Воронежский государственный университет
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской зимней математической школы

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской зимней математической школы

УДК 517.53 (97; 98)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10–01–06838 моб_г

Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: ВГУ, 2011. 374 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем теории функций, оптимального управления, теории игр, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

ISBN

Математика как жизнь

С 25 января по 4 февраля каждый год в ВГУ проводятся зимние математические Школы при участии Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Московского государственного университета. Первый год они пройдут без участия профессора Ю.В. Покорного, к величайшему сожалению всей математической общественности, в конце октября 2010 года его не стало.

Доктор физико-математических наук, профессор Юлий Витальевич Покорный с 1986 года (более двадцати лет) заведовал кафедрой математического анализа ВГУ, как ученый он – специалист по качественной теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и неклассическим задачам математической физики.

Благодаря Воронежским весенним математическим школам (ежегодные “Понтрягинские чтения”), которые организованы им с 1986 года и в отличной форме проводятся до сих пор, фамилия Покорный на протяжении многих лет была своего рода символом организации воронежских математических школ в пределах России, СНГ и не только. Эти школы проходят под эгидой Воронежского государственного университета, Института Математики АН России и Московского государственного университета. Бессменным председателем оргкомитета этих школ является академик В.А. Ильин. Эти школы пользуются большой популярностью в достаточно широких математических кругах (как отечественных, так и зарубежных).

Родители Ю.В.Покорного в 1940 году окончили ВГУ. Отец, Покорный Виталий Владимирович, прошел всю войну – офицером-артиллеристом – и после окончания аспирантуры при МГУ был определен на работу в Воронежский государственный университет. В течение сорока лет его научно-преподавательской деятельности доцент В.В. Покорный был одним из основателей кафедры математического анализа ВГУ, деканом математического факультета. Мать Ю.В. Покорного, Валентина Федоровна (в девичестве Вершкова), была школьным учителем математики, но, к великому сожалению, ее жизнь оборвалась в возрасте сорока лет.

Ю.В. Покорный после окончания обычной школы поступил в ВГУ в 1956 году (16-ти лет). Уже на втором курсе стал участником научного семинара М.А. Красносельского. Первые самостоятельные шаги были сделаны им в теории нормированных колец. Начиная с дипломной работы, материалы которой были опубликованы в Доповидях АН УРСФСР, и до кандидатской диссертации (1967 год) научные интересы Ю.В. Покорного концентрируются в теории уравнений в полуупорядоченных банаховых пространствах. Здесь ему удалось существенно усилить теоремы М.А. Красносельского о признаках сжатия и растяжения конусов, описать новый класс фокусирующих операторов, для которых оказались доступными оценки вторых собственных значений. Оказалось, что такие операторы порождаются функциями Грина многоточечных краевых задач типа Валле Пуссена. Достаточно полная теория такой функции Грина с приложениями к теории упругих деформаций многоопорных стержней стала основой докторской диссертации, защищенной в Ленинградском государственном университете в 1980 году.

С начала 80-х годов в семинаре Ю.В.Покорного начались интенсивные исследования нестандартных математических задач, моделирующих многозвенные упругие конструкции. Зародилась и получила интенсивное развитие теория дифференциальных уравнений на геометрических графах (пространственных сетях). Подобные задачи в качестве математических моделей возникают в самых разнообразных разделах естествознания и техники (малые колебания сложных молекул, процессы в гидравлических, нейронных сетях, электрических цепях, транспортных системах, решетчатых и сетчатых инженерных конструкциях и многое другое). Несколько позже эта тематика привлекла бурное внимание многих зарубежных научных групп.

В 90-е годы XX века внимание Ю.В.Покорного и его учеников было обращено на задачи с импульсными особенностями, когда в коэффициентах обыкновенных дифференциальных уравнений и в неоднородностях появляются особенности типа дельта-функций. Важные для приложений свойства решений таких задач (знакоопределенность, число перемен знака, перемежаемость нулей и проч.), хорошо адаптированные к физическим и инженерным интересам и известные еще со времен Штурма для уравнений с импульсными возмущениями, были под большим вопросом. В основном из-за нехватки математического инструментария, так как, например, стандартная теория обобщенных функций не допускала даже корректного описания соответствующих постановок задач. В рамках теории распределений модельные уравнения не могут рассматриваться как поточечные, но лишь как связь между функционалами, что не соответствует ни физической, ни инженерной интуиции. Ю.В.Покорным был разработан подход, позволяющий записать подобные модели в виде интегро-дифференциальных уравнений с опорой на общую теорию интеграла и, в частности, на интегралы Лебега-Стилтьеса. Такой подход обусловил возможность доказательства классических осцилляционных свойств Штурма-Лиувилля как для задач с импульсным потенциалом, так и для задач на пространственных сетях.

К настоящему времени Ю.В. Покорным опубликовано около трехсот работ и три монографии. Под его руководством защищено более сорока кандидатских и 5 докторских диссертаций.

Много сил и здоровья Ю.В. Покорного ушло на общественные дела. Более десяти лет он возглавлял Институт математики при ВГУ, а затем и созданный им Докторский Совет по математическому моделированию. С середины 70-х годов он активно сотрудничал с преподавателями математики в плане проблем преподавания математики, в том числе с 1986 года до 1990-го года сотрудничал с областным институтом повышения квалификации учителей. Ю.В. Покорный являлся организатором регулярных международных конференций по фундаментальным направлениям математики и смежным проблемам естествознания с акцентом на проблемы преподавания математики в высшей и средней школе, которые проводились в Воронеже совместно с РАН, МГУ, рядом ведущих научных центров страны.

Заслуги Ю.В. Покорного в научной, научно-организационной, педагогической деятельности отмечены присвоением ему в 1999 г. почетного звания “Заслуженный деятель науки Российской Федерации". С1996 г. он – лауреат правительственной стипендии для выдающихся ученых. Ю.В. Покорный – почетный эксперт международного биографического института (США), действительный член Международной Академии Информатизации, член Американского Математического общества, вице-президент научного общества "Математика, механика, информатика Черноземья" (ОММИЧ).

Жизнь Юлия Витальевича Покорного, насыщенная и плодотворная, была подчинена одной главной идее – математике как науке. Рядом с ним всегда были его ученики – студенты, аспиранты, а потом и докторанты, рядом были его соратники по духу. Они отмечали своеобразие его личности – "многогранной, многомерной, многоцветной" и "извилистый ландшафт его мыслей и эмоций", его воспитание, эрудицию, "такое чувство русского языка, которое редко встретишь и у филологов" (А.В. Боровских). Отмечали его колоссальную способность создавать команду: "А дальше кажется, что каждый своим делом занимается уже почти независимо от создателя, но это только кажется. . . В любом случае все находятся под теплым, но пристальным вниманием его консолидирующей силы, которая называется: любовь к науке и человеку" (Г.А. Гончарова). Говорили о его необычной преданности науке, бережно-теплом, почти отеческом отношении к молодым ученым, ". . . его внутренняя сила в правде, которая является его естеством" (А.П. Хромов). О самых значимых его качествах упоминает Н.Х. Розов: "Совершенно замечательным качеством его личности я считаю, фундаментальность во всем; основательность и внешняя невозмутимость, его научные лекции – образные, здесь емкость образов, великолепное владение словом, новизна подачи материала..." Более двадцати лет они были дружны с Юлием Витальевичем. И напоследок – размышления о Ю.В. Покорном академика В. А. Ильина: "Юлий Витальевич Покорный – личность весьма и весьма незаурядно-неординарная... Он умеет на какую-то, казалось бы, не новую идею посмотреть свежим взглядом – взглядом человека увидевшего данный факт-предмет как бы впервые. Переосмысление на свой лад присутствует всегда. Все, что хоть самым малым образом может показаться ему интересным – подвергается анализу, обновляется и выдается в добавленном, улучшенном, реставрированном виде. Это как раз то самое главное, самое ценное, что из человека творческого, при таком постоянном привычном состоянии, делает выдающегося ученого”.

Наверное, далеко не все проговорено о Ю.В. Покорном, но все что упомянуто хорошее, значительное и важное, всегда способствовало интеллектуальному и духовному развитию его учеников, тех, кто многие годы хотел и имел возможность встречаться, жить и работать рядом с ним. У Ю.В. Покорного две дочери – Ольга и Илана, обе преподают математику в вузах Воронежа, а также – два внука – Виталий и Евгений – и внучка – Юлия, которая тоже – математик, с отличием окончила математический факультет ВГУ. Династия математиков Покорных продолжается.

СЛОВО ПРИЗНАТЕЛЬНОЙ ПАМЯТИ

Ушёл Юлий Витальевич. Трудно принять этот факт. Потому что его Дух ещё присутствует среди нас, – многолетних участников и слушателей его Школы. Во многих он оставил свой особый след. И сегодня я хочу отдать себе отчёт в том, что в моей жизни значил этот человек.

Наше общение началось 22 июля 2003 г., когда пришло письмо от Ю.В., в котором он писал: “Ознакомившись с Вашими тамбовскими тезисами, я понял, что речь должна идти не об общих взглядах, а об общих убеждениях и переживаниях. Почему я и испытал потребность срочно установить с Вами контакт. Школьной математикой я болею более 30 лет ...” Незадолго до этого я обратил внимание на необычно красивую фамилию “Покорный” в УМН, перед большой обзорной статьёй. Неожиданное внимание такого математика к провинциальному преподавателю было лестно.

Встретились мы на весенней Школе-2004. И обнялись. Последовали в разной обстановке непринуждённые беседы, которые всегда глубоко освещали для меня новые и новые грани волновавших нас проблем математического образования. И не только. Ведь, всё, что говорил Юлий Витальевич, было мыслью, мыслью не поверхностной и многознающей. Эта сила свободной мысли прежде всего впечатляла при общении с ним. И ещё своеобразие мысли – она всегда была свежей, остро образной и эмоционально окрашенной. Таковы и неожиданные слова, которыми облекалась мысль.

При последней, майской встрече он сказал по поводу моей работы: "Надо писать "вживую чтобы многие читали. Не ориентироваться на рецензентов. Рецензенты – народ завистливый". Одно это необычное, ёмкое, выразительное слово рассеяло сомнения (надо ли объективировать текст?). И теперь это слово всегда будет жить во мне и сопровождать все оставшиеся писания. А незримый теперь образ Юлия Витальевича всегда будет витать около и поддерживать в минуты сомнений.

Вот в чём, может быть, особо ценная миссия таких людей, – они поднимают своих коллег, соратников и учеников выше их обычных возможностей, дают мощный творческий импульс, поддерживают и укрепляют. Для меня сам факт существования Юлия Витальевича (где-то далеко) служил моральной опорой. Письма вдохновляли. И первое внутреннее ощущение при получении известия было сокрушение духовной опоры. Но через некоторое время после сосредоточенного переживания и размышления осознаёшь, что нет, опора не исчезла, она будет всегда.

Всякий большой человек, уходя, уносит с собой нечто глубинное, – недодуманное, недосказанное, недосделанное. Таков пласт размышлений Юлия Витальевича о преподавании школьной математики, приоткрытый нам в книге 2006 г., которую он назвал "Унижение математикой?" и которую нам ещё предстоит понимать, разгадывать и додумывать. В этой книге, – писал он – "я выну на свет Божий все плоды своих достаточно мучительных размышлений последних лет".

В результате глубокого математического и психологического научного анализа он вскрыл ошибочность современной методики, которая в погоне за модным наукообразием искажает интуитивную сущность основных понятий и, тем самым, делает их для детей не понимаемыми. Практическое следствие – отвращение учащихся к нашей любимой науке.

Он надеялся, что книга "должна стать основой для достаточно впечатляющих и действенных выводов с четкими формулировками, доступными для массовой аудитории". И его тревожил вопрос, – как дойти до "такого понимания проблемы, которое понуждает к действиям". И где тот круг людей, к которому надо обратиться, чтобы "хоть как-нибудь подтолкнуть жизнь в нужном направлении"?

Да будет мир его страстной душе!

Костенко И. П.

REVIEW OF DECOMPOSITION TYPES ITERATIVE METHODS FOR STATIONARY PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Abrashina-Zhadaeva N.G., Egorov A.A. (Minsk)
zhadaeva@bsu.by; egorov_ aa@cosmostv.by

In this report the numerical methods are presented in which the main approach is based on decomposition (fragmentation) of given domain in a row of subdomains. This approach is concerned with methods which were presented in Pr. Abrashin and his disciple's papers on vector-additive methods of total approximation. The original problem is divided on subproblems, each of them is solved in its subdomain and uses sequential and parallel additive methods in dependence on computational tools. The papers [1-6] and cited there literature are devoted to convergence of iterative methods of decomposition types for solving elliptic equation. For justification of multicomponent decomposition method the sufficient condition of convergence of iterations convergence to difference solution is:

$$\sum_{i_1,i_2} h_1 h_2 \big(A_{i_1 i_2} Y_{i_1 i_2}, Y_{i_1 i_2}\big) > 0,$$

where $\big(V_{i_1 i_2}, Y_{i_1 i_2}\big) = \sum_{n=1}^{4} \big(v_{i_1 i_2}^{(n)}, y_{i_1 i_2}^{(n)}\big)$. In the considered problem skew-symmetrical part of operator do not affect on property of having fixed sign that can be approved by simple checking. Indeed, when we summarize by each cell in $\big(A_{i_1 i_2} Y_{i_1 i_2}, Y_{i_1 i_2}\big)$ the parts connected with skew-symmetrical component of $A_{i_1 i_2}$, give zero input in inner product, and symmetric part of $A_{i_1 i_2}$ is similar to one-dimensional difference derivative of the second order along boundary of grid cell. Using these assumptions we can assert that for iterative process the convergence theorems are valid [1,2].

