Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII»

УДК 517.94 (92; 054, 97)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12–01–06808–моб_г

Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXIII». – Воронеж: ВГУ, 2012. 212 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

ISBN

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Авраменко Л.Г. (Киев)

yuragoco@mail.ru

Набор студентов первого курса 2011 года внес существенные коррективы в первоочередные задачи по подготовке учебно - методи ческих материалов на 2011/2012 учебный год. Раннее автор отмечал, что краткий справочник и сборник задач по курсу высшей математики являются наиболее влияющей на качество аудиторной работы во время практических занятий частью учебно-методического комплекса. Однако, по общему мнению коллег, набранный контингент уступает даже студентам-заочникам бывшего СССР. Более того, материал, разъясненный лектором и указанный руководителем практических занятий в кратком справочнике, не обязательно будет воспринят и тем более воспроизведен и использован в решении задачи.

Для обеспечения учебного процесса автором совместно с Гончаренко Ю.В. было подготовлено "Справочное пособие по решению задач курса высшей математики. Неопределенный интеграл"(Киев, 2011, Допомога, 92 с.). Концептуально пособие максимально отражает принцип: "Делай как я". Наиболее близка к нему часть III книги И.А. Каплана Практические занятия по курсу высшей математики.

Содержание пособия разбито на три части. Первая содержит подробное оглавление и расширенную таблицу интегралов, содержащую более 80 интегралов со ссылками на страницу текста, где тот или иной интеграл вычислен. Вторая часть посвящена методам интегрирования и классам интегрируемых функций. Материал второй части содержит необходимые теоретические сведения и 104 решенных примера. При этом авторы стремились не опускать элементарные преобразования и все необходимые выкладки приводить в тексте. Третья часть содержит 508 задач с ответами в конце раздела. При этом подборка задач по темам строго соответствует второй части книги. Так, наличие расширенной таблицы в начале книги существенно ускоряет дальнейшую работу при изучении определенных интегралов и дифференциальных уравнений. Работа с пособием подтвердила его соответствие поставленным целям.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Авраменко Л.Г., Гончаренко Ю.В. (Киев)
yuragoko@mail.ru

В ответ на повсеместное сокращение часов, выделяемых в высших учебных заведениях на курс высшей математики, авторы тезисов в рамках ВВМШ систематически обсуждали меры компенсации этих негативных явлений. Последние годы авторы разрабатывают новый учебно-методический комплекс по курсу высшей математики, о разных аспектах построения которого неоднократно докладывалось в Воронеже. В процессе работы мы убедились, что раннее введение отношения порядка (теорема Биркгофа-Тарского), метрики и метрического пространства (до теоремы Банаха о сжимающем отображении включительно) существенно упрощают изложение и понимание многих разделов. В результате, наши эксперименты начали носить более радикальный характер, касающийся перестановки некоторых разделов в учебных планах.

В 2011/2012 учебном году тема "Числовые ряды"излагалась сразу после предела числовой последовательности, а тема: "Функциональные и степенные ряды" - после равномерной непрерывности функций. Этот подход не является оригинальным и основной его недостаток - дополнительные часы в первом семестре, отсутствие стандартных учебников и "размазывание"свойств рядов по всему курсу. Например, дифференцирование и интегрирование степенных рядов излагалось в виде отдельной лекции во втором семестре.

Главная цель такого изложения - аппроксимационная парадигма, т.е. попытка заставить студента свыкнуться с мыслью о том, что при помощи конечного числа арифметических операций может быть вычислено только значение дробно-рациональной функции. Все остальные, даже элементарные, функции вычисляются с помощью бесконечного числа арифметических операций, а их значение на экране калькулятора - это результат остановки бесконечного процесса, зависящей от требуемой точности вычислений.

В итоге можно сказать, что такой подход для студентов специальности "Прикладная математика" себя оправдал. Подобное изложение во ВТУЗе требует неоправданно больших трудозатрат на подготовку задач, контрольных и расчетно-графических работ. Да и качество первокурсников в 2011 году инновациям не способствует.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ИНЖЕНЕРНЫХ И МОРСКИХ ЗАДАЧАХ

Алексеева О.Ю., Алексеева С.М. (Калининград)
alekseeva-sm@yandex.ru

Решается задача оптимального управления ловом рыбной популяции, позволяющего получить максимальное значение улова в весовом выражении. Исследуется оптимальный режим лова в течение заданного промежутка времени и с учетом периодического пополнения популяции, а также "управляющие"режимы, ориентирующие в условиях данной задачи на максимальное сохранение популяции рыб. Одним из методов решения задачи выбора оптимального режима лова рыбы является метод максимума Понтрягина. "Численные эксперименты"при некоторых дополнительных условиях на организацию лова реализованы с помощью пакета прикладных программ "Mathcad". На основании численных расчетов для модельных примеров получены оптимальные управляющие режимы.

Исследуется некорректная задача минимизации эксплуатационных расходов в логистическом процессе контейнерных перевозок на морском транспорте в условиях неполной определенности исходной информации. Неопределенность является отличительной особенностью различных задач управления деятельностью логистических компаний, а также фактором риска при принятии управленческих решений, поэтому необходимо учитывать ее для более адекватного отражения действительности. Вводя соответствующий параметр, изменяющийся в силу нечетких условий в определенных пределах, получаем параметрическую расстановочную задачу. Дальнейшее исследование проведено в системе MATLAB, в результате которого промежуток изменения параметра разбивается на части, в которых имеется непрерывная зависимость оптимального решения от параметра, и в найденных промежутках рассматриваются оптимальные планы с информацией относительно времени постановки рассматриваемых судов на каждую из линий и соответствующем резерве.

Рассматривается некорректная задача управления решением смешанной задачи теплопроводности с интегральным условием, где управление осуществляется посредством начальной функции. Эта задача исследуется модифицированным методом квазиобращения и методом регуляризации нелокальным условием по времени. Представление решений простроенных регуляризованных задач в виде биортогональных рядов по системе собственных и присоединенных функций соответствующей несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля позволило предложить "практическую"проверку построенных методов на основании численного решения ряда конкретных примеров с использованием математического приложения "Mathcad". На основании проведенных численных расчетов сделаны выводы о структуре управляющей функции, подтверждена теоретически доказанная сходимость методов.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Аль-Джоуфи С.А., Джасим М.Д., Катхим А.Х.
(Махачкала)
mahoodalani@yahoo.com

Рассмотрим уравнение

$$L[y] = y^{(V)} - g_4(x)y^{(IV)} - g_3(x)y^{'''} - g_2(x)y^{''} - g_1(x)y^{'} - g_0(x)y = 0 \quad (1)$$

Предполагаем, что коэффициенты $g_k(x)$ измеримы в $[a, b]$.

Рассмотрим краевые задачи с условиями Валле-Пуссена:

$$y^{(K_j)}(\xi_j) = A_{j,K_j},\ K_j = 0, ..., p_j - 1,\ j = 1, 2, ..., m,\ \sum_{j=0}^{m} p_j = 5,\ m \leqslant 5 \quad (2)$$

В силу теоремы Валле-Пуссена [2] для каждого фиксированного $\alpha \in [a, b)$ существует ненулевой промежуток $[\alpha, \beta)$ в котором любое нетривиальное решение уравнения (1) имеет не более 4 нуля с учетом их кратностей. Этот промежуток называется промежутком неосцилляции для уравнения (1). Промежуток $[\alpha, \mu)$, в котором данная задача имеет единственное решение, назовем докритическим промежутком этой задачи. Максимальный из докритических промежутков задачи с общими началами α обозначим через $[\alpha, r_{p_1-p_k}{}^{(\alpha)}),\ k = 2, 3, 4, 5$.

Понятие докритического промежутка непосредственно связано с распределением нулей решения уравнения (1).

Если при любых $\alpha, \beta \in [s, p(s))$ эта задача имеет единственное решение, максимальный из докритических промежутков с общим началом s обозначим через $[s, r_{41}(s))$. Аналогичным образом через

$$r_{32}(s), r_{23}(s), r_{311}(s), r_{113}(s), r_{221}(s), r_{212}(s), r_{112}(s),$$

$$r_{2111}(s), r_{1211}(s), r_{1121}(s), r_{1112}(s), r_{11111}(s)$$

Промежуток $[s, r_{41}(s))$ это промежуток, в котором нетривиальное решение, имеющее четырехкратный нуль ξ, не имеет более нулей справа от ξ.

В промежутке $[s, r_{32}(s))$ нетривиальное решение, имеющее трехкратный нуль ξ_1, не может иметь еще нуль ξ_2 кратный, кратность которого была бы не ниже второй. Таким же образом остальные промежутки.

Поясним справедливость перечисленных утверждений на примере, чтобы она имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} u_0(\alpha) & u_1(\alpha) & u_2(\alpha) & u_3(\alpha) & u_4(\alpha) \\ u_0'(\alpha) & u_1'(\alpha) & u_2'(\alpha) & u_3'(\alpha) & u_4'(\alpha) \\ u_0''(\alpha) & u_1''(\alpha) & u_2''(\alpha) & u_3''(\alpha) & u_4''(\alpha) \\ u_0'''(\alpha) & u_1'''(\alpha) & u_2'''(\alpha) & u_3'''(\alpha) & u_4'''(\alpha) \\ u_0(\beta) & u_1(\beta) & u_2(\beta) & u_3(\beta) & u_4(\beta) \end{vmatrix} = \Delta(\alpha, \beta) \neq 0$$

где $u_i(\alpha)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$- фундаментальная система решений уравнения (1), был отличен от нуля. Но $\Delta(\alpha, x)$ есть решение уравнения (1), причем в точке α это решение имеет четырехкратный нуль. Таким образом, условие не обращения в нуль при $x \in [\alpha, \omega)$ функции $\Delta(\alpha, x)$ является условием существования и единственности решения задачи при любом $\beta \in [\alpha, \omega)$.

В настоящей статье рассматриваются законы распределения нулей. Основные результаты о распределении нулей следующие:

промежуток $[s, r_{11111}(s))$ есть пересечение промежутков

$$[s, r_{41}(s)), [s, r_{32}(s)), [s, r_{23}(s)), [s, r_{14}(s)), [s, r_{311}(s)),$$

$$[s, r_{131}(s)), [s, r_{113}(s)), [s, r_{122}(s)), [s, r_{212}(s)),$$

$$[s, r_{221}(s)), [s, r_{2111}(s)), [s, r_{1211}(s)), [s, r_{1112}(s))$$

Рассмотрев предварительно следующую теорему

Теорема. $r_{14}(s) \geqslant r_{11111}(s)$.

Доказательство. Допустим, что $r_{14}(s) \leqslant r_{11111}(s)$. Тогда существуют такие точки α, β, по определению промежутка $[s, r_{41}(s))$ и такое решение $u(x)$ уравнения $L[y] = 0$, что $u(\alpha) = u(\beta) = u^{'}(\beta) = u^{''}(\beta) = u^{'''}(\beta) = 0$, $u(x) > 0$ в (α, β), где $s \leqslant \alpha < r_{14}(s) < \beta < r_{11111}(s)$

По определению промежутка $[s, r_{11111}(s))$ существует единственное решение $\nu(x)$ уравнения $L[y] = 0$ такое, что для $s \leqslant \xi_0 = \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < r_{14}(s) < \beta = \xi_4 < \xi_5 < r_{11111}(s)$, $\nu(\xi_{1i}) = U(\xi_i),\ i = 1, 2, 3, 4, 5,\ \nu(\alpha) > 0$

заметим, что кривые u, ν не имеют касаний четного порядка в точках с абсциссами $\xi_i, \xi_2, \xi_3, \xi_5$ но разность $u(x) - \nu(x)$ имеет пять нулей $\xi_i, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$, что невозможно.

Если $\nu(\xi_{1i}) = U(\xi_i),\ i = 1, 2, 3, 4, 5,\ \nu(\alpha) < 0$ и кривые $u(x), \nu(x)$ не имеют общей точки в интервале $[s, \alpha)$, то, выбрав точку $\xi \in (s, \alpha)$, легко убедиться, что решение $y(x) = u(x) - \frac{u(\xi)}{\nu(\xi)}\nu(x)$ имеет пять нулей в $[s, r_{11111}(s))$, что невозможно.

Если $\nu(\xi_{1i}) = U(\xi_i),\ i = 1, 2, 3, 4, 5,\ \nu(\beta = \xi_{14}) > 0,\ u^{'}(\xi_0) > \nu^{'}(\xi_0)$, где $s \leqslant \xi_0 = \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < r_{14}(s) < \beta = \xi_4 < \xi_5 < r_{11111}(s)$ и кривые $u(x), \nu(x)$ не имеют общей точки в интервале $[\beta, r_{11111}(s))$, то, выбрав $'\xi \in (\beta, r_{11111}(s))$, разность $y(x) = u(x) - \frac{u('\xi)}{\nu('\xi)}\nu(x)$ имеет нуль в точке $'\xi$ и четыре точки $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, что невозможно.

Если $u^{'}(\xi_0) < \nu^{'}(\xi_0)$, то $u^{'}(\xi_3) < \nu^{'}(\xi_3)$. Но, а так как $\nu(\xi_4) > 0$ и тогда разность $u(x) - \nu(x)$ имеет нуль $\xi \in (\xi_3, \xi_4)$, что невозможно, ибо эта разность уже имеет нули в четырех точках $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Если $\nu(\xi_{1i}) = U(\xi_i),\ i = 1, 2, 3, 4, 5,\ \nu(\xi_3) = \nu^{'}(\xi_3),\ \nu^{'}(\xi_3) < 0, U(x) \neq 0$ в $(\alpha, r_{14}(s) + \epsilon),\ \epsilon < \beta - r_{14}(s),\ \epsilon > 0$, то разность имеет в пять нулей, что невозможно.

Если $\nu(\xi_{1i}) = U(\xi_i),\ i = 0, 1, 2, 3\ \nu(\xi_3) = \nu^{'}(\xi_3),\ \nu^{'}(\xi_{13}) < 0$, то разность $u(x) - \nu(x)$ имеет в точках с абсциссами ξ_1, ξ_2 двухкратный нуль в точке $\beta - \xi_4$, но а так как решение $\omega(x)$, имеющее трехкратный нуль в точке ξ_1 не имеет нулей в $(\xi_1, \xi_4 + \epsilon),\ \epsilon < r_{14}(s) - \xi_{14}$, то разность $cw(x) - [u(x) - \nu(x)]$ при некотором значении $c = const$ имеет пять нулей в $(\xi_1, \xi_2 + \epsilon) \subset (s, r_{11111}(s))$, что невозможно. То $r_{41} \geqslant r_{11111}(s)$. Теорема доказана.

Литература

1. Коддингтон Э.А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Издательство иностранной литературы,

Москва, 1958

2. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1, М., ИЛ, 1953. - 157 с.

3. Катхим А.Х., Аль-Джоуфи Салах Али. О знаке функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения пятого порядка, Материалы V Межд. конф. "Функц.-диф. ур-я и их приложения ДГУ, 2011. с. - 156 - 163

4. Р.Г. Алиев. О многоточечной краевой задаче для обыкновенного диффференциального уравнения четвертого порядка, Казань, 1963

5. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б., К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка, Мат. сб., 51, №4, 1960. - с. 475 - 486

6. Кондратьев В.А. О колеблющихся решениях линейного уравнения 3-го и 4-го порядков. Труды Московского математ. общества, Г.2, 1959

7. К.Г. Керимов. Распределение нулей решений обыкновенного дифференциального. Кандидатская диссертация, РГУ, 1971

8. G. Mammana. Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee. Math.zeit, 33, (1931), 186 - 231

9. Алиев Р.Г., Ш.Г.Гамидов. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, учебное пособие, Махачкала, 1992. - 78 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Андреева Е.А., Большакова И.С. (Тверь)

andreeva.tvgu@yandex.ru, Bolshakova.I.S@gmail.com

В работе рассматриваются нелинейные управляемые модели, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями, в которых необходимо минимизировать функционал:

$$J(u) = \int_0^T [f_0(t,x,u)]dt + M\Phi(x(T)) \to inf$$

при динамических ограничениях

$$\dot{x_1}(t) = \rho_1 x_1(t)(1 - \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t)) - u_1(t),$$

$$\dot{x_2}(t) = -\rho_2 x_2(t) + \beta x_2(t) \int\limits_{t-r}^{t} [x_1(\tau) G(t-\tau)] d\tau - u_2(t)$$

с начальными условиями $x_1 = x_1^0, x_2(\theta) = \varphi_2(\theta), \theta \in [-r, 0]$ и ограничениями на управление $0 \leqslant u_i(t) \leqslant b_i, i = 1, 2, t \in [0, T]$.

Показано, что оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума

$$\max_{0 \leqslant \nu_i \leqslant \nu_{max}} [-\lambda_0 f_0(t, \bar{x}(t), \nu) - \sum_{i=1}^{2} (p_i(t) \nu_i)] =$$

$$= -\lambda_0 f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \sum_{i=1}^{2} (p_i(t) \bar{u}_i(t)),$$

где $p_i(t)$ является решением системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_1(t) = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(t, x, u) - p_1(t) \rho_1 (1 - 2\alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t)) -$$

$$-\beta \int\limits_{t}^{t+r} p_2(s) x_2(s) G(s-t) ds,$$

$$\dot{p}_2(t) = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_2}(t, x, u) + p_1(t) \rho_1 \alpha_2 x_1(t) + p_2(t) \rho_2 -$$

$$-p_2(t) \beta \int\limits_{t-r}^{t} x_1(s) G(t-s) ds,$$

с граничными условиями на правом конце

$$p_i(T) = -\lambda_0 M \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}(T)), i = \overline{1,2},\ p_i(t) \equiv 0, \text{при } t > T.$$

Разработаны алгоритмы построения приближенного оптимального решения, исследуются влияние запаздывания и видов минимизируемого функционала на оптимальное решение.

Литература

1. Андреева Е. А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации, - М. – Высшая школа, 2006.

2. Андреева Е.А., Евтушенко Ю.Г. Численные методы решения задач оптимального управления для систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями типа Фредгольма Модели и методы оптимизации. 1989. №1. С. 4-13.

3. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 432 с.

ДВУСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Андрианова А.А. (Казань)

Anastasiya.Andrianova@ksu.ru

Пусть $f(x), f_i(x), i = 1..m$ - непрерывные, явно квазивыпуклые функции в евклидовом пространстве R_n. Для задачи $\min\{f(x), x \in D\}$, где $D = \{x : x \in R_n, f_i(x) \leqslant 0, i = 1..m\}$ - допустимое множество, которое регулярно по Слейтеру, по заданному $\varepsilon > 0$ требуется получить точку их множества $X^*_\varepsilon = \{x : x \in D, f(x) \leqslant f^* + \varepsilon\}$ $(f^* = \min\{f(x), x \in D\})$, т.е. решение задачи с определенной точностью ε. Остановка вычислений должна быть произведена, когда гарантируется достижение заданного уровня точности ε.

Пусть точка $x^* = arg\min\{f(x), x \in D\}$ лежит на границе множества D. В этом случае может быть применен подход, связанный с организацией двустороннего приближения к оптимуму ("изнутри"допустимого множества и "извне"его). Пусть процесс изнутри строится посредством любого из методов внутренней точки (например, методом внутренних центров), а процесс извне - с помощью какого-либо метода внешней точки (например, методом штрафных функций). Таким образом, будут построены две последовательности точек $\{x_k\}$ и $\{y_l\}$, удовлетворяющих условиям:

1.$x_k \in D$, $f(x_k) \geqslant f^*$ при $k \geqslant 0$, $f(x_k) \to f^*$ при $k \to \infty$;

2.$y_l \notin D$, $f(y_l) \leqslant f^*$ при $l \geqslant 0$, $f(y_l) \to f^*$ при $l \to \infty$.

Согласно этим условиям существуют конечные номера $K > 0$ и $L > 0$ такие, что $|f(x_K) - f(y_L)| \leqslant \varepsilon$, т.е. $x_K \in X^*_\varepsilon$.

Такой подход может эффективно использоваться при решении оптимизационных задач с помощью параллельных вычислительных систем. Сократить количество итераций до момента выполнения условий критерия остановки двустороннего приближения и, тем самым, улучшить эффективность применяемого подхода, можно, модифицировав допустимое множество с помощью его удовлетворительной аппроксимации ([1]).

Литература

1. Андрианова А.А. Принципы построения аппроксимации допустимого множества при решении задач условной оптимизации с заданной точностью // Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т.2. Математическое программирование. - Иркутск,РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. - С.35-38.

ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИНДЕКС ОСОБОЙ ТОЧКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Антюшина И.В. (Воронеж)
iamveryok@mail.ru

В докладе предлагаются необходимые и достаточные условия нестрогого экстремума многочлена из $\mathbb{R}[x, y]$ в терминах топологического индекса особой точки некоторого векторного поля на плоскости.

Пусть $F(x, y)$ — ненулевой многочлен из кольца $\mathbb{R}[x, y]$ степени n и $F(0, 0) = 0$. Рассмотрим функцию

$$G(x, y) = F\left(x - y^{2n^2+1}, y + x^{2n^2+1}\right)$$

и векторное поле $\Phi(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$.

Теорема 1. Точка $(0, 0)$ является изолированной особой точкой векторного поля $\Phi(x, y)$ на плоскости. Точка $(0, 0)$ является точкой нестрогого экстремума функции $F(x, y)$ тогда и только тогда, когда $ind\,(\Phi, 0) = 0$.

Теорема 1 сводит задачу о наличии экстремума многочлена $F(x, y)$ в точке к задаче вычисления индекса особой точки векторного поля. Техника вычисления индекса особой точки векторного поля достаточно развита (см. напр. [1], [2], [3]). Используя результаты вычисления индекса в разных терминах можно получать различные условия экстремума, в частности, с использованием результатов [2] формулируются необходимые и достаточные алгебраические условия экстремума, позволяющие выяснить наличие экстремума в результате конечного числа арифметических и логических операций над коэффициентами многочлена.

Литература

1. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного

анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М. : Наука, 1975. – 512 с.

2. Bliznyakov N.M. Cauchy Indices and the Index of a Singular Point of a Vector Field / N.M. Bliznyakov // Lecture Notes in Mathematics. – 1986. – V. 1214. – P. 1-20.

3. Химшиашвили Г.Н. О локальной степени гладкого отображения / Г.Н. Химшиашвили // Труды Тбилисского мат. ин-та. – 1980. – Т. LXIV. – С. 105-124.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Аршава Е.А. (Харьков)

elarshava@mail.ru

Решение ряда задач физики приводит к интегральным уравнениям с разностным ядром. К таким задачам относятся задачи оптимального синтеза, рассеяние света в атмосфере, дифракция на ленте, движение крыла под водой.

В основе представленных исследований лежит метод операторных тождеств, который Л.А.Сахнович [1] использовал для изучения класса уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int\limits_0^{\omega} S(x-t)f(t)dt = \varphi(x). \quad (1)$$

Такой класс уравнений является наиболее общим классом уравнений с разностным ядром.

Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

Задача обращения некоторых новых классов интегральных операторов методом операторных тождеств, доказательство конечномерности соответствующих коммутационных операторов, исследование структуры обратного оператора и использование полученных результатов при решении задачи фильтрации и прогноза нестационарных случайных процессов и сигналов автором настоящей статьи представлены в работе [2,6,7].

На основе полученных результатов изучено уравнение со специальной правой частью, которое играет существенную роль в астрофизике, теории переноса излучения [3-5].

Теорема 1. Для любого ограниченного оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int\limits_0^{\omega} S(x,t)f(t)dt, \tag{2}$$

с ядром, которое удовлетворяет условиям

$$(L_x(\alpha)-L_t(\alpha))S(x,t)=0, \quad L_x(\alpha)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}, \quad \alpha=\overline{\alpha}\neq 0, \tag{3}$$

имеет место соотношение:

$$\begin{gathered}(A_0S-SA_0^*)f=\int\limits_0^{\omega}\Big(M_1(x)+\tfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x)+\\ +M_3(t)+\tfrac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}M_4(t)\Big)f(t)dt,\end{gathered} \tag{4}$$

где $\begin{array}{lll} A_0=L_x^{-1}(\alpha), & M_1(x)=S(x,0), & M_2(x)=S'(x,0), \\ M_3(t)=-S(0,t), & M_4(t)=-S'(0,t), & f(t)\in L_2(0,\omega). \end{array}$

Следствие. Если оператор S имеет ограниченный обратный T, тогда верно представление:

$$(TA_0-A_0^*T)f=\int\limits_0^{\omega} R(x,t)f(t)dt,$$

где $R(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{4}P_i^*(t)Q_i(x)$, кроме того, для $P_i(t)$, $Q_i(x)$, $(i=\overline{1,4})$ выполняются соотношения вида:

$$\begin{array}{lll} S^*P_1=1, & S^*P_2=M_3^*(t), & S^*P_3=M_4^*(t), \\ S^*P_4=\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}, & SQ_1=M_1(x), & SQ_2=1, \\ SQ_3=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, & SQ_4=M_2(x). & \end{array} \tag{5}$$

Теорема 2. Если оператор S ограничен вместе со своим обратным и существуют функции $P_i(t)$, $Q_i(x)$, $(i=\overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (5), тогда для оператора $T=S^{-1}$ имеет место интегральное представление:

$$Tf=L_x(\alpha)\int\limits_0^{\omega} f(t)L_t(-\alpha)\Phi(x,t)dt,$$

где $\Phi(x,t)$ выражается через ядро оператора $R = TA_0 - A_0^* T$, $f(t) \in \in L_2(0,\omega)$.

Используя изложенные выше результаты, рассмотрим уравнение со специальной правой частью

$$Sf = e^{i\lambda x}.$$

Лемма. Если функции $M_1(x)$, $M_2(x)$, x, $\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ и 1, где $M_1(x)$, $M_2(x)$ определены формулами (5), принадлежат области значений оператора S-R_S, тогда R_S плотно в $L_2(0,\omega)$.

Теорема 3. Если существуют такие функции $N_i \in L_2(0,\omega)$, $(i=\overline{1,4})$, что выполняются равенства:

$$SN_1 = M_1(x),\ SN_2 = M_2(x),\ SN_3 = 1,\ SN_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}. \tag{6}$$

Тогда верны соотношения:

$$S^*\hat{M}_1(x) = 1, \qquad S^*\hat{M}_2(x) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha},$$
$$S^*\hat{M}_3(x) = \overline{M_3(t)}, \qquad S^*\hat{M}_4(x) = \overline{M_4(t)},$$

где

$$\hat{M}_1(t) = \overline{N_3(\omega - t)}, \qquad \hat{M}_2(t) = \overline{N_4(t)},$$
$$\hat{M}_3(t) = \frac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha} + \overline{N_1(\omega-t)} - \frac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}\overline{N_2(t)},$$
$$\hat{M}_4(t) = -\alpha\overline{N_1(\omega-t)} - \overline{N_2(\omega-t)} - \alpha\overline{N_1(t)} - 1.$$

Если оператор S является ограниченным и существуют функции $N_i \in L_2(0;\omega)$, $(i=\overline{1,4})$, удовлетворяющие равенствам (6), тогда имеют место соотношения:

$$SB(x,\lambda) = e^{i\lambda x},$$

где

$$B(x,\lambda) = u(x,\lambda) + \tfrac{i\lambda\alpha-\lambda^2}{\alpha+2i\lambda}\int\limits_0^x u(t,\lambda)\left(e^{i\lambda(t-x)} + e^{(\alpha+i\lambda)(x-t)}\right)dt,$$
$$u(x,\lambda) = a(\lambda)N_1(x) + b(\lambda)N_2(x) + c(\lambda)N_3(x) + d(\lambda)N_4(x),$$
$$a(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)N_3(\omega-t)dt,\ b(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)N_4(t)dt,$$
$$c(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)\left(\tfrac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha} + N_1(\omega-t) - \tfrac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}N_2(t)\right)dt,$$
$$d(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)\left(-\alpha N_1(\omega-t) - N_2(\omega-t) - \alpha N_1(-t) - 1\right)dt.$$

Литература

1. Сахнович Л.А. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи математических наук .- 1980. - т.35, вып. 4 (214). - С.69-129.
2. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1996. - Т.32, №10. - С. 1427-1428.
3. Амбарцумян В.А. Научные труды. - Ереван, 1960. - Т.1. - 350 с.
4. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. - М.: Наука, 1972. - 270 с.
5. Иванов В.В. Перенос излучения и спектры небесных тел. - М.: Наука, 1969. - 285 с.
6. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений": в двух томах. - Т.1. Математический анализ. - Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. - С. 25 - 29.
7. Аршава Е.А. Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". - Воронежский государственный университет, 2011.- С.19-24.

О НЕКОТОРЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ФАКТОРАХ КАЧЕСТВЕННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ЧАСТНЫХ ШКОЛАХ

Асадулаева Т.Г. (Махачкала)
Tamilka84@mail.ru

Составной частью методов обучения в частной школе являются приемы учебной деятельности учителя и учащихся. Методические приемы - действия, способы работы, направленные на решение конкретной задачи. За приемами учебной работы скрыты приемы умственной деятельности (анализ и синтез, сравнение и обобщение, доказательство, абстрагирование, конкретизация, выявление существенного, формулирование выводов, понятий, приемы воображения и запоминания). Методы обучения постоянно дополняются современными методами обучения, главным образом ориентированными на обучение не готовым знаниям, а деятельности по самостоятельному приобретению новых знаний, т.е. познавательной деятельностью. Специальные методы обучения - это адаптированные для обучения основные методы познания, применяемые в самой математике, характерные для математики методы изучения действительности (построение математических моделей, способы абстрагирования, используемые при построении таких моделей, аксиоматический метод).

Овладение всеми учащимися элементами мышления и деятельности, которые наиболее ярко проявляются в математической ветви человеческой культуры и которые необходимы каждому для полноценного развития в современном обществе. Создание условий для зарождения интереса к математике и развития математических способностей одаренных школьников. Цели обучения математике (в узком смысле) общеобразовательные, воспитательные, развивающие.

Общеобразовательные цели - овладение учащимися системой математических знаний и навыков, дающей представление о предмете математики, о математических приемах и методах познания, применяемых в математике.

Воспитательные цели - воспитание активности, самостоятельности, ответственности; воспитание нравственности, культуры общения; воспитание эстетической культуры, воспитание графической культуры школьников.

Развивающие цели - формирование мировоззрения учащихся, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления; развитие пространственного воображения.

Цели обучения могут формулироваться по-разному в зависимости от их ориентации. Например, можно определить цель обучения через деятельность учителя; через учебную деятельность учащихся.

Достижение целей обучения математике определяется функциями обучения математике. Факторы, порождающие формализм знаний в процессе обучения математике в частных школах и, как следствие, недостаточную подготовленность к профессиональной деятельности учителя, можно подразделить на объективные и субъективные. Объективные факторы (не зависящие от воли и умений преподавателей и студентов) - это сложности оперирования знаково-символическими средствами; высокий уровень абстрагирования при работе с математическими объектами; недостаточная разработанность психолого-педагогических теорий (технологий) обучения математике, а также сложность в выявлении закономерностей психофизиологических и психофизических процессов восприятия, памяти, мышления; слабая эффективность профориентационной работы по привлечению в педвузы одаренных и интеллектуально развитых абитуриентов (в основном по социально-политическим и экономическим причинам); субъективные факторы (зависящие от воли и умений преподавателей и студентов) - это чрезмерная интенсивность и недостаточная эффективность структурирования информационного потока знаний; недостаточная развитость функциональных и операционных механизмов восприятия и переработки математической информации обучаемым; слабая мотивация и прикладная направленность воспринимаемых знаний; недостатки организационно-методического обеспечения учебной деятельности; недостаточное внимание педагогов к вопросу организации рефлексии обучаемых и формированию творческой активности в процессе обучения математике.

РАЗРАБОТКА БАЗЫ ДАННЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ВУЗА ИРАКА

Астахова И.Ф., Асвад Фирас М. (Воронеж)

В статье рассматриваются вопросы проектирования и разработки информационной системы с базой данных вуза Ирака, система содержит отдельный блок разработки расписания.

Целью данного проекта является разработка базы данных для составления расписания.

Составление расписания учебных занятий является одной из важнейших задач управления учебным процессом. Расписание занятий представляет собой пространственно-временной график их проведения с “привязкой” к конкретным учебным группам и дисциплинам обучения. В данной статье будет описано применение генетического алгоритма для решения поставленной задачи.

Получилась задача, которую условно можно разбить на части:

- спроектировать и реализовать базу данных;
- реализовать web приложение, работающее с базой данных с удобным пользовательским интерфейсом;
- разработать математическую модель, позволяющую оптимально составлять расписание.

Для решения задачи необходимо на сервере иметь операционную систему Windows или Linux, СУБД SQL Server 2008.

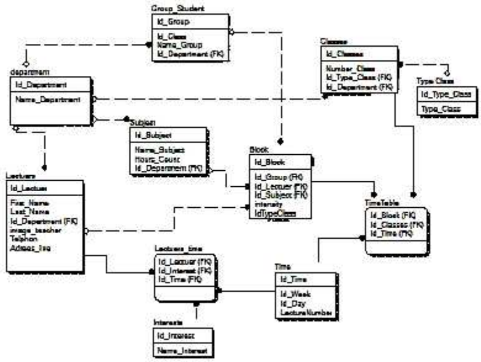


Рис. 1: Таблицы расписания

База данных состоит из следующих таблиц (рис. 1):

1. **Department – таблица кафедры:**
   - Id_Department - идентификуционный номер кафедры;
   - Name_Department – название кафедры;
2. **Group_student –таблица "Группа_Студент":**
   - Id_Group – идентификуционный номер группы;
   - Id_Class – номер курса;
   - Name _Group – название группы;
   - Id_Department номер кафедры;
3. **Lectures – таблица "Преподаватель":**
   - Id_Lecturer – идентификационный номер преподавателя;
   - Name _Lecturer – ФИО преподавателя;
   - Id_Department номер кафедры;
4. **Subject – таблица "Предмет":**

- Id _Subject идентификационный номер предмета;
- Name_ Subject– название предмета;
- Hours_Count – количество часов для предмета;
- Id_Department номер кафедры;

5. **Classes – таблица “Аудитории”**:
   - Id_Class – идентификационный номер аудитории;
   - Number_Class – номер аудитории;
   - Id_Type_Class – вид аудитории;
   - Id_Department номер кафедры.
6. **Type_Classes – таблица “Виды аудитории”**
   - Id_Type_Classes - – идентификационный номер вида аудитории;
   - Name_Type_Classes – название вида аудитории.
7. **Time – таблица “Время занятий”:**
   - Id_Time – идентификационный номер времени;
   - Id_Week–номер недели;
   - Id_Day –номер дня;
   - Lecturer_Count – количество лекций в день;
8. **Interests – таблица “Предпочтительное время для преподавателей”:**
   - Id_Interest – идентификационный номер времени;
   - Name_Interests – название времени
9. **Lecturers_Time – таблица “Время лекций для преподавателя**”;
   - Id_Lecturer – номер преподавателя.;
   - Id_Time – номер времени лекций;
   - Id_Interest – номер предпочтительного времени для преподавателя.
10. **Block – таблица “Блок занятий”:**

- Id_block – идентификационный номер блока занятий;
- Id_Group – номер группы студентов;
- Id_Subject – номер предмета;
- Id_lecturer – номер преподавателя;
- Intensity – частота лекций;
- Id_Type_Class – вид аудитории.

11. **Time Table – таблица "Расписание":**

- Id_Block –номер блока;
- Id_Time – номер времени;
- Id_Classes – номер аудитории.

Литература

1. Астахова И.Ф., Толстобров А.П., Мельников В.М. SQL в примерах и задачах: учеб. пособие: 2-е изд. испр., доп. Воронеж: Изд-во Воронеж. Ун-та, 2000. – 161с.

2. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных: Учеб. пособие: Пер. с англ. – 6-е изд. М.; СПб.; Киев: Вильямс, 2000. – 846 с.

3. Молина Г.Г. Системы баз данных / Г.Г. Молина Ульман Д.Д., Уидом Д. – М.? Вильямс, 2003. – 1088 с.

4. Конноли Т. Базы данных. Проектирование. реализация. Сопровождение/ Т.Конноли, К.Бегг. – М.: Вильямс, 2003 . – 864

О КНЕЗЕРОВСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

Асташова И.В. (Москва)

ast@diffiety.ac.ru

Для $0 < \lambda < 1$, $(-1)^{(n)}\,p(x) \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) = p(x)\,|y(x)|^{\lambda}\,\operatorname{sign} y(x). \qquad (1)$$

Определение ([1]). Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *убывающим на бесконечности кнезеровским решением*, если

$$(-1)^{(i)}\,y^{(i)}(x) > 0 \quad \text{и} \quad |y^{(i-1)}(x)| \downarrow 0, \;\; x \to \infty, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00989)

В [2] была доказана

Теорема 1 (Г. Квиникадзе). *Если непрерывная функция $p(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^{+\infty} \tau^{n-1}\,|p(\tau)|\,d\tau < \infty, \tag{3}$$

то уравнение (1) *имеет решения* $y(x)$, *удовлетворяющие* (2).

При $n = 2$ условие (3) не является необходимым ([3]):

Теорема 2 (Н. А. Изобов). *При* $n = 2$ *и* $\mu \geqslant \frac{1}{(n-1)\lambda+1}$ *для любой кусочно-непрерывной функции* $\varphi(x) > 0$ *найдется такая кусочно–непрерывная неотрицательная функция* $p(x)$, *удовлетворяющая условию*

$$\int_0^{+\infty} p^{\mu}(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = \infty, \tag{4}$$

что уравнение (1) *имеет убывающее на бесконечности кнезеровское решение.*

Следствие. *При* $n = 2$ *существует такая кусочно–непрерывная неотрицательная функция* $p(x)$, *что уравнение* (1) *имеет решение* $y(x)$, *удовлетворяющие условиям* (2), *и при этом не выполняется условие* (3).

Приведем частичный ответ при $n = 3$ к задаче Н. А. Изобова об обобщении теоремы 2 для $n > 2$.

Теорема 3. *Пусть* $n = 2$ *или* $n = 3$ *и* $0 < \lambda < 1$. *Тогда для любого* $\mu > \frac{1}{(n-1)\lambda+1}$ *и любой непрерывной положительной функции* $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$, *существует такая гладкая функция* $p(x)$, *удовлетворяющая условиям* $(-1)^n\,p(x) > 0$ *и*

$$\int_0^{+\infty} |p(\tau)|^{\mu}\,\varphi(\tau)\,d\tau = \infty,$$

что уравнение (1) *имеет решение, удовлетворяющее условиям* (2).

Замечание 1. Для обобщения теоремы 2 следует рассмотреть все $\mu \geqslant \frac{1}{(n-1)\lambda+1}$. В теореме 3 речь идет только о $\mu > \frac{1}{(n-1)\lambda+1}$, что дает лишь частичное решение задачи Н. А. Изобова. Но доказывается существование такой гладкой функции $p(x)$, что $(-1)^n\,p(x) > 0$, тогда как в теореме 2 она является лишь кусочно-непрерывной и удовлетворяет нестрогому неравенству $(-1)^n\,p(x) \geqslant 0$.

Литература

1. *Kiguradze I.T.* On oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations // Arch. Math. 14 (1978), No 1, 21-44.

2. *Квиникадзе Г.Г.* Некоторые замечания о решениях задачи Кнезера // Дифф.уравнения 14 (1978), No 10, 1775–1783.

3. *Изобов Н.А.* О кнезеровских решениях // Дифф.уравнения 21 (1985), No 4, 581–588.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ УСЛОВИЕЙ

Ахундов А.Я., Гасанова А.И. (Баку)

adalatakhund@mail.ru, aynur.hasanova73@yahoo.com

Целью настоящей работы является исследование корректности обратной задачи об определении коэффициента при младшем члене параболического уравнения в случае задачи с нелинейным граничным условием при нелокальном дополнительном условии. Доказана теорема о единственности и "условной"устойчивости рассматриваемой задачи.

Рассматривается обратная задача об определении пару функций $\{u(x,t)\, c(t)\}$ из условий.

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + c(t)\, u = f(x,t)\,, \quad (x,t) \in \Omega = D \times (0;T] \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad x \in \overline{D} = D \cup \partial D \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(x,t,u)\,, \quad (x,t) \in S = \partial D \times [0,T]\,, \qquad (3)$$

$$\int_D u(x,t)\, dx = h(t)\,, \quad t \in [0,T]\,, \qquad (4)$$

здесь $x = (x_1, ..., x_n)$- произвольная точка ограниченной области $D \subset R^n$ с достаточно гладкой границей ∂D, $0 < T$ - фиксированное число, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ внутренная конормальная производная, $f(x,t)\,,\ \ \varphi(x)\,,$ $\psi(x,t,p)\,,\ \ h(t)$ заданные функции.

Относительно входных данных задачи (1) - (4) сделаем следующее предположения:

1^0. $f(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$;

2^0. $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right)$;

3^0. $\psi(x,t,p) \in C^{\alpha,\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\times R_1\right)$, существует такое $m_1 > 0$, что для любых $(x,t) \in \overline{\Omega}$ и $p_1, p_2 \in R_1 : |\psi(x,t,p_1) - \psi(x,t,p_2)| \leqslant$
$\leqslant m_1 |p_1 - p_2|$

4^0. $h(t) \in C^{\alpha}(0,T)$

Определение. Пару функций $\{c(t), \ \ u(x,t)\}$ назовем решением задачи (1) - (4) если:

1)$c(t) \in C(0,T)$;

2) $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}\left(\overline{\Omega}\right)$

3) для этих функцией удовлетворяются соотношения (1) - (4), при этом условия (3) определяется следующем образом:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x,t)} = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\sigma}} \frac{\partial u(y,t)}{\partial \nu(x,t)},$$

где σ-любой замкнутый конус с вершиной x, который содержится в $D \cup \{x\}$.

Пусть $\{u_i(x,t), \ c_i(t)\}$ - решение задачи (1) - (4) соответствующее данным $f_i(x,t), \ \ \varphi_i(x), \ \ \psi_i(x,t,u_i), \ \ h(t), \ \ i = 1,2$.

Теорема. Пусть:

1.$f_i, \ \varphi_i, \ \psi_i, \ h_i, \ i = 1,2$ удовлетворяют условиям $1^0 - 4^0$, соответственно;

2. существуют решения $\{u_i(x,t), \ c_i(x)\}, \ \ i = 1,2$, задачи (1) - (4) смысле определения 1, и они принадлежат множеству

$$K_\alpha = \left\{(u,c)\middle| u(x,t) \in C^{2+\alpha, \ 1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right), \ \ c(t) \in C^{\alpha}(0,T)\right\}$$

Тогда существует такое $T^* > 0$ что при $(x,t) \in \overline{D} \times [0,T^*]$ решение задачи (1) - (4) единственно и верна оценка устойчивости:

$$\|u_1 - u_2\|_0 + \|c_1 - c_2\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant m_2 \left[\|f_1 - f_2\|_0 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_2 + \|\psi_1 - \psi_2\|_0 + \|h_1 - h_2\|_1\right] \qquad (5)$$

где $m_2 > 0$ - зависит от данных задачи (1) - (4) и множества K_α.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОТРЕЗКЕ С ЧЕТНЫМ ВЕСОМ[1]

Бадков В.М. (Екатеринбург)
Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ор-

[1]Работа выполнена в рамках программы ОМН РАН "Современные пробле-

тонормированная на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(t)$; $x_{n,\nu}^{(p)} = \cos\theta_{n,\nu}^{(p)}$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ — нули многочлена $p_n(t)$, занумерованные в убывающем порядке. В [1] анонсированы некоторые результаты об асимптотическом поведении величин $\theta_{n,\nu}^{(p)}$ и $\theta_{n,\nu}^{(p)} - \theta_{n,\mu}^{(p)}$ при $n \to \infty$, установленные при помощи разработанного автором нового метода. Следующая теорема дополняет цитированные результаты,

Теорема. *Пусть* $p(-t) = p(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$; *функция* $\varphi(\tau) := p(\cos\tau)|\sin\tau|$ *удовлетворяет условию Сегё* $\ln\varphi(\tau) \in L^1[0,2\pi]$; *для некоторого* $a \in (0,\pi/2)$ *на отрезке* $[a,\pi-a]$ *функция* $\varphi(\tau)$ *непрерывна и положительна, а ее модуль непрерывности удовлетворяет условию* $\omega(\varphi;\tau)_{[a,\pi-a]}\tau^{-1} \in L^1[0,\pi-2a]$. *Тогда при любом достаточно малом фиксированном* $\eta > 0$ *для точек* $\theta_{n,k}^{(p)}$, *попавших в интервал* $(a+\eta,\pi-a-\eta)$ *равномерно по* k *при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические формулы*

$$\theta_{n,k}^{(p)} = [1+o(1)](2k-1)\pi/(2n), \quad x_{n,k}^{(p)} = [1+o(1)]\cos[(2k-1)\pi/(2n)].$$

Литература

1. Бадков В.М. *Асимптотические формулы для нулей многочленов, ортогональных на отрезке* // Современные проблемы математики, механики, информатики: Материалы международной конференции. Тула: Изд-во ТулГу. С. 9-10.

2. Бадков В.М. *Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса* // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41-88.

3. Бадков В.М. *О нулях ортогональных полиномов* // Тр. Ин-та математики и механики ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 30-46.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Баев А.Д., Давыдова М.Б., Садчиков П.В. (Воронеж)

alexsandrbaev@mail.ru

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha^/(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование

мы теоретической математики" при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-Т-1-1004), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

$F_\alpha\left[u\left(t\right)\right]\left(\eta\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(t)\exp\left(i\eta\int\limits_{t}^{d}\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное первоначально, например, на функциях $u(t)\in C_0^\infty\left(R_+^1\right)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau)=\left.\sqrt{\alpha(t)}u(t)\right|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int\limits_{t}^{d}\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)}=\sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R_+^1)}$,что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$, и рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t)=\left.\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\right|_{\tau=\varphi(t)}$.

Можно показать, что на функциях $u(t)\in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta)=\eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j=1,2,\ldots,$$

где

$$D_{\alpha,t}=\frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t=\frac{\partial}{\partial t}.$$

Условие 1. Существует число $\nu\in(0,1]$ такое, что $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right|\leqslant c<\infty$ при всех $t\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha\left(t\right)\in C^{s_1}\left[0,+\infty\right)$ для некоторого $s_1=s_1(\nu)$.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$, $x\in R^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K\left(x,t,D_x,D_{\alpha,t}\right)v\left(x,t\right)=F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}\left[\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v\left(x,t\right)\right]\right]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)$ принадлежит классу символов $S_\alpha^m(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1)$, $m\in R^1$, $\Omega\subseteq(0;+\infty)$, $x\in R^1$, $t\in(0;+\infty)$, $\xi\in R^1$, $\eta\in R^1$, если $\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)\in C^\infty\left(\Omega\times R^1\times R^1\times R^1\right)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\frac{\partial^l}{\partial\xi^l}\frac{\partial^p}{\partial\eta^p}\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{\tau,m,l,p}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)},$$

где $\tau, m, l, p = 0, 1, 2, ...$; $c_{\tau,m,l,p} > 0$ - некоторые константы, не зависящие от x, t, ξ, η, σ.

Определение 2. Пусть $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ - открытое множество. Будем говорить, что функция $a(x,t,y,\xi,\eta)$ принадлежит классу $S^{m,\alpha}(R^1 \times \Omega \times R^1 \times R^1 \times R^1)$, $m \in R^1$, если функция $a(x,t,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $x \in R^1$ $t \in \Omega$, $y \in \Omega$, $\eta \in R^1$, $\xi \in R^1$ и на компактных подмножествах множества $\Omega \times \Omega$ имеет место при всех j, k, $l = 0, 1, 2, ...$ оценка

$$\left|(\alpha(t)\partial_t)^j(\alpha(y)\partial_y)^k\partial^l_\eta a(x,t,y,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jkl}(1+|\xi|+|\eta|)^{m-l}$$

с константами $c_{jkl} > 0$, не зависящими от x, t, y, η, ξ .

Рассмотрим интегральный оператор вида

$$A(u(x,t)) = F^{-1}_{\alpha_{\eta\to t}} F_{\alpha_{y\to\eta}} F^{-1}_{\xi\to x}[a(x,t,y,\xi,\eta)\, F_{x\to\xi}[u(x,y)]], \qquad (1)$$

где $F_{\alpha_{y\to\eta}}$ $(F^{-1}_{\alpha_{\eta\to t}})$ - прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее y в η (η в t).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть A – интегральный оператор вида (1), причём $a(x,t,y,\xi,\eta) \in S^{m,\alpha}(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1\times R^1)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $m \in R^1$. Тогда найдётся такой символ $p(x,t,\xi,\eta) \in S^m_\alpha(R^1 \times \Omega \times R^1 \times R^1)$, что $A = P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$, где $P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $p(x,t,\xi,\eta)$. Причём, справедливо равенство $p(x,t,\xi,\eta) = \sqrt{\alpha(t)}\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \cdot A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\exp(-i\eta\int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}))$.

При этом справедливо соотношение

$$p(x,t,\xi,\eta) - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(i)^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^j_\eta\, a(x,t,y,\xi,\eta)\,|_{y=t} \in$$
$$\in S^{m-N}_\alpha(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1)$$

при любых $N = 1, 2, ...$

Если символ $p(x,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора не зависит от x, то утверждение, аналогичное теореме 1 доказано в [1].

