_2)}{(A_1 + A_3)}\frac{1}{[(A_1 - A_3)\bar{\sigma}_r + (A_2 - A_4)\bar{\sigma}_\Theta]} \tag{15}$$

Выполним следующие равенства:

$$A_1 - A_3 = A_2 - A_4; \quad \frac{1}{(A_1 + A_3)} = -\frac{1}{A_2 + A_4} \tag{16}$$

$$A_2 + A_4 = -A_1 - A_3; \quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \tag{17}$$

$$A_2 + A_3 - A_1 - A_4 = 0; \quad A_2 + A_3 = -A_1 - A_4 \tag{18}$$

$$-A_1 - A_4 = A_1 + A_4; \quad 2(A_1 + A_4) = 0; \quad A_1 = -A_4 \tag{19}$$

$$A_2 = -A_3 \tag{20}$$

Из соотношений (14) и (15) получим:

$$x = -(A_3 - A_4)\ln[-(A_3 + A_4)(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\Theta)] = 0 \tag{21}$$

Используя формулу (6):

$$\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\Theta = -\frac{r^{1/(A_4 - A_3)}}{(A_3 + A_4)} \tag{22}$$

$$(A_1 + A_3)\sigma_r + (A_2 + A_4)\sigma_\Theta = -\frac{r^{1/(A_4 - A_3)}}{(A_3 + A_4)} \tag{23}$$

Энегетическое условие прочности в случае плоского напряженного состояния имеет такой вид [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\sigma_\Theta - \sigma_r)^2 + \sigma_\Theta^2 + \sigma_r^2]} = \frac{[\sigma]}{n} \tag{24}$$

$$\sigma_r^2 + \sigma_\Theta^2 + \sigma_r^2\sigma_\Theta^2 = \frac{[\sigma]^2}{n^2} \tag{25}$$

Однозначное радиальное перемещение следует найти по формуле:

$$u(r) = \frac{1}{2}[r\varepsilon_\Theta + \int \varepsilon_r dr] \tag{26}$$

Литература

1. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст]: учеб. для вузов / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М., 1995 - 568 с.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Павлюк Т.В. (Обнинск)

pavlyuk.t.v@gmail.com

Строится асимптотическое разложение (АР) решения задачи Коши для гиперболической системы уравнений в частных производных с двумя пространственными переменными:

$$\varepsilon^2(U_t + D_1 U_{x_1} + D_2 U_{x_2}) = AU + \varepsilon^2 F(U), \tag{1}$$

$$U(x_1, x_2, 0) = U^0(x_1, x_2, \varepsilon) \tag{2}$$

где $x_1, x_2, t \subset \Omega = \{0 < t < \infty, |x_1| < \infty, |x_2| < \infty\}$, $U(x_1, x_2, t) = \{u_i(x_1, x_2, t)\}$, $(i = \overline{1, n})$ – вектор решений, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр.

Асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) строится в виде суммы функции всплеска $S(\zeta, \eta, t)$, сосредоточенной в окрестности некоторой линии $l = \{x_1 = V_1 t; x_2 = V_2 t\}$ и пограничной функции $P(\xi, \nu, t)$, сосредоточенной в окрестности границы $t = 0$:

$$U(x_1, x_2, t, \varepsilon) = S_N(\zeta, \eta, t) + P_N(\xi, \nu, \tau) + RU =$$
$$= \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\zeta, \eta, t) + p_i(\xi, \nu, \tau)) + R = U_N + RU$$

где U_N – построенное АР решения с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$, R – остаточный член.

В данной работе построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений с двумя пространственными переменными. Алгоритм обощен на случай большего числа пространственных переменных. Особенностью задачи является наличие зоны всплеска, в окрестности которой асимптотика решения описывается параболическим уравнением.

В работе приведены оценки функций всплеска и пограничных функций, сформулирована и доказана теорема об оценке остаточного члена.

Литература

Нестеров А.В., Шулико О.В. Асимптотика решения сингулярно возмущеннной системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с малой нелинейностью в критическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007, Т. 47, №3, С. 438-444.

Нестеров А.В., Шулико О.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010, Т.50,№2, С.268-275.

Нестеров А.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений с малой нелинейностью в критическом случае. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012, т.52, №7, с.1267-1276.

Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978, 262 с.

*Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.*Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990;

ГЕОМЕТРИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ МАКСВЕЛЛА

Паринов М.А. (Иваново)

mihailparinov@mail.ru

Предложенный Ф. Клейном групповой принцип оснований геометрии [1] широко используется для построения геометрий, соответствующих различным группам преобразований. Проведенная классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре [2] естественно приводит к вопросу о геометрических свойствах этих пространств. Прежде всего, важно знать, какие геометрические объекты (в частности, тензорные поля) инвариантны относительно группы симметрий.

Пространство Максвелла есть тройка (M, g, F), где M — гладкое четырехмерное многообразие, $g = g_{ij}\, dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика лоренцевой сигнатуры, а $F = \frac{1}{2} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура на M. Его *группа симметрий* $G_S = G_g \cap G_F$ является подгруппой группы Пуанкаре G_g.

Тензорное поле $T^{(i)}_{(j)}$) *инвариантно относительно группы* G_S, если производная Ли $L_\xi T^{(i)}_{(j)} = 0$ для каждого базисного вектора ξ алгебры Ли $\mathcal{L}_S$, соответствующей группе G_S. Прежде всего, ясно, что чем выше размерность группы G_S, тем меньше набор инвариантных геометрических объектов. В случае тривиальной группы $G_S = \{id_M\}$ каждый тензор является инвариантным геометрическим объектом. В случае произвольной группы $G_S \subset G_g$ инвариантными объектами будут g_{ij} и F_{ij}, задающие пространство Максвелла, а также g^{ij}, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, дискриминантный тензор ε^{ijkl}, задающий 4-объём, и комбинации этих тензоров, получаемые с помощью алгебраических операций: $F_i^{\cdot j} = F_{ik} g^{kj}$, $F^{ij} = F_{kl} g^{ki} g^{lj}$, $F_{ij} F^{ij}$, $\varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl}$ и другие.

Отметим, что, например, для однородных пространств Максвелла не существует инвариантных 1-форм и 3-форм. Однако, в случае нётеровых пространсв Максвелла потенциал A_i $(F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i)$ инвариантен относительно G_S по определению, и потенциальная структура $A = A_i\, dx^i$ будет инвариантной.

Литература

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлагенская программа»). – В сб.: «Об основаниях геометрии». – М. : Гостехиздат, 1956. – С. 399–434.

2. *Паринов М. А.* Симметричные пространства Максвелла и уравнения Лоренца. – Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2013. – 420 с.

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ И ПРОСТРАНСТВА ТИПА ЛИПШИЦА

Пелешенко Б.И., Семиренко Т.Н. (Днепропетровск)

peleshdsau@mail.ru, semirenkot@mail.ru

Пусть символами $L^1(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R})$ обозначаются соответственно пространства интегрируемых по Лебегу и непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Через $\hat{f}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, которое является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией.

Для $\alpha \in (0; \infty)$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ разность порядка α функции f определяется формулой $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + kt)$, где $\binom{\alpha}{k} =$

$\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$. В частности, когда α - целое положительное число, то $\binom{\alpha}{\alpha+j}=0$ для $j\in\mathbb{N}$ и $\Delta_t^\alpha f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\alpha}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x+kt)$.

Пусть $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ - непрерывная неубывающая функция такая, что $\omega(0)=0$, $t^{-\alpha}\omega(t)$ не возрастает, существует такое $C(\alpha)$, зависящее только от α, что для всякого $\delta>0$ выполняется неравенство $\omega(2\delta)\leqslant C(\alpha)\omega(\delta)$.

Через $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ обозначается класс таких непрерывных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, которые удовлетворяют для всякого $x\in\mathbb{R}$ и $t>0$ неравенству $|\Delta_t^\alpha f(x)|\leqslant M_0\omega(t)$, где M_0 зависит только от функции f и не зависит от аргумента x и t.

Класс $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ состоит из функций $f\in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, для каждой из которых выполняется условие $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{|\Delta_t^\alpha f(x)|}{\omega(t)}=0$ равномерно по всем $x\in\mathbb{R}$.

В работе Ф.Морица получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f\in L^1(\mathbb{R})$, для принадлежности f одному из классов Липшица $H^\alpha(\mathbb{R})$, $h^\alpha(\mathbb{R})$. Соответствующие условия принадлежности $f\in L^1(\mathbb{R})$ классам $H^\omega(\mathbb{R})$ или $h^\omega(\mathbb{R})$, определяемых с помощью разностей первого порядка и модулей непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющих условию Бари-Стечкина, получены в работе первого автора. В данной работе установлены условия принадлежности $f\in L^1(\mathbb{R})$ классам $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, определяемым с помощью разностей порядка α и функций $\omega(t)$ типа модулей непрерывности α-го порядка.

Сформулируем один из основных полученных результатов.

Теорема. *Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такая, что $f\in L^1\cap C(\mathbb{R})$, $\alpha>0$ и $\alpha\neq 2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, функция $\omega(t)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и существует такая постоянная $M_1>0$, что для всякого $t>0$*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(u)}{u}du\leqslant M_1\omega(t). \tag{1}$$

Если для любого $y>0$

$$\int\limits_{|t|<y}|t|^\alpha|\hat{f}(t)|dt=O\left(y^\alpha\omega\left(y^{-1}\right)\right), \tag{2}$$

то $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Обратно, предположим, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $\hat{f}$ *принадлежат* $L^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и условию (1). Если* $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ *и* $\hat{f}(t) \geqslant 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$, *то тогда (2) выполняется.*

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ БАКАЛАВРАМ-АВТОМОБИЛИСТАМ

Пенькина Л.А., Ермаков В.В. (Москва)

vikvve@rambler.ru

В настоящее время технические университеты переходят на двухуровневую подготовку инженеров: бакалавриат и магистратура [1]. Фундаментальные общетеоретические дисциплины, к которым относится основной курс математики, остаются в рамках бакалавриата, сроки обучения в котором на 1 год меньше, чем ранее были при подготовке специалистов. Это вызвало значительное сокращение часов, отводимых на математику. Так, например, автомобилистам курс математики читается на 1 семестр меньше. Сократить курс математики механически, выбросив из него отдельные разделы, нельзя, так как последующие знания опираются на предыдущие. Из-за сокращения аудиторных часов лектору приходится жертвовать глубиной изложения, на практических занятиях рассматриваются только простейшие задачи, тем не менее курс оказывается перегруженным и с трудом осваивается студентами. Благая мысль, по примеру Запада, значительную часть времени отвести на самостоятельную работу студента (СРС) не подкреплена материально. СРС, чтобы она не стала профанацией, нужно систематически контролировать, что в западных колледжах делают преподаватели-тьюторы. У нас такой категории преподавателей нет. Лекторы и ассистенты, за которыми закреплено 100 и более студентов осуществлять постоянный контроль СРС не могут физически. Сравнение программ для бакалавром инженерных направлений показывает, что при общем равенстве кредитов на Западе в отличие от России на математику, физику, специальные дисциплины отводится значительно больше времени, так как не преподаются (и, соответственно, не дают кредитов) гуманитарные дисциплины, иностранный язык, физкультура - хотя созданы условия для таких занятий сверх программы.

Литература

1. *Тихомиров В.М.* Заметки о математическом образовании // О математике: Проблемы преподавания. - М.: Знак, 2012. - С. 13-18.

ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ОПАСНЫХ ОСАДКОВ И СИЛЬНОГО ВЕТРА ПО ТЕРРИТОРИИ ЦЕНТРАЛЬНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА В МАРТЕ 2013 ГОДА

Переходцева Э.В.

Метеорологи и синоптики Федеральных Округов Европейской части России (за исключением Южного Федерального Округа) относят весенний месяц март к холодному полугодию. Действительно, несмотря на первые признаки весны и некоторое климатическое повышение среднесуточной температуры обычно еще в первые три декады марта зачастую идет снег и отмечается наличие снежного покрова. Однако в 2013 году во второй половине марта месяца по территории ЦФО, а особенно по территории Центрально-Черноземных Областей наблюдались очень сильные снегопады и метели, которые принесли значительные неприятности населению Курской. Белгородской, Воронежской областей и нанесли большой экономический ущерб.

Для прогноза опасных осадков холодного периода (твердой и жидкой фазы) и сильного ветра нами была использована адаптированная гидродинамико-статистическая модель прогноза летних сильных осадков и ветра, описанная, в частности, в [1]. Ранее для прогноза сильных осадков холодного периода была успешно протестирована гидродинамико-статистическая модель прогноза таких осадков для территории Московской и Мурманской областей с использованием в этой модели выходных данных полусферной гидродинамической модели атмосферы [2]. В настоящее время в Гидрометцентре России функционирует новая региональная оперативная гидродинамическая модель краткосрочного прогноза погоды. В докладе на ВЗМШ-2012 было дано описание этой модели и представлены примеры и результаты прогноза сильных летних осадков и ветра по территории 17 областей ЦФО. Методами статистической классификации из множества потенциальных предикторов (n=38 параметров атмосферы) нами были отобраны наиболее информативные и слабо зависимые параметры (предикторы) и построены статистические решающие правила диагноза и прогноза этих явлений. Эти правила зависели от значений давления, приземной температуры и влажности, скорости и сдвига ветра в средней тропосфере, гидродинамической неустойчивости, вертикального и горизонтального градиента температуры, значения температуры на уровне максимальных ветров.

В докладе приводятся примеры прогноза необычайно сильных в третьей декаде марта снегопадов с заблаговременностью 12-36ч, зачастую сопровождаемых сильным ветром. В Курске (при ветре с порывами до 19м/.с) 20.03.13 и 23.03.13 выпало за сутки 12 и 23 мм, а (при меньшем ветре) 23.03.13 выпало 37мм осадков. Чуть менее сильные, но тоже опасные осадки в виде мощных снегопадов выпали в Воронеже 12 и 23 марта (19-21мм). До Рязани и Москвы циклон принес сильные снегопады 23марта и 24 марта, что было успешно предсказано нашим гидродинамико-статистическим прогнозом.. Это свидетельствует об устойчивости разработанной гидродинамико-статистической модели сильных осадков и ветра и возможности ее применения к опасным явлениям погоды холодного полугодия.

Литература

1. Переходцева Э.В. Модель численного прогноза максимальной скорости ветра (включая шквалы и смерчи) для территории Поволжья. Современные проблемы теории функций и их приложения. 16-ая Саратовская зимняя школа, 2012г, с 132.

2. Терентьева Е.С., Переходцева Э.В. О результатах испытания автоматизированного гидродинамико-статистического метода прогноза дневных осадков в градации ОЯ (опасных явлений)в холодный период года на территории Кольского полуострова с заблаговременностью 12 и 24ч. Информационный сборник N28, 2000, с.77-83.

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ[1]

Петросян Г.Г. (Воронеж)

garikpetrosyan@yandex.ru

Пусть E - банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0, T]$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00328 и 12-01-00392.

точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geqslant 1$ и функции $c : [0,T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{h\to 0+} c(t_k + h),$$

$$c(t_k^-) = \lim_{h\to 0-} c(t_k + h),$$

для $1 \leqslant k \leqslant m$.

Мы рассматриваем задачу управляемости для системы, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)) + Bu(t), t \in [0,T] = I, \tag{1}$$

с начальным условием:

$$y(s) + g(y)(s) = \vartheta(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{2}$$

где $D^\alpha, 0 < \alpha < 1,$ — дробная производная Римана—Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $F : I \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний и $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предисторию функции до момента $t \in I$, т. е. $y_t(\theta) = y(t+\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0]$. Отображение $g : \mathcal{PC}((-\infty, T]; E) \to \mathcal{B}$ является непрерывним и преобразует каждое ограниченое подмножество пространства всех кусочно-непрерывных функций $\mathcal{PC}((-\infty, T]; E)$ в ограниченое подмножество пространства $\mathcal{B}$. Предпологается, что функция управления $u(\cdot) \in L^p(I, U), \quad p > 1/\alpha$, где U - гильбертово пространство управлений. Оператор $B : U \to E$ является ограниченым и линейным.

Будем полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, ..., m \tag{3}$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ - вполне непрерывные импульсные функции.

В докладе описываются условия, которые обеспечивают существование интегрального решения задачи (1)-(3), удовлетворяющего соотношению $y(T) = x_1$, где $x_1 \in E$ - заданная точка.

Мультиотображение F удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ Мультифункция $F(\cdot, \vartheta, \varsigma) : I \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение для всех $(\vartheta, \varsigma) \in \mathcal{B} \times E$;

$(F2)$ Мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$ - п.н.с. для п. в. $t \in I$;

$(F3)$ Существует функция $w \in L^p(I, E), \quad p > \frac{1}{\alpha}$, такая, что:

$$\|F(t, \vartheta, \varsigma)\| := sup\{\|f\|_E : f \in F(t, \vartheta, \varsigma)\} \leqslant$$

$$\leqslant w(t)(1 + |\vartheta|_{\mathcal{B}} + \|\varsigma\|_E) \quad \text{п. в.} \quad t \in I,$$

для всех $(\vartheta, \varsigma) \in \mathcal{B} \times E$;

$(F4)$ Существует функция $\mu \in L^p(I, E)$ такая, что для любых ограниченых множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi_E(F(t, \Omega, Q)) \leqslant \mu(t)(\psi(\Omega) + \chi_E(Q)), \text{п. в.} \quad t \in I,$$

где χ_E - мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \leqslant 0} \chi_E(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta), q \in \Omega\}$.

Наконец сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи управляемости, т. е. будем полагать, что линейный оператор управления $W : L^2(I, U) \to E$ следующего вида:

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-s)}(T-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds,$$

имеет обратный ограниченный оператор $W^{-1} : E \to L^2(I, U)/KerW$.

Литература

Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Speces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin - New-York, 2001.

ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ КАК ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)
anpokrovski@gmail.com

Письменная история человечества содержит огромный объём информации; объём исторической информации с каждым годом, с каждым веком растёт. Вследствие роста количества информации произошло разделение истории на несколько исторических наук (с общей хронологией), но объём информации продолжает расти. Для облегчения доступа к этой информации желательно поместить всю накопленную информацию в интернете (со свободным доступом для чтения). Несомненно, это потребует значительных затрат труда и времени; одному человеку это невозможно сделать. Кроме того, такая задача потребует некоторого расширения и уточнения состава исторической информации.

Целесообразно начинать создание единой системы исторической информации с древней истории, потому что имеющийся объём этой информации меньше, чем объёмы более поздних частей истории. Существуют различные версии некоторых исторических событий (в том числе и различные версии хронологии). В историческую информационную систему следует включать все версии каждого исторического события, в каждой стране, на каждом языке.

ПРИМЕР. Имеются 2 версии атомной бомбардировки японских городов Хиросима и Нагасаки в сентябре 1945 г. Первая версия – бомбардировка авиацией США (1945 – 1960е годы). Вторая версия (японская, с 1970-х г.г.) – атомная бомбардировка этих городов авиацией СССР. В США в школах используется только первая версия.

Известно великое научное открытие Никколо Маккиавели (1469 - 1526 г.) об универсальном механизме частичных фальсификаций истории властными лицами. Работы Н. Маккиавели издавались в западной Европе, начиная с 16-го века, по 3 - 4 раза каждый век. В России они были переведены на русский язык в начале 18-го века и потом издавались по 3-4 раза в 19-м и 20-м веках. Из результатов Н.Маккиавели вытекает, что частичные фальсификации истории, как общий закон управления народами, существовали в прошлом и неизбежны в любом обозримом будущем. История фальсификаций истории – это тоже неотъемлемая часть всеобщей истории! И все источники, содержащие факты фальсификации истории, следует также отнести к числу исторических документов.

Справедливости ради следует отметить, что ошибки в истории и географии бывали и не преднамеренными. Например, страну льдов ("ice land") теперь называют "Гренландией"("green land"); зелёный же остров в северной незамерзающей части Атлантического океана ныне называется "Исландия".

Особое место в исторических документах занимает хронология, используемая во всех исторических науках. Известно, что имелись различные версии старых календарей, в том числе несколько версий "Юлианского"календаря. Во всех странах во все времена считалось, что "чем древнее, тем почётнее". Поэтому начало отсчёта времени в более поздних версиях календарей иногда задавалось раньше, чем в предыдущих версиях, и часть исторических событий ("на бумаге") "переносились"в более ранние времена. Затем в конце 17-го века был создан и до сих пор используется "Григорианский"календарь с ещё более ранними датами некоторых событий. Для попыток восстановления подлинной хронологии в истории древнего мира и средних веков необходимо рассматривать все версии хронологии.

В истории нет ложных сообщений об астрономических событиях. Существовали лишь разные варианты календарей в разных местах Европы, Азии и Америки. Множество всех вариантов календарей с локализацией и временем существования каждого варианта будет необходимой частью исторической информационной системы.

Наряду с необходимостью рассматривать и сохранять все версии и варианты прошлых исторических событий в системе исторической информации, желательно рассмотреть и разные варианты гипотез будущего развития человечества, в том числе варианты возможной ядерной войны в будущем [Моисеев Н.Н., 1988, с. 73-75].

В исторической литературе, по-видимому, ещё не рассматривали последний ледниковый период как возможный результат ядерной войны тогдашнего человечества, с потерей цивилизации того века, но без полного уничтожения всех рас тогдашнего человечества. Генотипы людей сохранились, науки, культура, письменность – все исчезли!

Литература

Моисеев Н. Н. Экология человечества глазами математика: (Чел., природа и будущее цивилизации). М.: Мол. гвардия, 1988. - 254 с.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ПОЛУГРУППЫ[1]

Поляков Д.М. (Воронеж)
DmitryPolyakow@mail.ru

Пусть X — комплексное банахово пространство, $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Символом $\mathbb{J}$ обозначается один из промежутков $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}$.

Через $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций со значениями в X и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|$. Символами $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим замкнутые подпространства равномерно непрерывных и убывающих на бесконечности функций из C_b. В $C_b(\mathbb{J}, X)$ определена полугруппа (группа, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$) операторов $S : \mathbb{J} \to EndC_b$ сдвигов функций вида $(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), t, \tau \in \mathbb{J}$.

Определение 1. Функция $x \in C_b$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $S(u)x - x \in C_0(\mathbb{J}, X)$, для любого $u \in \mathbb{J}$.

Определение 2. Полугруппа операторов $T : \mathbb{R}_+ \to EndX$ называется медленно меняющейся на бесконечности в сильной операторной топологии, если

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t + t_0)x - T(t)x\| = 0,$$

для любого $t_0 > 0$ и любого вектора $x \in X$.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть спектр $\sigma(A)$ генератора A полугруппы T обладает свойством $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) \subset \{0\}$. Тогда полугруппа T является медленно меняющейся на бесконечности в сильной операторной топологии.*

Литература

1. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений, Мат. заметки, (**92**):5 (2012). — с. 643-661.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00378)

АНАЛИЗ ПЕРВОЙ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ КОНДУКТИВНО-ЛАМИНАРНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Попов М.И., Ряжских В.И. (Воронеж)

mihail_semilov@mail.ru

Рассматривается начально-краевая задача для нестационарного неоднородного бигармонического уравнения, описывающая термическую свободную конвекцию вязкой несжимаемой жидкости для кондуктивно-ламинарного режима в постановке первой тестовой задачи,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\frac{\partial^2\Phi(X,Y,\theta)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Phi(X,Y,\theta)}{\partial Y^2}\Big]=\frac{\partial^4\Phi(X,Y,\theta)}{\partial X^4}+$$

$$+2\frac{\partial^4\Phi(X,Y,\theta)}{\partial X^2\partial Y^2}+\frac{\partial^4\Phi(X,Y,\theta)}{\partial Y^4}-\frac{\partial T(X,\theta)}{\partial X},$$

$$T(X,\theta)=1-X+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\sin\left[(1-X)\,\pi p\right]\exp\left(-\frac{\pi^2p^2}{Pr}\theta\right),$$

$$\Phi(X,Y,0)=0,$$

$$\Phi(0,Y,\theta)=\Phi(1,Y,\theta)=\Phi(X,0,\theta)=\Phi(X,1,\theta)=0,$$

$$\frac{\partial\Phi(0,Y,\theta)}{\partial X}=\frac{\partial\Phi(1,Y,\theta)}{\partial X}=\frac{\partial\Phi(X,0,\theta)}{\partial Y}=\frac{\partial\Phi(X,1,\theta)}{\partial Y}=0,$$

где $T(X,\theta)$ – температура, $\Phi(X,Y,\theta)$ – функция тока, Pr – число Прандтля, θ, X, Y – текущие время и декартовы координаты, записанная для квадратной $[0,1]\times[0,1]$ каверны.