Bibliography

1. Abrashin V.N. Multicomponent iterative alternating direction methods // Mat. Modelirovanie. 2000. Vol. 12, No. 2. P. 45–58 (in Russian).

2. Egorov A.A., Zhadaeva N.G. Splitting-up schemes of total approximation in domain decomposition methods for solving mathematical physics problems // Mat. Modelirovanie. 2000. Vol. 12, No. 2. P. 35–44 (in Russian).

3. Abrashin V.N. An iterative method for solving of difference

problems for elliptic equations // Differents. Uravn. 1998. Vol. 34, No. 7. P. 911–920 (in Russian).

4. Abrashin V.N., Egorov A.A., Zhadaeva N.G. On a convergence rate of additive iterative methods // Differents. Uravn. 2001. Vol. 37, No. 7. P. 867–879 (in Russian).

5. Egorov A.A. An iterative domain decomposition method for problems of mathematical physics // Differents. Uravn. 2000. Vol. 36, No. 5. P. 783–788 (in Russian).

6. Abrashin V.N., Zhadaeva N.G. Multicomponent alternating direction method for solving stationary problems of mathematical physics. I // Differents. Uravn. 1996. Vol. 32, No. 9. P. 1212–1221 (in Russian).

УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В КЛАССАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Абанина Д.А. (Ростов-на-Дону)

abanina@math.rsu.ru

Пусть $I = (-a, a)$, где a — число либо $a = \infty$; $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ — пространство ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа, определяемое весом ω; $H^1_{(\omega),I}$ — аналитическая реализация пространства $\left(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\right)'_\beta$, сильного сопряженного с $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ (по поводу определений см. [1]). Для произвольного мультипликатора $\mu(z)$ пространства $H^1_{(\omega),I}$ рассмотрим соответствующий оператор свертки T_μ, действующий в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Доклад будет посвящен уравнениям свертки

$$T_\mu f = g\,, \quad f, g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\,. \tag{1}$$

Будут представлены следующие результаты:

1. Два критерия (для случаев $a \in \mathbb{R}$ и $a = \infty$), полностью описывающие все характеристические функции μ, при которых уравнение (1) имеет решение в классе $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

2. Критерии разрешимости в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} = g\,, \quad f, g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\,.$$

Данный результат сопровождается примерами как положительного, так и отрицательного характера.

Настоящая работа продолжает исследования уравнений свертки в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций, начатые Л. Эренпрайсом [2], Л. Хермандером [3] и продолженные затем многими другими математиками.

Литература

[1] Абанин А. В., Абанина Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12.—Вып. 3.—С. 3–21.

[2] Ehrenpreis L. Solution of some problems of division // Amer. J. Math.—1960.—V. 82.—P. 522–588.

[3] Hörmander L. On the range of convolution operators // Ann. of Math.—1962.—V. 76.—P. 148–170.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН

Азаров С.В. (Воронеж)

azar2004@bk.ru

Рассматривается задача на графе-звезде $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$, состоящем из m одинаковых ребер γ_k и узла ξ, при этом ребра $\gamma_k(k = \overline{1, m-1})$ параметризованы отрезком $[0, \pi/2]$, ребро γ_m отрезком $[\pi/2, \pi]$. Колебания на каждом из ребер при произвольном значении времени t описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} \qquad (1)$$

внутри каждого ребра $\gamma_k(\overline{1, m-1}), t \in (0, T)$ и соотношениями в узле ξ

$$\Omega(\frac{\pi}{2}, t)_{\gamma_k} = \Omega(\frac{\pi}{2}, t)_{\gamma_m}(k = \overline{1, m-1}), t \in (t, T),$$
$$\sum_{k=2}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x}\Omega(\frac{\pi}{2}, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x}\Omega(\frac{\pi}{2}, t)_{\gamma_m}, t \in (0, T). \qquad (2)$$

К соотношениям (1),(2) добавляются начальные условия при $x \in \Gamma, t = 0$:

$$\Omega(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x, 0) = \psi(x) \qquad (3)$$

и граничные условия в граничных узлах графа ($t \in [0,T]$):

$$\Omega(0,t)_{\gamma_k} = \mu_k, (k = \overline{1, m-1}),$$
$$\Omega(\pi,t)_{\gamma_m} = \nu(t), \tag{4}$$

$\varphi(x), \psi(x), \mu_k(t), \nu(t)$ - заданные функции.

Задача гашения колебаний *дифференциальной системы (1)-(4) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$ $(k = \overline{1, m-1})$ таких, что в момент времени $t = T$ выполнялись условия*

$$\Omega(x,T) = 0, \quad \tfrac{\partial}{\partial t}\Omega(x,T) = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{5}$$

Колебания системы (1)-(4) можно погасить за время $t = \pi$. Задача гашения колебаний системы (1)-(4) сводится к решению относительно управляющих функций $\mu_k(x)\,(k = \overline{1, m-1})$, $\nu(x)$ следующих систем:

$$\begin{cases} -\varphi(\pi - x)_{\gamma_1 \cup \gamma_m} + \mu_1(\pi - x) + \nu(x) = 0, \\ -\psi(\pi - x)_{\gamma_1 \cup \gamma_m} - \frac{d}{dx}\mu_1(\pi - x) + \frac{d}{dx}\nu(x) = 0, \end{cases}$$

на $\gamma_1 \cup \gamma_m$ $(x \in [0,\pi])$(здесь функция $\varphi(z)_{\gamma_1 \cup \gamma_m}$ определена на отрезке $[0,\pi]$ и равна $\varphi(z)_{\gamma_1}$ при $z \in [0,\pi/2]$ и $\varphi(z)_{\gamma_m}$ при $z \in [\pi/2,\pi]$) и

$$\begin{cases} -\varphi(\pi - x)_{\gamma_k} + \mu_k(\pi - x) + \mu_k(x) = 0, \\ -\psi(\pi - x)_{\gamma_k} - \frac{d}{dx}\mu_k(\pi - x) + \frac{d}{dx}\mu_k(x) = 0, \end{cases}$$

на γ_k, $k = \overline{2, m-1}$ $(x \in [0,\pi/2])$ при условии

$$\mu_1(x) - 2\mu_k(x) + \nu(x) \equiv 0\,(k = \overline{2, m-1}),\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

на эти функции.

Разработан алгоритм нахождения решения конечно-разностного аналога системы (1)-(4) и ей соответствующей задачи граничного управления.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ

Анисимов М.Н., Бободжанова М.А., Федоров Ю.С. (Москва)

Рассматривается интегродифференциальное уравнение

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(\theta)d\theta} K_0\left(t,s\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds+h\left(t\right),\ y\left(0,\varepsilon\right)=y^0,\ t\in\left[0,T\right],\tag{1}$$

оператор дифференциальной части которого тождественно равен нулю $((\varepsilon\dot{y}-A_0\left(t\right)y\equiv\varepsilon\dot{y}))$ и содержащий быстро изменяющийся множитель $exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\mu\left(\theta\right)d\theta\right\}$ в ядре интегрального оператора ($\varepsilon>0-$ малый параметр, y^0- постоянная). Асимптотический анализ таких задач при $\varepsilon\to+0$ $\mu\left(t\right)\neq0$ ранее не проводился. В случае, когда оператор $A_0\left(t\right)\neq0$, выделение существенно особых сингулярностей с помощью метода регуляризации Ломова [1] .Если $A_0\left(t\right)\equiv0$, регуляризация задачи (1) становится проблематичной. В настоящей работе предполагается, что спектральное значение $\mu(t)$ ядра интегрального оператора не обращается в нуль на отрезке $[0,T]$. В этом случае сингулярности в решении задачи (1) описываются только спектральным значением $\mu(t)$. При этом условия разрешимости соответствующих итерационных задач будут иметь вид не дифференциальных (как это было в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части), а интегродифференциальных уравнений . При этом будем считать выполненными следующие условия:

1) функции $\mu\left(t\right),\,h\left(t\right)\in C^{\infty}\left(\left[0,T\right],\mathbb{C}^1\right),\,K_0\left(t,s\right)\in C^{\infty}\left(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\mathbb{C}^1\right);$

2) $\mathrm{Re}\,\mu\left(t\right)\leqslant0,\ \mu\left(t\right)\neq0\ \forall t\in\left[0,T\right]$.

Приведем формулировку основного результата.

Теорема. Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда справедливы высказывания: а) для того чтобы имел место предельный переход

$$\left\|y\left(t,\varepsilon\right)-e^{-\int\limits_0^t\frac{K(\theta,\theta)}{\mu(\theta)}d\theta}y^0\right\|_{C[0,T]}\to0\ \left(\varepsilon\to+0\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы $h(t) \equiv 0 \quad (\forall t \in [0,T])$;

б) если $h(t) \neq 0 \quad (\forall t \in [0,T])$, то в задаче (1) равномерный по $t \in [0,T]$ предельный переход отсутствует (в этом случае можно показать, что система (1) имеет асимптотический предельный режим, не зависящий от сингулярных экспонент).

Литература

1.Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.:Наука.1981. 400с.

ПОРЯДОК РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ $\varphi(L)$

Антонов Н.Ю. (Екатеринбург)

Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Пусть d — натуральное число, $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)_{[0,2\pi)^d}$ множество всех определенных на $[0,2\pi)^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию $\varphi(|f|) \in L_{[0,2\pi)^d}$.

В случае $d = 1$ К. И. Осколков [1] доказал,что для любой функции $f \in L_{[0,2\pi)}$ и любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива оценка

$$S_{n_k}(f,x) = o(\ln k) \quad \text{п.в.} \tag{1}$$

Пусть $d = 2$. Обозначим через $S_{m,n}(f,x,y)$ значение (m,n)-ой прямоугольной частичной суммы двойного тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{[0,2\pi)^2}$ в точке $(x,y) \in [0,2\pi)^2$. Г.А.Карагулян [2] получил следующий двумерный аналог оценки (1): для любых последовательностей $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и для каждой функции f из класса $L\ln^+ L_{[0,2\pi)^2}$

$$S_{m_k,n_k}(f,x,y) = o(\ln^2 k) \quad \text{п.в.}$$

Следующее утверждение обобщает вышесформулированный результат Карагуляна.

Теорема. *Пусть $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольные последовательности натуральных чисел. Предположим, что функция $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такая, что*

1) $\psi(u)$ не убывает на $[u_0,+\infty)$ для некоторого $u_0 \geqslant e$;

2) функция $\ln u/\psi(u)$ не убывает на $[u_0,+\infty)$.

Тогда для любой функции f из класса $L\ln^+ L\psi(L)_{[0,2\pi)^2}$ справедлива оценка

$$S_{m_k,n_k}(f,x,y) = o\left(\frac{\ln^2 k}{\psi(k)}\right) \qquad \text{п.в.}$$

Литература

1. Осколков К.И. Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Труды МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.

2. Карагулян Г.А. Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сборник. 1996. Т. 187, № 3. С. 55–74.

О ПРОБЛЕМАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

Арутюнян Г.В., Марчевская Е.В. (Москва)

elena070860@mail.ru

В последнее время много говорится о снижении уровня знаний учащихся по геометрии, что подтверждается низкими показателями решаемости геометрических задач на ЕГЭ–2010.

Трудности вызывают даже несложные задачи первой части (B4, B6 и B9), для решения которых требуются знания основных определений и элементарных формул. Наибольшую сложность вызывает планиметрическая задача C4, которую решили полностью лишь 0,2 % учащихся и еще 1,4 % справились с ней частично. Такие низкие показатели объясняются разными причинами как субъективного, так и объективного характера. Проанализировать их подробно чрезвычайно сложно, остановимся лишь на отдельных проблемах преподавания планиметрии в школе.

Опыт преподавания геометрии показывает, что большинство учащихся в рамках отведенных часов по программе усваивают способы решения лишь самых простых, “стандартных” задач на применение основных формул. Бывает так, что важное соотношение содержится не в параграфе учебника, а в тексте отдельно взятой задачи. У учителя может не оказаться возможности отработать дальнейшее применение таких формул, т.к. в учебнике нет подходящих задач и нужно использовать дополнительную литературу. Некоторые полезные формулы и свойства фигур вообще не рассматриваются на уроках, поскольку их изучение не предусмотрено программой. Задачи на комбинации фигур требуют хорошего владения теорией и приемами анализа; на уроке на них просто не хватает времени. Очевидно, что для усвоения формулы или метода решения необходимо предложить учащимися систему упражнений, рассмотреть разные подходы и способы.