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

К ВОПРОСУ ОБ ИНДЕКСЕ ОДНОЙ ПЛОСКОСТНОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Башкарёв П.Г., Лысенко З.М. (Одесса)

ivanpribegin@rambler.ru

Введём следующие обозначения: $X\bigoplus Y-$ прямая сумма пространств X иY ; $\mathfrak{L}(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве X ; $\Pi=\{z\in\mathbb{C}:Imz>0\}-$ верхняя полуплоскость с обычной мерой Лебега $dA(w)=dxdy$; $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$; $\overline{\Pi}=\Pi\bigcup\mathbb{R}$;$I$ – тождественнный оператор. Пусть B_n и $\widetilde{B}_n$ – ортогональные бергмановы проекторы $L_2(\Pi)$ на замкнутые подпространства

$$A_n^2(\Pi)=\left\{f\in L_2(\Pi):\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^n f=0\right\}$$

и

$$\widetilde{A}_n^2(\Pi)=\left\{f\in L_2(\Pi):\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f=0\right\}$$

соответственно. Введём диффеоморфные сдвиги $\alpha_n:\Pi\to\Pi,(n\in\mathbb{N})$, удовлетворяющие условиям: $W_nB_n=\widetilde{B}_nW$ где $(W_nf)=f[\alpha_n(z)],n\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим следующую плоскостную задачу со сдвигами и сопряжением о нахождении функций $\psi_j\in A_j^2(\Pi)$ и $\varphi_j\in\widetilde{A}_j^2(\Pi)$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{j=1}^n a_j(t)\psi_j[\alpha_j(t)]+\sum_{j=1}^n b_j(t)\overline{\psi_j[\alpha_j(t)]}+\sum_{j=1}^n e_j(t)\varphi_j(t)+ \\ +\sum_{j=1}^n d_j(t)\overline{\varphi_j(t)}=h(t), \tag{1}$$

где правая часть $h-$ известная функция из $\left(\bigoplus\limits_{j=1}^n A_j^2(\Pi)\right)\bigoplus\left(\bigoplus\limits_{j=1}^n\widetilde{A}_j^2(\Pi)\right)$, коэффициенты $a_j,b_j,e_j,d_j(j=\overline{1,n})-$ известные функции из $C(\overline{\Pi}),t\in\Pi$.

Обозначим $u = \overline{a}d - b\overline{e}$.

Теорема. Задача (1) фредгольмова тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор

$$\Delta = uB_{\Pi} + \overline{u}B_{\Pi} \in \mathfrak{L}\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\left(A_j^2(\Pi)\bigoplus \widetilde{A}_j^2(\Pi)\right)\right).$$

В случае фредгольмовости индекс χ задачи (1) вычисляется по формуле: $\chi = \frac{1}{2} ind\Delta$

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Белоусов Ф.А. (Москва)

belousovfedor@gmail.com

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений самого общего вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $g(\cdot,\cdot\,) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по времени. Легко видеть, что любое уравнение этого класса с помощью замены $f(t, x(t)) = g(t, x(t)) - ax(t)$ может быть представлено в виде

$$\dot{x}(t) = ax + f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, а $f(\cdot,\cdot\,) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по времени.

Будут изучаться условия, накладываемые на константу a и функцию $f(\cdot,\cdot\,)$, которые обеспечивают существование единственного ω-периодического решения. Кроме этого, в одномерном случае будут выведены условия для функции $g(\cdot,\cdot\,)$, которые гарантируют существование таких a и $f(\cdot,\cdot\,)$ или другими словами, гарантируют существование единственного ω-периодического решения.

Литература

1. *Медведев Н. В.* Об одном принципе существования периодического решения дифференциального уравнения в банаховом пространстве. // Математические заметки. 1968. Т. 4, № 1. С. 105–111.

2. *Ахмеров Р. Р.* Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений $http : //www - sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/ode\_unicode/$

3. *Beklaryan L. A., Belousov F. A.* The existence of periodical solutions for functional differential equations of pointwise type. // Functional Differential Equations, 2007.

ЭФФЕКТИВНОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ТИПА КОСЫ ПО КЛАССИФИКАЦИИ НИЛЬСЕНА-ТЁРСТОНА В ГРУППЕ КОС B_3

Бирюков О.Н. (Коломна)
oleg_biryukov@mail.ru

Рассматривается классическая группа кос Артина из n нитей. Существует известный гомоморфизм группы кос B_n в группу классов отображений (гомеотопий) компактной ориентированной двумерной поверхности M рода нуль с $n+1$ компонентами края γ_0, γ_1, $\dots$, γ_n.

Группа B_1 тривиальна, так что будем считать, что количество нитей $n \geqslant 2$. В этом случае поверхность M при $n \geqslant 2$ является гиперболической. Гомеотопии гиперболической поверхности в соответствии с классификацией Нильсена-Тёрстона делятся на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Соответственно различают аналогичные типы кос, и ставится задача распознавания типа косы. Существует несколько подходов к решению этой задачи. В докладе рассматривается эффективный (по длине входного слова) алгоритм решения задачи распознавания типа косы для случая трёх нитей, отличающийся от всех известных подходов.

Теорема. *В группе кос B_3 существует алгоритм распознавания типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона со временем выполнения $O(l)$, где l есть длина входного слова в классических образующих Артина σ_i.*

Основная идея заключается в том, что приводимая коса из трёх нитей всегда оставляет инвариантной хотя бы одну из трёх граничных компонент γ_1, γ_2 или γ_3, и такую косу можно представить как движение нити, отвечающей инвариантной компоненте, вокруг двух других нитей, которые можно считать неподвижными. Предлагается специальное кодирование таких кос, по которому тип косы эффективно распознаётся.

Литература

1. Bestvina M., Handel M. *Train-tracks for surface homeomorphisms.* Topology, 34 (1), 109–140, 1995.

2. Bernardete D., Nitecki Z., Gutierrez M. *Braids and the Nielsen-Thurston classification.* J. Knot Theory and its Ramifications, 4 (1995), 549–618.

3. Calvez M., Wiest B. *Fast algorithmic Nielsen-Thurston classification of four-strand braids.* Preprint arXiv:1004.0067.

4. González-Meneses J., Wiest B. *Reducible braids and Garside theory.* Preprint arXiv:1008.0238.

АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ СЕТЕВЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М. (С.-Петербург)

sergeev2@yandex.ru

Выработка обоснованного поведения менеджеров в пространстве принятия решений представляется формализмами задачи оптимального управления: торговая сеть представляется управляемой системой S, имеющей вектор состояния (комплекс основных показателей) и вектор управления $\overline{U}$.

Необходимо выбирать такое управление, чтобы деятельность за весь период была максимальной, соответствующий функционал качества $W(\overline{U})$ включает в себя данные по всем периодам и этапам планирования. Результатом является управление $\overline{U}^*$, при котором функция $W(\overline{U})$ достигает максимального значения $W^* = \max\limits_{U} [W(U)]$. При этом объем средств Z распределяется между m торговыми площадками сети таким образом, что каждой выделяется сумма Z_k. Введем вектор $\overline{Z}_i$ размерности m равный: $\overline{Z_i} = (Z_{i1}, ..., Z_{im})$ где i – номер этапа. Критерии выбора управления и условия могут быть различные. Рассмотрим случай, когда доход вкладывается в торговлю полностью, при этом определяется максимум суммы оставшихся средств с учетом прибыли. В этом общем случае имеем имеет место система для функций перехода f_k и критерия φ_k:

$$Z'_{ik} = f_k(Z_{i-1\quad k}) + \varphi_k(Z_{i-1\quad k}),\ W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [f_k(Z_{ik}) + \varphi_k(Z_{ik})].$$

Принимается решение о распределении консолидированного бюджета, что соответствует делегированию финансовой ответственности торговым площадкам сети. Однако, значение выделяемой суммы не должно ограничиваться конкретными цифрами полученной прибыли. При нехватке средств на развитие необходимо определить размер кредитования при условии превышения прибыли над банковской ставкой; если в бюджете имеется профицит, то необходимо оценить его значение. Обе эти задачи можно решить с привлечением математической теории потребления. Поскольку любая торговая сеть имеет специализацию и определенный ассортимент, то выделяются агрегатные группы товаров как элементы вектора $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$, на основе чего составляется выражение функции полезности $G(x)$. Для такой функции свойство строгой вогнутости выполнено, если матрица Гессе $H = \left\| \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \quad i, j = \overline{1, n}$, отрицательно определена. В этом случае рассматривая, например, фактор инфляции как воздействующий на покупательную способность населения, можно, представляя бюджетное ограничение в виде гиперплоскости $(n-1)$-мерного стандартного симплекса, найти оптимальное решение $\overline{x}^*$, например, методом множителей Лагранжа. Одновременно, соотнося барицентрические координаты симплекса в n-мерном пространстве с ценами групп товаров получаем взаимосвязь с текущей потребительской корзиной. Вычисляя стоимость $\overline{x}^*$ в денежном выражении, можно сравнить оптимальное решение с величиной бюджета и принимать обоснованное решение о привлечении инвестиций либо о вложении свободных средств.

Литература

1. Вэриан Х.Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. – М.:ЮНИТИ, 1997. – 767 с.

2. Сергеев С.М. Моделирование опережающих показателей торговых процессов // Современные методы теории краевых задач. ВГУ, 2010. – с. 109-110.

3. Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. – 428 С.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕВОЛЬТЕРРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ[1]

Бравый Е.И. (Пермь)
bravyi@perm.ru

В [1] предложен метод нахождения необходимых и достаточных условий существования единственного решения краевых задач для семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений. Для некоторых задач получены «точные» множества параметров уравнений, для которых краевая задача для всех уравнений из заданного семейства однозначно разрешима. Доклад посвящен неулучшаемым условиям однозначной разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения.

Пусть $p : (0,1] \to \mathbf{R}$ — такая положительная локально суммируемая функция, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 p(t)\,dt = \infty$. Рассмотрим начальную задачу для уравнения с несуммируемой особенностью

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -p(t)x(t) + (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

где $f \in \mathbf{L}[0,1]$, $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ — линейный ограниченный оператор. Известные результаты о разрешимости подобных сингулярных задач использовали либо вольтерровость оператора T, либо специальные односторонние ограничения, при которых линейный оператор T не мог иметь произвольные отклонения аргумента, либо «малость» в определенном смысле оператора T давала возможность свести задачу к уравнению второго рода со сжимающим оператором (работы И.Т. Кигурадзе, З.П. Сохадзе, А.Е. Зернова, И.М. Плаксиной и др.). Полученные здесь утверждения свободны от перечисленных ограничений. Мы находим наилучшие константы в условиях разрешимости, что придает результатам характер необходимых и достаточных условий.

Литература

1. Бравый Е.И. Разрешимость краевых задач для линейных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-96054-р-урал-а).

функционально-дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2011. 372 с.

СИСТЕМА ДИРАКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)

bmsh2001@mail.ru

На отрезке $[0,1]$ изучается краевая задача для системы Дирака

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \quad y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x), \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_1(1), \quad y_2(0) = y_2(1). \tag{2}$$

Предполагаем, что $q_j \in C[0,1]$, $q_j(x)$ — комплекснозначные (см. [1]).

Лемма 1. *Система (1) в области* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -h$, $h > 0$, *при больших* $|\lambda|$ *имеет фундаментальную матрицу решений* $Y(x,\lambda)$ *с асимптотикой* $Y(x,\lambda) = (E + o(1))e^{\lambda Dx}$, *где* $E = \operatorname{diag}(1,1)$, $D = \operatorname{diag}(1,-1)$, $o(1) \to 0$ *при* $|\lambda| \to \infty$ *равномерно по* x *и* $\arg\lambda$*;* $Y(x,\lambda)$ *аналитична по* λ.

Аналогичное утверждение имеет место и при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant h$.

Лемма 1. *Собственные значения краевой задачи (1)–(2) за исключением некоторого конечного числа образуют две бесконечные последовательности с асимптотикой*

$$\lambda_n' = 2n\pi i + \varepsilon_n', \quad \lambda_n'' = 2n\pi i + \varepsilon_n'', \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots)$$

где $\varepsilon_n' = o(1)$, $\varepsilon_n'' = o(1)$ *при* $n \to \pm\infty$. *В случае* $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$ *они простые, а при* $\varepsilon_n' = \varepsilon_n''$ *— двукратные.*

Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L в $L_2^2[0,1]$:

$$Ly = (y_1'(x) - q_2(x)y_2(x), -y_2'(x) + q_1(x)y_1(x))^T,\ y_i(0) = y_i(1),\ i = 1,2,$$

T — знак транспонирования, E — единичный оператор.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(G_\lambda \tilde{f}) + G_\lambda \tilde{f},$$

где $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $\tilde{f}(x) = (f_1(x), -f_2(x))^T$, $\Delta(\lambda) = U(Y(x,\lambda))$, $U(y) = y(0) - y(1)$, $G_\lambda \tilde{f} =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270)

$\int_0^1 Y(x,\lambda)E_0(x,t)Y^{-1}(t,\lambda)\tilde{f}(t)\,dt$, $E_0(x,t) = \mathrm{diag}(-\varepsilon(t,x),\varepsilon(x,t))$, $\varepsilon(x,t)=1$, *при* $t\leqslant x$, $\varepsilon(x,t)=0$, *при* $t>x$, $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant -h$.

Теорема 1. *Системы собственных и присоединенных функций операторов* L *и* L^* *полны в* $L_2^2[0,1]$.

Литература

1. *Хромов А.П.* // (настоящий сборник)

ПРОЕКТОРЫ РИССА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж), Корнев В.В., Хромов А.П. (Саратов)

bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В [1] установлено, что собственные значения задачи (1)-(2) достаточно большие по модулю находятся в малой окрестности чисел $2n\pi i$.

Положим $\gamma_n=\{\lambda|\,|\lambda-2n\pi i|=\delta\}$, где $\delta>0$ достаточно мало. Обозначим через P_n проекторы Рисса $P_n=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} R_\lambda d\lambda$, где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ из [1].

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(G_\lambda f)+G_\lambda f,$$

где $Y(x,\lambda)=(y_{ij}(x))_1^2$, $y_{1j}(x)=e^{\lambda x}z_{1j}(x)$, $y_{2j}(x)=e^{-\lambda x}z_{2j}(x)$ $(j=1,2)$, $z_{ij}(x)$ *из [2] (*λ *в* $y_{ij}(x)$ *для краткости опускаем),* $G_\lambda f = \int_0^x Y(x,\lambda)Y^{-1}(t,\lambda)f(t)\,dt$, $f=f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$ *(*T *— знак транспонирования),* $\Delta(\lambda)=Y(0,\lambda)-Y(1,\lambda)$, $U(y)=y(0)-y(1)$.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$P_n f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)Y(1,\lambda)\int_0^x Y^{-1}(t,\lambda)f(t)\,dt\,d\lambda.$$

При этом матрица $\Delta^{-1}(\lambda)Y(1,\lambda)$ *ограничена по* n *и* $\lambda\in\gamma_n$.

Теорема 1. *При* $|n|$ *достаточно больших*

$$P_n f = \int_{\gamma_n}\Phi(x,\lambda;f)\,d\lambda,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270)

где каждая компонента вектора $\Phi(x,\lambda;f)$ имеет вид

$$\sum_k s_k(\lambda) y_{i_1 j_1}(x)(w_{i,j}, \bar{f}_l),$$

где $w_{ij}(x)$ — компоненты матрицы $Y^{-1}(x,\lambda)$, $s_k(\lambda)$ зависят только от λ и ограничены по $\lambda \in \gamma_n$ при всех n, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$, и суммирование ведется по всем $k = (i_1, j_1, i, j, l)$, когда компоненты мультииндекса k принимают всевозможные значения из 1 и 2.

Дадим приложение теоремы 1 к вопросу о перестановочных со скобками базисах из собственных и присоединенных функций оператора Дирака.

Обозначим через $\varphi(x,\mu)$ одну из функций вида

$$\begin{aligned}&\varphi(x,\mu) = e^{\pm\bar{\mu}x}\bigl\{\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_x^1 \varphi(\tau)\overline{K}_{ij}(\tau,(\tau\pm x)/2)\,d\tau\bigr\},\\ &\varphi(x,\mu) = \tfrac{1}{2}e^{\pm\bar{\mu}x}\textstyle\int_x^1 \varphi(\tau)\overline{K}_{ij}(\tau,(\tau\pm x)/2)\,d\tau,\end{aligned}$$

где $\varphi \in L_2[0,1]$, $K_{ij}(x,\xi)$ из [2], знаки $\pm$ берутся в любой комбинации.

Лемма 3. *При $\mu \in \gamma_0 = \{\mu \,|\, |\mu| = \delta\}$ справедлива оценка $\|\varphi(x,\mu)\| = O(\|\varphi\|)$, равномерная по μ, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.*

Лемма 4. *Если $\lambda = 2n\pi i + \mu$, $\mu \in \gamma_0$, то для каждой пары (i,j) существуют две функции $\varphi(x,\mu)$ из приведенных выше, такие, что справедливы формулы $(y_{ij}(x),\varphi(x)) = (e^{2n\pi ix},\varphi(x,\mu)) + (e^{-2n\pi ix},\varphi(x,\mu))$.*

Лемма 5. *Справедливы оценки:*

$$\begin{aligned}&\sum_n |(y_{ij}(x,2n\pi i+\mu),\varphi)|^2 = O(\|\varphi\|^2),\\ &\sum_n |(w_{ij}(x,2n\pi i+\mu),\varphi)|^2 = O(\|\varphi\|^2),\end{aligned}$$

равномерные относительно i, j и $\mu \in \gamma_0$. Здесь $y_{ij}(x,2n\pi i+\mu)$ $(w_{ij}(x,2n\pi i+\mu))$ есть $y_{ij}(x)$ $(w_{ij}(x))$ при $\lambda = 2n\pi i+\mu$, $\mu \in \gamma_0$.

Лемма 6. *Обозначим через N_0 все целые числа, меньшие по модулю некоторого достаточно большого фиксированного числа. Пусть N любой конечный набор целых чисел, причем $N \cap N_0$ пусто. Тогда справедлива оценка $\Bigl\|\sum_{n\in N} P_n\Bigr\| \leqslant c$, где c не зависит от набора N, $\|\cdot\|$ — норма в пространстве операторов $L_2^2[0,1]$.*

С помощью лемм 3-6 из теоремы 1 из [1] получаем

Теорема 2. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1)-(2) (см. [1]) образует базис Рисса со скобками в* $L_2^2[0,1]$ *(в скобки заключены* $P_n f$*).*

Теорема 2 при $q_{ij} \in L_2[0,1]$ другим способом получена в [2].

Литература

1. *Бурлуцкая М.Ш.* // (настоящий сборник)

2. *P.Djakov, B.Mityagin* // Math. Nachr. 283:3 (2010), p. 443-462.

О СРАВНЕНИИ МЕТОДОВ ВЕСОВОГО РЕШЕТА В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Вахитова Е.В., Вахитова С.Р. (Воронеж)

Метод решета является одним из немногих общих методов, позволяющих решать различные задачи теории чисел и ее приложений. Краткий обзор работ по исследованию методов решета приведен в работе [1]. При решении задач можно применять и метод решета Бруна, и метод решета Сельберга. Метод решета Бруна имеет комбинаторную природу и является очень сложным. Результат будет лучше. если элементы последовательности снабдить весами (коэффициентами). Проблема выбора оптимальных весов в методе весового решета является очень трудной. Можно применять метод решета Сельберга с весами Рихерта [2], с весами Бухштаба в непрерывной форме, полученной Лабордэ [3], с весами Бухштаба нового типа [4]. Приведем здесь веса Рихерта и веса Бухштаба в непрерывной форме, полученной Лабордэ, обозначив весовую функцию через $T_{Rich}(X)$ и $T_{\substack{Buch-\\Lab}}(X)$ соответственно:

$$T_{Rich}(X) = \frac{1}{2(c-1)} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p \leqslant X^{\frac{c}{a}}} (c - a\frac{\ln p}{\ln X}) S(A_p;\, X^{\frac{1}{a}}),$$

где $X \in \mathbf{R}$, $X > 1$, a, $c \in \mathbf{R}$, $1 < c < a \leqslant 4$, p – простое число, A – конечная последовательность целых (не обязательно различных) чисел $a_n \leqslant X$, $A_p = \{a_n \in A | a_n \equiv 0 (mod\, p)\}$.

$$T_{\substack{Buch-\\Lab}}(X) = \frac{1}{2c-b-1} \Bigg\{ (c-b) \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p \leqslant X^{\frac{b}{a}}} S\left(A_p; X^{\frac{1}{a}}\right) +$$

$$+a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}}\left(\sum_{X^s\leqslant p\leqslant X^{\frac{b+1}{a}-s}} S\left(A_p;X^s\right)\right)ds+$$

$$+\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p\leqslant X^{\frac{b+1}{2a}}}\left((b+1)-2a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S(A_p;p)+$$

$$+\sum_{X^{\frac{b}{a}}\leqslant p\leqslant X^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\Bigg\},$$

где $a,b,c\in\mathbf{R}$, $1\leqslant b\leqslant c\leqslant a$, $Ma=b+(r-1)c+1$, $r\in\mathbf{N}$, $r\geqslant 2$, $M>0$ и определено из условия: $|a_n|\leqslant X^M$ для всех $a_n\in A$.

Веса Рихерта являются частным случаем весов Бухштаба в непрерывной форме, полученной Лабордэ, получаются из них при $b=1$ и заведомо хуже, так как существенно ограничивают выбор параметров a и c весового решета. Для более точного результата лучше применять веса Бухштаба нового типа, но они имеют более сложный вид. Эти веса были анонсированы А. А. Бухштабом [4] в 1985 году и исследованы первым автором в работе [5].

Отметим, что при выборе приближения числа элементов в последовательности важную роль играют усредненные оценки числа простых чисел в арифметических прогрессиях. Эти оценки основаны на использовании идей большого решета Ю. В. Линника. Обычно пользуются следующей оценкой: существует постоянная $C\,(0<C<1)$, такая, что при любой постоянной $C'>0$

$$\sum_{d<X^C}\mu^2(d)\max_{\substack{l(mod\,d)\\(l,\,d)=1}}|\pi(X;d,l)-\frac{li\;X}{\varphi(d)}|=O(\frac{X}{\ln^{C'}X}),$$

где $\pi(X;d,l)$ – число простых чисел $p\leqslant X$ и $p\equiv l(mod\,d)$, $\mu(d)$ – функция Мебиуса, $\varphi(d)$ – функция Эйлера, $li\;X$ – интегральный логарифм, X – достаточно большое положительное число, $d\in\mathbf{N}$ и свободно от квадратов, то есть $\mu(d)\neq 0$.

Эту оценку М. Б. Барбан доказал при $C=\frac{3}{8}-\varepsilon$, А. И. Виноградов и А. Бомбьери при $C=\frac{1}{2}-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – произвольная постоянная.

Литература

[1] *Вахитова Е. В., Вахитова С. Р.* Краткий обзор работ по исследованию методов решета //Тезисы докладов VIII Междунар.

конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения"(посвященной 190-летию П. Л. Чебышева и 120-летию И. М. Виноградова) 12–17 сентября 2011 г. – Россия, Саратов: Изд-во СГУ, 2011 – С. 11–12.

[2] *Richert H. – E.* Selbergs sieve with weights // Mathematika. – 1969. – V. 16. – N 31. – P. 1–22.

[3] *Laborde M.* Buchstabs sifting weights // Mathematika. – 1979. – V. 26. – P. 250–257.

[4] *Бухштаб А.А.* Новый тип весового решета // Всесоюз. конф. "Теория чисел и её приложения". Тез. докл. – Тбилиси, 1985. – С. 22–24.

[5] *Вахитова Е.В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Математические заметки. – 1999. – Т. 66. – N 1. – С. 38–49.

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Вахитова Е.В., Вахитова С.Р. (Воронеж)

Приведем обоснование оценки остаточного члена, полученного в работе авторов [1], сохранив обозначения: A – конечная последовательность значений неприводимого полинома $F(p)$ от простого аргумента $p \leqslant x,\ x \in \mathbf{R},\ x > 1$, $|A_d|$ – число элементов в последовательности A, которые делятся на d. Покажем, что остаточный член $R(x,\ d)$ достаточно мал в том смысле, что выполнено условие на последовательность: существуют постоянные $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, $C_3' \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leqslant C_3' \frac{X}{\ln^C X},$$

где $X \geqslant 2,\ C_3' = C_3'(C),\ R(X,d) = |A_d| - \dfrac{\omega(d)}{d} X$, $\nu(d)$ – число различных простых делителей натурального числа d, $\mu(d)$ –функция Мебиуса.

Проверим выполнимость этого условия, учитывая, что

$$|R(x,\ d)| \leqslant \rho(d)(E(x,\ d) + 1),$$

где $\rho(d)$ – число решений сравнения $F(n) \equiv 0 (mod\ d)$,

$$E(x,\ d) = \max_{2 \leqslant d \leqslant x} \max_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ (m,\ d)=1}} |\pi(x; d, m) - \frac{li\ x}{\varphi(d)}|$$

и $\omega(d)=\frac{\rho_1(d)}{\varphi(d)}d$, $\rho_1(d)$ – число решений сравнения $F(m)\equiv 0(mod\, d)$ для $(m,d)=1$, $\varphi(d)$ – функция Эйлера.

Имеем: $\rho(d)=\prod\limits_{p|d}\rho(p)$, $\rho(p)\leqslant g$, поэтому $\rho(d)\leqslant g^{\nu(d)}$, где g – степень полинома $F(n)$ с целыми коэффициентами.

Рассмотрим сумму из условия на последовательность с некоторыми постоянными α и C_0, которые выберем в дальнейшем. При достаточно большом X имеем:

$$\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)3^{\nu(d)}|R(X,d)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)3^{\nu(d)}g^{\nu(d)}(E(X,d)+1)=$$

$$=\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}(E(X,d)+1)=$$

$$=\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}E(X,d)+\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}.$$

Оценим отдельно каждую из полученных сумм.

а) Так как $d\leqslant X$, то $E(X,d)<<X/d$, поэтому

$$\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}E(X,d)<<$$

$$<<X^{1/2}\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\frac{\mu^2(d)}{d^{1/2}}(3g)^{\nu(d)}E^{1/2}(X,d)<<$$

$$<<X^{1/2}\Big(\sum_{d<X^\alpha}\frac{1}{d}\mu^2(d)(3g)^{2\nu(d)}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{q<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}E(X,q)\Big)^{1/2}.$$

Оценим первую из полученных сумм.

$$\Big(\sum_{d<X^\alpha}\frac{\mu^2(d)(3g)^{2\nu(d)}}{d}\Big)^{\frac12}=\Big(\sum_{d_1\dots d_{(3g)^2}<X^\alpha}\frac{\mu^2(d_1\dots d_{(3g)^2})}{d_1\dots d_{(3g)^2}}\Big)^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\sum_{n<X^\alpha}\frac{1}{n}\right)^{(3g)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\alpha\ln X+1)^{\frac{1}{2}(3g)^2}.$$

Для оценки второй суммы применим результат Виноградова–Бомбьери, согласно которому для любой положительной постоянной v существует положительная постоянная C, такая, что

$$\sum_{d<\frac{X^{1/2}}{\ln^C X}} E(X,d)=O_v(\frac{X}{\ln^v X}).$$

(Эту оценку М.Б. Барбан доказал при $C=3/8-\varepsilon$, А.И. Виноградов и А. Бомбьери доказали при $C=1/2-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – произвольная постоянная).

Для получения необходимой оценки можно самое большее выбрать $\alpha=1/2$. Тогда при $v=8+(3g)^2$ получим, что существует постоянная C_0 такая, что

$$\left(\sum_{g<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}} E(X,q)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(O_g\left(\frac{X}{\ln^{8+(3g)^2}X}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O_g\left(\frac{X^{1/2}}{\ln^{4+\frac{1}{2}(3g)^2}X}\right).$$

Таким образом, для рассматриваемой в пункте а) суммы получим

$$\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}E(X,d)<<X^{1/2}\left(\frac{1}{2}\ln X+1\right)^{\frac{1}{2}(3g)^2}\times$$

$$\times\frac{X^{1/2}}{\ln^{4+\frac{1}{2}(3g)^2}X}<<\frac{X}{\ln^4 X}<<\frac{X}{\ln^3 X},$$

причем постоянная в символе $<<$ может зависеть только от величины g.

б) При $\alpha=1/2$ получим

$$\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}\leqslant\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\frac{\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}}{d}=$$

$$= \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X} \sum_{d_1...d_{3g} < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \frac{\mu^2(d_1...d_{3g})}{d_1...d_{3g}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X} \Bigg(\sum_{n < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \frac{1}{n} \Bigg)^{3g} \leqslant \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X} \left(\ln \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X} + 1 \right)^{3g} \leqslant$$

$$\leqslant X^{1/2} (\frac{1}{2} \ln X + 1)^{3g} << \frac{X}{\ln^3 X}.$$

Итак, при $\alpha = 1/2$ существуют постоянные $C_3' \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X, d)| \leqslant C_3' \frac{X}{\ln^3 X}.$$

Таким образом, условие на последовательность выполнено с $\alpha = 1/2$.

В работе Рихерта Х. – Э. [2] получено, что остаточный член мал в среднем в смысле теоремы Виногрдова – Бомбьери.

Авторами показано, что остаточный член $R(x,\ d)$ достаточно мал в том смысле, что выполнено условие на последовательность:

$$\sum_{d < \frac{X^{\frac{1}{2}}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,\ d)| \leqslant C_3' \frac{X}{\ln^3 X}.$$

Литература

[1] Вахитова Е. В., Вахитова С. Р. О выборе приближения числа элементов в конечной последовательности значений неприводимого полинома от простого аргумента // Известия ТулГУ. Естественные науки, 2011. – Вып. 2. – С. 6 – 10.

[2] Рихерт Х. – Э. Решето Сельберга / Вып. Проблемы аналитической теории чисел. Перевод с англ. Б.В. Левина. М. : Мир, 1975. – С. 7 – 42.

ПОСТРОЕНИЕ НА БАЗЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ МАЯТНИКА НА КОЛЕСЕ

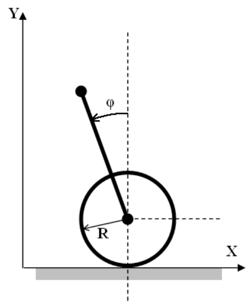
Величко В.С. (Челябинск)

124816@list.ru

В последнее время весьма актуальна задача компьютерного управления поведением механических или иных объектов. Если рассматривать эти объекты и управляющий ими компьютер как единое целое, то эту задачу можно сформулировать как попытку создания объекта, способного самостоятельно управлять своими действиями.

В работе «Построение на базе нечеткой логики стабилизирующего управления маятника на колесе» исследуется задача глобальной стабилизации перевернутого однозвенного маятника на колесе. Стабилизирующее управление строится с помощью исследования изменения энергии [1] системы и последующего составления нечетких правил [2][3].

Для наглядности и дальнейшего изучения полученные правила применяются к компьютерной модели, в которой учтены основные физические законы, действующие на систему.



Несмотря на отличия модели от реального объекта, нечеткость в полученных правилах позволяет использовать управление с учетом внешних реальных помех. В работе продемонстрирован путь к созданию системы стабилизации и возможность создания такой системы.

Литература

1. Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский. Маятник на подвижном основании. Доклады Академии наук. 2011. - Т. 439, N 6, С. 746-751

2. Л.А. Заде «Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений», Мир, Москва 1976. - 161с

3. В.И. Ухоботов «Введение в теорию нечетких множеств и ее приложения» учебное пособие. - УрСЭИ АТиСО. Челябинск, 2005. – 136с

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯТОРА

Вишневская Н.И. (Коломна)
01vishnevskaya1984@mail.ru

В конформной теории поля рассматриваются многозначно - аналитические функции, связанные с корреляторами различного порядка. Было установлено, что данные функции связаны с интегралами гипергеометрического типа. В частности четырехточечный коррелятор, содержащий конформный оператор втрого порядка задается интегралом

$$\int_C t^a(t-1)^b(t-z)^c dt, \tag{1}$$

В настоящей работе найдено линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка решением которого является следующая многозначно - аналитическая функция переменной z

$$\int_{C_1}\int_{C_2}\int_{C_3} t_1^a(t_1-1)^b(t_1-z)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c t_3^a(t_3-1)^b(t_3-z)^c$$
$$(t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g dt_1dt_2dt_3, \tag{3}$$

которое имеет вид

$$\begin{gathered} z^3(z-1)^3I'''' + (K_1z+K_2(z-1))z^2(z-1)^2I'''+ \\ +(L_1z^2+L_2(z-1)^2+L_3z(z-1))z(z-1)I''+ \\ +(M_1z^2(z-1)+M_2z(z-1)^2+M_3(z-1)^3+M_4z^3)I'+ \\ +(P_1(z-1)^2+P_2z(z-1)+P_3z^2)I=0, \end{gathered} \tag{4}$$

где коэффициенты уравнения выражаются через параметры функции (3).

Литература

1. В.С.Доценко,В.А. Фатеев,*Конформная алгебра и многоточечные корреляционные функции в 2D статистических моделях*, Nucl.Phys., 1984,B240[FS 12], 312–348

2. Vl. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Four-point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central change*,Nucl.Phys., 1985,B251[FS 13], 691–734

ОДНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Волынская М.Г. (Самара)

volyn79@mail.ru

Рассмотрим в области $Q = \{(x,t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ задачу для гиперболического уравнения:

$$u_{tt} - \big(a(x,t)u_x\big)_x + c(t)u = f(x,t) \tag{1}$$

с начальными и граничным условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), u_x(0,t) = 0, \tag{2}$$

и нелокальным интегральным условием:

$$u(\ell,t) + \int\limits_0^\ell K(x)u(x,t)dx = 0, \tag{3}$$

где: $\varphi(x) \in W_2^1(0,\ell)$; $\psi(x) \in L_2(0,\ell)$; $K(x) \in C^1[0,\ell]$; $c(t) \in C[0,T]$; $a(x,t) \in C(\bar{Q})$; $f(x,y) \in L_2(Q)$; $K(\ell) = 0$.
Для исследования этой задачи используем следующий метод. Введем функцию:

$$v(x,t) = u(x,t) + \int\limits_0^\ell K(x)u(x,t)dx. \tag{4}$$

Тогда, если $u(x,t)$ решение задачи (1)-(3), получаем вспомогательную задачу для введенной функции (4):

$$v_{tt} - \big(a(x,t)v_x\big)_x + c(t)v = F(x,t,u) \tag{5}$$

$$v(x,0) = \Phi(x), v_t(x,0) = \Psi(x), v_x(0,t) = 0, v(\ell,t) = 0. \tag{6}$$

Показано, что задача (5)-(6) имеет единственое обобщенное решение.

Литература

[1] *Кожанов А.И. Пулькина Л.С.*О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения.—2006.—Т.42.—№9.—С.1166–1179.

МЕТОД ОБЪЕДИНЕНИЯ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Галусарьян Р.Т. (Обнинск)
galusarian@iate.obninsk.ru

Нахождение функции $U(x,y)$ по ее дифференциалу методом объединения частных интегралов.

Если $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, то функцию $U(x,y)$ предлагается находить методом объединения частных интегралов по схеме - алгоритму: *1. Найти частный интеграл по* x (считать $y =$*const.*) $I_x = \int P(x,y)dx$.

2. Найти частный интеграл по $\boldsymbol{y}$ (считать $x =$*const.)* $I_y = \int Q\,(x,y)\,dy$.

3. Функция $U\,(x,y)$ *есть объединение полученных выражений - множеств,т.е.*

$U\,(x,y) = I_x \cup I_y$ (повторяющиеся слагаемые записываются один раз). Применим данную схему при решении дифференциальных уравнений.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(x^2 + y^2 + y\right) dx + (2xy + x + e^y)\, dy\; = 0.$$

Решение.

Легко убедиться, что условия полного дифференциала выполнены. Тогда $\exists\, U\,(x,y)$ такая, что $dU = \left(x^2 + y^2 + y\right) dx + (2xy + x + e^y)\, dy$. Как известно, общее решение такого уравнения имеет вид $U\,(x,y) = C$**.** Известны два основных общепринятых способа решения таких уравнений.

1-й метод. *Метод вспомогательной функции* $\varphi(y)$ или $\varphi(x)$

2-й метод. *Метод криволинейного интеграла.*

Мы будем искать функцию $U\,(x,y)$ по предложенной схеме:

1) Находим 1-й частный интеграл по $\boldsymbol{x}$ $(y - const)$

$I_x = \int (x^2 + y^2 + y)dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 + xy$

2) Находим 2-й частный интеграл по $\boldsymbol{y}$ $(x - const)$

$$I_y = \int (2xy + x + e^y)\ dy = xy^2 + xy + e^y,$$

3) Находим функцию $U\,(x,y) = I_x \cup I_y$ **-** объединение полученных выражений (повторяющиеся слагаемые записываются один раз).

$$U\,(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y.$$

Ответ: общее решение имеет вид: $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = C$.

Очевидно, что данную методику можно применить для нахождения функции $U\,(x,y)$ при вычислении криволинейного интеграла от полного дифференциала, а также в ТФКП при решении задачи о восстановлении аналитической в односвязной области D

функции$f\,(z)\;=\;u\,(x,y)\,+\,i\,v\,(x,y)$ по заданной одной функции $u\,(x,y)$ или $v\,(x,y)$

Решение вышеуказанных задач и обоснование метода объединения частных интегралов рассматривается во второй части доклада.

ИЗУЧЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ПЛОСКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВНУТРЕННЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Глушко А.В., Рябенко А.С., Логинова Е.А. (Воронеж)

mail@angl.ru, alexr-83@yandex.ru, vangog2007@list.ru

Рассматривается краевая задача, моделирующая стационарное распределение тепла в плоскости с трещиной $l=[-1;1]\times\{0\}$:

$$\Delta U(x_1,x_2)+k'(x_2)\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0,(x_1,x_2)\in R^2/l, \tag{1}$$

$$U(x_1,\,+0)-U(x_1,\,-0)=e^{-\frac{k(0)}{2}}q_0(x_1),\;x_1\in(-1;1), \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial U(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k'(0)}{2}U(x_1,+0)-\frac{\partial U(x_1,-0)}{\partial x_2}-\\-\frac{k'(0)}{2}U(x_1,-0)=e^{-\frac{k(0)}{2}}q_1(x_1),\;x_1\in(-1;1).\end{gathered} \tag{3}$$

Задача (1)-(3) получена в предположении, что коэффициент внутренней теплопроводности задается функцией $G(x_2)=e^{k(x_2)}$. В дальнейшем предполагается, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3\left([-1;1]\right)$ и существуют константы ε_1 и ε_2, такие что при x_2 принадлежащем R, выполнены оценки $\varepsilon_2>\tilde{k}^2(x_2)>\varepsilon_1>0$, где $\tilde{k}^2(x_2)=\left(k'(x_2)\right)^2+2k''(x_2)$.

Для изучения задачи (1)-(3) была рассмотрена следующая вспомогательная задача:

$$\Delta u(x_1,x_2)-\frac{\tilde{k}^2(0)}{4}u(x_1,x_2)=0,(x_1,x_2)\in R^2/l, \tag{4}$$

$$u(x_1,+0)-u(x_1,-0)=q_0(x_1),\;x_1\in(-1;1), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\;x_1\in(-1;1). \tag{6}$$

При помощи сведения к обобщенной задаче (см. [1]) было построено явное представление решения задачи (4)-(6). Из явного вида решения задачи (4)-(6) и асимптотических формул для функций Макдональда в окрестности нуля (см. [2]) были получены явные представления сингулярных членов асимптотического разложения производных первого порядка решения задачи (4)-(6) в окрестности концов трещины l. Описанные выше результаты исследования задачи (4)-(6) содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. Решение задачи (4)-(6) задается функцией

$$u(x_1,x_2)=\tfrac{|\tilde{k}(0)|x_2}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_1\!\left(\tfrac{|\tilde{k}(0)|}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)\tfrac{q_0(\sigma_1)}{\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}}d\sigma_1-$$
$$-\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_0\left(\tfrac{|\tilde{k}(0)|}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)q_1(\sigma_1)d\sigma_1,$$

где $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – функции Макдональда, причем $u(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $C^{\infty}(R^2\backslash l)$ и ограничена в окрестности трещины l. Для частных производных первого порядка $u(x_1,x_2)$ при (x_1,x_2), принадлежащем $R^2\backslash l$, справедливы представления:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=-\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}+\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}-$$
$$-\frac{q_1(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]+\frac{q_1(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_1(x_1,\,x_2),$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2}-\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2}+$$
$$+\frac{{q'}_0(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]-\frac{{q'}_0(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_2(x_1,\,x_2),$$

где $R_1(x_1,x_2), R_2(x_1,x_2)$ – ограниченные на любом компакте функции.

При помощи процедуры повышения гладкости (см. [3]) и теоремы 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k(x_2)\in C^{k+2}(R)$, где $k=2,\ldots$, тогда у задачи (1)-(3) существует решение $U(x_1,x_2)$ и $U(x_1,x_2)\in C^k(R^2\backslash l)$. При этом функции $U(x_1,x_2)$, $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, в окрестности трещины l имеют такое же асимптотическое представление, как и функции $e^{-\frac{k(x_2)}{2}}u(x_1,x_2)$, $e^{-\frac{k(x_2)}{2}}\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $e^{-\frac{k(x_2)}{2}}\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ соответственно, где $u(x_1,x_2)$ – решение задачи (4)-(6).

Литература

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 799 с.

3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных/ В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

ПОСТРОЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ ДВУХ СВЯЗНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Глушко А.В., Рябенко А.С., Черникова А.С. (Воронеж)
mail@angl.ru, alexr-83@yandex.ru, chernikovaan@mail.ru

Рассматривается следующая краевая задача, моделирующая стационарное распределение тепла в двух связных полупространствах с межфазной трещиной $l = [-1; 1] \times \{0\}$:

$$\begin{cases} \Delta u_1(x_1, x_2) + k_1 \dfrac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0,\ x_1 \in R,\ x_2 > 0, \\ \Delta u_2(x_1, x_2) + k_2 \dfrac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0,\ x_1 \in R,\ x_2 < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

$$u_1(x_1, +0) - u_2(x_1, -0) = q_0(x_1),\ x_1 \in R/(\{-1\} \cup \{1\}), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ \ x_1 \in R/(\{-1\} \cup \{1\}), \qquad (3)$$

где $\operatorname{supp} q_0(x_1) = \operatorname{supp} q_1(x_1) = [-1; 1]$, $q_0(x_1)$, $q_1(x_1) \in C^2([-1; 1])$.

Система уравнений (1) получена в предположении, что в полупространстве $x_2 > 0$ коэффициент внутренней теплопроводности задается функцией $G_1(x_2) = G_1 e^{k_1 x_2}$, где $G_1 \equiv const \neq 0$, $k_1 \equiv const \neq 0$, а в полупространстве $x_2 < 0$ коэффициент внутренней теплопроводности задается функцией $G_2(x_2) = G_2 e^{k_2 x_2}$, где $G_2 \equiv const \neq 0$, $k_2 \equiv const \neq 0$. Предполагается, что граничные условия (2), (3) выполнены в смысле главного значения.

При помощи метода сведения на границу (см. [1]) было доказано, что решение задачи (1)-(3) задается следующим образом:

$$u_1(x_1, x_2) = e^{-\frac{k_1}{2} x_2} F^{-1}{}_{s_1, s_2 \to x_1, x_2} \left[w_1(s_1, s_2) \right],$$

$$u_2(x_1, x_2) = e^{-\frac{k_2}{2} x_2} F^{-1}{}_{s_1, s_2 \to x_1, -x_2} \left[w_2(s_1, s_2) \right],$$

где $w_1(s_1,s_2) = \dfrac{2\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+{s_1}^2}}{{s_1}^2+{s_2}^2+\frac{{k_1}^2}{4}}\cdot$

$$\frac{-P_1(s_1)+\left(\sqrt{\frac{k_2^2}{4}+{s_1}^2}-\frac{k_2}{2}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+{s_1}^2}+\frac{k_1}{2}+\sqrt{\frac{k_2^2}{4}+{s_1}^2}-\frac{k_2}{2}},$$

$$w_2(s_1,s_2)=\frac{2\sqrt{\frac{k_2^2}{4}+{s_1}^2}}{{s_1}^2+{s_2}^2+\frac{{k_2}^2}{4}}\cdot\frac{-P_1(s_1)-\left(\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+{s_1}^2}+\frac{k_1}{2}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+{s_1}^2}+\frac{k_1}{2}+\sqrt{\frac{k_2^2}{4}+{s_1}^2}-\frac{k_2}{2}},$$

$P_0(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_0(x_1)]$, $P_1(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_1(x_1)]$.

Литература

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

ОБ АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В $\mathbb{C}^3$

Голебузов Д.А., Лобода А.В. (Воронеж)

lobvgasu@yandex.ru

Рассмотрим каноническое уравнение (см. [1]) строго псевдо-выпуклой (СПВ) вещественной гиперповерхности M в $\mathbb{C}^3$

$$v=(|z_1|^2+|z_2|^2)+(\varepsilon_1 z_1^2+\varepsilon_2 z_2^2)+\overline{(\varepsilon_1 z_1^2+\varepsilon_2 z_2^2)}+\sum_{k+l+2m\geqslant 3}F_{klm}(z,\bar z)u^m. \tag{1}$$

Выделяя в многочлене $F_s(z,\bar z,u)=\sum_{k+l+2m=s}F_{klm}(z,\bar z)u^m$ из (1) (k,l - степени по z и $\bar z$) $(z,\bar z)$-составляющую, запишем его в виде

$$F_s(z,\bar z,u)=F_s^{(0)}(z,\bar z)+\hat F_s(z,\bar z,u).$$

ТЕОРЕМА 1. *При фиксированной паре неотрицательных параметров $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, удовлетворяющей условию общности положения*

$$\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(1-2\varepsilon_1)(1-2\varepsilon_2)\neq 0,$$

каноническое уравнение (1) аффинно-однородной СПВ-поверхности однозначно определяется этой парой и четверкой многочленов

$$F_3^{(0)},\hat F_4,F_4^{(0)},\hat F_5. \tag{2}$$

Отметим, что при нулевой четверке (2) однородная поверхность является жесткой квадрикой

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + (\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2) + \overline{(\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2)}$$

и имеет 6-мерную группу $G(M)$ аффинных преобразований. Для остальных однородных многообразий $\dim G(M) = 5$, и для их описания можно использовать технику 5-мерных матричных алгебр Ли из работ [1]-[2]. В частности, примеры поверхностей трубчатого типа ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$) из [2] легко обобщаются на изучаемый случай.

Пример. При $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ поверхности из семейства

$$Re(z_1 \overline{w}) = |z_1|^{2\alpha} \left(Re(z_1 \overline{z_2})\right)^{\beta}$$

являются однородными СПВ-поверхностями общего положения.

Литература

[1] Лобода А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия ВУЗов. Сер. Математика. - 2003. - N 10. - С. 38 - 50.

[2] Нгуен Т. Т. З. Аффинные инварианты 3-го порядка однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ / Т. Т. З. Нгуен // ВЗМШ-2012, Воронеж, 2012. Тезисы докл. С. 156 - 158.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПОДАТЛИВОСТИ ОДНОЙ СИЛЬНО СИНГУЛЯРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Голованёва Ф.В., Шабров С.А. (Воронеж)

В работе изучается математическая модель

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = (pu''_{xx})(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(l) = (pu''_{xx})'_{x}(l) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при описании малых деформаций сильно сингулярной консоли, помещенной во внешнию среду с особенностями; один конец консоли свободен, а другой — закреплен шарнирно. Отметим, что дифференциальная модель (1) при $Q(x) \equiv const$ свойством невырожденности не обладает, что приводит к определенным трудностям в ее иследовании. Уравнение в (1) (как впрочем и саму модель) мы изучаем с позиций поточечного подхода, предложенного Ю. В. Покорным. Уравнение рассматривается на специальном расширении $\overline{[0;l]}_\sigma$ отрезка $[0;l]$, как поточечно заданное. В точках $\xi \in S(\sigma)$ ($S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая содержит все особенности системы и порождает меру σ) уравнение реализуется в виде равенства

$$\Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = F(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)$ — скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Множество $\overline{[0;l]}_\sigma$ строится следующим образом. На множестве $[0;l]$ зададим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S(\sigma)$ непусто (наиболее интересный для нас случай), то полученное метрическое пространство не является полным. Стандартное пополнение и приводит нас к $\overline{[0;l]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0, \xi, \xi + 0\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) $p(x)$, $F(x)$ *и* $Q(x)$ *—* σ*-абсолютно непрерывны;* 2) $p(x) > 0$*;* 3) $Q(l) > Q(0)$. *Тогда разность* $Q(l) - Q(0)$ *можно сделать настолько малой, что функция Грина математической модели* (1) *неотрицательна и, более того, для всех* x, s, τ *справедливо неравенство* $G(x,s) \geqslant kxG(\tau,s)$ *при некотором* $k > 0$.

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В СМО С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ, СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА И РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Головко Н.И., Крылова Д.С. (Владивосток)
cdo@psue.ru

Применение моделей СМО в социальных системах, например в информационных сетях, имеет актуальное теоретическое и практические приложения. В данной работе рассматривается СМО с бесконечным накопителем и двумя приборами: основным с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ и резервным – интенсивности $\mu + \Delta$, который включается, если число заявок в СМО станет больше или равным ν. На вход СМО поступает ДС ПП, интенсивность которого $\lambda(t)$ является скачкообразным процессом, изменяющимся на отрезке $[a,b]$ с интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. Предполагается условие отсутствия перегрузок, то есть $b < \mu$. В данной работе предлагается анализ распределения числа заявок с применением метода производящих функций.

В работе введены обозначения:$f(x)$ стационарная плотность $\lambda(t)$, где λ – процесс $\lambda(t)$ в стационарном режиме; ν – число заявок в стационарном режиме; $q_k(x)$, $k \geqslant 0$ совместное стационарное распределение числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме. Для краткости функции $q_k(x)$ называются стационарными характеристиками числа заявок.

В данной работе исследованы стационарные условия нормировки для $q_0(x)$; получена стационарная производящая функция; вычислены стационарные характеристики числа заявок в СМО, такие как сумма сходящегося ряда и моменты числа заявок; разработан эффективный вычислительный метод расчета $q_0(x)$.

Литература

1.*Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СМО M/G/1 СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Головко Н.И., Пелешок О.В. (Владивосток)

cdo@psue.ru

Функционирование локальных, а также фрагментов глобальных информационных сетей и Интернет описывается СМО с параметрами, изменяющимися в случайные моменты времени. Достаточно хорошо исследованы системы массового обслуживания с дважды стохастическим пуассоновским потоком заявок, интенсивность которого представляет собой марковский процесс с конечным или счетным пространством состояний. Менее исследован случай, когда интенсивность входного дважды стохастического пуассоновского потока заявок представляет собой случайный процесс с непрерывным пространством состояний.

В данной работе рассматривается СМО, имеющая бесконечный накопитель, экспоненциальное обслуживание с параметром μ, входной дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, изменяющийся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. Предполагается выполнения условия отсутствия перегрузок $b < \mu$.

Для рассматриваемой СМО проводился численный анализ с целью апробации численных методов и верификации полученных результатов путем сравнения полученных характеристик различными численными методами и определения точности полученных результатов. Численный анализ включал в себя разработку численных методов, алгоритмов расчета распределений числа заявок, моментов числа заявок в СМО, моментов незавершенной работы, проведение численных экспериментов, в ходе которых в исследуемой СМО наблюдались вероятностные характеристики СМО при различных входных данных.