Двойным применением конечного интегрального синус преобразования Фурье [1] по пространственным переменным получено аналитическое решение в виде двойного ряда с представлением коэффициентов в интегральной форме

$$\Phi(X,Y,\theta)=4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\left[-\theta(\lambda_n^2+\mu_m^2)\right]}{\lambda_n^2+\mu_m^2}\int_0^{\theta}\Bigg\{\lambda_n\cos\lambda_nA_1(\mu_m,\theta)-$$

$$-\lambda_nA_2(\mu_m,\theta)+\mu_m\cos\mu_mB_1(\lambda_n,\theta)-\mu_mB_2(\lambda_n,\theta)+$$

$$+\mathcal{F}_Y\left[\mathcal{F}_X\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)\right]\Bigg\}\exp\left[\theta(\lambda_n^2+\mu_m^2)\right]d\theta\sin(\lambda_nX)\sin(\mu_mY).$$

Здесь $\lambda_n = \pi n$ и $\mu_m = \pi m$ – корни характеристических уравнений $\sin\lambda = 0$ и $\sin\mu = 0$, а $\mathcal{F}_Y\left[\mathcal{F}_X\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)\right]$ – изображение производной температурного поля.

Для коэффициентов $A_i(\mu_m, \theta), B_i(\lambda_n, \theta), i = 1, 2$ принята гипотеза асимптотического приближения к стационарному состоянию по экспоненциальному закону

$$A_i(\mu_m, \theta) = A_{im}\left[1 - \exp(-\mu_m^2\theta)\right], \quad A_{im} = const,$$

$$B_i(\lambda_n, \theta) = B_{im}\left[1 - \exp(-\lambda_n^2\theta)\right], \quad B_{im} = const, \quad i = 1, 2.$$

Постоянные A_{im}, B_{im} вычисляются из системы линейных уравнений, составленной по граничному условию на градиент функции. Полученный ряд быстро сходится. Достоверность принятой гипотезы подтверждается согласованностью результатов с численным решением данной задачи, найденным ранее [2].

Литература

1. *Sneddon I.* Fourier transforms / пер. с англ. Матвеева А. Н.: под ред. Рабиновича Ю. Л. М.: Издательство иностранной литературы, 1955. 668 с.

2. Fourth International Conference for Young Mathematics on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii. Book of Abstracts. - Donetsk, 2012. - P. 64.

ДУЭЛЬ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Посицельская Л.Н. (Москва)

posicelskaja@yandex.ru

Рассматривается игра двух лиц типа дуэли с дискретным времен. Игроки обладают ресурсами $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$ и используют их в фиксированные моменты времени $t_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, общие для обоих игроков. Эффективность использования ресурса j-м игроком характеризуется функцией $P_j(t)$, $j = 1, 2$, равной вероятности достижения успеха при использовании в момент t единичного ресурса, $0 < P_j(t_i) < 1,\ i = 1, 2, \ldots, N,\ j = 1, 2$. Выигрыш j-го игрока составляет A_j в случае его успеха, $-B_j$ в случае успеха противника и $A_j - B_j$ при одновременном достижении успеха. Вероятность $G(t, \Delta\gamma)$ достижения успеха при использовании в момент t ресурса $\Delta\gamma \geqslant 0$ с функцией эффективности $P_j(t)$ вычисляется по формуле:

$$G(t, \Delta\gamma) = 1 - (1 - P_j(t))^{\Delta\gamma}, \quad \Delta\gamma > 0; \quad G(t, 0) = 0.$$

Пусть в момент времени t_i первый игрок использует ресурс ξ_i, а второй — η_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, $\sum_{i=1}^{N} \xi_i = a$; $\quad \sum_{i=1}^{N} \eta_i = b$.

Векторы $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)$ назовем *векторами распределения ресурса*.

Функция выигрыша j-го игрока $M_j(\xi, \eta)$ есть математическое ожидание его выигрыша при данных векторах ξ и η:

$$M_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i-1} (p_j^{\xi_j} q_j^{\eta_j}) \left(A_1(1 - p_i^{\xi_i}) - B_1(1 - q_i^{\eta_i}) \right);$$

$$M_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i-1} (p_j^{\xi_j} q_j^{\eta_j}) \left(A_2(1 - q_i^{\eta_i}) - B_2(1 - p_i^{\xi_i}) \right),$$

где

$$p_i = 1 - P_1(t_i);\ q_i = 1 - P_2(t_i);\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Дуэль называется *бесшумной*, если игроки не имеют никакой информации о поведении противника. В этом случае стратегиями игроков являются их векторы распределения ресурса.

Дуэль называется *шумной*, если к моменту времени t_i игрокам известны текущие значения ресурсов обоих игроков. Стратегии игроков в шумной дуэли с дискретным временем представляют собой функции, сопоставляющие текущим значениям ресурсов α_i, β_i количество ресурса, которое надо использовать в очередной момент времени t_i.

При $A_1 = B_2$, $A_2 = B_1$ игра является антагонистической, так как $M_1(\xi, \eta) = -M_2(\xi, \eta)$.

Теорема 1. *Антагонистическая бесшумная дуэль с дискретным временем имеет седловую точку в чистых стратегиях. Решение игры сводится методами геометрического программирования [1] к нахождению двойного максимума вогнутой функции при линейных ограничениях [2].*

Существование седловой точки делает антагонистическую дуэль с дискретным временем нечувствительной к наличию у сторон информации о поведении противника. Иными словами, имеет место

Следствие. *Шумная дуэль с дискретным временем имеет седловую точку в чистых стратегиях. Оптимальные стратегии бесшумной дуэли ξ^* и η^* являются оптимальными и для шумной.*

При $A_1 A_2 = B_1 B_2$ дуэль является игрой с противоположными интересами, так как $M_1(\xi, \eta) = -\lambda M_2(\xi, \eta)$, $\lambda > 0$.

Теорема 2. *При условии $A_1A_2 = B_1B_2$ дуэль имеет ситуацию равновесия (ξ^*, η^*), где ξ^*, η^* — оптимальные стратегии антагонистической дуэли с функцией выигрыша $M_1(\xi, \eta)$.*

Теорема 3. *Пусть (ξ^1, η^1), (ξ^2, η^2) — решения антагонистических дуэлей с фунциями выигрыша $M_1(\xi, \eta)$, и $-M_2(\xi, \eta)$, соответственно. Тогда ξ^1 и η^2 максиминные (оптимальные гарантирующие стратегии) стратегии игроков в неантагонистической дуэли с функциями выигрыша игроков $M_1(\xi, \eta)$ и $M_2(\xi, \eta)$.*

Литература

1. *Даффин Р., Питерсон Е., Зенер К.* Геометрическое программирование. М.: Мир, 1972. 311 с.

2. *Посицельская Л. Н.* Бесшумная дуэль двух пулеметчиков со ступенчатыми функциями меткости // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. N 4, 1982. С. 190–194.

ОБ ОКРЕСТНОСТЯХ ВОЗМУЩЕННЫХ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пчелова А.З. (Чебоксары)

Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной правой частью пятой степени, в общем случае не интегрируемое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками. За счет нового подхода к оценке приближенного решения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки удается значительно расширить область представления приближенного решения. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Применяется метод построения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, представленный в работах [1–9].

Рассмотрим задачу Коши для уравнения в нормальной форме

$$w'(z) = w^5(z) + r(z) \tag{1}$$

с начальным условием

$$w(z_0) = w_0, \tag{2}$$

к которому приводится с помощью некоторой замены переменных дифференциальное уравнение $w'(z) = \sum_{i=0}^{5} f_i(z) w^i(z)$ [10].

В работе [10] доказана теорема существования и единственности решения задачи (1)–(2), получена оценка погрешности приближенного решения в случае точного значения подвижной особой точки, а также проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение, которое имеет вид

$$\tilde{w}_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/4}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0. \tag{3}$$

Для приближенного решения (3) получена оценка погрешности. При этом выяснилось, что область существования приближенного решения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ значительно уменьшилась по сравнению с областью, полученной в теореме существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки. Новый подход в получении оценок приближенного решения, основанный на замене приращения функции выражением дифференциала [11], позволяет существенно увеличить область применения приближенного решения (3) и получить ее точные границы.

Обозначим $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, где

$$\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{2^8 (M+1)^4}}, \quad M = \sup_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

а ρ_1 определяет область для представления функции $r(z)$ в степенной ряд [10].

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $r(z) \in C^1$ в области $|\tilde{z}^* - z| < \rho_3$, где $\rho_3 = \mathrm{const} > 0$ и $\tilde{z}^*$ — приближенное значение подвижной особой точки решения $w(z)$ задачи Коши (1)–(2);

2) $\exists M_1 : \dfrac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \leqslant M_1$, где $M_1 = \mathrm{const}$, $n = 0, 1, 2, ...$;

3) $|\tilde{z}^*| \leqslant |z^*|$;

4) известна оценка погрешности значения $\tilde{z}^*$: $|z^* - \tilde{z}^*| \leqslant \Delta\tilde{z}^*$;

5) $\Delta\tilde{z}^* < \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^8 (M_2 + \Delta M + 1)^4}}$, где

$$M_2 = \sup_n \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}, \quad \Delta M = \left(\sup_{n,U} \frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n!} \right) \Delta\tilde{z}^*,$$

$$n=0,1,2,...,\quad U=\{z:\ |\tilde{z}^*-z|\leqslant\Delta\tilde{z}^*\}.$$

Тогда для приближенного решения (3) задачи (1)–(2) в области $G=G_1\cap G_2\cap G_3$ *справедлива оценка погрешности*

$$\Delta\tilde{w}_N(z)\leqslant\sum_{i=1}^{4}\Delta_i,$$

где

$$\Delta_1=\frac{\Delta\tilde{z}^*}{4\sqrt{2}|\tilde{z}_1^*-z|^{5/4}},$$

$$\Delta_2\leqslant\frac{\Delta\tilde{z}^*(M_2+\Delta M+1)}{1-4(M_2+\Delta M+1)|\tilde{z}_2^*-z|^{5/4}}\sum_{i=0}^{4}\frac{|\tilde{z}_2^*-z|^{i/4}}{9+i},$$

$$\Delta_3\leqslant\frac{\Delta M|\tilde{z}_2^*-z|}{1-4(M_2+\Delta M+1)|\tilde{z}_2^*-z|^{5/4}}\sum_{i=0}^{4}\frac{|\tilde{z}_2^*-z|^{i/4}}{9+i},$$

$$\Delta_4\leqslant\frac{2^{-2}|\tilde{z}^*-z|^{N/4}}{1-4(M_2+1)|\tilde{z}^*-z|^{5/4}}\sum_{i=0}^{4}\frac{(4(M_2+1))^{[(N+1+i)/5]}}{N+5+i}|\tilde{z}^*-z|^{i/4},$$

при этом

$$|\tilde{z}_1^*|=|\tilde{z}^*|-\Delta\tilde{z}^*,\quad |\tilde{z}_2^*|=|\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*,\quad \arg\tilde{z}_1^*=\arg\tilde{z}_2^*=\arg\tilde{z}^*,$$

$$G_1=\{z:\ |z|<|\tilde{z}_1^*|\},$$

$$G_2=\left\{z:\ |\tilde{z}_2^*-z|<\frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_2+\Delta M+1)^4}}\right\},$$

$$G_3=\{z:\ |\tilde{z}^*-z|<\rho_3\}.$$

Замечание. Теорема справедлива в области G, где

$$G_1=\{z:\ |z|>|\tilde{z}_1^*|\},\quad |\tilde{z}_1^*|=|\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*,\quad |\tilde{z}_2^*|=|\tilde{z}^*|-\Delta\tilde{z}^*,$$

$$\arg\tilde{z}_1^*=\arg\tilde{z}_2^*=\arg\tilde{z}^*,$$

если вместо условия 3 теоремы выполняется условие $|\tilde{z}^*|\geqslant|z^*|$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи Коши (1)–(2), где $r(z)=0$ и $w(i)=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})/2\sqrt[4]{3}$, в окрестности приближенного значения подвижной особой точки.

Решение. Задача имеет точное решение $w(z)=1/\sqrt[4]{i-4z}$; $z^*=0,25i$ — точное значение подвижной особой точки; $\tilde{z}^*=$

$0,0001 + 0,2496i$ — приближенное значение подвижной особой точки, $\Delta\tilde{z}^* = 0,0004$, $z_1 = 0,000004 + 0,010000i$ попадает в область действия теоремы. Рассмотрим случай $C_0 = 1/\sqrt{2}$. Результаты расчетов для одного листа римановой поверхности представлены в табл. 1.

Таблица 1

Оценка приближенного решения уравнения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области

z_1	$w(z_1)$	$\tilde{w}_3(z_1)$	Δ	Δ'	Δ''
$0,000004+$ $+0,010000i$	$0,93335-$ $-0,38661i$	$0,93378-$ $-0,38668i$	$0,0004$	$0,2181$	$0,0375$

Здесь $w(z_1)$ — значение точного решения, $\tilde{w}_3(z_1)$ — значение приближенного решения, Δ — абсолютная погрешность, Δ' — априорная погрешность, найденная по теореме, Δ'' — апостериорная погрешность.

В следующей табл. 2 приведено сравнение результатов, полученных по теореме настоящей работы и по теореме 3 работы [10]. Значение $z_2 = 0,00009 + 0,23300i$ попадает в область действия указанных выше теорем.

Таблица 2

Сравнение оценок приближенного решения уравнения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области

z_2	$w(z_2)$	$\tilde{w}_3(z_2)$	$\lvert w - \tilde{w}_3\rvert$	Δ'_I	Δ'_{II}
$0,00009+$ $+0,23300i$	$1,80817-$ $-0,75188i$	$1,82008-$ $-0,75369i$	$0,0120$	$0,0169$	$0,0127$

Здесь $w(z_2)$ — значение точного решения, $\tilde{w}_3(z_2)$ — значение приближенного решения, $|w-\tilde{w}_3|$ — абсолютная погрешность, Δ'_I — априорная погрешность, найденная по теореме 3 работы [10], Δ'_{II} — априорная погрешность, найденная по теореме настоящей работы.

Литература

1. *Орлов В. Н., Лукашевич Н. А.* Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №10. — С.1829–1832.

2. *Орлов В. Н., Фильчакова В. П.* Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. Киев. 1998. Т.19. — С.155–165.

3. *Орлов В. Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник Казанского гос. тех. ун-та им. А. Н. Туполева. 2008. №2. — С.42–46.

4. *Орлов В. Н.* Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского гос. политех. ун-та. 2008. №63. — С.102–108.

5. *Орлов В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник Московского авиац. ин-та. 2008. Т.15. №5. — С.128–135.

6. *Орлов В. Н.* Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки // Вестник Воронежского гос. тех. ун-та. 2009. Т.5. №10. — С.192–195.

7. *Орлов В. Н, Редкозубов С. А.* Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Известия института инженерной физики. 2010. №4(18). — С.2–6.

8. *Орлов В. Н.* Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2(8). — С.399–405.

9. *Орлов В. Н.* Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати: монография. Чебоксары: Перфектум, 2012. — 112 с.

10. *Орлов В. Н., Пчелова А. З.* Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. №1(15). — С.88–96.

11. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. — 632 с.

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ОПЕРАТОРАМИ СУПЕРПОЗИЦИИ

Ратыни А.К. (Иваново)

akratyni@isuct.ru

Исследование одной нелокальной краевой задачи (см. статью автора в журнале ≪Известия вузов. Математика≫, №1, 2013) привело к необходимости изучения разрешимости уравнения

$$\eta(x) - (A\eta)(x) = \psi(x), \text{ где } (A\eta)(x) \equiv \sum_{j=1}^{k} |\beta_j(x)| u(\sigma_j x) \qquad (\Phi)$$

в том или ином пространстве функций, носители которых содержит компакт $\Omega \subset S$, порождённый отображениями σ_j.

Здесь: x – точка R^n $(n \geqslant 2)$; D – ограниченная область в R^n с границей S, $\bar{D} = D \cup S$; $\sigma_1, ..., \sigma_k$ – однозначные непрерывные отображения $\bar{D}$ в $\bar{D}$ $(k \geqslant 2)$; $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \Omega_j$, где $\Omega_j = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \omega_{ij}$,

$\omega_{ij} = \{x \in S : \sigma_j x \in \omega_{i-1}\}$, $\omega_{-1} = S$, $\omega_i = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \omega_{ij}$ $(i = 0, 1, 2, ...)$; $C^0(\Omega)$ – линейное нормированное пространство, состоящее из скалярных функций x, непрерывных на Ω и равных нулю в $\bar{D} \backslash \Omega$.

Основным результатом данной работы является следующее

Предложение 1. *Пусть $\Omega \neq \varnothing$, $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$ при $i, j = 1, \ldots, m$,*
$i \neq j$, где $1 \leqslant m \leqslant k$, и в случае $m < k$ каждое из множеств $\Omega_{m+1}, \ldots, \Omega_k$ совпадает с одним из множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$. Пусть $\beta_j \in C^0(\Omega)$ $(j = 1, \ldots, k)$. Тогда оператор A действует из $C^0(\Omega)$ в $C^0(\Omega)$.

Очевидно, что A – линейый оператор, оставляющий инвариантным конус неотрицательных фукнкций в $C^0(\Omega)$. Из сказанного и известных фактов теории таких операторов вытекает (дополняющее теорему 2 из упомянутой статьи)

Предложение 2. *При выполнении условий предложения* 1 *следующие утверждения эквивалентны*:

а)*уравнение* (Φ) *имеет единственное решение* $\eta \in C^0(\Omega)$ *для любой функции* $\psi \in C^0(\Omega)$, *причём* $\eta(x) \geqslant 0$, *если* $\psi(x) \geqslant 0$, $x \in \Omega$;

б) *спектральный радиус оператора* A *меньше* 1;

в) *существует функция* $w(x) \in C^0(\Omega)$ *такая, что*

$$w(x) > 0, \ w(x) - (Aw)(x) > 0, \ x \in \Omega.$$

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим пучок $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ вида

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk}\in \mathbf{C}, \quad p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{s+k=\kappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0)=0,\ i=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\sum_{s+k\leqslant\kappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0)+\sum_{s+k\leqslant\kappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1)=0,\ i=\overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda,\alpha_{isk},\beta_{isk}\in\mathbf{C}$, $\kappa_{i0},\kappa_{i1}\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $1\leqslant l\leqslant n-1$. Пусть корни $\{\omega_j\}$ характеристического уравнения $\sum_{s+k=n}p_{sk}\omega^k=0$ различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат: $\omega_n<\cdots<\omega_{k+1}<0<\omega_1<\cdots<\omega_k$ (4). Считаем, что краевые условия упорядочены так, что при $s_0=l$, $s_{r+1}=n$ имеем $\kappa_{s_0+1,1}-\kappa_{s_0+1,0}=\cdots=\kappa_{s_1,1}-\kappa_{s_1,0}<\cdots<\kappa_{s_r+1,1}-\kappa_{s_r+1,0}=\cdots=\kappa_{s_{r+1},1}-\kappa_{s_{r+1},0}$ и δ таково, что $s_\delta+1\leqslant k+1\leqslant s_{\delta+1}$. Обозначим: $a_{ij}=\sum_{s+k=\kappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k$, $b_{ij}=\sum_{s+k=\kappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_j^k$; $\kappa_i=\min\{\kappa_{i0},\kappa_{i1}\}$, $i=\overline{l+1,n}$; $[n]_+=n$ при $n\geqslant 0$ и 0 при $n<0$.

Теорема 1. *Если верно (4),* $\det(a_{ij})_{i\in\{1,\ldots,l\}}^{j\in\{1,\ldots,k-n+l,k+1,\ldots,n\}}\neq 0$, $\det(b_{ij})_{i\in\{l+1,\ldots,n\}}^{j\in\{k-n+l+1,\ldots,k\}}\neq 0$, $k+l\geqslant n$, $k>l$, $n-k\leqslant k$ *и*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{s_\delta,1} & \ldots & a_{s_\delta,k} & 0 & \ldots & 0\\ a_{s_\delta+1,1} & \ldots & a_{s_\delta+1,k} & b_{s_\delta+1,k+1} & \ldots & b_{s_\delta+1,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,k} & b_{n,k+1} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то система корневых функций пучка (1)–(3) m-кратно полна в $L_2[0,1]$ при $m\leqslant 2n-k-l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=l+1}^n[m-1-\kappa_i]_+$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238)

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рябенко А.С. (Воронеж)
alexr-83@yandex.ru

Исследование эволюционных уравнений и систем, в том числе поведения их решений при большом времени, можно проводить, основываясь на исследовании поведения решений дифференциальных уравнений с параметрами (см. [1], [2]). При этом изучение поведения решений эволюционных уравнений и систем при большом времени тесно связано с зависимостью решений соответствующих дифференциальных уравнений с параметрами от параметров (см. [3], [4]).

В работе изучается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с комплексным параметром γ:

$$v''(x,\gamma) - \gamma b^2(x) v(x,\gamma) = 0, \tag{1}$$

где $\gamma \neq 0, x \in [0;\infty)$.

В частности, уравнения вида (1) возникают при исследовании поведения по времени решения уравнения теплопроводности (см. [5], [6]).

В дальнейшем будем считать, что функция $b(x)$ принадлежит пространству $C\left([0;\infty)\right)$ и существуют положительные константы ε_1 и ε_2, такие что при x, принадлежащем $[0;\infty)$, выполнена оценка: $\varepsilon_1 \leqslant b(x) \leqslant \varepsilon_2$.

Пусть ε – произвольная положительная константа. Введем в рассмотрение функции:

$$v_0^1(x) = 1,\ v_1^1(x) = \varepsilon x,\ v_0^2(x) = 1,\ v_1^2(x) = -\varepsilon x.$$

Через $v_1(x,\gamma)$ и $v_2(x,\gamma)$ будем обозначать функции следующего вида:

$$v_1(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\gamma^k v_{2k}^1(x) + \gamma^{(2k+1)/2} v_{2k+1}^1(x)\right),$$

где $v_{2k}^1(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^t b^2(\tau) v_{2(k-1)}^1(\tau) d\tau dt, v_{2k+1}^1(x) =$

$\int\limits_0^x \int\limits_0^t b^2(\tau) v_{2k-1}^1(\tau) d\tau dt;$

$$v_2(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^k v_{2k}^2(x) + \gamma^{(2k+1)/2} v_{2k+1}^2(x)),$$

где $v_{2k}^2(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^t b^2(\tau) v_{2(k-1)}^2(\tau) d\tau dt, v_{2k+1}^2(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^t b^2(\tau) v_{2k-1}^2(\tau) d\tau dt.$

Справедлива теорема.

Теорема. Функции $v_1(x,\gamma)$ и $v_2(x,\gamma)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Литература

1. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман – М: Наука, 1964. – 444 с.

2. Агранович М. С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего типа / М. С. Агранович, М. И. Вишик // Успехи математических наук. – 1964. – Т. XIX, вып. 3. – С. 53-161.

3. Глушко А. В. Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А. В. Глушко. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2003. – 300 с.

4. Рябенко А. С. Оценка компонентов решения задачи, описывающей колебания в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости / А. С. Рябенко // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 6. – С. 185-192.

5. Рябенко А. С. Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полосе с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Труды математического факультета ВГУ. – 2007. – Вып. 11. – С. 175-185.

6. Рябенко А. С. Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2007. – № 1. – С. 95-99.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕ

Рябенко А.С. (Воронеж)

alexr-83@yandex.ru

Пусть $x = (x_1, x_2)$, $R^2_+ = \{x : x_1 > 0\}$, $l = [0;1] \times \{0\}$. Рассмотрим следующую краевую задачу, моделирующую стационарное распределение тепла в полуплоскости R^2_+ с трещиной l:

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in R^2_+/l, \tag{1}$$

$$u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = q_0(x_1),\ x_1 \in (0;1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in (0;1), \tag{3}$$

$$\lim_{x_1 \to +0} \frac{\partial u(x)}{\partial\, x_1} = \psi(x_2),\ x_2 \in (-\infty;\, 0) \cup (0;\, \infty)\,. \tag{4}$$

Задача (1)-(4) получена в предположении, что коэффициент внутренней теплопроводности постоянен. Условия (2), (3) задают соответственно скачок температуры и теплового потока на границе трещины l. Условие (4) задает величину теплового потока через границу R^2_+/l. Предполагается, что условия (2), (3) выполнены в смысле главного значения.

В дальнейшем будем считать, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^2\left([0;\,1]\right)$; функция $\psi(x_2)$ принадлежит пространству $C\left(R\right)$ и существует такая константа $\delta > 0$, что на бесконечности $\psi(x_2)$ убывает быстрее, чем $|x_2|^{-1-\delta}$.

При помощи продолжения по четности задача (1)-(4) была сведена к обобщенной задаче в $D'\left(R^2\right)$ (см. [1]), что, в свою очередь, позволило доказать следующую теорему.

Теорема. Решение задачи (1)-(4) задается формулой

$$u(x) = \frac{x_2}{2\pi}\int\limits_0^1 q_0(\sigma_1)\left(\frac{1}{(x_1+\sigma_1)^2+x_2^2}+\frac{1}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)d\sigma_1+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1 q_1(\sigma_1)\left(\ln\left[(x_1+\sigma_1)^2+x_2^2\right]+\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]\right)d\sigma_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(y_2)\ln\left[{x_1}^2+(x_2-y_2)^2\right]dy_2.$$

Литература

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

2. Глушко А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова. – Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Физика и Математика. – 2010. – № 2. – С. 47-50.