В разработанном учебном пособии по геометрии [1], которое предназначено для учителей математики и учащихся старших классов, сделана попытка систематизации геометрических задач по методам решения. В каждом разделе пособия приведены основные определения и краткие теоретические сведения; перечислены как основные, так и малоизвестные формулы. Все задачи сопровождаются решениями либо подробными указаниями, что позволяет учителю достаточно быстро определить сложность задачи и увидеть способ ее решения. Это весьма важно, поскольку за достаточно простой формулировкой может скрываться далеко не очевидное и объективно сложное решение.

В пособие включены некоторые сведения, выходящие за школьный уровень, но вполне доступные для учащихся. В процессе самостоятельной подготовки к ЕГЭ школьники могут освоить приведенную теорию и разобранные задачи.

Кроме того, в пособии представлены геометрические задачи на экстремумы, а также алгебраические задачи, допускающие геометрическую интерпретацию.

Пособие также может быть полезно учителям при организации факультативных занятий и элективных курсов.

Литература

1. Арутюнян Г.В., Марчевская Е.В., Марчевский И.К. Элементарная геометрия. Методы решения задач: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. — 224 с.

ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННЫХ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Аршава Е.А. (Харьков)

elarshava@mail.ru

Настоящее исследование опирается на метод операторных тождеств [1], который Л. А. Сахнович использовал для изучения класса уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^{\omega} S(x-t)f(t)dt = \varphi(x), \tag{1}$$

который является наиболее общим классом уравнений с разностным ядром. Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

В работах И.И. Кальмушевского, А.Б. Нерсесяна, А.Л. Сахновича и др. метод операторных тождеств использовался при изучении систем интегральных уравнений с разностным ядром, сумматорных уравнений с матрицей коэффициентов Тёплица, двумерных интегральных уравнений.

Задача обращения некоторых новых классов интегральных операторов методом операторных тождеств, доказательство конечномерности соответствующих коммутационных операторов, исследование структуры обратного оператора и использование полученных результатов при решении задачи фильтрации и прогноза нестационарных случайных процессов и сигналов автором настоящей статьи представлены в работе [2] - [3].

Используя основные результаты, полученные при изучении задачи обращения интегральных операторов методом операторных тождеств, рассмотрим обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений.

Пусть задан ограниченный в $L_2(0,\omega)$ оператор S вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int_0^{\omega} S(x,t)f(t)dt \qquad (2)$$

с ядром $S(x,t)$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha) - L_t(\alpha))S(x,t) = 0, \qquad L_x(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0, \qquad (3)$$

Рассмотрим оператор $\tilde{A}f = A_0^2 f$, где

$$A_0 f = \int_0^x \frac{1 - e^{\alpha(\xi - x)}}{\alpha} f(\xi)d\xi. \qquad (3)$$

Выясним, при каких условиях оператор $\tilde{A}S - S\tilde{A}^*$ представляет собой конечномерный оператор. Учитывая (3), получаем

$$\tilde{A}f = \int\limits_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi,$$

$$\tilde{A}^*f = \int\limits_t^\omega (\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_t^\omega \frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi.$$

Тогда

$$(\tilde{A}S - S\tilde{A}^*)f = \int\limits_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau) = S'(0,\tau), \qquad M_2(\tau) = S(0,\tau),$$

$$N_1(t) = -\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t}) + \frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), \qquad N_2(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right] S(t,\tau) = 0. \qquad (4)$$

Следовательно, имеет место

Теорема 1. *Достаточным условием конечномерности оператора* $\tilde{A}S - S\tilde{A}^*$ *является выполнение для ядра оператора* (2) *уравнения* (4).

Следствие 1.1. *Если у оператора* S *вида* (2) *существует ограниченный обратный* T*, то он удовлетворяет соотношению*

$$(T\tilde{A} - \tilde{A}^*T)f = \int\limits_0^\omega (Q_1(t)P_1^*(\tau) + Q_2(t)P_2^*(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$S^*P_1 = M_1^*, \quad S^*P_2 = M_2^*, \quad SQ_1 = N_1, \quad SQ_2 = N_2.$$

Рассмотрим аналогичную задачу для оператора $\tilde{A}S - SB$, когда

$$\tilde{A}f = \int_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi, \qquad (5)$$

$$Bf = \int_0^t \frac{1-e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha} f(\xi)d\xi.$$

В этом случае получаем

$$(\tilde{A}S - SB)f = \int_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau) = S'(0,\tau), \qquad M_2(\tau) = S(0,\tau),$$

$$N_1(t) = -\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t}) + \frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), \qquad N_2(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\right] S(t,\tau) = 0. \qquad (6)$$

Теорема 2. *Пусть заданы оператор $\tilde{A}$ и B, определённые выражениями* (5). *Тогда для конечномерности оператора $\tilde{A}S - SB$ достаточно выполнения равенства* (6).

Следствие 1.2. *Если у оператора S вида* (2) *существует ограниченый обратный оператор T, то он удовлетворяет соотношению*

$$(T\tilde{A} - BT) = \int_0^\omega R(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

где

$$R(t,\tau) = Q_1(t)P_1^*(\tau) + Q_2(t)P_2^*(\tau),$$

$$S^*P_1 = M_1^*, \quad S^*P_2 = M_2^*, \quad SQ_1 = N_1, \quad SQ_2 = N_2.$$

Пусть

$$Tf = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^\omega F(x,t)f(t)dt, \tag{7}$$

причем

$$F(\omega,0)=0, \quad \int\limits_0^\omega |F(x+\Delta x,t)-F(x,t)|^2\,dt \leqslant \|T\|^2\,|\Delta x|\,.$$

Тогда

$$B T\tilde{A} f = \int\limits_0^\omega f(t)\int\limits_t^\omega \left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi)+F(x,\xi)-e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right)\times$$

$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt.$$

Обозначим через $T_1 f = \int\limits_0^\omega G(x,t)f(t)dt$, где

$$G(x,t) = \int\limits_t^\omega \left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi)+F(x,\xi)-e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right)\times$$

$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi, \tag{8}$$

$$G(x,\omega)=0.$$

Поэтому $T_1 f = BT\tilde{A}f$ и $T_1\tilde{A} - BT_1 = H$, $Hf = BR\tilde{A}f = \int\limits_0^\omega H(x,t)f(t)dt$,

$$H(x,t) = \int\limits_t^\omega \left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}R'(0,\xi)+R(x,\xi)-e^{-\alpha x}R(0,\xi)\right)\times$$

$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi. \tag{9}$$

Так как

$$(T_1\tilde{A} - BT_1)f =$$

$$= \int_0^\omega f(t) \int_t^\omega G(x,\xi) \left((\xi - t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} + 2 \cdot \frac{e^{\alpha(t-\xi)} - 1}{\alpha^3} \right) d\xi dt -$$

$$- \int_0^\omega f(t) \int_0^x G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha} d\xi dt,$$

то имеет место уравнение

$$\int_t^\omega G(x,\xi) \left((\xi - t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} + 2 \cdot \frac{e^{\alpha(t-\xi)} - 1}{\alpha^3} \right) d\xi -$$

$$- \int_0^x G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha} d\xi = H(x,t).$$

Дифференцируя последнее уравнение по x и по t, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial x} \right) H(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial x} \right) G(x,t). \quad (10)$$

Таким образом, с помощью формул (7) – (10) можно получить представление для обратного оператора T.

Литература

1. Сахнович Л.А. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке. // Успехи математических наук. - М.,1980. - Т. 35, Вып. 4 (214). - С. 69 - 129.

2. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение коммутационных соотношений. // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1996. - Т. 32, №10. - С. 1427 - 1428.

3. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-ой международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений": в двух томах. - Т.1. Математический анализ. - Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. - С. 25 - 29.

ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНЫЕ КРИТЕРИИ МЕБИУСОВОСТИ

Асеев В.В. (Новосибирск)

btp@math.nsc.ru

Работа, выполненная совместно с Кергиловой Т.А. (Горно-Алтайск), посвящена усилению геометрического критерия мебиусовости конформного отображения плоских областей, полученного в статье [1].

Упорядоченная четверка точек $T = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbf{C}$ называется правильной, если точки z_2 и z_4 лежат по разные стороны от прямой, проведённой через z_1, z_3. Величина $\Phi(T) = \angle z_1 z_2 z_3 + \angle z_1 z_4 z_3$ (углы неориентированные) рассматривается как геометрическая характеристика правильной тетрады. Тогда при любом фиксированном $\alpha \in (0, 2\pi)$ мёбиусовость конформного отображения $f : D \to D^*$ областей в
$\mathbf{C}$ эквивалентна тому, что для любой правильной тетрады $T \subset D$ с $\Phi(T) = \alpha$, образ которой fT также является правильной тетрадой, выполняется равенство $\Phi(fT) = \alpha$.

Нами показано, что этот критерий мебиусовости остается справедливым и для произвольных гомеоморфизмов плоских областей (без предположения о дифференцируемости). Статья с полным доказательством этой теоремы принята к опубликованию в Сибирском математическом журнале.

Нами также показано, что при любом фиксированном комплексном $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ любое инъективное отображение плоской области (без требования непрерывности) переводящее четверки точек с ангармоническим отношением α в четверки точек с ангармоническим отношением α, является мебиусовым отображением. Это существенное усиление аналогичного критерия мебиусовости, установленного в [2] только для отображений класса C^1. Полученный нами результат частично опубликован в [3] и принят к опубликованию в Tokyo Mathematical Journal.

Литература

[1]. *Haruki H., Rassias Th.*: A new invariant characteristic property of Möbius
transformations from standpoint of conformal mapping. – J. Math. Anal. and Appl., 1994, **181**, pp.320-327.

[2]. *Kobayashi T.*: Apollonius points and anharmonic ratios. – Tokyo Math. J., 2007, **30**, pp. 117-119.

[3]. *Aseev V., Kergilova T.*: Moebius transformations preserving fixed anharmonic ratio. – ArXiv.org.arXiv:0810.4434v1[math.DT].2008

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Астахов А.Т. (Воронеж)
Astahov_AT@rambler.ru

Теорема. *Пусть* $u(x)$ *— решение квазилинейного эллиптического уравнения*

$$a(x,u(x))\Delta u(x) + b(x,u(x))u(x) = 0,$$

определенное на $|x| \geqslant R_0 > 0$*. Тогда, если*

$$a(x,u(x)),\quad b(x,u(x)) \in C^\infty(|x| \geqslant R_0),\quad \frac{b(x,u(x))}{a(x,u(x))} \geqslant 0,$$

$$\frac{b(x,u(x))}{a(x,u(x))} - 1 = \overset{=}{\text{o}}\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty \quad \text{и} \quad \lim_{R\to\infty} \int\limits_{R}^{R+\varepsilon} |u(x)|^2\, dx = 0,$$

где $\varepsilon \neq 0$ *— фиксированное число, то* $u(x) \equiv 0$*.*

Автор благодарен проф. В.З. Мешкову за внимание к работе.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ ЧЕЗАРО[1]

Асташкин С.В. (Самара)
astashkn@ssu.samara.ru

Пространство Чезаро $Ces_p = Ces_p[0,1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ состоит из всех функций f, измеримых на $[0,1]$, для которых

$$\|f\|_{C(p)} = \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\, dt\right)^p\, dx\right]^{1/p} < \infty.$$

Хорошо известно [1, Th. 6.4.19], что в случае $1 \leqslant p \leqslant 2$ $(2 < p < \infty)$ пространство l^q изоморфно вложено в $L_p[0,1]$ тогда и только тогда, когда $p \leqslant q \leqslant 2$ (соответственно $q = p$ или $q = 2$). Кроме того, если

[1]Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 10-01-00077.

$1 < p < \infty$, то $L_p[0,1]$ ($L_1[0,1]$) содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^q, если и только если $q = p$ или $q = 2$ (соответственно $q = 1$) [1, Th. 6.4.21]. Аналогичное описание изоморфных и дополняемых копий l^q может быть дано и для пространств Чезаро.

Теорема 1 [2].

(a) *Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то пространство l^q изоморфно вложено в Ces_p тогда и только тогда, когда $q \in [1,2]$.*

(b) *Если $2 < p < \infty$, то пространство l^q изоморфно вложено в Ces_p тогда и только тогда, когда $q \in [1,2]$ или $q = p$.*

Теорема 2. *Пространство Чезаро Ces_p $(1 < p < \infty)$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^q, тогда и только тогда, когда $q = 1$ или $q = p$.*

Заметим, что $Ces_1[0,1]$ изометрически совпадает с весовым пространством $L^1(\ln \frac{1}{t})$ [2, Th. 1]. Поэтому Ces_1 содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^q, тогда и только тогда, когда $q = 1$.

Литература

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, New York 2006.

[2] S. V. Astashkin and L. Maligranda, *Structure of Cesàro function spaces*// Indag. Math. (N.S.). 2009, V. 20(3), 329–379.