Наблюдались различные численные эффекты, которым была дана вероятностная интерпретация. В частности наблюдалась неотрицательность вероятностных характеристик.

Литература

1.*Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение. 1979.

НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЛН (ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ)

Головцов А.В. (Казань)
golovcov-anton@mail.ru

Если в волновом уравнении $\sum\limits_{\alpha \in F} C_\alpha(x,y,z)D^\alpha u = 0$ переменные $t, (x,y,z)$ разделяются, то элементарная волна $\varphi(t)\psi(x,y,z)$ определяется равенствами

$$\varphi^{(2)}(t) + a_1\varphi^{(1)}(t) - \lambda\varphi(t) = 0. \ \sum_{\beta \in F_1} C_\beta(x,y,z)D^\beta \psi = 0, \ l\psi = 0 \quad (1)$$

Коэффициенты в волновом уравнении, как правило, не известны. При этом λ — собственное значение задачи (1) всегда не известно, более того, неизвестны условия l, которым должна удовлетворять $\psi(x,y,z)$.

Требуется определить $U = \varphi(t)\psi(x_0,y_0,z_0)$, если известны её амплитуды A_0, A_1, A_2, A_3 в моменты $0, T, 2T, 3T$. В случае не зависимости a_1 от t доказаны. **Прямая задача:** известны все коэффициенты в (1) и условие l, найти $\varphi(t)\psi(x,y,z)$. **Обратная задача:** неизвестны ни l, ни коэффициенты в (1) (либо часть из них), найти часть коэффициентов и λ.

Поставленные задачи будут частично решены для случая когда

a_1 не зависит от t. Так как A_j — это результаты измерений амплитуд, то по разным причинам на практике всегда $A_j \neq 0$. Мы же исследуем все случаи.

Теорема 1. *Пусть* $\tau_1 \neq \tau_2$ *— положительные корни уравнения* $(A_1^2 - A_0A_2)\tau^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)\tau + (A_2^2 - A_1A_3) = 0$. *Тогда* $U = \tau_1^{t/T}(A_1 - A_0\tau_2)/(\tau_1 - \tau_2) + \tau_2^{t/T}(A_1 - A_0\tau_1)/(\tau_2 - \tau_1)$, *причём* $a_1 = -T^{-1}\ln(\tau_1\tau_2),\ \lambda = T^{-2}\ln(\tau_1)\ln(\tau_2)$.

Теорема 2. *При не выполнении предположений теоремы 1, но существовании* $\tau > 0$, *для которого* $A_0\tau^2 - 2A_1\tau + A_2 = 0,\ 2A_0T\tau^3 + A_1\tau^2 = A_3$ *выполняются равенства* $U = \tau^{t/T}(A_0t - A_0T + A_1/\tau),\ a_1 = -2T^{-1}\ln(\tau),\ \lambda = -(T^{-1}\ln(\tau))^2$.

Теорема 3. При не выполнении предположений теорем 1,2, но существовании $\tau > 0$, для которого $\tau^2(A_1^2 - A_2A_0) = A_2^2 - A_1A_3,\ |A_3 + A_1\tau^2| \leqslant |2A_2\tau|$, в случае $A_2 \neq 0$ выполняются равенства $U = \tau^{t/T}(A_0$
$\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$, где $\beta = 2\pi m/T + \varepsilon\arccos((A_3 + A_1\tau^2)/(2A_2\tau T))$, ε — число 1 либо -1, m — целое число, причём
$B = \big(A_1/\tau - A_0(A_3 + A_1\tau^2)/(2A_2\tau)\big)/\sin(\beta T)$, если $\sin(\beta T) \neq 0$, $\tau = 1,\ B = (A_4 - A_0\cos(\pi k t_4/T))/\sin(\pi k t_4/T)$, если k — целое и $\beta = \pi k/T \neq 0$; при этом $a_1 = -2T^{-1}\ln(\tau),\ a_2 - \lambda = (\beta^2 + a^2)$.

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ ТЕОРЕМА КУНА-ТАККЕРА В РЕФЛЕКСИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Горшков А.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)
tiger-nn@mail.ru, m.sumin@mail.ru

Доклад посвящен обсуждению так называемой регуляризованной теоремы Куна-Таккера в недифференциальной форме для задачи выпуклого программирования в рефлексивном банаховом пространстве вида

$$f(z) \to \min,\ Az = h,\ g_i(z) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\ z \in D \subset Z, \qquad (1)$$

где $f : Z \to R$ – строго равномерно выпуклый непрерывный функционал, $A : Z \to H$ – линейный непрерывный оператор, $h \in H$ – заданный элемент, $g_i : Z \to R, i = 1, \ldots, m,$ – выпуклые непрерывные функционалы, D – выпуклое замкнутое множество, $Z,\ H$ – рефлексивные банаховы пространства.

Регуляризованная теорема Куна-Таккера для задачи (1), доказательство которой основано на идеологии двойственной регуляризации [1], представляет собой утверждение в терминах минимизирующих последовательностей о возможности аппроксимации решения задачи выпуклого программирования (1) точками минимума ее регулярной (с равным единице множителем Лагранжа при функционале цели) функции Лагранжа без каких-либо предположений регулярности самой оптимизационной задачи. Она является обобщением аналогичной теоремы Куна-Таккера в секвенциальной недифференциальной форме для случая задачи (1) в гильбертовом пространстве [1]. Важнейшей ее особенностью, которой она принципиальной отличается от своего классического аналога, является устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных задачи (1). Расширение класса пространств Z, H позволяет применять обсуждаемую теорему для анализа и решения тех оптимизационных задач, в которых возникает естественная необходимость вложения образов операторов, задающих ограничения, в рефлексивные банаховы пространства и, в частности, в лебеговы функциональные классы суммируемых со степенью p функций, $1 < p < +\infty,\ p \neq 2$.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594-1615.

РАССИНХРОНИЗАЦИЯ В ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ ОБРАТНЫМ МАЯТНИКОМ

Грачиков Д.В., Мишин М.Ю., Семенов М.Е. (Воронеж)

dgrachikov@gmail.com

Рассматривается стабилизация маятника [1], шарнирно закрепленного на цилиндре, движение которого вызывается перемещением поршня с постоянным по абсолютной величине ускорением k. Движение порня подчинено принципу обратной связи, но моменты времени смены его движения рассинхронизированы во времени случайным образом на величину Δt_k.

Для описания движения маятника используется система [3]:

$$A\ddot{\varphi} = mgl\varphi - m\ddot{u}l, \tag{1}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega(0) = \omega_0. \tag{2}$$

Зависимость движения цилиндра $u(t)$ от движения поршня $x(t)$ определяется *оператором гистерезисного типа* Γ – *обыкновенным* *люфтом*:

$$u\,(t) = \Gamma\,[u_0, h]\,x\,(t)\,. \tag{3}$$

В статье получен аналитический вид функции распределения Δt_k, а так же условное математическое ожидание данной величины, позволяющий оценить вероятность стабилизации маятника.

Литература

1. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом. // Успехи физических наук. -1951. -Т.64. -с.7-20.

2. *Красносельский М.А., Покровский А.В.,* “Системы с гистерезисом” Наука, Москва 1983.

3. *Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П.* Динамические модели теории управления. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.

4. *Семенов М.Е.* Математическое моделирование динамических систем с гистерезисными явлениями : Дис. д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 : Воронеж, 2003 192 с. РГБ ОД, 71:04-1/243

О НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Давыдова М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)

В работе изучается уравнение

$$(pu'_x)'_\sigma = f(x,u)u, \tag{1}$$

которое в точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$, понимается как равенство $\Delta\,(pu'_x)\,(\xi) = f(\xi, u(\xi)) \cdot u(\xi)$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Будем предполагать, что функция $p(x)$ σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}} p(x) > 0$ и $f(x,u)u$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

1) $f(x,u)$ при почти всех x (относительно σ-меры) определена и непрерывна по u;

2) функция $f(x,u)$ измерима по x при каждом u;

3) $|f(x,u)| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ σ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Решение уравнения (1) будем искать в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$.

Условия, которые мы наложили на функции $p(x)$ и $f(x,u)\cdot u$ разрешимость уравнения (1), как в форме задачи Коши, так и краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть $f(x,u)$ убывает по u при $u \geqslant 0$ и каждом $x \in \overline{[0;\ell]}_S$; $u(x)$ некоторое решение уравнения (1), $(\alpha;\beta)$ — интервал, в котором решение $u(x)$ положительно; $u(\alpha) = u(\beta) = 0$; $v(x)$ — решение, линейно независимое с $u(x)$, кроме того, $u(x)$ и $v(x)$ не пересекаются в интервале $(\alpha;\beta)$. Тогда $v(x)$ не может иметь положительных на $(\alpha;\beta)$ значений.*

Уравнение (1) задано почти всюду (в смысле меры σ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\sigma(x)$, непрерывная в точках $x=0$ и $x=\ell$, определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ с метрикой

$$\varrho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|.$$

Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$ и $S(\sigma)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$. На множестве $\overline{[0;\ell]}_S$ определим функцию сегмента $\sigma\left(\overline{[\alpha;\beta]}_S\right)$ для множества $\overline{[\alpha;\beta]}_S \subset \overline{[0;\ell]}_S$ следующим равенством

$$\sigma\left(\overline{[\alpha;\beta]}_S\right) = \sigma(\beta+0) - \sigma(\alpha-0).$$

Через σ обозначим аддитивную меру, полученную из функции $\sigma\left(\overline{[\alpha;\beta]}_S\right)$ стандартным распространением.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,u)\cdot u$ возрастает по $u \geqslant 0$. Пусть $u(x)$ положительное на $(\alpha;\beta)$ решение уравнения (1), причем $u(\alpha) = u(\beta) = 0$; $v(x)$ линейно независимое с $u(x)$ решение (1) и пересекается в $(\alpha;\beta)$ с $u(x)$ в некоторой точке. Тогда такая точка единственна, и $v(x)$ не может не принимать отрицательных значений.*

Изложенные методы позволяют изучить нелинейную спектральную задачу

$$\begin{cases} -\left(pu'_x\right)'_\sigma = \lambda F(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

при $\lambda > 0$. Через Λ обозначим множество положительных значений λ, при каждом из которых задача (2) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 3. *Пусть $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, положительна и строго убывает по u при всех x, u. Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda$ существует единственное решение $u(x,\lambda)$ задачи* (2)*. Это решение положительно в* $(0;\ell)$*, и $u(x,\lambda)$ не убывает по λ при каждом x.*

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в задаче (2) функция $F(x,u)$ возрастает по u и $F(x,0) \equiv 0$. В этом случае, задача (2) имеет тривиальное решение при любом λ. Будем считать действительное число собственным значением задачи (2), если при этом λ (2) имеет нетривиальное решение.

Теорема 4. *Пусть $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $F(x,0) \equiv 0$; $F(x,u)$ строго возрастает по $u > 0$ и каждом x, $F(x,u)$ допускает представление $F(x,u) = f(x,u) \cdot u$, где $f(x,u)$ не возрастает по u при $u > 0$ и каждом x. Тогда множество Λ собственных значений задачи* (2)*, отвечающих неотрицательным на* $[0;\ell]$ *собственным функциям, обладает следующими свойствами:*

1) Λ *связно;*

2) *при каждом $\lambda \in \Lambda$ задача* (2) *имеет единственное положительное в* $(0;\ell)$ *решение $u(x,\lambda)$;*

3) *$u(x,\lambda)$ строго возрастает по λ; при каждом $\lambda^* \in \Lambda$ соответствующее решение $u(x,\lambda^*)$ задачи* (2) *является равномерным пределом последовательности $u_n(x)$, определяемой итерационными равенствами:*

$$\begin{cases} (pu'_x)'_\sigma(x) + \lambda^* F(x, u_k(x)) = 0, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \dots)$ *при любой начальной непрерывной неотрицательной функции $u_0(x)$.*

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ В ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дикарева Е.В. (Воронеж)

В работе [1] предложен новый подход к решению "плохих" дифференциальных уравнений с негладкими данными следующего вида:

$$dy_t = \sum_k f_k(y_t)\ dx_t^k, \tag{1}$$

где f_k — заданные векторные поля, t_k — управляющие члены, y_t — результирующая траектория. Проблема состоит в том, что если в соответствии со стандартным подходом рассматривать время как параметр и решать данное уравнение как однородное, то, как правило, решение не будет непрерывным, оно может существовать лишь как распределение. В этом случае классическая теория не предлагает методов для определения решения; более того, даже для гладких, но сильно осциллирующих задач не существуют эффективные алгоритмы для численного отыскания решений. Вместе с тем указанная задача возникает во многих разделах математики: теории управления, радиотехнических задачах с шумом, теории алгебр Ли, теории вероятностей (многомерные броуновские траектории, полумартингалы, случайные процессы). Более подробное описание приложений см. в [1].

Развивая существующие ранее методы, нами предложен удачный выбор функциональных пространств для решений, включающих норму с р- вариацией. В таких пространствах удалось в рамках не стохастического, а детерминистского подхода построить решение и эффективные численные методы для его нахождения. При этом были усилены некоторые результаты: рассмотрены броуновские пути с плохими траекториями и расширены области применений формулы многомерной замены переменных и метода последовательных приближений решения итерированными интегралами.

Литература

1. Lyons T. Differential equations driven by rough signals// Revista Matematica Iberoamericana. 1998. V.14, №2.— P. 215–310.

О ЗАВИСИМОСТИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Дубровский И.О. (Воронеж)
2003igor@mail.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения диффузии с двумя фазовыми переменными

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})(u(t,x_1,x_2)) +$$

$$+\varepsilon_2(t)(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2})(u(t,x_1,x_2)) + \varepsilon_3(t)u(t,x_1,x_2), \quad (1)$$

$$u(t_0,x_1,x_2) = u_0(x_1,x_2), \quad (2)$$

где $u(t,x_1,x_2)$ - искомая функция, $\varepsilon_i : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$, $f : T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ случайные процессы, $u_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Случайные коэффициенты $\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_3(t)$ независимы с $\varepsilon_1(t)$ и заданы характеристическим функционалом

$$\psi(v) = \exp(i \int\limits_T <M\varepsilon(s), v(s)> ds)(1+$$

$$+ \iint\limits_{T\,T} <B(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)> \, ds_1 ds_2 + \varphi_{11}(v)\varphi_{22}(v))^{-1}, \quad (3)$$

где символ $< \cdot, \cdot >$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$,
$v_1 : L_1(T) \to \mathbb{R}$, $v_2 : L_1(T) \to \mathbb{R}$, $v(s) = \begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{pmatrix}$,
$M\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} M\varepsilon_1(t) \\ M\varepsilon_2(t) \end{pmatrix}$, $B(s_1,s_2) = \begin{pmatrix} b_{11}(s_1,s_2) & b_{12}(s_1,s_2) \\ b_{12}(s_1,s_2) & b_{22}(s_1,s_2) \end{pmatrix}$,
$b_{ij} : L_1(T \times T) \to \mathbb{R}$, $b_{ij}(s_1,s_2)$ - симметрические функции по переменным (s_1,s_2),
$\varphi_{ij}(v) = \iint\limits_{TT} b_{ij}(s_1,s_2)v_i(s_1)v_j(s_2)\, ds_1 ds_2$, $i,j = \overline{1,2}$.

В работе [1] получена формула для нахождения математического ожидания решения задачи (1),(2) с помощью характеристического функционала.

Для оценки степени влияния случайных коэффициентов, входящих в уравнение (1), на решение, нами был рассмотрен частный случай данной задачи, где функции $b_{ij}(s_1, s_2)$ имеют заданный специальный вид. Для данного случая, с использованием результатов [1], получена формула для математического ожидания решения задачи (1), (2) $M(u(t, x_1, x_2))$.

Далее, найдено решение задачи (1), (2) в случае когда коэффициенты в уравнении (1) детерминированные и совпадают с математическими ожиданиями соответствующих процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$.

Модуль разности между полученными выражениями для математического ожидания и точного решения детерминированной задачи дают оценку влияния случайных коэффициентов задачи (1),(2) на ее решение.

Литература

1. *Дубровский И.О.* О математическом ожидании решения двумерного уравнения диффузии/ И.О. Дубровский // Вестник ВГУ: Физика. Математика - Воронеж, 2012 (в печати)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАТОРОВ С ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Еровенко В.А., Гулина О.В. (Минск)

erovenko@bsu.by, gulina_ o@mail.ru

Согласно классической теореме М.А. Гольдмана, замкнутость области значений линейного ограниченного оператора с бесконечномерными ядром и коядром, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве, неустойчива при малых по норме возмущениях.

Пусть $\boldsymbol{B}(X)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих на бесконечномерном банаховом пространстве X над полем комплексных чисел $\boldsymbol{C}$. Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется *относительно регулярным*, если существует такой оператор $S \in \boldsymbol{B}(X)$, что выполняется равенство $TST = T$. Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ является относительно регулярным тогда и только тогда, когда его ядро и область значений являются замкнутыми дополняемыми подпространствами банахова пространства X, т.е. класс относительно регулярных операторов является сужением класса операторов с замкнутой областью значений [1].

Для того, чтобы относительно регулярный оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ с бесконечномерными ядром и коядром был устойчив при малом по норме возмущении $A \in \boldsymbol{B}(X)$, необходимо наложить дополнительные ограничения как на относительно регулярный оператор T, так и на возмущающий малый по норме оператор A, а именно: для оператора T должно выполняться существенное включение Като $N(T) \overset{e}{\subset} R^{\infty}(T)$, т.е. $N(T) \subset R^{\infty}(T) + F$, где $F \subset X$ – конечномерное подпространство банахова пространства X, $N(T)$ – ядро оператора T, $R^{\infty}(T) := \cap\{R(T^k) : k = 1, 2, ...\}$ – обобщенная область значений оператора T, а возмущающий оператор A должен быть перестановочным с оператором T, т.е. $TA = AT$ [2].

Отметим, что условие перестановочности существенно для устойчивости существенного включения Като при малых по норме возмущениях, что может быть продемонстрировано на соответствующем контрпримере.

Литература

1. Caradus S.R. Generalised inverses and operator theory. — Kingston: Queen's University, 1978. — 209p.

2. Еровенко В.А., Гулина О.В. О возмущении существенно регулярных операторов малыми по норме операторами // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 27–31.

УЧЕБНИК И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ

Ерусалимский Я.М. (Ростов-на-Дону)

dnjme@math.sfedu.ru

Высшая школа России переходит на Государственные образовательные стандарты третьего поколения (ФГОС ВПО-3). Главным отличием новых стандартов от действующих является не переход от расчета трудоёмкости в часах к расчёту в кредитах ECTS, а компетентностный подход к содержанию образования. Эта новация способна в случае её бездумного внедрения не только разрушить единое образовательное пространство, но и уничтожить остатки того хорошего, что сохранилось от "Советского образования".

Компетенции, заложенные в ФГОС ВПО, носят абстрактный и декларативный характер и никак не определяют содержание образования. Попробуйте перебросить набор компетенций с одного направления подготовки на другое, думаю, что этого никто и не заметит. Сейчас в вузах страны идёт процесс разработки ООП и программ учебных курсов под новые образовательные стандарты. Хорошо, если компетенции "расписываются" под содержание курсов, хуже, если содержание учебных курсов "расписывается" под компетенции.

Что может определить - чему учить студентов и как их учить? Думаю, что хорошие современные учебники. Написание таких учебников и их опубликование становится абсолютно необходимым. Тем более, что переход на уровневую систему "бакалавр-магистр" может только усилить существующее расслоение вузов на "сильные"и "слабые". "Сильные" усилятся за счёт притока в магистратуру студентов из "слабых" вузов, а слабые ослабнут, поскольку будут вынуждены заниматься только подготовкой бакалавров.

В сложившихся условиях именно учебник может стать основой, обеспечивающей единство содержания образования в разных вузах и единство требований к его глубине. Следует отметить, что существовавшая система создания учебников разрушена, а новая не создана. Надежды на то, что рыночные отношения в области книгоиздания сами всё отрегулируют себя не оправдали. Вместо кропотливой и вдумчивой работы с авторами издательства либо переиздают хорошие, но уже устаревшие учебники (зато гонорар можно не платить), либо публикуют "макулатуру" с привлекательными названиями типа "Репетитор по курсу математики". Спасти ситуацию может только целевая программа Министерства образования и науки РФ "Новым стандартам - новые учебники которую необходимо безотлагательно разработать и "запустить". Положительный опыт, хоть и подзабытый, имеется. Госкомвуз РФ в 1995-1998 гг. провел всероссийский конкурс по написанию учебников нового поколения по общим фундаментальным естественнонаучным дисциплинам.

Этот конкурс первый и пока единственный в истории высшей школы России был проведен по одиннадцати номинациям. В первом этапе конкурса приняли участие свыше трехсот пятидесяти авторских коллективов. По представленным заявкам были определены победители первого этапа. Авторские коллективы, прошедшие во второй тур конкурса, получили финансовую поддержку Госкомвуза РФ (грант в размере одной годовой заработной платы профессора) на написание собственно учебника. Автор сообщения в составе авторского коллектива принял участиев конкурсе. Наш учебник [1] стал победителем конкурса и опубликован уже четырьмя изданиями общим тиражом 15 000 экз. издательством "Лань" (Спб.). Учебникам-победителям конкурса был присвоен рекомендательный гриф Госкомобразования РФ, что также немаловажно для их дальнейшей "судьбы". Учебное пособие автора [2], имеющее рекомендательный гриф Минобразования РФ выдержало уже 10 переизданий. В Южном федеральном университете на первом этапе его существования (2006-2011гг.) существовала система внутренних грантов для авторов учебников и учебных пособий, а также выделялись средства на их опубликование. Однако, эти учебники и учебные пособия носят внутривузовский характер, а сказанное о новых образовательных стандартах требует создания общероссийских учебников.

Литература

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник. 4-е изд., стер.-Спб.: Издательство "Лань 2008г. – 960 с.:ил.

2. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения//М.: Вузовская книга, изд. 10-е стер., 2009г. – 288с.

О ПРИБЛИЖЕННОМ НАХОЖДЕНИИ ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Жуковская Т.В., Пучков Н.П. (Тамбов)

zukovskys@mail.ru

Доказанные в последнее время А.В. Арутновым, Е.Р. Аваковым, А.В. Дмитруком, Б.Д. Гельманом, Е.С. Жуковским, В.В. Обуховским и другими авторами теоремы о накрывающих отображениях существенно пополнили арсенал методов исследования операторных уравнений. Эти теоремы дают условия разрешимости и представляют оценку решений уравнений с отображениями, областями определения и значений которых могут быть разные метрические пространства. Накрывающие отображения активно используются в исследованиях абстрактных операторных, интегральных, дифференциальных уравнений, краевых задач, управляемых систем (см., например [2]). В многочисленных приложениях требуются методы приближенного решения уравнений с накрывающими отображениями. Ниже предлагается модификация метода Ньютона, применимая к таким уравнениям.

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства. Обозначаем через $B_X(u,r)$ – замкнутый шар пространства X с центром в u радиуса $r>0$. Пусть $\alpha>0$. Отображение $F:X\to Y$ называют *α-накрывающим* [1], если для любых $u\in X$, $r>0$ выполнено $B_Y(F(u),\alpha r)\subseteq F\big(B_X(u,r)\big)$.

В работе А.В. Арутюнова [1] рассмотрена задача о существова-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00645).

нии решения уравнения

$$F(x) = G(x), \tag{1}$$

где отображение $F : X \to Y$ является замкнутым и α-накрывающим, а отображение $G : X \to Y$ — β-липшицевым, причем $\beta < \alpha$. Для нахождения этого решения — точки совпадения отображений F, G строятся последовательные приближения, аналогичные итерациям в теореме Банаха о сжимающем отображении. Для произвольного $x_0 \in X$ определяется $y_0 = G(x_0)$. Так как отображение F является α-накрывающим, то далее можно найти элемент $x_1 \in X$, являющийся решением уравнения $F(x_1) = G(x_0)$ и удовлетворяющий оценке $\rho_X(x_1, x_0) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y_0, F(x_0))$. На втором шаге определяется $y_1 = G(x_1)$ и утверждается существование такого элемента $x_2 \in X$, что $F(x_2) = G(x_1)$ и $\rho_X(x_2, x_1) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y_1, F(x_1))$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению x уравнения (1), удовлетворяющему неравенству $\rho_X(x, x_0) \leqslant (\alpha - \beta)^{-1}\rho_Y(G(x_0), F(x_0))$.

Практическая реализация приведенной схемы требует на каждом шаге для нахождения очередного элемента x_{n+1} решать уравнение

$$F(x) = y_n, \tag{2}$$

где $y_n = G(x_n)$. Будем предполагать, что пространства X, Y являются линейными, нормированными, причем, пространство X — полное. Если отображение F дифференцируемо, то можно воспользоваться идеей метода Ньютона-Канторовича [3, с. 679], и заменить значение $F(x)$ линейным приближением $F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n)$. Тогда приближенным решением уравнения (2) будет элемент

$$x_{n+1} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1}\big(F(x_n) - G(x_n)\big). \tag{3}$$

Полученное соотношение может применяться для построения последовательных приближений к решению уравнения (1).

Можно также воспользоваться модифицированным методом, дающим, вообще говоря худшие приближения, но позволяющим существенно упрощать вычисления. В этом случае последовательные приближения будут определяться равенством

$$x_{n+1} = x_n - \left[F'(x_0)\right]^{-1}\big(F(x_n) - G(x_n)\big). \tag{4}$$

Отметим, что предлагаемые формулы (3), (4) не требуют дифференцируемости отображения G.

В работе исследуется сходимость последовательностей (3), (4) к решению уравнения (1).

Литература

1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки. Докл. РАН, 2007. Т. 416, №2. С. 151–155.

2. Arutyunov A., Zhukovskii E., Zhukovskii S. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75, I. 3. P. 1026-1044.

3. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЛЕЙНА-ЭМДЕНА

Заболоцкий С.А. (Москва)

nugget13@mail.ru

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$y'' + \frac{n-1}{r}y' - |y|^k \operatorname{sign} y = 0, \tag{1}$$

$$y'' + \frac{n-1}{r}y' - |y|^k \operatorname{sign} y = f(r),\ k, n \in \mathbb{R} \quad r \geqslant 0. \tag{2}$$

Решение уравнения назовем *правильным*, если оно определено на $[r_0, \infty)$, $r_0 \geqslant 0$, и абсолютно непрерывно на нем вместе со своей производной. Функции y_1, y_2 назовем *асимптотически эквивалентными* при $r \to \infty$ (обозначение $y_1 \sim y_2$), если $y_1(r) = y_2(r)(1 + o(1))$ при $r \to \infty$. Далее под решением уравнения будем понимать правильное нетривиальное решение. Обозначим $\beta = \frac{2}{k-1}$.

Теорема 1. *Пусть y – решение уравнения (1). Тогда при $k > 1$ верны следующие утверждения:*

а) если $n > \frac{2k}{k-1}$, то $y(r) \sim Cr^{-n+2}$, где $C \neq 0$ (константа), причем для любого $C \neq 0$ такое решение существует;

б) если $n = \frac{2k}{k-1}$, то $y(r) \sim \pm\left(\frac{2}{(k-1)^2 r^2 \ln r}\right)^{\beta/2}$, причем такие решения существуют;

в) если $n < \frac{2k}{k-1}$, то $y(r) = \pm\big(\beta(\beta + 1) - \beta(n-1)\big)^{\beta/2} r^{-\beta} + o(r^{-\beta})$, $r \to \infty$, причем такие решения существуют.

При $k < 1$ и $n = \frac{2k}{k-1}$ $\exists C \neq 0$ такое, что $y(r) \sim C$.

Теорема 2. *Пусть $k > 1$ и функция f при некотором $b > 0$ удовлетворяет условию $\int_0^\infty |f(r)|^2 e^{2br} dr < \infty$. Тогда для любого решения $y(r)$ уравнения (2), стремящегося к нулю вместе с производной при $r \to \infty$, найдется единственное решение $\tilde{y}(r)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$|y(r) - \tilde{y}(r)| = o(e^{-br}), \quad r \to \infty, \qquad \int_0^\infty |y(r) - \tilde{y}(r)|^2 e^{2br} dr < \infty.$$

При доказательстве теоремы 1 использовались результаты работы [1], а теоремы 2 – некоторые результаты работ [2, 3].

Литература

1. Асташова И.В. On asymptotical behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equation // Functional differential equations. 2009. V. 16. № 1. P. 93–115.

2. Асташова И.В. Об асимптотической эквивалентности нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 855.

3. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., Олейник О.А. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях // Матем. сборник. 1998. Т. 189. № 3. С. 45–68.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Завьялова А.В. (Воронеж)
antonina.zavyalova@gmail.com

Основные сведения о многозначных отображениях см., например в [1]. В работе [2] изучались операторные включения с сюрьективными операторами. Настоящая работа является продолжением и уточнением соответствущей теоремы в [3].

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$- линейный замкнутый сюрьективный оператор. Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ - шар радиуса R с центром в точке x_0, Пусть $F : [0, T] \times B_R[x_0] \to Kv(E_2)$ многозначное вполне непрерывное отображение. Рассмотрим следующую задачу:

$$Ax' \in F(t, x), \tag{1}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{2}$$

Решением данной задачи на промежутке $[0; h]$, $0 < h \leqslant T$, называется абсолютно непрерывная функция x такая, что $A(x'(t)) \in F(t, x(t))$ для почти всех $t \in [0, h]$, и $A(x(0)) = A(x_0)$. Обозначим $\sum(x_0, [0, h])$ - множество решений задачи $(1), (2)$ на промежутке $[0, h]$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *(1) При сделанных предположениях найдется такое число $h_0 > 0$, что $\sum(x_0, [0, h_0]) \neq \varnothing$.*
(2) Если $dim(KerA) \geqslant 1$ то, существует такое число $h_0 > 0$, что $\sum(x_0, [0, h]) \neq 0$ и $dim(\sum(x_0, [0, h])) = \infty$.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений/ М: КомКнига (URSS), 2005.

2. Гельман Б.Д. Об операторных включениях с сюръективными операторами./ Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, серия: физика, математика - 2006. №1 - с.119-127.

3. Завьялова А.В. О локальных решениях одного класса вырожденных дифференциальных включений.// Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна. Материалы международной конференции. - Воронеж: Изд. ВГУ, 2012. - с.67-68.

ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Запорожцева С.В. (Воронеж)

Цель обучения ребенка состоит в том,
чтобы сделать его способным
развиваться дальше без помощи учителя.
Элберт Хаббарт.

Приоритетной целью школьного образования, вместо простой передачи знаний, умений и навыков от учителя к ученику, становится развитие способности ученика самостоятельно ставить учебные цели, проектировать пути их реализации, контролировать и оценивать свои достижения, иначе говоря - формирование умения учиться. Учащийся сам должен стать "архитектором и строителем"образовательного процесса. Достижение этой цели становится возможным благодаря формированию ***системы универсальных***

учебных действий (УУД). Овладение универсальными учебными действиями дает учащимся возможность самостоятельного успешного усвоения новых знаний, умений и компетентностей на основе формирования умения учиться. Эта возможность обеспечивается тем, что УУД - это обобщенные действия, порождающие мотивацию к обучению и позволяющие учащимся ориентироваться в различных предметных областях познания.

Сегодня УУД придается огромное значение. Это совокупность способов действий обучающегося, которая обеспечивает его способность к самостоятельному усвоению новых знаний, включая и организацию самого процесса усвоения. Универсальные учебные действия можно сгруппировать в четыре основных блока: личностные; регулятивные; познавательные; коммуникативные.

Личностные действия позволяют сделать учение осмысленным, увязывая их с реальными жизненными целями и ситуациями. Личностные действия направлены на осознание, исследование и принятие жизненных ценностей, позволяют сориентироваться в нравственных нормах и правилах, выработать свою жизненную позицию в отношении мира.

Регулятивные действия обеспечивают возможность управления познавательной и учебной деятельностью посредством постановки целей, планирования, контроля, коррекции своих действий, оценки успешности усвоения.

Познавательные действия включают действия исследования, поиска, отбора и структурирования необходимой информации, моделирование изучаемого содержания.

Коммуникативные действия обеспечивают возможности сотрудничества: умение слышать, слушать и понимать партнера, планировать и согласованно выполнять совместную деятельность, распределять роли, взаимно контролировать действия друг друга, уметь договариваться, вести дискуссию, правильно выражать свои мысли, оказывать поддержку друг другу и эффективно сотрудничать как с учителем, так и со сверстниками.

На уроках математики универсальным учебным действием может служить *познавательное действие* (объединяющее логическое и знаково-символическое действия), определяющее умение ученика выделять тип задачи и способ ее решения. С этой целью ученикам предлагается ряд заданий, в которых необходимо найти схему, отображающую логические отношения между известными данными и искомым. В этом случае ученики решают собственно учебную задачу, задачу на установление логической модели, устанавливающей соотношение данных и неизвестного. А это является важным шагом учеников к успешному усвоению общего способа решения задач.

Можно предложить ученикам парные задания, где универсальным учебным действием служат *коммуникативные действия,* которые должны обеспечивать возможности сотрудничества учеников: умение слушать и понимать партнера, планировать и согласованно выполнять совместную деятельность, распределять роли, взаимно контролировать действия друг друга и уметь договариваться. В процессе изучения математики осуществляется знакомство с математическим языком, формируются речевые умения: дети учатся высказывать суждения с использованием математических терминов и понятий, формулировать вопросы и ответы в ходе выполнения задания, доказательства верности или неверности выполненного действия, обосновывают этапы решения учебной задачи. Работая в соответствии с инструкциями к заданиям учебника, дети учатся работать в парах, выполняя заданные в учебнике проекты в малых группах.

С целью формирования *регулятивного универсального* учебного действия - *действия контроля,* проводятся самопроверки и взаимопроверки решения. Учащимся предлагаются тексты для проверки, содержащие различные виды ошибок (графические, вычислительные и т.д.). И для решения этой задачи можно совместно с детьми составить правила проверки текста, определяющие алгоритм действий. В процессе работы ребёнок учится самостоятельно определять цель своей деятельности, планировать её, самостоятельно двигаться по заданному плану, оценивать и корректировать полученный результат

С целью формирования *личностного* учебного действия, учащимся предлагается самостоятельно определять и высказывать самые простые общие для всех людей правила поведения при общении и сотрудничестве (этические нормы общения и сотрудничества). В самостоятельно созданных ситуациях общения и сотрудничества, опираясь на общие для всех простые правила поведения, делать выбор, какой поступок совершить.

Развитие универсальных учебных действий обеспечивает формирование психологических новообразований и способностей учащегося, которые в свою очередь определяют условия высокой успешности учебной деятельности и освоения учебных дисциплин.

Какие же действия учителя позволяют сформировать универсальные учебные действия?

1. Для развития умения оценивать свою работу дети вместе с учителем разрабатывают алгоритм оценивания своего задания. Учитель не сравнивает детей между собой, а показывает достижения ребенка по сравнению с его вчерашними достижениями.

2. Учитель привлекает детей к открытию новых знаний. Они вместе обсуждают, для чего нужно то или иное знание, как оно пригодится в жизни.

3. Учитель обучает детей приемам работы в группах, дети вместе с учителем исследуют, как можно прийти к единому решению в работе в группах, анализируют учебные конфликты и находят совместно пути их решения.

4. Учитель на уроке уделяет большое внимание, самопроверке детей, обучая их, как можно найти и исправить ошибку. За ошибки не наказывают, объясняя, что все учатся на ошибках.

5. Учитель, создавая проблемную ситуацию, обнаруживая противоречивость или недостаточность знаний, вместе с детьми определяет цель урока.

6. Учитель включает детей в открытие новых знаний.

7. Учитель учит детей способам эффективного запоминания. В ходе учебной деятельности развивается память и логические операции мышления детей. Учитель обращает внимание на общие способы действий в той или иной ситуации.

8. Учитель учит ребенка делать нравственный выбор в рамках работы с ценностным материалом и его анализом. Учитель использует проектные формы работы на уроке и внеурочной деятельности.

9. Учитель показывает и объясняет, за что была поставлена та или иная отметка, учит детей оценивать работу по критериям и самостоятельно выбирать критерии для оценки. Согласно этим критериям учеников учат оценивать и свою работу.

10. Учитель учит ребенка ставить цели и искать пути их достижения, а также решения возникающих проблем. Перед началом решения составляется совместный план действий.

11. Учитель учит разным способам выражения своих мыслей, искусству спора, отстаивания собственного мнения, уважения мнения других.

12. Учитель организует формы деятельности, в рамках которой дети могли бы усвоить нужные знания и ценностный ряд.

13. Учитель и ребенок общаются с позиции сотрудничества; педагог показывает, как распределять роли и обязанности, работая в коллективе. При этом учитель активно включает каждого в учебный процесс, а также поощряет учебное сотрудничество между учениками, учениками и учителем. В их совместной деятельности у учащихся формируются общечеловеческие ценности.

14. Учитель и ученики вместе решают возникающие учебные проблемы. Ученикам дается возможность самостоятельно выбирать задания из предложенных.

15. Учитель учит детей планировать свою работу и свой досуг.

Формирование УУД во многом зависит от педагогически правильного взаимодействия учителя и ученика. В результате изучения всех без исключения предметов у выпускников будут сформированы *личностные, регулятивные, познавательные и коммуникативные* универсальные учебные действия как основа умения учиться.

Литература

1. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа. / сост. Е.С. Савинов. – М.: Просвещение, 2011.-342С.- (Стандарты второго поколения).

2. Учим творчески мыслить на уроках математики: пособие для учителей общеобразоват. учреждений/ М.Ю. Шуба. – М.: Просвещение, 2012.-218с.- (Работаем по новым стандартам).

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Зверева М.Б., Гоговский Д.И. (Воронеж)

margz@rambler.ru

В работе проводится анализ краевой задачи с DS-уравнением, заданным на пространственной сети. *DS-уравнением* мы называем соотношение

$$-D(pu') + uDQ = DF, \tag{1}$$

где DG — дифференциал Стилтьеса от функции ограниченной на графе Γ вариации G. Дифференциал Стилтьеса мы определяем как функционал, заданный на множестве $C[\Gamma]$ непрерывных на Γ функций, с помощью равенства $(DG)u = \int\limits_{\Gamma} udG$.

Если исходные функции p, Q, F дифференцируемы внутри каждого ребра γ графа Γ, то, на каждом ребре уравнение (1) эквивалентно классическому уравнению Штурма-Лиувилля

$$-(pu')' + qu = f,$$

где q и f — обычные производные вдоль γ от функций Q, F. В этом же случае (гладких на ребрах функций p, Q, F) уравнение (1) во внутренних вершинах принимает вид

$$-\sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(a)u'_\gamma(a+0) + q(a)u(a) = f(a).$$

Теорема 1. *Пусть функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре, а функции p, F имеют ограниченную вариацию, причем, $\inf\limits_\Gamma p > 0$. Тогда краевая задача*

$$-D(pu') + uDQ = DF, u|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{2}$$

является невырожденной. Решение задачи (2) $u(x)$ может быть представлено с помощью функции влияния $K(x,s)$ в виде

$$u(x) = \int\limits_\Gamma K(x,s)dF(s).$$

Функция $K(x,s)$ неотрицательна на Γ, причем $\max\limits_\Gamma K(x,s){=}K(s,s)$.

ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТЬ СПЕКТРА ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Зверева М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)
margz@rambler.ru

Проводится математическое моделирование на геометрических графах в случае нерегулярного исходного объекта, когда параметры получаемого уравнения не только не являются непрерывными, но и могут иметь особенности типа дельта-функций, порождаемые естественными физическими обстоятельствами — наличием стоков, локальных воздействий, сосредоточенных масс, локализованных внешних нагрузок (внешних сил) и проч. Математический аппарат, применяемый обычно для анализа регулярных обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь оказывается непригодным. Мы учитываем возможность появления дельта-функций не только во внутренних точках ребер графа, но и в узлах графа. Подобные δ-функции, порождаемые ветвящимися атомами меры, в математической физике ранее не были известны.

Мы изучаем спектральную задача для уравнения с негладкими коэффициентами, заданного на геометрическом графе в форме уравнения с дифференциалами Стилтьеса.

Теорема 1. *Пусть функция $Q(x)$ не убывает, $M(x)$ строго возрастает на каждом ребре графа Γ, а функция $p(x)$ имеет ограниченную вариацию, причем $\inf\limits_{\Gamma} p > 0$. Пусть граф Γ является деревом, и выполнено условие общности положения. Тогда спектр задачи*

$$-D(pu') + uDQ = \lambda uDM, u|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{1}$$

состоит из неограниченной последовательности вещественных и строго положительных простых собственных значений

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

При этом соответствующая λ_k собственная функция $\varphi_k(x)$ имеет в Γ ровно k нулей, в каждом из которых она меняет знак, и $k+1$ S-зон; в каждой S-зоне функции $\varphi_k(x)$ содержится ровно один нуль функции $\varphi_{k+1}(x)$.

Для непрерывной на Γ функции $u(x) : \Gamma \to \mathbb{R}$ *S-зоной* $u(x)$ мы называем относительно открытое связное множество $\Omega \in \Gamma$, внутри которого $u(x)$ не имеет нулей, и на границе которого она обращается в нуль.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ОБЪЕКТИВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Звягин А.В. (Воронеж)

zvyagin@math.vsu.ru

Исследуется задача существования оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, с границей класса C^∞ на промежутке времени $[0, T]$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) -$$
$$- 2\varkappa \mathrm{Div}\,(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) + \mathrm{grad} p = f \in \Psi(v), \quad (1)$$

$$\mathrm{div} v = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{2}$$

$$v(x,0) = a_*(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0, \tag{4}$$

где $v = (v_1, ..., v_n)$ – скорость; p – давление жидкости; f – плотность внешних сил; $\nu > 0$ - вязкость жидкости; $\varkappa > 0$ - время ретардации (запаздывания); $\mathcal{E}(v)$ - тензор скоростей деформации; $W_\rho(v)(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t,y)\,dy$ – сглаженный тензор завихренности.

Пусть $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$. Обозначим $\Psi : E_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$ - функция управления, удовлетворяющая следующим условиям: $i_1)$ Ψ определено на пространстве E_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения; $i_2)$ Ψ полунепрерывно сверху, компактно, глобально ограничено и слабо замкнуто.

Через $\Sigma \subset E_1 \times L_2(0,T;V^{-1})$ обозначим множество всех слабых решений задачи (1)-(4). Рассмотрим произвольный функционал стоимости $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям: $j_1)$ существует число γ такое, что $\Phi(v,f) \geqslant \gamma$ для всех $(v,f) \in \Sigma$; $j_2)$ если $(v_m, f_m) \in \Sigma$, $v_m \rightharpoonup v_*$ в E_1 и $f_m \to f_*$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Теорема. Пусть отображение Ψ удовлетворяет условиям $i_1), i_2)$, а функционал Φ удовлетворяет условиям $j_1), j_2)$. Тогда задача (1)-(4) по крайней мере одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПО ВЫХОДУ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ

Зубова С.П. (Воронеж)

spzubova@mail.ru

Для системы:

$$\begin{aligned} A\dot{x}(t) &= Bx(t) + Du(t), \\ y(t) &= Ex(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in R^l$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^s$; A, B — матрицы $n \times l$, $D :\ n \times m$, $E :\ s \times l$, $t \in [t_0, t_1]$, требуется установить свойства коэффициентов A, B, D, E такие, что для любой возможной вектор–функции $y(t)$

существует непрерывная вектор–функция $u(t)$, при которой система (1) имеет решение $x(t)$ со значениями:

$$x(t_i) = E^{-}y(t_i) + \tilde{x}_i, \quad i = 0, 1, \tag{2}$$

для любых произвольно заданных $\tilde{x}_i \in Ker\, E$ (*полная управляемость по выходу*). Такая постановка задачи вытекает из того, что второе уравнение системы (1) эквивалентно системе:

$$\begin{gathered} Q(E)y(t) \equiv 0, \\ x(t) = E^{-}y(t) + \tilde{x}(t), \\ \tilde{x}(t) = P(E)x(t), \end{gathered} \tag{3}$$

где $P(E)$ и $Q(E)$ — проекторы на $Ker\, E$ и $Coker\, E$, соответственно, отвечающие разложениям:

$$R^l = Coim\, E \dot{+} Ker\, E, \quad R^s = Im\, E \dot{+} Coker\, E, \tag{4}$$

E^{-} — полуобратная к E матрица, действующая из $Im\, E$ в $Coim\, E$.

Для определения $\tilde{x}(t)$ получаем уравнение:

$$\tilde{A}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{B}\tilde{x}(t) + Du(t) + \varphi(t) \tag{5}$$

и условия:

$$\tilde{x}(t_i) = \tilde{x}_i, \quad i = 0, 1,$$

где $\tilde{A} = AP(E)$, $\tilde{B} = BP(E)$; $\varphi(t) = BE^{-}y(t) - A\dfrac{d}{dt}(E^{-}y(t))$, если $E^{-}y(t)$ дифференцируемая вектор–функция. Итак, возможная вектор–функция $y(t)$ — это вектор–функция со свойствами:

$$\begin{aligned} &Q(E)y(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_1], \\ &E^{-}y(t) \in C^1([t_0, t_1] \to Im\, A). \end{aligned} \tag{6}$$

Теперь полная управляемость системы (1) по выходу напрямую зависит от полной управляемости системы (5) по состоянию. Воспользуемся критерием полной управляемости дескрипторной неоднородной системы по состоянию [1]:

система (5) с произвольной достаточно гладкой вектор-функцией $\varphi(t)$ полностью управляема тогда и только тогда, когда выполняются условия:

k_1) $\exists(\lambda \in C)[(\tilde{A} - \lambda\tilde{B})y = 0 \to y = 0]$;

i_1) $rank(\tilde{A} \quad D) = n$;

k_3) $\forall(\lambda \in C)\forall(v \in R^l)\exists(y,z)[(\tilde{B} - \lambda\tilde{A})y + Dz = \tilde{A}v]$.

На основании этих свойств формулируется

Критерий полной управляемости дескрипторной системы по выходу.

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная достаточно гладкая вектор–функция со значениями в R^n. Система (1) полностью управляема по выходу тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$k_1') \quad \exists(\lambda \in C)\left[\left\{\begin{array}{l} Ey = 0 \\ (A - \lambda B)y = 0 \end{array}\right. \to y = 0\right];$$

$$i_1') \quad rank(AP(E) \quad D) = n;$$

$$k_3') \quad \forall(\lambda \in C) \quad \forall(v : Ev = 0)\exists(y,z)\left[\left\{\begin{array}{l} Ey = 0 \\ (B - \lambda A)y + Dz = Av \end{array}\right.\right].$$

Литература

[1]. Зубова С.П. Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно—матричными коэффициентами / С.П. Зубова // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, вып. 6. — С. 884—895.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ СТРУННО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Иванникова Т.А., Тимашова Е.В., Шабров С.А.
(Воронеж)

В работе рассматривается дифференциальная модель:

$$\left\{\begin{array}{l} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(l) = 0, \end{array}\right. \qquad (1)$$

которая описывает малые деформации системы, состоящей из растянутых стержня и струны, спаянных в точке ξ, и занимающая "промежуточное" положение между моделями второго и четвертого порядков: она имеет размерность три. В уравнении (1) коэффициент $p(x) \equiv 0$ при $x > \xi$, при $x < \xi$ характеризует материал, из которого сделан стержень, $r(x)$— сила натяжения струны при $x > \xi$, а при остальных x — сила натяжения стержня; $F(x)$ — суммарная сила, приложенная на участок $[0, x)$ — имеет конечное на $[0, l]$ изменение, что наиболее характерно для приложений.

В уравнении из (1) внешнее дифференцирование производится по мере; само уравнение определено на специальном расширении $\overline{[0,l]}_\sigma$ отрезка $[0,l]$, которое строится следующим образом.

На $[0,l]$ определим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. В случае, когда $S(\sigma)$ непусто, метрическое пространство $([0,l],\rho)$ не является полным. Стандартное пополнение при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную тройку $\{\xi - 0, \xi, \xi + 0\}$ собственных элементов мы обозначим через $\overline{[0,l]}_\sigma$.

Уравнение в (1) в точках $\xi \in S(\sigma)$ принимает вид:

$$\Delta \left(pu''_{xx}\right)'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Решение модели (1) (как врочем и самого уравнения из (1)) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0,l]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, имеет конечное на $[0,l]$ изменение; квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$—абсолютна непрерывна на $[0,l]$; $\left(pu''_{xx}\right)'_x(x)$ и $(ru'_x)(x)$ - σ-абсолютно непрерывны на $[0,l]$.

Использование поточечной трактовки, предложенной Ю. В. Покорным, уравнения из (1) позволило установить интегральную обратимость (1). Последнее открывает возможность использования теории вполне непрерывных положительных операторов.

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЁННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Иванова Е.В. (Воронеж)

lena.ivanova.lica@yandex.ru

В комплексном банаховом пространстве B рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{A}_0(t)x^{(n)} + A_1(t)\mathbf{x}^{(n-1)} + \cdots + \mathbf{A}_n(t)\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}), \qquad (1)$$

где операторные функции $\mathbf{A}_j(t) : R \to EndB(j = 0, 1, \ldots, n)$-сильно непрерывные и ограниченные, причём $\mathbf{A}_0^{-1}(t)$ существует и также является сильно непрерывной и ограниченной. Предположим, что линейное неоднородное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{A}_0(t)\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}^{(n-1)} + \cdots + \mathbf{A}_n(t)\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \qquad (2)$$

при любой непрерывной и ограниченной векторной функции $\mathbf{f}(t)$: $R \to B$ имеет единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t) : R \to B$. Тогда ограниченное решение и его производные с помощью операторной ограниченной функции Грина можно представить в виде несобственных интегралов

$$\mathbf{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t,s)\mathbf{f}(s)ds,$$

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^j \mathrm{G(j)\ (t,s)}}{\partial t^j}\mathbf{f}(s)ds, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n \mathrm{G(j)\ (t,s)}}{\partial t^n}\mathbf{f}(s)ds.$$

Введём в рассмотрение интегральные постоянные, положив

$$æ = \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{\partial^j \mathrm{G(j)\ (t,s)}}{\partial t^j} \right\| ds, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$æ = \sup_{-\infty<t<+\infty} \mathbf{A}_0^{-1}(t) + \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{\partial^n \mathrm{G(j)\ (t,s)}}{\partial t^n} \right\| ds. \tag{4}$$

Предположим, что нелинейная векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) : R \times B \times \cdots \times B$ $(n+1$ раз$) \to B$ непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) \leqslant \sum_{j=0}^{n} l_j \mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j, \tag{5}$$

где l_0, l_1, $\ldots$, $l_n - 1$, l_n-некоторые неотрицательные постоянные. При выполнении условия

$$q \equiv \sum_{j=0}^{n} æ_j \mathbf{l}_j < 1, \tag{6}$$

сформулированы и доказаны четыре теоремы.