3. Рябенко А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с трещиной / А. С. Рябенко // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 187-194.

4. Glushko A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture. Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety: Book of Abstracts. – Kazan, Foliant, 2012. – P. 269.

5. Glushko A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips [Электронный ресурс] / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture. Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety. – Kazan, Foliant, 2012. – 8 pp. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

О МЕТОДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА СТИЛТЬЕСА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ НА МЕТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Рябцева Н.Н., Харченко А.С., Смальченко В.Т. (Белгород)

riabceva-nn@yandex.ru

Физически естественные краевые задачи имеют обычно вариационную природу. Анализ различных сингулярных задач, связанных с обобщенным дифференцированием можно начинать, следуя Ю.В. Покорному, с использования дифференциалов Стилтьеса уже на этапе описания функционала энергии. Нами использован этот подход при описании и анализе задачи Штурма-Лиувилля на метрической сети.

Пусть Γ - конечная связная метрическая сеть из $\mathbb{R}^n$ (терминологию и обозначения мы используем из [1]). Нам удобно считать ее составленной из прямолинейных интервалов и некоторого набора внутренних узлов, где эти ребра-интервалы смыкаются. Пусть на Γ задан дифференциал Стилтьеса $d(\sigma)(x)$ так, что для любого подграфа $\Gamma_0 \subset \Gamma$ его σ-мера определена равенством $m(\Gamma_0) = \int\limits_{\Gamma_0} d\sigma(x)$, а для произвольной функции множества $F(\Omega)$ (где $\Omega \subset \Gamma$) производной $\frac{dF}{d\sigma}$ мы будем называть такую функцию точки $f(x)$, что $F(\Omega) = \int\limits_{\Omega} f(x)\, d\sigma(x)$ для любого σ-измеримого Ω из Γ.

Если Γ составлен из стилтьесовских струн, то энергия каждой из них (т.е. каждого ребра), накопленная под воздействием внешней силы с плотностью dF определяется формулой

$$\Phi(u) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{u'^2(x)}{2}\, d\sigma - \int\limits_{\Gamma} \frac{u^2(x)}{2}\, dQ + \int\limits_{\Gamma} u\, dF,$$

где dQ - плотность упругой реакции окружающей среды и $d\sigma$ - метрическая плотность исходной системы.

Мы вынуждены, чтобы рассмотренные интегралы имели смысл, считать функцию $\sigma(x)$ многозначно дифференцируемой в каждой внутренней вершине при подходе к ней по разным ребрам, а на каждом ребре $\sigma(x)$ - обычная функция ограничений вариации. При этом сохранение смысла у интеграла $\int\limits_{\Gamma} u'^2\, d\sigma$ для любой абсолютно непрерывной $u(x)$ требует предположения $\sigma'(a) = 0$ для любой внутренней вершины a.

При таком описании энергии виртуальных деформаций мы будем иметь для реальных деформаций обычное уравнение $-\sigma'(u')' + uQ' = F'$ (внешние штрихи обозначают обобщенные производные) на каждом ребре, причем в каждой из внутренних вершин первое слагаемое может быть записано в виде $(\sum\limits_i \sigma_i'(a+0)u_i'(a+0))$, где суммирование ведется по индексам ребер, примыкающих к a, а $\varphi_i'(a+0)$ означает крайнюю производную сужения $\varphi(x)$ на i-тое ребро.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев Л.В., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Савченко Г.Б., Савченко Ю.Б., Ткачева С.А.

Рассматривается система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, разрешённая относительно первой производной "по времени"в бесконечном слое ($x \in R^m, t \in [0,T]$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(-iD)u = f.$$

Предполагается, что характеристическая матрица A приведена к нормальной жордановой форме. Для этой системе ставится граничная задача:

$$B(-iD)u|_{t=0} = C(-iD)u|_{t=T}.$$

Теорема. Пусть существуют такие положительные постоянные δ, M, K, что

1.$||(C^{-1}(s)B(s) - exp(TA(s)))^{-1}|| \leqslant \frac{1}{\delta}$ при всех $s \in R^m$;

2.для всех $i,j (1 \leqslant i,j \leqslant k)$

$$\frac{||L_{ij}(s)||}{\sqrt{r_i(s)}} \leqslant K, \frac{||L_{ij}(s)||}{\sqrt{r_j(s)}} \leqslant K$$

при $r_i(s) \geqslant M, r_j(s) \geqslant M$ соответственно.

Тогда задача $\mathcal{L}_2$-корректна [1]

Здесь $B(s), C(s)$- полиномиальные матрицы n-го порядка, причем определитель матрицы $C^{-1}(s)$ не равен торжественно нулю; L_{ij}- блоки матрицы $C^{-1}(s)B(s)$ размерности $n_i \times n_j, r_j(s) = Re\lambda i(s)$.

Под $||\cdot||$ понимается евклидова норма матрицы.

Рассмотрим случай, в котором условия 2) теоремы могут быть ослаблены.

Выделены классы нелокальных граничных задач, корректных в $\mathcal{L}_2$-норме.

Литература

1.Савченко Г.Б.- Дифференциальные уравнения, 1978, т.14, № 11, с. 2079-2082.

КТО СКАЗАЛ, ЧТО МАТЕМАТИКА СКУЧНАЯ НАУКА?

Семьянинова Е.Н. (Воронеж)

Много лет я работаю в школе, и не раз слышала, что математика – скучная наука. Больно и обидно это слышать, но для начала давайте признаемся (хотя бы себе), что обижаться надо не на тех, в чьем сознании слово “математика” намертво срослось со словом “скука”, а на тех, кто посодействовал этому, т.е. на себя.

Да, это мы – учителя математики – главные виновники, но вовсе не потому, что (как гласит народная молва) большинство из нас сухари (среди математиков “зануд” ничуть не больше, чем среди литераторов или историков). А потому, что наш учебный материал куда менее занимателен, чем литературный или исторический; к тому же для усвоения его, кроме желания и старания ученика, требуется (не надо закрывать на это глаза!), чтобы не обошла его стороной “божья благодать” на сей предмет.

Урок – основная форма организации обучения. При этом мы четко знаем, что нужно дать на уроке: перед нами программа и учебник. Но вот как преподнести учащимся этот материал?

Учитель должен так излагать предмет, чтобы заинтересовать учащихся, быть доступным для понимания. Ни в коем случае не должно быть места скуке, она не желательная гостья в любую пору обучения. Лучшие ученые и педагоги давно заметили это. Например, математик и педагог М.В. Остроградский так сформулировал это положение: “. . . скука является самой опасной отравой. Она действует беспрестанно; она растет, овладевает человеком и влечет его к наибольшим излишествам...". Если учащийся уже увлечен предметом, то эта отрава не так опасна, поскольку он требует не столько увлекательности, сколько содержательности изложения.

Этих же вопросов касается и Н.И. Лобачевский. В "Наставлении учителям математики в гимназиях" (от 16.VIII 1830 г.) он писал: "... чтобы уметь победить леность и рассеянность детского возраста ... достигает в совершенстве способ взаимного обучения, который разнообразием своим предохраняет детей от скуки".

Как возникает хороший урок? У разных учителей, конечно, могут быть разные ответы на этот вопрос. Изложу свою точку зрения.

Готовясь к уроку, учитель так подбирает материал к нему и формы работы, чтобы обеспечить мыслительную деятельность каждого ученика каждую минуту.

Это – хороший учитель.

А очень хороший учитель, кроме этого, еще и предугадывает те моменты, когда эта деятельность может начать угасать, и предусматривает методы ее стимуляции введением в структуру урока чего-нибудь неожиданного, необычного, удивительного, азартного, т.е. такого, что прогоняет с урока скуку.

У очень хорошего учителя уроки не только полезны, но и приятны. Да и результат гораздо более надежный, потому что он получен в комфортных (для души) условиях.

Что же нужно знать тому, кто стремится создать на своих уроках положительную эмоциональную обстановку? Прежде всего, то, что на уроках такой строгой науки, как математика, сделать это можно только введением в них занимательных моментов.

На уроке, где закрепляется или повторяется материал, ученики, как правило, теряют интерес и внимание, ведь нового они ничего не узнают. Поэтому-то и целесообразно отыскивать для проведения таких уроков различные нестандартные виды работ. Отказ от традиционных этапов урока привлекает учащихся. Аристотель когда-то подметил, что "мышление начинается с удивления".

Я очень люблю наблюдать, как учащиеся работают в парах, как зарождается процесс творчества в спорах, в попытке найти общее решение, как в итоге они приходят к единому мнению. Для этого я использую "Лото", "Домино", "Пасьянс". На любом уроке необходимо прививать учащимся любовь к своей родине; способствовать развитию чувства прекрасного. Поэтому несколько минут можно посвятить творчеству Чайковского, его вкладу в историю России, об одном из самых известных его произведений "Времена года".

Далее проводится самостоятельная работа по вариантам. 1 вариант решает задания, относящиеся к месяцам. 2 вариант – ко вторым названиям. Во время проверки, звучат фрагменты пьес. К какому месяцу относится название “Баркарола” класс выясняет совместно. Во время решения звучит фрагмент пьесы.

Последний этап урока отводится решению задач, из сборников великих математиков: из II книги “Начал” Евклида, “Арифметике” Диофанта, “Арифметике” М. Штифеля, “Всеобщей арифметики” Ньютона, тем самым снова появляется возможность удивить учащихся. Оказывается, и раньше решали такие примеры.

Закончить хочу словами: рассказать – одно, а дать урок, урок в полном смысле этого слова – совсем другое.

Угнетает меня повседневность сует,
И обиды в душе оставляют свой след...
После долгой разлуки в свой класс я вхожу.
Наконец-то! Вот здесь только я и дышу....
“Ты, мгновенье, прекрасно, - себе говорю.-
Ты, мгновенье, замри!” - Только это не жизнь.
Отомри, и начнем. Торопись. Торопись!

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ В КЛАССАХ $\Lambda(\varphi, w)$[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)
simonov-b2002@yandex.ru

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{2}$$

Для $\{a_n\}$ определим первую разность с шагом r, где $r = 1, 2, ...$, следующим образом: $\Delta_{1,r} a_n = a_n - a_{n+r}$, а также вторую разность с шагом $r : \Delta_{2,r} a_n = \Delta_{1,r}(\Delta_{1,r} a_n) = a_n - 2a_{n+r} + a_{n+2r}$.

Пусть заданы $r \in N$ и последовательность $\{a_n\}$. Скажем, что последовательность $\{a_n\}$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00169) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-979-2012-1).

удовлетворяет *условию* $M_{1,r}$, если $\Delta_{1,r}a_n \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{1,r}a_n \leqslant 0$ для всех n;

удовлетворяет *условию* $M_{2,r}$, если $\Delta_{2,r}a_n \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{2,r}a_n \leqslant 0$ для всех n.

Через Φ обозначим совокупность неотрицательных, почти возрастающих на $[0,+\infty)$ функций $\varphi(x)$; $W-$ множество измеримых, неотрицательных, $2\pi-$ периодических функций $w(x)$ и таких, что $\int\limits_0^{2\pi} w(x)dx < \infty$.

Пусть $\varphi \in \Phi, w \in W$. Классом $\Lambda(\varphi, w)$ называется множество $2\pi-$ периодических измеримых функций $f(x)$, для каждой из которых $\rho(f;\varphi,w) = \int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt < \infty$, где $f^*(t)-$ невозрастающая на $(0,2\pi]$ перестановка $|f(x)|$.

При соответствующем выборе w и φ классы $\Lambda(\varphi, w)$ сводятся к некоторым известным пространствам функций, например, пространство Лебега, пространство Лоренца.

Утверждение 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $w \in W$, $r \in N$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n- коэффициенты ряда (1). Пусть подпоследовательность $\{a_{nr}\}_{n=0}^{\infty}$ и подпоследовательность $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ при четных r удовлетворяют условию $M_{2,r}$. Кроме того, при $r > 2$ для каждого значения $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ подпоследовательности $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию: для разности $\{a_{nr+k}-a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ выполнено условие $M_{1,r}$, а для суммы $\{a_{nr+k}+ + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ - условие $M_{2,r}$. Тогда ряд (1) сходится почти всюду к своей сумме - функции $f(x)$, и найдутся положительные постоянные $A_1(r), T_1(r), A_2(r)$ и $T_2(r)$ такие, что будут справедливы неравенства*

$$C_1 \cdot S_1(r,\ \varphi, \{a_n\}, w(A_1(r) \cdot t), T_1(r)) \leqslant \int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \cdot S_1(r,\ \varphi, \{a_n\}, w(A_2(r) \cdot t), T_2(r)),$$

где $S_1(r,\ \varphi, \{a_n\}, \psi(t), B) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{r2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{r2^m}} \psi(t)dt\varphi\Bigg(B\Bigg\{\sum\limits_{n=0}^{2^m} \Delta_{1,r}|a_{nr}|(n+$

$+ 1) + ([\frac{r}{2}] - [\frac{r-1}{2}])\sum\limits_{n=0}^{2^m} \Delta_{1,r}|a_{nr+[\frac{r}{2}]}|(n + 1) +$

$sign[\frac{r-1}{2}] \sum\limits_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \Bigg\{\max\limits_{l=0,\dots,m} \Bigg\{\frac{1}{2^l} \cdot$

$$\cdot \sum_{n=0}^{2^l} |a_{nr+k} - a_{nr+r-k}|(n+1)\Big\} + \sum_{n=0}^{2^m} \Delta_{1,r}|a_{nr+k} + a_{nr+r-k}|(n+1)\Big\}\Bigg\}\Bigg),$$

положительные постоянные C_1 *и* C_2 *не зависят от* $\{a_n\}$.

Утверждение 2. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $w \in W$, $r \in N$, $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* a_n- *коэффициенты ряда (2). Пусть подпоследовательность* $\{a_{nr}\}_{n=1}^{\infty}$ *и подпоследовательность* $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ *при четных* r *удовлетворяют условию* $M_{1,r}$. *Кроме того, при* $r > 2$ *для каждого значения* $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ *подпоследовательности* $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяют условию: для суммы* $\{a_{nr+k} + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ *выполнено условие* $M_{1,r}$, *а для разности* $\{a_{nr+k} - a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ - *условие* $M_{2,r}$. *Тогда ряд (2) сходится почти всюду к своей сумме - функции* $g(x)$, *и найдутся положительные постоянные* $A_3(r), T_3(r), A_4(r)$ *и* $T_4(r)$ *такие, что будут справедливы неравенства*

$$C_3 \cdot S_2(r,\ \varphi, \{a_n\}, w(A_3(r)\cdot t), T_3(r)) \leqslant \int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \cdot S_2(r,\ \varphi, \{a_n\}, w(A_4(r)\cdot t), T_4(r)),$$

где $S_2(r,\ \varphi, \{a_n\}, \psi(t), B) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{r2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{r2^m}} \psi(t)dt\varphi\Bigg(B\Bigg\{\max\limits_{l=0,\dots,m}\Big\{\frac{1}{2^l}\cdot$

$$\cdot \sum_{n=1}^{2^l} |a_{nr}|n\Big\} + ([\tfrac{r}{2}] - [\tfrac{r-1}{2}]) \max_{l=0,\dots,m}\Big\{\frac{1}{2^l}\sum_{n=0}^{2^l} |a_{nr+[\frac{r}{2}]}|(n+1)\Big\} +$$
$$+ sign[\tfrac{r-1}{2}] \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \Big\{ \max_{l=0,\dots,m}\Big\{\frac{1}{2^l}\sum_{n=0}^{2^l} |a_{nr+k} + a_{nr+r-k}|(n+1)\Big\} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{2^m} \Delta_{1,r}|a_{nr+k} - a_{nr+r-k}|(n+1)\Big\}\Bigg\}\Bigg),$$

положительные постоянные C_{13} *и* C_{14} *не зависят от* $\{a_n\}$.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)
simonov-b2002@yandex.ru

Банахово пространство E измеримых на $[0, 2\pi]$ функций называется симметричным, если выполнены два условия: а) если $x(t) \in E$ и $|y(t)| \leqslant |x(t)|$, где $y(t)-$ измеримая на $[0, 2\pi]$ функция, то $y(t) \in E$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00169) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-979-2012-1).

и $||y(t)||_E \leqslant ||x(t)||_E$; б) если $x(t) \in E$ и $|x(t)|, |y(t)|$ равноизмеримы, то $y(t) \in E$ и $||y(t)||_E = ||x(t)||_E$.

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{2}$$

Для $\{a_n\}$ определим первую разность с шагом r, где $r = 1, 2, ...$, следующим образом: $\Delta_{1,r} a_n = a_n - a_{n+r}$, а также вторую разность с шагом $r : \Delta_{2,r} a_n = \Delta_{1,r}(\Delta_{1,r} a_n) = a_n - 2a_{n+r} + a_{n+2r}$.

Пусть $r \in N$. Введем следующие обозначения:

$h_1(r, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}; t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \Delta_{1,r} b_{n-1} \chi_{(0, \frac{\pi}{rn})}(t)$,

$h_2(r, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}; t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n b_n \chi_{(\frac{\pi}{r(n+1)}, \frac{\pi}{rn})}(t)$,

$S_1(r, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}; E) = ||h_1(r, \{|a_{nr}|\}_{n=0}^{\infty}; t) + ([\frac{r}{2}] - [\frac{r-1}{2}]) h_1(r,$
$\{|a_{nr+[\frac{r}{2}]}|\}_{n=0}^{\infty}; t) + \operatorname{sign}\left[\frac{r-1}{2}\right] \sum\limits_{k=1}^{\frac{r-1}{2}} (h_1(r, \{|a_{nr+k} + a_{nr+r-k}|\}_{n=0}^{\infty}; t) +$
$+ h_2(r, \{|a_{(n-1)r+k} - a_{(n-1)r+r-k}|\}_{n=1}^{\infty}; t))||_E$,

$S_2(r, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}; E) = ||h_2(r, \{|a_{nr}|\}_{n=1}^{\infty}; t) + ([\frac{r}{2}] - [\frac{r-1}{2}]) h_1(r,$
$\{|a_{(n-1)r+[\frac{r}{2}]}|\}_{n=1}^{\infty}; t) + \operatorname{sign}\left[\frac{r-1}{2}\right] \sum\limits_{k=1}^{\frac{r-1}{2}} (h_2(r, \{|a_{(n-1)r+k} +$
$+ a_{(n-1)r+r-k}|\}_{n=1}^{\infty}; t) + h_1(r, \{|a_{nr+k} - a_{nr+r-k}|\}_{n=0}^{\infty}; t))||_E$.

Утверждение 1. *Пусть $r \in N$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n− коэффициенты ряда (1). Пусть подпоследовательность $\{a_{nr}\}_{n=0}^{\infty}$ и подпоследовательность $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ при четных r удовлетворяют условию $M_{2,r}$. Кроме того, при $r > 2$ для каждого значения $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ подпоследовательности $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию: для разности $\{a_{nr+k} - a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ выполнено условие $M_{1,r}$, а для суммы $\{a_{nr+k} + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ - условие $M_{2,r}$. Тогда ряд (1) сходится почти всюду к своей сумме - функции $f(x)$, и справедливы неравенства*

$C_1 \cdot S_1(r, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}; E) \leqslant ||f||_E \leqslant C_2 S_1(r, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}; E)$,
положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от $\{a_n\}$.

Утверждение 2. *Пусть $r \in N$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n− коэффициенты ряда (2). Пусть подпоследовательность $\{a_{nr}\}_{n=1}^{\infty}$*

и подпоследовательность $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ *при четных* r *удовлетворяют условию* $M_{1,r}$. *Кроме того, при* $r > 2$ *для каждого значения* $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ *подпоследовательности* $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяют условию: для суммы* $\{a_{nr+k} + + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ *выполнено условие* $M_{1,r}$, *а для разности* $\{a_{nr+k} - - a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ *- условие* $M_{2,r}$. *Тогда ряд (2) сходится почти всюду к своей сумме - функции* $g(x)$, *и будут справедливы неравенства*

$C_3 \cdot S_2(r, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}; E) \leqslant ||g||_E \leqslant C_4 S_2(r, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}; E)$, *положительные постоянные* C_3 *и* C_4 *не зависят от* $\{a_n\}$.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ С МОНОТОННО-ЛАКУНАРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{2}$$

Утверждение 1. *Пусть* $0 < p < \infty$; $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* a_n*– коэффициенты ряда (1).*

1). Если $a_{2n} - 2a_{2(n+1)} + a_{2(n+2)} \geqslant 0$ *для всех* n *или* $a_{2n} - 2a_{2(n+1)} + a_{2(n+2)} \leqslant 0$ *для всех* n; $a_{2n+1} = 0$, *если* $n \neq 2^m (m = 0, 1, 2, ...)$;

$$I_1 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n} - a_{2(n+1)}|^p (n+1)^{2p-2} \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд (1) сходится почти всюду к своей сумме - функции $f(x)$, *и*

$$C_1 \cdot I_1 \leqslant \Big(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2 \cdot I_1,$$

где положительные постоянные C_1 *и* C_2 *не зависят от* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

2). Если $a_{2n+1} - 2a_{2n+3} + a_{2n+5} \geqslant 0$ *для всех* n *или* $a_{2n+1} - 2a_{2n+3} + a_{2n+5} \leqslant 0$ *для всех* n; $a_{2n} = 0$, *если* $n \neq 2^m (m = 0, 1, 2, ...)$;

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00043) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-979-2012-1).

$$I_2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n+1} - a_{2n+3}|^p (n+1)^{2p-2} \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд (1) сходится почти всюду к своей сумме - функции $f(x)$, *и*

$$C_3 \cdot I_2 \leqslant \Big(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_4 \cdot I_2,$$

где положительные постоянные C_3 *и* C_4 *не зависят от* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Утверждение 2. *Пусть* $0 < p < \infty$; $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* a_n*– коэффициенты ряда (2).*

1). Если $a_{2n} - a_{2(n+1)} \geqslant 0$ *для всех* n *или* $a_{2n} - a_{2(n+1)} \leqslant 0$ *для всех* n; $a_{2n+1} = 0$, *если* $n \neq 2^m (m = 0, 1, 2, ...)$;

$$I_3 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|^p (n+1)^{p-2} \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд (2) сходится почти всюду к своей сумме - функции $g(x)$, *и*

$$C_5 \cdot I_3 \leqslant \Big(\int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_6 \cdot I_3,$$

где положительные постоянные C_5 *и* C_6 *не зависят от* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2). Если $a_{2n+1} - a_{2n+3} \geqslant 0$ *для всех* n *или* $a_{2n+1} - a_{2n+3} \leqslant 0$ *для всех* n; $a_{2n} = 0$, *если* $n \neq 2^m (m = 0, 1, 2, ...)$;

$$I_4 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n+1}|^p (n+1)^{p-2} \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд (2) сходится почти всюду к своей сумме - функции $g(x)$, *и*

$$C_7 \cdot I_4 \leqslant \Big(\int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_8 \cdot I_4,$$

где положительные постоянные C_7 *и* C_8 *не зависят от* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ситник С.М. (Воронеж)
box2008in@gmail.com

Методы теории операторов преобразования давно оформились в самостоятельный раздел математики и широко применяются в различных теоретических и прикладных вопросах [1-2]. Перечислим некоторые задачи, которые активно рассматриваются в последнее время и при решении которых существенно используются операторы преобразования различных типов.

1. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Эти операторы имеют многочисленные приложения в теории уравнений с частными производными, при изучении преобразования Радона и

других вопросов.

2. Теория операторных свёрток и коммутирующих операторов. При помощи операторов преобразования можно строить соответствующие коммутанты, при этом в пространствах аналитических функций коммутанты производных в основном полностью описываются в рамках созданной И. Димовски теории операторных свёрток, намного более сложные рассмотрения требуются в пространствах типа C^k, тут результаты получены только в последнее время.

3. Операторы преобразования Сонина–Димовски и Пуассона –Димовски в рамках теории гипербесселевых функций и уравнений.

4. Операторы преобразования типа Сонина и Пуассона для дифференциально–разностных операторов Дункла.

5. Теория дробного интегродифференцирования и метод интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах, в том числе композиционный метод построения операторов преобразования.

Литература

1. *Sitnik S.M.* Transmutations and Applications: a survey// arXiv: 1012.3741. 2010. 141 P.

2. *Ситник С.М.* Операторы преобразования и их приложения// Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Отв. ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г. Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. 2008.—С. 226–293.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИНГУЛЯРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ[1]

Соболев В.А., Тропкина Е.А. (Самара)

hsablem@gmail.com, elena_a.85@mail.ru

В работе рассмотрен метод построения медленного интегрального многообразия для сингулярной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\dot{z} = Z(t, z, \varepsilon),$$

где $t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^{m+n},\ 0 \leqslant \varepsilon \ll 1$, вектор-функция $Z(t, z, \varepsilon)$ достаточно гладкая по всем переменным.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-08-00069-а), № 13-01-97002-р_поволжье_а

В качестве примера рассмотрена система, возникающая при изучении кинетики металлоорганических соединений. А также произведено сравнение метода интегральных многообразий с CSP-методом — одним из основных методов редукции химической кинетики.