К ВОПРОСУ О ДОПУСТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАР ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Афанасьева Т.Н. (Краснодар)

laktanik@rambler.ru

Рассматривается нелинейное разностное уравнение

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk}(x_k + \varphi(k, x_k)) + f_n, n \geqslant 0, \tag{1}$$

где x_n, f_n, $\varphi(n,x)$ — векторы из C^m, A_{nk} — $m \times m$ матрицы с комплексными элементами. Матрица $A = \{A_{nk}\}$ является ядром уравнения (1). Резольвентой ядра A называется матрица $R = \{R_{nk}\}$, удовлетворяющая уравнению $R_{nk} = A_{nk} + \sum\limits_{i=k+1}^{n-1} A_{ni}R_{ik}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Обозначим через l_2^m линейное пространство векторов из C^m с нормой $\|x\|_{l_2^m} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} |x^j|^2}$; M_m — пространство комплексных $m \times m$ матриц $A = \{a^{ij}\}$ с нормой $\|A\|_{M_m} = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m} |a^{ij}|^2}$; l_∞ — пространство ограниченных последовательностей векторов из C^m с нормой $\|x\|_{l_\infty} = \sup\limits_{n\geqslant 0} \|x_n\|_{l_2^m}$.

Определение 1. *Пусть F и X — некоторые множества. Пара (F, X) называется допустимой относительно уравнения (1), если при любом $f = \{f_n\} \in F$ решение $x = \{x_n\} \in X$.*

Справедливы следующие утверждения.

Обозначим через $X_{q_0} = \{x \in l_\infty : \exists q : 0 < q \leqslant q_0 < 1 : \|x_n\| \leqslant cq^n, n \geqslant 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $\|R_{nk}\| \leqslant c_1 q_1^n$, $\|f_n\| \leqslant c_2 q_2^n$, где $0 < q_i < 1$, $i = 1, 2$, $\|\varphi(n, x)\| \leqslant a_n\|x\| + b_n\|x\|^{1+\beta}$, $\beta \neq 0$. Тогда пара (X_{q_0}, X_1) допустима относительно уравнения (1).*

Обозначим через $X_{\alpha_0} = \{x \in l_\infty : \exists\alpha : \alpha \geqslant \alpha_0 > 1 : \|x_n\| \leqslant \dfrac{c}{(n+1)^\alpha}, n \geqslant 0\}$.

Теорема 2. *Пусть $\|R_{nk}\| \leqslant \dfrac{c_1}{(n+1)^{\alpha_1}}$, $\|f_n\| \leqslant \dfrac{c_2}{(n+1)^{\alpha_2}}$, где $\alpha_i > 1$, $i = 1, 2$, $\|\varphi(n, x)\| \leqslant a_n\|x\| + b_n\|x\|^{1+\beta}$, $\beta \neq 0$. Тогда пара (X_{α_0}, X_1) допустима относительно уравнения (1).*

Литература

1. Цалюк З. Б. *О некоторых методах получения оценок решений неравенств*// Диф. уравнения.– 1988. – Т. 24. – № 2. – С. 250–259.

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМ ОБ ИЗБЫТОЧНОМ СПРОСЕ

Ашихина Е.С. (Воронеж)

ashikhina_ zhenya @mail.ru

Пусть X, Y, Z- метрические пространства.

Определение 1. *Мультиотображение $T : X \mapsto Y$ называется обобщенно ациклическим, если для него существует селектирующая пара $(p, q) \subset T$ т.е., пара отображений $p : Z \mapsto X$ и $q : Z \mapsto Y$ таких,что:*

1. p - отображение Вьеториса (см.[1])

2. $q(p^{-1}(x)) \subset T(x), \forall x \in X$

Через $\mathtt{V}_{ga}(X,Y)$ обозначим совокупность полунепрерывных сверху мультиотображений, являющихся композициями обобщенно ациклических отображений.

Определение 2. *Непустое подмножество X топологического векторного пространства E называется допустимым, если для любого компактного подмножества $K \subset X$ и любой окрестности $V \subset E$ точки 0, здесь существует непрерывное отображение $h : K \mapsto X$ такое, что $x - h(X) \in V$ для всех $x \in K$ и $h(K)$ содержится в конечномерном подпространстве $L \subset E$.*

С помощью теорем о неподвижной точке для мультиотображений из класса $\mathtt{V}_{ga}$ доказывается следующее обобщение теорем Вальраса и Гейла-Никайдо-Дебре.

Теорема 1. *Пусть K и L - компактные выпуклые подмножества топологических векторных пространств E и F соответственно, такие что K—допустимо. Пусть $c \in R$; $f : K \times L \mapsto R$— непрерывная функция, $T : X \mapsto Y$-мультиотображение. Положим что:*

1. $y \in L, f(\cdot, y)$*—квазивыпукло*

2. $T \in \mathtt{V}_{ga}(K,L)$

3. для всех $x \in K$ и $y \in T(x)$ мы имеем: $f(x,y) \geqslant c$

Тогда существует равновесие Вальраса: $\exists(\bar{x} \in K, \bar{y} \in L)$ такие, что

$$\bar{y} \in T(\bar{x}), f(x,\bar{y}) \geqslant c, \forall (x \in K).$$

Теорема 2. *Пусть $(E, F < \cdot,\cdot >)$ двойственная система топологических векторных пространств E и F. Пусть K и L— компактные выпуклые подмножества топологических векторных пространств E и F соответственно, такие что K—допустимо и P—выпуклый конус. Пусть $T : K \mapsto L \in \mathtt{V}_{ga}$ и выполнено $< x, y > \geqslant 0$ $\forall (x \in K)$, $y \in T(x)$ тогда $\exists \bar{x} \in K$ такое, что $T(\bar{x}) \cap P^{+} \neq \varnothing$.*

Литература

[1] Борисович Ю.Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В.В., Топологические инварианты многозначных отображений

и разрешимость операторных включений. Итоги науки и техники 1986г.,29т., гл.2, §2, (152 – 211).

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ СИСТЕМ РАДИОСВЯЗИ

Багдасарян А.С., Кащенко Г.А., Семенов Р.В., Николаев О.В., Кузеванов А.Л.

Математически задача аппроксимационного синтеза (АС) трансверсальных фильтров (ТФ) с заданной "эталонной" амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) формулируется следующим образом: найти значение вектора параметров $X^* \in D$, минимизирующее величину (функционал):

$$Q(X) = \|H_0(\omega) - H_1(X,\omega)\|_L\,, \qquad (1)$$

где $\omega \in E_\omega$ – множество значений переменной ω, представляющее собой дискретное или непрерывное множество точек либо совокупность дискретных и непрерывных множеств точек на частотной оси; $\|*\|_L$ - критерий близости (норма) функций $H_0(\omega)$ и $H_1(X,\omega)$ на множестве E_ω; D- допустимая область изменения компонент вектора варьируемых параметров X.

Передаточные функции ТФ (1) для рассматриваемой задачи являются усеченным рядом Фурье. Известно, что усеченный ряд Фурье является полиномом наилучшего приближения для функции $H_0(\omega)$ в смысле нормы пространства $L_2(-\pi,\pi)$. В случае чебышевской нормы согласно теореме Джексона имеем:

$$\|H_0(\omega) - H_1(X,\omega)\|_{L\infty} \leqslant (3 + \ln(N))\, W\left[\pi/(N+1), H_0\right], \qquad (2)$$

где $W[\delta,H_0]$ модуль непрерывности функции $H_0(\omega)$ в заданном интервале.

Для функции $H_0(\omega)$ r-я частная производная $H_0^{(r)}(\omega)$ которой принадлежит классу Klipα, выполняется неравенство:

$$\|H_0(\omega) - H_1(X,\omega)\|_{L\infty} \leqslant K_1 \ln(N)/(N^{r+a}), \qquad (3)$$

Из (3) следует, что если функция $H_0(\omega)$и ее r-2 производные непрерывны, а r-1 производная кусочно-непрерывна, то коэффициенты импульсного отклика фильтра будут стремиться к нулю как величина $1/N^r$. Следовательно, задавая "эталонную" АЧХ $H_0(\omega)$ в виде функции, имеющей достаточно большое число производных, мы увеличиваем точность аппроксимации. Из (3) следует, что если $H_0(\omega)$ доопределить в переходных областях, то ее наилучшее приближение должно убывать достаточно быстро. На основании теоремы Джексона "эталонную" АЧХ $H_0(\omega)$ необходимо задавать таким образом, чтобы у нее существовало как можно больше непрерывных производных. Тогда, согласно теореме С. Б. Стечкина для оценки степени приближения в рассматриваемом случае справедливо следующее соотношение

$$\|H_0(\omega) - H_1(X,\omega)\|_{L\infty} \leqslant C_r(3+\ln(N))/((\omega_G - \omega_S)^r N^r), \qquad (4)$$

где ω_S и ω_G соответственно частоты среза полосы пропускания и граничная частота полосы задерживания; C_r некоторая константа, зависящая от числа r производных у аппроксимируемой функции $H_0(\omega)$. В докладе приведены варианты заданий "эталонных" АЧХ, удовлетворяющие требованиям теорем Джексона и Стечкина. Рассмотренный подход к заданию "эталонных" АЧХ позволяет получить существенно лучшие результаты решения задачи (1) АС трансверсальных фильтров. Полученные теоретические результаты подтверждены экспериментальными расчетами с использованием ПЭВМ.

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

Баев А.Д. (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha^{/}(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp\left(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty\left(R^1_+\right)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} =$

$\sqrt{2\pi}\left\|u\right\|_{L_2(R^1_+)}$,что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$.

Легко показать, что на функциях $u(t)\in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j=1,2,...,$$

где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Условие 1. Существует число $\nu\in(0,1]$ такое, что $\left|\alpha^/(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \leqslant c < \infty$ при всех $t\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t)\in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 = s_1(\nu)$.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$, $x \in R^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha\left[\lambda(x,t,\xi,\eta)\,F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right]$.

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ принадлежит классу символов $S^\sigma_\alpha(R^1\times\Omega)$, $\sigma\in R^1$, $\Omega\subseteq(0;+\infty)$, $x\in R^1$, $t\in(0;+\infty)$, если $\lambda(x,t,\xi,\eta)\in C^\infty\left(\Omega\times R^{n-1}\times R^1\right)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\frac{\partial^l}{\partial\xi^l}\frac{\partial^p}{\partial\eta^p}\lambda(x,t,\xi,\eta)\right| \leqslant$$

$$c_{\tau,m,l,p}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)},$$

где $\tau,m,l,p = 0,1,2,...,$ $c_{\tau,m,l,p} > 0$ — некоторые константы, не зависящие от x,t,ξ,η,σ.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $q>1$, σ – действительные числа, $v(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. Пусть символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S^\sigma_\alpha(R^1\times\Omega)$, $\sigma\in R^1$, $\Omega\subseteq(0;+\infty)$, $x\in R^1$, $t\in(0;+\infty)$. Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = \lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(x,0,D_x,0)v(x,t) =$$
$$= \lim_{t\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(x,0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,t)]]. \tag{1}$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha}(R^1\times\Omega)$, $\sigma\in R^1$, $\Omega\subseteq(0;+\infty)$, $x\in R^1$, $t\in(0;+\infty)$. Пусть функция $v(x,t)$ такова, что функция $D^N_{\alpha,t}v(x,t)$ при всех $x\in R^{n-1}$ принадлежит, как функция переменной t пространству $L_2(R^1_+)$ при некотором $N\in[\max\{\sigma+1,1\};s_1]$, где s_1 определено в условии 1. Пусть $\lim\limits_{t\to+\infty} D^j_{\alpha,t}v(x,t)=0$ при всех $x\in R^{n-1}$, $j=0,1,2,...,N-1$. Тогда при всех $x\in R^{n-1}$ справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t)=0$.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АДАПТИВНЫХ СВЕРХБОЛЬШИХ СЕНСОРНЫХ СЕТЕЙ

Баев А.Д., Нечаев Ю.Б., Стромов А.В. (Воронеж)
astromov@yandex.ru

Задача минимизации количества узлов сверхбольшой сенсорной сети расположенной на плоскости ($n=1$) или в пространстве ($n=2$), оснащенной узлами с антеннами с адаптивными диаграммами направленности в условиях воздействия помехи (что обуславливает вырождение при $y\to 0$) описывается следующим уравнением.

В полосе $R^n_d=\{x\in R^{n-1}, 0<y<d\}$, где $d>0$ - некоторое число, рассмотрим дифференциальный оператор $L_{2m}(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha(y)})=\sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2} a_{\tau j}\mathcal{D}^{\tau}_x\mathcal{D}^{j}_{\alpha(y)}$, $A(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha(y)},\partial_y) = L_2(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha(y)})-b\partial_y$, где $\partial_y=\frac{\partial}{\partial y}$, $\mathcal{D}_{\alpha(y)}=\imath\sqrt{\alpha(y)}\partial_y\sqrt{\alpha(y)}$, $\mathcal{D}^{\tau}_x=(\imath)^{|\tau|}\partial^{\tau_1}_{x_1}\partial^{\tau_2}_{x_2}...\partial^{\tau_{n-1}}_{x_{n-1}}$, $\tau=(\tau_1,...,\tau_{n-1})$, $|\tau|=\tau_1+\tau_2+...+\tau_{n-1}$, $a_{\tau j}$ - комплексные коэффициенты. Здесь функция $\alpha(y)$ - достаточно гладкая при $y\in[0;d]$, $\alpha(y)>0$ при $y>0$, $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$.