1. Существует единственное ограниченное решение нелинейного уравнения (1) и справедливы оценки

$$\left\| x^{(j)} \right\|_c \leqslant \frac{\text{æ}_j}{1-q} \left\| f_0 \right\|_c, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

где непрерывная векторная функция $\mathbf{f}_0(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) : R \to B$ предполагается ограниченной.

2. Единственное ограниченное решение и его производные могут быть получены методом последовательных приближений, причём

$$\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k](j)} \leqslant \frac{q^{k-1}}{1-q} \text{æ}_j \sum_{i=0}^{n} l_i \mathbf{x}^{[1](i)} - \mathbf{x}_c^{[0][i]}, \; j = 0, 1, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

3. Если операторные функции $\mathbf{A}_j(t)(j = 0, 1, \ldots, n)$ и векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$-почти периодические, то ограниченное решение и его производные также почти периодические.

4. Если нулевое решение уравнения (2) устойчиво (неустойчиво), то его ограниченное решение также устойчиво (неустойчиво).

Литература

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва, Наука, 1970, 536 с.

2. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. Москва, Наука, 1970, 352 с.

3. Перов А.И., Коструб И.Д. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка (æ-теория).Воронеж, препринт № 36 НИИМ ВГУ, 2011, 52 с.

О РЕГУЛЯРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Иноземцев А.И. (Липецк)

inozemcev.a.i@gmail.com

Работа содержит критерий регулярности оператора

$$(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum_{i=2}^{2^n} \int_{D_i} k_i(t, S_i) x(s_i) \, dS_i,$$

где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $D_2 = [a_1, b_1]$, $\ldots$, $D_{n+1} = [a_n, b_n]$, $D_{n+2} = D_2 \times D_3$ и т.д., S_i и dS_i — набор переменных τ_j и набор дифференциалов $d\tau_j$ соответственно из i-го подмножества T_i множества $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{n+1} = \{\tau_n\}$, $T_{n+2} = \{\tau_1, \tau_2\}$ и т.д., $k_i \colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, точки s_i получаются из точки t заменой ее координат соответствующими элементами S_i, интегралы понимаются в смысле Лебега.

Пусть X и Y — банаховы идеальные пространства (БИП) с носителем D.

Определение. *Линейный оператор $A : X \to Y$ называется регулярным, если существует такой положительный оператор $\tilde{A} : X \to Y$, что $|Ax| \leqslant \tilde{A}|x|$ $(x \in X)$.*

Операторы $\tilde{A}$ называют мажорантами оператора A. Наименьшую мажоранту называют абсолютной величиной A и обозначают через $|A|$. Оператор $]K[$ определим равенством

$$(]K[x)\,(t) = |k_1(t)|x(t) + \sum_{i=2}^{2^n} \int_{D_i} |k_i(t, S_i)| x(s_i)\, dS_i.$$

С применением схемы из [1, 2] доказывается

Теорема. *Пусть оператор K с частными интегралами действует из БИП X в БИП Y. Тогда он является регулярным оператором в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $]K[$. При этом $|K| =]K[$.*

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro—Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

ОПИСАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОТАПОВА-ГИНЗБУРГА

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Рассматриваются линейные операторы, действующие в пространстве Крейна. Преобразование Потапова-Гинзбурга

$$B = (P_- + P_+A)(P_+ + P_-A)^{-1} = \delta(A)$$

определено на всех операторах $A \in T$, т.е. на всех операторах A, обладающих свойством

$$Ker(P_+ + P_- A) = \{0\}.$$

При этом преобразование δ не выводит из класса T, т.е. $B \in T$ и действует на классе T биективно.
Теорема 1. (Критерий). Пусть $A \in T$ и 1 не является собственным значением оператора A. Тогда следующие два условия эквивалентны:
1) Оператор A является неподвижной точкой преобразования δ, т.е. $\delta(A) = A$.
2) Имеет место формула

$$[K_{\beta i}^{(-1)}(A)] \cdot P_- = 0.$$

Здесь $K_{\beta i}^{(-1)}(A) = \beta i(A + I)(A - I)^{-1}$ - обратное преобразование Кэли-Неймана, которое может выполняться на произвольной чисто мнимой точке βi ($\beta \in R, \quad \beta \neq 0$).
Теорема 2. (Достаточное условие).
Если чисто мнимое число βi ($\beta \in R$, $\beta \neq 0$), не является собственным значенем оператора AP_+, то оператор

$$C = K_{\beta i}(AP_+)$$

является неподвижной точкой преобразования δ. Здесь

$$K_{\beta i}(AP_+) = (AP_+ + \beta i I)(AP_+ - \beta i I)^{-1}$$

- прямое преобразование Кэли-Неймана.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ЧИСТО МНИМЫЕ ТОЧКИ РЕГУЛЯРНОГО ТИПА

Иохвидов Е.И., Кириакиди В.К. (Воронеж)

Через $r(T)$ обозначается поле регулярности линейного оператора T в гильбертовом пространстве.
Теорема 1. Если $\beta i \in r(T)$, где $\beta < 0$, то существуют числа σ и a такие, что справедливо неравенство:

$$Im(Tx, x) \geqslant \sigma \cdot \{||Tx||^2 + a \cdot ||x||^2\} \quad \forall x \in D_T. \quad (1)$$

При этом числа σ и a удовлетворяют условиям:
1)$\sigma < 0$. **2)**$4 \cdot a\sigma^2 < 1$.
Кроме того, для чисел σ и a имеют место формулы:
3)$\sigma = \frac{1}{2 \cdot \beta}$. **4)**$a = \beta^2 - \frac{1}{||(T-\beta iI)^{-1}||^2}$.
Обратно, если для некоторой пары чисел σ и a выполнено неравенство (1), и при этом числа σ и a удовлетворяют устовиям 1) и 2), то число β, определяемое формулой $\beta = \frac{1}{2 \cdot \sigma}$, обладает свойством $\beta i \in r(T)$.
Теорема 2.Если $\alpha \in r(T)$, где $\alpha > 0$, то существуют числа τ и b такие, что справедливо неравенство:

$$Re(Tx, x) \leqslant \tau \cdot \{||Tx||^2 + b \cdot ||x||^2\} \quad \forall x \in D_T. \quad (2)$$

При этом числа τ и b удовлетворяют условиям:
1)$\tau > 0$. **2)**$4 \cdot b\tau^2 < 1$.
Кроме того, для некоторой пары чисел τ и b имеют место формулы:
3)$\tau = \frac{1}{2 \cdot \alpha}$. **4)**$b = \alpha^2 - \frac{1}{||(T-\alpha I)^{-1}||^2}$.
Обратно, если для некоторой пары чисел τ и b выполнено неравенство (2), и при этом числа τ и b удовлетворяют условиям 1) и 2), то число α, определяемое формулой $\alpha = \frac{1}{2 \cdot \tau}$, обладает свойством $\alpha \in r(T)$.
Аналогичные характеристики установлены для отрицательных точек регулярного типа, а также для точек $\beta i \in r(T)$, где $\beta > 0$.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ НЕДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КУНА-ТАККЕРА В НЕЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Канатов А.В., Сумин М.И. (Нижний Новгород)
alexkanatov@yandex.ru; m.sumin@mail.ru

Доклад посвящен применению метода двойственной регуляризации [1,2] в нелинейной параметрической задаче математического программирования общего вида в гильбертовом пространстве

$$f(z) \to \inf, \ \ g(z) = p, \ \ h(z) \leqslant r, \quad z \in D \subset Z, \qquad (1)$$

где $f : D \to R^1$ – непрерывный функционал, $g : D \to H$ – вполне непрерывный оператор, $h : D \to R^m$ – непрерывный функционал, $D \subset Z$ – замкнутое ограниченное множество, $p \in H$ и $r \in R^m$ –

параметры, Z и H – гильбертовы пространства. В его первой части обсуждается двойственный формализм [1] устойчивого к ошибкам исходных данных конструктивного построения в задаче (1), в которой, вообще говоря, может и не быть оптимального элемента, минимизирующей последовательности допустимых элементов, понимаемой в смысле минимизирующего приближенного решения Дж.Варги. В основе этого формализма лежит конструкция модифицированной функции Лагранжа, устройство которой полностью определяется дифференциальными свойствами полунепрерывной снизу функции значений (S-функции) задачи (1). Во второй части доклада обсуждается возможность трансформации указанного двойственного формального алгоритма в виде секвенциальной регуляризованной теоремы Куна-Таккера в недифференциальной форме в нелинейной задаче (1). Эта теорема является "устойчивой" по отношению к возмущению исходных данных, как и ее аналог в [2] в случае задачи выпуклого программирования (1), и "жестко" связана со свойствами обобщенной дифференцируемости S-функции.

Литература

1. Sumin M.I. Parametric Dual Regularization in a Nonlinear Mathematical Programming // Advances in Mathematics Research, Vol. 11. New-York: Nova Science Publishers Inc., 2010, Chap. 5, pp. 103-134.

2. Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594-1615.

РЕШЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Квитко А.Н. (Санкт-Петербург)

alkvit46@mail.ru

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1}$$

$$x = (x^1, ..., x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, ..., u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0, 1],$$

$$f \in C^3(R^n \times R^r \times R; R^n), \quad f = (f^1, ..., f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0,t) \equiv 0. \tag{3}$$

Предположим дополнительно, что существует путь $\omega(t)$, удовлетворяющий условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(1) = x_1 \tag{4}$$

такой что

$$rank\ (B(t), A(t)B(t), ..., A(t)^{n-1}B(t)) = n \quad \forall t \in [0,1], \tag{5}$$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\omega(t), 0, t), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\omega(t), 0, t). \tag{6}$$

Задача. Найти пару функций $x(t) \in C^1[0,1]$, $u(t) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$x(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad x(1) = x_1, \quad x_1 = (x_1^1, ..., x_1^n)^T. \tag{7}$$

В (4) и (7) x_1 – заданный вектор. Указанную пару $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (7).

Теорема. Пусть выполнены условия (2),(3),(5). Тогда существует решение задачи (1),(7), которое может быть получено после решения конечного числа задач стабилизации линейных нестационарных систем с экспоненциальными коэффициентами и решения такого же числа задач Коши для вспомогательных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. КвиткоА.Н. Об одной задаче управления // Дифференциальные уравнения. т. 40, вып. 6. 2004 г. с.740-746.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕБЫШЕВА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Кирьяцкис Д., Кирьяцкий Э. (Вильнюс)

Введем следующие обозначения:

$$\Psi_n(z) = (1+z)^{n-1} z^n, \quad P_{n-1}(z) = \frac{1}{n!}\Psi_n^{(n)}(z),$$

$$F_{\zeta,n}(z) = \left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)^n, \quad |\zeta| < 1,$$

$$H_{\zeta_1,\zeta_2}(z) = \frac{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)}{(1-\bar{\zeta}_1 z)(1-\bar{\zeta}_2 z)}, \zeta_1 \neq \zeta_2, 0 < |\zeta_1| < 1, 0 < |\zeta_2| < 1.$$

Теорема 1. *При любом* $|\zeta| < r_n$, где $r_n = |x_{n-1}|$, а x_{n-1} – *наименьший по модулю корень уравнения* $P_{n-1}(z) = 0$, *функции* $1, z, ..., z^{n-1}, F_{\zeta,n}(z)$ *образуют систему Чебышева в единичном круге* $|z| < 1$.

Теорема 2. *Для того чтобы функции* $1, z, H_{\zeta_1,\zeta_2}(z)$ *образовали систему Чебышева в единичном круге* $|z| < 1$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\left|\frac{1}{\bar{\zeta}_1} - \frac{1}{\bar{\zeta}_2}\sqrt[3]{\frac{\left(1-|\zeta_1|^2\right)\left(1-\bar{\zeta}_1\zeta_2\right)}{\left(1-|\zeta_2|^2\right)\left(1-\bar{\zeta}_2\zeta_1\right)}}\right| \geqslant \left|1 - \sqrt[3]{\frac{\left(1-|\zeta_1|^2\right)\left(1-\bar{\zeta}_1\zeta_2\right)}{\left(1-|\zeta_2|^2\right)\left(1-\bar{\zeta}_2\zeta_1\right)}}\right|$$

для всех трех значений радикала.

РОЛЬ НАУЧНОГО ОБЩЕСТВА УЧАЩИХСЯ В ФОРМИРОВАНИИ НАВЫКОВ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ

Колесникова И.В. (Воронеж)
kolinna@inbox.ru

Выбор профессии для человека - одна их важнейших задач, которую он решает. Интерес к будущей профессии зарождается еще в школе. В этот период проявляются и активно развиваются склонности, способности, таланты. Современные условия быстро меняющегося мира, создают серьёзные затруднения для формирования полноценной, самоактуализирующейся личности.

Научное общество учащихся (НОУ) - добровольное творческое формирование учащихся школы, стремящихся совершенствовать свои знания в определенной области науки, развивать свой интеллект, приобретать умения и навыки научно-исследовательской и опытнической деятельности под руководством ученых, педагогов и других специалистов.

Целью НОУ является выявление и поддержка одаренных учащихся, развитие их интеллектуальных, творческих способностей, поддержка научно-исследовательской деятельности учащихся, повышение социального статуса знаний; воспитание поколения мыслящего, жаждущего получать всё новые и новые знания, способствующие формированию образованной, гармонически развитой, творческой личности, способной добывать свои знания самостоятельно.

Основными задачами НОУ являются:

1) развитие творческих способностей учащихся и выработка у них исследовательских навыков;

2) формирование аналитического абстрактного мышления учащихся в процессе творческого поиска и выполнения учебных исследований;

3) выявление одарённых учащихся и обеспечение реализации их творческого потенциала;

4) развитие самостоятельности при работе со специальной и научной литературой при выполнении наблюдений и опытов;

5) развитие способности формировать свое мнение и умение его отстаивать; развитие умения общаться с аудиторией, выступая на конференциях;

6) формирование чувства ответственности за порученное дело; воспитание уверенности в себе, сознание значимости выполненной работы;

7) воспитание целеустремлённости и системности в учебной деятельности; помощь в профессиональной ориентации;

В процессе занятий (над проектом, исследованием) формируются такие качества, как организованность, способность разумно планировать и упорядочивать ход своей деятельности, дисциплинированность - без этого нет просто самого процесса научной работы. Школьник должен сознательно подчиняться определенным нормам поведения при работе над проектом, исследованием. И, наконец, нужно приучить ученика к самоконтролю - ведь научная работа требует умения контролировать свои действия и четко идти к решению сознательно поставленных задач. Кроме того, необходимо выработать навыки самостоятельно проанализировать свои действия, с их детальным разбором, как положительных, так и отрицательных действий. При этом надо учесть, что мотивацию и потребность к поисковой интеллектуальной работе надо ещё взрастить из естественной любознательности и любопытства присущих ряду учеников. Ведь у ученика потребности в изучении более сложных понятий для работы над исследованием, проектом, причём детальном, ещё нет.

Занимаясь научно-исследовательской работой, учащиеся самостоятельно выбирают тематическое направление, готовятся теоретически. Составляют доклад по теме, изучают методику научно-исследовательской работы. Проводя экспериментальную работу учащиеся анализируют результаты наблюдений, готовят доклады на научную конференцию. Такая научная подготовка, позволяет учащимся сделать осознанный выбор жизненного пути с учетом своих склонностей и особенностей характера.

ЭКСТРЕМАЛИ ФРЕДГОЛЬМОВА ФУНКЦИОНАЛА ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ МИНИМУМА С ОМБИЛИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Колесникова И.В., Сапронов Ю.И., Уварова Н.С. (Воронеж)

kolinna@inbox.ru, yusapr@mail.ru

1. К изучению поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек края банахова многообразия приходится обращаться как в пределах "чистой" теории особенностей гладких функционалов, так и в рамках задач прикладной направленности — теории управления, теории фазовых переходов, теории бифуркаций периодических волн и т.д. В этих теориях естественным образом возникают нелинейные вариационные задачи с полуограничениями

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad g_k(x) \geqslant 0, \quad x \in M, \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

в которых $V(x),\ g_k(x)$ — гладкие функционалы на гладких банаховых многообразиях. Такие задачи приводят к вопросу о бифуркациях экстремалей из угловой точки края банахова многообразия.

Анализ краевых и угловых особенностей гладких функций на конечномерных многообразиях возник в работах В.И. Арнольда, С.Т.С. Уолла, Д. Сирсмы, Д. Пита, Т. Постона и др. [1], [2]. В.И. Арнольдом был сформулирован принцип отождествления краевых особенностей с особенностями, инвариантными относительно действия элементарной инволюции (инволюция элементарна, если коразмерность ее зеркала равна единице). Этот принцип позволил перенести понятие краевой особенности на комплексный случай и развить соответствующую теорию. Затем Д. Сирсмой были введены и исследованы угловые особенности [3] как обобщение краевых особенностей. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах В.А. Васильева, А.А. Давыдова, В.И. Матова и др. [1]

Перенос теории угловых особенностей на класс фредгольмовых функционалов был осуществлен Ю.И. Сапроновым посредством применения модификаций вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта [2]. Сравнительно недавно Ю.И. Сапроновым, А.В. Гнездиловым, О.Ю. Даниловой, О.В. Швыревой, М.А. Хуссаином, А.В.

Белоглазовым и И.В. Колесниковой был проанализирован ряд важных угловых особенностей, связанных с приложениями к нелинейным задачам механики сплошных сред и математической физики [2], [4] – [6]. Выяснилось, что внешне различные нелинейные краевые задачи приводят в конечном итоге к одной и той же задаче — изучению ветвления критических точках параметрического семейства многочленов от переменных ξ_1, ξ_2 в положительной четверти координатной плоскости. Список примеров такого типа исследований постоянно растет.

2. Пусть гладкое семейство гладких функционалов $V(x, \lambda)$ задано при ограничениях на основной аргумент в виде двух неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих 2−гранный угол: $\mathcal{C} = \{x \in E|\ g_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, 2\}$ (случай ограничения в виде одного неравенства дает так называемую краевую особенность).

Точка $a \in \mathcal{C}$ называется условно критической для $V(x, \lambda)$, если $\mathrm{grad}_H V(a, \lambda)$ ортогонален грани $\mathcal{C}$, содержащей a. Все критические точки a делятся на угловые ($g_1(a) = g_2(a) = 0$), краевые ($g_1(a)g_2(a) = 0,\ |g_1(a)| + |g_2(a)| \neq 0$) и внутренние ($g_1(x)g_2(x) \neq 0$). Множество всех угловых точек называется вершинной гранью угла или, более кратко, вершиной угла.

Анализ поведения $V(x, \lambda)$ можно провести, перейдя к функции $W(\xi) := \inf\limits_{x: g(x) = \xi} V(x)$ — по какой-либо схеме конечномерной редукции [2]. Здесь $g(x) = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^\top$, $\{g_k\}$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя пару ограничителей $\{g_1, g_2\}$, задающих угол.

Функционалы $g_i(x)$ подчинены, как правило, дополнительным "техническим" условиям: предполагается, что $\mathrm{grad}_H\, g_i(x) \in F\ \forall x \in E$, предполагается, в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует (вблизи нуля) единственная (морсовская) экстремаль $x = \varphi(\xi)$ и т.д. Подмногообразие $\mathcal{N}$, состоящее из точек $\varphi(\xi)$, называется редуцирующим. Ключевая функция представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

Таким образом, исследование V в угле $\mathcal{C}$ сводится к исследованию функции W в координатном угле $\xi_1 \geqslant 0, \xi_2 \geqslant 0$. Кратность $\widehat{\mu}$ угловой критической точки $x_0 \in \mathcal{C}$ определяется как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\widehat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$, где α — образ a в пространстве ключевых переменных, $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - \alpha$, а $\widehat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный следующим набором функций (точнее, тейлоровскими разложениями этих функций): $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, $\xi_2 \frac{\partial W}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_3}$, $\ldots$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Кратность $\overline{\mu}$ краевой критической точки a, принадлежащей краю $g_1(a)) = 0$, определяется как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\overline{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$, где $\overline{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$ — краевой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором функций: $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \ldots,$ $\frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Аналогично определяется кратность особой точки на крае $g_2(a) = 0$. Кратность внутренней точки a определяется обычном образом [1], как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\mathfrak{A}(W, \alpha)$, где $\mathfrak{A}(W, \alpha)$ — якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором первых производных: $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \ldots,$ $\frac{\partial W}{\partial \xi_m}$.

Пусть $\hat{M} \in E \times R^q$ — многообразие катастроф: $\hat{M} = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, где M_k определяется соотношениями $f(x, \lambda) = 0$, $x \in \mathcal{C}_k$, $\dim Ker \frac{\partial [f]_k}{\partial x}(x, \lambda) > 0$. Здесь $\mathcal{C}_0$ — вершинная грань угла, $\mathcal{C}_1$ — край угла, $\mathcal{C}_2$ — внутренность угла, а $[f]_k = \mathrm{grad}_H \ (V\Big|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика Σ функционала в угловой особой точке определяется как образ многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$: $\Sigma = \pi(\hat{M})$.

Если заранее известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый расклад бифурцирующих экстремалей (bif-расклад) описывается матрицей $L = (l_k^j)$, в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек на C_k.

В случае угловой особенности ее версальная развертка определяется как функция $W(x, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(W)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(W)$, то деформация называется миниверсальной. Если рассмотреть в кольце ростков гладких функций максимальный идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(W)$. Деформация $W(x, \lambda)$, для которой $W(x, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(W)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика [1]

[1]Каустикой семейства $W(x, \lambda)$ называется совокупность тех тех значений параметра λ (вблизи нуля), при которых $W(\cdot, \lambda)$ имеет вблизи нуля вырожденную

такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустику).

3. Остановимся на случае симметричной функции W двух переменных, ее главная часть U имеет следующий вид: $\sigma_1^3 + \varepsilon\ \sigma_1^2 + \delta\ \sigma_1 + p\ \sigma_1\sigma_2 + \gamma\ \sigma_2,\ \ \sigma_1 = x_1^2 + x_2^2,\ \sigma_2 = x_1^2 x_2^2.$

Если U — развертка $min-$особенности шестого порядка, то $p > -4$.

Через $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2)$ обозначим bif-расклад W (количества минимумов, седел и максимумов).

Теорема 5.. *Если $\mathcal{L}$ — $bif-$расклад для $min-$особенности шестого порядка, то на каждой из полуосей коoординат и на диагональных полуосях существует не более двух ненулевых критических точек. Если на одной из этих (восьми) полуосей имеется пара ненулевых критических точек, то эти точки разнотипны (с различными значениями индекса Морса). При этом $l_2 \leqslant 8$. В случае максимального расклада $l_0 \geqslant 5$ и $l_2 \geqslant 4$.*

Теорема 6.. *Если $\mathcal{L}$ — максимальный $bif-$расклад, то вне диагональных и координатных осей находятся лишь седловые критические точки (8 точек).*

После замены $x_1^2 = y_1,\ x_2^2 = y_2$ получим омбилическую точку минимума в вершине угла $y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant o$. Максимальные $bif-$расклады особенности в нуле функции W исчерпываются раскладами $(9, 12, 4)$, $\quad (5, 12, 8)$.

В полярных координатах $x_1 = r\cos(\varphi),\ x_2 = r\sin(\varphi)$ получим $\sigma_1 = r^2,\ \sigma_2 = \frac{r^4}{8}(1 - \cos(4\varphi))$ и, следовательно,

$$W = r^6 + \varepsilon\ r^4 + \delta\ r^2 + \frac{r^4}{8}(p\ r^2(1 - \cos(4\varphi)) + \gamma\ (1 - \cos(4\varphi))). \quad (1)$$

Множество критических точек является пересечением кривых M_1 и M_2, определяемых уравнениями $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ (кривая радиально стацинарных точек) и $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ (кривая тангенциально стацинарных точек). Из (1) следует, что M_1 задается уравнением, после приведения подобных слагаемых и сокращения на множитель r, уравнением

$$(6 + \frac{3p}{4}(1 - \cos(4\varphi)))r^4 + (4\varepsilon + 2\gamma\ (1 - \cos(4\varphi)))r^2 + 2\delta = 0.$$

критическую точку.

Кривая M_2 задается уравнением $(p\, r^2 + \gamma)\sin(4\varphi) = 0$. Из последнего уравнения видно, что кривая M_2 состоит из координатных и диагональных прямых линий и окружности $r^2 = -\frac{\gamma}{p}$.

Каждому типу пересечения $M_1 \cap M_1$ соответствует определенный тип строения линий уровня ключевой функции и схема взаимных примыканий критических точек.

Аналогичный анализ можно осуществить и в случае несимметричных ключевых функций.

Литература

[1] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.

[2] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140.

[3] Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc// Quart. J. Oxford Ser. – 1981. – V.32, N 125. – P. 119-127.

[4] Белоглазов А.В. Об угловых особенностях гладких функций в нелинейных задачах математической физики// Труды воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2006. Воронеж: ВорГУ, 2006. - С. 21-36.

[5] Колесникова И.В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка// Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ, 2009. - Т.9, вып.2. — С.25-30.

[6] Колесникова И.В. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Ветвление фаз кристалла,определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка// Системы управления и информационные технологии. – Москва-Воронеж, 2009. - № 1(35). — С. 72-76.

РЕШЕНИЯ-УТКИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ[1]

Кононенко Л.И., Волокитин Е.П. (Новосибирск)

volok@math.nsc.ru

Рассматривается сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений, описывающая каталитическую реакцию окис-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный интеграционный проект №80)

ления на иридии:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 2b_1x_7^2 - b_2x_6x_1 - b_8x_1x_2,\\
&\dot{x}_2 = b_4x_7 - b_5x_2 - b_8x_1x_2 - b_9x_2x_3 - b_{12}x_2x_4,\\
&\dot{x}_3 = b_2x_6x_1 - 2b_3x_3^2 - b_6x_3 + b_7x_5 - b_9x_2x_3 + 2b_{10}x_4x_5 + b_{12}x_2x_4,\\
&\dot{x}_4 = 2b_3x_3^2 - b_{10}x_4x_5 - b_{12}x_2x_4,\\
&\dot{x}_5 = b_6x_3 - b_7x_5 - b_{10}x_4x_5 - b_{11}x_5,
\end{aligned}$$

где $x_6 = 1 - x_3 - x_4 - x_5, x_7 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5,\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $\sum_{j=1}^{5} x_j \leqslant 1, i = 1, \ldots, 5$. Мы используем при анализе модели следующую иерархию параметров:

$$b_{10} > b_8 \gg b_7 > b_1, b_2, b_3, b_4, b_6, b_{11}, b_{12} \gg b_5, b_9.$$

Система изучается с применением техники интегральных многообразий [1], позволяющей вместо качественного анализа полной системы ограничиться исследованием строения многообразия медленных движений и качественным анализом систем меньшей размерности на листах этого многообразия. С помощью найденной удобной параметризации изучена геометрия медленной кривой и показана возможность существования решений-уток в окрестности точки самопересечения медленной кривой [2].

Литература

1. Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

2. Кононенко Л. И., Волокитин Е. П. Параметризация и качественный анализ сингулярной системы в математической модели химической кинетики. Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. XV. №1 (49). С. 43–52.

ГИПЕРВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СТЕПАНОВА И ИНТЕГРАЛЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ НА $\mathbb{R}$

Костин А.В. (Воронеж)

leshakostin@mail.ru

Для $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ рассматриваются интегралы дробного порядка $\alpha > 0$, Римана-Лиувилля

$$I_+^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \qquad (1)$$

$$I^{\alpha}_{-}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{\infty} (s-t)^{\alpha-1}\varphi(s)ds, \qquad (2)$$

где $\Gamma(\alpha)$— гамма функция Эйлера.

Здесь указываются новые широкие классы функциональных пространств, в которых операторы заданные выражениями (1) и (2), являются непрерывными.

Определение 1. Множество Φ^{+}_{m} гладких функций $\rho_{+}(t)$ и таких, что для некоторого $m > 0$ выполняется соотношение $\rho'(t) - m\rho(t) \geqslant 0$, будем называть множеством **гипервозрастающих весовых** функций типа m_{+} на $\mathbb{R}$.

Определение 2. Множество Φ^{-}_{m} гладких функций $\rho_{-}(t)$ и таких, что для некоторого $m > 0$ выполняется соотношение $\rho'(t) + m\rho(t) \leqslant 0$, будем называть множеством **гиперубывающих весовых** функций типа m_{-} на $\mathbb{R}$.

Через S^{+}_{ρ} и S^{-}_{ρ} будем обозначать гипервесовые пространства Степанова, определяемые соответственно нормами

$$\|\varphi\|_{S^{+}_{\rho}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(s-t)} \frac{|f(s)|}{\rho_{+}(s)} ds, \qquad \rho_{+} \in \Phi^{+}_{m} \qquad (3)$$

$$\|\varphi\|_{S^{-}_{\rho}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{t}^{\infty} e^{\omega(t-s)} \frac{|f(s)|}{\rho_{-}(s)} ds, \qquad \rho_{-} \in \Phi^{-}_{m} \qquad (4)$$

Теорема. Если $m_{\pm} - \omega > 0$, то операторы заданные выражением (1) и (2) непрерывны в пространствах $S^{\pm}_{\rho}$ соответственно и справедливы оценки

$$\|I^{\alpha}_{\pm}\varphi\|_{S^{+}_{\rho}} \leqslant \frac{1}{(m_{\pm} - \omega)^{\alpha}} \|\varphi\|_{S^{\pm}_{\rho}}. \qquad (5)$$

Литература

1. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В. Костин, В.А. Костин.— Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.— 259 с.

О ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ НА $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{+}$, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Костин А.В., Костин В.А., Костин Д.В. (Воронеж)
dvkostin@rambler.ru

На множествах $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и $\mathbb{R}^{+} = (0, \infty)$ рассматриваются интегралы дробного порядка Римана-Лиувилля

$$I_{\pm}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(x \mp t) dt, \tag{1}$$

где

$$t_+^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{\alpha-1}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \qquad t_-^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ |t|^{\alpha-1}, & t < 0. \end{cases}$$

В [1], стр. 94 обсуждается вопрос о функциональных пространствах инвариантных относительно (1). Указывается, что пространства $L_{p,\rho}$ со степенным весом ρ этим свойством не обладают. Заметим, что и пространства C_{ρ}— непрерывных и ограниченных функций со степенны весом ρ, также не обладают этим свойством. В [1], в качестве инвариантных, приводятся лишь пространства с экспоненциальными весами. Здесь мы указываем все классы пространств в C_{ρ} инвариантные относительно операции дробного интегрирования.

Обозначим через $\Phi_{m,\alpha}^{+}$ ($\Phi_{m,\alpha}^{-}$) множество монотонно возрастающих (убывающих) функций $\rho_{\pm}(t)$ таких, что $\frac{1}{\rho_{\pm}(t)} I_{+}^{\alpha} \rho_{\pm} \leqslant m < \infty$.

Обозначим через $C_{\rho_{\pm}}(t)$ пространство непрерывных и ограниченных с весом $\rho_{\pm}(t)$ функций соответственно, где $\|f\|_{\rho_{\pm}} = \sup_t \left| \frac{f(t)}{\rho_{\pm}(t)} \right|$.

Теорема. Пространства $C_{\rho_{\pm}}$ являются инвариантными относительно соответствующих операций (1) тогда и только тогда когда $\rho \in \Phi_{m,\alpha}^{\pm}$. При этом справедлива оценка

$$\|I_{\pm}^{\alpha} f\| \leqslant m_{\pm}^{(\alpha)} \|f\|_{C_{\rho_{\pm}}},$$

где $m_{\pm}^{(\alpha)} = \sup_t \frac{1}{\rho_{\pm}(t)} (I_{\pm}^{\alpha} \rho_{+})(t)$ — точная константа.

В качестве примера приведем функцию $\rho_{+}(t) = e^{\omega t^{n}}$, $\rho_{-}\omega(t) = e^{-\omega t^{n}}$, $t > 0$, $\omega > 0$, $\rho_{+}(t) = e^{\omega t 2n+1}$, $\rho_{-}(t) = e^{-\omega t^{2n+1}}$, $t \in (-\infty, \infty)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Литература

1. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г., А.А. Килбас, О.И. Маричев.– Минск: Наука и техника, 1987,— 687 с.

О ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА $\mathbb{R}^+$

Костин Д.В. (Воронеж)
dvkostin@rambler.ru

Пусть E— банахово пространство и A— замкнутый линейный оператор с плотной в E областью опеределения $D(A)$ и такой, что $-A$ является генератором полугруппы операторов $U(x,-A)$ класса C_0 с оценкой $\|U(x,-A)\| \leqslant Me^{-\omega x}$, $\omega > 0$, $x > 0$, M от x не зависит.

Рассматривается уравнение

$$u''(x) = Au(x), \qquad x \geqslant 0. \tag{1}$$

Условия на полугруппу $U(x,-A)$ позволяют определить дробную степень A^α, $\alpha \in (0,1)$. Причем оператор $-A^\alpha$ является генератором аналитической полугруппы $U(x,-A^\alpha)$ класса C_0 с оценкой $\|U(x,-A^\alpha\| \leqslant Me^{-\omega^\alpha x}$.

Определение 1. Функция $u(x)$ называтся обобщенным **решением** уравнения (1), если $u(x) \in C_{[0,\infty)}$, $u''(x) \in C_{(0,\infty)}$, $u(x) \in D(A)$ и удовлетворяет уравнению (1).

Введем краевые условия

$$\mu u(0) - u'(0) = f, \qquad \lim_{x\to\infty} \|u(x)\| = 0. \tag{2}$$

Определение 2. Всякое обобщенное решение уравнение (1) удовлетворяющее условиям (2) называется обобщенным решением краевой задачи (1)—(2).

Определение 3. Задача (1)—(2) называется равномерно корректной, если для всех $f \in E$ существует единственное обобщенное решенрие этой задачи, непрерывно зависящее от f в норме $\|u\|_{C(E)} = \sup_x \|u(x)\|_E$.

Теорема. Если $\mu + \sqrt{\omega} > 0$, то краевая задача (1)—(2) равномерно корректна, ее решение имеет вид $u(x) = \int_0^\infty \exp(-\mu s)U(x + s, -A^{\frac{1}{2}})f ds$ и справедлива оценка

$$\|u(x)\|_E \leqslant \frac{M\exp(-\sqrt{\omega}x)}{\mu + \sqrt{\omega}} \|f\|_E.$$

Заметим. что случай с краевым условием $u(0) = f$ был рассмотрен С.Г. Крейном в [1], с. 306.

Литература

1. С.Г, Крейн Линейные дифференциальные уравнения в банаховом простарнстве/ С.Г. Крейн— М.: наука, 1967.— 464 с.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ОБЪЕМА ТЕТРАЭДРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Краснов В.А. (Коломна)

vladimir.krasnov3107@gmail.com

Вычисление объема многогранника – старая и сложная задача. Первый серьезный результат в данном направлении принадлежит Тартальи (1494), который выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер. В гиперболическом случае ситуация более трудная. Формула объема произвольного неевклидова тетраэдра долгое время была неизвестна. Позднее эта проблема была решена в работах [3], [4] и [6], но полученные формулы являются довольно громоздкими. В 2004 году Д.А. Деревниным и А.Д. Медных [2] была предложена более компактная интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах его двугранных углов.

Теорема (D.A. Derevnin, A.D. Mednykh, 2004). Пусть T– гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F противолежащие им двугранные углы. Тогда его объем равен:

$$Vol(T) = -\frac{1}{4}\times$$

$$\times \int\limits_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \frac{\sin\frac{\xi}{2} \sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2} \sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2} \sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2} \cos\frac{\xi+A+E+F}{2} \cos\frac{\xi+B+D+F}{2} \cos\frac{\xi+C+D+E}{2}} \right| d\xi,$$

где $Z_1 = \arctan\frac{k_2}{k_1} - \arctan\frac{k_4}{k_3}$, $Z_2 = \arctan\frac{k_2}{k_1} + \arctan\frac{k_4}{k_3}$, а

$k_1 = -(\cos(A+B+C+D+E+F) + \cos(A+D) + \cos(B+E) + \cos(C+D) + \cos(D+E+F) + \cos(D+B+C) + \cos(A+E+C) + \cos(A+B+F))$;

$k_2 = \sin(A+B+C+D+E+F) + \sin(A+D) + \sin(B+E) + \sin(C+D) + \sin(D+E+F) + \sin(D+B+C) + \sin(A+E+C) + \sin(A+B+F))$;

$k_3 = 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F)$;

$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}$.

Доказательство формулы Деревнина-Медных основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами, определенных теоремой синусов [1], а также на дифференциальной формуле Шлефли [7]. Однако эту же формулу можно доказать, основываясь на результате Мураками-Яно [3].

И, наконец, используя формулы, выражающие величины двугранных углов тетраэдра через длины его ребер [5], можно получить интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер.

Литература

1. Н.И.Лобачевский. Воображаемая геометрия // Полное собр. соч. – М.-Л., 1949. Т.3. С. 16–70

2. D.A.Derevnin, A.D.Mednykh. A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron // Rus. Math. Surv. 2005. 60(2):346

3. J.Murakami, M.Yano. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Comm. Anal. Geom. 2005. V. 13. P. 379–400.

4. Cho Yu., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 22. P. 347–366.

5. A.Ushijima. A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // Non-Euclidean Geometries / Math. Appl. - 2006. - 581. - С. 249–265.

6. J.Murakami, A.Ushijima. A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths, arXiv:math.GT/0402087

7. Schl*ä*fli L. Theorie der vielfachen Kontinuit*ä*t, In: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Basel: Birkh*ä*user, 1950.

О ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Кулаев Р.Ч. (Владикавказ)

kulaev@smath.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (p(x)u'')'' = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

заданное на связном геометрическом графе Γ [1], к каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ которого примыкает ровно по три ребра.

В каждой граничной вершине a графа Γ заданы условия

$$u(a) = 0,\, u''(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \tag{2}$$

А в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ на решение уравнения (1) накладываются условия непрерывности, гладкого согласования

$$u_i(a) = u_j(a), \quad \alpha_1(a)u'_{i_1}(a) + \alpha_2(a)u'_{i_2}(a) + \alpha_3(a)u'_{i_3}(a) = 0, \quad (3)$$

и условия на старшие производные

$$\alpha_2(a)p_{i_1}(a)u''_{i_1}(a) + p_{i_2}(a)u''_{i_2}(a) = 0,$$

$$\alpha_3(a)p_{i_1}(a)u''_{i_1}(a) + p_{i_3}(a)u''_{i_3}(a) = 0,$$

$$\sum_{i_k \in I(a)} (p_{i_k}(a)u''_{i_k}(a))' = 0, \quad a \in J(\Gamma). \quad (4)$$

При этом предполагается, что в уравнении (1) $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $f \in C[\Gamma]$, а в условиях (2)–(4) производные считаются в направлении к вершине.

Теорема 1. *Если $\partial\Gamma \neq \varnothing$ и $\alpha_i(a) > 0$ для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$, то функция Грина задачи (1)–(4) существует, непрерывна по совокупности переменных на $\Gamma \times \Gamma$ и удовлетворяет свойству симметричности $G(x, s) = G(s, x)$.*

Теорема 2. *Пусть $\partial\Gamma \neq \varnothing$ и $\alpha_i(a) > 0$ для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$. Тогда функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(4) неотрицательна на $\Gamma \times \Gamma$.*

Теорема 3. *Пусть $\alpha_i(a) > 0$ для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и граф Γ является деревом. Тогда функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(4) строго положительна внутри $\Gamma \times \Gamma$.*

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В. , Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ СОБОЛЕВА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Кулешов П.А. (Воронеж)

pavkuleshov@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – стратифицированное множество (см. [1]), представленное в виде объединения Ω_0 и $\partial\Omega_0$, где Ω_0 - связное подмножество Ω, составленное из стратов последнего и открытое в топологии, индуцированной на Ω стандартной топологией $\mathbb{R}^n$, и такое, что

$\overline{\Omega}_0 = \Omega$, тогда $\partial\Omega_0 = \Omega\backslash\Omega_0$. Обозначим через $\widetilde{\sigma}_{kj}$ объединение страта σ_{kj} с теми $(k-1)-$мерными стратами из Ω, что содержатся в его границе. Тогда, пусть для любого страта σ_{kj} из Ω_0 существует такой набор стратов $\sigma_{kj_1}, \sigma_{kj_2}, \ldots, \sigma_{kj_{N_{kj}}}$ из Ω_0 размерности k, который содержит ровно один страт σ_{kj_l}, такой что среди $(k-1)-$мерных стратов формирующих его границу есть хотя бы один лежащий в $\partial\Omega_0$, кроме того, множество $\widetilde{\Omega}_{kj} = \widetilde{\sigma}_{kj} \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{N_{kj}} \widetilde{\sigma}_{kj_i})$ связно, а множество $\overline{\Omega}_{kj} = \overline{\sigma}_{kj} \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{N_{kj}} \overline{\sigma}_{kj_i})$ допускает выпрямление (изометричное отображение в подмножество $\mathbb{R}^k$). Определим пространство $W_0^{1,p}(\Omega_0)$ как замыкание пространства функций непрерывных на Ω, обращающихся в нуль на $\partial\Omega_0$ и непрерывно дифференцируемых в рамках каждого страта в норме $\|f\| = \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$. Здесь ∇u есть классический градиент сужения функции на рассматриваемый страт, а $d\mu$ - стратифицированная мера. Основной результат данной работы заключается в том, что для стратифицированных множеств удовлетворяющих описанным выше требованиям верно:

если $f \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$, то $f \in L^q(\Omega_0)$ и выполнено неравенство

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

где q зависит от p и размерностей стратов. Для доказательства применяется симметризация Шварца и используется ряд её свойств. Ключевую роль играет тот факт, что интеграл Дирихле при симметризации не возрастает.

Автор благодарит О.М. Пенкина за постановку задачи.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др., Дифференциальные уравнения на геометрических графах, М.:Физматлит, 2005

ОБ ОДНОЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ РЫНКА

Кутищев И.Н., Рачинский Е.В. (Воронеж)

iliakou@rambler.ru, RachinskyEV@mail.ru

В данной работе рассматривается математическая модель, которая на основе постоянной, на каждом шаге (купля-продажа части пакета), стратегии игрока на рынке, позволяет получить периодическое колебание математического ожидания объемов продаж и цены. Оказывается, что эти математические ожидания являются в нашем случае решениями уравнения неклассического Дюффинга (более тривиальный случай - уравнение Ван дер Поля рассматривается в [1]). Это обстоятельство позволяет рассмотреть явление нелинейного резонанса на рынке, связанное с его раскачкой, вызванной периодическими продажами и покупками малых пакетов ценных бумаг.

Оперируя существующими базовыми правилами торговли на рынке ценных бумаг ([2]), удалось разработать математический аппарат, который позволяет выразить поведенческие настроения игроков на бирже при помощи системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x = 11kv \\ \frac{d}{dt}\nu = -2rx + 6kx\left(\frac{57}{8}x + 9x^3 + 10x^5\right) \end{array} \right. , \tag{1}$$

За основу модели было взято колебание цены на определенный пакет ценных бумаг при фиксированных положительных и отрицательных элементах. Так, когда цена повышалась на определенный пункт, увеличивалось количество положительных элементов в общей выборки, и наоборот. Используя комплекс подобных правил, а так же аппроксимируя суммарный результат элементов выборки, было получено уравнение (1) из которого легко получить уравнение типа Дюфинга:

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 22kx(r - \frac{3}{8}kx(80x^4 + 72x^2 + 57)) = 0 \tag{2}$$

Уравнение (2) имеет при определенных параметрах k и r устойчивые периодические циклы.

Литература

[1] Takahashi H. , Itox Y.,*Majority Orienting Model for the*

Oscillation of Market Price, (Tokyo, Japan,2004).

[2] Cont, R. and Bouchaud, J.P. *Macroeconomic Dynamics*, 2000,pg. 170-196.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 6-ГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ ДВУХ ПОСЛЕДНИХ НЕЧЕТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Кущев А.Б. (Воронеж)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$x^{(6)} + a_5 x^{(5)} + a_4 x^{(1)} + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' + f(x)+$$

$$+\varphi(t, x, x', x'', x''', x^{(4)}, x^{(5)}) = 0, \qquad (1)$$

где функции $f(x)$, $\varphi t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ непрерывны по совокупности переменных $(-\infty < t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 < \infty)$, а функция $\varphi t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \varphi(t, X)$ ω-периодична по t:

$$\varphi(t + \omega, X) = \varphi(t, X). \qquad (2)$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании ω-периодических решений у уравнения (1). Исследование проводится методом направляющих функций [1].

Мы будем также предполагать, что

$$k_1 < f(x)/x < k_2 \quad (|x| > R_1, k_1 k_2 > 0), \qquad (3)$$

и равномерно относительно t

$$\lim_{\|X\| \to \infty} \frac{\varphi(t, X)}{||X||} = 0, \qquad (4)$$

где $||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_6^2}$.

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2)–(4) и, кроме того,

$$a_1 = a_3 = 0, a_5 \neq 0, k_2 < 0. \qquad (5)$$

Тогда у уравнения (1) есть хотя бы одно ω-периодическое решение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение шестого порядка с простейшим запаздыванием

$$x^{(6)} + a_5x^{(5)} + a_4x^{(4)} + a_3x''' + a_2x'' + a_1x' + f(x)+$$

$$+\varphi(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), x^{(4)}(t), x^{(5)}(t),$$

$$x(t-h), x'(t-h), x''(t-h), x'''(t-h), x^{(4)}(t-h), x^{(5)}(t-h)) = 0, \quad (6)$$

где функции $f(x), \varphi t, x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)$ непрерывны по совокупности переменных, а последняя функция ω-периодична по t

$$\varphi(t+\omega, X, X_1) = \varphi(t, X, X_1) \qquad (7)$$

и равномерно относительно t, X, X_1

$$\lim_{\|X\|\to\infty} \frac{\varphi(t, X, X_1)}{||X||} = 0. \qquad (8)$$

Нас будет интересовать ω-периодические решения уравнения (6). Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (3), (7) и (8). Пусть выполнены условия (5) теоремы 1.

Тогда у уравнения (6) есть хотя бы одно ω-периодическое решение.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

2. Кущев А.Б. Достаточный признак существования правильной направляющей функции для одного класса систем дифференциальных уравнений. // Прикл. методы функц. анализа. – Воронеж: изд-во ВГУ, 1985. С. 100-110.

3. Кущев А.Б. О периодических решениях одного класса дифференциальных уравнений шестого порядка в случае чередования знаков четных производных в линейной части. // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – Воронеж, ВГУ, 2010.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЗНОПОРЯДКОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Лазарев К.П., Токарев А.Н. (Воронеж)
lazarev_k@mail.ru, atokarev.vrn@gmail.com

В работе рассмотрена модель механической системы, состоящая из струн, стержней и пружин. Для её описания использованы дифференциальные уравнения на графах [1,2]. Пусть Γ - граф в $\mathbb{R}^3$, множество всех его вершин $V(\Gamma)$ состоит из внутренних вершин $J(\Gamma)$ и граничных вершин $\partial\Gamma$, R - множество всех ребер графа, $R(a)$ множество рёбер, примыкающих к вершине a. Предположим, что $R = R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2 = \varnothing$. Отклонение системы от положения равновесия описывается разнопорядковыми дифференциальными уравнениями на рёбрах графа:

$$(p_\gamma u''_\gamma)'' - (q_\gamma u'_\gamma)' = f_\gamma(x), \quad x \in \gamma, \gamma \in R_1,$$
$$-(q_\gamma u'_\gamma)' = f_\gamma(x), \quad x \in \gamma,\ \gamma \in R_2.$$

В вершинах заданы условия закрепления – $u_\gamma(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$ и следующие условия согласования

$$u_\gamma(a){=}u_\mu(a),\ \gamma,\ \mu{\in}R(a),\ a{\in}J(\Gamma),$$
$$-p_\gamma(a)u''_\gamma(a+){+}\alpha_\gamma(a)u'_\gamma(a+){=}0,\ a \in V(\Gamma),\ \gamma{\in}E(a) \cap R_1,$$
$$\beta(a)u(a) + \sum_{\gamma\in E(a)\cap R_1} \left((p_\gamma u''_\gamma)' - q_\gamma u'_\gamma\right)(a+) +$$
$$+ \sum_{\gamma\in E(a)\cap R_2} \left(-q_\gamma u'_\gamma\right)(a+) = 0,\ a \in J(\Gamma).$$

Для задачи доказан принцип максимума и на его основе установлена однозначная разрешимость.

Применяя метод фиктивных точек и известные разностные аппроксимации дифференциальных выражений второго и четвертого порядка, для модельных задач построены разностные схемы. После перенумерации неизвестных в разностных задачах приходим к линейной системе $Au = b$, где A – сильно разреженная матрица. Составлена программа нахождения решения разностной задачи с использованием разреженного строчного формата $RR(C)O$. Проведенные численные эксперименты показали хорошее приближение к точному решению.

Литература

1. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев,

А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

2. Лазарев К. П. Разрешимость краевых задач для разнопорядковых дифференциальных уравнений на геометрическом графе / К. П. Лазарев, Т. В.Белоглазова // Математические заметки. 2006. Т.80. №1. С. 60-68.

ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Липницкая В.Н. (Россошь)

Тестирование как новая форма экзамена набирает опыт и требует предварительной подготовки всех участников образовательного процесса, поэтому следует активнее вводить тестовые технологии в систему обучения, ведь не зря говорят, что “нельзя научиться плавать, стоя на берегу”. ЕГЭ по математике – серьёзное испытание в жизни каждого выпускника школы. С педагогической точки зрения тест ЕГЭ представляет собой тест успеваемости. Опыт показывает, что реально за отведённое время и в жёстких условиях атмосферы ЕГЭ ответить полностью правильно на все вопросы трудно. Таким образом, подготовка к успешному написанию ЕГЭ отличается от привычной для нас методики обучения школьников математике “вообще”.