Литература

Соболев В. А., Щепакина Е. А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетики. М.: Физматлит, 2010

Lam S. H. Using CSP to understand complex chemical kinetics // Combust, Sci. Tech. 1993. V. 89. P. 375–404.

Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк. 1990. 208 с.

Соболев В. А., Тропкина Е. А. Асимптотические разложения медленных инварантных многообразий и редукция моделей химической кинетики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 1. С. 81–96.

Тропкина Е. А. Итерационный метод приближенного построения интегральных многообразий медленных движений // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. 2010. № 4(78). с. 78–88.

Тропкина Е. А. Параметризация медленных инвариантных многообразий в модели распространения малярии // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. 2012. № 6(97) С. 66–74.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЛОСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ[1]

Солдатов А.П. (Белгород)

soldatov48@gmail.com

Рассмотрим в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ограниченной ляпуновским контуром Γ, сильно эллиптическую систему Ламе

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357).

для вектора смещений $u = (u_1, u_2)$ с матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \qquad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det[a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2] = 0$ этой системы в верхней полуплоскости имеет два корня ν_1, ν_2. В зависимости от двух возможных случаев $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ положим, соответственно,

$$J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Как установлено в [1], найдется такая обратимая матрица $b \in \mathbb{C}^{l\times l}$, что $a_0 b + a_1 bJ + a_2 bJ^2 = 0$ и блочная матрица B с элементами $B_{11} = \overline{B_{12}} = b$, $B_{21} = \overline{B_{22}} = bJ$ обратима. При этом любая другая матрица b_1 с теми же свойствами связана с b соотношением $b_1 = bd$ с некоторой обратимой матрицей d, коммутирующей с J. В частности, однородная степени нуль матрица -функция

$$H(\xi) = \operatorname{Im}[b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} b^{-1}]$$

не зависит от выбора b.

Классические потенциалы двойного слоя, как известно [2], строятся по фундаментальной матрице системы (1). Введем обобщенный потенциал двойного слоя, который представляет собой интеграл

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma Q(t, t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{2}$$

с ядром $Q(t,\xi) = |\xi|^{-2}[n(t)\xi]H(\xi)$, где $n(t)\xi = n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2$ и n означает единичную внешнюю нормаль. Для любой вектор- функции $\varphi \in C(\Gamma)$ он определяет функцию $u \in C(\overline{D})$, удовлетворяющей системе Ламе в области D.

С помощью этого потенциала в работе установлена редукция задачи Дирихле в классе $C(\overline{D})$ к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода на Γ. В частности, задача Дирихле является фредгольмовой и в этом классе. Аналогичные результат справедлив по отношению к задаче Неймана, краевое условие которой можно проинтегрировать и записать в форме задачи

Дирихле для сопряженной вектор- функции v. Эта функция связана с решением u системы Ламе соотношениями

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Заметим, что частные производные этой функции служат столбцами тензора напряжений σ.

Для функции v потенциал двойного слоя определяется аналогично (2) с той разницей, что матрица b заменяется на $c = a_{21}b + a_{22}bJ$. Матрицы b, c вычисляются явно[3], так что соответствующие явные выражения можно дать (после достаточно кропотливых вычислений) и для ядер Q.

Особенно простые выражения получаются в случае орттропной среды, которая определяется условием $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$. В этом случае потенциал (2) и аналогичный потенциал для v можно записать в форме

$$u(z) = \frac{\rho_0 k}{\pi}\int_\Gamma \frac{n(t)\xi}{|\omega(\xi)|^2} G_1(\xi)\varphi(t)|dt|, v(z) = \frac{\rho_0}{\pi}\int_\Gamma \frac{n(t)\xi}{|\omega(\xi)|^2} G_2(\xi)\varphi(t)|dt|,$$

где следует положить $\xi = t - z$ и приняты обозначения $\omega(\xi) = (\xi_1 + \nu_1\xi_2)(\xi_1 + \nu_2\xi_2)$,

$$G_1(\xi) = \begin{pmatrix} \rho^2(\alpha_2\xi_1^2 + \alpha_3\xi_2^2) & (\alpha_3 + \alpha_4)\xi_1\xi_2 \\ \rho^2(\alpha_3 + \alpha_4)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$G_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \rho^2\xi_1\xi_2 \\ \xi_1\xi_2 & \rho^2\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$k = \frac{1}{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}}, \rho^2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad \rho_0^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 + 2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3}.$$

Литература

1. *Солдатов А.П.* О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения, 2003, Т. 39, No 5, С. 674-686.

2. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.

3. *Soldatov A.P.* To the theory of anisotropic plane elasticity // Analysis by Oldenbourg Wissenschaftsverlags, 2010, V. 30(2) P. 107-117

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАГОТОВОК

Соломонов К.Н., Листров Е.А. (Воронеж)

С целью моделирования течения металла по полотну поковки разработан программный комплекс PARSHTAMP, базирующийся на “песчаной аналогии”. Он прост в освоении, позволяет быстро получить результат и произвести экспресс-анализ картины пластического формоизменения, способен в будущем служить интеллектуальным помощником конструктора и технолога. Рассматриваемый программный комплекс дает возможность построить и отобразить на экране монитора: контур поковки, линии раздела течения металла, картину течения металла, профиль ребра жесткости, пространственную эпюру контактных напряжений, – а также решить задачу оптимизации технологических вырезов, с помощью которых можно управлять течением металла. Последние три блока находятся в стадии доработки.

За счет допущений, используемых в исходной системе дифференциальных уравнений, описывающей напряженно-деформированное состояние заготовки, алгоритм решения задачи пластического течения металла существенно упрощен. Благодаря этому время расчета занимает несколько секунд. Разумеется, это может привести значительным погрешностям (15-20%). Однако в некоторых случаях важнее получить быстрый приближенный результат, нежели более точный, но медленный. К примерам последнего можно отнести все программные продукты, базирующиеся на методе конечных элементов.

К преимуществам программного комплекса PARSHTAMP следует отнести также простой и быстрый ввод данных о геометрии поковки: сначала контур реальной поковки аппроксимируют прямыми и дугами окружностей, затем их нумеруют, после заносят информацию во входной файл в произвольной последовательности. Указывают шаг расчета, начальную точку, для каждого отрезка прямой – координаты начала и конца отрезка, для каждой дуги окружности – координаты центра, радиус и угол раствора.

Чтобы использовать PARSHTAMP для автоматизации моделирования и прогнозирования пластического формоизменения материала, а также решения конструкционных и технологических вопросов, нужны его модификация и доработка. А чтобы PARSHTAMP имел современный, удобный, интеллектуальный интерфейс, нужны дополнительные программные блоки: интеллектуальный, реализованный в форме экспертной системы; инфологический, включающий систему управления базами данных; а также электронные библиотеки, наполненные информацией конструкторского и технологического плана.

В связи с этим предстоит решить следующие задачи:

1. Разработка экспертной системы, способной давать советы в экстремальных или (и) сложных ситуациях.

2. Создание банка данных для хранения информации о вариантах моделирования и способах технологической подготовки заготовки.

3. Создание электронной библиотеки по материалам и заготовкам.

4. Использование CAD систем для компьютерного моделирования поверхностей.

В настоящем виде программный комплекс PARSHTAMP уже использовался для моделирования процессов обработки металлов давлением (в частности, ковки и объемной штамповки) и производства поковок для авиационной промышленности, где детали с тонким полотном и ребрами жесткости имеют широкое распространение. Промышленная апробация программного комплекса по производству ряда деталей дала удовлетворительные результаты. Расхождение между экспериментальными и расчетными данными оказалось в пределах 20%, что свидетельствует о его пригодности к получению, по крайней мере, наглядной картины формообразования заготовок.

ТЕХНОЛОГИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ДРЕВЕСНЫХ АРМИРУЮЩИХ ЗАПОЛНИТЕЛЕЙ ДЛЯ ИЗДЕЛИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Стородубцева Т.Н. (Воронеж)

tamara-tns@yandex.ru

Запасы древесины в России составляют 80 млрд.м^3 – около 40 % всех мировых запасов, причем, в основном это – хвойная древесина, самая ценная для строительства. Из 400 млн.м^3 леса, ежегодно заготовляемого в РФ, примерно 280 млн.м^{3}составляет деловая древесина при среднем годовом приросте около 850 млн.м^3. В последние годы в связи с новыми товарными отношениями постоянно возрастает спрос на древесное сырье, объем которого уже нельзя удовлетворить только увеличением лесозаготовок. Добыча сырья становится все дороже при освоении лесных территорий, отступающих от транспортных магистралей и обжитых мест. Особенно высок дефицит сосны, 120...150-летнего возраста, идущей на изготовление железнодорожных шпал.

По данным служб ЮВЖД, запасы древесины для шпал оцениваются лишь на 4...5 лет ее вырубки. При этом при производстве пиломатериалов, заготовке леса и раскряжевке древесины на нижних складах образуются отходы, содержащие высококачественную массу древесины, пригодную для производства щепы, которая может быть использована в качестве армирующего заполнителя древесного композита. Низкосортная древесина (топливные дрова, лиственный и хвойный тонкомер) также содержит значительное количество древесной массы, пригодной для получения щепы, а тонкомер, кроме этого, и для изготовления каркаса этого материала.

На деревообрабатывающих предприятиях доминирующую часть сырья для производства щепы составляют кусковые отходы лесопиления и шпалопиления. Количество кусковых отходов, образующихся в цехах шпалопиления зависит от технологии раскроя сырья, его качества и в среднем составляет 23...28 % от объема переработки [1].

Ежегодно не используется низкокачественная древесина в объеме 2.8...3.5 млн. м^3, а пиловочник в объеме 5...7 млн.м^3 направляется на варку целлюлозы. На лесопильных предприятиях ежегодно скапливается более 15 млн.м^3 опилок, а при переработке пиломатериалов дополнительно образуется еще около 3 млн.м^3 опилок, которые могут быть направлены на лесохимические и гидролизные заводы, в том числе и для производства некоторых видов композитов.

Одно из перспективных направлений использования древесностекло-волокнистого композиционного материала (ДСВКМ) – изготовление шпал для железных дорог как лесовозных так и общего назначения [1].

В базовом составе ДСВКМ на фурфуролацетоновой смоле ФАМ для железнодорожных шпал общего назначения в качестве армирующего заполнителя используются кусковые отходы переработки древесины. Однако, для брусьев стрелочных переводов длиной более пяти метров прочность при изгибе этого вида ДСВКМ оказывается недостаточной.

Для увеличения характеристик изгиба предлагается применять армирующие каркасы из древесины любых пород в виде досок из тонкомера, горбыля и т.п.

Следует отметить, что ни ширина, ни длина досок не имеет существенного значения, т.к. каркас может быть изготовлен составным, а обрезки досок могут быть поколоты на щепу с длиной элементов 150…200 мм. Доски каркаса, поставленные “на ребро”, могут иметь обзолы, т.к. эстетический вид его не имеет значения.

Сшивка досок каркаса производится гвоздями через наклоненные под углом 60° прокладки из обрезков досок той же толщины, что и основные. Прокладки выполняют в деревянном каркасе ту же роль, что наклонная стальная арматура в железобетонных элементах, т.е. они должны препятствовать возникновению трещин в направлении главных растягивающих напряжений, возникающих в элементах конструкций из ДСВКМ под действием технологических и эксплуатационных факторов [1].

Одним из наиболее экономичных вариантов налаживания серийного выпуска шпал и брусьев из ДСВКМ является использование оборудования и пустующих площадей существующих шпалорезных цехов и заводов.

В работе А.А. Добрачева и др. [2] отмечается, что переработка горбылей и шпальной вырезки с целью повышения их товарной стоимости остается непременным условием эффективного функционирования данных предприятий. Мы считаем, что привычная переработка горбылей на тарную дощечку может быть заменена распиловкой их на доски для каркасов шпал из ДСВКМ.

Это тем более выгодно потому, что для этих целей не требуется высококачественная древесина, не содержащая выколы, сучки и т.п. Наоборот, чем грубее обработана поверхность досок, тем лучше. Отходы шпалопиления в виде кусков древесины, обзолов и мелкой технологической щепы также могут быть использованы в виде заполнителя ДСВКМ базового состава.

По сути дела нет необходимости ничего менять в узлах переработки древесины, имеющихся в этих цехах. Например, горбыли или шпальная вырезка, отторцованные на станке ЦКБ-40 (или ЦПА-40, ЦМЭ-40, ЦМЭ-3А и т.д.), поступают на многопильный обрезной станок Ц2Д-7 (или Ц2Д-5А, ЦМР-1, ЦМР-3, ЦДК-5, ЦР-4А и т.д.) где из них выпиливается трехконтактный брусок шириной, равной, например ширине доски каркаса (70…80 мм).

Здесь же бруски переворачиваются на ребро и распиливаются на доски толщиной 20. . . 25 мм в зависимости от вида шпал. Полученные при этом узкие доски окончательно обрезаются до необходимой длины на торцовочных станках, перечисленных выше, и поступают на узел сборки каркасов. Некоторые характеристики ДСВКМ приведены в таблице, где видны преимущества применения армирующего каркаса.

Производство железнодорожных шпал из ДСВКМ в широких масштабах позволит найти применение огромным количествам отходов сельского хозяйства, лесного комплекса и лесоперерабатывающей промышленности в виде сырья для производства фурфурола, смолы ФАМ и армирующего заполнителя. Найдут применение также отходы химической промышленности – пиритовые огарки, которые могут быть переработаны в муку – прекрасный наполнитель,
улучшающий прочностные и гидрофобные характеристики полимерных композитов, а также отработанное машинное масло.

Таким образом, при отсутствии шпальника, а это очевидно ближайшая перспектива, т. к. деревьев в возрасте от восьмидесяти до ста лет становится все меньше в доступных районах лесозаготовок, шпалорезные цеха могли бы полностью перейти на заготовку каркасов и отливку непосредственно шпал, что гарантировало бы их от закрытия как убыточных, что уже случилось с заводами по производству фурфурола, поскольку он также оказался невостребованным.

Актуальность предлагаемой разработки определяется необходимостью замены деревянных и железобетонных шпал на шпалы из ДСВКМ, обладающих вышеперечисленными преимуществами при использовании их на железных дорогах различного, особенного специального назначения.

Литература

1. Стородубцева Т.Н. Композиционный материал на основе древесины для железнодорожных шпал: Трещиностойкость под действием физических факторов: Моногр. / Т.Н. Стородубцева. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2002.– 216 с.

2. Добрачев А.А. Производство шпал и сопутствующей продукции / А.А. Добрачев, Н.Д. Киреев, М.П. Овсянников.– Екатеринбург: СВ-96, 1997.– 78 с.

3. Харчевников В.И. Композиционные материалы для шпал лесовозных и общего назначения железных дорог: Моногр. /В.И. Хар-

Таблица 1: Основные характеристики древесностекловолокнистого композиционного материала базового состава с дополнительным каркасом из досок

Характеристика	Вид армирования	
	Древесная щепа	Древесная щепа и каркас
Условный предел прочности при изгибе, $\sigma^{\text{чи}}_{\text{пч}}$,МПа	22,0	35,0 (158 %)
Условный предел пропорциональности при изгибе, $\sigma^{\text{чи}}_{\text{пц}}$, МПа	11,0	17,0 (155 %)
Мгновенный модуль упругости при изгибе, $\text{E}^{\text{мгн}}_{\text{чи}}$, МПа	$1{,}0{\cdot}10^4$	$1{,}08{\cdot}10^4$ (108 %)
Условный предел прочности при смятии под прокладкой, $\sigma_{\text{см}}$, МПа	12,0	9,0 (75 %)
Плотность, т/м^3	1,20 (12)	0,85 (70 %)
Масса шпалы, кг	150,0 (1,5)	100,0 (70 %)

чевников, Б.А. Бондарев / Под ред. В. И. Харчевникова. – Липецк: ЛГТУ, 1996. – 256 с.

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Стородубцева Т.Н., Аксомитный А.А., Томилин А.И., Маньковская А.Д. (Воронеж)
tamara-tns@yandex.ru

При строительстве промышленных и транспортных объектов специального назначения в изделиях и конструкциях достаточно широко применяются различные композиционные материалы (КМ), вид которых определяется реализуемыми технологическими процессами создаваемых производств и условиями их эксплуатации. К ним относятся: покрытия полов, фундаменты, корпуса аппаратов и емкостей, лотки и отстойники сточных технологических вод, шпалы верхнего строения железных дорог и метрополитенов, лесовозных и трамвайных путей, переезды, платформы, подверженные воздействию химически активных жидкостей, грунтовых вод, атмосферных осадков, переменных температур, что и предопределяет необходимость обеспечения особых свойств этих материалов, основными из которых являются коррозионная стойкость, долговечность и экологическая безопасность.

Учитывая острую необходимость повышения экономической эффективности широкого использования техногенных продуктов лесного комплекса, химической промышленности и местного сырья, основное внимание уделялось разработке стекло- и древесностекловолокнистых композиционных материалов (СВКМ, ДСВКМ), главные исходные компоненты которых отличались по своим генезису и свойствам.

На основе теоретических обобщений и экспериментальных исследований созданы новые эффективные древесноволокнистые композиционные материалы (ДСВКМ) на смоле ФАМ для изделий и элементов конструкций специального назначения, рекомендованных к применению на объектах промышленного и транспортного строительства, находящихся в особых условиях эксплуатации. Их техническая, социальная и экономическая эффективность определяется использованием в качестве компонентов продуктов глубокой переработки древесины, сельского хозяйства, промышленности и местного сырья, подвержена эксплуатационными испытаниями [1, 2].

Так, разработаны методы прогнозирования и оценки длительной прочности ДСВКМ по результатам исследований процессов ползучести при изгибе без и при одновременном погружении в воду, суть которых состоит в следующем:

Экспериментально установлено, что ДСВКМ обладает упругими, вязкими, высокоэластическими и пластическими свойствами и соответствующими деформациями под действием постоянной изгибающей нагрузки, которые количественно и качественно поразному проявляются при различных скоростях нагружения, величинах напряжений, временных отрезках и средах проведения экспериментов.

Зафиксировано (рис. 1 и 2), что с уменьшением величины постоянного напряжения увеличивается время до момента достижения изгибаемым образцом прогиба, равного полному упругому, и соответствующей ему точки перегиба на кривых ползучести. Эта зависимость носит криволинейный характер, что позволило представить ее с помощью высокоточных аппроксимирующих функций и определить минимальные значения напряжений, то есть предел длительного сопротивления ДСВКМ на требуемый срок эксплуатации изделия или теоретически ожидаемую долговечность; получить значения коэффициентов длительности и длительных деформационных коэффициентов как при постоянных температуре и влажности окружающей среды, так и для случая экспозиции в воде под постоянной нагрузкой. Численное равенство этих коэффициентов подтвердило эффективность мер гидрофобизирующей защиты и позволило констатировать неизменность структуры разработанного материала, т.к. $K^{\text{чи}}_{\text{дл.мин}} \approx K^{\text{чи.в}}_{\text{дл.мин}} \approx 0{,}50$, а также $K^{\text{чи}}_{\text{пц}} = 0{,}50$, и подтвердить гипотезу о том, что условный предел пропорциональности определенный релаксационным методом, — это не только максимальное напряжение, при котором не возникает структурных изменений в материале, но и напряжение, соответствующее пределу длительного сопротивления конструкционных композиционных материалов, в том числе ДСВКМ, как при постоянных температуре и влажности окружающей среды, так и всестороннем увлажнении.

Полученные результаты позволяют рекомендовать отказ от длительных испытаний на ползучесть, заменяя их получением значения предела пропорциональности релаксационным методом.

Изделия из разработанных водостойких долговечных ДСВКМ

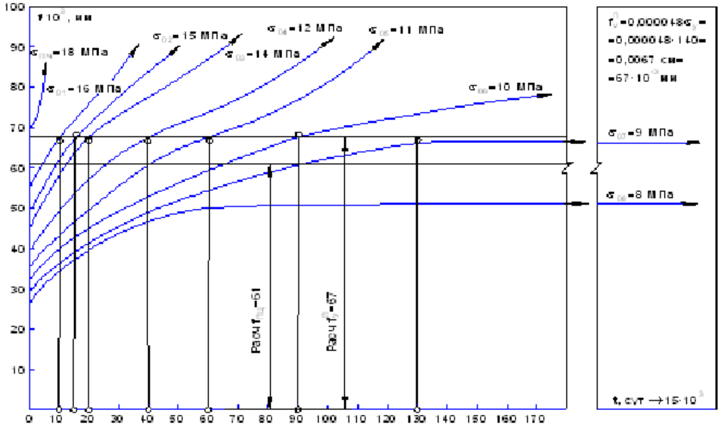

Рис. 1: Кривые ползучести образцов из ДСВКМ, помещенных в воду

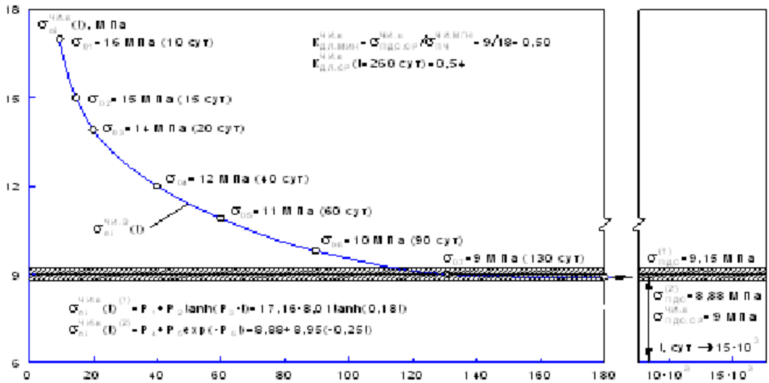

Рис. 2: Зависимость постоянно действующих напряжений от времени появления на кривых ползучести точек перегиба

могут найти свою достаточно емкую нишу на рынке сбыта в таких сферах применения, как цеховые большегрузные линии малой длины, подъездные пути с большим количеством стрелочных переводов, кривые малого радиуса, обводненые участки лесовозных дорог, трамвайные пути, метрополитены, для защиты емкостей хранения агрессивных жидкостей, в том числе для объектов лесохимических производств, станины станков, прессов и т.д. Кроме того, следует учитывать, что стоимость зарубежных аналогов изделий верхнего строения транспортных магистралей в 2,5…3 раза выше. Ожидаемый экономический эффект с учетом эксплуатационных расходов при запланированном выпуске 375 тыс. штук шпал в год составит 130 млн. рублей (по сравнению с деревянными) и 16 млн. рублей (по сравнению с железобетонными).

Литература

1. Харчевников, В. И. Водостойкий композиционный материал на основе отходов лесного комплекса для железнодорожных шпал [Текст] / В. И. Харчевников, Т. Н. Стородубцева // Изв. вузов. Строительство. - 2002. - № 12.- С. 74-78.

2. Стородубцева, Т. Н. Некоторые итоги исследований напряженного состояния в объеме ДСВКМ под действием физических факторов [Текст] / Т.Н. Стородубцева // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. - 2005. - № 017.- С.11-14.

О СПЕКТРЕ СКОРОСТЕЙ СОЛИТОНОВ В ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ ОБРИ-СИЛИНА

Сукманова К.С. (Москва)

kclosu@gmail.com

В работе на основе простого обобщения одной из моделей нелокальной электродинамики, предложенной в [1], исследовано влияние однопараметрической деформации кусочно-линейной аппроксимации нелинейности на спектр скоростей и внутреннюю структуру фронта (топологического солитона). Такое обобщение позволяет, в частности, проследить изменение спектра скоростей фронта при переходе от кусочно-линейных аппроксимаций нелинейности, используемых в [1,2], к аппроксимации, использованной [3] и [4].

В качестве исходной модели рассмотрим следующее обобщение нелинейного волнового уравнения:

$$l^4 u_{xxxx} + l_0^2 (u_{xxxx} - \frac{1}{c^2} u_{tt}) + f(u) = 0. \quad (1)$$

Для решений вида $u(x,t) = u(x - vt)$ уравнение (1) может быть записано в форме

$$\varepsilon u_{xxxx} + u_{xx} + f(u) = 0. \quad (2)$$

В случае, когда $f(u)$ является кусочно-линейной функцией

$$f(u) = \begin{cases} -\frac{1}{a}u, & u \in [0,a), \\ -\frac{2-u}{2-a}, & u \in [a, 4-a), , \\ -\frac{1}{a}(u-4), & u \in [4-a, 4]) \end{cases} \quad (3)$$

для уравнения (2) рассмотрим задачу о топологическом солитоне, определенную условиями $\lim\limits_{x\to-\infty} u = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u = 4$.

При малых значениях параметра ε задача становится сингулярно возмущенной. Для обоснования метода численного интегрирования было произведено сравнение полученных результатов, с результатами алгебраического (аналитического) метода сшивки решений.

Литература

[1] *Силин В. П.*, *Студентов А. В.* ЖЭТФ 117, 2000. — 1230 с.

[2] *Рабинович М. И.*, *Д.И.Трубецков* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

[3] *Aubry S.*, *Daero P.* J. Physica D 7, 1983. — 240 с.