В полосе R^n_d рассмотрим уравнение

$$A(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha(y)},\partial_y)v(x,y)=F(x,y) \tag{1}$$

На границе $y=0$ зададим условие

$$v(x,y)|_{y=0}=G(x) \tag{2}$$

а на границе $y = d$ задано условие

$$v(x, y)|_{y=d} = 0 \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. *При всех* $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$ *справедливо неравенство* $Re\bar{b}L_2(\xi, \eta) \geqslant c(1 + |\xi| + |\eta|)^2$, *причем постоянная* $c > 0$ *не зависит от* ξ, η.

Условие 2. $Im(\bar{b}a_{0,2}) = 0$.

Рассмотрим пространства, в которых будет изучаться задача.

Определение 1. *Пространство* $H_{S,\alpha}(R^n_d)$ *состоит из всех функций* $v(x, y)$, *для которых конечна норма* $\|v\|_{S,\alpha} = \|F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(1 + |\xi| + |\eta|)^S F_{\xi\to x} F_\alpha[v]]\|_{L_2(R^n_d)}$.

Определение 2. *Пространство* $H_{S,\alpha,2}(R^n_d)$ *состоит из всех функций* $v(x, y)$, *для которых конечна норма* $\|v\|_{S,\alpha,2} = \{\sum\limits_{j}^{[S/2]} = 0\|F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(1 + |\xi| + |\eta|)^{S-2j} F_{\xi\to x} F_\alpha[\partial^j_y v]]\|_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}}$.

Определение 3. *Пространство* $H_S(R^{n-1})$ $(S \in R^1)$ *состоит из всех функций* $g(x)$, *для которых конечна норма* $\langle\langle g\rangle\rangle_S = \|F^{-1}_{\xi\to x}(1 + |\xi|)^S F^{-1}_{x\to\xi} g[x]\|_{L_2(R^{n-1})}$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1,2. Тогда для любых функций*

$F(x, y) \in H_{S,\alpha,2}(R^n_d)$, $G(x) \in H_{S+1}(R^{n-1})$ *существует единственное решение* $v(x, y)$ *задачи (1)-(3), принадлежащее пространству* $H_{S+2,\alpha,2}(R^n_\alpha)$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\|v\|_{S+2,\alpha,2} \leqslant c(\|F\|_{S,\alpha,2} + \langle\langle G\rangle\rangle_{S+1})$$

с константой $c > 0$, *не зависящий от* V, F, G .

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КЛАССАХ НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ

Балгимбаева Ш.А. (Алматы)

sholpan@math.kz

Рассматривается задача оптимального восстановления оператора дифференцирования $\mathcal{A} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ на единичном шаре $\mathrm{SB}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^n)$ периодического пространства Никольского-Бесова смешанной гладкости [1], где $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $r \in \mathbb{R}^n_+$; $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi]^n$; здесь $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$, $0 \leqslant \alpha < r$, $|\alpha| \neq 0$. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_n)$ упорядочим следующим образом: $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_n$; введем векторы $\gamma = \frac{r}{r_1} = (1, ..., \frac{r_{\nu+1}}{r_1}, \ldots, \frac{r_n}{r_1})$ и $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n) : \gamma'_j = \gamma_j$, $j = \overline{1, \nu}$, и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1, n}$; $\rho(s) = \{k : k = (k_1, \ldots, k_n), 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, n}\}$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n_0$. Ступенчатый гиперболический крест — это множество $Q^\gamma_m = \bigcup_{(s,\gamma) \leqslant m} \rho(s)$, расширенный ступенчатый гиперболический крест — это $Q^{\gamma'}_m$.

В качестве информации $I_m(f)$ о функциях $f \in \mathrm{SB}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^n)$ используется набор тригонометрических коэффициентов Фурье с гармониками из (расширенного) ступенчатого гиперболического креста $I^\delta_m(f) = \{\hat{f}(k) : k \in Q^\delta_m\}$; δ — либо γ, либо γ'.

Для построения метода приближенного восстановления оператора $\mathcal{A}$ используется система $\Psi^{(n)} = \Psi_1 \otimes \ldots \otimes \Psi_n$, являющаяся тензорным произведением систем $\Psi_i = \{\varphi_{00}(x_i), \psi^\varepsilon_{vw}(x_i)\}$ одномерных периодических всплесков, построенных в [2]; здесь

$$\varphi_{00} = 1, \ \psi^\varepsilon_{vw} = 2^{-v} \sum_{\varepsilon k = 2^{v-1}}^{2^v - 1} e^{ik(x - t_{wv})},$$

$$t_{wv} = \frac{2w+1}{2^{v-1}} \pi, \quad v \geqslant 1, \ w = \overline{0, 2^{v-1} - 1}, \ \varepsilon = \pm 1.$$

В [2] показано, что система Ψ_i является безусловным базисом для пространства $B^r_{p\theta}(\mathbb{T})$, $1 < p, \theta < \infty$, а в [3], что $\Psi^{(2)}$ — безусловный базис для пространства $SB^{(r_1, r_2)}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^2)$.

Нами найден точный порядок погрешности оптимального восстановления оператора $\mathcal{A}$ на классе $\mathrm{SB}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^n)$ по информации

$I_m^{\gamma}(f)$, $I_m^{\gamma'}(f)$, при этом линейным оптимальным по порядку методом восстановления является действие оператора $\mathcal{A}$ на соответствующую "гиперболическую" частную сумму ее разложения в ряд по системе $\Psi^{(n)}$.

Литература

1. Т.И. Аманов Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p,\theta}^{(r)}B(\mathbb{R}_n)$ и $S_{p^*,\theta}^{(r)}B(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi; j = 1,\dots,n)$// Труды МИ АН СССР, 1965, Т. 77, С. 5–34.

2. П.И. Лизоркин О базисах и мультипликаторах в пространствах $B_{p,\theta}^{r}(\Pi)$ // Труды МИ АН СССР, 1977, Т. 143, С. 88–104.

3. H.-J. Schmeisser An unconditional basis in periodic spaces with dominating mixed smoothness properties//Analysis Mathematica, 1987, V.13, P. 153–168

ОБ ОПЕРАТОРАХ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

Баркина У.В. (Ростов-на-Дону), Мелихов С.Н. (Ростов-на-Дону, Владикавказ)

barkinauv@mail.ru, melih@ms.math.rsu.ru

Пусть Q — выпуклое множество в $\mathbb{C}$ (отличное от $\mathbb{C}$) с непустой внутренностью $\operatorname{int} Q$. Предположим, что Q обладает следующими свойствами: (1) $Q \cap (\partial Q)$ компактно (∂Q — граница Q); (2) если $Q_0 := (\operatorname{int} Q) \cup \big((\partial Q) \setminus (Q \cap (\partial Q))\big)$, то пересечение Q_0 со всякой опорной прямой к $\overline{Q}$ (замыканию Q) компактно.

Условия (1) и (2) необходимы и достаточны для того, чтобы множество Q обладало счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей.

Далее зафиксируем счетный базис окрестностей $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ множества Q, где Q_n — выпуклые области такие, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q, с естественной топологией индуктивного предела: $A(Q) := \operatorname{ind}_{n\to} A(Q_n)$, где $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в Q_n.

Для ограниченного множества $M \subseteq \mathbb{C}$ символом H_M обозначим опорную функцию M, то есть $H_M(z) := \sup_{t\in M} \operatorname{Re}(zt)$, $z \in \mathbb{C}$.

Определение. Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

на G. Для $r \in (0,1)$ пусть $G_r := \varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\})$. Компакты G_r выпуклы. Положим $H_r := H_{G_r}, r \in (0,1)$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r \to 1-0} \frac{H_G(z) - H_r(z)}{1-r} \in (0, +\infty],\ |z| = 1.$$

Пусть G — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, ψ — конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus G$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Для $r > 1$ компакты $G_r := \mathbb{C} \setminus \psi(\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\})$ выпуклы. Пусть $H_r = H_{G_r}, r > 1$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r \to 1+0} \frac{H_r(z) - H_G(z)}{r-1} \in [0, +\infty),\ |z| = 1.$$

Положим $\omega := (\partial Q) \cap Q$, $\omega_0 := (\partial Q) \setminus \omega$; $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $S_0 := \{z \in S : \mathrm{Re}\,(tz) = H_Q(z)$ для некоторого $t \in \omega_0\}$, $S_\omega := S \setminus S_0$.

Возьмем ненулевую целую функцию $a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ нулевого типа при порядке 1. Пусть $V(a)$ — множество нулей a. Оператор $a(D)f := \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}, f \in A(Q)$ линейно и непрерывно отображает $A(Q)$ на $A(Q)$. В докладе идет речь о необходимых и достаточных условиях того, что (фиксированный) дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. Эти условия формулируются в терминах существования специального семейства субгармонических функций и множества всех предельных точек последовательности $(z/|z|)_{z \in V(a)}$. Из полученных результатов вытекает

Теорема. *Пусть $0 \in \mathrm{int}\, Q$. Всякий ненулевой оператор $a(D)$: $A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда Q ограничено, функция $D_{\mathrm{int}\, Q}$ ограничена на каждом компакте в S_0 и функция $1/D_{\overline{Q}}$ ограничена на некоторой окрестности S_ω в S.*

Замечание. В статье [1] установлен критерий того, что фиксированный ненулевой оператор $a(D)$ имеет линейный непрерывный правый обратный в случае, когда Q ограничено.

Литература

1. Мелихов С. Н. Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.— Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 141–162.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ С ЭРМИТОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Барсуков А.И. (Воронеж)
a.barsoukov@rambler.ru

Пусть задана произвольная матрица A. Требуется найти все матрицы X, для которых коэффициенты пучка $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ являются эрмитовыми матрицами, то есть, $A + X = (A + X)^*$ и $AX = (AX)^*$. Конструктивно строится общее решение сформулированной задачи и приводится критерий единственности ее решения. Показано, каким образом общий вид искомых матриц X зависит от вида спектра заданной матрицы A. Постановка рассмотренной задачи и некоторые связанные с ней вопросы были впервые, по-видимому, рассмотрены в работе [1].

Литература

[1] *Lancaster P.* Hermitian Quadratic Matrix Polynomials: Solvents and Inverse Problem / Lancaster P., Tisseur F. // MIMS EPrint. – 2010. – № 10. – pp. 1-10.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ОДНОМЕРНОМ ПОГЛОЩАЮЩЕМ КАНАЛЕ

Батаронов И.Л., Ислентьев О.В., Петренко В.Р., Пешков В.В., Селиванов В.Ф. (Воронеж)
i-bataronov@mail.ru

При моделировании ряда процессов возникает задача описания диффузионно-подобного массопереноса газа в узком канале в условиях поглощения газа стенками канала. Вследствие последнего процесса в средней части канала может образоваться зона, практически не содержащая поглощенного газа. Модель, описывающая процесс проникновения газа в канал в таком режиме представляет собой задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{lK(T)}{S\sqrt{t - t_0(x)}}, \quad 0 < x < x_0(t); \\ n(0,t) = n_0, \quad n(x_0,t) = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial x}(x_0,t) = 0 \end{array} \right. . \qquad (1)$$

Здесь $n(x,t)$ – средняя концентрация газа в поперечном сечении канала с координатой x, S и l – площадь и периметр сечения, D – коэффициент диффузии газа, K – константа скорости поглощения газа стенками канала, являющаяся функцией температуры T,

$x_0(t)$ – координата фронта горизонтальной части канала, $t_0(x)$ – время достижения фронтом координаты x, являющееся обратной функцией к $x_0(t)$.

В задаче (1) закон движения фронта $x_0(t)$ не является заранее заданным, а определяется самосогласованно в соответствии с граничными условиями (1). Кроме того, при учете теплового эффекта превращения поле температуры также будет неоднородным, и уравнение (1) с учетом доминирующего теплопереноса по стенке канала следует дополнить уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{l\,\Delta h\,K(T)}{S_0 C\sqrt{t - t_0(x)}} \quad , \tag{2}$$

где C и χ – удельная теплоемкость и коэффициент температуропроводности материала стенки, имеющей площадь сечения S_0, Δh – атомная энтальпия топохимической реакции. Зависимость константы скорости от температуры может быть представлена в аррениусовском виде

$$K(T) = K_0 \varphi(T), \quad \varphi(T) = \exp\left(\frac{T_0(T - T_1)}{T_1\,T}\right), \tag{3}$$

где T_0 – активационный барьер в температурных единицах, T_1 – температура среды, K_0 – предэкспонента.

Перейдем в (1), (2) к безразмерным переменным $t = t_c\tau$, $x = x_c\xi$, $n = n_0 z$, $T = T_a\theta$.