При подготовке к экзамену нужно определить планируемый результат обучения. Для этого задаю вопрос учащимся: “Какую оценку ты хочешь получить на ЕГЭ?”. Если школьник честно сформировал ответ, то можно получить “актуальный потолок” обучаемого. Для достижения хороших результатов важна техническая подготовка учащихся. При подготовке к ЕГЭ я учу школьника технике сдачи теста. Одним из моментов данной техники является обучение постоянному самоконтролю времени, т.е. обучаю школьника экономии времени для решения более сложных заданий. Это можно достичь следующими путями:

– при выполнении заданий части В пользоваться устным счётом и промежуточными вычислениями;

– пользоваться краткой формой записи решения тестовых заданий, тем самым экономить время;

– пропускать те задания, которые не удаётся выполнить сразу;

– решение геометрических задач оставить на последок, их решение требует много времени, и, как показывает практика, ученики хуже бывают подготовлены по геометрии, нежели по алгебре.

Обучаю учащихся прикидке границ результатов и минимальной подстановке как приёму проверки, проводимой сразу после решения задания, приёму "спирального движения" по тесту, т.е. задания надо просмотреть от начала до конца и отметить для себя то, что кажется простым, понятным и лёгким, выполнить те задания, которые можно выполнить без особых раздумий. После выполнения данных заданий следует ещё раз просмотреть тест и определить следующие, которые можно пробовать решить. Возможно, найдётся задание, которое к данному моменту "созрело". Чтобы это произошло, при подготовке к экзамену особое внимание уделяю "западающим" темам, таким как: нахождение области определения, области значения функции; исследование функции; производная и первообразная функции; решение задач на проценты; решение геометрических задач.

При составлении тестов использую следующее:

– тесты выстраиваю в виде логически взаимосвязанной системы, где из одного вытекает другое, т.е. выполненный "сегодня" тест готовит к пониманию правильному выполнению "завтрашнего";

– тренировочные тесты провожу по каждой теме с жёстким ограничением времени, поэтому занятия стараюсь всегда проводить в форсированном режиме с подчёркнутым акцентированием контроля времени. Темп такого занятия задаю сразу и держу на протяжении всего урока. Этот режим очень тяжёлый школьникам на первых порах, но привыкнув к этому, они затем чувствуют себя намного спокойнее и собраннее;

– перехожу к комплексным тестам только к концу учебного года, когда учебный материал полностью пройден;

– постепенно увеличиваю нагрузки по содержанию и времени;

– учу использовать имеющийся запас знаний, применяя рассуждение и логику для получения ответа наиболее простым и быстрым способом;

– включаю в тесты задания, неодинаковые внешне, но сводящиеся к одному и тому же решению.

В течение года я провожу самостоятельные работы на выявление уровня знаний по каждой теме. В этом случае составляю большое количество вариантов карточек по теме, содержащие задачи различных уровней сложности. Проанализировав работы, выявляю пробелы в знаниях учащихся и соответственно этому организовываю повторение материала, с учётом допущенных ошибок.

При этом осуществляю также индивидуальный и дифференцированный подход к обучению, составив карточки в зависимости от индивидуальных способностей каждого ученика.

Для устранения имеющихся пробелов в знаниях учеников, составляю больше заданий, однотипных, в которых были допущены типичные ошибки на самостоятельной работе. Поэтому провожу фронтальную работу с учащимися, вместе анализируя допущенные ошибки.

Применяю групповую форму работы. Задания в группах подразделяю по: уровню сложности; типу заданий; методу решения.

При групповой работе очень важно правильно сформировать микрогруппы. Если задания сгруппированы по уровню сложности, то ученики в группе должны быть с примерно равными умственными способностями и решать они должны "посильные" задачи. Если выбран другой критерий для группировки задач, то тогда в каждой группе должны быть и "сильные", и "слабые" учащиеся. Групповую работу целесообразно использовать после повторения основных теоретических моментов по данной теме. Такая форма работы позволяет рационально использовать учебное время и охватить при этом больший объём повторяемого материала.

Вторая часть тестов ЕГЭ состоит из заданий высокого уровня сложности. При решении их требуется умение не только найти правильный ответ, но и обосновать полученные выводы, построить логически грамотную цепочку рассуждений, а также математически грамотно записать решение. Задания С1, С2 и С3 требует хорошей подготовки на школьном уровне, но вполне посильны даже не самым математически одарённым школьникам. Поэтому на своих уроках я использую материалы разноуровневого характера.

Немаловажным фактором для успешной сдачи экзамена является психологическая подготовка школьника. Не следует пугать учеников предстоящим ЕГЭ, лучше начать формировать в них твёрдое убеждение в том, что можно получить хорошие результаты, если приложить к этому определённые усилия.

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ломовцев Ф.Е. (Минск)

lomovcev@bsu.by

Пусть $A(t) : H_0 \supset D(A(t)) \to H_0$ – линейные замкнутые неограниченные операторы (*нестационарные краевые задачи*) в гильбертовом пространстве (г.п.) $H_0\,(= L_2(\Omega),\ x = \{x_1, \dots, x_n\} \in \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$ с плотными и зависящими от t областями определения $D(A(t))$ (*нестационарными краевыми условиями на границе* $S = \partial\Omega$). При обосновании корректности по Адамару линейных смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений необходимо дифференцировать по времени t нестационарные эллиптические и неклассические операторы в частных производных по пространственным переменным $x_i,\ i = \overline{1,n}$, с нестационарными краевыми условиями. Введенной ранее операции дифференцирования по t операторов $A(t)$ оказалось не достаточно [1]. Поэтому получены следующие результаты:

- определены слабые производные $A^{(n)}(t), n = 1, ...,$ от $A(t)$ по t,

- дан физический смысл $A^{(1)}(t)$ – скорость изменения энергии,

- введены новые понятия взаимосопряженных, сопряженных и замкнутых полуторалинейных форм на произведении разных г.п.;

- выведены формулы $A^{(k+1)}(t) = A'_k(t)$ для $A_k(t)$, заданных полуторалинейными формами $a_t^{(k)}(t; u, v)$ и в явном виде: $\langle A^{(k+1)}(t)u, v\rangle_{(t)} = \{a_t^{(k)}(t; u, v);\ -((A_k^{-1}(t))' A_k(t)u, A_k^{*}(t)v)_0\} \forall u \in D(A_k(t)), \forall v \in D(A_k^{*}(t)),\ (A_k^{-1}(t))'$– производная от $A_k^{-1}(t), k = 0, ...,$

- доказана теорема существования слабых решений уравне- ний для обоснования замкнутости по u несимметрических полу- торалинейных форм $a_t^{(k)}(t; u, v) : H_1^k \times H_2^k \to \mathbb{C}$, где г.п. $H_1^k \neq H_2^k$,

- установлено существование взаимосопряженных замкнутых сильных расширений $\overline{a}_t^{(k)}(t; u, v)$ для $a_t^{(k)}(t; u, v)$–k-производной по t числовых значений (не)симметрических форм $a(t; u, v), k = 1, ...,$

- показаны сильные непрерывность, "дифференцирумость" по t операторов $A_k(t)$ и слабые непрерывность, "дифференцируемость" по t их сопряженных операторов $A_k^{*}(t) : H_0 \supset D(A_k^{*}(t)) \to H_0$.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Дифференцирование и интегрирование по параметру неограниченных переменных операторов с переменными областями определения//Докл.НАНБеларуси.1999.Т.43.№1.С.13-15

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ФУРЬЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СЕТКИ ИЗ СТРУН С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Лылов Е.В. (Воронеж)

zhenya86@mail.ru

В работе дается обоснование метода Фурье, применяемого к дифференциальной модели

$$\begin{cases} m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d}{d\Gamma}(pu') - q(x)u, x \in \Gamma, t > 0; \\ u(x,t)|_{\partial\Gamma} = 0; \\ u(x,0) = \varphi_0(x), x \in \Gamma; \\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x), x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

возникающей при моделировании малых колебаний сетки из струн.

Здесь $\frac{d}{d\Gamma}(pu')$ для случая, когда x принадлежит ребру γ_i графа Γ без циклов, означает производную по мере, а для внутренней вершины - сумму односторонних производных, посчитанных при ориентации от вершины. Коэффициенты $m(x)$ и $q(x)$ уравнения допускают наличие δ-образных слагаемых, что соответствует наличию сосредоточенных масс на графе и локализованных особенностей (типа пружин) у внешней среды. Более того мы допускаем наличие сосредоточенных масс не только на ребрах графа, но и во внутренних вершинах.

Получены достаточные условия, при которых формальный ряд Фурье, полученный методом разделения переменных, действительно дает решение задачи (1).

Литература

1. Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осциляционный метод Штурма в спектральных задачах - М., 2009.

2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах - М., 2004.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ КАК ОДНА ИЗ ФОРМ РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ

Марова Н.Ю. (Воронеж)

Приоритетом современного образования, гарантирующим его высокое качество и результативность, должно стать обучение, ориентированное на самосовершенствование и самореализацию личности. Поэтому на смену модели "образование-преподавание" пришло "образование-взаимодействие", когда личность ученика становится центром внимания педагога. Помочь учащимся в полной мере проявить свои способности, развить инициативу, самостоятельность, творческий потенциал – одна из основных задач современной школы. А успешная реализация этой задачи во многом зависит от сформированности у учащихся *познавательных интересов*. Именно это, на мой взгляд, и определяет *активность* школьника в познании себя и окружающего мира.

Использование необходимого программного обеспечения и ресурсов повышает активизацию познавательной деятельности учащихся, и улучшает качество их знаний. Однако в работе я столкнулась с *проблемами*: наличие низкой познавательной активности учащихся в процессе обучения; отсутствие положительной мотивации к предмету; низкое качество знаний; неумение использовать компьютер в учебных целях.

О некоторых средствах повышения эффективности обучения и приемах активизации познавательной деятельности учащихся, которые используются мною, я хочу рассказать. Не все, представленное вашему вниманию, является моим "изобретением", многое есть результат перенятого опыта у коллег, а также из источников полезной информации.

Сообщить готовое быстрее, чем открывать его вместе с учениками. Но от "прослушанного", как известно, через две недели в памяти остается только 20%. Важно сделать учащихся участниками научного поиска: рассуждая вслух, высказывая предположения, обсуждая их, доказывая истину. Учащиеся включаются в деятельность, которая носит исследовательский характер. В реализации проблемного обучения существенную роль играет создание на уроке учебной проблемной ситуации. Это оправдывающий себя дидактический прием, с помощью которого учитель держит в постоянном напряжении одну из внутренних пружин процесса обучения - детскую любознательность. Выдающийся немецкий педагог А. Дистервег убеждал, что развитие и образование ни одному человеку не могут быть даны или сообщены. Этого можно достичь собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением.

Для развития у школьника познавательного интереса необходимо чтобы он почувствовал удивление и любопытство. Только через преодоление трудностей, решение проблем ребёнок может войти в мир - творчества. Считаю, что математика начинается вовсе не со счёта, что кажется очевидным, а с загадки, проблемы и поиска выхода из неё.

Самостоятельную работу можно использовать на различных этапах урока. Я продемонстрирую, каким образом самостоятельную деятельность учащихся можно использовать на этапе объяснения нового материала, тем самым способствовать развитию познавательного интереса у школьников.

Итак, урок геометрии в 7 классе. Тема: “Сумма углов треугольника”.

Устная работа (учитель задает вопросы, а учащиеся отвечают).

Что такое треугольник? (определение)

Какие виды треугольников вы знаете? (Равнобедренный, равносторонний, прямоугольный, тупоугольный)

Сопоставьте треугольники с его названиями.

Треугольники различаются по сторонам и углам. Дайте определение: равнобедренного треугольника, равностороннего треугольника, прямоугольного Треугольника.

Прямой угол – это ...

Острый угол – это ...

Тупой угол – это ...

Найдите периметр ΔABC.

Что необходимо знать для вычисления P? (длины сторон)

Как их определить? (с помощью линейки)

Проводим вычисления: $P = 17$см.

А можно ли найти сумму всех углов?

Как? (измерить углы транспортиром)

Практическая работа. У каждого на столе транспортир и шаблоны треугольников (работа в парах по рядам).

Задание: измерить все углы и заполнить таблицу.

Заполненные таблицы рассмотреть и сделать **выводы:**

$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle A + \angle B + \angle C$	$\angle A + \angle B$	Сравнить $\angle A$ и $\angle B$	Сравнить $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$

1. Сумма углов любого треугольника равна 180^0.
2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0.
3. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
4. В равностороннем треугольнике все углы равны 60^0.

Рассмотрим другой пример. Начинаем изучать "Деление обыкновенных дробей" (6 класс). Как добиться, чтобы ученики получили возможность участвовать в выводе правила деления? Этой цели служит специальное домашнее задание. На уроке, предшествующем данной теме, предлагаю решить уравнение: $\frac{1}{4}x = \frac{1}{3}$.

Конечно, чтобы получить ожидаемое, необходимо вести целенаправленную работу на предыдущих уроках. В результате вариантов решений несколько. Рассматриваем все, но внимание обращаем на следующий способ:

$$\frac{1}{4}x = \frac{1}{3}, \quad 4 \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{3} \cdot 4, \quad 1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1}, \quad x = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1}, \quad x = \frac{4}{3}.$$

Вывод: Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратную делителю.

Каждый учитель знает индивидуальные особенности своих детей и может определить степень помощи ученикам в виде наводящих вопросов, в виде подборки устных упражнений и т.д. На этом же уроке создание проблемных ситуаций можно продолжить, предложив деление смешанных чисел, деление обыкновенной дроби на натуральное число.

С помощью наводящих вопросов я побуждала учащихся самих сформулировать определение пропорции, самих находить неизвестный член пропорции, используя основное свойство пропорции.

Перед учителем стоит задача организовать урок так, чтобы ему самому было радостно от проведенного урока, чтобы этот урок оставил след в душе и запомнился, чтобы этот урок хотелось провести ещё много раз. И весь успех должен быть направлен на учеников. Если ученик заинтересовался на вашем уроке, если он ушёл с "искоркой" в глазах, то цель, поставленная учителем близка к достижению. Учитель стимулирует творчество учеников. Не стоит стремиться к тому, чтобы научить всех учеников и всему в математике. Это просто невозможно, да и не нужно. Ребёнка надо учить строго индивидуально для каждого уровня развития, а вот перевести из "зоны ближайшего развития" на "продвинутый уровень" это то, к чему мы должны стремиться.

Литература

1. Гнеденко Б.В. "Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике" М. Просвещение 1982г.

2. Журналы "Математика в школе": №2 за 1985г., №1 за 1992г., №2,4,6 за 1993г., №4 за 1995г. и др.

3. Методика преподавания математики в средней школе. М.1980г.

4. Стратиматов П.В. "О системе работы учителя математики". М. Просвещение 1984г.

5. Открытый класс - Сетевые образовательные ресурсы

6. Электронный журнал – Компьютер школьного учителя математики

7. Сайт 1 сентября

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА УЧАЩИХСЯ ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЦИЮ УРОКОВ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Марова Н.Ю., Семилуцкая Л.В. (Воронеж)

Если человек в школе не научился творить, то и в жизни он всегда будет подражать, копировать, т.к. мало таких, которые бы научившись копировать, умели сделать самостоятельное приложение этих сведений.

Л.Н.Толстой

Перед школьным образованием стоит проблема — подготовить учеников к жизни и профессиональной деятельности в высокоразвитой информационной среде, к возможности получения дальнейшего образования с использованием современных информационных технологий обучения.

Мечта каждого учителя - воспитать ученика знающего, умеющего самостоятельно мыслить, задавать себе вопросы и находить на них ответы, ставить перед собой проблемы и искать способы их решения.

Повсеместно на уроках широко используются межпредметные связи. Но они воспринимаются учениками как дополнение и расширение темы урока. Необходимо по-новому смоделировать процесс передачи знаний, социального опыта от учителя к ученику, организовать сотворчество учителя и ученика, ученика и ученика. Мы поставили перед собой задачу отыскать точки соприкосновения предметов математика и информатика, показать пример широкого сотрудничества предметов на уроке через сотрудничество учителей и школьников как новой формы урочной деятельности, расширить кругозор учеников и повысить их познавательную активность.

Мы увидели способ решения этой проблемы в использовании инновационной технологии интегрированного урока. Под интеграцией мы понимаем процесс сближения и связи наук, состояние связанности отдельных частей в одно целое. Кроме того, интеграцию мы рассматриваем как психолого-коррекционный принцип, направленный на развитие и содержательное наполнение эмоционально-чувственной и интеллектуальной сферы ребенка.

Итак, почему мы считаем, что имеет смысл использовать интегрированные уроки как новую форму урочной деятельности.

Во-первых, потому что он выходит за рамки общепринятых норм обучающих, развивающих и воспитывающих как желательная форма в дополнение к привычной школьной урочной жизни.

Во-вторых, потому, что необходимость совместной реализации поставленной проблемы урока требует от учителей тонкого настроя на эмоциональную обстановку в классе, на изменяющуюся ситуацию во время урока и друг на друга. Ведь любой, даже тщательно подготовленный и методически разработанный урок в момент его проведения всегда требует от учителя гибкости и способности к импровизации.

В-третьих, задействованный в процессе урока механизм одновременно-последовательного преподавания выстраивает наряду со старой (учитель - ученик, ученик - ученик) и новую.

Поэтому мы применяем нетрадиционные формы — **интегрированные уроки: математика — информатика.** Применение компьютерной техники на уроках позволяет сделать урок нетрадиционным, ярким, насыщенным. Мы считаем, что задача учителя на этих уроках — сформировать у ученика информационную компетентность, умение преобразовывать на практике информационные объекты с помощью средств информационных технологий. Эти уроки так же позволяют показать связь предметов, учат применять на практике теоретические знания, отрабатывают навыки работы на компьютере, активизируют умственную деятельность учеников, стимулируют их самостоятельному приобретению знаний. На этих уроках каждый ученик работает активно и увлеченно, у ребят развивается любознательность, познавательный интерес.

Ученики пытаются решать стандартные математические задачи нестандартным способом — применяя современные компьютерные технологии. Этим достигается мотивационная цель — побуждение интереса к изучению предмета и показывается его нужность в реальной жизни. Ученики учатся владеть компьютером, работать с пакетом офисных программ.

Такая форма работы особенно важна для проведения социализации и предпрофильной адаптации учащихся школ-интернатов, поскольку данные ученики попадают в школу-интернат из неблагоприятной среды, их отличает высокая степень педагогической запущенности, низкая учебная мотивация, отсутствие стремления к самостоятельному поиску учебной информации. Именно для этого мы проводили интегрированные уроки для воспитанников школы-интерната на базе МБУ по теме **"Преобразование графиков тригонометрических функций**".

Мы предлагаем небольшой блок проведенного нами интегрированного урока, где каждый учитель сам планирует, сколько минут и какое время следует отвести каждому предмету. Причем предметы математика и информатика чередуются, повторяются, не нарушая целостности сюжета. Педагоги дополняют друг друга, ведут диалог, как с классом, так и между собой, создавая на уроке доверительную, доброжелательную атмосферу, показывая учащимся пример взаимного сотрудничества на основе понимания и взаимоуважения.

Постановка проблемного вопроса.

Мы изучили тему "Графики тригонометрических функций $y{=}cosx$, $y{=}sinx$. Используя созданную дома программу построения графиков функций, выясните можно ли применить выводы по преобразованиям графиков квадратичной функции в зависимости от коэффициентов к графикам тригонометрических функций.

Исследовательская работа на компьютерах.

Класс делится на несколько групп для исследовательской работы. Каждой группе выдается карточка с заданием, учащиеся работают над поставленной проблемой, делают выводы и готовятся к устному выступлению.

Демонстрация результатов

С помощью локальной сети и мультимедийного проектора группы демонстрируют результаты своей работы, делают выводы. Другие учащиеся записывают результаты исследований и выводы в тетрадь.

Закрепление (самостоятельная работа)

Самопроверка на компьютерах. Проверьте самостоятельную работу с помощью теста в электронном виде на компьютере и поставьте себе оценку.

Нами были разработаны:

Электронные тесты по математике и информатике на предложенную тему урока.

Презентация для наглядности в проведении урока.

В процессе выполнения практической работы на компьютере учащиеся должны были распечатать свою работу, а затем прокомментировать построенный график.

В конце урока выдается задание, и выставляются мотивированные оценки (журналисты – доклад, тесты – оценки выставляет компьютер, практическая работа на компьютере – ответы на вопросы - объяснения).

Во время перехода от одного занятия к другому ученикам предлагается физминутка, что дает ученикам отдохнуть от компьютера.

Выдается домашнее задание в виде таблицы, которое закрепляет тему данного урока.

Домашнее задание.

Построить диаграмму.

Дать объяснение, что дает каждая диаграмма и почему выбран именно этот тип диаграммы для данных показателей.

Для выполнения этого задания четко знать функции программы Excel, мастер диаграмм.

Результатом данного урока является распечатанный материал на принтере, ответы на электронные тесты, выбор темы проекта для дальнейшего выполнения презентации и защита его на следующих занятиях.

Творческие работы учеников

На интегрированных уроках в 5-6 классах учащиеся учатся при помощи компьютера решают логические задачи, развивают память, внимание, применяют тесты, строят отрезки, прямые, проводят необходимые вычисления.

В 7-11 классах — школьники при помощи компьютера в координатной плоскости отмечают точки с заданными координатами, строят треугольники, проводят необходимые вычисления, применяют табличный процессор Excel для графического решения уравнений n-ой степени, строят графики функций (умение их строить применяется и в 11-ом классе при нахождении площадей с помощью интеграла) и т.д. Так же при помощи компьютера учащиеся изучают теорию множеств и решают задачи по теории вероятности, которая в этом учебном году введена в курс математики в 5-7 классах.

О СИСТЕМЕ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С СИСТЕМОЙ ФАБЕРА-ШАУДЕРА

Мартенс Р.В. (Саратов)

martensrv@rambler.ru

Известно, что система функций Фабера-Шаудера $(1, t, \{g_{k,j}\})$ является базисом в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$ и неминальной системой представления в $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$. Пусть $\varphi(t)$ кусочно-линейная функция, такая что $\varphi(0) = \varphi(\frac{1}{2}) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(\frac{1}{4}) = 2$, $\varphi(\frac{3}{4}) = -2$ и равная 0 вне отрезка $[0,1]$. Для $n \in N$ по стандартному представлению $n = 2^k + j$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant 2^k - 1$ положим $\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j)$ и кроме того $\varphi_0 = 1$. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется системой сжатий и сдвигов, порожденной функцией φ. Эта система состоит из попарных разностей функций Фабера-Шаудера: $\varphi_{k,j} = 2^{k/2+1}(g_{k+1,2j} - g_{k+1,2j+1})$.

Каждому числу $n = 2^k + j$ поставим в соответствие набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ коэффициентов двоичного разложения $j = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции φ по системе Хаара. Определим числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $y_1 = 1$, а остальные y_α определяются из рекуррентных соотношений $\sum_{\nu=0}^{k} x_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)} y_{(\alpha_{\nu+1},\ldots,\alpha_k)} = 0$.

Система функций, определенная равенствами $\psi_0(t) = 1$, $\psi_n = \psi_\alpha = \sum_{\nu=0}^{k} y_{(\alpha_{\nu+1},\ldots,\alpha_k)} \chi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)}$, $n \in N$, является биортогонально сопряженной к системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ (см. [1]).

Теорема. *Система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2[0,1]$, как и ее биортогонально сопряженная система*

$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Литература

1. Терехин П. А. О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L_p[0,1]$. Математические заметки, 2008. Т. 83, Вып. 5. С. 722-740.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ

Меач Мон (Воронеж)

meach_simon@yahoo.com

Рассматривается связный геометрический граф Г, состоящий из четырех ребер, три из которых образуют цикл.

Пусть в соответствии с векторным подходом [1], на Г задан следующий функционально-дифференциальный оператор:

$$Ly=(l_1(y_1),l_2(y_2),l_3(y_3),l_4(y_4))^T, y(x)=(y_1(x),y_2(x),y_3(x),y_4(x))^T,$$

$$y_4(0)=y_2(1), y_3(0)=y_4(1), y_2(0)=y_3(1), y_1(0)=y_4(0),$$

где $l_k(y_k)=\alpha_k y_k'(x)+\beta_k y_k'(1-x)+p_{k1}(x)y_k(x)+p_{k2}(x)y_k(1-x)$, $\alpha_k^2\neq\beta_k^2, \beta_k\neq 0, k=1,2,3,$

$$l_4(y_4)=y_4'(x)+p(x)y_4(x),$$

$x\in[0,1]$, $p_{ij}(x), p(x)\in C^1[0,1]$ (T — знак транспонирования).

Теорема. *Для любого* $\varepsilon\in(0,1/2)$ *и любой вектор-функции* $f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))^T$ с компонентами из $L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x)-\Sigma_r(f,x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]}=0,$$

где $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье функции* $f(x)$ *по собственным и присоединенным функциям оператора* L *для собственных чисел* λ_k *таких, что* $|\lambda_k|<r$;

$$\Sigma_r(f,x)=(\sigma_{r_1}(f_1,x),\sigma_{r_2}(f_2,x),\sigma_{r_3}(f_3,x),\sigma_{r_4}(f_4,x))^T,$$

$r_j = r/\sqrt{\beta_j^2-\alpha_j^2}$, $j=1,2,3$, $r_4=r$, $\sigma_{r_j}(f,x)$ - *частичная сумма ряда Фурье функции*f_j *по тригонометрической системе* $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *для тех* k, *для которых* $|2\pi k|<r_j$.

В работе используются методы из [2].

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах // М.:Физматлит, 2004, - 272 с.

2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл // Диффер. уравн. Т. 43, № 12, 2007. - С. 1597-1605.

ТЕОРЕМА ПЭЛИ-ВИНЕРА-ХЕРМАНДЕРА И ПРИНЦИП ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЕФА

Мешков В.З., Ларин А.А., Половинкин И.П. (Воронеж)

Известная теорема Пэли-Винера-Хермандера о носителях может быть сформулирована следующим образом [1, т.1, теорема 7.3.1].

Теорема. Пусть K – выпуклый компакт в R^n с опорной функцией H. Если целая в $C^n = R^n + iR^n$функция $u(z)$ удовлетворяет оценке

$$|u(z)| \leqslant C(1+|z|)^N e^{H(\eta)},\, z=(z_1,\dots,z_n)=\xi+i\eta\in C^n, \qquad (1)$$

$z_j=\xi_j+i\eta_j, j=1,\dots,n$, то $u(z)$ является преобразованием Фурье обобщенной функции с компактным носителем, лежащим в K.

В частном случае, когда множество K представляет собой куб в R^n, т. е. $K=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n): |x_j|\leqslant R,\, j=1,\dots,n\}$, мы имеем $H(\eta)=R(|\eta_1|+\dots+|\eta_n|)$.

Пользуясь хорошо известным принципом Фрагмена-Линделефа, можно показать, что заключение теоремы остается верным, если условие (1) заменить в ней менее жесткими требованиями:

$$|u(z)| \leqslant C(1+|z|)^N \exp\left(R(|z_1|+\dots+|z_n|)\right), z\in C^n,$$

$$|u(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^N,\ \xi\in R^n.$$

Это, в свою очередь, позволяет получить степенной аналог теоремы Пэли-Винера-Хермандера о носителях, который мы сформулируем для случая плоскости $R^2=\{(x,y)\}$.

Теорема. Пусть $f(x,y)$ быстро убывающая в $L_1(R^2)$ функция, то есть для любого сколь угодно большого $N > 0$

$$\iint\limits_{R^2} |f(x,y)|(1+|x|+|y|)^N\,dx\,dy < +\infty,$$

и найдутся такие положительные числа C, a, b, что для всех натуральных чисел k выполняются неравенства

$$\left|\iint\limits_{R^2} f(x,y)x^k\,dx\,dy\right| \leqslant Ca^k, \quad \left|\iint\limits_{R^2} f(x,y)y^k\,dx\,dy\right| \leqslant Cb^k.$$

Тогда функция $f(x,y)$ имеет носитель в прямоугольнике $K = \{(x,y) : |x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b\}$.

Обратное утверждение очевидно.

Литература

1. Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1. — М.: Мир, 1986. — 464 с.

О РАЗМЕРНОСТИ ПОДОБИЯ РЕАЛИЗАЦИЙ РАНДОМИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ИТЕРАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Москалев П.В., Буховец А.Г. (Воронеж)

moskalefff@gmail.com, abuhovets@mail.ru

В предпосылках работы [1] рассмотрим рандомизированную систему итеративных функций (РСИФ), полученную в результате обобщения итерационного алгоритма, названного М. Барнсли «игрой в хаос» [2]: $x_{i+1} = \frac{x_i + \mu z_j}{1+\mu}$, где $\mu \geqslant 0$ — неотрицательный действительный параметр; z_j — выбранная согласно распределению $p_j = \mathbf{P}\{z_j\}$ точка из бесповторного множества $Z = \{z_j\}$, $j = \overline{1,k}$.

Свойства множества точек $\{X_n\}$, порождаемого в результате выполнения конечного числа итераций РСИФ, помимо значений параметра μ во многом зависят от структуры «протофрактального» множества Z, что хорошо заметно на рис. 1.

К примеру, определяемая коэффициентом подобия s размерность $d_S = -\frac{\ln k}{\ln s}$ для всех приведённых примеров оказывается связана с k — числом точек множества Z, а с учётом зависимости $\frac{1}{s} = \mu + 1$ нетрудно получить выражение для размерности подобия через параметры РСИФ: $d_S = -\frac{\ln k}{\ln(1/(1+\mu))}$. Заметим, что найден-

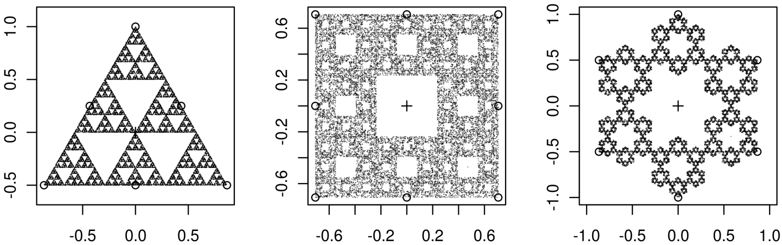


Рис. 1. Реализации РСИФ после 20000 итераций при $\mu = 2$ для: а) Z_{62}, $d_S = \frac{\ln 6}{\ln 3}$ (слева и справа); б) Z_{82}, $d_S = \frac{\ln 8}{\ln 3}$ (в центре)

ное выражение для d_S носит экстремальный характер, поскольку множество $\{X_n\}$ вырождается к x_0 при $\mu \to 0$, либо к Z при $\mu \to \infty$.

Литература

1. Буховец А.Г. Моделирование фрактальных структур данных / А.Г. Буховец, Е.А. Буховец // Системы управления и информационные технологии. №3(33). 2008. С.4–7.

2. Barnsley M. Fractals Everywhere. Academic Press, 1988. 534 p.

О ГОЛОМОРФНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Нгуен Т. Т. З. (Воронеж)

thuyduongpy@yahoo.com

В работе [1] проиллюстрировано свойство "склеивания" аффинно различных аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства C^2 голоморфными преобразованиями.

В [2] построено большое семейство аффинно-однородных гиперповерхностей в пространстве C^3 и, в частности, 2-параметрическое семейство однородных алгебраических поверхностей 4-го порядка ($n \in R \setminus \{0\}$, $t \in R$):

$$v = (y_1 x_2 + t y_1 y_2) - \frac{1}{6n}(t y_1^3 + 3 x_1 y_1^2) - \frac{1+t^2}{4n} \cdot \frac{(y_1^2 - 3n y_2)^2}{x_1 - t y_1}. \quad (1)$$

Там же высказана гипотеза о существовании голоморфно различных поверхностей в семействе (1). Наши вычисления уточняют эту гипотезу и ее доказательство.

Теорема. *В семействе (1) имеется одно-параметрическое подсемейство голоморфно различных поверхностей.*

Для доказательства мы вычисляем коэффициенты голоморфно инвариантных многочленов

$$N_{420} = s_1 z_1^4 \overline{z}_1^2 + s_2 z_1^4 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + ... + s_{15} z_2^4 \overline{z}_2^2$$

из мозеровских нормальных уравнений поверхностей семейства (1). Например:

$$s_1 = \frac{2t(2t-i)}{(-t+i)^2}, s_{15} = \frac{2(2t^3 - 5it^2 + 3t - 8i)}{(-t+i)^2(t+i)}.$$

При разных t получаются многочлены N_{420} и нормальные уравнения, не сводимые друг к другу голоморфными преобразованиями.

Наши вычисления N_{420} подтверждают также формулы для более простых многочленов $N_{220} = E_0 = (|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4)$ и

$$N_{320} = z_1(|z_1|^4 - 6|z_1|^2|z_2|^2 + 3|z_2|^4) + z_2(3|z_1|^4 - 6|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4),$$

полученные в [2].

Литература

[1] Лобода А. В. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности в C^2. Функц. анализ-2012. Принято к печати.

[2] Evchenko V.K., Loboda A.V. One family of affinely homogeneous algebraic surfaces in C^3 // Preprint. http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/ sfb11129.pdf.

О РАВНОМЕРНО КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Небольсина М.Н. (Воронеж)

marinanebolsina@yandex.ru

В банаховом пространстве E для $x \in [0, a]$ рассматривается уравнение

$$x^2 u''(x) + xu'(x) = Au(x) + f(x), \tag{1}$$

где A–линейный, замкнутый оператор с плотной в E областью определения $D(A)$ и такой, что оператор $-A$ является генератором полугруппы $U(t, -A)$ класса C_0 с оценкой $\|U(t, -A)\| \leqslant Mexp(-\omega t)$, $\omega > 0$,$t > 0$.

Вектор-функция $f(x)$ при каждом $x \in [0,a]$ принадлежит пространству $\mathbb{C}_{[[\varkappa,\partial],\mathbb{E}]}$ непрерывных на $[0,a]$ функций с нормой $\|f(x)\| = \sup_{x\in[0,a]} \|f(x)\|_E$.

Решением уравнения (1) будем называть вектор-функцию $u(x)$, такую, что:1) $u(x) \in D(A)$, $x \in [0,a]$; 2) $u(x) \in \mathbb{C}_{[\varkappa,\partial]}$; 3) $u''(x) \in \mathbb{C}_{(\varkappa,\partial]}$ и удовлетворяет уравнению (1) при $f(x) \in \mathbb{C}_{[\varkappa,\partial]}$.

Нас интересует решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u'(a) = 0. \tag{2}$$

Теорема. При сделанных предположениях на оператор A задача (1)-(2) имеет единственное решение $u(x)$ и для него справедлива оценка

$$\|u(x)\|_{C_{[0,a]}} \leqslant \frac{M}{\omega} \|f(x)\|_{C_{[0,a]}}. \tag{3}$$

Литература

1. Феллер В. Параболические дифференциальные уравнения и соответствующие им полугруппы преобразований// Математика. 1957. Т.1. №4. С.105-159.

2. Костин В.А.// Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31. №8. С.1419-1425.

3. Костин В.А., Костин А.В., Костин Д.В.// ДАН. 2011. Т.441. №1. С.10-13.

АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Недобежкина С.Н., Иванникова С.Н. (Воронеж)

Страшная эта опасность – безделье за партой; безделье шесть часов ежедневно, безделье месяцы и годы. Это развращает, морально калечит человека, и ни школьная бригада, ни школьный участок, ни мастерская – ничто не может возместить того, что упущено в самой главной сфере, где человек должен быть тружеником, - в сфере мысли.

В.А.Сухомлинский.

В настоящее время в России идет становление новой системы образования. Этот процесс сопровождается существенными изменениями в педагогической теории и практике учебно-воспитательного процесса. Традиционные способы передачи информации уступают место использованию информационно-коммуникативным технологиям. В связи с этим ведутся поиски новых эффективных методов обучения и таких методических приемов, которые бы активизировали мысль школьников, стимулировали бы их к самостоятельному приобретению знаний.

Необходимо стараться, пробуждая интерес к своему предмету, не просто осуществлять передачу опыта, но и укреплять веру в свои силы у каждого ребенка, независимо от его способностей. Следует развивать творческие возможности у слабых учеников и в то же время не давать остановиться в своем развитии более способным детям, учить всех воспитывать у себя силу воли, твердый характер и целеустремленность при решении сложных заданий. Все это и есть воспитание творческой личности в самом широком и глубоком понимании этого слова. Но для создания глубокого интереса учащихся к предмету, для развития их познавательной активности необходим поиск дополнительных средств, стимулирующих развитие общей активности, самостоятельности, личной инициативы и творчества учащихся.

Одной из основных задач преподавания курса математики в школе является формирование у учащихся сознательных и прочных вычислительных навыков.

Хорошо развитые у учащихся навыки устного счета – одно из условий их успешного обучения в старших классах. Учителю математики надо обращать внимание на устный счет с того самого момента, когда учащиеся переходят к нему из начальной школы.

Устный счёт необходимо проводить так, чтобы ребята начинали с легкого, а затем постепенно брались за вычисления все более и более трудные. Если сразу обрушить на учащихся сложные устные задания, то ребята обнаружат свое собственное бессилие, растеряются, и их инициатива будет подавлена.

Следует разделять два вида устного счета. Первый – это тот, при котором учитель не только называет числа, с которыми надо оперировать, но и демонстрирует их учащимся каким-либо образом (записывает на доске, указывает по таблице, проецирует на экран с помощью компьютера). Подкрепляя слуховые восприятия учащихся, зрительный ряд фактически делает ненужным удерживание данных чисел в уме, чем существенно облегчает процесс вычислений. Однако именно запоминание чисел, над которыми производятся действия,- важный момент устного счета. Тот, кто не может удержать чисел в памяти, в практической работе оказывается плохим вычислителем. Поэтому в школе нельзя недооценивать второй вид устного счета, когда числа воспринимаются только на слух. Учащиеся при этом ничего не записывают и никакими наглядными пособиями не пользуются. Естественно, что второй вид устного счета сложнее первого. Но он и эффективнее в методическом смысле – при том, однако, условии, что этим видом счета удастся увлечь всех учащихся. Последнее обстоятельство очень важно, поскольку при устной работе трудно контролировать каждого ученика. Желательно сделать так, чтобы устный счет воспринимался учащимися как интересная игра. Тогда они сами внимательно следят за ответами друг друга, а учитель становится не столько контролером, сколько лидером, придумывающим все новые и новые интересные занятия.

Недавно появившаяся в России система централизованного тестирования и итоговая аттестация в форме ЕГЭ и ГИА активно внедряет в образование современные технологии оценки учебных достижений. Целесообразно шире использовать тестирование по разделам, отдельным темам, отрабатывая технологию проведения. Метод тестирования позволяет объективно определить результаты обучения, выявить проблемы и недостатки обучения как целого класса, так и каждого ученика в отдельности.

С помощью теста можно проверить большой объем изученного материала, быстро "диагностировать" овладение учебным материалом большого количества учащихся. Содержание тестовых задач и многократное тестирование позволяет даже слабым ученикам выполнить часть работы, минуя психологический стресс, получить удовлетворительную оценку и овладеть объемом знаний, достаточным для этого.

Оживляет урок и использование различных форм ИКТ, среди которых наиболее простой является презентация, когда компьютер выполняет роль и доски, и учебника, и дидактического пособия. Круг методических и педагогических задач, которые можно решить с помощью компьютера, разнообразен. Компьютер – универсальное средство, его можно применить в качестве калькулятора, тренажёра, средства контроля и оценки знаний, ко всему прочему – это идеальная электронная доска. Огромные возможности компьютерной техники, гигантское многообразие культурной информации, которое предоставляют мультибиблиотеки и всемирная сеть Интернет становятся доступны учащимся. Главной его компетенцией становится роль помощника, консультанта, навигатора, как в мире знаний, так и в становлении у ученика целостного качества быть личностью.

В школьной практике и в методической литературе принято делить методы обучения на стандартные и нестандартные. Стандартный вид обучения является самым распространенным и представляет собой обучение знаниям, умениям и навыкам по схеме: изучение нового – закрепление – контроль – оценка. В настоящее время традиционное обучение постепенно вытесняется другими видами обучения, так как определяются другие требования к личности и процессу ее развития в школе.

Нетрадиционные формы уроков позволяют сделать математику более доступной и увлекательной, привлечь интерес всех учащихся, привлечь к их деятельности, в процессе которой приобретаются необходимые знания, умения и навыки. Применяя в течении ряда лет в своей практике нестандартные уроки, можно сделать вывод, что такие уроки повышают эффективность обучения. Чаще всего обычно применяются следующие нестандартные уроки: урок-практикум, урок-лекция, урок-консультация

Урок-лекция. При лекционном ведении урока необходимы приемы и формы, позволяющие сделать учащихся активными участниками. Поэтому, где возможно, необходимо применять проблемное изложение материала. На уроке ставится и решается проблема ,учащиеся следят за логикой изложения, контролируют ее, соучаствуют в процессе решения. В тетрадях у учащихся должны быть записи, поэтому необходимо заранее продумать содержание, форму записей на доске и в тетрадях. Лекционное изложение по математике сопровождается примерами, образцами решения упражнений и задач, применяются технические средства, наглядные пособия.

Урок-консультация. Урок-консультация проводится при закреплении навыков по какой-либо теме. Он представляет собой своеобразную самостоятельную работу учащихся. Удобно проводить такие уроки сдвоенными. Во время закрепления полученных знаний ребята имеют возможность выполнить опережающие задания и получить дополнительные баллы, улучшая свои оценки. Положительные результаты таких уроков-консультаций налицо: не только исчезают пробелы в знаниях учеников по данной теме, но и закрепляются, вспоминаются и другие темы предмета.

Урок-практикум. Основанная цель уроков-практикумов состоит в том, чтобы выработать у учащихся умения и навыки в решении задач определенного типа или вида, в овладении новыми математическими методами. Нельзя научиться математике, наблюдая этот процесс со стороны, поэтому на уроках-практикумах необходимо развивать самостоятельность учащихся при решении задач.

Индивидуальная работа с учащимися является необходимым условием развития личности школьника и, соответственно, этот вид работы с учащимися должен присутствовать в каждом моменте урока.

Проблема развития ученика является одной из сложнейших задач в педагогической практике. Решение этой проблемы зависит от того, на получение какого именно результата ориентируется учитель в своей работе. Критерием деятельности является конечный результат: либо дать ученику лишь набор знаний по предмету, либо сформировать личность, готовую к творческой деятельности. Творческая деятельность учащихся не ограничивается приобретением нового. Работа будет творческой, познавательной, когда к ней проявляется замысел учащихся, ставятся новые задачи и самостоятельно решаются при помощи приобретенных знаний. Главной задачей является развитие у детей основы исследовательских умений: анализа (выявление проблем, сбор информации), наблюдения, построение гипотез, экспериментирования, обобщения.

Высокая познавательная активность возможна только на интересном для ученика уроке, когда ему интересен предмет изучения. И наоборот, “воспитать у детей глубокий интерес к знаниям и потребность в самообразовании – это означает пробудить познавательную активность и самостоятельность мысли, укрепить веру в свои силы”.

Интерес школьников к учению надо рассматривать как один из самых мощных факторов обучения. Математику надо рассматривать не как систему истин, которые надо заучивать, а как систему рассуждений, требующую творческого мышления. Умение заинтересовать математикой – дело непростое. Многое зависит от того, как поставить даже очевидный вопрос, и от того, как вовлечь всех учащихся в обсуждение сложившейся ситуации. Творческая активность учащихся, успех урока целиком зависит от методических приемов, которые выбирает учитель. Обучение математике в школе вполне можно и нужно строить так, чтобы оно представлялось для учащегося серией маленьких открытий, по ступенькам которых ум ученика может подняться к высшим обобщениям.

ГРУППОВАЯ РАБОТА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Недобежкина С.Н., Иванникова С.Н. (Воронеж)

Работа учителя математики в условиях современной школы предполагает развитие творческих способностей учащихся путем поиска эффективных приемов и методов преподавания. Особенно актуальной проблема творчества учащихся стала в настоящее время – в период модернизации российского образования.

Все ныне известные инновационные технологии обучения в школе так или иначе тяготеют к организации работы малых групп. Идея группового обучения, где все обучают каждого и каждый обучает всех не нова, но время вносит свои акценты в определение целей. Мы рассматриваем групповую форму работы как одно из главных условий формирования коммуникативных умений. Мы считаем, что групповая работа - одна из самых продуктивных форм организации учебного сотрудничества детей.

Исследователи отмечают, что в малой группе учащийся находится в более благоприятных, чем при фронтальной работе всем классом условиях в отношении возможности действовать в соответствии со своей индивидуальностью. В беседе внутри малой группы он может высказывать свое мнение, активнее участвовать в решении учебных задач в соответствии со своими интересами и способностями.

Преимущества групповой формы работы:

Во-первых, происходит резкое повышение интереса к учению, выработка положительного отношения к нему, и, как следствие этого, улучшение результативности учебного процесса.

Академик Х.Й. Лийметс объясняет это тем, что результаты учения в существенной мере зависят от его мотивов. В развитии интереса к учебе большую роль играет потребность детей в эмоциональном контакте. Общение в группе становится на начальных этапах групповой деятельности той точкой опоры, которая переворачивает мир детского отношения к учебе. Учебные занятия, побуждаемые вначале стремлением к общению, постепенно приобретают самостоятельный интерес, собственную побудительную силу.

Во-вторых, групповая работа способствует выработке у детей тех качеств, которые требуются для успешного контакта с другими людьми. Наиболее пригодными к деловому общению оказываются, по исследованиям психологов, люди, стремящиеся к самостоятельности в сочетании с несколько меньшим стремлением к лидерству; более дружелюбные и менее агрессивные; желающие быть общественно полезными; легко признающие вклад других, осознающие неизбежность различий между людьми и не стремящиеся подогнать оценку других под свои собственные нормы и каноны.

В-третьих, работа в группах открывает широчайшие возможности для выработки навыков социальной перцепции (восприятие других людей, их внешности, речи, жестов, мимики, оценка их действий и поступков). В процессе общения учащиеся учатся правильно оценивать свои собственные поступки, регулировать свое поведение в зависимости от изменяющихся условий окружения, преодолевать противоречия между членами группы, чтобы добиться большего взаимопонимания.

Один из методов обучения в группе - кооперативное обучение.

Кооперативное обучение - это метод взаимодействия учащихся в небольших группах, объединенных для решения общей задачи. Элементы кооперативного обучения: положительная взаимозависимость, личная ответственность за происходящее в группе, развитие навыков учебного сотрудничества. Технологический процесс групповой работы складывается из следующих элементов:

? постановка познавательной задачи (проблемной ситуации);

? раздача дидактического материала;

? планирование работы в группе;

? индивидуальное выполнение задания, обсуждение результатов;

? обсуждение общего задания группы (замечания, дополнения, уточнения);

? сообщение о результатах работы группы;

? общий вывод о работе групп и достижении поставленной задачи.

Как сформировать интерес к предмету у ребенка? Через самостоятельность и активность, через поисковую деятельность на уроке и дома, создание проблемной ситуации, разнообразие методов обучения, через новизну материала, эмоциональную окраску урока.

Сообщить готовое быстрее, чем открывать его вместе с учениками. Но от “прослушанного”, как известно, через две недели в памяти остается только 20 %. Важно сделать учащихся участниками научного поиска: рассуждая вслух, высказывая предположения, обсуждая их, доказывая истину. Учащиеся включаются в деятельность, которая носит исследовательский характер. В реализации проблемного обучения существенную роль играет создание на уроке учебной проблемной ситуации. Это оправдывающий себя дидактический прием, с помощью которого учитель держит в постоянном напряжении одну из внутренних пружин процесса обучения – детскую любознательность. Выдающийся немецкий педагог А.Дистервег убеждал, что развитие и образование ни одному человеку не могут быть даны или сообщены. Этого можно достичь собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением.

Рассмотрим пример. При изучении темы “Умножение отрицательных и положительных чисел” класс делится на несколько групп, и каждая группа самостоятельно рассматривает различные варианты произведения двух чисел. У каждой группы имеется карточка, на которой записано правило, рассмотрено два примера и дано пять примеров для самостоятельного решения. Учащиеся в своей группе должны разобрать правила и примеры, записать правила в тетрадь, после чего решить заданные для самостоятельного решения примеры. Работа в группах дает возможность обсуждать, подсказывать друг другу и проверять ответы. Совместными усилиями ребята приходят к выводу, что результат умножения положительного числа на отрицательное и наоборот есть число отрицательное, а произведение двух отрицательных чисел – положительно. Изучая новую тему самостоятельно и объясняя ее другим, учащиеся “открывают” для себя новые математические знания. В результате такой работы новые знания не поступают извне в виде информации, а являются внутренним продуктом практической деятельности самих учащихся.

Все большую актуальность и перспективность приобретает дифференциация обучения как учет индивидуально – типологических особенностей личности в форме группирования учащихся и различного построения процесса обучения в выделенных группах.

У нас в школе нет классов с углубленным изучением математики, но дети, интересующиеся и понимающие математику, есть всегда. Выход из этой ситуации – внутриклассная дифференциация, которая предполагает в обычном, разнородном классе выделение групп учащихся по каким-либо признакам. На практике внутриклассная дифференциация чаще всего представлена различными заданиями, дозированием учебной помощи ученикам. Основной проблемой организации внутриклассной дифференциации является невозможность затронуть все звенья учебного процесса.

Такая дифференциация отсутствует на этапе объяснения учебного материала, так как невозможно в условиях классно – урочной системы несколько раз объяснять один и тот же материал на различном уровне для нескольких групп учащихся. Обычно внутриклассная дифференциация реализуется на этапе закрепления, обобщения и коррекции знаний. При создании групп сначала выявляются способности учащихся, их отношение к предмету, запас знаний, мышление.

Оптимизация учебно-воспитательного процесса, достижение наивысших результатов при оптимальных затратах времени, сил, энергии предполагает использование всех организационных форм обучения.