[4] *Aubry S.* Exact models with a complete Devil's staircase. J. Physica C 16, 1983. — 2497 с.

[5] *Volkov A. F.* J. Physica C 183, 1991. — 177 с.

[6] *Volkov A. F.* J. Physica C 192, 1992. — 306 с.

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Сураган Д.

suragan@list.ru

В работе доказывается, что среди всех областей с одинаковой мерой шар минимизирует первое собственное значение объемного потенциала в многомерном евклидовом пространстве. Доказаны изопериметрические неравенства для конечных сумм обратных собственных значений объемного потенциала.

Литература

1. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.,* К спектральным вопросам объемного потенциала. Доклады академии наук России, 2009, Т. 428(4), с.16-19.

ОБ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Тельнова М.Ю. (Москва)

mytelnova@ya.ru

Рассмотрим задачу

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; x \in (0,1)\,, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

при условии, что Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций, для которых выполняется следующее интегральное условие:

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}Q^{\gamma}(x)dx = 1 \;\; (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0). \tag{3}$$

Под *решением* задачи $(1), (2)$ понимается функция y, абсолютно непрерывная на $[0,1]$, удовлетворяющая условиям $y(0) = y(1) = 0$, имеющая абсолютно непрерывную производную на любом отрезке, содержащемся в интервале $(0,1)$, и удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на интервале $(0,1)$.

Нашей целью является приведение некоторых оценок для

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q), \qquad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q).$$

Для произвольной функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, обозначим через H_Q замыкание множества $C_0^{\infty}(0,1)$ по норме

$$\|y\|^2_{H_Q} = \int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right)dx.$$

Можно показать, что первое собственное значение λ_1 задачи $(1), (2)$ может быть найдено как

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q, y], \quad \text{где} \quad R[Q, y] = \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right) dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Теорема 1. *Для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки:*

1. *если $\gamma > 0$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$;*
2. *если $\gamma < 0$, то $\pi^2 \leqslant m_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем:*
   – если $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = m =$$

$$= \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \cdot x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2 \, dx};$$

   – если $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ ($\beta \leqslant 2\gamma - 1$), то $\pi^2 \leqslant m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R[0, y_1]$, где

$$y_1(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

   и θ – любое действительное число, удовлетворяющее неравенству $\theta > \frac{\alpha - |\beta| - \gamma - \varepsilon^\gamma + 1}{2\gamma}$ $\left(\theta > \frac{\beta - |\alpha| - \gamma - \varepsilon^\gamma + 1}{2\gamma}\right)$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Теорема 2. *Для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки:*

1. *если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$;*
2. *если $\gamma \geqslant 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем:*
   – если $\gamma \geqslant 1$ и $\alpha > \gamma$, $\beta > \gamma$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]$, где $y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$;
   – если $\gamma > 1$ и $\alpha, \beta \leqslant \gamma$ или $\alpha \leqslant \gamma < \beta \leqslant 2\gamma - 1$ или $\beta \leqslant \gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_{Q_*}$, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q_*, u] = m$, где

$$m = \inf_{y \in H_{Q_*} \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \cdot x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2 \, dx};$$

– *если* $\gamma \geqslant 1$ *и* $\alpha > 2\gamma - 1$, $\beta \leqslant \gamma$, *то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_2^2}, y_2\right]$, *где* $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$;

– *если* $\gamma \geqslant 1$ *и* $\beta > 2\gamma - 1$, $\alpha \leqslant \gamma$, *то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_3^2}, y_3\right]$, *где* $y_3(x) = x^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$;

– *если* $\gamma = 1 \geqslant \alpha \geqslant 0 > \beta$ *или* $\gamma = 1 \geqslant \beta \geqslant 0 > \alpha$, *то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2$;

– *если* $\gamma = 1 \geqslant \alpha$, $\beta \geqslant 0$, *то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 3\pi^2$;

– *если* $\gamma = 1$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$, *то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{5}{4}\pi^2$.

Литература

1. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.* Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи математических наук. – 1996. – Т. 51(3). – С. 73–144.

2. *Куралбаева К. З.* Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения – 1996. – Т. 32(6). – С. 852–853.

3. *Ежак С. С.* Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с интегральным условием // Современная математика и ее приложения. – 2005. – Т. 36. – С. 56–69.

4. *Telnova M. Yu.* Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition// Mathematica Bohemica – 2012. – V. 137(2). – P. 229–238.

КВАНТОВЫЕ БАНАХОВЫ ФРЕЙМЫ[1]

Терехин П.А. (Саратов)

terekhinpa@mail.ru

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X (см. [1]). Скажем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - *квантовый фрейм*, если существуют $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется последовательность целых чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$, для которой $\{\lambda_n m_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ и справедливо представление

$$f = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n \varphi_n.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102) и гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект № МД-1354.2013.1)

Для функции $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$ и натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \dots$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$ положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = \varphi(2^k t + j). \tag{1}$$

Система функций (1) называется *аффинной системой.*

Теорема ([2]). *Пусть $\varphi \in L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\int_0^1 \varphi(t)\,dt \neq 0$.*

Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует квантовый фрейм.

Заметим, что здесь модельным пространством X служит пространство всех чиловых последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которых конечна норма $\sum_{k=0}^\infty \bigl(\frac{1}{2^k}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |x_n|^p\bigr)^{1/p} < \infty$, а в качестве $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ можно взять любую последовательность положительных чисел, удовлетворяющую условию $\inf_{k\geqslant 0}\bigl(\frac{1}{2^k}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |\lambda_n|^p\bigr)^{1/p} > 0$.

Литература

1. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. вып. 3. с. 50–62.

2. *Терехин П. А.* Аффинные квантовые фреймы и их спектр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2013. Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика. вып. 1, ч. 1. с. 32–36.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Тихомиров В.В. (Москва), Очилов Н.Н. (Ташкент)

В 1917 Жак Адамар, выступая в Цюрихе на конгрессе Швейцарского математического общества, утверждал, что граничная задача для дифференциального уравнения с частными производными правильно поставлена, если решение этой задачи существует и является единственным[см.1]. В качестве неправильно (некорректно) поставленной задачи он привел свой знаменитый пример задачи Коши для уравнения Лапласа (см.[6], [11]): решение может не существовать даже для сколь угодно гладких граничных данных. Как следствие, в случае, когда это решение существует, оно не может непрерывно зависеть от граничных данных, в то время как решение каждой правильно поставленной физической задачи должно непрерывно зависеть от результатов измерений (см. [3], [8], [13]). В данной работе рассматривается спектральный метод регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа.

Рассмотрим для $T > 0$ в цилиндре

$$Q \ = \ \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in \Omega, \ 0 < t < T\}$$

Задачу Коши для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ + \ \Delta u \ = \ 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{v_k(x)\}$ - собственные значения и собственные функции краевой задачи:

$$- \ \Delta v_k(x) \ = \ \lambda_k v_k(x), \ x \in \Omega, \quad v_k|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда решение (если оно существует) задачи (1) - (3) можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) \cosh \sqrt{\lambda_k} t \ v_k(x). \tag{4}$$

определим для любого $\alpha > 0$ регуляризованное решение

$$u_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) \ \cosh \sqrt{\lambda_k} t \ e^{-\alpha\lambda_k t} v_k(x). \tag{5}$$

В предположении, что точное решение (4) в момент $t = T$

$$f(x) = u(x,T)$$

существует и принадлежит классу Соболева $W_2^{2\tau,0}(\Omega)$ функций образующихся в нуль на границе, мы оцениваем, при $\alpha > 0$ разность между точным (4) и регуляризованным (5) решениями.

Теорема 1. *Пусть* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. *Если функция* f, *определенная равенством (6), принадлежит классу* $W_2^{2\tau,0}(\Omega)$, *то* $0 \leqslant t \leqslant T$ выполняется оценка

$$\|u(x,t) - u_\alpha(x,t)\|_{L_2}(Q) \leqslant C\alpha^\tau \|f\|_{W_2^{2\tau}(\Omega)}. \tag{7}$$

Отметим, что показатель τ в теореме 1 является точным. Справедлива **Теорема 2.** Если оценка (7) выполняется при $\tau > 1$, то $u(x,t) \equiv 0$ для $x \in \Omega$ и $0 \leqslant t \leqslant T$. Если имеется информация о том, что точное решение в момент

$$t = T$$

принадлежит классу Соболева с более высоким показателем гладкости, то можно получить равномерную оценку разности между точным решением и регуляризованным. **Теорема 3.** Пусть $0 < \tau < 1$. Если функция f, определенная равенством (6), принадлежит пространству $W_2^{l,0}(\Omega)$, где

$$l \ \geqslant \ \frac{n}{2} \ + \ 4\tau,$$

то выполняется равномерная на каждом компакте $K \subset \Omega$ оценка:

$$u_\alpha(x,t) \ = \ u(x,t) \ + \ O(\alpha^\tau).$$

Литература

[1] Hadamard, J., [1923] 2003. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Dover Phoenix editions, Dover Publications, New York, ISBN 978-0-486-49549-1.

[2] Tychonoff, A. N., 1943. *On the stability of inverse problems*, Doklady Akad. Nauk SSSR 39 (5), 195–198.

[3] M. M. Lavrentyev, M.M., 1955. *On Cauchy problem for the Laplace equation*, Dokl. Akad. Nauk ,102, i 2, pp. 205-206, 1955.

[4] V.A. Il'in., 2008. *Spektralnaya Teoriya Diff. Oper.*

[5] Tychonoff, A. N., 1963. *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method*, Doklady Akad. Nauk SSSR 151, 501–504. Translated in Soviet Mathematics 4: 1035–1038.

[6] Faddeev, L. D., 1966. *Increasing solutions of Schrödinger equation*, Sov. Phys. Dokl., 10, pp. 1033-1035.

[7] Tychonoff, A. N., Arsenin, V. Y., 1977. *Solution of Ill-posed Problems*, Washington, Winston & Sons. ISBN 0-470-99124-0.

[8] Calderon, A. P., 1980. *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics ed W. H. Meyer and M. A. Raupp (Rio de Janeiro: Brazilian Mathematical Society) pp. 65-73.

[9] Ikehata, M., 2001. *Inverse conductivity problem in the infinite slab*, *Inverse Problems*, 17, pp. 437-454.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Ткачева С.А., Савченко Г.Б., Савченко Ю.Б. (Воронеж)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Au = f\left(x, t\right), \quad x > 0, \ t > 0 \qquad (1)$$

где $A = D_{\alpha,x}|D_{\alpha,x}|^{p-2}D_{\alpha,x}$, $p > 2$ — заданное число, $D_{\alpha,x} = \alpha^{1/p'}(x)\frac{\partial}{\partial x}\alpha^{1/p}(t) \quad (1/p + 1/p' = 1, \ (2 < p < \infty))$ — "весовая" производная (см.[1]). Здесь $\alpha\left(x\right)$ — достаточно гладкая на R_1^+ "весовая" функция, обращающаяся в нуль при $x = +0$, $\alpha(+0) = 0$, $\alpha(x) > 0$ при $x > 0$, удовлетворяющая условиям:

$\int\limits_0^N \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty, \ \forall N > 0, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{\alpha(s)} = d < \infty.$

Для уравнения (1) зададим условия

$$u(x,0) = u_0\left(x\right); \ x \in R_1^+, \qquad (2)$$

$$u(0,t) = 0; \ t > 0. \qquad (3)$$

Обозначим $W^1_{\alpha,p}$ $(1 < p < \infty)$ весовое пространство функций с нормой $\|u\|_{W^1_{\alpha,p}} = \|u\|_{L_p(R_1^+)} + \|D_{\alpha,x}\|_{L_p(R_1^+)}$, через V множество функций, таких что $V = \{u| \ u(x,t) \in W_p^1(R_1^+), \ \ u(0,t) = 0\}$. С помощью оператора $G_{\alpha,p}$, определенного на функциях $u(x) \in L_p(R_1^+)$ по формуле $G_{\alpha,p}[u](y) = \alpha^{1/p}(x)u(x)\big|_{x=x(y)}$, где $x = x(y)$ функция, обратная функции $y = y(x) = \int\limits_0^x \frac{ds}{\alpha(s)}, \quad 0 < x < \infty$, уравнение (1) можно свести к уравнению (см. [2]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{\partial}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial y} = g(y,t),$$

при условиях $v(y,0) = v_0(y)$; $v|_{y=0} = v|_{y=d} = 0$, где $0 < y < d$; $v = v(y,t) = u(x(y),t), \ g(y,t)f(x(y),t)$, $v_0 = u_0(x,y)$

Теорема. *Пусть заданы функции* f, u_0, *удовлетворяющие условиям* $f(x,t) \in L_{p'}((0,T),V')$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $u_0\left(x\right) \in L_2\left(R_1^+\right)$. *Тогда* *существует единственное решение $u(x,t) \in L_p((0,T), W^1_{\alpha,p}(R^+_1))$ задачи (1)-(3).*

Литература

1. *Глушко В.П.* Об уравнении теплопроводности с существенно переменным коэффициентом / В.П. Глушко, С.А. Ткачева. - ДАН РФ, т. 335, №6, 1996. - с. 684-687.

2. *Куфнер А.* Нелинейные дифференциальные уравнения / А. Куфнер, С.Фучик. - М. Наука, 1988. - 304 с.

О ЛИПШИЦЕВОСТИ И ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C^{(1),n}(D)$

Трусова Н.И. (Липецк)

trusova.nat@gmail.com

Пусть $B = (B_{ij})$ $(i,j = 1,...,n)$, где

$$(B_{ij}y)(t,s) = \int_T l_{ij}(t,s,\tau,y(\tau,s))d\tau + \int_S m_{ij}(t,s,\sigma,y(t,\sigma))d\sigma + \iint_D n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,y(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \quad i,j = 1,...,n,$$

-операторы Урысона с частными интегралами, $T = [a,b]$, $S = [c,d]$, $t,\tau \in T$, $s,\sigma \in S$, $D = T \times S$, $u \in R = (-\infty; +\infty)$, $l_{ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{ij}(t,s,\sigma,u)$ и $n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ — вещественные функции, $C^{(1)}(D)$ - пространство функций со значениями в R, производные которых по t и s непрерывны, а $C^{(1),n}(D)$- пространство вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s),...,x_n(t,s))$, принимающих значения в R^n и имеющих непрерывные производные по t и s.

Теорема 1. *Пусть функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} и их частные производные первого порядка по t, s, и непрерывны на $D \times T \times R$, $D \times S \times R$, $D \times D \times R$ и удовлетворяют условию Липшица по последней переменной. Тогда оператор B действует в $C^{(1),n}(D)$ и удовлетворяет условию Липшица.*

Теорема 2. *Пусть оператор $B_{ij} : C^{(1),n}(D) \to C^{(1),n}(D)$, $\int_a^b |l'_{ij_u}(t,s,\tau,u)|d\tau \leqslant \tilde{L}_u$; $\int_c^d |m'_{ij_u}(t,s,\sigma,u)|d\sigma \leqslant \tilde{M}_u$, функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ и их частные производные по t и s удовлетворяют условию Гёльдера по последней переменной. Тогда оператор B удовлетворяет условию Гёльдера в $C^{(1),n}(D)$.*

Отметим,что липшицевость и гельдеровость операторов Урысона с частными интегралами в других классах пространств изучались в [1,2].

Литература

1. *Калитвин А.С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002. – 208 с.

2. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА – СЛОБОДЕЦКОГО

Тюрин В.М. (Липецк)

tuvm@stu.lipetsk.ru

Примем следующие обозначения: X — банахово пространство; $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $u\colon \mathbb{R}^n \to X$ с sup – нормой, $n \in \mathbb{N} \setminus 1$; $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, X)$ $(1 < p \leqslant n)$ — лебеговы пространства сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u\colon \mathbb{R}^n \to X$ с обычной нормной $\|u\|_0$; $\mathrm{H}^m = \mathrm{H}^m(\mathbb{R}^n, X)$, $\mathrm{H}^{m+\gamma} = \mathrm{H}^{m+\gamma}(\mathbb{R}^n, X)$ $(m \in \mathbb{N} \setminus 1)$ — пространства Соболева и Соболева – Слободецкого, норма в которых определяется соответственно по формулам

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \left\|\mathrm{D}^\alpha u\right\|_0, \quad \|u\|_{m+\gamma} = \|u\|_m + \langle u\rangle_{1m} \qquad (0 < \gamma < 1),$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\langle\cdot\rangle_{1m}$ — некоторая полунорма в $\mathrm{H}^{m+\gamma}$; $\mathrm{L}^p_\gamma = \mathrm{L}^p_\gamma(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство с нормой $\|u\|_{0\gamma} = \|u\|_0 + \langle u\rangle_{10}$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $P\colon \mathrm{H}^m \to \mathrm{L}^p$ в частных производных $Pu = \sum A_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha u$ $(|\alpha| \leqslant m)$ с коэффициентами $A_\alpha \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n, \mathrm{End}\, X)$, существует $A_0^{-1} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n, \mathrm{End}\, X)$, а также $\langle A_0^{-1}\rangle_{10} < \infty$, $\langle A_\alpha\rangle_{10} < \infty$. Аналогично определяется оператор $P\colon \mathrm{H}^{m+\gamma} \to \mathrm{L}^p_\gamma$. Предполагается, что оператор $P\colon \mathrm{H}^m \to \mathrm{L}^p$ коректен, т.е. выполняется неравенство $\|u\|_m \leqslant K_1 \|Pu\|_0$ с постоянной $K_1 > 0$, не зависящей от $u \in \mathrm{H}^m$.

Теорема. *Если оператор P удовлетворяет приведённым выше условиям, то существуют такие постоянные $K_2 > 0$ и $K_3 > 0$, не зависящие от $u \in \mathrm{H}^{m+\gamma}$, что для оператора $P\colon \mathrm{H}^{m+\gamma} \to \mathrm{L}^p_\gamma$ при некоторых ограничениях справедливо неравенство*

$$\|u\|_{m+\gamma} \leqslant K_2 \|Pu\|_0 + K_3 \langle Pu\rangle_{10} \qquad (u \in \mathrm{H}^{m+\gamma}),$$

другими словами оператор $P\colon \mathrm{H}^{m+\gamma} \to \mathrm{L}_\gamma^p$ *корректен.*

Приводятся приложения указанной теоремы.

РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Усков В.И., Зубова С.П. (Воронеж)

vum1@yandex.ru, spzubova@mail.ru

В банаховом пространстве рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = a(\xi,\eta)\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta} + c(\xi,\eta)U(\xi,\eta) + \varphi(\xi,\eta) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$U(\xi,0) = g(\xi) \in E, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = \tilde{g}(\xi), \tag{3}$$

где $a(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$, $\varphi(\xi,\eta)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Оно сводится к операторному уравнению вида

$$A\frac{\partial u}{\partial\eta} = B_\xi(\eta)u + f(\xi,\eta), \tag{4}$$

с начальным условием

$$u|_{\eta=0} = u^0,$$

где A, $B_\xi(\eta)$ - линейные операторы, $f(\xi,\eta)$ - заданная функция,

Оператор A является фредгольмовским.

Совершив декомпозицию уравнения (4), сведём это уравнение к уравнению, разрешённому относительно производной $\frac{\partial u}{\partial\eta}$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = D_\xi(\eta)u + \hat{f}(\xi,\eta),$$

где $D_\xi(\eta)$ - полученный линейный оператор, $\hat{f}(\xi,\eta)$ - некоторая функция.

Справедлива теорема.

Теорема. *Задача* (1), (2), (3) *с коэффициентами* $a(\xi,\eta) = a(\xi)$, $b(\xi,\eta) = b(\xi)$, $c(\xi,\eta) = c(\xi)$ *имеет решение и притом единственное тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{g}(\xi) = Rg(\xi) + \int\limits_0^\xi e^{\int\limits_s^\xi b(z,\eta)\,dz} \varphi(s,0)\,ds.$$

Это решение задаётся формулой

$$U(\xi,\eta) = g(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} R^{i-1}\tilde{g}(\xi) + \int\limits_0^\eta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\eta-\nu)^i}{i!} R^{i-1}\psi(\xi,\nu)\,d\nu,$$

где

$$R(\cdot) = a(\xi)(\cdot) - \int\limits_0^\xi e^{\int\limits_s^\xi b(z,\eta)\,dz} (a'(s) - a(s)b(s) - c(s))g(s)(\cdot)\,ds,$$

$$\psi(\xi,\eta) = \int\limits_0^\xi e^{\int\limits_s^\xi b(z,\eta)\,dz} \frac{\partial\varphi(s,\eta)}{\partial s}\,ds.$$

Литература

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. — 464 с.

2. *Зубова С. П.* Дифференциальные уравнения, неразрешённые относительно производной: пособие для студентов, Воронеж: ЛОП ВГУ, 2003. — 30 с.

О РАЗЛОЖЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ОПЕРАТОРА ХИЛЛА-ШРЕДИНГЕРА

Ускова Н.Б. (Воронеж)

Пусть $H = L_2[0,\pi]$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом модуля функций, т.е. $x \in H$, если $\int\limits_0^\pi |x(t)|^2\,dt < \infty$, и скалярным произведением $(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi x(t)\overline{y(t)}\,dt$. Рассматривается оператор Хилла-Шредингера на отрезке $[0,\pi]$ вида

$$(Ly)(t) = -y''(t) + v(t)y(t)$$

с комплекснозначным потенциалом $v(t)$, таким что $v(t) = \sum\limits_{k>0} v_k \cos kt$, $v_0 = 0$ и

$$\sum_{k>0} |v_k|^2 \alpha^2(k) < \infty,$$

где $\alpha(k)$ — субмультипликативный вес, т.е. $\alpha : \mathbb{Z} \to R_+ = (0, \infty)$, $\alpha(k) \geqslant 1$, $\alpha(l+k) \leqslant \alpha(l)\alpha(k)$. Область определения оператора L из пространства Соболева $W_2^2[0,\pi]$ определяется краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

С помощью метода подобных операторов ([1], [2]) доказана

Теорема. *Собственные векторы* $\widetilde{e}_j$, $j > 0$, *оператора* L *представимы в виде*

$$\widetilde{e}_j = \sin jx + \sum_{i \neq j} \eta_{ij} \sin ix,$$

где

$$|\eta_{ij}| \leqslant \frac{\mathrm{const}\, w_{ij}}{|i^2 - j^2|}, \qquad \sum_{i>0} |w_{ij}|^2 \alpha^2(i-j) < \infty.$$

Литература

1. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие. Воронеж. 1987. 165 с.

2. *Ускова Н.Б.* Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов// Сиб. матем. жур. 2000. Т. 41, № 3. С. 712-721.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ В ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА 2013 ГОДА ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ИКТ

Ускова О.Ф., Ускова Н.Б., Каплиева Н.А. (Воронеж)

n.a.kaplievagmail.com

С 2010 года экзамен по информатике и ИКТ введен во многих вузах нашей страны. В связи с развитием информационных технологий в структуру и содержание курса информатики постоянно вносятся изменения.

В демонстрационном варианте 2013 года ЕГЭ по информатике и ИКТ впервые появились задания, связанные с определением результата работы нетривиальных циклических программ [1], [2]. Для решения подобных задач требуются знания работы операторов языка программирования, подкрепленные умением логически рассуждать и мыслить [1–4]. Приведем несколько примеров подобных заданий с математическим содержанием.

Пример 1. Задание B5. Определите, что будет напечатано в результате работы следующей программы

```
var
   n, s: integer;
Begin
   n:=0; s:=0;
   while s<=30 do
     begin
      n:=n+1;
      s:=s+4
     end;
   writeln(n)
End.
```

В этой программе переменная n играет роль счетчика, значение которого не влияет на условие продолжения цикла. Здесь необходимо определить, сколько раз надо прибавить число 4 к начальному значению переменной s, равному нулю, чтобы результат стал больше 30. Очевидно, что при $n = 7$ получим $s = 28 < 30$, поэтому ответ 8, так как $s = 32 > 30$.

Пример 2. Задание B8. Получив на вход число x, программа печатает два числа a и b. Указать наибольшее из чисел x, при вводе которого программа напечатает сначала 2, а затем 24.

```
var
   x, a, b: integer;
Begin
   readln(x);
   a:=0; b:=1;
   while x>0 do
     begin
      a:=a+1;
      b:=b* x mod 10;
      x:=x div 10
     end;
   writeln(a); write(b)
End.
```

Заметим, что в цикле в переменной a вычисляется количество цифр введенного целого числа x, а в переменной b – их произведение. Так как $a = 2$, то число x двузначное, а произведение его цифр равно 24. Существует несколько таких двузначных чисел, максимальным из них является число 83.

Пример 3. Задание B14. Определить, какое число будет напечатано в результате работы программы

```
var
   a, b, t, k, l:integer;

Function F(x:integer): integer;
   begin
      F:=(3-x)*(x+7)-1
   end;

Begin
   a:=-10; b:=10;
   k:=a; l:=F(a);
   for t:=a to b do
     if F(t)>l then
      begin
       k:=t;
       l:=F(t)
      end;
   writeln(k)
End.
```

Заметим, что в цикле вычисляется максимальное значение функции в целочисленных точках от –10 до 10. Так как функция является параболой, ветви которой направлены вниз, то максимальное значение будет в вершине параболы –2, принадлежащей рассматриваемому отрезку, значит, $k = -2$.