Здесь $t_c = (Sn_0/lK_0)^2$ – характеристическое время, определяющее длительность переходного режима, $x_c = \sqrt{Dt_c}$ – характеристическая длина, соответствующая минимальной длине канала, при которой образуется вакуумированная зона, $T_a = Sn_0\Delta h/S_0 C$ – адиабатическое повышение температуры стенки в результате топохимической реакции. В результате уравнения (1), (2) преобразуются к виду содержащему два критериальных параметра $P_1 = \frac{\chi}{D}$, $P_2 = \frac{T_0 T_a}{T_1^2}$. Проведено исследование влияния этих параметров на характер решения и установлено наличие режима неустойчивости, аналогичного “тепловому взрыву”.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В ПОРИСТОМ АБСОРБИРУЮЩЕМ МАТЕРИАЛЕ

Батаронов И.Л., Петренко В.Р., Селиванов В.Ф., Милушева Л.В., Акиньшин П.О. (Воронеж)

i-bataronov@mail.ru

Для представления структуры системы пор в задаче массопереноса была использована капиллярная модель с многослойной системой капилляров переменного сечения, в которой система пронумерованных пор, имеющих объемы V_n и площади поверхности S_n, соединена капиллярами, характеризующимися коэффициентами гидродинамического $\xi_{n,k}$ и диффузионного $\zeta_{n,k}$ сопротивлений. В итоге система уравнений модели включает в себя:

– уравнения течения по капиллярам $J_{n\to k} = \frac{1}{2}\xi_{n,k}(N_n^2 - N_k^2) + \zeta_{n,k}(N_n - N_k)$

– уравнение накопления газа в поре $\sum\limits_k J_{n\to k} + J_{abs}[\sigma_n(t)] + \theta(\sigma_n - S_n)V_n \cdot \frac{dN_n}{dt} = 0$

– уравнение потока поглощения $J_{abs}[\sigma] = \theta(t-\tau_n)\int\limits_0^\sigma \frac{K\cdot d\sigma'}{\sqrt{t-t_{\sigma'}}}$.

Здесь $N_n(t)$ – концентрация газа в поре, $J_{n\to k}$ – полный поток газа из $n-$ в $k-$ пору, $\sigma_n(t)$ – площадь актированной поверхности поры ($0 \leqslant \sigma_n \leqslant S_n$), K – константа скорости поглощения газа титановым сплавом, τ_n – момент времени начала активации поры, $\theta(x)$ – единичная ступенчатая функция.

Преобразуем модель в рамках теории подобия, вводя безразмерные величины:$n_k = \frac{N_k}{N_0}$, $s_k = \frac{\sigma_k}{S_0}$, $j_{n\to k} = \frac{J_{n\to k}}{m\xi_0 N_0^2}$, $\tau = \frac{t}{t_0}$, где N_0 – концентрация газа в окружающей среде, V_0, S_0, ξ_0, ζ_0 – средние значения соответствующих параметров в поровой системе, m – среднее число соседних пор. Определим здесь масштаб времени t_0 соотношением $t_0 = \frac{V_0}{m\xi_0 N_0}$, физический смысл которого означает время наполнения поры, соединенной с окружающей средой, в отсутствие процесса поглощения газа.

В результате уравнения системы преобразуются к виду, содержащему всего два критериальных параметра:

$$Q = \frac{KS_0}{\sqrt{V_0 m\xi_0 N_0^3}},\ \eta = \frac{N_c}{N_0}.$$

Здесь $N_c = \zeta_0/\xi_0$ – пороговое значение концентрации, при котором происходит замена гидродинамического на диффузионный режим течения газа по капилляру.

Кроме этих основных параметров, система уравнений также содержит разброс пара параметров, характеризующих поровую структуру, который можно учесть симплексами

$$\chi_V = \frac{\delta V}{V_0},\ \chi_S = \frac{\delta S}{S_0},\ \chi_\xi = \frac{\delta \xi}{\xi_0},\ \chi_\zeta = \frac{\delta \zeta}{\zeta_0},\ \chi_m = \frac{\delta m}{m}.$$

Здесь δR – среднеквадратическое отклонение величины R.

Параметр Q характеризует отношение скоростей поглощения и притока газа в поре и является определяющим для вида решения. А именно, масштаб t_0 задает естественную сетку времени для численного решения системы уравнений, тогда как имеется другой масштаб $t_1 = (V_0 N_0 / K S_0)^2$, определяющий время выхода на квазистационарное решение. Отношение этих параметров составляет $t_1/t_0 = Q^{-2}$. В результате для интервалов времени $\tau < Q^{-2}$ зависимость времени проникновения газа до слоя пор с номером m имеет вид $\tau \propto m^2$, тогда как при $\tau > Q^{-2}$ проникновение газа в пористую структуру затормаживается: $\tau \propto m^4$.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОДВЕСОВ

Батаронова М.И., Шунин Г.Е. (Воронеж)
vmfmm@mail.ru

Для расчета электромеханических характеристик мезоскопических сверхпроводящих подвесов (МСЭМП) требуется знать распределение плотности сверхпроводящих токов в их конструктивных элементах размеры которых сравнимы с лондоновской глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Для этого необходимо найти численное решение связанной системы уравнений Лондонов и стационарных уравнений Максвелла в трёхмерных областях сложной формы с заданными скачками скалярного магнитного потенциала на определённых разрезах. Из существующих численных методов для этой цели наилучшим образом подходит метод конечных элементов (МКЭ) как наиболее универсальный метод с минимальными ограничениями. МКЭ также хорошо адаптирован для вычисления интегральных характеристик, необходимых для анализа таких устройств. МКЭ успешно применяется при решении задач расчета электромагнитных полей в электротехнике. Он стал математической основой универсальных компьютерных систем мультифизического анализа технических объектов, таких как Ansys, Nisa, Maxwell и др. Однако математические модели, используемые в этих системах, не учитывают специфики электродинамики мезоскопических сверхпроводников, в силу чего их использование для моделирования МС-ЭМП невозможно. Требуется разработка дополнительных модулей к ним, либо применение специализированных систем конечно-элементного анализа. Для этих целей перспективно использовать наиболее мощную систему конечно-элементного мультифизического анализа Comsol Multiphysics, скриптовый конечно-элементный комплекс программ Flexpde и конечно-элементную библиотеку программ Diffpack, а также разрабатываемый в Воронежском государственном техническом университете на кафедре высшей математики и физико-математического моделирования пакет программ Fempdesolver, предназначенный для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом конечных элементов с дополнительными условиями, учитывающими специфику электродинамики сверхпроводников. С его помощью можно решать двух- и трехмерные задачи моделирования магнитных полей в многосвязных областях сложной формы в присутствии сверхпроводящих токонесущих элементов и рассчитывать электромеханические характеристики СЭМП. В докладе рассмотрены вопросы интеграции пакета Fempdesolver с системой Comsol Multiphysics. Приводятся результаты расчётов распределений магнитных полей в мезоскопических сверхпроводящих системах:шар в однородном магнитном поле, два шара в однородном магнитном поле, кольцо с током и шар, два кольца с током.

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕПОЛНОЙ Λ-ВАРИАЦИИ[1]

Бахвалов А.Н. (Москва)

anbakh@rol.ru

Пусть Δ — невырожденный m-мерный промежуток, $\Lambda BV(\Delta)$ — класс функций ограниченной полной Λ-вариации, а $\Lambda\widehat{B}V(\Delta)$ — класс функций, у которых одномерная Λ-вариация по каждой переменной равномерно ограничена как функция от оставшихся $(m-1)$ переменных. При $\Lambda = H = \{n\}$ Λ-вариация называется гармонической.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 11-01-00161, и программой «Ведущие научные школы», грант НШ-3252.2010.1.

Классы ограниченной полной Λ-вариации (в частности, гармонической вариации) нашли применение в задаче о сходимости кратных рядов Фурье (обзор результатов и подробное определение см., например, в [1]). Классы ограниченной неполной Λ-вариации впервые были определены в [2], и разные варианты такого определения использовались для получения результатов о локализации прямоугольных сумм кратных рядов Фурье.

Нами получен следующий результат о локализации. Скажем, что m-кратный ряд сходится d-квазирегулярно к числу S, если существуют такие постоянные $C_{i,j} \geqslant 1$, $i \neq j$, что все прямоугольные частичные суммы с номерами n, удовлетворяющие оценкам $n_i \leqslant C_{i,j}(n_j)^d$, сходятся к S при увеличении $\min_j n_j$.

Теорема 1. Пусть $\Lambda = \{\frac{n}{\ln^a(n+1)}\}$ для некоторого $a > m-2$. Пусть измеримая функция f равна нулю на открытом множестве $G \subset [-\pi,\pi]^m$ и принадлежит классу $\Lambda\widehat{B}V([-\pi,\pi]^m)$. Тогда для любого $d \geqslant 1$ кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции равномерно d-квазирегулярно сходится к нулю по прямоугольникам на любом замкнутом множестве $K \subset G$. Если же $a < m-2$, то существует непрерывная функция f из класса $\Lambda\widehat{B}V([-\pi,\pi]^m)$, которая равна нулю на $[-1,1]^m$, но кубические частные суммы ее ряда Фурье в точке 0 не сходятся к нулю.

Кроме того, получены результаты о вложении классов ограниченной неполной вариации в классы ограниченной полной вариации.

Теорема 2. Пусть $m \geqslant 2$, Δ — m-мерный промежуток, $a \in (0, m-1)$, и $\lambda_n = \frac{n}{\ln^a(n+1)}$. Тогда класс $\Lambda\widehat{B}V(\Delta)$ не вкладывается в класс $HBV(\Delta)$.

Теорема 3. Пусть $m > 1$, $a > m-1$ и $\lambda_n = \frac{n}{\ln^a(n+1)}$. Тогда для любого m-мерного промежутка Δ класс $\Lambda\widehat{B}V(\Delta)$ вложен в класс $HBV(\Delta)$.

Литература

1. *Бахвалов А.Н.,* “О локальном поведении многомерной Λ-вариации.”// Мат. сб. 2010. Т. 201, N11. 3–18.

2. *Goffman C., Waterman D.*, “The localization principle for Fourier series”. // Studia math., 1980, V.99, N1. P.41–57.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОТНОШЕНИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Бесаева С.В. (Владикавказ)
besaevasv@mail.ru

Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство, $LB(X)$ — алгебра линейных операторов, действующих в X, E — линейное подпространство из X. Обозначим через $l^p_\alpha = l^p_\alpha(\mathbb{Z}_+, X)$, где $p \in [1, \infty]$, банахово пространство, состоящее из последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to X$ векторов, принадлежащих X и суммируемых с весом (весовой функцией) $\alpha : \mathbb{Z}_+ \to (0, \infty)$ с нормой $\|x\| = \|x\|_{p,\,\alpha} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}\right)^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$.

Следующие теоремы описывают спектр линейного разностного отношения $\mathcal{K}_E \in LR(l^p_\alpha)$, определенного на банаховом пространстве $l^p_\alpha = l^p_\alpha(\mathbb{Z}_+, X)$ (см. [1],[3]) , заданного следующим соотношением $\mathcal{K}_E = \{(x, y) \in l^p_\alpha \times l^p_\alpha \ : y(n) = Bx(n-1),\ n \geqslant 1,\ y(0) \in E\}$, где $B \in L(X)$. Считается что $B \neq 0$. В частности, если $E = \{0\}$, то $\mathcal{K}_E = \mathcal{K}_{\{0\}}$ является линейным оператором. Пусть $\text{æ}_{out}(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)}\right)^{1/n}$, $\text{æ}_{int}(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)}\right)^{1/n}$.

Теорема 1. Пусть $E = \{0\}$, тогда спектр $\sigma(\mathcal{K}_{\{0\}})$ оператора $\mathcal{K}_{\{0\}}$ имеет вид $\sigma(\mathcal{K}_{\{0\}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|B\|\text{æ}_{out}(\alpha)\}$, если $\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)} < \infty$, и $\sigma(\mathcal{K}_{\{0\}}) = \mathbb{C}$, если $\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)} = \infty$.

Теорема 2. Пусть $E = X$ и оператор B обратим, тогда $\sigma(\mathcal{K}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant \text{æ}_{int}(\alpha)/r(B^{-1})\}$, при $\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} < \infty$, и $\sigma(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C}$, при $\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} = \infty$.

Получены приложения к исследованию дифференциальных операторов.

Литература

1. *Бичегкуев М. С., Бесаева С. В.:* О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов, в весовых пространствах. /Бичегкуев М. С., Бесаева С. В.// Изв. вузов. Математика.– 2011. – №2. – С. 16-21.

2. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами,

разностные отношения и полугруппы разностных отношений /Баскаков А. Г.// Изв. РАН. Сер. матем., 2009, том 73, выпуск 2, страницы – С. 3-68.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ ПРОГРАММНЫМИ СРЕДСТВАМИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТАЯЗЫКА “М”

Бессонов В.В., Кручинин С.В., Кузнецов А.В., Свиридов А.А.

На основе ранее сформированных понятий и операций метаязыка описания системы связи “М” авторами построено формализованное описание математической модели системы связи (системы телекоммуникаций) (см. [1]). Разработана программная реализация математической модели, положенная в основу единой среды визуального проектирования (ЕСВП). Данная программа является визуальным средством реализации метаязыка “М”, анонсированным в [2].

Среда ЕСВП позволяет осуществлять построение структуры исследуемой системы связи посредством использования сопоставленных основным объектам системы графических примитивов на основе интуитивно понятного интерфейса пользователя. В число моделируемых сущностей входят: локально-вычислительные сети, оконечное оборудование – ЭВМ; аппаратура передачи данных и каналообразования; каналы и линии связи).