Изучение педагогического опыта, результатов исследований в области педагогической психологии позволяет сделать вывод о том, что групповая работа обладает рядом неоспоримых преимуществ. Она открывает большие возможности для кооперирования, для возникновения познавательной коллективной деятельности учащихся.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НАД ИДЕМПОТЕНТНЫМИ ПОЛУКОЛЬЦАМИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ МУЛЬТИАГЕНТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Николаев Д.А. (Липецк)
NikolayevDmitry@yandex.ru

Технология мультиагентных систем, хотя и насчитывает уже более чем десятилетнюю историю своего активного развития, находится в настоящее время еще в стадии становления [1]. При попытках математического описания координированного движения подобных систем в большинстве случаев оказывается затруднительным или вовсе невозможным построение моделей на основе традиционного аппарата алгебраических, дифференциальных или разностных уравнений: зависимости оказываются настолько сложны, что не допускают своего обычного аналитического представления [2].

Главными задачами данной статьи являются обоснование, разработка и исследование нового класса математических моделей координированного движения коллективов агентов в дискретной неограниченно неопределенной динамической полностью наблюдаемой внешней среде на основе методов идемпотентной алгебры [2,3]. Для достижения поставленной цели вводится новый класс алгебраических структур – идемпотентные fusion-полукольца – и на их основе развивается аппарат нелинейных динамических систем с одномерным и двумерным параметром.

Литература

1. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006.

2. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектное управление динамическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.

3. Кривулин Н.К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.

4. Маслов В.П., Колокольцев В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М. : Наука, 1994.

О ВЫЧИСЛЕНИИ МНОЖЕСТВА НЕОДНОЗНАЧНОСТИ

Николенко П.В. (Ростов-на-Дону)

ppdominikl@mail.ru

Рассмотрим задачу быстродействия $\dot{x} = f(x, u)$, $x \to 0$, $u \in M$, M — заданный компакт и задача такова, что оптимальные управления непрерывны.

Если из точки x^0 в 0 ведет два оптимальных пути, то точку x^0 называют точкой неоднозначности. Множество всех указанных точек образует множество неоднозначности N. Если траектория ПМ пересекает N, то точка пересечения отделяет от траектории неоптимальную часть.

Множество N изучалось в [1], [2] для задачи о наискорейших перемещениях в поле скоростей $\dot{x} = v(x)+u$, $x \to 0$, где v — плоскопараллельное поле на плоскости, $v(x_1, x_2) = (v(x_2), 0)$, $\|u(t)\| \leqslant 1$, где v — выпуклая функция и $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, $v''(0) = a > 0$. Показано, что N является фазовой кривой при $t \geqslant 0$ некоторой задачи Коши, которая исходит из точки с координатами $(-\pi/\sqrt{a}, 0)$.

Численное решение данной задачи представляется затруднительным. Предлагается отыскивать точки множества N как особые точки сферы достижимости S^{t_0}. Для этого рассматривается задача

Коши

$$\dot{x_1} = v(x_2) + \frac{1}{\sqrt{1+x_3^2}}; \quad \dot{x_2} = \frac{x_3}{\sqrt{1+x_3^2}}; \quad \dot{x_3} = -v'(x_2);$$

$$\dot{y_1} = v'(x_2)y_2 - \frac{x_3}{\left(\sqrt{1+x_3^2}\right)^3}y_3; \quad \dot{y_2} = \frac{1}{\sqrt{1+x_3^2}}y_3; \quad \dot{y_3} = -v''(x_2)y_2,$$

финальные условия: $(x(0), y(0)) = (0, 0, s, 0, 0, 1)$ и определитель Δ матрицы

$$\begin{vmatrix} v(x_2) + \dfrac{1}{\sqrt{1+x_3^2}} & y_1 \\ \dfrac{x_3}{\sqrt{1+x_3^2}} & y_2 \end{vmatrix},$$

а также функции $\Phi_\pm(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s))$ ($+$ при $t < 0$, $s < 0$, $-$ при $t < 0, s < 0$).

Если $\Phi_\pm(t_0, s)$ — граничная точка сферы S^{-t_0}, то Δ не меняет знак вдоль траектории. Точка неоднозначности является точкой пересечения той части кривых $\Phi_+(t_0, \cdot)$ и $\Phi_-(t_0, \cdot)$, для которых Δ не меняет знак; при этом $(x_1(t, s), x_2(t, s))$ дает точку кривой, а (y_1, y_2) определяет касательную к ней. Поэтому для определения точки пересечения пользуемся методом касательных, а само множество N аппроксимируем соответствующей ломаной.

Литература

1. *Николенко П. В.* О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2011. № 5.

2. *Николенко П. В.* Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2012. (принята к печати).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАВЕНСТВА РИССА-КАЛЬДЕРОНА И О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

Нурмагомедов А.М. (Махачкала)

Artsolav@mail.ru

Рассматривается краевая задача вида:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), t \in L_p \tag{1}$$

в пространствах L_p при интегрируемой неограниченности $|G^{\pm 1}|$ и требовании, что контур L удовлетворяет условию $(ds/|dt|) \leqslant M$.

Вначале дадим оценку сингулярного интеграла с ядром Коши

$$Au = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

при вышеприведенном ограничении на L. Без ограничения общности, будем считать контур L замкнутым без точек самопересечения. Обозначим через $S = S(\varphi)$ - функцию выражающую длину дуги L через φ при конформном отображении области D, ограниченной кривой L, на область $|z| < 1$. Тогда существуют положительные m и M такие, что $m \leqslant [ds/d\varphi \leqslant M]$. Введем обозначение: $\Phi(z) = (1/2\pi i) \int \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau$.

Тогда

$$||Au||_\rho = ||\Phi^+(t(s)) + \Phi^-(t(s))|| \leqslant M||\Phi^+[t(s(\varphi))] + \Phi^-[t(s(\varphi))]||_\rho \leqslant$$

$$\leqslant A_\rho M||\Phi^+ - \Phi^-||_\rho \leqslant \frac{M}{m} A_\rho ||\Phi^+[t(s(\varphi))] - \Phi^-[t(s(\varphi))]||_\rho = \frac{A_\rho M}{m} ||u||_\rho.$$

Неравенство такого типа $||Au||_\rho \leqslant A(p, L)||u||_\rho$ получено Кальдероном для гладких контуров и довольно сложным путем.

С учетом выше указанного, за контур задачи (1) можно принять контур, для которого $|t| = 1, t = t(\varphi), 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Тогда $G(t) = G_1(\varphi) + iG_2(\varphi)$ Будем считать, что функция $G(\varphi)$ такая, что интервал $(0, 2\pi)$ можно разбить на конечное число таких интервалов $(\varphi_k \varphi_{k+1})$, что на каждом из них функция $G_1(\varphi)$ или $G_2(\varphi)$ будут непостоянными почти всюду .

Тогда существует функция $G_0(\varphi)$, постоянная и равная ± 1 или ± 1 на каждом из этих интервалов, что действительная часть произведения$\tilde{G}(\varphi) = G(\varphi)G_0(\varphi)$ будет неотрицательной почти всюду на интервале $(0, 2\pi)$. Пусть $X^\pm(\varphi)$ - канонические функции, соответствующие $G(\varphi)$, и X^+ ограничена.

Будем считать, что функции $[G_k(\varphi)]^{\pm 1}$ принадлежат $L_{p_1}(p_1 > 1$. Обозначим через $\bar{G_1}(\varphi) = Re(\tilde{G(\varphi)})$ и $\Psi^\pm(\varphi) = \Phi^\pm / X^\pm$.

Если функция $g = g(T(s(\varphi)))$, умноженная на $[\bar{G}_1]^{-1}$, принадлежит L_2 , то существует функция, принадлежащая весовому пространству $L_2(\rho)$, $\Psi^-(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}$, где $\rho(\varphi) = \bar{G_1}(\varphi$. Тогда существует $p > 1$, такое что $\Psi^\pm \in L_p$.

Отсюда следует, что существует функции $\Phi^{\pm}(\varphi)$, аналитические в соответствующих областях $D^{\pm}$, причем $\Phi^{+}(\varphi) \in L_p$ и $\Phi^{-}(\varphi)[X^{-}(\varphi)]^{-1} \in L_p$.

Замечание. Задача (I), разрешима в случае, когда коэффициент $G(t) = G_1(t)G_2(t)G_3(t)$, где $G_1(t)$ удовлетворяет вышеприведенным условиям,$G_2(t)$ — ограниченная функция, удовлетворяющая условиям Б.И. Симоненко [1], а $G_3(t) = P_m(t)/Q_m(t)$, $P_m(t)$ и $Q_m(t)$ являются полиномами соответствующего порядка, все корни которых лежат на контуре L.

Литература

1. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана для пар функций с измеренными коэффициентами и её применение к исследованию сингулярных интегралов в пространстве Lp с весами. Изв. А.Н. СССР, сер. Матем., 1964, Т. 28, № 2, с. 277-306.

КОЛЕБАНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Огарков В.Б. (Воронеж)

Рассмотрим полярно-симметричную задачу плоского колебания полого цилиндра из упруго-пластического материала под действием равномерного внешнего давления q. Будем предполагать, что пластическая зона образуется с внешней стороны цилиндра.

При сращивании упругой и пластической зон необходимо выполнить следующие соотношения:

$$\sigma_{rl}(r = r_1) = 0; \quad \sigma_{rp}(r = r_2) = -q; \tag{1}$$

$$\sigma_{rl}(r = r_T) = \sigma_{rp}(r = r_T); \tag{2}$$

$$\sigma_{\theta l}(r = r_T) = \sigma_{\theta p}(r = r_T); \tag{3}$$

$$u_l(r = r_T) = u_p(r = r_T). \tag{4}$$

Здесь r_T — радиус раздела между упругой и пластической зон.

В упругой зоне при плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$) выполняется обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta]; \tag{5}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r]; \tag{6}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \tag{7}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0. \tag{8}$$

Сложим и вычтем соотношения (5) и (6):

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta); \tag{9}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta). \tag{10}$$

Для несжимаемого материала:

$$\mu = \frac{1}{2}; \quad K = \infty; \tag{11}$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0; \quad \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0. \tag{12}$$

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Рассмотрим деформирование в упругой зоне:

$$u(r) = \frac{C_1}{r}. \tag{14}$$

Соотношения (9) и (10) примут вид:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0; \quad \varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{3}{2E}(\sigma_r - \sigma_\theta). \tag{15}$$

Введем в рассмотрение потенциал напряжений:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r} + \Omega(r,t); \quad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} + \Omega(r,t). \tag{16}$$

Чтобы уравнения (13) и (15) были удовлетворены, необходимо удовлетворить следующим уравнениям:

$$\frac{\varphi}{r} - \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{4C_1E}{3r^2}; \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{\rho}{r}\frac{d^2C_1}{dr^2}; \tag{18}$$

$$\varphi(r) = C_2 r + \frac{C_3}{r}; \quad \Omega(r,t) = \rho \ln r \frac{d^2C_1}{dt^2}; \tag{19}$$

$$C_3 = -\frac{2EC_1}{3}; \tag{20}$$

$$\sigma_r = C_2 + \frac{C_3}{r^2} + \rho \ln r \frac{d^2C_1}{dt^2}; \quad \sigma_\theta = C_2 - \frac{C_3}{r^2} + \rho \ln r \frac{d^2C_1}{dt^2}. \tag{21}$$

В пластической зоне имеем [1]:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \frac{1}{2\sigma_0}(\sigma_r - \sigma_0); \varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \frac{1}{2\sigma_0}(\sigma_\theta - \sigma_0); \varepsilon_z - \varepsilon_0 = \frac{1}{2\sigma_0}(\sigma_z - \sigma_0); \tag{22}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z); \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z). \tag{23}$$

Условия пластичности Мизеса:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2]} = \sigma_T; \tag{24}$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2(\sigma_\theta - \sigma_z)^2]} = \sigma_T; \tag{25}$$

$$\frac{1}{2\sigma_0} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \tag{26}$$

В рассматриваемой задаче:

$$\varepsilon_z = 0; \quad \varepsilon_0 = 0; \quad \sigma_z - \sigma_0 = 0; \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta); \tag{27}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_i = \sigma_T; \quad \varepsilon_i = \frac{2\varepsilon_\theta}{\sqrt{3}}; \tag{28}$$

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\ln r + \rho \ln r \frac{d^2C_4}{dt^2} + C_5; \tag{29}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} + \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\ln r + C_5 + \rho \ln r \frac{d^2C_4}{dt^2}; \tag{30}$$

$$u(r) = \frac{C_4}{r}. \tag{31}$$

Соотношения (22) примут такой вид:

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{2\sigma_0}\frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2\sigma_0}\frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_z = \sigma_0. \tag{32}$$

Подсчитаем величину $\frac{1}{2\sigma_0}$:

$$\frac{1}{2\sigma_0} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{\sqrt{3}}{\varepsilon \ \ _\theta}\sigma_T. \tag{33}$$

Все соотношения (32) выполняются автоматически при найденных напряжениях и деформациях. Константы C_1, C_2, C_4, C_5 и r_T должны быть найдены из пяти соотношений (1)-(4). В данной работе впервые получено точное аналитическое решение о колебании упруго-пластического цилиндра с условием выполнения непрерывности радиального перемещения $u(r)$ в стыках упругой и пластической зон и выполнением уравнения совместности деформаций (8).

Литература

1. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести/ Н.Н. Малинин. — М. Машиностроение, 1975. — 400 С.

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Огарков В.Б., Бугаков В.М., Аксенов А.А. (Воронеж)

Рассмотрим полярно-симметричное плоское напряженное состояние упругого изотропного цилиндра при стационарном тепловом воздействии [1]:

$$T(r) = A + B\ln r; \tag{1}$$

$$A = \frac{(T_1\ln r_2 - T_2\ln r_1)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}; \quad B = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln\frac{r2}{r_1}}; \tag{2}$$

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \tag{3}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_0 = \frac{u}{r}; \tag{4}$$

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varepsilon_0}{dr}) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \tag{5}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_\theta] + \alpha T(r); \tag{6}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_r] + \alpha T(r); \tag{7}$$

$$\varepsilon_z = const = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \alpha T(r). \tag{8}$$

В случае плоского напряженного состояния:

$$\sigma_z = 0; \quad \varepsilon_z = const; \tag{9}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \alpha A + \alpha B \ln r. \tag{10}$$

Будем искать решение данной задачи в следующем виде:

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r; \tag{11}$$

$$\sigma_\theta = C_4 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r; \tag{12}$$

$$\varepsilon_\theta = A_1 + \frac{A_2}{r^2} + A_3 \ln r; \tag{13}$$

$$\varepsilon_r = A_4 - \frac{A_2}{r^2} + A_3 \ln r. \tag{14}$$

Деформации (13)-(14) удовлетворяют уравнению совместности деформаций (5). Подставим формулы (11) и (12) в уравнение равновесия (3):

$$C_3 + C_1 - C_4 = 0; \tag{15}$$

$$C_1 = C_4 - C_3; \tag{16}$$

$$\sigma_r = C_4 - C_3 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r; \tag{17}$$

$$\sigma_\theta = C_4 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r. \tag{18}$$

Соотношение (10) примет такой вид:

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(2C_4 - C_3 + 2C_3 \ln r) + \alpha A + \alpha B \ln r. \tag{19}$$

Необходимо выполнить равенства:

$$-\frac{2\mu}{E}C_3 + \alpha B = 0; \tag{20}$$

$$C_3 = \frac{\alpha E B}{2\mu}; \tag{21}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(2C_4 - C_3) + \alpha A0. \tag{22}$$

Подставим формулы (11)-(14) в закон Гука (6):

$$\begin{gathered}
A_4 - \frac{A_2}{r^2} + A_3 \ln r = \\
= \frac{1}{E}\left[C_4 - C_3 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r - \mu\left\{C_4 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r\right\}\right] + \\
+\alpha A + \alpha B \ln r = \frac{1}{E}[(1-\mu)C_4 - C_3] + \alpha A + \frac{(1+\mu)}{E}\frac{C_2}{r^2} + \\
+\frac{(1-\mu)}{E}C_3 \ln r + \alpha B \ln r;
\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}
A_1 + \frac{A_2}{r^2} + A_3 \ln r + \\
+\frac{1}{E}\left[C_4 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r - \mu\left\{C_4 - C_3 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 \ln r\right\}\right] + \\
\alpha A + \alpha B \ln r = \frac{1}{E}[(1-\mu)C_4 + \mu C_3] + \alpha A + \frac{(1-\mu)}{E}C_3 \ln r + \\
+\alpha B \ln r - \frac{(1+\mu)}{E}\frac{C_2}{r^2};
\end{gathered} \tag{24}$$

$$A_3 = \frac{(1-\mu)}{E}C_3 + \alpha B; \tag{25}$$

$$A_2 = -\frac{(1+\mu)}{E}C_2. \tag{26}$$

Имеем граничные условия:

$$\sigma_r(r = r_1) = \sigma(r = r_2) = 0; \tag{27}$$

$$C_4 - C_3 + \frac{C_2}{r_1^2} + C_3 \ln r_1 = 0; \tag{28}$$

$$C_4 - C_3 + \frac{C_2}{r_2^2} + C_3 \ln r_2 = 0; \tag{29}$$

$$C_2\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) + C_3 \ln \frac{r_2}{r^1} = 0; \tag{30}$$

$$C_2\frac{r_1^2 r_2^2 \ln\frac{r_2}{r_1}}{(r_2^2-r_1^2)}C_3; \qquad (31)$$

$$C_4=(1-\ln r_1)C_3-\frac{C_2}{r_1^2} \qquad (32).$$

Сложим деформации (6)-(8):

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=\frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_r+\sigma_\theta)+3\alpha A+3\alpha B\ln r. \qquad (33)$$

В случае несжимаемого тела

$$\mu=\frac{1}{2}; \quad \varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=3\alpha A+3\alpha B\ln r. \qquad (34)$$

Условие несжимаемости выполняется.

Полученное решение (11)-(14) приводит к двузначному выражению для радиального перемещения в соответствии с формулами (13) и (14). Аналогичная ситуация возникает и в случае плоской деформации цилиндра при тепловом воздействии [1]. Двузначность радиального перемещения не противоречит общей формуле Чезаро [2], по которой находится вектор перемещения по заданным деформациям. Решение (11)-(14) имеет большое научно-практическое значение, поскольку оно удовлетворяет всем уравнениям закона Гука и условию несжимаемости, необходимое для решения задачи термопластичности.

Литература

1. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов/ Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. — М., 1995. — 568 С.

2. Новацкий, В. Теория упругости/В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 864 С.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Огарков В.Б., Шашкин А.И., Скомарохова Е.А.
(Воронеж)

Рассмотрим задачу о вынужденном колебании материальной точки в среде с сопротивлением с постоянной массой [1]:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\beta\frac{du}{dt}+\omega^2 u=p(t). \qquad (1)$$

Здесь $u(t)$ — заданная искомая функция;

β и ω — заданные вещественные коэффициенты;

$p(t)$ — заданная вынужденная сила.

Представим уравнение (1) в таком виде:

$$\left(c+\frac{d}{dt}\right)\left(c+\frac{d}{dt}\right)[u]+du=0; \tag{2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2c\frac{du}{dt}+(c^2+d)u=p(t); \tag{3}$$

$$c=p; \quad d=\omega^2-\beta^2. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение следующие функции

$$F_1(t)=\left(c+\frac{d}{dt}\right)[u]=cu+\frac{du}{dt}; \quad F_2(t)=\sqrt{d}u; \tag{5}$$

$$\left(c+\frac{d}{dt}\right)[F_1]+\sqrt{d}[F_2]=p(t); \tag{6}$$

$$\left(c+\frac{d}{dt}\right)[F_2]-\sqrt{d}[F_1]=0. \tag{7}$$

Если функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ подставить в соотношения (6) и (7), то соотношение (6) будет идентично уравнению (3), а соотношение (7) будет выполняться тождественно.

Из соотношений (6) и (7) можно получить следующее уравнение:

$$\frac{dL_1}{dt}+(c-i\sqrt{d})L_1=p(t); \tag{8}$$

$$L_1(t)=F_1(t)+iF_2(t). \tag{9}$$

Решение уравнения (8) имеет вид [2]:

$$L_1(t)=\int\limits_0^t e^{(i\sqrt{d}-c)(t-\tau)}p(\tau)d\tau+C_1e^{(i\sqrt{d}-c)t}. \tag{10}$$

Имеем следующее уравнение:

$$F_1+iF_2=cu+\frac{du}{dt}+i\sqrt{d}u=\int\limits_0^t e^{(i\sqrt{d}-c)(t-\tau)}p(\tau)d\tau+C_1e^{(i\sqrt{d}-c)t}; \tag{11}$$

$$\frac{du}{dt} + (c + i\sqrt{d})u = \int\limits_0^t e^{(i\sqrt{d}-c)(t-\tau)} p(\tau) d\tau + C_1 e^{(i\sqrt{d}-c)t}. \qquad (12)$$

Решение уравнения (12) имеет вид:

$$u(t) = e^{-(c+i\sqrt{d})t} \int\limits_0^t e^{(c+i\sqrt{d})\tau} \left[\int\limits_0^\tau e^{(i\sqrt{d}-c)(\tau-x)} p(x) dx + \right.$$

$$\left. + C_1 e^{(i\sqrt{d}-c)\tau} \right] d\tau + C_2 e^{-(c+i\sqrt{d})t}. \qquad (13)$$

В соответствии с формулой (12) получим:

$$\frac{du}{dt} = L_1(t) - (c + i\sqrt{d})u. \qquad (14)$$

Формулы (13) и (14) дают общее решение уравнения (1). Константы C_1 и C_2 необходимо найти из начальных условий:

$$u(t = 0) = u_0; \quad \frac{du}{dt}(t = 0) = \nu_0. \qquad (15)$$

При решении конкретных задач необходимо рассмотреть три случая [3]:

$$d > 0; \quad d = 0; \quad d < 0. \qquad (16)$$

Предложенный в данной работе способ использования комплексной функции имеет практическое значение, поскольку позволяет получить общую форму решения уравнения (1) для всех трех случаев и избежать процедуры решения алгебраических уравнений по методу неопределенных коэффициентов (в трех случаях).

Полное решение однородного уравнения (1) приведено в работе [3]. Решение обобщенного уравнения Эйлера второго порядка с использованием комлексной функции дано в работе [4].

Использование комплексной функции может быть эффективно обобщено на задачи решения дифференциальных уравнений более высокого порядка и позволяет в этих задачах явление резонанса.

Литература

1. Теоретическая механика / В.М. Старжинский. — М.: Наука, 1980.— С. 464.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. — М.: Наука, 1965. — С.369.

3. В.Б. Огарков. Способ решения обыкновенного дифференциального уравнения и его приложения в задачах механики и теории управления. //Материалы IV научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и теории управления "// — Воронеж: ВГУ, 2011. — С. 216-218.

4. В.Б. Огарков, А.И. Шашкин. "Полярно-симметричная деформация упругого цилиндра // Тезисы научной конференции "Зимняя математическая школа"// — Воронеж: ВГУ, 2012. — С.114-116

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Орлов В.Н., Корнилов А.Я., Гузь М.П. (Чебоксары)
orlowvn@rambler.ru

Теоремы существования решений дифференциальных уравнений [1–2], применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям не позволяют получать приближенные решения этих уравнений. Одной из причин является наличие подвижных особых точек.

В работах [3–7] предложены теоремы существования, используемые в методе, позволяющем строить приближенные решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками.

Идея метода состоит в разделении области решения на область аналитичности и окрестности подвижных особых точек, а затем построения приближенных решений в этих областях.

Рассматривается уравнение

$$y'(x) = f_0 + f_1y(x) + f_2y(x)^2 + f_3y(x)^3 + f_4y(x)^4, \qquad (1)$$

где f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 — аналитические функции в рассматриваемой области.

С помощью замены переменной

$$y(x) = wu(\xi) + \frac{f_3 - f_2}{1,5f_3 - 4f_4},$$

при условии

$$\frac{f_3}{4f_4} = \frac{2f_2}{3f_3} = \frac{1 - 3f_1f_4}{2f_2f_4},$$

где

$$w = \exp\left[\int \left(f_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{f_3 - f_2}{1,5f_3 - 4f_4} f_2\right) dx\right], \quad \xi = \int f_4 w^3 dx,$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u'(\xi) = u^4(\xi) + I(x).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(x) = y(x)^4 + r(x), \tag{2}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть*

1) $r(x) \in C^\infty$ *в области*

$$|x - x_0| < \rho_1, \tag{4}$$

где $\rho_1 = \mathrm{const} > 0$*;*

2) $\exists M_1 : \left|\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \leqslant M_1$*,*

$\forall x$ *из области (4), где* $M_1 = \mathrm{const}$*,* $n = 0, 1, \ldots$ *. Тогда решение задачи (2)–(3) является аналитической функцией*

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n (x - x_0)^n \tag{5}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$*, где*

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{2^2(M_2+1)^5}\right\}, \quad M_2 = \max\{|y_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\},$$

$$n = 0, 1, \ldots .$$

Рассматривается структура приближенного решения задачи (2)–(3)

$$Y_N = \sum_0^N C_n (x - x_0)^n. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения (6) задачи Коши (2)–(3) справедлива оценка погрешности*

$$|Y - Y_N| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N+1} M_2 \cdot 2^{2N+1}(M_2+1)^{5N+5}|x-x_0|^{N+1} \frac{1}{1-2^2(M_2+1)^5|x-x_0|},$$

в области $(x-x_0) < \rho_2$*, где*

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{2^2(M_2+1)^5}\right\},$$

M_2 *из теоремы 1.*

Замечание. Теорема 2 позволяет получить и апостериорную оценку погрешности.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения $y'(x) = y(x)^4 + r(x)$, где $r(x) = 0$, $y(1) = 1$. Задача Коши имеет точное решение $Y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3x-4}}$. Выбираем значение x в области аналитичности (табл. 1).

Таблица 1

X	Y	Y_3	Δ	Δ_1	Δ_2
$1,0075$	$1,007614506$	$1,007614469$	$0,000000038$	$0,002332159$	$0,000001$

В табл. 1: Y — точное значение решения уравнения; Y_3 — приближенное решение; Δ — абсолютная величина погрешности; Δ_1 — априорная оценка погрешности по теореме 2; Δ_2 — апостериорная оценка погрешности.

Литература

1. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. — 2-е изд. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.

2. *Матвеев Н. М.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. — 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1967. — 567 с.

3. *Орлов В. Н.* Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т.25, №10. — С. 1829–1832.

4. *Орлов В. Н.* Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных уравнений Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. — Т.19. Киев: ІМ НАН України, 1998. – С. 155–165.

5. *Орлов В. Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. — 2008. — №2. — С. 42–46.

6. *Орлов В. Н.* Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. — Санкт-Петербург, 2008. — №4. — С. 102–108.

7. *Орлов В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник МАИ. — М., 2008. — Т.15. — №5. — С. 128–135.

ПСИХОЛОГО - ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ УЧЕНИКОВ ИЗ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ В СРЕДНЮЮ ШКОЛУ

Останина Н.В. (Вильнюс)

Хорошо известно, что при переходе из начальной школы в среднюю школу ученикам надо приспосабливаться к новым условиям. Появляются новые предметы обучения, увеличивается количество учителей, при этом у каждого учителя свой стиль преподавания. Это приводит к заметному изменению всей привычной жизни бывшего ученика четвертого класса, приводит к несоответствию между внешними социальными условиями и внутренним состоянием учащегося. Результатом, как правило, является резкое снижение успеваемости. Возникает стрессовая ситуация, у большинства учеников пятого класса. Добавим еще одну психологическую составляющую стресса. В странах Прибалтики, в школах с русским языком обучения, вводится преподавание на государственном языке с пятого класса некоторых предметов (история, география, этика). Задача всего персонала школы состоит в том, чтобы быстрее и безболезненно помочь ученикам приспособиться к новым требованиям и условиям обучения. В настоящее время имеется достаточно много различных способов, приемов, методов и мероприятий, целью которых является разработать механизм приспособления ученика к требованиям и условиям обучения в переходной период. Познакомимся с некоторыми моментами, учитывая которые, можно приблизиться к реализации поставленной выше цели. Сказанное в полной мере относиться и к вопросу преподавания математики

Анкетирование и тестирование учащихся, учителей и родителей.

Выявление негативных факторов возникновения стрессовых ситуаций.

Разработка единых приемов обучения по конкретным темам.

Проведение открытых уроков по математике для учителей младших и старших классов с приглашением также учителей русского и иностранных языков.

Проведение психолого-педагогических диагностик.

Оформление результатов исследования в виде графиков, таблиц, схем и т.д.

Установление тесной связи между учителями, родителями и медработниками.

Настоятельно рекомендуется учителям повышать свою квалификацию.

Надо добиваться понимания школьниками условий, которые составляют формулировку задачи. Ученики должны понимать: что дано, что требуется доказать (проверить, убедиться, вычислить и т. д.), что значит решить задачу, зачем нужна проверка.

Надо учить конспектированию, умению излагать свои мысли устно и письменно, пользоваться важной для математики терминологией. Например, "отсюда следует", "так как, то", "по теореме", "поэтому", "значит" и так далее.

При выполнении контрольных и домашних работ ученики должны пользоваться грамматикой родного языка.

Важной психологической составляющей является организация такого климата, в котором дети ведут себя свободно, расковано, чувствуют свою значимость в коллективе. Любят своего учителя математики и, как следствие, математику.

ЛЕММА О НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА НА ПОЛИЭДРАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Ощепкова С.Н., Пенкин О.М., Савастеев Д.В. (Белгород)
oschepkova@bsu.edu.ru, penkin@bsu.edu.ru, savasteev@gmai.com

На связном полиэдре Ω, разбитом на открытые симплексы по типу симплициального комплекса, задается аналог оператора Лапласа. В точке X симплекса σ_{kj} он является суммой, первым слагаемым которой является обычный лапласиан по касательным к σ_{kj} переменным, а вторым - сумма первых производных по направлениям внутрь всех симплексов размерности $k+1$, примыкающих к σ_{kj}.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 годы (госконтракт 02.740.11.0613).

Полиэдр Ω представляется в виде объединения $\Omega_0 \cup \partial\Omega_0$. Здесь Ω_0 - связное, открытое, плотное подмножество полиэдра, составленное из симплексов. Лапласиан рассматривается только на Ω_0.

Аналог леммы о нормальной производной в нашем случае утверждает, что если решение неравенства $\Delta u - qu \geqslant 0$ достигает нетривиального максимума в некоторой точке $X \in \sigma_{kj} \subset \partial\Omega_0$ границы полиэдра, то все производные, вычисленные в точке X по направлениям внутрь $(k+1)$-мерных симплексов из Ω_0, примыкающих σ_{kj}, отрицательны.

Ранее лемма о нормальных производных была доказана только для эллиптических операторов второго порядка на двумерных стратифицированных множествах (см. ссылку). Сужение класса стратифицированных множеств до класса полиэдральных множеств позволило нам упростить процедуру построения барьеров (ключевой момент доказательства леммы о нормальной производной) и снять ограничения на размерность.

Полученный результат позволил нам существенно упростить доказательство сильного принципа максимума для решений неравенства $\Delta u - qu \geqslant 0$ на стратифицированном множестве.

Литература

1. Гаврилов А.А., Пенкин О.М. Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. Дифференц. уравн. - 2000. - Т. 36, № 2. - С. 226-232.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ПОЛУЧЕНИЮ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ «СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

Павлова Н.Г. (Москва)
natasharussia@mail.ru

При изучении моделей экономических процессов важным является вопрос об условиях существования положения равновесия.

Для получения достаточных условий существования равновесия в модели "спрос – предложение"можно применять методы теории накрывающих отображений. Формализуем поставленную задачу.

Будем рассматривать метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y). Через $B_X(r, x)$ в пространстве X обозначим замкнутый шар радиуса r с центром в точке x. Аналогичное обозначение введем в пространстве Y.

Определение 1.[1] Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $S : X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$S(B_X(r,x)) \supseteq B_Y(\alpha r, S(x)) \ \ \forall r \geqslant 0, \ \forall x \in X.$$

Теорема 1. [1] Пусть пространство X полно, а S, $D : X \to Y$ — произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что

$$S(\xi) = D(\xi), \quad \rho_X(\xi, x_0) \geqslant \rho_Y(S(x_0), D(x_0))/(\alpha - \beta). \qquad (1)$$

Решение ξ уравнения (1) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений S и D.

Оказывается, равновесный вектор цен в модели "спрос – предложение"является точкой совпадения отображений спроса и предложения.

Получены достаточные условия существования равновесия для некоторых частных случаев модели "спрос – предложение".

Литература

[1] Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т.416. № 2. С. 151-155.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ И БИФУРКАЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Покутный А.А. (Киев)
lenasas@gmail.com

Доклад посвящен вопросам существования ограниченных решений линейных, слабо линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве **B**

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \varepsilon A_1(t)x(t) + f(t), \qquad (2)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \varepsilon Z(x(t), t, \varepsilon) + f(t), \quad (3)$$

где при каждом $t \in R$ оператор $A(t)$ является замкнутым с плотной областью определения $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$ не зависящей от t, $f(t)$ - непрерывная и ограниченная по норме $|||f||| = \sup_{t\in R} ||f(t)||_{\mathbf{B}}$ вектор-функция. Для уравнения (1) будут изложены необходимые и достаточные условия существования ограниченных на всей оси решений, а также конструктивные методы их построения при помощи теории псевдообращения и обобщенного оператора Грина. Предполагается, что однородное уравнение допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях. Будет исследована теория бифуркаций урав- нения (2) с ограниченным при каждом t оператором $A_1(t)$. Для уравнения (3) будут изложены необходимые и достаточные условия существования ограниченных решений в предположении, что порож- дающее уравнение (1) имеет семейство ограниченных решений. Будет показана связь между необходимым и достаточным условиями. Док- лад базируется на результатах, полученных в [1], [2].

Литература

[1] *Boichuk A.A., Pokunij A.A.* Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space. Tatra Mountains Mathematical Publications, vol.38 - 2007. - P. 29-41.

[2] *Покутный А.А.* Ограниченные решения линейных и слабо нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченным оператором в линейной части. Дифференциальные уравнения , т.48, 2012 (в печати).

О МУЛЬТИПЛИКАТОРЕ КЛАССА СОБОЛЕВА-КИПРИЯНОВА H^s_γ

Попова О.И. (Воронеж)

studentpmm@gmail.com

Пусть $R^+_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1 > 0\}$ — евклидово полупространство точек. Для $\gamma > 0$ введем обозначения

$$L^\gamma_2 = L^\gamma_2(R^+_n) = \left\{f:\ \|f\|^2_{L^\gamma_2} = \int_{R^+_n} |f(x)|^2\, x^\gamma_1\, dx < \infty\right\},$$

$$H^s_\gamma = H^s_\gamma(R^+_n) = \{f:\ \|f\|^2_{H^s_\gamma} = \int_{R^+_n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \xi^\gamma_1\, d\xi,$$

где $\widehat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье-Бесселя функции f (см. [1]) и пусть $S_{ev} = S(R^+_n)$ — множество, состоящее из функций пространства Л.Шварца основных функций, четных по переменной x_1.

Задачи вычислительного характера, связанные с поточечным обращением преобразования Радона-Киприянова (см. [2]), потребовали в некотором смысле точных оценок норм в весовом классе H_γ^s — результатов умножения на функции из основного класса S_{ev}.

Имеет место следующий результат.

Лемма 1. *Пусть s произвольное действительное число. Пространство $S_{ev}(R_n^+)$ является мультипликатором пространства $H_\gamma^s(R_n^+)$, если $f \in H_\gamma^s(R_n^+)$, $\varphi \in S_{ev}(R_n^+)$, то $\varphi f \in H_\gamma^s(R_n^+)$. Кроме того, для всех $\varphi \in S_{ev}(R_n^+)$ выполняется неравенство*

$$\|\varphi(x) f\|_{H_\gamma^s} \leqslant C \|f\|_{H_\gamma^s}$$

с константой

$$C = 2^{|s|} \left\| \sqrt{\widehat{\varphi}} \right\|_{L_2^\gamma} \left\| (1+|\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} \sqrt{\widehat{\varphi}} \right\|_{L_2^\gamma}.$$

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. 1997. С. 200.

2. Ляхов, Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона // Тр. МИРАН. — 2005. — Т. 248. — С. 153-163.

3. Ляхов, Л.Н. Обращение преобразования Киприянова-Радона / Л.Н. Ляхов // ДАН, 2004. — Т. 399. — N 5. — С. 597-600.

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИЙ КЛАССА $H^p(D^n)$ СРЕДНИМИ ЧЕЗАРО

Прибегин С.Г. (Одесса)

ivanpribegin@rambler.ru

Пусть $H^p(D^n), p > 0$, пространство Харди в единичном поликруге $D^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$, $f(\rho e^{i\theta}) = \sum_k \widehat{f}_k (\rho e^{i\theta})^k$– ряд Тейлора функции $f \in H^p(D^n)$, где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{k_1,\dots,k_n}$– коэффициенты ряда Тейлора функции f , а $(\rho e^{i\theta})^k = ((\rho_1 e^{i\theta_1})^{k_1}, \dots, (\rho_n e^{i\theta_n})^{k_n}))$.

Средними Чезаро (C, α) при $\alpha > 0$ для функции $f \in H^p(D^n)$ назовём:

$$\sigma_m^\alpha(f, e^{i\theta}) = (A_m^\alpha)^{-1} \sum_{\substack{k, \\ 0 \leqslant |k| \leqslant m}} A_{m-|k|}^\alpha \widehat{f}_k e^{ik\theta}$$

где $A_m^\alpha = \binom{\alpha+m}{m} = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+1)}$,а $|k| = k_1 + \ldots + k_n$.

Модулями гладкости функции $f \in H^p(D^n)$ назовём функции

$$\omega(\delta, f)_p = \sup_{\substack{|h_j|\leqslant\delta,\\ j=1,\ldots,n}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q^n} |f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\widetilde{\omega}(\delta, f)_p = \sup_{\substack{|h|\leqslant\delta\\ h_1=\ldots=h_n=h}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q^n} |f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где $Q^n = [-\pi, \pi]^n$,$d\theta = d\theta_1 \ldots d\theta_n$.

Теорема. Пусть функция $f \in H^p(D^n)$ и $(0 < p \leqslant 1) \wedge (\alpha > \frac{n}{p} - 1) \vee$ $(p > 1) \wedge (\alpha > n - 1)$ Тогда

$$C_1(\alpha, f)\widetilde{\omega}\left(\frac{1}{m}, f\right)_p \leqslant \|f(e^{i\theta}) - \sigma_m^\alpha(f, e^{i\theta})\|_p \leqslant C_2(\alpha, p)\omega\left(\frac{1}{m}, f\right)_p.$$

При $n = 1$ оценка сверху доказана в [1].

Литература

1. Стороженко Э.А. Приближение функций класса $H^p, 0 < p < 1$, Матем. сб., 1978,т.105(147),N4. с.601-621.

ОБОБЩЕННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Провоторов В.В. (Воронеж)

wwprov@mail.ru

Дифференциальное уравнение на геометрическом графе Γ в классе C^2, порожденное дифференциальным выражением $(Lu)(x) \equiv -\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du(x)}{dx}) + b(x)u(x)$ с достаточно гладкими коэффициентами $a(x)$ и $b(x)$, подразумевает классическую форму

$$(Lu)(x) = f(x),\ x \in \Gamma_0 \tag{1}$$

на объединении Γ_0 всех ребер, не содержащих концевых точек, и соотношения

$$\sum_{\gamma_j \subset r(\xi_k)} a(0)_{\gamma_j} \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \subset R(\xi_k)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx},\ k = \overline{p+1, m} \tag{2}$$

во внутренних узлах $\xi \in J(\Gamma)$, через $R(\xi)$ и $r(\xi)$ обозначены множества ребер, выходящих из ξ и входящих в ξ, соответственно (везде использованы обозначения, принятые в работах [1, 2]). Рассматриваются обобщенные решения уравнения (1), (2) (слабые решения), принадлежащие классу $W_2^1(\Gamma)$, определяемые как функции из $W_{2,0}^1(a, \Gamma, J(\Gamma)) \subset W_2^1(\Gamma)$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$L(u, \eta) \equiv \int\limits_{\Gamma} [a(x)\frac{du(x)}{dx}\eta'(x) + b(x)u(x)\eta(x)]dx = \int\limits_{\Gamma} f(x)\eta(x)dx \quad (3)$$

при всех $\eta(x) \in C_0^\infty(\Gamma_0)$ (гладкие финитные функции с носителем Γ_0), пространство $W_{2,0}^1(a, \Gamma, J(\Gamma) \subset W_2^1(\Gamma)$ определяется замыканием в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества функций из $W_2^1(\Gamma) \cap C(\Gamma)$, удовлетворяющих (2) и краевому условию $u|_{\partial\Gamma} = 0$ ($W_{2,0}^1(a, \Gamma, J(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$). Для уравнения (1), (2) рассматривается спектральная задача: обобщенные собственные функции класса $W_2^1(\Gamma)$ суть элементы пространства $W_{2,0}^1(a, \Gamma, J(\Gamma))$, удовлетворяющие тождеству $L(u, \eta) = \lambda(u, \eta)$ при любой $\eta \in W_{2,0}^1(a, \Gamma, J(\Gamma))$.

Показано, что при некоторых необременительных условиях на коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ спектр состоит из вещественных, положительных собственных чисел, имеющих конечную кратность, собственные числа можно занумеровать в порядке возрастания их модулей с учетом кратности каждого: $\{\mu_k\}_{k\geqslant 1}$. Соответствующие обобщенные собственные функции $\{u_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ образуют ортогональный базис в $W_{2,0}^1(a, \Gamma, J(\Gamma))$. В силу плотности $W_{2,0}^1(a, \Gamma, J(\Gamma))$ в $L_2(\Gamma)$ система функций $\{u_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ является ортогональным базисом и в $L_2(\Gamma)$. Систему обобщенных собственных функций можно нормировать в $L_2(\Gamma)$.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит, 2004. – 317 с.

2. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 384с.

О РАЗНОСТНОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА ФУРЬЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Провоторова Е.Н. (Воронеж)
enprov@mail.ru

Разностный аналог метода Фурье удобен для анализа разностных схем краевых задач, решения которых представляются обычными рядами Фурье, т.е. для уравнений и систем с зависящими от пространственных переменных коэффициентами в областях параллелепидального типа. Обобщению разностного аналога метода Фурье, изложенного в книге [1], на случай изменения пространственной переменной на геометрическом графе Γ посвящена данная работа. Решения разностных уравнений ищутся в виде суммы по собственным векторам разностного оператора, соответствующего эллиптической части уравнения.

Метод исследования различных задач для дифференциальных уравнений на графе состоит в их сведении к системам алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются значения сеточных функций на сетке Γ^h графа Γ и изучению предельного перехода, когда длины отрезков сетки стремятся к нулю, т.е. $h \to 0$ (сгущающиеся сетки Γ^h). Если исходить из того, что в основу обобщенного решения из $W_2^1(\Gamma)$ краевой задачи (или, что то же, решения из энергетического пространства) положено не дифференциальное уравнение, а соответствующее ему интегральное тождество, то надлежит искать аппроксимации последнего. Исходя из тождества, легче понять, как аппроксимировать и краевые условия, имея ввиду получения аналогов энергетических оценок. При таком способе конструирования разностных схем видны условия, при которых имеет место устойчивость, а, следовательно, и сходимость. Такой подход охватывает и случай разрывных коэффициентов, указывая рецепт построений «правильных» аппроксимаций в окрестности разрывов коэффициентов.

Реализация представленной идеи по построению сходящихся разностных схем для уравнений с распределенными параметрами на графе Γ (т.е. уравнений параболического и гиперболического типов) сложнее ибо в соответствующих им интегральных тождествах главные члены не образуют положительно определенных билинейных форм. Но соотношение, из которого выводится энергетическая оценка, содержит слагаемые, соответствующие эллиптической части уравнения, для которой можно использовать любую из разностных аппроксимаций, найденных для эллиптического уравнения. Одновременно выясняются и возможные аппроксимации краевых условий, т.к. постановка краевых условий диктуется эллиптической частью уравнений. Остается понять влияние членов, содержащих первые и вторые производные по переменной t.

Литература

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. – 407 с.

О ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Раецкая Е.В. (Воронеж)

raetskaya@inbox.ru

Рассматривается динамическая система, описывающая реализующийся динамический процесс:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + f(t), \tag{1}$$

$$F(t) = B\bar{x}(t), \tag{2}$$

где $x(t), f(t) \in R^n$, $F(t) \in R^m$, $A : R^n \to R^n$, $B : R^n \to R^m$, $t \in [0, T]$ (T - конечно или бесконечно).

Вектор-функция $x(t)$ называется *вектором состояний системы*, $f(t)$ и $F(t)$ - *входной* и *выходной функциями*, соответственно.

Систему (1), (2) будем называть *полностью наблюдаемой* (идентифицируемой по Калману), если по реализуемым, наблюдаемым входной и выходной функциям состояние системы определяется однозначно.

Динамическая система (1), (2) возмущается с помощью малого параметра следующим образом:

$$\varepsilon\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(\varepsilon)x(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon), \tag{3}$$

$$F(t,\varepsilon) = B(\varepsilon)x(t,\varepsilon). \tag{4}$$

Исходную систему (1), (2) называют *предельной*, систему (3), (4) с $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ - *сингулярно возмущенной.*

Полная наблюдаемость возмущенной системы (3), (4) выявляется методом каскадного расщепления исходных пространств на подпространства и поэтапного перехода к редуцированным системам, аналогичным исходной, но относительно элементов из все более "узких" подпространств (см. [1]).

Формулируются условия "входа-выхода" - соотношения, которым необходимо удовлетворяют наблюдаемые входная и выходная функции нелинейной возмущенной системы, описывающей реализующийся динамический процесс.

Для полностью наблюдаемой возмущенной системы строится функция состояния.

Устанавливаются условия, при выполнении которых из полной наблюдаемости предельной системы следует полная наблюдаемость возмущенной системы.

Литература

1. Зубова С.П.. О полной наблюдаемости дескрипторной псевдорегулярной системы / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ - 2011: материалы IV Международной научной конференции.- Воронеж: ВорГУ, 2011. С. 81 - 82.

ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ для $n = 2m+1$, где $m \in \mathbf{N}$ $(m \geqslant 3)$, рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L: $l(y) := y^{(n)}$, $U_\nu(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0$, $\nu = \overline{1,n}$, где $\alpha_\nu \in \mathbf{C}$.

В [1] была дана классификация операторов L: введены множества операторов в порядке усиления их нерегулярности NR_j, NR_j^0, NR_j^1, $j = \overline{0, m-1}$. В классификации использовались параметры $\theta_{1,r} := a_1 - s_1 a_n - \cdots - s_r a_{n-r+1}$, $\theta_{2,r} := a_2 - s_1 a_1 - \cdots - s_r a_{n-r+2}, \ldots$, $\theta_{n,r} := a_n - s_1 a_{n-1} - s_2 a_{n-2} - \cdots - s_r a_{n-r}$, где $r \in \mathbf{N}$, $s_j \in \mathbf{C}$ $(j = \overline{1,r})$, $a_\nu := \hat{\alpha}_\nu \omega_1^{\nu-1}$ $(\nu = \overline{1,n})$, $(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)^T := \left(\Omega^T\right)^{-1} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270).

$\Omega := \left(\omega_j^{\nu-1}\right)_{\nu,j=1}^{n}$, $\omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{n}$, $j=\overline{1,n}$. Если индекс у a_ν выходит за диапазон $\overline{1,n}$, то предполагается, что $a_\nu = a_{\mathrm{mod}_n(\nu)}$. Полнота в $L_2[0,1]$ системы корневых функций (к.ф.) операторов L из множеств NR_1, NR_1^0, NR_1^1 уже доказана (см. ссылку в [1]). Рассмотрим случай $L \in \mathrm{NR}_2$. В [1] получены условия того, что $L \in \mathrm{NR}_2$.

Лемма 1. *$L \in \mathrm{NR}_2$ тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_{12\ldots m+3} \neq 0$ и существуют такие числа $s_1, s_2, \ldots, s_{m-2}$, что $s_{m-2} \neq 0$ и выполняется какое-либо одно из следующих условий:*
1°) $\theta_{1,m-2} = \cdots = \theta_{m+2,m-2} = 0$, $\theta_{m+3,m-2} \neq 0$, $\theta_{n,m-2} \neq 0$;
2°) $\theta_{n,m-2} = \cdots = \theta_{m+1,m-2} = 0$, $\theta_{m+2,m-2} \neq 0$, $\theta_{n-1,m-2} \neq 0$;
3°) $\theta_{n-1,m-2} = \cdots = \theta_{m,m-2} = 0$, $\theta_{m+1,m-2} \neq 0$, $\theta_{n-2,m-2} \neq 0$;
4°) $\theta_{n-2,m-2} = \cdots = \theta_{m-1,m-2} = 0$, $\theta_{m,m-2} \neq 0$, $\theta_{n-3,m-2} \neq 0$.

Удалось получить следующее достаточное условие полноты.

Теорема 1. *Если $L \in \mathrm{NR}_2$, $s_1 = \cdots = s_{m-3} = 0$, $s_{m-2} = \varepsilon$, где $\varepsilon^n = 1$, то система к.ф. оператора L полна в $L_2[0,1]$.*

Литература

1. *Рыхлов В. С.* О некоторых свойствах определителей с циклически сдвинутыми столбцами и их применение в классификации дифференциальных операторов // Spectral and evolution problems: Proc. XIV Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. V.14. – Simferopol, 2004. С. 71–78.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РЕСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ОДНОРОДНОМ КРУГЕ С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Рябенко А.С. (Воронеж)
alexr-83@yandex.ru

Рассматривается следующая краевая задача, моделирующая стационарное распределение тепла в круге $B_r(0)$, где $r > 1$, с трещиной $l = [-1;1] \times \{0\}$:

$$\Delta u(x_1,x_2) = 0,\ (x_1,x_2) \in B_r(0)/l, \tag{1}$$

$$u(x_1,+0) - u(x_1,-0) = q_0(x_1),\ x_1 \in (-1;1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in (-1;1), \tag{3}$$

$$u(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in S_r(0). \tag{4}$$

Задача (1)-(4) получена в предположении, что коэффициент внутренней теплопроводности задается функцией $G(x_1, x_2) \equiv const$. Предполагается, что граничные условия (2), (3) выполнены в смысле главного значения. В дальнейшем будем считать, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3([-1;1])$, а функция $\varphi(x_1, x_2)$ принадлежит пространству $C(S_r(0))$.