В заключение приведем некоторые результаты ЕГЭ по информатике и ИКТ по Воронежской области в 2012 году. Минимальное количество баллов, свидетельствующее об усвоении школьного курса информатики равно 40, не преодолели минимального порога 7,67 % школьников, сдававших этот экзамен (по России 11,1 %).

Литература

1. *Евич Л.Н., Лисица С.Ю.* Подготовка к ЕГЭ 2013/ Под ред. Ф.Ф.Лысенко, Л.Н.Евич. – Ростов-на-Дону: Легион, 2012. – 432 с. – (Готовимся к ЕГЭ)

2. *Чупин Н.А.* Готовимся к ЕГЭ по информатике: оптимальные

способы выполнения заданий. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. – 105 с. – (Абитуриент)

3. *Ускова О.Ф., Каплиева Н.А.* Программирование на Паскале в заданиях ЕГЭ по информатике и ИКТ: учебное пособие. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2013. – 255 с.

4. *Ускова О.Ф.,Баклкнов М.В., Воронина И.Е., Горбенко О.Д., Вощинская Г.Э., Огаркова Н.В., Мельников В.М.* Программирование на языке Паскаль: задачник / под ред. Усковой О.Ф. – СПб. : Питер, 2002 (2003, 2005). – 336 с. (Гриф Министерства образования РФ)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

Федосеев А.Е. (Саратов)

fedoseev_ ae@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу L вида

$$\ell y = -y'' + \Big(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x)\Big)y = \lambda y, \quad 0 < x < T, \tag{1}$$

$$y(0) = y(T) = 0$$

на отрезке с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя в точке $a > 0$, где $q(x)$ - комплекснозначная функция, ν_0 - комплексное число. Положим $\lambda = \rho^2$, $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и, для определенности, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, \ldots$. Предположим, что $q(x)|x-a|^{\min(0,1-2Re\,\nu)} \in L(0,T)$. Задача L исследуется при дополнительном *условии склейки* решений около особой точки $x = a$, порождаемым матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, которая связывает решения уравнения (1) в окрестности особой точки (см. [1]).

Пусть $\Phi(x,\lambda)$ - решение уравнения (1) при условиях

$$\Phi(0,\lambda) = 1, \quad \Phi(T,\lambda) = 0, \quad \rho \in \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\, \rho \neq 0\},$$

а также удовлетворяющее *условию склейки.* Функция $M(\lambda) := \Phi'(0,\lambda)$ называется *функцией Вейля* для L.

Обратная задача. Задана функция Вейля $M(\lambda)$, построить $q(x)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

Теорема 1. *Функция $M(\lambda)$ однозначно определяет $q(x)$.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [2]. Используя этот метод, построена конструктивная процедура решения обратной задачи и получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Литература

1. *Юрко В. А.* О восстановлении сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения, т. 38, N 5 (2002), С. 645- 659.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Феоктистов В.В., Феоктистова О.П. (Москва)

ww.pheoktistow@yandex.ru

Уравнения Эйлера и уравнение неразрывности баротропного идеального совершенного газа для малых возмущений допускают линеаризацию и сводятся к системе линейных уравнений в частных производных 1-го порядка

$$E\frac{\partial\vec{B}(t,x)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{s}A_k\frac{\partial\vec{B}(t,x)}{\partial x_k},\quad x=(x_1,\dots x_s),\quad s\leqslant 2,\qquad(1)$$

$$\vec{B}(t,x)=(u(t,x),v(t,x),\rho(t,x),T(t,x))^{\top},$$

где u, v — составляющие скорости движения газа вдоль координатных осей, ρ и T — плотность и температура газа, A_k, $k=1,s$ — числовые квадратные матрицы 4-го порядка, содержащие параметры газа, E — единичная матрица.

Для $s=1$ $(x_1=x)$ каждая составляющая искомого вектора $\vec{B}(t,x)$ может быть представлена как сложение волн, которые распространяются вдоль оси OX в противоположных направлениях и являются решениями одномерного волнового уравнения [1].

В [2] доказано, что система (1) при $s\geqslant 1$ имеет решение

$$\vec{B}(t,x)=\sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty}W_s^{\alpha}\cdot\vec{\gamma}_{\alpha}=\sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty}W(X_1^{\alpha_1},\dots,X_s^{\alpha_s})\cdot\vec{\gamma}_{\alpha},\qquad(2)$$

$$X_k=(Ex_k+A_kt),\quad\|\alpha\|=\alpha_1+\dots+\alpha_s,$$

где W_α^s — оператор волнового взаимодействия по мультииндексу α размерности s, аргументами которого являются n-мерные бегущие волны X_k, $k = \overline{1, s}$, $\vec{\gamma}_\alpha$ — неопределенный числовой коэффициент.

Выполнено сравнение двух подходов к решению системы (1), основанных на использовании линейных преобразований матричных коэффициентов системы и применении оператора волнового взаимодействия [3].

Установлена связь между двумя полученными решениями, исследовано влияние малых возмущений на искомые функции, рассмотрен результат сложения и взаимодействия волн различной размерности в заданной точке (t, x).

Литература

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. — М.: Мир, 1982. — 335 с.

2. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Структура ряда для решения системы уравнений с частными производными 1-го порядка // Вестник МГТУ. Серия "Естественные науки". — 2009. No 4 . — С. 3–22.

3. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Оператор волнового взаимодействия и нормальная форма системы линейных уравнений в частных производных 1-го порядка // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXI". — Воронеж, 2010. — С. 232–233.

О ПОВЕДЕНИИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ[1]

Филиновский А.В. (Москва)

flnv@yandex.ru

Рассмотрим спектральную задачу для эллиптического самосопряженного уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00989)

$$u_N + \alpha g(x) u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad \alpha \in R, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ. Коэффициенты $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$, дифференциального оператора $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j}$ будем считать вещественнозначными функциями, удовлетворяющими условиям симметрии $a_{ij} = a_{ji}$ и эллиптичности $(A(x)\xi, \xi) \geqslant \theta |\xi|^2$, $\theta > 0$, $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$, $u_N = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j$, где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ. Функция g предполагается непрерывной на Γ и удовлетворяет условию $g(x) \geqslant g_0 > 0$, $x \in \Gamma$. Пусть $\lambda_1(\alpha)$ – первое собственное значение задачи (1), (2). Обозначим через $\lambda_1^{(d)}$ первое собственное значение задачи Дирихле $Lu + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $u|_\Gamma = 0$, соответствующую собственную функцию будем обозначать $\tilde{u}$.

Теорема 1. *При $\alpha > 0$ справедлива оценка:*

$$\lambda_1(\alpha) \geqslant \left((\lambda_1^{(d)})^{-1} + (\alpha q_g)^{-1} \right)^{-1},$$

где $q_g = \inf\limits_{\substack{y \in H^1(\Omega) \\ Ly = 0}} \frac{\int_\Gamma g y^2 ds}{\int_\Omega y^2 dx}$.

Теорема 2. *При $\alpha \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda_1^{(d)} - \frac{\int_\Gamma \tilde{u}_N^2 \frac{ds}{g}}{\int_\Omega \tilde{u}^2 \, dx} \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right).$$

Литература

1. *Sperb R.P.* Untere und obere schranken fur den tiefsten eigenwert elastisch gestutzten membran // Zeitschrift Angew. Math. Phys. 1972, V. 23, no. 2, P. 231 – 244.

2. *Филиновский А.В.* Асимптотическое поведение первого собственного значения задачи Робена // Дифференц. уравнения. 2011, Т. 47, №11, С. 1659 – 1660.

ТРАНСЛЯТЫ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Хабибуллин Б.Н. (Уфа)

Khabib-Bulat@mail.ru

Транслятом (сдвигом) множества $S \subset \mathbb{R}^n$ (на $x \in \mathbb{R}^n$) называем

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00013) и Федеральной целевой программы «Развитие научно-технических программ» (соглашение № 14.Б37.21.0358).

множество $S + x := \{s + x\colon s \in S\}$. Пусть A и B — множества индексов; $C_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — *выпуклые* множества, $\alpha \in \mathrm{A}$; $S_\beta \subset \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathrm{B}$.

В рамках классической Теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств [1] и ее обобщений будет рассмотрен ряд задач [2].

1. Условия, при которых множество $S := \bigcup_{\beta\in\mathrm{B}} S_\beta$ *покрывается* некоторым транслятом множества $C := \bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha$. Ответ — в терминах *геометрических разностей* $C_\alpha \overset{*}{-} S_\beta := \{x \in \mathbb{R}^n\colon S_\beta + x \subset C_\alpha\}$ и соотношений между *опорными функциями* множеств C_α и S_β [3].

2. Условия, при которых некоторый транслят множества C *пересекает* каждое множество S_β для всех $\beta \in \mathrm{B}$. Ответ — в терминах *алгебраических разностей* $C_\alpha - S_\beta := \{c - s\colon c \in C_\alpha, s \in S_\beta\}$.

3. Условия, при которых *разность* $C \setminus S := \{c \in C\colon c \notin S\}$ непуста. Ответ — в терминах *теоретико-множественых разностей* $C_\alpha \setminus S_\beta$.

4. Применения к вопросам *неполноты экспоненциальных систем* [4] в пространствах непрерывных на выпуклом компакте $C \subset \mathbb{C}^n$ функций, голоморфных внутри K, с естественной sup-нормой.

5. Применения к описанию распределения нулей целых функций экспоненциального типа вполне регулярного роста [5] на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и на системе лучей из $\mathbb{C}$ с вершиной в нуле [6].

Литература

[1] *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли. М.: Мир, 1968.

[2] Хабибуллин Б. Н. *Теорема Хелли и трансляты множеств.* I, II. Матем. сб. 2013 (работа в 2-х частях; направлены в печать).

[3] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. - 416 с.

[4] *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности (4-е изд., доп.). Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. - 192 с.

[5] *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions. AMS. **150**, 1996. - 263 c.

[6] Хабибуллин Б. Н. *Выметание на систему лучей и целые функции вполне регулярного роста.* Изв. АН СССР. 1991. **55**, С. 184–202.

О ТЕРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Хамид Аль-Зухаири

hkd73@mail.ru

В работе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида

$$dx = (A\,x(t) + a(t, (S_{h_1,\dots,h_k}\,x)(t))dt\; + b(t, (S_{h_1,\dots,h_k}\,x)(t))dw_t, \quad (1)$$

где A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы e^{At}, действующей банаховом пространстве E, операторы a и b определены на $R^1 \times E^k$ и действуют соответственно в E и в $L_2(U_0, H)$ (см, например, [1] стр. 181), $h_1, ..., h_k$ — отклонения аргумента, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ для всех $i = 1, ..., k$ и $t \in [0, \infty)$. Оператор $S_{h_1,\dots,h_k}$ сопоставляет функции x со значениями в E функцию $S_{h_1,\dots,h_k}\,x$ со значениями в E^k по следующему правилу $(S_{h_1,\dots,h_k}\,x)(t) = (x(h_1(t)), ..., x(h_k(t)))$. Процесс w_t — стандартный винеровский процесс со значениями в U_0. Предполагается, что операторы a и b удовлетворяют следующим оценкам

$$\|a(t, x_1, ..., x_k)\| \leqslant A(1 + \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|), \|b(t, x_1, ..., x_k)\| \leqslant B(1 + \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|),$$

и

$$\|a(t, x_1, ..., x_k) - a(t, y_1, ..., y_k)\|^p \leqslant L(t, \sum_{i=1}^{k} \|x_i - y_i\|^p),$$

$$\|b(t, x_1, ..., x_k) - b(t, y_1, ..., y_k)\|^p \leqslant L(t, \sum_{i=1}^{k} \|x_i - y_i\|^p),$$

где функция L невозрастающая и выпуклая по второму аргументу, такая, что для любой константы $C \geqslant 0$ интегральное неравенство

$$Z(t) \leqslant C \int_0^t L(s, (S_{h_1,\dots,h_k} z)(s))ds$$

не имеет ненулевых неотрицательных решений. При выполнении перечисленных выше условий методами из [2] стр. 182 доказана глобальная теорема существования и единственности на промежутке $[0, \infty)$ решения уравнения (1) с начальным условием $x(0) = x_0$.

Литература

1. *Da Prato G.* Stochastic Equations in Infinite Dimensions/ Da Prato G., Zabczyk J.- Cambridge: Cambridge University Press,1992, P. 454

2. *Р.Р. Ахмеров, М.И.Каменский и др.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск, Наука 1986. - С. 266.

ПОЛНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АТЛАС ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИЛИ ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ[1]

Харламов М.П. (Волгоград)
mharlamov@vags.ru

Рассматриваются интегрируемые аналитические гамильтоновы системы с тремя степенями свободы механического происхождения с компактным конфигурационным пространством. Система называется неприводимой, если не существует непрерывной группы симметрий. При наличии S^1-симметрии мы имеем однопараметрическое семейство систем с двумя степенями свободы (приведенных систем). Обсуждаем неприводимый случай, т.к. для приводимой системы описание аналогично в терминах фактор-объектов. Пусть $\mathcal{F} : P^6 \to \mathbf{R}^3$ – интегральное отображение системы с тремя интегралами в инволюции. Представим общий алгоритм топологического исследования такой системы.

— Находим множество критических точек отображения $\mathcal{F}$ как объединение фазовых пространств интегрируемых почти гамильтоновых систем с $n_i < 3$ степенями свободы, индуцированных на инвариантных подмногообразиях M_i (критических подсистем). Точки $x \in M_i$ порождают 4-атомы $U(x)$ с особым слоем $L(x)$ – связной компонентой $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))$, содержащей x. Исследуем ключевые множества C_i систем M_i, т.е. множества точек $x \in M_i$, над которым расслоение $U(x) \mapsto x$ не локально тривиально.

— Строим бифуркационную диаграмму Σ как подмножество в объединении поверхностей Π_i – формальных $\mathcal{F}$-образов критических многообразий M_i. Определяем стратификацию Π_i минимальным рангом $\mathcal{F}$ в прообразе и описываем Σ как допустимую область в $\cup\Pi_i$, ограниченную стратами размерностей 0 и 1.

— Классифицируем сечения $\Sigma_\varphi(c)$ в $\mathbf{R}^3$ поверхностями $\Phi = \varphi$ уровней выбранного интеграла Φ, особого для системы (например, гамильтониана). Здесь c – вектор параметров системы. Доказано, что разделяющее множество для сечений $\Sigma_\varphi(c)$ в (c, φ)-пространстве состоит из критических значений функции Φ как координаты на стра-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97025)

тифицированном $(n_i - 1)$-многообразии – образе ключевого множества критической подсистемы под действием индуцированного интегрального отображения (при $n_i = 0$ весь (c, φ)-образ M_i включается в разделяющее множество).

— В плоскости сечения рассмотрим двумерный клеточный комплекс – образ $D_\varphi(c) = \mathcal{F}(\{\Phi = \varphi\})$ – оболочку множества $\Sigma_\varphi(c)$. Для неразделяющих значений (c, φ) оснастим все 1-клетки обозначением соответствующего 4-атома, а 2-клетки (камеры) снабдим числом – количеством торов Лиувилля в прообразе точки. Результат – одна из возможных форм грубого топологического инварианта системы, индуцированной на $J_\varphi = \{\Phi = \varphi\} \subset P^6$. Переход к комплексу $\mathcal{K}_\varphi(c)$, сопряженному к $D_\varphi(c)$, делает этот инвариант более наглядным. В нем 0-клетки снабжены натуральными числами (количество 3-торов), 1-клетки – обозначением атомов, 2-клетки представляют критические замкнутые орбиты (критические движения из точек ранга 1). Добавляя 0-клетку с числом 0, представляющую нуль-камеру $\mathbf{R}^2 \backslash D_\varphi(c)$, превратим $\mathcal{K}_\varphi(c)$ в клеточное разбиение двумерной сферы.

— Имея полный набор инвариантов $\mathcal{K}_\varphi(c)$, анализируем атомы на границе каждой 2-клетки. Это дает полную информацию об устойчивости соответствующих замкнутых орбит и определяет соответствующую круговую молекулу (в грубом смысле). Для невырожденных орбит низкой сложности устанавливается и тонкая топология круговой молекулы.

— В приводимом случае на основе информации, полученной на предыдущих этапах, метод круговых молекул А.Т.Фоменко – А.В.Болсинова дает описание тонких топологических инвариантов (меченые круговые молекулы для точек 0-остова $D_\varphi(c)$ и изоэнергетические графы Фоменко с матрицами склейки).

На практике последовательность шагов может быть выбрана иной. Так, для систем с представлением Лакса можно первыми определить поверхности Π_i (однако для обоснования позже потребуется вычисление критического множества). Из уравнений поверхностей можно получить инвариантные соотношения, задающие критические подсистемы, а также специальные интегралы, применяемые при вычислении характеристических показателей типов критических точек. Это, в свою очередь, позволяет определить ключевые множества и т.д. Результат перечисленных исследований можно назвать *полным топологическим атласом* интегрируемой системы.

ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АТЛАСОВ И КОНСТРУКТОР ИНВАРИАНТОВ ДВУХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ[1]

Харламова И.И., Савушкин А.Ю., Шведов Е.Г.
(Волгоград)
irinah@vags.ru

В лекции М.П.Харламова [1] представлены теоретические основы построения полного топологического атласа интегрируемой системы с тремя степенями свободы, как при наличии группы симметрий (приводимая задача), так и при ее отсутствии. Нами рассматривался класс систем Эйлера на коалгебре Ли L_9^* с гамильтонианами вида $H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - \lambda M_3 - \alpha_1 - \beta_2$, обобщающих случай интегрируемости С.В.Ковалевской на гиростат [2] и двойное силовое поле [3]. Аналитическое описание критических подсистем, вычисление типов особых точек и атомов выполнены в работах М.П.Харламова и П.Е.Рябова.

В сообщение излагается практическое построение разделяющих множеств, классификация изоэнергетических сечений бифуркационных диаграмм, способы вычисления количества связных компонент регулярных многообразий для программной реализации конструктора инвариантов для двух задач. Первая получена при отсутствии второго поля ($\beta_i = 0$) и называется гиростатом Ковалевской – Яхья [2]. Вторая, неприводимая, система получена из общей задачи [3] при $\lambda = 0$ и называется обобщенным волчком Ковалевской. Представлены пакеты программ в системе Mathematica, реализующие все этапы построения полных топологических атласов, включая интерактивное построение изоэнергетических молекул.

Литература

1. *Харламов М. П.* Тезисы доклада в настоящем сборнике.

2. *Yehia H. M.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun., 1986, vol. 13, no. 3, pp.169–172.

3. *Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations // Lett. Math. Phys., 1987, vol. 14, no. 1, pp. 55–61.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97025)

О ПРЕДЕЛАХ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ[1]

Хлопин Д.В. (Екатеринбург)
khlopin@imm.uran.ru

Основным инструментом для построения необходимых условий оптимальности в задачах управления является принцип максимума Понтрягина (ПМП), созданный Л.С. Понтрягиным и его учениками на рубеже 50-60 годов [1]. Необходимость ПМП была доказана ими и для бесконечного промежутка времени, но только для задач с фиксированным на бесконечности правым концом. На хоть сколько-то более широком классе задач ПМП был доказан лишь в 1974 году [2], однако при всей общности использованного метода, он также не давал никаких необходимых условий типа условий трансверсальности на бесконечности. Без такого краевого условия система соотношений принципа максимума является не полной, а следовательно автоматически выделяет слишком много подозрительных на оптимум решений. Как следствие, возможности принципа максимума в некоторый момент показались исчерпанными, например отметим вывод в [3]: "Unfortunately the resulting characterization of the cases where the transversality condition holds reveals unpractical."

Основной трудностью для построения "практичного" условия трансверсальности является требование выделить для сопряженного уравнения (то есть в линейном уравнении) асимптотику, которой удовлетворяет хотя бы одно, но и не все ее решения. Впервые это удалось сделать в [4] при линейной динамике в задаче со свободным правым концом за счет перехода к функциональному пространству, позволяющему продолжать на бесконечность все нужные решения единственным образом. Сопряженная переменная становится при этом несобственным интегралом с переменным нижним пределом, для его сходимости требуются сильные ограничения на рост решений системы принципа максимум, но полученная для сопряженной переменной формула дополняет ПМП до полной системы.

В работах С.М.Асеева, А.В.Кряжимского, В.М.Вельева, К.О.Бесова (см., например, [5,6]) формула была получена для некоторых классов нелинейных задач. При этом, в стационарном случае применялись приближающие исходную линейные задачи,

[1] Работа частично поддержана грантами РФФИ № 12–01–31172–мол-а, №12–01–00537–а

для нестационарных задач параллельно доказательству ПМП аккуратно считался предел для построенной там сопряженной переменной.

Полученное выражение для сопряженной переменной можно понимать следующим образом. Рассмотрим исходную задачу оптимизации с такой же динамикой, с той же подынтегральной функцией в целевом функционале, но на конечном промежутке времени. Построим такую последовательность задач на все больших временных отрезках. Выпишем для них необходимые условия оптимальности (краевые задачи), и сопряженные переменные им удовлетворяющие. Если исходная задача невырождена, а предел сопряженных переменных существует и не зависит от выбора все возрастающих временных промежутков, то полученное в пределе и будет тем самым выражением. Но можно сразу искать решение ПМП в таком виде, в виде предела решений набора краевых задач соотношений ПМП (назовем такое решение ПМП предельным решением). Соответствующий принцип, но без получения конкретных формул для такой сопряженной переменной, был по-видимому впервые сформулирован Сейерстадом [7, Theorem 8.1]. Ему удалось доказать, что существование предельного решения ПМП является необходимым условием оптимальности в некотором классе задач управления.

Во всех перечисленных выше работах доказательство необходимости такого предельного решения ПМП требует абсолютную сходимость соответствующего несобственного интеграла, что, в свою очередь, достигается прежде всего за счет экспоненциально убывающих на бесконечности оценок на нужные при доказательстве функции. Можно обойтись без этого.

Для обеспечения сходимости как в соотношениях ПМП, и в их решениях, достаточно перейти к правильно подобранным компактам как для управлений, так и для траекторий и сопряженных переменных; естественным конструктором при этом становится хорошо известное в топологии понятие обратного спектра. (Само по себе погружение исходного пространства допустимых управлений в пространство, оснащенное более удобной топологией, достаточно известный, восходящий еще к Гильберту прием). С доказательством необходимости полученных соотношений дело обстоит сложнее.

В задачах на бесконечном промежутке имеется много разных критериев оптимальности управления. Поскольку для большинства этих критериев ПМП является необходимым условием, выбор критерия должен отражаться и виде необходимого для него краевого условия. Как прямое следствие этого, после получения за счет компактности, предельного соотношения, доказательство собственно необходимости этого условия должно опираться на рассматриваемый критерий оптимальности. Каждый критерий диктует свои методы, свой выбор топологии для бесконечности (сравните [8,9]).

В серии докладов предлагается обсудить получение таких необходимых условий для критериев "uniformly weakly overtaking optimal", "strong optimal", "agreeable optimal" прежде всего для задач со свободным правым концом.

Литература

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.,Ф.* Математическая теория оптимальных процессов М.: Физматгиз, 1961

2. *Halkin H.* Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons // Econometrica, 1974, Vol. 42, p. 267–272.

3. *Le Van C., Boucekkine R., Saglam C.* Optimal control in infinite horizon problems : a Sobolev space approach // Economic theory, V.32, 2007, No. 3, p. 497-507.

4. *Aubin J. P., Clarke F. H.* Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 17, 1979. p. 567-586

5. Асеев С.М., Кряжимский А.В., Бесов К.О. Задачи оптимального управления на бесконечном промежутке времени в экономике // УМН, 2012. Т. 67, 2(404), с.3-64

6. *Aseev S. M., Veliov V. M.* Maximum Principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B., 2012, V. 19, no. 1–2, p. 43–63

7. *Seierstad A.* Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103, no. 1. p. 201–230

8. *Хлопин Д.В.* О необходимых краевых условиях для сильно оптимального управления в задачах на бесконечном промежутке // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки, 2013, вып. 1, с. 49-58

9. *Khlopin D. V.* Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // arXiv:1207.5358, 2012. 33 p.

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТИ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ПРОХОЖДЕНИЯ ПО ДУГАМ ОТ ВРЕМЕНИ

Чеботарева А.С. (Ростов-на-Дону)

chebot_88@mail.ru

Рассмотрена задача нахождения максимального потока [1] в ориентированной $G(X, U, f)$ с циклической зависимостью длительностей дуг от времени [2],[3].