Авторами также предложен обменный формат хранения и переноса информации об исследуемой системе телекоммуникаций между пользователями среды ЕСВП. Формат разработан на основе использования языка разметки XML. В настоящее время ведется работа над созданием хранилища данных модели системы телекоммуникаций, реализуемого при помощи СУБД PostgreSQL, а также над комплексом средств пакетной реализации метаязыка “М”.

Разработана пакетная реализация ЕСВП, основанная на языке SQL-скрипт, позволяющем заполнять базу данных, в которой хранятся объекты учета системы связи. При этом пакетная реализация оперирует строками языка такого вида, что конкатенация лексем языка соответствует определенной конструкции системы связи или операции (последовательности операций), осуществляемой над объектами учета, соответствующими, с одной стороны – понятиям метаязыка, а с другой стороны – объектам системы связи.

Лексемы языка описаны в статье [1], объекты системы связи и понятия метаязыка, соответствующие им, приведены в [2]. Объектами учета являются сущности, соответствующие понятиям языка и организованные таким образом, чтобы обеспечивать стандартные операции языка SQL.

Пример языковой конструкции:

Сеть связи Название сети связи = группа средств связи 1.название средства связи 1 + ... + группа средств связи N.название средства связи M.

Таким образом, на основе математической модели системы связи предполагается реализовать расширяемый комплекс средств для моделирования систем связи с целью исследования ее поведения, определения оптимальной структуры и параметров таких систем, а также в целях подготовки специалистов в области телекоммуникаций.

Литература

1. Бессонов В.В., Кузнецов А.В. Описание математической модели системы связи // Теория и техника радиосвязи, № 3, 2010. – С. 58-64.

2. Встраиваемый язык автоматизированной системы управления связью “M” и модель системы связи / Бессонов В.В., Кузнецов А.В. и др. // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна – 2010. Тезисы докладов. Воронеж: ВорГУ, 2010 – 176 с. С. 21-25

О РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Бибикова Р.И. (Вологда)

emuhamadiev@rambler.ru

Рассмотрим задачу

$$\triangle u + ru = f, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{2}$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$-производная по внешней нормали к границе Γ единичного квадрата $\Omega = \{(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Аппроксимируем задачу (1)-(2) на равномерной сетке ω_hс границей γ_h с погрешностью $0(h^2)$ разностными отношениями

$$u_{\overline{x}x} + u_{\overline{y}y} + r^h u^h = f^h, (x,y) \in \omega_h, \tag{3}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}u_{0,j} + 2u_{1,j} - \frac{1}{2}u_{2,j} = 0, \\ -\frac{3}{2}u_{n+1,j} + 2u_{n,j} - \frac{1}{2}u_{n-1,j} = 0, \\ -\frac{3}{2}u_{i,0} + 2u_{i,1} - \frac{1}{2}u_{i,2} = 0, \\ -\frac{3}{2}u_{i,n+1} + 2u_{i,n} - \frac{1}{2}u_{i,n-1} = 0, \\ i,j = 1,...,n, h = \frac{1}{(n+1)}. \end{cases} \tag{4}$$

Условия (4) появились так: т.к. пользуясь двумя слоями сетки получить аппроксимацию первой производной высшего, чем первый порядок, нельзя, то ищем аппроксимацию $u_x|_{x=0,1}, u_{y|_{y=0,1}}$ через три слоя сетки ω_h . Например, для $u_{x|_{x=0}}$:

$$u_x|_{x=0} = au_{0,j} + bu_{1,j} + cu_{2,j} = 0. \tag{5}$$

Разлагая $u_{1,j}$ и $u_{2,j}$ в ряд Тейлора в окрестности граничных узлов и подставляя эти разложения в (5) , имеем

$$au_{0,j} + b \cdot [u_{0,j} + \frac{h}{1!}(\frac{\partial u}{\partial x})_{0,j} + \frac{h^2}{2!}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_{0,j} + ...] +$$

$$+c \cdot [u_{0,j} + \frac{2h}{1!}(\frac{\partial u}{\partial x})_{0,j} + \frac{(2h)^2}{2!}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{0,j} + ...] = u_x|_{x=0}.$$

Отсюда

$$a + b + c = 0, b\frac{h}{1!} + c\frac{2h}{1!} = 1, b\frac{h^2}{2!} + c\frac{(2h)^2}{2!} = 0.$$

Решая эту систему относительно a, b, c, имеем:

$$a = -3/(2h), b = 2/h, c = -1/(2h).$$

Отсюда

$$u_x|_{x=0} = -3/2u_{0,j} + 2u_{1,j} - 1/2u_{2,j} + 0(h^{3)} = 0,$$

Остальные условия из системы (4) получаются аналогично. Пусть матрица C размера $n \times n$ имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

а $C^{'}$ -транспонированная матрица. Тогда разностная задача (3)-(4) в матричной форме имеет вид:

$$LU = \frac{1}{h^2}(CU + UC^{'} - 4U) + rU = F, \qquad (6)$$

где $U = (u_{i,j})$, $F = (f_{i,j})$, $i, j = 1, ..., n$.

Множество собственных значений оператора L вычисляются по формуле

$$\sigma(L) = \{\frac{1}{h^2}(\lambda + \mu - 4) + r\}$$

при λ, μ, пробегающих спектры $\sigma(C)$, $\sigma(C')$ матриц C и C' соответственно. По теореме Фробениуса матрица C как неотрицательная матрица имеет максимальное по модулю собственное значение, таким числом является $\lambda = 2$. Ему соответствует собственный вектор $x = (1, 1, ..., 1)$. Все другие собственные значения матрицы C меньше двух по модулю. Поэтому функция

$$P(\lambda, \mu) = \frac{1}{h^2}(\lambda + \mu - 4) + r$$

не обращается в нуль на множестве (λ, μ) при $\lambda \in \sigma(C), \quad \mu \in \sigma(C')$, если $r < 0$. По теореме Крейна - Далецкого [2] матричное уравнение (6) имеет единственное решение U, которое представимо в виде

$$U = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_C} \oint_{\Gamma_{C'}} \frac{(C - \lambda E)^{-1} F (C' - \mu E)^{-1}}{P(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu,$$

где $\Gamma_C, \Gamma_{C'}$-криволинейные контуры, охватывающие спектры операторов C и C'
соответственно.

Литература

1. Самарский А.А. , Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.:Наука, 1976. -252 с.

2. Далецкий Ю.Г.,Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.:Наука, 1970.-536 с.

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Блатов И.А., Старов А.И., Яковлев Е.К. (Самара)

blatow@mail.ru

Применение метода вейвлет-Галеркина к решению интегральных уравнений сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений высоких порядков, элементы которых выражаются через кратные интегралы от произведений базисных вейвлет-функций и ядра интегрального уравнения [1]:

$$A_{pq}^{ts} = \{a_{ijrf}^{pqts}\}, 1 \leqslant p, q, t, s \leqslant k - n_0 + 1,$$

$$A_{11}^{11} = \{a_{ijrf}^{1111}\}, m + 1 \leqslant i, j, r, f \leqslant 2^{n_0} - 1,$$

$$A_{pp}^{pp} = \{a_{ijrf}^{pppp}\}, 2^{n_0+p-2} \leqslant i, j, r, f \leqslant 2^{n_0+p-1} - 1,$$

$$a_{ijrf}^{pqts} = \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v)\psi_{ij}^{pt}(u, v)\psi_{rf}^{qs}(x, y)dxdydudv +$$
$$+ \int_a^b \int_a^b \psi_{ij}^{pt}(x, y)\psi_{rf}^{qs}(x, y)dxdy.$$

Непосредственное вычисление этих интегралов требует неприемлемо большого объема вычислений. В докладе предлагается метод их быстрого вычисления, состоящий в отыскании интегралов от B-сплайнов на мелкой сетке с последующим выражением искомых интегралов в виде их линейных комбинаций.

Литература

[1] Алашеева Е.А., Блатов И.А. Метод вейвлет-Галеркина решения интегральных уравнений Фредгольма в двумерных областях. Вестник СамГУ, №9, 2006, стр. 24-29

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА[1]

Богер А.А., Сумин В.А. (Воронеж)

kafvm@vgta.vrn.ru

Рассматривается нестационарная задача теплопроводности для квадратной области со стороной h, три стороны которой поддерживаются при температуре t_0 , а четвертая при температуре t_1.

Пусть количество теплоты, выделяемое внутренними источниками - q, тогда уравнение теплопроводности и граничные условия в безразмерных переменных приобретают вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + 1 \tag{1}$$

$$T(0, Y, \Theta) = 1, \tag{2}$$

$$T(X, Y, 0) = T(1, Y, \Theta) = T(X, 0, \Theta) = T(X, 1, \Theta) = 0, \tag{3}$$

где переход от размерных величин к безразмерным осуществляется по формулам: $X = x/h$, $Y = y/h$, $\Theta = \tau/Pr \cdot \overline{\tau}$, $T = (t - t_0)\lambda/qh^2$, $\overline{\tau} = h^2/\nu$, ρ - плотность; λ - теплопроводность среды; τ - время; ν - кинематическая вязкость; Pr - число Прандтля.

Решение системы (1) - (3) получено последовательным применением конечных интегральных преобразований Лапласа и синус-Фурье по переменным Θ и X:

$$T(X, Y, \Theta) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}(\cos\mu_m - 1)\left\{-\frac{2}{\mu_m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\beta_n X) + (1+\beta_n^2)\sin[\beta_n(1-X)]}{\beta_n(\beta_n^2+\mu_m^2)\cos\beta_n}\times\right.$$

$$\times\exp[-(\beta_n^2+\mu_m^2)\theta] + \frac{\operatorname{sh}(\mu_m X) + (1-\mu_m^2)\operatorname{sh}[\mu_m(1-X)]}{\mu_m^3\operatorname{sh}\mu_m} - \tag{4}$$

$$\left.-\frac{1}{\mu_m^3}\exp(-\mu_m^2\Theta)\right\}\sin(\mu_m Y),$$

где $\beta_n = \pi n$,$\mu_m = \pi m$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №10-08-00120.

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ[2]

Бондаренко Н.П. (Саратов)

BondarenkoNP@info.sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу $L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi),$$
$$Y'(0) - hY(0) = 0, \quad Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$, $Q(x) = Q^*(x)$. Краевые условия задаются $m \times m$ матрицами h и H, $h = h^*$, $H = H^*$.

Задача 1. По спектральным данным $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geqslant 0, q=\overline{1,m}}$ (см. [1]) построить Q, h и H.

Задача 1 решается путем развития идей метода спектральных отображений [2]. Пусть даны спектральные данные $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ некоторой задачи L. Выберем модельную задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$. В [1] задача 1 сведена к основному уравнению

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)(I + \tilde{R}(x)), \tag{1}$$

которое при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ является линейным уравнением в банаховом пространстве B бесконечных последовательностей матриц. Здесь $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in B$ и $R(x)\colon B \to B$ — линейный оператор при каждом $x \in [0, \pi]$, I — единичный оператор в B. Величины $\tilde{\psi}$ и $\tilde{R}$ строятся по модельной задаче и спектральным данным $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ неизвестной задачи.

Алгоритм решения задачи 1. Даны величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$.

1. Выбираем задачу $\tilde{L}$ и строим $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{R}(x)$.
2. Находим $\psi(x)$ из уравнения (1).
3. Используя $\psi(x)$, строим $Q(x)$, h и H по формулам (12) из [1].

Литература

1. *Бондаренко Н.П.* Обратная задача спектрального анализа для матричного уравнения Штурма-Лиувилля // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Матем., мех., информат. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 9—19.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 384 с.

[2]Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ОПЕРАТОРЕ УРАВНЕНИЯ С НЕВАНЛИННОВСКОЙ ФУНКЦИЕЙ[1]

Брук В.М. (Саратов)

vladislavbruk@mail.ru

На интервале (a,b) рассматривается дифференциальное выражение

$$l[y]=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\{(p_{n-k}(t)y^{(k)})^{(k)}-$$

$$-i[(q_{n-k}(t)y^{(k)})^{k-1}+(q_{n-k}(t)y^{(k-1)})^{(k)}]\}+p_n(t)y.$$

Коэффициенты этого выражения – самосопряженные операторы в конечномерном гильбертовом пространстве H. Пусть $\mathcal{C}_\lambda(t)$ – неванлинновская функция, т.е. голоморфная при $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ функция, значениями которой являются операторы в H такие, что $\mathcal{C}^*_{\bar\lambda}(t)=\mathcal{C}_\lambda(t)$ и $\mathrm{Im}\,\mathcal{C}_\lambda(t)/\mathrm{Im}\lambda\geqslant 0$. Предполагается, что нормы $\left\|p_0^{-1}(t)\right\|$, $\|p_j(t)\|$, $\|q_k(t)\|$, $\|\mathcal{C}_\lambda(t)\|$ локально интегрируемы на (a,b). Далее используем обозначения: $\mathfrak{a}_\lambda(t)=(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda(t)$ $(\mathrm{Im}\lambda\neq 0)$; $\mathfrak{H}_\lambda=L_2(H,\mathfrak{a}_\lambda(t);a,b)$ (нормы в пространствах $\mathfrak{H}_\lambda$ эквивалентны [1]); $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_{\lambda_0}$ (λ_0 фиксировано); $W_{j,\lambda}(t)$ – операторное решение уравнения $l[y]-\mathcal{C}_\lambda(t)y=0$, удовлетворяющее условиям: $W_{j,\lambda}^{[k-1]}(t_0)=\delta_{j,k}E$, где $t_0\in(a,b)$, $j,k=1,\ldots,2n$; $W_\lambda(t)=(W_{1,\lambda}(t),\ldots,W_{2n,\lambda}(t))$ – операторная однострочная матрица; $Q=H^{2n}\ominus Q_0$, где Q_0 – множество таких $x\in H^{2n}$, что функция $W_\lambda(t)x$ отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$; J_{2n} – операторная матрица порядка $2n$, у которой на побочной диагонали в первых n строках стоят $-E$, в последних E, остальные элементы равны нулю.