Для изучения задачи (1)-(4) была рассмотрена следующая вспомогательная задача:

$$\Delta v(x_1, x_2) = 0,\ (x_1, x_2) \in R^2/l, \tag{5}$$

$$v(x_1, +0) - v(x_1, -0) = q_0(x_1),\ x_1 \in (-1;1), \tag{6}$$

$$\frac{\partial v(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in (-1;1). \tag{7}$$

При помощи сведения к обобщенной задачи (см. [1]), было построено явное представление решения задачи (5)-(7). Из явного вида решения задачи (5)-(7) были получены явные представления сингулярных членов асимптотического разложения производных первого порядка решения задачи (5)-(7), в окрестности концов трещины l. Описанные выше результаты исследования задачи (5)-(7) содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. Решение задачи (5)-(7) задается функцией

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{q_0(\sigma_1) x_2}{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2} d\sigma_1 +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1} q_1(\sigma_1) \ln\left[(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2\right] d\sigma_1,$$

причем $v(x_1, x_2)$ принадлежит пространству $C^\infty(R^2 \backslash l)$. Для частных производных первого порядка функции $v(x_1, x_2)$, при (x_1, x_2), принадлежащем $R^2 \backslash l$, справедливы представления:

$$\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1 - x_1)^2 + x_2^2} + \frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1 + x_1)^2 + x_2^2} -$$
$$-\frac{q_1(1)}{4\pi}\ln[(1 - x_1)^2 + x_2^2] + \frac{q_1(-1)}{4\pi}\ln[(1 + x_1)^2 + x_2^2] + R_1(x_1,\ x_2),$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2} - \frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2}+$$
$$+\frac{{q'}_0(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2] - \frac{{q'}_0(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_2(x_1,\,x_2),$$

где $R_1(x_1,x_2), R_2(x_1,x_2)$ – ограниченные на любом компакте функции.

При помощи теоремы 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. У задачи (1)-(4) существует решение, при этом функции $\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ в окрестности трещины l имеют такое же асимптотическое представление, как и функции $\dfrac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, соответственно, где $v(x_1,x_2)$ – решение задачи (5)-(7).

Литература

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. - М.: Наука, 1976. - 527 с.

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КОНДУКТИВНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. (Воронеж)

mihail_semilov@mail.ru

Математическая формализация внутренних задач кондуктивного режима свободной конвекции приводит к необходимости интегрирования следующей системы уравнений

$$\frac{\partial T(x,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 T(x,\theta)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$T(x,0)=0, \qquad T(0,\theta)=1, \qquad T(1,\theta)=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2\Phi(x,y,\theta)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi(x,y,\theta)}{\partial y^2}\right] = \frac{\partial^4\Phi(x,y,\theta)}{\partial x^4}+$$
$$+2\frac{\partial^4\Phi(x,y,\theta)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi(x,y,\theta)}{\partial y^4}-\frac{\partial T(x,\theta)}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\Phi(x,y,0)=0, \tag{4}$$

$$\Phi(0,y,\theta) = \Phi(1,y,\theta) = \Phi(x,0,\theta) = \Phi(x,1,\theta) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi(0,y,\theta)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi(1,y,\theta)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi(x,0,\theta)}{\partial y} = \frac{\partial\Phi(x,1,\theta)}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

где $T(x,\theta), \Phi(x,y,\theta)$ – безразмерные температура и функция тока; Pr – число Прандтля; θ, x, y – текущие время и декартовы координаты, которая записана для квадратной $[0,1]\times[0,1]$ каверны. Учитывая характер несопряженности данной системы, температурное поле может быть найдено отдельно. Для решения гидродинамической задачи применяется следующая конечно-разностная схема.

Частные производные по координатам второго порядка аппроксимируются трехточечным, а четвертого пятиточечным шаблоном со вторым порядком точности [1]. За счет двухточечной аппроксимации производной по времени, получена явная двухслойная (по времени) конечно разностная схема. Однако, функция тока входит в производную в неявном виде, поэтому ее матрица значений на каждом шаге находится из системы линейных уравнений.

Для обеспечения большей точности на каждом шаге пересчитываются значения в приграничных слоях, используя многоточечную аппроксимацию первой производной в граничных точках. Полученная невязка равномерно распределяется между внутренними точками области решения.

Результаты вычислительного эксперимента показали эффективность данной схемы, которая при $\theta \to \infty$ сходится к решению, полученному ранее [2].

Литература

[1] Андерсон Д.,Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная механика и теплообмен: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990.

[2] Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011). - Воронеж.: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2011. - с. 256

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Свиридова Е.А. (Воронеж)

formytravel@yandex.ru

Рассматривается задача, описывающая малые колебания вязкой сжимаемой жидкости с переменной стационарной плотностью в трёхмерном полупространстве

$$\begin{pmatrix} \rho_0(x_3)\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1}\\ 0 & \rho_0(x_3)\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ 0 & 0 & \rho_0(x_3)\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \rho_0(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} & \rho_0(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} & \rho_0(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3} & \alpha^2\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1(t,x)\\ U_2(t,x)\\ U_3(t,x)\\ P(t,x)\end{pmatrix}=$$

$$=A(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})\begin{pmatrix} \overrightarrow{U(t,x)}\\ P(t,x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} F_1(t,x)\\ F_2(t,x)\\ F_3(t,x)\\ G(t,x)\\ \\ \end{pmatrix}$$

где $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3), x'=(x_1,x_2)\in R^2, x_3>0, t>0$, Δ - оператор Лапласа. Система дополнена начальными и граничными условиями

$$U_i(t,\,\overline{x})|_{t=0}=P(t,\,\overline{x})|_{t=0}=U_i(t,\,\overline{x})|_{x_3=0}=U_i(t,\,\overline{x})|_{x_3=\infty}=0, i=1,2,3.$$

В данном случае $\overrightarrow{U}\,(t,\overline{x})\,, P(t,\overline{x})$ - соответственно вектор скорости и отклонение от стационарного давления в частице жидкости, находящейся в момент $t>0$ в точке $\overline{x}>0$; ν - динамический коэффициент вязкости среды; $\alpha^2\neq 0$ - коэффициент сжимаемости жидкости; $\rho_0(x_3)$ - стационарная плотность. Изучение разрешимости и определение поведения компонент вектора решения при $t\to\infty$ основаны на рассмотрении задачи в образах Лапласа-Фурье

$$A(\gamma,\imath s_1,\imath s_2,\frac{\partial}{\partial x_3})\begin{pmatrix} v_1(\gamma,s',x_3)\\ v_2(\gamma,s',x_3)\\ v_3(\gamma,s',x_3)\\ p(\gamma,s',x_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\gamma,s',x_3)\\ f_2(\gamma,s',x_3)\\ f_3(\gamma,s',x_3)\\ g(\gamma,s',x_3)\end{pmatrix}.$$

Краевые условия примут вид

$$v_i(\gamma,\,s',\,x_3)|_{x_3=0}=0, v_i(\gamma,\,s',\,x_3)|_{x_3=\infty}=0, i=1,2,3.$$

Относительно задачи в образах Лапласа-Фурье справедливы следующие утверждения.
Теорема 1. Пусть $\gamma\in\mathbb{C}, s'\in\mathbb{R}^{\not\vDash}$ удовлетворяет одному из следующих условий
1). $s'\in\mathbb{R}^2,\gamma\in\mathbb{C}$: при $-\varepsilon<\operatorname{Re}\gamma\leqslant 0$ $|\operatorname{Im}\gamma|\geqslant\delta_0$, а при $\operatorname{Re}\gamma>0$ $|\gamma|\geqslant\delta_0$;

2). $s' \in \mathbb{R}^{\not\vDash}, |s'| > \delta, \operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$,
где δ, δ_0 - произвольные положительные числа и $\varepsilon > 0$ - достаточно мало. Пусть существуют $\rho_{\min}, \rho_{\max} > 0$, такие, что при $x_3 \in [0, \infty)$ выполнено неравенство $\rho_{\min} \leqslant \rho_0(x_3) \leqslant \rho_{\max}$ и $\rho_0(x_3) \in C^2([0, \infty))$. Тогда при любых $f_i \in H^0([0, \infty)), i = 1, 2, 3, g \in H^1([0, \infty))$ по переменной x_3 задача в образах Лапласа-Фурье имеет единственное решение $\vec{v}(\gamma, s', x_3), p(\gamma, s', x_3)$, причем $v_i(\gamma, s', x_3) \in H^2([0, +\infty)), p(\gamma, s', x_3) \in H^1([0, +\infty))$.

Определение. Пусть $\delta = \sqrt{\frac{4\varepsilon\sqrt{3}\rho_{max}}{\alpha^2\sqrt{\nu\rho_{min}}}}$. Определим $\ell(\xi) = \ell_0 \bigcup \ell_1 \bigcup \ell_2$, где $\ell_1 = -\frac{\alpha^2\sqrt{\nu\rho_{min}}}{4\varepsilon\sqrt{3}\rho_{max}}\xi^2 + \imath\xi$ при $-\delta \leqq \xi \leqq \delta$, $\ell_0 = -\varepsilon + \imath\xi$ при $-\infty \leqq \xi \leqq -\delta$ и $\ell_2 = -\varepsilon + \imath\xi$ при $\delta \leqq \xi \leqq \infty$.

Теорема 2. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}, s' \in \mathbb{R}^{\not\vDash}$ и γ лежит справа от $\ell(\xi)$, а $\rho_0(x_3)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Если $f_i \in H^0([0, \infty)), g \in H^1([0, \infty))$, $v_i(\gamma, s', x_3) \in H^2([0, +\infty)), p(\gamma, s', x_3) \in H^1([0, +\infty)), i = 1, 2, 3$ по переменной x_3 равномерно по γ, лежащим справа от $\ell(\xi)$, и $s' \in \mathbb{R}^{\not\vDash}$, то для таких γ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2} + \frac{|s'|^2}{1+|s'|^2}\Big)\Big\|\frac{\partial^2 v_i(\gamma,\, s', x_3)}{\partial\, {x_3}^2}\Big\|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{|\gamma|^2}{1+|\gamma|} + |s'|^2\Big)\Big\|\frac{\partial\, v_i(\gamma,\, s', x_3)}{\partial\, x_3}\Big\|^2 +$$

$$+\Big(\frac{|\gamma|^4}{1+|\gamma|^2} + |s'|^4\Big)\|v_i(\gamma,\, s', x_3)\|^2 +$$

$$+\Big(\frac{|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2} + \frac{|s'|^2}{1+|s'|^2}\Big)\Big\|\frac{\partial\, p(\gamma,\, s', x_3)}{\partial\, x_3}\Big\|^2 +$$

$$+\Big(\frac{|\gamma|^4}{1+|\gamma|^2} + \frac{|s'|^4}{1+|s'|^2}\Big)\|p(\gamma,\, s', x_3)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{i=0}^{3}\|f_i(\gamma,\, s', x_3)\|^2 + \Big\|\frac{\partial\, g(\gamma,\, s', x_3)}{\partial\, x_3}\Big\|^2 + (1+|s'|^2)\|g(\gamma,\, s', x_3)\|^2\Big).$$

ЧИСЛО ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ[1]

Семенова Т.Ю. (Москва)
station@list.ru

Пусть Γ – связный граф, отрезки Γ_i – ребра графа, $|\Gamma_i| = l_i$, $i = 1...n$, B – число вершин графа. На каждом ребре графа зададим дифференциальное уравнение $u''(x) = F_i(x,u)$, $x \in \Gamma_i$ (*). Непрерывную функцию u, определенную на графе, будем называть решением уравнения (*), если $u_i = u|_{\Gamma_i} \in W_2^1[\Gamma_i]$ – решение соответствующего дифференциального уравнения.

Рассмотрим такое уравнение (*), что F_i – функции класса Липшица по u, то есть для любых a и b выполняются неравенства $|F_i(x,a) - F_i(x,b)| \leqslant C_i|a-b|$.

Рассмотрим линейные функционалы вида $P(u) = \frac{1}{d}\int_I u(t)dt$, где I – отрезок с фиксированной длиной $d \in [0, \min\{l_i\}]$, содержащийся в каком-либо Γ_i. Требуется определить достаточное число функционалов такого вида для различения двух решений u и v уравнения (*), то есть такое M, что существует набор функционалов $P_1...P_M$:

$$P_1(u) = P_1(v), ..., P_M(u) = P_M(v) \Rightarrow u \equiv v.$$

Подробней про определяющие функционалы см. в работе [1].

Обозначим $k_i = \frac{\pi}{C_i}$, $k = \min\{k_i\}$, $K = \max\{k_i\}$.

Теорема. Если $d < \min\{2k, K\}$, то $M = B + \sum_{i=1}^n \left[\frac{l_i}{k_i}\right]$.

Если $K \leqslant d < 2k$, то $M = B + \sum_{i=1}^n \left[\frac{l_i}{k_i}\right] + \min\left[\frac{2\max\{k_i, l_i - d\}}{2k_i - d}\right]$.

Подобная задача для дифференциального уравнения на отрезке рассматривалась в работе автора [2].

Литература

1. Чуешов И.Д. Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // Успехи мат. наук. 53:4 (1998), 77-124.

2. Семенова Т.Ю. Приближение классов Соболева ступенчатыми функциями и единственность решений дифференциальных уравнений вида $u'' = F(x,u,u')$//Известия РАН, 71:1 (2007), 155-186.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00442-а.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, МОНОТОННЫМИ ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Пусть $L_p (0 < p < \infty)$– множество измеримых, 2π– периодических функций таких, что $||f(x)||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^p dx \right)^{1/p} < \infty$.

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \qquad (2)$$

Для $\{a_n\}$ определим первую разность с шагом r, где $r = 1, 2, ...$, следующим образом: $\Delta_{1,r} a_n = a_n - a_{n+r}$, а также вторую разность с шагом $r : \Delta_{2,r} a_n = \Delta_{1,r}(\Delta_{1,r} a_n) = a_n - 2a_{n+r} + a_{n+2r}$.

Будем говорить, что последовательности $\{a_{k+nr}\}$ и $\{a_{r-k+nr}\}$

удовлетворяют условию A_ν, если $\Delta_{1,r}(a_{k+nr} + (-1)^\nu a_{r-k+nr}) \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{1,r}(a_{k+nr} + (-1)^\nu a_{r-k+nr}) \leqslant 0$ для всех n, а также $\Delta_{2,r}(a_{k+nr} + (-1)^{\nu+1} a_{r-k+nr}) \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{2,r}(a_{k+nr} + (-1)^{\nu+1} a_{r-k+nr}) \leqslant 0$ для всех n,

удовлетворяют условию B_ν, если $\Delta_{1,r}(a_{k+nr} + (-1)^\nu a_{r-k+nr}) \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{1,r}(a_{k+nr} + (-1)^\nu a_{r-k+nr}) \leqslant 0$ для всех n, а также $\Delta_{2,r} a_{k+nr} \geqslant 0$ для всех n и $(-1)^{\nu+1} \Delta_{2,r} a_{r-k+nr} \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{2,r} a_{k+nr} \leqslant 0$ для всех n и $(-1)^{\nu+1} \Delta_{2,r} a_{r-k+nr} \leqslant 0$ для всех n;

удовлетворяют условию E_ν, если $\Delta_{1,r} a_{k+nr} \geqslant 0$ для всех n и $(-1)^\nu \cdot \Delta_{1,r} a_{r-k+nr} \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{1,r} a_{k+nr} \leqslant 0$ для всех n и $(-1)^\nu \cdot \Delta_{1,r} a_{r-k+nr} \leqslant 0$ для всех n.

Введем индикаторную функцию, характеризующую выполнимость условия: $\chi_A(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\}) = 1$, если последовательности $\{a_{k+nr}\}$ и $\{a_{r-k+nr}\}$ удовлетворяют условию A и $\chi_A(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\}) = 0$, если $\{a_{k+nr}\}$ и $\{a_{r-k+nr}\}$ не удовлетворяют условию A.

Сформулируем основные утверждения.

Теорема 1. Пусть $0 < p < \infty, r \in N, a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n-коэффициенты ряда (1), а $f(x)$ - сумма этого ряда и $\Delta_{2,r} a_{nr} \geqslant 0$ для всех $n = 0, 1, ...$ или $\Delta_{2,r} a_{nr} \leqslant 0$ для всех $n = 0, 1, ...$,
$\mathrm{sign}\left(1 + [\frac{r}{2}] - [\frac{r+1}{2}]\right) \cdot \Delta_{2,r} a_{(2n+1)\frac{r}{2}} \geqslant 0$ для всех $n = 0, 1, ...$ или

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00169 и № 12-01-00170) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-979-2012-1).

$\operatorname{sign}\bigl(1+[\frac{r}{2}]-[\frac{r+1}{2}]\bigr)\cdot\Delta_{2,r}a_{(2n+1)\frac{r}{2}}\leqslant 0$ для всех $n=0,1,...,$
а при $r>2$ для каждого отдельного значения $k=1,...,[\frac{r-1}{2}]$ последовательности $\{a_{k+nr}\}$ и $\{a_{r-k+nr}\}$ удовлетворяют одному из трех условий $A_1,\ B_1$ или E_1. Тогда ряд (1) почти всюду сходится и

$$||f(x)||_p^p\asymp\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\bigl|\Delta_{1,r}a_{nr}\bigr|^p(n+1)^{2p-2}+\operatorname{sign}\bigl(1+[\tfrac{r}{2}]-[\tfrac{r+1}{2}]\bigr)\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\bigl|\Delta_{1,r}a_{(2n+1)\frac{r}{2}}\bigr|^p(n+1)^{2p-2}+\operatorname{sign}\Bigl[\frac{r-1}{2}\Bigr]\sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]}\Bigl\{\chi_{A_1}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\})\cdot$$
$$(1-\chi_{B_1}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\}))\cdot(1-\chi_{E_1}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\})\}))\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\bigl|\Delta_{1,r}(a_{k+nr}+$$
$$a_{r-k+nr})\bigr|^p\cdot$$
$$\cdot(n+1)^{2p-2}+\bigl|a_{k+nr}-a_{r-k+nr}\bigr|^p(n+1)^{p-2}\Bigr)+\chi_{B_1}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\})\cdot(1-$$
$$\chi_{E_1}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\}))\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\Bigl(\bigl|\Delta_{1,r}a_{k+nr}\bigr|^p+\bigl|\Delta_{1,r}a_{r-k+nr}\bigr|^p\Bigr)(n+1)^{2p-2}+$$
$$\bigl|a_{k+nr}-a_{r-k+nr}\bigr|^p(n+1)^{p-2}\Bigr)+\chi_{E_1}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\})\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\bigl|a_{k+nr}\bigr|^p+\bigl|a_{r-k+nr}\bigr|^p\Bigr)(n+1)^{p-2}\Bigr\}.$$

Теорема 2. Пусть $0<p<\infty, r\in N, a_n\to 0$ при $n\to\infty$, где a_n-коэффициенты ряда (2), а $g(x)$ - сумма этого ряда и
$\Delta_{1,r}a_{nr}\geqslant 0$ для всех $n=1,...$ или $\Delta_{1,r}a_{nr}\leqslant 0$ для всех $n=1,...,$
$\operatorname{sign}\bigl(1+[\frac{r}{2}]-[\frac{r+1}{2}]\bigr)\cdot\Delta_{1,r}a_{(2n+1)\frac{r}{2}}\geqslant 0$ для всех $n=0,1,...$ или
$\operatorname{sign}\bigl(1+[\frac{r}{2}]-[\frac{r+1}{2}]\bigr)\cdot\Delta_{1,r}a_{(2n+1)\frac{r}{2}}\leqslant 0$ для всех $n=0,1,...$
и при $r>2$ для каждого отдельного значения $k=1,...,[\frac{r-1}{2}]$ последовательности $\{a_{k+nr}\}$ и $\{a_{r-k+nr}\}$ удовлетворяют одному из трех условий $A_2,\ B_2$ или E_2. Тогда ряд (2) почти всюду сходится и

$$||g(x)||_p^p\asymp\sum_{n=1}^{\infty}\bigl|a_{nr}\bigr|^p n^{p-2}+\operatorname{sign}\bigl(1+[\tfrac{r}{2}]-[\tfrac{r+1}{2}]\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\bigl|a_{(2n+1)\frac{r}{2}}\bigr|^p(n+$$
$$1)^{p-2}+\operatorname{sign}\Bigl[\frac{r-1}{2}\Bigr]\sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]}\Bigl\{\chi_{A_2}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\})\cdot(1-\chi_{B_2}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\}))\cdot(1-$$
$$\chi_{E_2}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\}))\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\bigl|\Delta_{1,r}(a_{k+nr}-a_{r-k+nr})\bigr|^p(n+1)^{2p-2}+\bigl|a_{k+nr}+$$
$$a_{r-k+nr}\bigr|^p(n+1)^{p-2}\Bigr)+\chi_{B_2}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\})\cdot(1-\chi_{E_2}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\}))\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\Bigl(\bigl|\Delta_{1,r}a_{k+nr}\bigr|^p+\bigl|\Delta_{1,r}a_{r-k+nr}\bigr|^p\Bigr)(n+1)^{2p-2}+\bigl|a_{k+nr}+$$
$$a_{r-k+nr}\bigr|^p(n+1)^{p-2}\Bigr)+\chi_{E_2}(\{a_{k+nr}^{r-k+nr}\})\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\bigl|a_{k+nr}\bigr|^p+\bigl|a_{r-k+nr}\bigr|^p\Bigr)(n+$$
$$1)^{p-2}\Bigr\}.$$

О ДОПУСТИМОСТИ ОДНОЙ ПАРЫ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА

Сокол Д.Г. (Краснодар)
sokol@math.kubsu.ru

Изучаются линейные интегральные операторы Вольтерра

$$\left(\widetilde{K}x\right)(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)\,ds$$

в пространстве асимптотически ω-периодических по мере функций.

Вещественная $n \times n$ - матрица $K(t,s)$ определена всюду в области $-\infty < s \leqslant t < \infty$, при любом $t > 0$ суммируема по s на $[0,t]$ ($K(t,s) \equiv 0$ при $0 < t < s < \infty$), при любом $t \geqslant 0$

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{t+1} \|K(t+h,s) - K(t,s)\|\,ds = 0,$$

и при некотором $\omega > 0$ $K(t+\omega, s+\omega) = K(t,s)$ при всех t и п. в. s.

$x(t) \in BC[0,\infty)$ имеет нулевой предел по мере Лебега μ, если для любых ε и δ найдётся такое T, что $\mu\{t \geqslant T : \|x(t)\|_{R^n} \geqslant \delta\} < \varepsilon$. Пространство *асимптотически ω-периодических* по мере функций является прямой суммой пространства указанных функций и пространства непрерывных периодических функций.

Теорема. *Если пара пространств асимптотически ω-периодических по мере функций допустима для оператора $\widetilde{K}$, то:*

1. $\sup\limits_{t\geqslant 0} \int_0^t \|K(t,s)\|\,ds < \infty$;
2. *функции* $\varphi_k(t) = \int_{-\infty}^0 K(t,s)\exp\left(i\frac{2k\pi}{\omega}s\right)ds$ $(k = 0,1,\ldots,\ i = \sqrt{-1})$ *непрерывны на* $[0,\infty)$ *и имеют нулевой предел по мере;*
3. $\int_0^\omega K(t,s)s\,ds$ *так же имеет нулевой предел по мере.*

Обратно, если выполнены условия 1 – 3, и для любого замкнутого множества $F \subset [0,\infty)$ конечной меры и любого δ существует такое T_0, что $\mu\left\{t \geqslant T_0 : \int_{F\cap[T_0,t]} \|K(t,s)\|\,ds \geqslant \delta\right\} < \infty$, *то указанная пара пространств допустима для оператора $\widetilde{K}$.*

Последнее условие является и необходимым в случае $K(t,s) \geqslant 0$.

ИНТЕГРАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ЗНАНИЙ КАК СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ УЧЕБНОЙ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ

Стародубцева О.О., Марова Н.Ю. (Воронеж)

В настоящее время перед педагогами нашей страны поставлены важнейшие задачи, требующие серьезного подхода, мотивирующие на применение инновационных технологий обучения и воспитания. Суть инициатив президента РФ Д.Медведева, сформулированных в масштабном проекте “Наша новая школа” заключается в создании условий для формирования личности, способной решать серьезные задачи, стремящейся к духовному росту и самообразованию, умеющей творчески мыслить, проявлять инициативу. Все это необходимо для того, чтобы выпускники школы смогли грамотно выбирать будущую жизненную траекторию и в дальнейшем быть успешными в своей профессиональной деятельности.

Многочисленные исследования показывают, что воспитанники школ-интернатов для детей-сирот, попадающие в них из крайне неблагоприятной среды, значительно уступают сверстникам из обычных общеобразовательных школ. Педагогическая запущенность, сниженная учебная мотивация – вот неполный перечень проблем, которые являются насущными для большинства педагогов школ-интернатов. Тем не менее, каждый выпускник должен соответствовать требованиям современного общества, быть социально востребованным.

В своей работе учителя школ-интернатов сталкиваются с неумением школьников применять средства математического аппарата при решении практических задач, в то же время, как показывает практика, современные научные знания требуют интеграции, комплексного подхода. Именно поэтому встает вопрос об интегративном подходе к преподаванию различных школьных предметов.

При интегративном подходе к обучению воспитанников школ-интернатов учащиеся получают необходимые им практико-ориентированные знания, навыки самостоятельного поиска, сбора, анализа информации, учатся умению выдвигать гипотезы, делать выводы. Это активный подход к обучению, способствующий выработке необходимых коммуникативных навыков и подготовке конкурентоспособного специалиста в интегрированном информационном пространстве современного общества.

Интегрированные уроки и внеклассные мероприятия интересны, насыщены полезной информацией, что существенно облегчает восприятие учебного материала, способствует повышению качества образовательного процесса. Именно поэтому применение интегративного подхода при преподавании математики и естественнонаучных дисциплин дает хорошие и стабильные результаты. Интересны сочетания таких предметов, как математика и биология, химия и математика, так как в данном случае происходит формирование целостных представлений об окружающем материальном мире на основе ведущих идей и понятий, появляется качественно новый тип знаний.

Интеграция уроков биологии, химии и математики позволяет совершенно с другой стороны рассмотреть проблему сохранения окружающей среды, в частности, проблему загрязненности атмосферного воздуха.

В данном случае мы обращаем внимание на общеизвестные факты о том, что природа способна к самоочищению, но огромное количество отходов и выбросов от транспорта, промышленных комбинатов, заводов не может нейтрализовать даже природа.

При объяснении данной темы преподаватель биологии приводит как пример математические расчеты, связанные с объемом атмосферного воздуха, количеством кислорода в нем. Масса атмосферы на планете Земля составляет 1,15*10 тонн; а кислород в воздухе - 1,5*10 тонн. За сутки человек потребляет кроме пищи и воды 12 кг воздуха. Чистый воздух – самый главный и незаменимый продукт, им "питаются" все живые организмы. Объясняя учащимся, насколько небезопасна загрязненная атмосфера для человека, какой вред оказывает она на органы дыхания и общее самочувствие, преподаватели рассказывают о летучих ядовитых веществах, в том числе хлоре, аммиаке. Известно, что эти вещества хранятся в закрытых емкостях по причине повышенной опасности. Для более убедительного объяснения материала проводим интеграцию предметов с решением сюжетных задач.

Сюжетная задача "Авария на промышленном объекте":

На промышленном предприятии, где в большом количестве имеются ядовитые и опасные для жизни вещества, произошла утечка из ёмкости с хлором. Необходимо принять экстренные меры по защите населения, определить площадь заражённой зоны. Известно, что в безветренную погоду хлор стелется по земле, распространяясь, он занимает участок поверхности в форме круга. Учитель предлагает ученикам разбиться на группы, чтобы решить обозначенные в задании проблемы. В совместной беседе определяются основные задачи по решению данной проблемы.

Задача 1. Изготовить средства защиты органов дыхания человека (по инструкции) и разработать рекомендации по защите органов дыхания на случай пожара, пыльной бури или других несчастных случаев.

Задача 2. Вычислить площадь заражённой территории, разработать методы оповещения населения об опасности заражения.

Задача 3. Вычислить длину ограждения для заражённой территории. Подсчитать его стоимость.

Учащимся предлагается произвести необходимые расчеты, выполнить практическую работу по теме “Изготовление индивидуальных средств защиты”.

Пример задания для расчета опасной зоны и организации спасательных работ:

Площадь опасной зоны после утечки ядовитого газа равна 6,75 кв. км. Определить радиус опасной для жизни человека зоны.

Чтобы оградить заражённую зону площадью 12 кв. км, принесли 20 мотков верёвки по 500м каждый. Достаточно ли этих верёвок для ограждения опасной зоны?

При выполнении практической работы по изготовлению индивидуальных средств защиты учащимся предлагается разработать чертеж ватно-марлевой повязки, рассчитать количество необходимого материала. Учащиеся с удовольствием выполняют подобные задания, так как они доступны для понимания, имеют практический интерес, могут в дальнейшем пригодиться в реальной жизни.

В заданиях ЕГЭ по математике и химии часто встречаются проценты, при этом в первой части заданий требуется получить только правильный ответ. Неважно, как задача решена – химически или математически. При решении математических задач на составление уравнений и систем уравнений, мы стараемся регулярно использовать таблицы. На этих уроках мы показываем, как составить опорную таблицу при решении задач на смеси, что помогает лучше понять условие и прийти к правильному решению. Такие уроки наиболее эффективны в 10х и 11х классах при подготовке к ЕГЭ. Подобные уроки дают возможность раскрывать взаимосвязи между предметами, сопоставлять различные варианты решения задач, позволяют ученику выявлять свои сильные и слабые стороны.

Важно так же, что при интеграции можно использовать различные формы работы: коллективную, индивидуальную, в парах постоянного состава. Часто интеграцию используем и в проектно-исследовательской деятельности учащихся.

Безусловно то, что правильная интеграция помогает прочными и повысить учебную мотивацию у учащихся школ-интернатов, сделать учебный процесс более интересным, а знания учащихся - прочными и востребованными на практике.

СИСТЕМА АВТОМАТИЗАЦИИ РАБОТЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Сухотерина И.В. (Воронеж)

Объектом рассмотрения является научная конференция. Если знать, как произойдет деление между теми, кто участвовал в конференции в любом году и сроком последующего участия кандидатов данной выборки, то всегда можно выяснить количество участников, которые ожидаются на конференции в любом году.

Выберем информацию о количестве тех, кто участвовал в конференции за последние три года.

Для расчета ожидаемого количества участников в i году используется формула:

$$N_i = \sum_{k=i-10}^{i} N_k P_{i-k}$$

где N_k - количество участников в году k; P_{i-k} - вероятность, того что рассматриваемый кандидат принимал участие в конференции в течение $(i-k)$лет

Для поиска информации об участнике оптимальной по некоторому критерию применяется генетический алгоритм. Поскольку алгоритм построен таким образом, что решения, получаемые в результате кроссовера, не заменяют собой "родителей" (как в традиционном генетическом алгоритме), то такой параметр как вероятность кроссовера - в данном случае не нужен. Вместо него используется параметр, описывающий число брачных пар. Управлять количеством вычислений целевой функции, т.е. количеством генерируемых решений предпочтительнее этим детерминированным параметром.

Поскольку предлагаемый генетический алгоритм отличается от других, разумно было бы условиться сравнивать генетические алгоритмы по "алгоритмо-независимым" признакам. Наибольший интерес представляет задача минимизации числа оценок целевой функции при соблюдении требуемой точности. И именно эту характеристику считается определяющей при вынесении вердикта о том, насколько пригоден или непригоден генетический алгоритм для решения той или иной задачи.

При разработке программного продукта использовались ниже перечисленные средства реализации.

СУБД MySQL была выбрана для управления базой данных. Для проектирования базы данных использовалась программа Power Designer 10.0. В качестве сервера приложений был выбран Apache HTTP Server 2.2.10. Все серверные скрипты web-приложения написаны на языке PHP 5.2.6. Благодаря наличию сотен стандартных функций PHP в состоянии решить практически любую задачу. Широкий выбор возможностей избавляет от необходимости рутинной и непростой работы по подключению сторонних модулей. В качестве клиентских приложений выступают обычные web-браузеры. Из всего множества браузеров были выбраны три наиболее популярных: Internet Explorer, Opera, Mozilla Firefox.

Для построения прогностической модели использовался Microsoft Office Excel 2010.

Литература

1. Гладков Л. А. Генетические алгоритмы/Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 368 с.

КВАНТОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И АФФИННЫЕ ФРЕЙМЫ

Терехин П.А. (Саратов)
terekhinpa@info.sgu.ru

Аффинной системой, порожденной функцией $\varphi(t)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$, называется семейство функций

$$\varphi_{k,j}(t) = \varphi(2^k t - j), \qquad k = 0, 1, \ldots, \quad j = 0, \ldots, 2^k - 1.$$

Если $\varphi \in L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\int_0^1 \varphi(t)\,dt \neq 0$, то аффинная система образует фрейм в пространстве $L^p[0,1]$ в следующем смысле:

$$A\|g\|_q \leqslant \sup_{k\geqslant 0}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}|(g,\varphi_{k,j})|^q\right)^{1/q} \leqslant B\|g\|_q$$

для всех $g \in L^q[0,1]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, где $A = |\int_0^1 \varphi(t)\,dt|$ и $B = \|\varphi\|_p$.

Теорема. *Пусть* $\lambda_k > 0$ *и* $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0$. *Тогда для любой функции* $f \in L^p[0,1]$ *существует семейство целых чисел* $\{m_{k,j}\}$ *такое, что справедливо представление*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=0}^{2^k-1} m_{k,j}\varphi_{k,j}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1} |m_{k,j}|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Как следствие теоремы получаем, что для аффинного фрейма проблема квантования коэффициентов (см. [1]) имеет положительное решение, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $C \geqslant 1$ такие, что для всех $f \in L^p[0,1]$ существует конечный набор целых чисел $\{m_{k,j}\}$, для которого

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2^k-1} \delta m_{k,j}\varphi_{k,j} \right\|_p < \varepsilon, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1} |\delta m_{k,j}|^p\right)^{1/p} \leqslant C\|f\|_p.$$

Литература

1. P.G. Casazza, S.J. Dilworth, E. Odell, Th. Schlumprecht, A. Zsak, *Coefficient quantization for frames in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **208** (2008), 66–86.

ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВОГО ВОЛНОВОДА

Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П. (Ижевск)

chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассматривается оператор $H_\varepsilon = H_{01}\otimes I + I\otimes H_{02} + \varepsilon V(n)$ в $l^2(\mathbf{Z}\times\{1,...,N\})$, где $(H_{01}\varphi)(n) = \varphi(n-1)+\varphi(n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, H_{02} аналогично действует в $l^2(\{1,...,N\}) \cong \mathbf{C}^N$ с учетом налагаемых граничных условий $\varphi(0) = \varphi(N+1) = 0$, $V(n,m) \neq 0$ – вещественная экспоненциально убывающая при $|n| \to \infty$ функция, $\varepsilon > 0$. Существенный спектр оператора H_ε совпадает с объединением подзон

$$\cup_{j=1}^N[-2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}].$$

Положим

$$v_j^{\pm} = \sum_{(n,m)\in\Gamma} (\pm 1)^n \sin^2(\frac{\pi m j}{N+1})V(n,m).$$

Теорема 1. Предположим, что $v_j^+ \neq 0$ для некоторого j. Тогда в окрестности точек $\lambda_{j0}^{\pm} = \pm 2 + 2\cos\frac{\pi j}{N+1}$ (граничных точек подзоны) для всех достаточно малых ε существует единственный квазиуровень (т. е. собственное значение или резонанс) $\lambda_j^{\pm} = \lambda_j^{\pm}(\varepsilon)$ оператора H_ε, аналитически зависящий от ε, для которого справедлива формула

$$\lambda_j^{\pm}(\varepsilon) = \pm 2 + 2\cos\frac{\pi j}{N+1} \pm (\frac{\varepsilon v_j^+}{N+1})^2 + O(\varepsilon^3).$$

Предположим, что в уравнении Липпмана-Швингера выбрана "налетающая волна"вида $\sqrt{2/(N+1)}\sin(\frac{\pi j m}{N+1})e^{ink_j}$, отвечающая j-й подзоне, где k_j связано со спектральным параметром λ равенством $\cos k_j = \lambda - 2\cos(\pi j/(N+1))$. Пусть λ находится в окрестности точки λ_{j0}^+ или точки λ_{j0}^-.

Теорема 2. Предположим, что для всех достаточно малых ε выполнено равенство $k_j = \alpha\varepsilon$ для знака "+" и $k_j = -\pi - \alpha\varepsilon$ для знака "– где α – некоторая константа. Тогда для вероятности отражения справедлива формула

$$P_- = \frac{(v_j^{\pm})^2}{\alpha^2 (N+1)^2 + (v_j^+)^2} + O(\varepsilon).$$

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ткачева С.А., Савченко Г.Б., Савченко Ю.Б. (Воронеж)

Рассмотрим первую краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta'_x u - \alpha(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\alpha(x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f(x', x_n, t), \qquad (1)$$

$$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}),\ x' \in E_{n-1},\ x_n > 0,\ t > 0$$

$$u|_{x_n=0} = 0, \quad u|_{t=+0} = 0. \qquad (2)$$

где $x' \in E_{n-1}, \quad x_n > 0, \quad 0 < t < \infty, \quad \Delta'_x u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}$ - оператор Лапласа по переменной $x' \in E_{n-1}$; $\alpha(x_n)$ - весовая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\alpha(x_n) \in C^2\left(E^+ \setminus \{0\}\right), \quad \alpha(x_n) > 0, \quad x_n > 0, \quad \alpha(+0) = 0;$$

$$\int\limits_0^N \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty, \ \forall N > 0, \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty, \ \forall N > 0.$$

Гладкость решения задачи (1)-(2) устанавливается в терминах весовых пространств Гельдера $C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}(0 < \delta < 1)$ с нормой (см. [1]):

$$\|u\|_{C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^\times(0,\infty)\times(0,T)\right)} =$$
$$= \sum_{j=0}^{2\ell} \sum_{0\leqslant|\nu'|+\nu_n+2\nu_0\leqslant j} \sup_{t\in(0,T)} \sup_{E_{n-1}^\times(0,\infty)} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'}(\alpha D_{x_n})^{\nu_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_o} u\left(x',x_n,t\right)\right|$$
$$+ \sum_{0\leqslant|\nu'|+\nu_n+2\nu_0\leqslant 2\ell} \left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'}(\alpha D_{x_n})^{\nu_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_o} u\right\rangle_{x,\alpha,\left(E_{n-1}^\times(0,\infty)\times(0,T)\right)} +$$
$$\sum_{0\leqslant|\nu'|+\nu_n+2\nu_0\leqslant 2\ell} \left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'}(\alpha D_{x_n})^{\nu_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_o} u\right\rangle_{x,\alpha,\left(E_{n-1}^\times(0,\infty)\times(0,T)\right)}$$

Теорема. Пусть $f(x',x_n,t) \in C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^\times(0,\infty)\times(0,T)\right)$, $(0 < \delta < 1)$ Тогда функция $u(x',x_n,t)$ и ее производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ $\left(\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 u(x',x_n,t)$ принадлежат при каждом фиксированном $t \in (0,T)$ пространству $C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^\times(0,\infty)\times(0,T)\right)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^\times(0,\infty)\times(0,T)\right)} \leqslant c\,\|f\|_{C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^\times(0,\infty)\times(0,T)\right)}.$$

Литература

1. Глушко В.П. Об уравнении теплопроводности с существенно переменным коэффициентом / В.П. Глушко, С.А. Ткачева. – ДАН РФ, т.335, №6, 1996

ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ УПРУГОГО БРУСА ПРИ ИЗГИБЕ

Тынянская Е.В., Огарков В.Б., Бухтоярова К.Е.
(Воронеж)

Рассмотрим задачу поперечного изгиба упругого бруса заданной системой внешних нагрузок [1].

При прямом поперечном изгибе нормальное напряжение в слое бруса с ординатой y имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} \cdot y \tag{1}$$

Касательное напряжение в этом слое находится по такой формуле:

$$\tau = \frac{Q_z}{2J_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{2}$$

В этих формулах:

M_z — заданный изгибающий момент в определенном поперечном сечении; Q_z — момент инерции площади поперечного сечения; h — высота прямоугольного поперечного сечения.

Подставим величину ординаты из формулы (1) в формулу (2):

$$\tau + \frac{Q_z J_z}{2M_z^2}\sigma^2 - \frac{Q_z h^2}{8I_z} = 0 \tag{3}$$

Нормальные и касательные напряжения должны удовлетворять следующим критериям прочности:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma = \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}\right] \leqslant \sigma_{adm} \tag{4}$$

$$\sigma_2 = \frac{(1-m)}{2}\sigma + \frac{(1-m)}{2}\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)} \leqslant \sigma_{adm}; m = \frac{\sigma_{admp}}{\sigma_{admcx}} \tag{5}$$

$$\sigma_3 = \sqrt{(\sigma^2 4\tau^2)} \leqslant \sigma_{adm} \tag{6}$$

$$\sigma_4 = \sqrt{(\sigma^2 + 3\tau^2)} \leqslant \sigma_{adm} \tag{7}$$

Преобразуем соотношение (4)-(7)

$$4\sigma_{adm} \cdot \sigma + \tau^2 - 4\sigma_{adm}^2 = 0 \tag{8}$$

$$m\sigma^2 + (1+m)^2\tau^2 + (1-m)\sigma_{adm}\sigma - \sigma_{adm}^2 = 0 \tag{9}$$

$$\sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma_{adm}^2 = 0 \tag{10}$$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 - \sigma_{adm}^2 = 0 \tag{11}$$

Соотношения (8)-(11) представляют собой кривые второго порядка (эллипс, окружность и пр.).

Для полного расчета на прочность нормальные и касательные напряжения должны одновременно удовлетворять уравнению (3) и неравенствам (4)-(7).

Таким образом, напряжения σ и τ должны находиться на параболе (3) и внутри эллипса и окружности.

Соотношения (8)-(11) подлежат соответствующей классификации по кривой второго порядка [2].

Необходимо просто построить с помощью ЭВМ параболу (3) и эллипс или окружность (8)-(11). Эта парабола с необходимостью должна лежать внутри эллипса и окружности.

Легко найти точки пересечения эллипса и параболы, например, по третьей теории прочности.

$$y^2 + A_y + B = 0; \quad y = \sigma^2; \quad \sigma = \pm\sqrt{\left\{-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{A^2}{4} - B\right]}\right\}} \tag{12}$$

$$A = \frac{\left[1 - \frac{Q_z^2 h^2 J_z}{2Mz^2}\right] M_z^4}{Q_z^2 J_z^2}; \quad B = \frac{\left[\frac{Q_z^2 h^4}{16 J_z^2} - \sigma_{adm}^2\right] M_z^4}{Q_z^2 J_z^2} \tag{13}$$

Касательное напряжение находится по следующей формуле:

$$\tau = \frac{Q_z h^2}{8 J_z} - \frac{Q_z J_z}{2\mu_z^2}\sigma^2 \tag{14}$$

Литература

1. Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. Сопротивление материалов. — М., 1995. — 568 С.

2. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике для инженеров, — М.: Наука, 1970 — 800 С.

К ОБРАТИМОСТИ АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Тюрин В.М. (Липецк)

tuvm@stu.lipetsk.ru

Рассмотрим гильбертово пространство X, $C_+ = C_+(R_+, X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $f : R_+ \to X$ с sup — нормой, $L_+^2 = L^2(R_+^n, X)$ — Лебеговы пространства функций $f : R_+^n \to X$ с обычной нормой. Через $F = F(R_+, X)$ обозначим одно из пространств C_+ или L^2_+. Пространство Соболева $W^m_{2F} = W^m_{2F}(R^n \times R_+, X)$ состоит из функций $U(x,t) \in L^2(R^n \times R_+, X)$, имеющих обобщенную производную $D^\alpha_x(x,t) \in L^2(R^n \times R_+, X)$ и конечную норму

$$\|u\|_{mF} = \| \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha_x(x,t)\|_D\|_F,$$

$(u,v)_0$ — скалярное произведение в X.

Пусть

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + P, P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha(t,x) D^\alpha_x.$$

Коэффициенты A_α в дифференциальном операторе P являются функциями из пространства $C_+(R^n \times R_+, EndX)$, $EndX$ — алгебра линейных ограниченных операторов $A : X \to X$. Дифференциальный оператор P считаем равномерно эллиптическим по $(x,t) \in R^n \times R_+$.

Оператор назовем корректным в пространстве W^m_{2F}, если

$$\|u\|_{0F} \leqslant K\|f\|_{0F}$$

как только u есть обобщенное решение уравнения $Lu = f$, т.е. $(u, L_*\psi)_{0F} = (f,\psi)_{0F}$ для всех $\psi \in W^m_{2F}$. При некоторых предположениях справедлива

Теорема. Оператор L является корректным в пространстве $W^m_{2L^2}$ тогда и только тогда, когда он корректен в пространстве $W^m_{2C_+}$.

Приводится применение приведенной теоремы.

КОГДА ВНЕДИАГОНАЛЬНАЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНАЯ МАТРИЦА ЯВЛЯЕТСЯ МАТРИЦЕЙ ЛЯПУНОВА

Удоденко Н.Н. (Воронеж)

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная вещественная или комплексная $n \times n$-матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ —её собственные значения. Она называется гурвицевой, если $Re\,\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и ляпуновской, если $Re\,\lambda_j \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, причём чисто мнимым собственным собственным значениям отвечают только простые элементарные делители. Роль этих матриц в теории устойчивости определяется тем, что система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \dot{x} = Ax \tag{1}$$

устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда матрица A является ляпуновской (гурвицевой).

Пусть $C = (c_{ij})$ — произвольная вещественная внедиагонально неотрицательная матрица

$$c_{ij} \geqslant 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Основная теорема*Для того, чтобы матрица C была ляпуновской необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$(-C)\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n, \quad p = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

(обобщенные условия Севастьянова-Котелянского) [1-2].

Ранг матрицы C совпадает с её главным рангом

$$rang\, C = \, main\, rangC, \tag{4}$$

причём главным рангом матрицы называется её ранг, посчитанный с помощью главных миноров.

Поясним, что условие (3) даёт необходимые и достаточные условия того, что $sp\, C \leqslant 0$, условие (4) даёт необходимое и достаточное условие того, что корневое и собственное подпространства, отвечающие нулевому собственному значению совпадают.

Отметим, что спектральной абсциссой матрицы A называется число $sp\, A = \max\{Re\, \lambda_j,\, j = 1, 2, \ldots, n\}$.

В заключение, автор выражает благодарность проф. А.И. Перову за постановку задачи.

Литература

1. Севастьянов Б.А. Теория ветвящихся случайных процессов, УМН, 1951, №6, с. 46-99. М. : Мир, 1971. — 350 с.

2. Котелянский Д.М. О некоторых свойствах матриц с положительными элементами. Матем. Сб., 1952, 31(73), с. 497-506.

О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Удоденко Н.Н. (Воронеж)
alg@math.vsu.ru

В статье [1], посвящённой нелинейным системам дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, специальными в качестве мажорант и минорант берутся линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами следующего вида:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$ непрерывны и

$$a_{ij}(t) \geqslant 0 \quad \text{при } i \neq j; \quad A(t+\omega) = A(t). \tag{2}$$

Условие внедиагональной неотрицательности в (2) гарантирует неотрицательность матриканта $U(t)$ на неотрицательной полупрямой: $U(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t < +\infty$ [2, с. 65, с. 199], и, как следствие, неотрицательность матрицы монодромии

$$U(\omega) \geqslant 0. \tag{3}$$

Существование дорожки невырожденности у матрицы $A(t)$ при некотором t_0 (то есть неразложимость $A(t_0)$) обеспечивает положительность матрицы монодромии

$$U(\omega) > 0 \tag{4}$$

и, следовательно, применимость к ней теоремы Перрона [3, с. 354], согласно которой

$$U(\omega)h = \rho h, \quad \rho = \operatorname{spr} U(\omega) > 0, \quad h > 0. \tag{5}$$

Однако последний результат может быть достигнут и при значительно меньших предположениях.

Рассмотрим усреднённую систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}z_j \quad i = 1, \ldots, n; \quad \dot{z} = Cz, \tag{6}$$

где $c_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$;

$$C = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} A(t)\, dt. \tag{7}$$

При этом мы считаем коэффициенты $a_{ij}(t)$ измеримыми и суммируемыми на отрезке $[0, \omega]$.

Теорема (ср. с [4]). *Матрица монодромии $U(\omega)$ системы с периодическими коэффициентами неразложима тогда и только тогда, когда неразложима матрица C.*

При выполнении условий этой теоремы также имеют место соотношения (5), но теперь в силу теоремы Фробениуса [3, с. 335].

Можно отметить, что в условиях этой теоремы матрица монодромии не только неотрицательная и неразложимая, но и примитивная, то есть некоторая её степень есть положительная матрица:

$$U^p(\omega) > 0 \quad (1 < p \leqslant n - 1). \tag{8}$$

Литература

1. Колесов Ю. С. Устойчивость по Ляпунову и уравнения с вогнутыми операторами / Ю. С. Колесов, М. А. Красносельский // ДАН СССР. — 1962. — Т. 145, № 6. — С. 1217—1220.

2. Красносельский М. А. Позитивные линейные системы / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев. — М. : Наука, 1985. — 256 с.

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер.— М. : Наука, 1967.— 576 с.

4. Перов А. И. О двух теоремах М. А. Красносельского / А. И. Перов // Доклады РАН. — 2005. — Т. 402, № 1. — С. 1—4.

К АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ВОЗМУЩЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ускова Н.Б. (Воронеж)

Пусть $L = A - B : D(L) \subset H \to H$, где H — комплексное гильбертово сепарабельное пространство, $D(L)$ — область определения оператора L. Пусть $A : D(L) \subset H \to H$ — нормальный оператор с простыми собственными значениями вида $\lambda_n = (cn)^4 + \beta_n$, причём $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \mathrm{const} n^{-3}$, $n \geqslant 1$, c — константа, а соответствующие собственные векторы $e_n(x)$, $n \geqslant 1$ образуют в H ортонормированный базис. Предположим, что оператор $B : D(L) \subset H \to H$ представим в виде $B = B_0 A^{1/2}$ и оператор B_0 есть оператор из идеала $\sigma_2(H)$ операторов Гильберта–Шмидта.