Теорема. *Для величины максимального потока V^* в сети G с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени имеет место соотношение*

$$\min_{(X,Y)} \sum_{u \in M'} C(u) \leqslant V^* \leqslant \min_{(X,Y)} \sum_{u \in M} C(u).$$

где $M\,(M')$ — максимальное подмножество разреза (X, Y), содержащее наибольшее (наименьшее) число элементов множества (X, Y) такое, что $\forall u,\, v \in M\,(M')$ выполняется $h(u, v) = 0$, т. е. дуги u, v не являются взаимно влияющими.

Литература

Басангова Е. О., Ерусалимский Я. М. Алгоритм нахождения максимального потока в частично–ориентированной сети. // В сб. «Дискретные структуры и их приложения». Элиста, КГУ. 1988. С. 23–28.

Скороходов В. А., Чеботарева А. С. Максимальный поток в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени. // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион, Естественные науки. №5, 2011. С. 23–27.

Скороходов В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2011, №1, с. 21–26.

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕНИИ ДВУХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ТРЕЩИНОЙ НА ГРАНИЦЕ

Черникова А.С. (Воронеж)

chernikova-an@mail.ru

Рассматривается задача о стационарном распределении поля температуры в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов, с трещиной на границе сопряжения материалов. Данная задача моделируется следующей краевой задачей для системы уравнений с частными производными

$$\Delta v_i(x_1,x_2) - \frac{k_i^2}{4} v_i(x_1,x_2) = 0, x_1 \in \mathbb{R}, (-1)^{i+1} x_2 > 0, i = 1; 2$$

с условиями на границе материалов $\Gamma = \{x | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0\}$:

$$v_1(x_1,+0) - v_2(x_1,-0) = q_0(x_1),$$

$$-\frac{k_1}{2} v_1(x_1,+0) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1,+0) + \frac{k_2}{2} v_2(x_1,-0) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1,-0) = q_1(x_1).$$

Функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны, $supp\ q_0(x_1) = supp\ q_1(x_1) = [-1,1]$, $q_0(x_1), q_1(x_1) \in C^2([-1,1])$.

Получено явное представление решения рассматриваемой задачи, а также построены его асимптотики и асимптотики всех его первых
производных вблизи трещины. Для примера приведем асимптотическое представление $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{q_1(-1)}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2} + \frac{q_1(1)}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2} +$$
$$+ \left(-\frac{x_2}{2\pi((x_1+1)^2 + x_2^2)} + \frac{k_1+k_2}{8\pi} \ln \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2} \right) q_0(-1) -$$
$$- \left(-\frac{x_2}{2\pi((x_1-1)^2 + x_2^2)} + \frac{k_1+k_2}{8\pi} \ln \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2} \right) q_0(1) +$$
$$+ R(x_1,x_2),$$

где $R(x_1,x_2)$ равномерно ограничена при $x_2 \to +0, x_1 \in [-1,1]$.

О СХОДИМОСТИ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)
chavnn@mail.ru

Пусть заданы: $n, m, \ell, s \in \mathbf{N}$; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое и ограниченое; $\mathcal{D}_\infty = \{u \in L_\infty^s(\Pi) : u_i(t) \in [\alpha_i; \beta_i], i = \overline{1,s}\}$; $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$;

[1]Поддержка Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными вузами (шифр заявки 1.1907.2011)

$\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}} = L_\sigma(\Pi)$, $q^{-1} + \sigma^{-1} = p^{-1}$; $\mathcal{U} = L_\infty(\Pi)$, $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – ЛОО. Рассмотрим уравнение [1]

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell. \tag{1}$$

Здесь $u \in \mathcal{D}_\infty$ – управление, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$; $f : \Pi \times \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – функция, дифференцируемая по $y \in \mathbf{R}^\ell$, $u \in \mathbf{R}^s$ и вместе с f'_y, f'_u измеримая по $t \in \Pi$ и непрерывная по $\{y; u\}$. Предположения: $\mathbf{F}_1$) $f\big(.,y,u\big) \in \mathcal{Z}^m$ $\forall y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$; $\mathbf{F}_2$) $f'_y(.,y,u) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{X}}^{m\times\ell}$, $f'_u(.,y,u) \in \mathcal{Z}^{m\times s}$ $\forall\{y,u\} \in \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{U}^s$; $\mathbf{A}_1$) $\forall y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{X}}^{m\times\ell}$ ЛОО $A_{\sim y} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$ и $A_{y\sim} : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}^m$, определяемые формулами: $A_{\sim y}[x] = A[yx]$, $x \in \mathcal{X}^\ell$, $A_{y\sim}[z] = yA[z]$, $z \in \mathcal{Z}^m$, квазинильпотентны; $\mathbf{A}_2$) ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ имеет положительную мажоранту $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, причем $\forall y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{X}}$ ЛОО $B_y : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ определяемый как $B_y[x] = B[yx]$, $x \in \mathcal{X}$, квазинильпотентен; $\mathbf{H}$) Уравнение (1) $\forall u \in \mathcal{D}_\infty$ имеет единственное решение x_u, причем $\exists\, x_* \in \mathcal{X}$: $|x_u| \leqslant x_*$ $\forall u \in \mathcal{D}_\infty$. Функционал $J[u] = \Phi\Big[F(.,x_u,u)\Big]$, где $\Phi \in \Big(\widehat{\mathcal{Z}}^{\hat m}\Big)^*$, $\widehat{\mathcal{Z}} = L_{\hat p}(\Pi)$, $\hat p \in [1; q]$, $\hat p < \infty$; $F(t,x,v)$ удовлетворяет $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) при $m = \hat m$, $\mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{Z}}_{\mathcal{X}}$. Возьмем $\mathcal{R}$ – разбиение $\Pi = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\kappa} \Pi_j$ мелкости $|\mathcal{R}| = \max\limits_{j=\overline{1,\kappa}} \mathrm{diam}\,(\Pi_j)$; $W = \{w : w_{ij} \in [\alpha_i; \beta_i],\ i = \overline{1,s},\ j = \overline{1,\kappa}\} \subset \mathbf{R}^\mu$, где $\mu = s\,\kappa$; $\mathcal{D} = \{u \in L^s_\infty(\Pi) : u_i(t) \equiv w_{ij} \in [\alpha_i; \beta_i],\ t \in \Pi_j,\ i = \overline{1,s},\ j = \overline{1,\kappa}\}$; $u = u\{w\} \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\infty$ $\forall w \in W$.

Теорема 1. $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{u} \in \mathcal{D}_\infty$ $\exists \delta > 0$*:* $\forall \mathcal{R}$, $|\mathcal{R}| < \delta$, $\exists w \in W$*: для* $u = u\{w\} \in \mathcal{D}$ *имеем:* $\big|J[u] - J[\overline{u}]\big| < \varepsilon$.

Литература

1. *Чернов А. В.* О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. выч. матем. и матем. физ. 2011. Т.51, № 9. С.1616–1629.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ, РАЗРЫВНЫМ В ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТОЧКЕ

Чернов А.О., Изюрьева Е.С. (Воронеж, Шанхай)
achernov_90@mail.ru, selena-denada@yandex.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$
\begin{aligned}
J(u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1(t_1)-\xi_1 \\ x_2(t_1)-\xi_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} F_1(x_1(t_1)-\xi_1) \\ F_2(x_2(t_1)-\xi_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} + \\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\begin{pmatrix} x_i(t) \\ u_i(t) \end{pmatrix}' \mathbb{W}_i(t) \begin{pmatrix} x_i(t) \\ u_i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_i(t) \\ h_i(t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x_i(t) \\ u_i(t) \end{pmatrix} \right) dt
\end{aligned} \tag{1}
$$

на траекториях системы

$$
\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = A_i(t)x_i(t) + B_i(t)u_i(t) + f_i(t), \ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \ i=1,2 \\ x_1(0) = x^0, \quad x_2(t_1) = x_1(t_1) + p, \end{cases} \tag{2}
$$

где $x_i(t) \in X, \ u_i(t) \in U_i; \ \mathbb{W}_i = \begin{pmatrix} W_i(t) & S_i(t) \\ S_i(t)' & R_i(t) \end{pmatrix}; \ A_i(t), \ W_i(t) \in L(X), \ B_i(t), S_i(t) \in L(U_i, X), R_i(t) \in L(U_i) \ t \in [t_{i-1}, t_i]$,
$t_1 \in [0, T]$ фиксировано, $i = 1, 2, \ t_0 = 0, t_2 = T; \ X, \ U_i$ - действительные конечномерные евклидовы пространства; операторы $F_i, \ W_i, \ R_i, \ i = 1, 2$, симметрические; $F_i, W_i(t) \geqslant 0; \ R_i(t) > 0$; элементы $x^0, p, \xi_i, g_i \in X$ и функции $p_i(t), h_i(t), \ i = 1, 2$, заданы; все коэффициенты предполагаются непрерывными, штрих означает транспонирование.

Условия оптимальности управления в форме принципа максимума (необходимое условие) получены в работе [1] для нелинейного случая с переменной точкой переключения.

В настоящей работе для задачи (1)-(2) доказано достаточное условие оптимальности управления и установлена однозначная разрешимость.

Литература

1. *Захаров Г.К.* Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // АиТ. 1993 №1. С. 32-36

ГЕОМЕТРИЯ РЕШЁТОК[1]

Черябкин А.П. (Коломна)
cheriabkin@rambler.ru

Теория геометрических решеток на евклидовой плоскости достаточно хорошо изучена. Установлены важные факты о фундаментальных областях, расстояниях между узлами, а также о площади произвольного многоугольника на решетке(знаменитая формула Пика). Для случая многоугольника с самопересечениями применяется обобщенная формула Пика.

Возникает законный вопрос: можно ли построить теорию решеток на других поверхностях с сохранением всех основных свойств?

На полной сферической поверхности получить построить полный аналог теории решеток нельзя, т.к. не существует разбиения сферы двумя семействами линий на равные четырехугольники. Самым близким разбиением к искомому является разбиение сферы на меридианы и параллели. Но в данном случае нарушается свойство, что в каждом узле пересекаются две линии, образующие решетку. Выходом из такой ситуации может послужить принятие полюса не точкой, а окружностью бесконечно малого радиуса. В этом случае комбинаторные свойства решетки сохраняются.

Если рассматривать не всю сферу, а только часть ее поверхности в форме четырехугольника, стороны которого являются дугами больших окружностей, то в этом случае можно говорить о распространении свойств решеток на участок сферической поверхности. При определенном разбиении такого четырехугольника большими окружностями,которые получаются поворотом из задающих четырухугольник окружностей вокруг оси сферы, мы получаем решеточное разбиение заданного участка. В этом случае удаётся построить теорию решёток на участке сферы.

Литература

Вавилов В.В., Устинов А.В. Многоугольники на решетках. М.: МЦНМО, 2006. — 72 с.

Akihiro Higashitani, MikiyaMasuda. Lattice multi-polygons. ArXiv: 1204.0088v3 [math.CO].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31507)

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Чшиев А.Г. (Владикавказ)
zchaslan@mail.ru

Пусть X – комплексное банахово пространство, $EndX$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов в X, $LR(X)$ – множество всех линейных отношений на X.

Определение 1. ***Полугруппой линейных отношений на подпространстве*** $X_0 \subset X$ *называется функция* $S : (0, \infty) \to LR(X)$ *со свойством* $S(t+s)x = S(t)S(s)x, t, s > 0$, *для любого* $x \in X_0$.

Определение 2. ***Траекторией точки*** $x \in X_0$ *относительно полугруппы* S *называется функция* ξ_x *со свойством:* $\xi_x(t) \in S(t)x, t > 0$. *Непрерывная на* $(0, \infty)$ *траектория* ξ_x *точки* $x \in D_2(S)$ *называется* ***основной****, если* $\lim\limits_{t \to 0+} \xi_x(t) = x$.

Положим $S : (0, \infty) \to LR(X),\ S(t) = T(t)^{-1}$, где $T : (0, \infty) \to EndX$ – полугруппа операторов в X.

Теорема 1. *Функция S есть сильно непрерывная в нуле справа полугруппа линейных отношений на подпространстве*

$$D_2(S) = \bigcap_{t,s>0} \{T(s)y : y \in ImT(t)\}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ – генератор полугруппы T. Тогда линейное отношение*

$$\mathcal{G} = \{(x, -y) : x \in D_2(S),\ \text{где } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

является генератором полугруппы S.

Литература

1. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений. Изв. РАН. Серия матем, 2009.- Т.73.- №2.- С. 3–68.

2. *Hughes Rhonda Jo.* Semigroups of Unbounded Linear Operators in Banach Space. Transactions of the American Mathematical Society, 1977 Vol. 230.- pp. 113-145.

3. *Cross R.* Multivalued linear operators. - New York: M. Dekker, 1998.

4. *Баскаков А.Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов. Матем. заметки, 2008.- Т.84.- №2.- С. 175-192.

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ[1]

Шамолин М.В. (Москва)
shamolin@imec.msu.ru

Исследуются уравнения движения динамически симметричного четырехмерного ($4D-$) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных трехмерных ($3D-$) твердых тел, находящихся в поле сил сопротивления, когда, например, в системе присутствует неконсервативная пара сил, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно [1, 2]. При этом отмечаются случаи интегрируемости в задаче о движении тела в неконсервативном поле при наличии некоторой следящей силы.

Тензор инерции четырехмерного твердого тела представляется в виде

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}.$$

Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и ее рассеяние. Обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Литература

[1] *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд-во "Экзамен 2007. – 352 с.

[2] *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00020-а)

систем // Фунд. и прикл. матем. – 2010. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 3–229.

ПРИБЛИЖЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Широкова Е.А. (Казань)
Elena.Shirokova@kpfu.ru

Известно несколько методов построения конформного отображения единичного круга на заданную область. В последние годы развивается приближенный метод, связанный с исчерпанием кругами ("circle packing") соответствующей области. Здесь предложен метод построения аналитической функции, осуществляющей приближенное конформное отображение единичного круга на односвязную область с гладкой границей, в виде полинома. Такое приближение отображающей функции полиномами удобно, например, для решения основных задач теории упругости, так как существует алгоритм решения плоских задач для областей, получаемых отображением единичного круга рациональной функцией.

Границу области — замкнутую кривую — естественно задавать в виде ряда Фурье

$$z(t) = x(t) + iy(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}, t \in [0, 2\pi].$$

Очевидно, что в том случае, когда $c_{-j} = 0$, $\forall j \in \mathbf{N}$, голоморфная функция, отображающая единичный круг на соответствующую область, имеет вид

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \zeta^k$$

с точностью до вспомогательного внутреннего дробно-линейного отображения единичного круга на себя.

Для случая, когда $\exists j_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $c_{-j_0} \neq 0$,строится новая параметризация исходной границы $\theta = \theta(t)$, приводящая к соответствующему разложению Фурье.

Построение новой параметризации сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Построено несколько примеров, в частности, полином, отображающий единичный круг на область с границей, близкой к эллипсу.

СБРОС СГУСТКА ЭНЕРГИИ ДВИЖУЩИМСЯ БРИЗЕРОМ O(3) ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Шокиров Ф.Ш. (Душанбе)
shokirov@rambler.ru

В настоящей работе приведены результаты исследований движущихся бризерных решений вида

$$\theta(x,t) = 2arctg\left(sech\frac{x-vt}{\sqrt{2(1-v^2/c^2)}}\right), \varphi(x,t) = \omega\tau \qquad (1)$$

O(3) векторной нелинейной сигма-модели с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + sin^2\theta\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - sin^2\theta], \qquad (2)$$

где $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, $\varphi(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ угловые переменные, связанные со стандартными изоспиновыми обозначениями: $s_1 = sin\theta cos\varphi, s_2 = sin\theta sin\varphi, s_3 = cos\theta$ [1,2]. Численными моделированиями установлены особые свойства движущихся бризеров модели (2) в зависимости от скорости их движения (v_{br}) и частоты вращения вектора А3-поля (ω). В частности, при достижении бризерами (1) модели (2) определенного энергетического состояния $E(v_{br}, \omega)$, лишняя энергия бризеров, излучаемая в виде линейных волн возмущений (см. также [3]) формируют хорошо локализованный сгусток энергии, который движется со скоростью v_{be}, где $v_{be} > v_{br}$.

Литература

1. *Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш.* Пороги устойчивости новых одномерных бризерных решений нелинейной сигма-модели теории поля // Докл. АН Республики Таджикистан, 2010, т.53, №8, с. 606 – 611.

2. *Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш.* Бризерные решения одномерной O(3) векторной нелинейной сигма-модели – энергия связи и частотный предел // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: ВГУ, 2011 г., с. 227-230.

3. *Kudryavtsev A., Piette B., Zakrjewsky W.J.* Mesons, Baryons and Waves in the Baby Skyrmion Model. – England, Durham: DH1 3LE – arXiv:hep-th/9611217v1, 26 NOV 1996, DTP-96/17.

ГАЛЕРКИНСКИЕ ПРОЕКТОРЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Шустикова У.И. (Самара)
ulana-1988@mail.ru

1. Постановка задачи

Рассмотрим на множестве $\Omega = [-1;1]x[-1;1]$ краевые задачи вида

$$M_\varepsilon v \equiv -\varepsilon^2 \Delta v + q(z,v) = 0, v|_\Gamma = 0, z \in \Omega \subset R^2, \qquad (1.1)$$

Предлоложим , что параметр ε столь мал, что отрезки внутренней нормали к $\Gamma = \partial\Omega$ не пересекаются в Ω_π(зона пограничного слоя), и $q(z,v)$ — достаточно гладкая по совокупности аргументов функция, причем

$$|q_v(z,v)| \geqslant p_0^2 > 0.$$

Тогда задача (1.1) имеет особенности типа пограничного слоя на границе области Ω.

Определим пробные галеркинские пространства как

$$E = E(\varepsilon,h) = \{v \in C[-1,1] \times C[-1,1] : v(x,y) =$$

$$= a_i + b_i x + c_i y + d_i xy, x \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

$$i,j = -2m, -2m+1, \cdots, 2m; u|_\Gamma = 0\}.$$

Тогда метод Галеркина [4] для задачи (1.1) состоит в отыскании такой функции $v_m \in E$, что для любой $w \in E$

$$\varepsilon^2(\nabla v_m, \nabla w) + (q(z,v_m), w) = 0, \qquad (1.2)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2(\Omega)$.

Будем предполагать, что B_j - базис в E.

Краевые задачи вида (1.1) ,рассмотрим на сетках Шишкина [3].

Теорема 1.1. Найдутся такие числа $\varepsilon_0 > 0, h_0 > 0, \gamma_0 > 0,\ C > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0], h \in (0,h_0] : \varepsilon \leqslant \gamma_1 h$ существуют единственные решения $v_m(z)$ задачи (1.1), для которых справедливы оценки

$$\| v_m - v_\varepsilon \|_C \leqslant Ch^2,$$

где $\| \ \|_C$ — норма в $C(\Omega)$.

При доказательстве теоремы 1.1 нам понадобятся конструкции и некоторые свойства галеркинского проектора и биортогонального базиса.

2. Галеркинские проекторы и их свойства

Предположим, что задача (1.1) имеет единственное решение $v_\varepsilon \in H^1(\Omega)\bigcap C_0(\Omega)$. Тогда определен линейный оператор $P = P(\varepsilon, m)$, ставящий в соответствие каждому $v = v_\varepsilon$, который назовем галеркинский проектор [2].

Рассмотрим свойства Галеркинского проектора в терминах билинейных форм.

Лемма 2.1. Пусть существует базис $\{\lambda_i\}$, биортогональный к базису $\{B_j\}$ в смысле формы M_ε. Тогда галеркинский проектор существует, и справедливо представление

$$Pv = \sum_{i=1}^{s} M_\varepsilon(v, \lambda_i) B_i.$$

Лемма 2.2. Пусть базис $\{\lambda_i\}$ биортогонален к $\{B_i\}$, причем найдутся такие константы C_3 C_4, что для любого $v \in C_0(\Omega)\cap H^1(\Omega)$

$$\| B_i \|_C \, |M_\varepsilon(v, \lambda_i)| \leqslant C_3 \| v \|_C, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{s} |B_i(z)| / \| B_i \|_C \leqslant C_4, z \in \Omega.$$

Тогда метод Галеркина квазиоптимален в $C_0(\Omega)$.

3. Биортогональный базис

Для доказательство теоремы 1.1 мы строим биортогональный базис к B_i на области Ω_π(пограничная зона) и Ω_Δ(центральная зона), а затем производим склейку построенных базисов на Ω_L (общая часть границы областей Ω_π,Ω_Δ), используя следующие свойства дискретного решения. [1]

1^0. Для каждой из систем $\{B_{i,l}(z)\}, i \in J_l, l \in \{\pi, \Delta\}$ в ее линейной оболочке существует биортогональный базис $\{\mu_{i,l}\}, i \in J_l$, удовлетворяющий условию вида (2.1).

2^0. Для любых $i \in J_l, n \in N : \sum_{n\in N} |M_\varepsilon(B_{n,l}, \mu_{i,l})| \leqslant C, l \in \{\pi, \Delta\}$.

3^0. $\| B_{i,l} \|_C \; |M_\varepsilon(v, u_l(z, \alpha))| \leqslant C \| v \|_C \| \alpha \|_1, i \in N$, где $v \in C_0(\Omega_l) \cap H^1(\Omega_l)$

4^0. $|M_\varepsilon(B_{n,\Delta}, B_{i,\Delta})| \leqslant C, i \in I_\Delta$.

5^0. $|M_\varepsilon(v, B_{n.l})| \| B_{n,l} \|_C \leqslant C \| v \|_C, v \in C(\Omega_l) \cap H^1(\Omega_l), n \in N; l \in \{\pi, \Delta\}$.

6^0. $\max \| B_n \|_C / \min \| B_{n,l} \|_C \leqslant C, n \in N$.

7^0. Для системы функций $\{B_{i,\Delta}(z)\}, i \in I_\Delta$ существует биортогональнвый базис $\{\lambda_{i,\Delta}(z)\}$, удовлетворяющий условию вида (3.1).
8^0. В представлении $\lambda_{i,\Delta}(z) = \sum_{j \in I_\Delta} \alpha_j^i B_{j,\Delta}(z)$ набор $\alpha^i = \{\alpha_j^i\}$ удовлетворяет оценке $\| \alpha \|_1 \leqslant C$.
9^0. Пусть при $i \in J_l$ $\| B_i \|_C \sum_{n \in N} |M_\varepsilon(B_{n.l}, \mu_{i,l})| / \| B_n \|_C \leqslant C, l \in \{\pi, \Delta\}, n \in N$, причем C не зависит от n.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия $1^0 - 6^0$, тогда для любого набора чисел λ_i, существует единственное дискретное решение $u_l(z, \lambda_i)$ в области Ω_l.

Лемма 3.2 При выполнении условий $1^0 - 9^0$ для системы $\{\beta_i(z)\}, i \in I$ при достаточно малых ε, h существует биортогональный в смысле формы M_ε базис, удовлетворяющий условию (2.1).
Данные конструкции галеркинского проектора и биортогонального базиса позволяют нам доказать теорему 1.1 для данного класса ллиптических сингулярно возмущенных краевых задач.

Литература

1. *Блатов. И.А.* О методе конечных элементов Галеркина для сингулярно возмущенных параболических начально-краевых задач. Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32. N 5. С.661-669.

2. *Блатов И.А., Стрыгин В.В..* Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем. Воронеж: ВГУ, 1997.

3. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для решения эллиптического уравнения с малым параметром в области с криволинейной границей. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1978. Т.18. N 6. С.1466-1475.
4. *Марчук Г.И.,Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕМЕННЫХ ПОРЯДКОВ НА ГРАФАХ[1]

Юрко В.А. (Саратов)

yurkova@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный звездообразный граф T в $\mathbf{R}^\omega$ с множеством вершин $V = \{v_0, \ldots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_p\}$,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

где $v_1, \dots, v_p$ – граничные вершины, v_0 – внутренняя вершина и $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,p}$, $\bigcap_{j=1}^{p} e_j = \{v_0\}$. Пусть l_j – длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что $x_j = 0$ соответствуют граничным вершинам $v_1, \dots, v_p$. Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,p}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j. Зафиксируем n, N и m так, что $1 < N < n$ и $0 < m < p$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$y_j^{(n)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{n-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{1,m},$$

$$y_j^{(N)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{N-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{m+1,p},$$

где $q_{\mu j}(x_j)$ – комплекснозначные интегрируемые функции. Будем называть $q_j = \{q_{\mu j}\}$ потенциалом на ребре e_j, а $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,p}}$ – потенциалом на графе T.

Пусть $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1,p}$ – матрица Вейля относительно граничной вершины v_s (см. [1]). Обратные задачи ставятся следующим образом.

Обратная задача 1. Даны $\{M_s(\lambda)\}_{s=\overline{1,p-1}}$, построить q на T.

Обратная задача 2. Даны $\{M_s(\lambda)\}_{s=\overline{2,p}}$, построить q на T.

Теорема 1. *Задание матриц Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{1,p-1}}$ однозначно определяет потенциал q на T.*

Теорема 2. *Задание матриц Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{2,p}}$ однозначно определяет потенциал q на T.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [2] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Литература

1. Yurko V.A.. Spectral analysis for differential operators on star-type graphs with different orders on different edges. Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik, SM-DU-747, Universitaet Duisburg-Essen, 2012, 10pp.

2. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* - М.: Физматлит, 2007.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ МИКРОСТРУКТУРНОГО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

Ал Имам Адель А. Абед Ал-Вахаб, Вервейко Н.Д.
(Воронеж)

Математическая модель течения микроструктурного вязкопластического материала отличается от классической модели наличием слагаемых обусловленных учетом микроструктуры, характеризуемой параметром δ ($\delta = h/D$), где h — линейный размер представительного элемента, D — характерный линейный размер исследуемой задачи. В самих уравнениях движения дополнительные слагаемые стоят с коэффициентом δ^2 при старших производных, что делает задачу сингулярно возмущенной.

Для случая продольного течения вязкопластического материала в кольцевом зазоре дифференциальное уравнение для скорости $w(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2w}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\left[\frac{dw}{d\xi}+\frac{\delta^2}{12}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2w}{d\xi^2}\right)\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2w}{d\xi^2}\right)\right]=-q^2 \quad (1)$$

здесь: $\xi = r/R_0$, $w = v/V_0$, $\delta = h/R_0$, $q^2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{R_0^2}{V_0}$, V_0 — характерная скорость, q^2 — безразмерный перепад давления вдоль трубы, μ — коэффициент вязкости.

В качестве граничных условий для обыкновенного дифференциального уравнения (1) поставим условия: прилипания представительного элемента $\Delta V = h^3$ к внутренней и внещней границам зазора $r = R^-$, $r = R^+$, поворота этого элемента на границе $r = R^-$, покоя элемента $\Delta V = h^3$ на границе застойной зоны $r = R^*$, условия недеформируемости представительного элемента на границе застойной зоны и условия достижения предельного напряженного состояния материала на границе $r = R^*$ застойной зоны.

$$w(\xi^+)=0,\ \left(\frac{dw}{d\xi}-\gamma\frac{d^2w}{d\xi^2}\right)\bigg|_{\xi=\xi^+}=0, w(\xi^*)=0,\ \frac{dw}{d\xi}\bigg|_{\xi=\xi^*}=0, \quad (2)$$

$$\tau_{rz}=K_0=2\mu\varepsilon_{rz}(\xi^*).$$

Внешнее разложение решения $w(\xi,\delta)$ в степенной ряд по параметру δ приводит в нулевом приближении уравнения (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, так что можно выполнить только часто граничных условий (2). Анализ задачи (1-2) показал, что возможным является течение с образованием застойной зоны в окрестности внутреннего контура цилиндрической щели. В нулевом приближении ряда по степеням параметра δ распределение скорости $w(\xi)$ вдоль радиуса имеет вид

$$w(\xi) = q^2/2\left[(\xi^2 - {\xi^*}^2) + 2{\xi^*}^2 \ln\left(\frac{\xi}{\xi^*}\right)\right]. \qquad (3)$$

При этом имеет место проскальзывание вдоль внешней стенки $r = R^+$ со скоростью

$$w(\xi^+) = w(1) = q^2/(\gamma+1)\left(\ln\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma} - \gamma\right]. \qquad (4)$$

На рисунке представлен график распределения $z = w(\xi)/q^2/2$ в поперечном сечении кольцевого зазора в области течения $\xi \geqslant \xi^*$, при этом граничное условие прилипания не выполнено и требуется решение в пограничном слое отличная от нуля скорость на внешнем контуре щели $\xi = \xi^+$ даёт проскальзывание $w(\xi^+) \neq 0$.

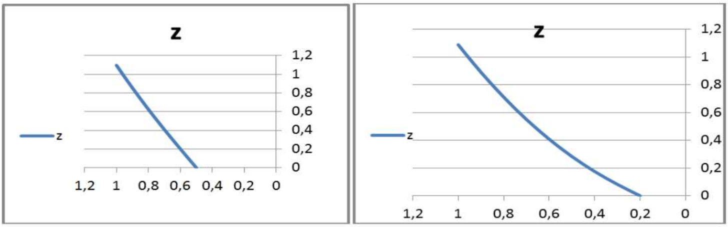

Рис. 1: Графики распределения скорости течения вязкопластического микроструктурного материала в кольцевом зазоре с образованием застойной зоны за случаев $\xi^* = 0{,}2$ и $\xi^+ = 0{,}5$.

Литература

1. Лодж А.С. Эластичные жидкости.М.Наука 1969,46 Ис.

2. Быкова М.И. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры/ М.И.Быкова, Н.О.Вервейко, П.П.Сумец, С.А. Шишкина. Воронеж: Изд.ВГУ,2010.-192с.

3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М: Мир, 1967. — 310с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МИКРОСТРУКТУРНОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

Вервейко Н.Д., Ноаман С.А. (Воронеж)

Течение вязкопластических материалов с учетом характерного размера h представительного элемента обладает особеностью порожденной учетом безразмерного малого линейного параметра $\delta = h/D$ где D – характерны линейный размер самой задачи.

Учёт этого малого параметра б в выражении для скорости деформации приводит к следующему уточнению скорости деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \delta^2/6 \, \Delta \, \varepsilon_{ij}^c \tag{1}$$

Здесь: $\varepsilon_{ij}^c = (1/2)\,(\nu_{i,j} + \nu_{j,i})$,Δ- оператор Лапласа ,ν_i скорость .

Уравнения движения несжимаемого вязкопластического материала вместе с реологическими уравнениями составляют замкнутую систему уравнений для напряжений σ_{ij} и скорости ν_i

$$\rho\,(\nu_{i,t} + \nu_k \nu_{i,k}) = \sigma_{ij,j} \ ; \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \ ; \ \sigma'_{ij} \geqslant 2K_0^2 \ . \tag{3}$$

K$_0$- предел пластичности, μ коэффициент вязкости.

Для случая сдвигового движения вязкопластического материала в кольцевом зазоре уравнение движения для скорости течения $\nu_\varphi = W\,(r)$ имеет вид

$$\frac{\delta^2}{6}\left(W' - \frac{W}{r}\right)^{?} + \frac{\delta^2}{6}\frac{1}{r}\left(W' - \frac{W}{r}\right)' + \left(W' - \frac{W}{r}\right) = \mathrm{C} \quad ; \tag{4}$$

$$W\left(r^-\right) = W_0 \ ; \ \ W\,(r^*) = 0 \ ; \ \ W'\,(r^*) = 0 \ ; \ K_0 = 2\varepsilon_{r\varphi}\,(r^*)\,.$$

Граничные условия состоят: в движении со скорости W$_0$внутреннего контура цилиндрической щели покое границы r^* застойной зоны, недеформируемости застойной зоны и достижения на границе застойной зоны предельного напряженного состояния.

Внешнее разложение решения $W\left(r_1\delta\right)$ в ряд по δ в нулевом приближении позволяет найти скорость течения $W^0\left(r\right)$ и границу застойной зоны $r = r^*$

$$W^0\left(r\right) = W^0\ A\ \left(-\frac{r}{r^*} + \frac{r^*}{r}\right) \quad ; \tag{5}$$

$$\left(r^*/r^-\right)^2 = 1 + 2\text{B}\ \left(1 + \frac{2/3\ \delta^2}{1+2\text{B}}\right)\ ;$$

где: $\text{A} = r^*\, r^- \,/\, \left({r^*}^2 - {r^-}^2\right)$; $\text{B} = \mu W^0/K_0 r^-$.

$$r^- 0 r^* r^+ r W/\left(W^0\, A\right)$$

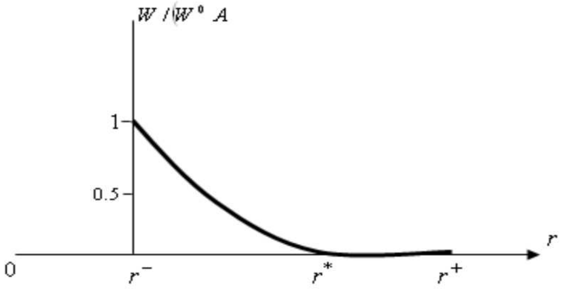

Рис. 1: график относительности скорости движения вязкопластической микроструктурной жидкости в области течение $r \in \left[r^-, r^*\right]$ вне застойной зоны $r \in \left[r^*, r^+\right]$.

$$\delta^2 B r * / r^-$$

На рис 1-2 представлены графики распределения относительной скорости течения ($W\left(r\right)/W^0$) по радиус и зависимости безразмерного радиуса застойной зоны ($r*/r^-$) от параметра микроструктурны δ и безразмерного число B, определяющего подобные течения.

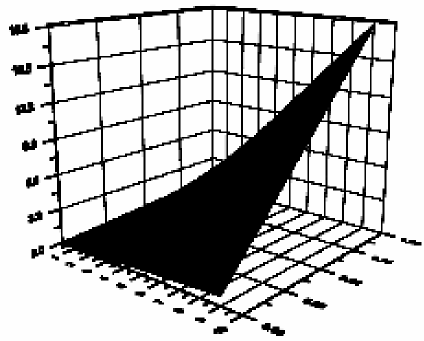

Рис. 2: график квадрата $(r^*/r^-)^2$относительного радиуса застойной зоны в зависимости от безразмерного параметра δ^2и безразмерной величины $\text{B} = \mu W^0/K_0 r^-$определяющей характер течения.

РОЛЬ САМОСТОЯТЕЛНОЙ РАБОТЫ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ "ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ"

Картавая Е.Л. (Воронеж)
CKmenVTST2@yandex.ru

Востребованный на рынке труда специалист должен обладать фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками, опытом творческой исследовательской деятельности, умением самостоятельно пополнять и обновлять знания, вести самостоятельный поиск информации, анализировать информацию, структурировать ее, аргументировано высказывать свою точку зрения, способностью работать в нестандартных ситуациях, принимать на себя ответственность, самостоятельно принимать конструктивные решения проблем. Решению этой задачи в значительной степени способствует самостоятельная работа студентов, организация учебного процесса, при котором студенты самостоятельно приобретают знаний под руководством преподавателя. Одним из важных организационных моментов в планировании самостоятельной работы студентов является составление заданий на самостоятельную работу.

"Приложения производной" включает следующие темы: Геометрический смысл производной, касательная к графику функций. Применение производной в физике и технике. Исследование функций и построение графиков. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке.

В изучении каждой темы можно выделить следующие этапы: теоретический материал (создание опорного конспекта), решение задач, проверка знаний, умений, навыков.

В докладе предлагается опорный конспект по теме "Геометрический смысл производной, касательная к графику функций" , приводятся примеры задач, обсуждаются особенности самостоятельной работы по данной теме.

Самостоятельные работы: создание презентаций по теме, написание рефератов, тестирование в режиме онлайн, например, на сайте http://uztest.ru.

ОПИСАНИЕ ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЙ: АНАЛИЗ, АЛГЕБРА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Лобода А.В. (Воронеж)

На примере аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства обсуждаются алгоритмы получения классификационных результатов в задачах, связанных с однородностью многообразий. При исследовании подобных задач приходится использовать методы математического анализа, алгебры, дифференциальных уравнений. А при наличии относительно высоких размерностей в исходных геометрических задачах их решения не могут быть получены без опоры на современные пакеты символьных вычислений.

Так, в одном из обсуждаемых в докладе случаев аффинной однородности ее изучение сводится к системе из 90 квадратичных комплексных уравнений относительно более чем 30 комплексных неизвестных величин. Использование комбинированных подходов позволяет, тем не менее, получать в подобных задачах различные (в том числе, окончательные) классификационные результаты.

Литература

1. Cartan E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes // Ann. Math. Pura Appl., (4) 11 (1932), P. 17 - 90 (Oeuvres II, 2, 1231 - 1304).

2. Loboda A.V. Three-dimensional real Lie subalgebras of matrix algebra $M(2,\mathbb{C})$). "Russian Journal of Mathematical Physics". 2003, V. 10, N 4, P. 495 - 500.

3. Белых Ф.А., Борзаков А.Ю., Лобода А.В. Вещественные подалгебры малых размерностей матричной алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$. "Известия ВУЗ-ов. Сер. математика 2007, N 5, С. 13 - 24.

4. Лобода А.В., Нгуен Т.Т.З. Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ // Труды МИАН, 2012, Т. 279, С. 93 - 110.

ОЦЕНКИ ОГРАНИЧЕННОСТИ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЛОКАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

Негробова Е.А. (Москва)

katya103.90@mail.ru

В данной работе рассматриваются некоторые оценки максимального оператора в локальных пространствах типа Морри. Локальные пространства типа Морри - это пространства специального вида, нормы которых находятся с определенным весом. Инструментом для изучения свойств и построения оценок служит теория Банаховых функциональных пространств и основанная на ней теория перестановочно инвариантных пространств (К. Беннет, Р. Шарпли). Данная теория применяется в различных приложениях дифференциальных уравнений. Вводится локальное пространство типа Морри $LM_{p\theta,\omega}$, определенное на пространствах всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\| f \|_{LM_{p\theta,\omega}} \equiv \| f \|_{LM_{p\theta,\omega}(B^n)} = \| \omega(r) \| f \|_{L_p(B(o,r))} \|_{L_\theta(o,\infty)},$$

где $0 < p, \theta \leqslant \infty$ и ω - неотрицательная измеримая функция на интервале $(0,\infty)$. Тогда для функций $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ максимальный оператор M есть

$$Mf(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(x,t)|} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)| dy,$$

где $|B(x,t)|$ - измеримый по Лебегу шар $B(x,t)$(В. И. Буренков, М. Л. Гольдман).

Мы рассмотрели применение максимального оператора в случае весов специального вида:

$$\omega(r) = \begin{cases} r^{-\lambda_1}\sigma_1(r), & \text{если } 0 < r \leqslant 1, \\ r^{-\lambda_2}\sigma_2(r), & \text{если } r > 1. \end{cases}$$

где $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ - медленно меняющиеся функции.

I. Пусть $\omega \in \Omega_\theta$, где $\Omega_\theta = \{\omega | (\int\limits_t^\infty \omega^\theta(r)dr)^{\frac{1}{\theta}} < \infty\}$.
ω-неотрицательная измеримая функция на интервале $(t, \infty) : \omega \in \Omega_\theta$, если выполняются следующие условия:
1. $\theta < \infty, \lambda_2 > \frac{1}{\theta}$ или $\lambda_2 = \frac{1}{\theta}$ и $(\int\limits_1^\infty \sigma_2^\theta(r)\frac{dr}{r})^{\frac{1}{\theta}} < \infty$;
2. $\theta = \infty, \lambda_2 > 0$ или $\lambda_2 = 0$ и $\|\sigma_2\|_{L_\infty(1,\infty)} < \infty$.
Если хотя бы одно из условий не выполнено, то $\omega \notin \Omega_\theta$.

II. Пусть $1 < p_1 = p_2, 0 < \theta \leqslant \infty$ или $0 < p_2 < p_1, p_1 > 1, \theta = \infty$. Тогда M - ограниченный оператор, действующий из $L_{p1}(\mathbb{R}^n)$ в $LM_{p2\theta,\omega(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n) \to LM_{p_2\theta,\omega(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \cong \|r^{n(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})}\omega(r)\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

Если выполняются следующие условия:
1. $\lambda_1 < n\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{\theta}$ или $\lambda_1 = n\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{\theta}$ и $(\int\limits_0^1 \sigma_1^\theta(r)\frac{dr}{r})^{\frac{1}{\theta}} < \infty$;
2. $\lambda_2 > n\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{\theta}$ или $\lambda_2 = n\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{\theta}$ и $(\int\limits_1^\infty \sigma_1^\theta(r)\frac{dr}{r})^{\frac{1}{\theta}} < \infty$.
Если хотя бы одно из условий нарушено, то условие ограниченности оператора M не выполняется, т.е. $\|M\|_{L_{p1}(\mathbb{R}^n) \to LM_{p_2\theta,\omega(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \infty$.

Таким образом, были получены оценки для максимального оператора в случае весов специального вида. Этот результат может быть использован для вычислений различных примеров, например, где специальный вес представляет собой логарифмическую функцию.

Литература

C. Bennett, R. Sharpley Interpolation of operators. Pure and Appl. Mathem., V.129, 1988 *V. I. Burenkov, M. L. Goldman* Necessary and

sufficient conditions for boundedness of the maximal operator from Lebegue spaces to Morrey-type spaces. Studia Math., 163 (2), 2007
В. И. Буренков, М. Л. Гольдман Методические рекомендации к изучению курса "Функциональные пространства."М: Издательство УДН, 1992

МОЖНО ЛИ ПОВЫСИТЬ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТЬ РОССИЙСКОГО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Скляднев С.А. (Воронеж)
prfa@main.vsu.ru

Перманентное падение конкурентоспособности и качества нашего образования закономерно и будет продолжаться в дальнейшем, так как на российском “рынке образовательных услуг” не только отсутствуют механизмы противодействия деструктивным тенденциям, но эти механизмы в рамках действующего законодательства и не могут быть созданы.

Более того, как показано К Титаевым “в высшем образовании в ходе повторяющихся взаимодействий (преподаватели — студенты) возник негласный (никто из участников не брал на себя формальных проговоренных обязательств такого рода), добровольный (преподавателю никто не запрещает быть “суровым”, а студенту — добросовестно сдавать экзамены) сговор, который снижает уровень знаний среднего выпускника и приводит к неэффективному расходованию бюджетных средств.......отношения “преподаватель — студент” строятся как классический сговор, то есть представляют собой непроговоренные, но скоординированные стратегии двух групп участников, которые позволяют им увеличить субъективно оцениваемые индивидуальные выигрыши (простота работы для преподавателя и простота учебы для студента) и при этом наносят ущерб общему благу и третьим лицам. В российской вузовской системе никто не запрещает преподавателю хорошо преподавать, а студенту — хорошо учиться и действительно знать предмет. Беда в том, что хорошее преподавание и учеба никак не стимулируются институтами, которые формируются в процессе создания сговора. В современном российском вузе никаких стимулов хорошо преподавать и хорошо учиться нет. Ни профессура, ни студенчество, ни вузовская администрация никогда не смогут переломить сложившуюся ситуацию.”

Итак, что делать?

Ответ предельно прост – не мешать университетам создавать собственные механизмы противодействия деструктивным тенденциям внося в свои Уставы изменения и дополнения, разработанные, по прямому поручению Конференции министров образования европейских стран, подписавших Болонскую декларацию, Европейской ассоциацией по гарантии качества высшего образования (ENQA) (см. "Стандарты и рекомендации для гарантии качества высшего образования в Европейском пространстве").

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

Ульянова Е.Л., Попова М.С. (Воронеж)

Для краевой задачи, задаваемой дифференциальным уравнением $Ax''(t) + Bx(t) = \lambda x(t)$ и краевыми условиями $x(0) = x(1)$, где A, B матрицы второго порядка, а $x(t)$ двумерная векторная функция, доказано, что при $\lambda_{k1,2} = \frac{-\pi^2 k^2 trA - trB}{2} + \frac{\pi^2 k^2}{2} \|a_{11} - a_{22}\|(1 + \frac{b_{11} - b_{22}}{pi^2 k^2} 2\|a_{11} - a_{22}\| \sqrt{1 + \frac{4b_{11}b_{22}}{(|a_{11} - a_{22}|\pi^2 k^2 + (b_{11} - b_{22}))^2}}$ существует ненулевое решение.

Литература

1. А.Г.Баскаков, Гармонический анализ линейных операторов, Изд.-во Воронежского университета,Воронеж, 1987.

2. Л.Коллатц, *Задачи на собственные значения*, изд.-во Наука, Москва, 1969.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОЭТАПНОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ ОДНОЙ ВОЗМУЩЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДАС

Фам Туан Кыонг (Ханой)

tuancuong@yahoo.com

Рассматривается пример нелинейной нестационарной возмущенной при помощи малого параметра ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$) дифференциально алгебраической системы (ДАС):

$$A(t;\varepsilon)\frac{dx(t;\varepsilon)}{dt} = B(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) + G(t;\varepsilon;x(t;\varepsilon)) + f(t;\varepsilon), \qquad (1)$$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 01-01-00328.

$$F(t;\varepsilon) = C(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon), \qquad (2)$$

где $x(t;\varepsilon), f(t;\varepsilon) \in R^n$; $F(t;\varepsilon) \in R^m$; коэффициенты $A(t;\varepsilon), B(t;\varepsilon), C(t;\varepsilon)$ - матрицы соответствующих размеров; слагаемое $G(t;\varepsilon;x(t;\varepsilon))$ устанавливает нелинейное соответствие между компонентами вектор функции $x(t;\varepsilon)$; $t \in [0,T]$ (T - конечно или бесконечно).

Вектор-функция $x(t;\varepsilon)$ называется вектором состояния системы, $f(t;\varepsilon), F(t;\varepsilon)$ - входная и выходная функции, соответственно.

Входная и выходная функции системы измеряются (наблюдаются) в каждый момент времени.

Для данного примера решается задача построения функции состояния, отвечающая заданным функциям входа-выхода.

Применяется метод поэтапной редукции исходной возмущенной системы, то есть поэтапного (пошагового) перехода к эквивалентным системам в подпространствах. Полная редукция реализуется за конечное равное p ($p \leqslant n$) число шагов. Указанный метод применялся ранее для исследования линейных нестационарных, нелинейных стационарных, нелинейных нестационарных систем (см. [1]-[3]).

В рассматриваемом примере возмущенная система (1), (2) является полностью наблюдаемой (идентифицируемой по Калману),то есть по известным, реализуемым входной и выходной функциям состояние системы в каждый момент времени определяется однозначно; предельная же (при $\varepsilon = 0$) система является ненаблюдаемой.

Для рассматриваемого примера нелинейной нестационарной возмущенной ДАС строится функция состояния в явном виде.

Литература

[1] Кыонг Фам Туан Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально алгебраической системы/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Воронежского государственного технического университета. ISSN 1729 - 6501. Воронеж. - 2010. Том 6. № 8. С. 82 - 86.

[2] Кыонг Фам Туан Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов. - 2010. Том 15, вып. 6. С. 1678 - 1679.

[3] Кыонг Фам Туан Исследование полной наблюдаемости одной нелинейной системы/ Фам Туан Кыонг// Вестник Ижевского госу-

дарственного технического университета. ISSN 1813 - 7903. Ижевск. 2011. № 3. С. 152 - 154.

[4] Кыонг Фам Туан Исследование полной наблюдаемости нестационарной возмущенной динамической системы/ Фам Туан Кыонг// Политематический сетевой электронный научный журнал кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [электронный ресурс]. - Краснодар : КубГАУ, 2012.- № 06(80). режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/06/pdf/03/pdf.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА С ПОСТОЯННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Шепилова Е.В. (Воронеж)

elena_ shepilova@mail.ru

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где V' — двойственное к V, а H отождествляется со своим двойственным H'. Вложения являются плотными и непрерывными. На $u, v \in V$ определено семейство симметричных полуторалинейных форм $a(u,v)$ и выполнены оценки:

$$|a(u,v)| \leqslant M_1 \|u\|_V \|v\|_V\,, \quad a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2\,, \text{ где } \alpha > 0\,.$$

Для заданной на $[0,T](T<\infty)$ со значениями в V' функции $f(t)$ и элемента u^0 рассмотрим вариационную задачу: найти функцию $u(t) \in V$ такую, что почти всюду на $[0,T]$ для всех $v \in V$ выполнено

$$(u'(t), v) + i\, a(u(t), v) = (f(t), v), \qquad u(0) = u^0 \in V.$$

Пусть $0 = t_0 < \ldots < t_N = T$ разбиение отрезка $[0,T]$ и V_h — конечномерное подпространство V. Функцию $u_h \in V_h$ назовем приближенным решением нашей задачи, если для всех $v_h \in V_h$ выполнено

$$\left(\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau_k}, v_h\right) + i\, a\left(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}, v_h\right) = \left(\frac{f(t_k) + f(t_{k-1})}{2}, v_h\right),$$

где элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1,N}$.

Теорема *Пусть $u(t)$ — решение исходной задачи такое, что $u' \in L_2(0,T;V)$ и существует $u'' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$. Определим гильбертово пространство $V(A) = \{u, v \in V | (u,v)_{V(A)} = a(u,v)\}$ и рассмотрим $Q_h(A)$ — ортогональный проектор в пространстве $V(A)$ на V_h. Пусть u_k^h — решение приближенной задачи, где $u_0^h = P_h u^0$ (P_h — ортогональный проектор в пространстве H на V_h), тогда справедлива оценка погрешности*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\leqslant c_1\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+$$

$$+\,c_2\int_0^T\|[I-Q_h(A)]\,u(t)\|_H^2\,dt+c_3\int_0^T\|[I-Q_h(A)]\,u'(t)\|_H^2\,dt\,.$$

Литература

Шепилова Е.В. О решении уравнения типа Шредингера с постоянным оператором проекционно-разностным методом со схемой Кранка-Николсон по времени// Вестник ВГУ. — 2011, № 2.

Именной указатель

Верстка и подготовка оригинал-макета:

Шабров С.А.

Издательство Воронежского государственного университета,
394053, г. Воронеж, Университетская пл., 1.
Тир. 500 экз. Подписано к печати 15.04.2013