С помощью метода подобных операторов [1] доказана

Теорема. *Существует такое натуральное число m, что для всех $n > m$*

$$\lambda_n(L) = (cn)^4 + \beta_n - b_{nn}((cn)^4 + \beta_n)^{1/2} - \\ - \sum_{i \neq n} \frac{b_{ni} b_{in} ((ci)^4 + \beta_i)^{1/2} ((cn)^4 + \beta_n)^{1/2}}{c^4(i^4 - n^4) + \beta_i - \beta_n} + \alpha_n,$$

где $\sum |\alpha_n| < \infty$, b_{ij} — элементы матрицы оператора B_0 в базисе из собственных векторов оператора A. Более того,

$$e_n(L)(t) = e_n(t) + \sum_{i \neq n} \frac{b_{in}((cn)^4 + \beta_n)^{1/2}}{c^4(i^4 - n^4) + \beta_i - \beta_n} e_i(t) + \\ + \sum_{i \neq n} \frac{\delta_{in}}{((ci)^4 + \beta_i)^{1/2}} e_i(t),$$

последовательсть δ_{in}, $i \geqslant 1$, $i \neq n$ суммируема.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие. Воронеж. Изд-во Воронежского университета, 1987.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТРЕТЬЕГО ТУРА ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «ИНФОРМАТИКА. ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

Ускова О.Ф., Горбенко О.Д., Шашкин А.И. (Воронеж)

dean@amm.vsu.ru

Девять лет подряд Воронежский государственный университет является базовым вузом организации и проведения третьего тура Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии». Олимпиады проходят в соответствии с приказом Министерства Образования РФ. Проект направлен на развитие творческой активности студентов, ориентацию учащейся молодёжи на решение задач информатизации научных исследований в сфере естественных наук.

Третий тур традиционно проходит в два этапа: отборочный и основной. В отборочном этапе, который проходил в телекоммуникационном режиме, могли принять участие все желащие студенты любых вузов России, любых форм обучения, любых специальностей. Ненулевые решения прислали около 200 студентов различных городов России. Наибольшее количество балов получили Черкасов Дмитрий (Ярославский государственный университет), Чесноков Алексей (Северный арктический федеральный университет), Служаев Евгений (Ивановский государственный университет), Чаднов Павел (Томский государственный университет), Ушаков Станислав, Мещерякова Юлия, Бабкин Сергей (Воронежский государственный университет).

По итогам заочного этапа в основной этап прошли 40 студентов Воронежских вузов и 30 иногородних. Победителями олимпиады стали студенты факультета ПММ ВГУ Бабкин С., Ушаков С., студент Липецкого педагогического университета Фам З., студент Томского государственного университета Чаднов П. Они представлены к награждению президентской денежной премии в рамках государственной программы «Поддержка талантливой молодёжи».

В составлении олимпиадных заданий участвовали выпускники факультета ПММ, победители предшествующих олимпиад, Поляков Андрей Евгеньевич (институт проблем управления, Москва), Якубенко Андрей Павлович (DataArt), Мамонтов Дмитрий Сергеевич (MuranoSoft), студенты факультета ПММ ВГУ Борискин Александр, Сушков Виталий [1].

Девятая Всероссийская студенческая олимпиада «Информатика. Программирование. Информационные технологии» проходила при организационной и спонсорской поддержке ведущих компьютерных организаций Рет, Релэкс, DataArt, ИнформСвязь Черноземье, Сименс, MuranoSoft, Инетэра, Mair.ru group, Мир ПК Открытые системы, Парус.

Литература

1. Горбенко О.Д. / О.Д. Горбенко, О.Ф. Ускова, А.Е. Поляков, Д.С. Мамонтов, В.А. Сушков, А. Борискин, А.П. Якубенко. Задания Всероссийских студенческих олимпиад по информатике и современное математическое образование. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2012 // Материалы международной конференции. Воронеж: ИПЦ ВГУ, – 224с. С.44–47.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ [1]

Федосеев А.Е. (Саратов)
fedoseev_ ae@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу L вида

$$\ell y = -y'' + \Big(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x)\Big)y = \lambda y, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$U(y) := y(0) = 0$$

на полуоси с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя в точке $a > 0$, где $q(x)$ - комплекснозначная функция, ν_0 - комплексное число. Положим $\lambda = \rho^2$, $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и, для определенности, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, \ldots$. Предположим, что $q(x)|x-a|^{\min(0,1-2Re\,\nu)} \in L(0,T)$ при некотором $T > a$ и $q(x) \in L(T,\infty)$. Задача L исследуется при дополнительном *условии склейки* решений около особой точки $x = a$, порождаемым матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, которая связывает решения уравнения (1) в окрестности особой точки (см. [1]).

Пусть $\Phi(x,\lambda)$ - решение уравнения (1) при условиях

$$U(\Phi) = 1, \quad \Phi(x,\lambda) = O(\exp(i\rho x)), x \to \infty, \rho \in \{\rho : \ \operatorname{Im}\rho \geqslant 0, \ \rho \neq 0\},$$

а также удовлетворяющее *условию склейки.* Функция $M(\lambda) := \Phi'(0,\lambda)$ называется *функцией Вейля* для L.

Обратная задача. Задана функция Вейля $M(\lambda)$, построить $q(x)$.

Теорема 1. *Функция $M(\lambda)$ однозначно определяет $q(x)$.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [2]. Используя этот метод, была построена конструктивная процедура решения обратной задачи. Получены также необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Литература

1. *Юрко В. А.* О восстановлении сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения, т. 38, N 5 (2002), С. 645- 659. Мат. заметки. 1996. Т. 60(1). С. 134–136.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

ТЕОРЕМА О РАСТЯЖЕНИИ КОНУСА М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО И ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ВАЖЕВСКОГО

Фетисова А.В. (Воронеж)
alex_rk07@mail.ru

В книге [1] приведены две теоремы существования ограниченных решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые были доказаны конусными методами с привлечением топологических соображений, облечённых в теоремы о сжатии и растяжении конуса. Основную нагрузку здесь несли мажоранты и миноранты, которые записывались в виде линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, матрицы которых обладали свойством внедиагональной неотрицательности (положительности).

В статье [2] упомянутым выше теоремам „придана заложенная в них общность“ — в качестве мажорант и минорант в них фигурируют линейные системы с произвольными ограниченными коэффициентами, причём налагаемые на них требования таковы, что в периодическом случае они полностью совпадают с требованиями теорем М.А. Красносельского, о которых мы говорили выше.

При попытке написать статью на эту тему с подробными доказательствами всех промежуточных выкладок обнаружилось, что в случае неиспользования теоремы о растяжении конуса её можно заменить рассуждениями из топологического принципа Важевского [3].

Литература

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.- М: Наука, 1966.-332с.

2. Перов А.И. О двух теоремах М.А. Красносельского // Докл. РАН-2005. Т.402, №1.-с.1-4.

3. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М: Мир, 1964.-480с.

ОБ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ[1]

Филиновский А.В. (Москва)
flnv@yandex.ru

Рассмотрим краевую задачу Робена на собственные значения с параметром в граничном условии

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad -\infty < \alpha < +\infty, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей Γ, где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ. Пусть $\lambda_1(\alpha)$ — первое собственное значение задачи (1), (2), u_α — соответствующая собственная функция.

Теорема 1. *Функция $\lambda_1(\alpha)$ имеет следующие свойства:*

i) λ_1 монотонно возрастает и удовлетворяет неравенству $\lambda_1 < \lambda_1^{(d)}$, где $\lambda_1^{(d)}$ — первое собственное значение задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω;

ii) λ_1 выпукла вверх, то есть $\lambda_1(\beta\alpha_1 + (1-\beta)\alpha_2) \geqslant \beta\lambda_1(\alpha_1) + (1-\beta)\lambda_1(\alpha_2)$, $0 < \beta < 1$;

iii) λ_1 дифференцируема и $\lambda_1'(\alpha) = \frac{\int_\Gamma u_\alpha^2\, ds}{\int_\Omega u_\alpha^2\, dx} > 0$.

Теорема 2. *При $n \geqslant 2$ и $\alpha > 0$ справедливо следующее неравенство:*

$$\lambda_1(\alpha) \geqslant \left(\frac{1}{\lambda_1^{(d)}} + \frac{1}{\alpha q_1} \right)^{-1}, \tag{3}$$

где q_1 — первое собственное значение задачи Стеклова

$$\Delta^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0, \quad \Delta u - q\, \partial u / \partial \nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Теорема 2 обобщает на случай произвольного n оценку (3), полученную в работе [1] для $n = 2$.

Литература

1. Sperb R., *Untere und obere schranken für den tiefsten eigenwert elastisch gestützten membran*, Zeitschrift Angew. Math. Phys. 23 (1972), no. 2, 231–244.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00989.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ C(D)

Фролова Е.В. (Липецк)
lsnn48@mail.ru

Ряд задач математической физики приводится к уравнениям с частными интегралами вида

$$x = Kx + f, \tag{1}$$

где $K = L+M+N$, операторы L, M, N определяются равенствами $(Lx)(t,s) = \int_a^{+\infty} l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau,\ (Mx)(t,s) = \int_c^{+\infty} m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$

$$(Nx)(t,s) = \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau;$$

$t,\tau\in[a,+\infty)$, $s,\sigma\in[c,+\infty)$, l,m,n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. В заметке изучаются достаточные условия фредгольмовости уравнения (1) в пространстве $C(D) = C([a,+\infty)\times[c,+\infty))$ — равномерно непрерывных и ограниченных на D функций.

Пусть $\Omega \in \big\{[a,+\infty),[c,+\infty),D\big\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется L^1-непрерывной, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot)-u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ при $|t_1-t_2|, |s_1-s_2| < \delta$, и L^1- ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant U < \infty$.

Пусть $L = \bar{L}+\tilde{L},\ M = \bar{M}+\tilde{M}$, где $\bar{L},\ \bar{M},\ \tilde{L},\ \tilde{M}$ — операторы L и M с ядрами $\bar{l} = l-\tilde{l}$, $\bar{m} = m-\tilde{m}$, $\tilde{l}(t,s,\tau) = \sum_{i=1}^{p} l_i(t,s)a_i(\tau)$, $\tilde{m}(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^{q} m_j(t,s)b_j(\sigma)$ соответственно $||\bar{L}||, ||\bar{M}|| < \varepsilon < 1$; l_i $(i = 1,\ldots,p)$, m_j $(j = 1,\ldots,q)$, — равномерно непрерывные и ограниченные функции; a_i $(i = 1,\ldots,p)$, b_j $(j = 1,\ldots,q)$, c_k $(k = 1,\ldots,r)$ суммируемые функции, а системы функций $\{a_i \mid i = 1,\ldots,p\}$, $\{b_j \mid j = 1,\ldots,q\}$ ортонормированы.

Через $D_1(s)$ и $D_2(t)$ обозначим определители $D_1(s) = |\delta_{ik} - \mu_{ik}(s)|$, $D_2(t) = |\delta_{jl} - \nu_{jl}(t)|$, где $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\mu_{ik}(s) = \int_a^{+\infty} a_i(\tau)\Big(l_k(\tau,s) + \int_a^{+\infty} r_1(\tau,s,u)l_k(u,s)\,du\Big)\,d\tau$ $(i,k = 1,\ldots,p)$, $\delta_{jl} = 1$ при $j = l$, $\delta_{jl} = 0$ при $j \neq l$, $\nu_{jl}(t) = \int_c^{+\infty} b_j(\sigma)\,(m_l(t,\sigma) + \int_c^{+\infty} r_2(t,\sigma,v)\,m_l(t,v)dv)\,d\sigma$ $(j,l = 1,\ldots,q)$, r_1, r_2 — резольвентные ядра операторов $\bar{L}$ и $\bar{M}$ соответственно.

Теорема. Пусть ядра l,m,n - L^1-непрерывны и L^1-ограничены. Тогда оператор K действует в $C(D)$. Если, кроме того $|D_1(s)| \geqslant \alpha > 0$, $|D_2(t)| \geqslant \beta > 0$, то фредгольмовы уравнения $x = Lx+f$, $x = Mx+f$ и (1).

МЕТОД КРИТИЧЕСКИХ ПОДСИСТЕМ И СЕТИ ФОМЕНКО ДЛЯ ВОЛЧКА В ДВОЙНОМ ПОЛЕ

Харламов М.П., Рябов П.Е. (Волгоград, Москва)
mharlamov@vags.ru, orelryabov@mail.ru

Классическая задача Ковалевской в динамике твердого тела – одна из немногих интегрируемых систем с двумя степенями свободы, которая допускает обобщение на неприводимое семейство с тремя степенями свободы — случай интегрируемости А. Г. Реймана – М. А. Семенова-Тян-Шанского (1987). В работах М. П. Харламова (2004–2005) построена стратификация шестимерного фазового пространства обобщенного волчка Ковалевской рангом отображения момента на основе нахождения всех критических подсистем и сформулирована задача описания аналога инварианта Фоменко на изоэнергетических уровнях для волчка Ковалевской в двойном поле. Общее определение топологического инварианта для интегрируемых гамильтоновых систем со многими степенями свободы приводится в работах А. Т. Фоменко (1988-1991).

В докладе на примерах классической задачи Ковалевской и неприводимого волчка Ковалевской в двойном поле иллюстрируются возможные подходы к описанию инвариантов Фоменко в виде сетевых диаграмм на уровнях интеграла энергии. При этом эффективным методом оказывается классификация, основанная на анализе критических подсистем.

Представлены различные аспекты метода критических подсистем, позволяющие решать целый ряд задач классификации бифуркационных диаграмм ограничений интегральных отображений на уровни заданных первых интегралов, параметрической классификации бифуркаций, атомов и молекул, определяющих фазовую топологию систем.

Для волчка в двойном поле представлен полный список значений топологического инварианта в виде девятнадцати типов сетевых диаграмм на пятимерных изоэнергетических уровнях.

ПРИМЕНЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПОДСИСТЕМ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ДИАГРАММ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Харламов М.П., Харламова И.И., Шведов Е.Г.
(Волгоград)
mharlamov@vags.ru

Одним из результатов метода критических подсистем, излагаемого в сообщении П.Е. Рябова, М.П. Харламова на настоящей конференции, является теорема о построении множеств, классифицирующих в пространстве параметров бифуркационные диаграммы ограничения интегрального отображения многомерной интегрируемой гамильтоновой системы на уровни одного из интегралов.

Пусть система с n степенями свободы зависит от набора параметров $c \in \mathbf{R}^k$, а в интегральном отображении F выбрана некоторая компонента – первый интеграл Q (константа q). Требуется найти множество в пространстве (q, c), разделяющее виды бифуркационных диаграмм отображений-ограничений

$$F_q(c) = F|_{Q^{-1}(q)} : Q^{-1}(q) \to \mathbf{R}^{n-1} \qquad \text{(A)}$$

Пусть $\{D_i(c)\}$ — диаграммы критических подсистем M_i. Тогда, очевидно, Q есть вполне определенная функция на каждой D_i. При разумных предположениях D_i будут стратифицированными многообразиями размерности «число степеней свободы M_i минус один».

Предложение. *Разделяющее множество для бифуркационных диаграмм отображений* (A) *есть объединение графиков критических значений функции Q на всех D_i как функций от $c \in \mathbf{R}^k$.*

В качестве интеграла Q выбирают циклический интеграл для систем с симметрией или интеграл энергии для неприводимых систем. В докладе приводится результат применения данного метода для классификации различных бифуркационных диаграмм семейства интегрируемых гиростатов типа Ковалевской (гиростата Ковалевской – Яхья, волчка и гиростата Реймана – Семенова-Тян-Шанского).

МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ПО ЗАМКНУТОЙ ЦЕПОЧКЕ СТАНЦИЙ

Хачатрян Н.К. (Москва)
nerses@cemi.rssi.ru

Рассматривается модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций, которая описывается следующей системой дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \alpha z_N - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \quad t \in [0, +\infty), & (1) \\ \dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), i = 2, .., N-1, t \in [0, +\infty), & (2) \\ \dot{z}_N(t) = \alpha z_{N-1} - 2\alpha z_N + \alpha z_1 + \varphi(z_N), \quad t \in [0, +\infty), & (3) \\ z_i(t) = z_{i+1}(t+\tau), \quad i = 1, ..., N-1, \quad t \in [0, +\infty), & (4) \\ z_N(t) = z_1(t+\tau), \quad t \in [0, +\infty). & (5) \end{cases}$$

Здесь $z_n(t)$ - объем грузов, находящихся на станции с номером n в момент времени t. Предполагается, что грузопоток осуществляется с помощью двух технологий. Норматив α определяются первой технологией, описывающей взаимодействие соседних станций. Функция $\varphi(.)$ описывает вторую технологию, обеспечивающую дозагрузку станций и учитывающую ограниченность пропускной способности станций. Она обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, 0]$ тождественно равна 0, на интервале $(0, x_{opt})$ является возрастающей, в точке x_{opt} принимает максимальное значение, на полупрямой
$(x_{opt}, +\infty)$ является убывающей, в точке Δ принимает нулевое значение, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейной. Условия (4)-(5) определяет систему контроля. Исследованы решения системы (1)-(5) и определена область глобальной устойчивости стацинарного решения.

Литература

1. Хачатрян Н.К. О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. - 2003. - N3. - С. 137-149.

2. L.A. Beklaryan, N.K. Khachatryan. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional differential equations. - 2006. - V. 13, N. 2. - P. 125-155.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗНОМАСШТАБНЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ С КОСМИЧЕСКИМИ СКОРОСТЯМИ[1]

Хорев И.Е., Захаров В.М., Ярош В.В. (Томск)
khorev@main.tusur.ru

Обсуждаются вопросы теоретических исследований модернизированным методом конечных элементов высокоскоростного взаимодействия отдельных ударников и их группы с преградами и конструкциями с космическими скоростями.

Разработана физико-математическая модель поведения различных материалов (металлов, сплавов и керамик), подверженных интенсивным ударным нагрузкам. Она включает кинетическую модель разрушения материалов в волнах разрежения активного типа и экспериментальные зависимости прочностных характеристик от температуры и пористости. В общем случае разработанная математическая модель тел при ударном взаимодействии в пространственной постановке описывается сжимаемой упруго-пластической средой. Поведение такой среды при динамических нагрузках характеризуется уравнением состояния, модулем сдвига, динамическим пределом текучести и константами кинетической модели разрушения. Последняя описывает накопление, развитие и эволюцию микроповреждений, которые непрерывно изменяют свойства материала и вызывают релаксацию напряжений. В качестве меры разрушения взят удельный объём трещин. Изолинии удельного объёма трещин показывают степень разрушения материала в волнах разрежения, а градиент удельного объёма трещин показывает направление движения магистральной откольной трещины [1].

На основе этой модели, алгоритмов и методик создан программный комплекс для компьютерного моделирования процессов ударного деформирования и разрушения преград и конструкций, в осесимметричной, плоской и трехмерной постановках [2].

Для численного моделирования широкодиапазонного поведения различных материалов (металлов, сплавов и керамик) использовался метод конечных элементов, который хорошо зарекомендовал себя при решении пространственных задач высокоскоростного взаимодействия различных тел.

Проведены систематические параметрические исследования

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-08-00398).

различных задач итоговых результатов высокоскоростного соударения разномасштабных твёрдых тел. Математически описаны обнаруженные новые физические явления при пробитии преград конечной толщины, слоистых, экранированных и разнесённых в пространстве конструкций при нормальном и косом столкновении, включая наличие у ударников углов нутации. Изучены физические особенности развития откольных повреждений в монолитных, слоистых и разнесённых конструкциях и влияние откольно - сдвиговых повреждений на итоговую суммарную толщину пробития разнесённой конструкции.

Достоверность проведенных исследований подтверждена сравнением результатов численных расчетов по моделированию высокоскоростного взаимодействия с экспериментальными данными по удару по нормали и под углом в широком диапазоне изменения начальных условий, показавшим хорошее совпадение с экспериментальными результатами [3].

В расчётах использовался суперкомпьютер СКИФ CYBERIA (инв. № 0400018193) Томского межвузовского центра ТГУ.

Литература

1. Хорев И.Е. Физическое и математическое моделирование разрушения материалов и конструкций по анализу предразрушения соударяющихся тел. // Химическая физика, 2002, т. 21, № 9, с 17 - 21.

2. Хорев И.Е., Зелепугин С.А., Коняев А.А., Сидоров В.Н., Фортов В.Е. Разрушение преград группой высокоскоростных тел. // Доклады РАН, 1999, т. 369, № 4, с. 481-485.

3. Захаров В.М., Хорев И.Е. Экспериментальное исследование особенностей проникания высокопрочных ударников в преграды. Современная баллистика и смежные вопросы механики: Сборник материалов научной конференции. Томск: Томский государственный университет, 2010, с. 215 - 216.

УТОЧНЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Хромов А.П. (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

На отрезке $[0,1]$ изучается краевая задача для системы Дирака

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \quad y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x), \quad (1)$$

$$y_1(0) = y_1(1), \quad y_2(0) = y_2(1). \quad (2)$$

Предполагаем, что $q_j \in C[0,1]$ ($q_j(x)$ — комплекснозначные). В отличие от случая $q_j \in C^1[0,1]$ здесь приходится сталкиваться со значительными трудностями. Тем не менее, и в недифференцируемом случае достигнуты значительные успехи (см. [1]-[3]). Мы получим уточненные асимптотические формулы для собственных значений.

Если выполнить замену $y_1(x) = e^{\lambda x} z_1(x)$, $y_2(x) = e^{-\lambda x} z_2(x)$, то система (1) эквивалентна системе

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t)\, dt, \quad (3)$$

$$z_2(x) = c_2 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t)\, dt, \quad (4)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Пусть $(z_{11}(x), z_{21}(x))^T$ (T — знак транспонирования) решение (3)-(4) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Тогда, подставляя (4) в (3), получим

$$z_{11}(x) = 1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\, dt \int_0^t e^{2\lambda \tau} q_1(\tau) z_{11}(\tau)\, d\tau. \quad (5)$$

Лемма 1. *Для решения $z_{11}(x)$ уравнения (5) имеет место формула*

$$z_{11}(x) = 1 + \int_0^x e^{-2\lambda \xi} K_{11}(x,\xi)\, d\xi, \quad (6)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270)

где $K_{11}(x,\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{11,n}(x,\xi)$,

$$K_{11,n}(x,\xi) = \int\limits_0^x q_2(t_1)\,dt_1 \int\limits_0^x \varepsilon(t_1,t_2)q_1(t_2)\,dt_2 \cdots$$
$$\cdots \int\limits_0^x \varepsilon(t_{2n-3},t_{2n-2})q_1(t_{2n-2})\,dt_{2n-2} \int\limits_0^x \varepsilon(t_{2n-2},t_{2n-1})\times$$
$$\times\varepsilon(\xi,t_{2n}(\xi)+\xi-t_{2n-1})\varepsilon(t_{2n}(\xi)+\xi,\xi)q_2(t_{2n-1})q_1(t_{2n}(\xi))\,dt_{2n-1},$$

$\xi(x,t) = 1$ *при* $t \leqslant x$, $\xi(x,t) = 0$ *при* $t > x$, $t_{2n}(\xi) = t_1 - t_2 + t_3 - \cdots + t_{2n-1} - \xi$, $K_{11}(x,\xi)$ *не зависит от* λ.

Формула (6) получается путем решения уравнения Вольтерра (5) методом последовательных подстановок, при этом в каждом члене получающегося ряда произведения экспонент приводим к одной экспоненте. Для $K_{11,n}(x,\xi)$ имеет место оценка

$$|K_{11,n}(x,\xi)| \leqslant (M_1M_2)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!},$$

где $M_j = \max\limits_x |q_j(x)|$.

Лемма 2. *Для* $z_{21}(x)$ *имеет место формула*

$$z_{11}(x) = \int\limits_0^x e^{2\lambda\xi} K_{21}(x,\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

где $K_{21}(x,\xi) = q_1(\xi) + \int\limits_\xi^x q_1(\tau)K_{11}(\tau,\tau-\xi)\,d\tau$.

Формула (7) получается подстановкой (6) в (4) при $c_2 = 0$. Обозначим $(z_{12}(x), z_{22}(x))^T$ — решение (3)-(4) при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Лемма 3. *Имеют место формулы*

$$z_{12}(x) = \int\limits_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{12}(x,\xi)\,d\xi, \quad z_{22}(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{2\lambda\xi} K_{22}(x,\xi)\,d\xi,$$

где K_{22} *получается из* K_{11}, *меняя* q_1 *на* q_2, q_2 *на* q_1, *а* K_{12} *— из* K_{21}, *меняя* q_1 *на* q_2 *и* K_{11} *на* K_{22}.

Уравнение для собственных значений задачи (1)-(2) имеет вид:

$$e^{2\lambda} - g_1(\lambda)e^{\lambda} + g_2(\lambda) = 0,$$

где $g_1(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + z_{11}(1)z_{21}(1) - z_{12}(1)z_{21}(1))z_{11}^{-1}(1)$,
$g_2(\lambda) = z_{22}(1)z_{11}^{-1}(1)$.

Будем обозначать одним и тем же α_n произвольные числа, лишь бы $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$; через β_n такие α_n, которые можно точно вычислить. Обозначим, далее, $\omega_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \beta_n\varepsilon_n^2 + \beta_n\varepsilon_n^3$, где $\varepsilon_n \to 0$.

Имеем при $\lambda = \lambda_n = 2n\pi i + \varepsilon_n$:

$$z_{11}(1) = 1 + \int_0^1 e^{-4\pi ni\xi} \left(1 - 2\xi\varepsilon_n + \frac{(2\xi\varepsilon_n)^2}{2!} - \frac{(2\xi\varepsilon_n)^3}{3!}\right) K_{11}(1,\xi)\,d\xi + \\ + O(\varepsilon_n^4) = 1 + \omega_n + O(\varepsilon_n^4).$$

Лемма 4. *При $\lambda = \lambda_n$ имеем $z_{ij}(1) = \delta_{ij} + \omega_n + O(\varepsilon_n^4)$, где δ_{ij} — символ Кронекера ($i, j = 1, 2$).*

Лемма 5. *При $\lambda = \lambda_n$ имеем $g_j(\lambda) = 1 + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4)$, $j = 1, 2$.*

Число λ является собственным значением задачи (1)-(2), тогда и только тогда, когда оно является корнем одной из функций $L_\pm(\lambda) = e^\lambda - g_1(\lambda) \mp \sqrt{g_3(\lambda)}$, где $g_3(\lambda) = g_1^2(\lambda) - g_2(\lambda)$. Из [4] следует, что при больших $|n|$ в каждой окрестности $|2n\pi i - \lambda| < \delta$ находятся два собственных значения, и их будем обозначать λ_n^+ (λ_n^-), если они являются корнями $L_+(\lambda)$ ($L_-(\lambda)$). Вне указанных окрестностей может находится лишь конечное число собственных значений.

Теорема 1. *При больших $|n|$ имеют место асимптотические формулы $\lambda_n^\pm = 2n\pi i \pm \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \alpha_n$.*

Теорема 2. *Если для некоторого бесконечного множества N собственных значений λ_n $g_3(\lambda_n) = 0$, то достаточно большие по модулю $\lambda_n \in N$ двукратны и справедлива асимптотика $\lambda_n = 2n\pi i + \beta_n + \alpha_n^2$.*

1. *P.Djakov, B.Mityagin* // Math. Nachr. 283:3 (2010), p. 443-462.

2. *Джаков П.В., Митягин Б.С.* // УМН. 2006. Т. 61. № 4. С. 77-182.

3. *Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О.* // Изв. РАН. Серия матем. 2011. Т. 75. № 3. С.3-28.

4. *Бурлуцкая М.Ш.* // Настоящий сборник.

БАЗИС СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ДУНКЛА НА ПРЯМОЙ[1]

Хэкало С.П., Мещеряков В.В. (Коломна)

khekalo@mail.ru, metcherykov@mail.ru

Дифференциально-разностные операторы Дункла играют в современной математической физике большое значение (см. [1] и цитированную там литературу).

В работах [2] и [3] методом неопределенных коэффициентов найдены аналитические представители семейства собственных функций операторов Дункла $\nabla = \frac{d}{dx} - \frac{k}{x}\hat{s}$. Здесь $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $\hat{s}$ — оператор отражения ($\hat{s}[f](x) = f(-x)$).

Введем в рассмотрение функции

$$\psi_1^{\operatorname{sgn}(-1)^k}(x) = x^{(-1)^k k}\left(\mathcal{J}_{(-1)^k k-\frac{1}{2}}(x) + \frac{x}{2(-1)^k k+1}\mathcal{J}_{(-1)^k k+\frac{1}{2}}(x)\right),$$

где $\mathcal{J}_\gamma(x)$ — ограничение функции Бесселя на мнимую ось.

На основе метода k-калибровочно эквивалентных операторов [4] установлена

Теорема. *Пространство собственных функций оператора* ∇ *двумерно. Любая собственная функция с единичным собственным значением имеет вид*

$$\psi_1(x) = \alpha \operatorname{sgn}^{k+1}(x)\psi_1^-(x) + \beta \operatorname{sgn}^k(x)\psi_1^+(x),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Следствие. *Функция* $\psi_\lambda(x) = \psi_1(\lambda x)$ *является собственной функцией оператора* ∇ *с собственным значением* λ.

Литература

[1] Heckman, G.J., A remark on the Dunkl differential-difference operators. In: Barker, W., Sally, P. (eds.) Harmonic analysis on reductive groups. Progress in Math. 101, Birkhäuser, 1991. pp. 181 – 191.

[2] Rösler M. Generalized hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, Comm. Math. Phys. 192 (1998), 519–542.

[3] Мещеряков В.В., Хэкало С.П. Собственные функции рационального оператора Дункла на $\mathbb{R}$// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 2–7 июля 2010 г. — М: МИАН, 2010. С. 133.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №12-01-00256.

[4] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость//УМН, №6, 1994, с. 8–78.

ОБ АБСТРАКТНОМ МНОЖЕСТВЕ ДОСТИЖИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

chavnn@mail.ru

Определение. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^s$ *– ограниченная область. Непрерывную вектор-функцию* $F(u) : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^m$ *будем называть* ***экстремальной на области*** Ω, *если* $\forall u \in \partial\Omega \ \exists \widetilde{u} \in \Omega$: $F(u) = F(\widetilde{u})$.

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbf{N}$ – заданные числа, $s \geqslant m$; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое ограниченное множество, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Pi)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\Pi)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Pi)$ лебеговы пространства с индексами суммируемости из $[1; +\infty)$; $\mathcal{D} = \Big\{u \in \mathcal{U}^s : \ u(t) \in \overline{\Omega(t)}$ для п.в. $t \in \Pi\Big\}$, где $\Omega(t) \subset \mathbf{R}^s$ – ограниченная выпуклая область такая, что многозначное отображение $Q(t) = \overline{\Omega(t)}$, $t \in \Pi$, измеримо или хотя бы слабо измеримо; $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – заданный ЛОО; $\theta \in \mathcal{X}^\ell$; $f(t, x, u) : \Pi \times \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – заданная функция, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная по $\{x, u\} \in \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s$ и такая, что: $f\Big(., x(.), u(.)\Big) \in \mathcal{Z}^m \ \forall\, x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$; для п.в. $t \in \Pi$ и всех $x \in \mathbf{R}^n$ вектор-функция $f(t, x, .)$ экстремальна на области $\Omega(t)$; $\forall j = \overline{1, m}$ имеем: $f_j(t, x, u) = \varphi_j(t, x)\, \Psi_j\big(\psi_j(t, u)\big)$, где $\varphi_j(t, x)$ – неотрицательная функция, вогнутая по x; $\Psi_j(\xi) : \mathbf{R} \overset{\mathrm{sur}}{\to} [0; \gamma_j]$ – непрерывная функция, обратное отображение которой обладает для всякого $\eta \in \mathbf{R}$ непрерывной однозначной ветвью $\Psi_j^{(\eta)} : [0; \gamma_j] \to \mathbf{R}$, принимающей значение η; при п.в. $t \in \Pi$ отображение $\psi(t, .) : \overline{\Omega(t)} \to \mathbf{R}$ непрерывно дифференцируемо, причем $\operatorname{rank} \psi'_u(t, u) = m$ для всех $u \in \Omega(t)$. Предположим, что уравнение (см. [1])

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f(., x(.), u(.))\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{1}$$

имеет, и притом единственное, решение $x = x[u] \in \mathcal{X}^\ell \ \forall u \in \mathcal{D}$, и $\exists$ $x_* \in \mathcal{X}$, $u_* \in \mathcal{U}$: $|x[u]| \leqslant x_*$, $|u| \leqslant u_* \ \forall u \in \mathcal{D}$. Тогда справедлива

[1] Поддержка Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными вузами (шифр заявки 1.1907.2011) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2009-2013), проект НК-13П(9).

Теорема 1. *Абстрактное множество достижимости* $\Xi \equiv \Big\{\xi \in \mathcal{X}^\ell \,|\, \exists\, u \in \mathcal{D} : x[u] = \xi\Big\}$ *выпукло.*

Литература

1. А.В. Чернов // Изв. вузов. Математика. 2012, № 3. С. 62–73.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ КОШИ-БУНЯКОВСКОГО И ИХ ОБОБЩЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Четвертнова Т.В. (Воронеж)

Неравенство Коши–Буняковского является одним из самых полезных в различных разделах математики и прикладных задачах [1-4]. Но его использование не ограничивается только высшей математикой. Много самых простых и привычных неравенств в школьной математике или факультативных курсах также следуют из неравенства Коши–Буняковского. Например:

$$\sin x = 1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x \Rightarrow |\sin x| \leqslant 1;$$

$$\cos x = 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x \Rightarrow |\cos x| \leqslant 1;$$

$$|\sin x + \cos x| = |1 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x| \leqslant \sqrt{2};$$

$$\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{x} \leqslant x + y \Rightarrow \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2};$$

$$e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}} \leqslant e^x + e^{-x} \Rightarrow \operatorname{ch} x \geqslant 1.$$

В докладе приводятся примеры использования подобных неравенств в школьном курсе.

Литература

1. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е, Полиа Г. Неравенства.—М.: ИЛ, 1948.—456 С.

2. Беккенбах Э., Беллман. Р. Неравенства.—М.: Мир, 1965 (1 изд 1961 г.).—276 с.

3. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Classical and new inequalities in analysis.—Kluwer, 1993.—740 p.

4. Steele J. M. The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.—Cambridge University Press, 2004.—306 p.

5. Dragomir S. S. A Survey on Cauchy–Buniakowsky–Schwartz Type Discrete Inequalities.—RGMIA monographs, 2003.—214 p.

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

Шамолин М.В. (Москва)
shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию некоторой пространственной задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением [1–3], в которой пришлось столкнуться с нахождением первых интегралов динамической части уравнений движения, обладающими исключительными свойствами. Данные интегралы выражались через конечную комбинацию элементарных функций, несмотря на наличие в фазовом пространстве системы отталкивающих и притягивающих предельных множеств. В работе предъявляется новый случаи интегрируемости в задаче о пространственном движении твердого тела при наличии неконсервативного момента сил. При этом, в отличие от некоторых предыдущих работ [4–6], при построении неконсервативного силового поля воздействия среды на тело учитывается линейная зависимость данного поля от угловой скорости, несмотря на то, что само ее введение в компоненты такого поля априори не очевидно.

Литература

1. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.

2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.

3. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопро-тивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механи-ка. – 1989. – № 3. – С. 51–54.

4. Шамолин М.В. Об интегрируемом случае в пространственной ди-намике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 2. – С. 65–68.

5. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. – 1999. - Т. 364. – № 5. – С. 627–629.

6. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. – 2008. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 3–237.

О ПОЛУГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПУЧКОМ СТАРШИХ СИМВОЛОВ

Шананин Н. (Москва)

nashananin@inbox.ru

Предположим, что в открытом множестве $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ определён дифференциальный оператор

$$P\ u = \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle \leqslant m} a_\alpha(x)\ D^\alpha u, \quad D_j\ =\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{1}$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и взвешенными производными. Взвешенный порядок элементарного дифференцирования D^α, соответствующего неотрицательному целочисленному мультииндексу $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, определяется равенством $\langle \varrho, \alpha \rangle = \varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2 + \ldots + \varrho_n\alpha_n$, где веса $\varrho_k \in \mathcal{N}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через μ наименьший вес: $\mu = \min_j \varrho_j$. Предположим, что старшие ξ-квазиоднородные порядков $l = m, \ldots, m - \mu + 1$ составляющие $p_l(x, \xi) = \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle = l}\ a_\alpha(x)\ \xi^\alpha$ полного символа оператора P вещественнозначны. Положим $\Lambda(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{1/\varrho_j}$. Пусть $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ - локальное пространство обобщённых функций, соответствующее весовой функции $\Lambda^s(\xi)$, $s \in \mathcal{R}$. Множество $p_m^{-1}(0) = \{(x, \xi)\ |\ p_m(x, \xi) = 0,\ \xi \neq 0\}$ инвариантно относительно сдвигов вдоль векторного поля $H_{p_m} = \sum_{j | \varrho_j = \mu} \left(\frac{\partial p_m}{\partial x_j} \partial_{\xi_j} - \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} \partial_{x_j} \right)$.

Теорема 1. *Пусть γ - открытый интервал интегральной кривой векторного поля H_{p_m}, содержащийся в $p_m^{-1}(0)$ и $(x, \xi) \in \gamma$. Тогда из включений $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(x, \xi)$ и $P(x, D)u \in H^{s-m+\mu}_{\mathrm{loc}}(\gamma)$ следует $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\gamma)$.*

Следствием этой теоремы о структуре особенностей решений является теорема о разрешимости уравнения вида $Pu = f$.

Теорема 2. *Если компакт $K \subset \Omega$ не содержит проекции ни одной полной интегральной кривой векторного поля H_{p_m}, принадлежащей множеству $p_m^{-1}(0)$, тогда 1) множество $N(K) = \{v \in \mathcal{E}'(K)\ |\ P^*v = 0\} \subset C_0^\infty(K)$ и является конечномерным пространством, ортогональным образу $P\mathcal{D}'(\Omega)$; 2) для любой $f \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ортогональной к $N(K)$, существует $u \in H^{s+m-\mu}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, являющееся решением уравнения (1) в некоторой окрестности K.*

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Шевлякова Д.В., Матвеев М.Г. (Воронеж)
frezziy@mail.ru

В статье представлена математическая модель стабилизации перевернутого маятника [1] с осциллирующим основанием, образованным физической системой поршень – цилиндр, трактуемой как гистерезисный преобразователь типа люфт [2]. Уравнение движения маятника с гистерезисным управлением сводится к следующему линеаризованному уравнению:

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{l}\left(g + a\omega^2 G(t,H)w(t)\right)\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\varphi(0) = \varphi_{10},\ \dot{\varphi}(0) = \varphi_{20}, \tag{2}$$

$$w\left(t\right) = -sign(\sin(\omega\ t)), \tag{3}$$

$$G\left(t,H\right) = \begin{cases} 0, t \in \left(t^*,\ t^* + \Delta t\right), \\ 1, t \notin \left(t^*,\ t^* + \Delta t\right), \end{cases} \tag{4}$$

где t^*– моменты времени, после которых ускорение меняет знак, $\Delta t = \sqrt{\frac{2H}{a\omega^2}}$ — время, затрачиваемое поршнем на прохождение цилиндра.

В результате оценки мультипликаторов матрицы монодромии [3] был найден критерий устойчивости вертикального положения маятника для параметров управляющего воздействия и построены двумерные проекции зон устойчивости трехмерного пространства параметров. Получены зависимости между начальными условиями и параметрами управления, обеспечивающими периодические колебания маятника. Построены области начальных значений в фазовом пространстве, соответствующие периодическим решениям.

Литература

1. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П. Л. Капица //ЖЭТФ 21. –1951. – С.588 – 597.

2. *Красносельский М.А.* Системы с гистерезисом/ М.А. Красносельский, А.В. Покровский – М.: Наука. 1983. 271 с.

3. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. / В.А. Плисс – М.: Наука – 1964. – 367с..

РАБОТА С НЕЧЁТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ В ЭКСПЕРТНОЙ ОБОЛОЧКЕ CLIPS

Шишкин В.А. (Пермь)
vsh1791@mail.ru

CLIPS [1] — свободная экспертная оболочка, предназначенная для построения экспертных систем продукционного типа.

В докладе предлагается реализация в CLIPS классов для работы с нечёткими множествами [2]. Показано представление нечётких множеств с кусочно–непрерывной функцией принадлежности $\mu\colon R \to [0,1]$, а также теоретико–множественных операций над ними (объединение, пересечение и т.п.).

На каждой области непрерывности $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, функция принадлежности имеет вид кубического многочлена, коэффициенты которого определяются значениями функции принадлежности и, возможно, её первой производной. Нелинейный вид функции позволяет получать более точное представление результатов операций над нечёткими множествами [3], в частности, при использовании t-норм и конорм не (min–max)-вида, а также при выполнении арифметических операций над нечёткими числами.

Реализация нечётких отношений на декартовых произведениях нечётких множеств позволяет определять операции нечёткой логики и, следовательно, задавать в базах знаний нечётко–нечёткие продукции. В этом случае можно использовать более простую (и более быструю) версию представления нечетких множеств с кусочно–линейной функцией принадлежности.

Предлагаемое представление нечётких множеств может быть относительно просто реализовано на других языках, например, в GNU Octave или C++.

Литература

1. *Джарратано, Дж.* Экспертные системы: принципы разработки и программирование: Пер. с англ. // Дж. Джарратано, Г. Райли. — 4-е изд. — М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2007. — 1152 с.

2. *Кофман, А.* Введение в теорию нечётких множеств: Пер. с фр. // А. Кофман. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

3. *Dubois, D.* Fuzzy Real Algebra: Some Results / D. Dubois, H. Prade // Fuzzy Sets and Systems. — 1979. — № 2. — Pp. 327–348.

ОКРЕСТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ НЕЙРОННЫХ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Шмырин А.М., Седых И.А. (Липецк)

amsh@lipetsk.ru

Динамическая недетерминированная окрестностная модель нейронной временной сети Петри имеет вид:

$$NS_{NTPN} = (N, X, V, Z, G, X[0]),$$

где $N = (A, O_x, O_\nu)$ - структура окрестностной модели,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

- множество узлов, O_x и O_ν - окрестности связей узлов по состояниям и по управлениям соответственно. Для каждого узла $a_i \in A$ определена своя окрестность по состояниям $O_x[a_i] \subseteq A$ и управлениям $O_\nu[a_i] \subseteq A$; $O_x = \cup_{i=1}^n O_x[a_i]$, $O_\nu = \cup_{i=1}^n O_\nu[a_i]$; $X \in \mathbf{R}^n$ - вектор состояний; $V \in \mathbf{R^m}$ - вектор управлений; $Z \in \mathbf{R_+^n}$ - вектор временных задержек в узлах, где $\mathbf{R}_+$ - множество неотрицательных действительных чисел; $G : X \times V \to X$ - недетерминированная функция пересчета состояний; $X[0]$ - начальное состояние модели.

Уравнение динамической недетерминированной окрестностной модели нейронной сети Петри:

$$X'[\tau] = [G^1(X[\tau], V[\tau])\, G^2(X[\tau], V[\tau]) \ldots G^m(X[\tau], V[\tau])] \cdot D[\tau], \quad (1)$$

где τ - текущий момент времени; $X[\tau]$ - текущее состояние; $X'[\tau]$ - состояние после завершения блокировки слоя; $D[\tau] \in \mathbf{R^m}$ - случайный вектор, состоящий из нулей и одной единицы в текущий момент времени [1]

Литература

1. Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Седых И.А., Филоненко В.Ю. Окрестностное моделирование сетей Петри. - Липецк: ЛЭГИ, 2010. - 124с.

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОНТИНУАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Эфендиев Б.И. (Нальчик)
beslan_ efendiev@mail.ru

В интервале $0 < x < l$ рассматривается уравнение

$$u''(x) + \lambda D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) = f(x), \qquad 0 < \alpha < \beta < 1, \tag{1}$$

где $D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) = \int_\alpha^\beta D_{0x}^{\gamma}u(x)d\gamma$ – оператор интегро-дифференцирования континуального порядка $[\alpha,\beta]$ [1, с. 33], $D_{0x}^{\gamma}u(x)$ – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка γ [1, с. 9], $\lambda \in R$.

В данной работе приводятся результаты опубликованных автором работ.

Для уравнения (1) построено фундаментальное решение, решены начальная и краевые задачи [2]. Найдены условия однозначной разрешимости краевых задач для уравнения (1) и построены соответствующие функции Грина [2].

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

2. Эфендиев Б.И. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с континуальной производной // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Нальчик. – 2011. – 73 с.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ[1]

Юрко В.А. (Саратов)
yurkova@info.sgu.ru

Пусть $\{\lambda_{nj}\}_{n\geqslant 1}$, $j = 0, 1$ – спектр краевой задачи $L_j(q)$:

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x),\ x \in (0,\pi),\ y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

где $a \in (0, \pi)$, $q(x) \in L(a, \pi)$, и $q(x) \equiv 0$ при $x \in [0, a]$. Исследуется обратная задача восстановления потенциала $q(x)$ по спектрам задач $L_j(q)$, $j = 0, 1$. Эта задача является обобщением классических обратных задач (см. [1]). Пусть $\lambda_{nj} = \rho_{nj}^2$. При $n \to \infty$:

$$\rho_{n0} = n + \frac{\cos na}{2\pi n} \int_a^\pi q(t)\, dt + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

$$\rho_{n1} = \Big(n - \frac{1}{2}\Big) + \frac{\cos(n - 1/2)a}{2\pi n} \int_a^\pi q(t)\, dt + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Пусть $\{\tilde{\lambda}_{nj}\}_{n \geqslant 1}$, $j = 0, 1$ спектр краевой задачи $\tilde{L}_j = L_j(\tilde{q})$ с $\tilde{q}(x) \equiv 0$.

Теорема 1. *Если $\lambda_{nj} = \tilde{\lambda}_{nj}$ при всех $n \geqslant 1$, $j = 0, 1$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на (a, π).*

Пусть $N \in \mathcal{N}$ таково, что $aN < \pi \leqslant a(N + 1)$, и для определенности $N = 2M + 1$. При $M = 0$ теорема очевидна. При $M \geqslant 1$ доказательство состоит в последовательном применении следующих фактов.

Теорема 2. *Фиксируем $\nu = \overline{0, 2M - 1}$. Если $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - \nu a/2, \pi)$, то $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - (\nu + 1)a/2, \pi)$.*

Применяя теорему 2 последовательно при $\nu = 0, 1, \dots, 2M - 1$, получаем $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - Ma, \pi)$.

Теорема 3. *Если $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - Ma, \pi)$, то $q(x) = 0$ п.в. на интервале $((M + 2)a/2, \pi)$.*

Теорема 4. *Фиксируем $\nu = \overline{5, M + 2}$. Положим $s := [(\nu + 1)/2]$. Если $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\nu a/2, \pi)$, то $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(sa/2, \pi)$.*

Применяя теорему 4 несколько раз, начиная с $\nu = M + 2$, получаем $q(x) = 0$ п.в. на (a, π), и теорема 1 доказана.

Литература

[1] Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕВОДА НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ИЗ НАЧАЛА КООРДИНАТ В ЗАДАННУЮ ТОЧКУ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА С УЧЕТОМ ЗАРАНЕЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Якушева Д.Б. (Санкт-Петербург)

dariayakusheva@gmail.com

Объектом исследования является нелинейная управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x,u) + \varphi(x,t), \tag{1}$$

$$x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0,\infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, ..., f^n)^T, \tag{2}$$

$$\varphi \in C(R^n \times R^1; R^n), \tag{3}$$

$$f(0,0) = 0. \tag{4}$$

Здесь φ – заранее неизвестная функция.

Пусть выполнено следующее условие

$$rank\ (B, AB, ..., A^{n-1}B) = n, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0). \tag{5}$$

Задача. Найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$x(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad t \to \infty, \quad x_1 = (x_1^1, ..., x_1^n)^T. \tag{6}$$

В (6) x_1 – заданный вектор.

Теорема. *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (4), (5). Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_\varphi > 0$ такие, что для любых $x_1 : ||x_1|| < \varepsilon_0$ и для любых φ: $||\varphi(x,t)|| < \varepsilon_\varphi$ существует решение поставленной задачи, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида с последующим решением задачи Коши для вспомогательной сис-темы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Литература

1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. Москва. Наука. 1975. 495с.

ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ярославцева В.Я. (Липецк)

aleks49@lipetsk.ru

Рассматриваются операторы преобразования Φ_ν^{-1} для дифференциального оператора типа Лежандра-Гегенбауэра

$$P_x = \frac{1}{\operatorname{sh}^{2\nu} x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{sh}^{2\nu} x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Big) + \nu^2 \,,$$

где ν - действительный параметр. Через $C^{\infty}_{чет,0}[0,r)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых функций, которые обращаются в нуль в окрестности правого конца и в нуле все производные нечетного порядка равны нулю. На функциях $u \in C^{\infty}_{чет,0}[0,r)$ определим оператор Φ_ν[1]. Через $C^{\infty,\nu}_{чет,0}[0,r)$ будем обозначать образ оператора Φ_ν^{-1}.На множестве $C^{\infty,\nu}_{чет,0}[0,r)$ строим операторы преобразования Φ_ν^{-1}, которые в зависимости от параметра ν являются либо операторами типа операторов дробного дифференцирования, либо операторами типа операторов дробного интегрирования по гиперболическим косинусам. Показывается, что операторы Φ_ν и Φ_ν^{-1} являются взвимно обратными и осуществляют взаимно однозначное отображение пространства $C^{\infty}_{чет,0}[0,r)$ на себя.

Теорема. $P_x\Phi_\nu u = \Phi_\nu D^2 u, \qquad u \in C^{\infty}_{чет,0}[0,r);$
$\Phi_\nu^{-1} P_x u = D^2 \Phi^{-1} u, \quad u \in C^{\infty,\nu}_{чет,0}[0,r).$

Построенные операторы преобразоваания дают возможность выявить и поставить ряд краевых и смешенных задач для некотрого класса вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных. Предложеннный метод позволяет перейти от краевой задачи с особенностью к соответствующей регулярной эллиптической краевой задаче и выразить решение сингулярной задачи через решение последней.

Литература

1. Ярославцева В.Я. Операторы преобразования на полупрямой //Современные методы в теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XIII." Воронеж, 2002, с. 166.

Именной указатель

Верстка и подготовка оригинал-макета:

Шабров С.А.

Издательство Воронежского государственного университета,
394053, г. Воронеж, Университетская пл., 1.
Тир. 500 экз. Подписано к печати 14.04.2012