Рассмотрим уравнение

$$l[y]-\mathcal{C}_\lambda(t)y=\mathfrak{a}_\lambda(t)f(t),\quad f\in\mathfrak{H},\quad t\in(a,b). \tag{1}$$

Определение [1]. *Голоморфная при* $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ *функция* $M(\lambda)=M^*(\bar\lambda)$*, значениями которой являются операторы, отображающие пространство* Q *в себя, называется характеристическим оператором уравнения (1), если для любой финитной функции* $f\in\mathfrak{H}$ *с компактным носителем соответствующее решение уравнения (1)*

$$y_\lambda(t)=(\mathbf{R}_\lambda f)(t)=$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00276

$$= \int_a^b W_\lambda(t)(M(\lambda) + (1/2)\mathrm{sgn}(s-t)J_{2n})W_{\bar\lambda}^*(s)\mathfrak{a}_\lambda(s)f(s)ds$$

удовлетворяет неравенству $\|\mathbf{R}_\lambda f\|^2_{\mathfrak{H}_\lambda} \leqslant (\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}(\mathbf{R}_\lambda f, f)_{\mathfrak{H}_\lambda}$.

Будем говорить, что семейство отношений $\mathfrak{L}(\lambda) \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ($\mathrm{Im}\lambda \neq 0$) порождает характеристический оператор $M(\lambda)$, если $\mathfrak{L}^{-1}(\lambda)g = \mathbf{R}_\lambda f$, где f, g связаны равенством $\mathfrak{a}_\lambda(t)f(t) = \mathfrak{a}_{\lambda_0}(t)g(t)$ (функции f, g однозначно определяют друг друга в $\mathfrak{H}$).

Пусть $\widetilde{L}_0 \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ – минимальное отношение, порожденное на (a,b) операторной функцией $\mathfrak{a}_{\lambda_0}(t)$ и выражением $l[y] - \mathrm{Re}\,\mathcal{C}_\mu(t)y$, где μ фиксировано; $\widetilde{L}_{F(\lambda)}$ – отношение, состоящее из пар вида $(y_0 + F(\lambda)z - z, y_1 + iF(\lambda)z + iz)$, где $(y_0, y_1) \in \widetilde{L}_0$, $z \in \mathfrak{N}_i$ и $\mathfrak{N}_i$ – дефектное подпространство $\widetilde{L}_0$, $F(\lambda)$ – голоморфная при $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ функция, значения которой – такие ограниченные операторы из $\mathfrak{N}_i$ в $\mathfrak{N}_{-i}$, что $\|F(\lambda)\| \leqslant 1$ и $F(\bar\lambda) = F^*(\lambda)$.

Теорема. *Для любой функции* $F(\lambda)$ *с перечисленными выше свойствами семейство отношений* $\mathfrak{L}(\lambda) = \widetilde{L}_{F(\lambda)} + \mathrm{Re}\,\mathcal{C}_\mu(t) - \mathcal{C}_\lambda$ *порождает некоторый характеристический оператор уравнения (1), и обратно, если семейство* $\mathfrak{L}(\lambda)$ *порождает некоторый характеристический оператор, то найдется такая операторная функция* $F(\lambda)$ *с отмеченными свойствами, что* $\mathfrak{L}(\lambda) = \widetilde{L}_{F(\lambda)} + \mathrm{Re}\,\mathcal{C}_\mu(t) - \mathcal{C}_\lambda$.

Литература

[1] Khrabustovsky V. I. Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry, 2006, v. 2, № 2, 149–175.

УТОЧНЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)
bmsh2001@mail.ru

Рассматривается следующая система Дирака:

$$y'(x) + P(x)y(x) = \lambda D y(x), \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $y_j \in C[0,1]$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $q_j \in C^1[0,1]$, λ — комплексный параметр.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1)

Известно (см. [1]), что общее решение уравнения (1) имеет асимптотическое представление

$$y(x, \lambda) = (E + O\left(\lambda^{-1}\right) e^{\lambda D x} c,$$

где E — единичная матрица 2×2, $c = (c_1, c_2)^T$ — произвольный вектор. В [2] этот результат доказан новым элементарным методом. Используя этот метод, получены уточненные асимптотические формулы решений системы (1) при больших $|\lambda|$.

Теорема. *Если* $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$, $q_j(x) \in C^1[0,1]$, *то для общего решения уравнения (1) имеем следующую асимптотическую формулу:*

$$y(x, \lambda) = U(x, \lambda) e^{\lambda D x} c,$$

где $U(x,\lambda) = (u_{ij}(x,\lambda))_{i,j=1,2}$, $c = (c_1, c_2)^T$ *и*

$$u_{11}(x,\lambda) = 1 + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t) q_2(t)\, dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{12}(x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int\limits_x^1 e^{2\lambda(x-t)} q_2'(t)\, dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{21}(x,\lambda) = -\frac{1}{2\lambda}\left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} - \int\limits_0^x e^{-2\lambda(x-t)} q_1'(t)\, dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{22}(x,\lambda) = 1 + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t) q_2(t)\, dt + O\left(\lambda^{-2}\right).$$

Аналогичный результат может быть получен при $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$.

Эти формулы могут быть использованы при решении модифицированным методом Фурье смешанной задачи для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией [3].

Литература

1. *Раппопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений/ И.М. Раппопорт. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 258 с.

2. *Хромов А.П.* // Материалы Воронежской зимней мат школы. 2011 (настоящий сборник).

3. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* // Докл. РАН. – 2010. – Т. 435. № 2. – С. 151-154.

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ[1]

Бутерин С.А. (Саратов)
buterinsa@info.sgu.ru

На некомпактном графе-звезде Γ, состоящем из n полубесконечных ребер, рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля:

$$\ell_j y := -y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j =: \rho^2 y_j, \quad x > 0, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (1)$$

со стандартными условиями склейки в вершине $(x = 0)$:

$$y_1(0) = \ldots = y_n(0), \quad y_1'(0) + \ldots + y_n'(0) = 0, \qquad (2)$$

где $q_j(x)$ – вещественная функция, $\int_0^\infty (1+x)|q_j(x)|\, dx < \infty$, $j = \overline{1, n}$. Положим

$$a(\rho) = \frac{1}{2i\rho} \sum_{j=1}^{n} e_j'(0, \rho) \prod_{k \neq j} e_k(0, \rho), \quad Im\rho \geqslant 0,$$

где $e_j(x, \rho)$ – решение Йоста для уравнения (1). Нетрудно показать, что собственные значения оператора (1), (2) в $L_2(\Gamma)$ совпадают с квадратами нулей функции $a(\rho)$ в открытой верхней полуплоскости. При исследовании обратной задачи рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля на оси $(n = 2)$ важную роль играет оценка [1]

$$\frac{1}{a(\rho)} = O(1), \quad |\rho| \to 0, \quad Im\rho \geqslant 0.$$

Получено следующее обобщение этой оценки на случай произвольного n, позволившее исследовать обратную задачу в общем случае.

Теорема 1. Для любых j, $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место

$$\frac{1}{a(\rho)} \prod_{l \neq j,k} e_l(0, \rho) = O(1), \quad |\rho| \to 0, \quad Im\rho \geqslant 0.$$

Литература

[1] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1977.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 10-01-00099, 10-01-92001-ННС-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ БЕСОВА С СИНГУЛЯРНЫМИ ВЕСАМИ И КОНЕЧНОМЕРНЫХ ШАРОВ В СМЕШАННОЙ НОРМЕ[2]

Васильева А.А. (Москва)

vasilyeva_ nastya@inbox.ru

Через $d_n(M,\, X)$ обозначаем колмогоровский поперечник множества M в пространстве X.

Пусть $m,\, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p,\, q < \infty$, $l_{p,q}^{m,k}$ — пространство $\mathbb{R}^{mk}$ с нормой

$$\|(x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant k}\|_{l_{p,q}^{m,k}} = \left(\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|x_{ij}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q},$$

$B_{p,q}^{m,k}$ — единичный шар в этом пространстве, $\mathbf{p} = (p_1,\, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1,\, q_2)$, $\lambda(\mathbf{p}) = \min\left\{\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}},\, 1\right\}$, $\lambda(\mathbf{q}) = \min\left\{\frac{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_2}},\, 1\right\}$.

Теорема 1. Пусть $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_2 < \infty$, $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$. Пусть $m,\, k,\, n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant mn/2$. Тогда

$$d_n(B_{p_1,q_1}^{m,k},\, l_{p_2,q_2}^{m,k}) \underset{p_1,p_2,q_1,q_2}{\asymp} \Phi_0 = \Phi_0(m,\, k,\, n,\, p_1,\, p_2,\, q_1,\, q_2),$$

$$\Phi_0 = \begin{cases} \min\left\{1,\, (n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/q_2})^{\lambda(\mathbf{p})},\, m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}\left(n^{-1/2}m^{1/2}k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q}), \\ \min\left\{1,\, (n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/q_2})^{\lambda(\mathbf{q})},\, k^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}\left(n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/2}\right)^{\lambda(\mathbf{p})}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \lambda(\mathbf{p}) \geqslant \lambda(\mathbf{q}). \end{cases}$$

При доказательстве используются методы работы Е.Д. Глускина [1].

Обозначим $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d,\, w)$ весовое пространство Бесова (определение, теоремы вложения и подробная библиография изложены, например, в работе Д. Хароске и Л. Скрыпчака [2]). Пусть $Q = [-1/2,\, 1/2]^d$, $B_{p,q}^s(Q,\, w) = \{f|_Q : f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d,\, w)\}$.

Теорема 2. Пусть $1 < p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$, $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$, $s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}$, $\delta := s_1 - s_2 + \frac{d}{p_2} - \frac{d}{p_1} > 0$, $\beta,\, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta + \gamma = \delta$, $\beta < \frac{d}{p_1'}$, $\gamma < \frac{d}{p_2}$, $\alpha_g,\, \alpha_v \in \mathbb{R}$, $\rho_g,\, \rho_v : [1,\, +\infty) \to (0,\, +\infty)$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)} =$

[2]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 09-01-00093 и 10-01-00442.

$0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)} = 0$, $g(x) = |x|^{-\beta}|\log_2|x||^{-\alpha_g}\rho_g(|\log_2|x||)$, $v(x) = |x|^{-\gamma}|\log_2|x||^{-\alpha_v}\rho_v(|\log_2|x||)$, $|x|\in Q$. Положим $w_1(x) = g^{-p_1}(x)$, $w_2(x) = v^{p_2}(x)$, $x\in Q$, вне Q функции w_1 и w_2 продолжаем по непрерывности так, чтобы они удовлетворяли условию Макенхаупта $\mathcal{A}_\infty$. Обозначим $\alpha = \alpha_g+\alpha_v$, $\rho(y) = \rho_g(y)\rho_v(y)$, $\theta_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{s_1-s_2}{d} + \min\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\right\}$, $\theta_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p_2\delta}{2d}$, $\theta_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \alpha - \frac{1}{q_2} + \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q_1}\right\}$, $\theta_4(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\alpha q_2}{2}$. Пусть $\theta_{j_*} = \min_{1\leqslant j\leqslant 4}\theta_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $\theta_{j_*} < \theta_j$ для $j\ne j_*$. Тогда $d_n(B^{s_1}_{p_1,q_1}(Q, w_1), B^{s_2}_{p_2,q_2}(Q, w_2)) \asymp \varphi(n)$, $\varphi(n) = n^{-\theta_{j_*}}$, если $j_*\in\{1, 2\}$, $\varphi(n) = n^{-\theta_{j_*}}\rho(n)$, если $j_* = 3$, $\varphi(n) = n^{-\theta_{j_*}}\rho(n^{q_2/2})$, если $j_* = 4$.

Литература

[1] Е.Д. Глускин, “О некоторых конечномерных задачах теории поперечников”, *Вестник ЛГУ (сер. мат.)*, **3** (1981), 5–10.

[2] D.D. Haroske, L. Skrzypczak, “Entropy and approximation numbers of function spaces with Muckenhoupt weights,” *Rev. Mat. Complut.*, **21**:1 (2008), 135–177.

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ВЕСОВЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Виноградова Г.А. (Воронеж)

vinog_g@mail.ru

Пусть V — некоторая область в R^n. Если $x\in R^n$, то через r, w обозначим полярные координаты $r = |x|$, $w = x/r$.

Пусть λ — вещественное число, k — неотрицательное целое число и $1\leqslant p<\infty$. Обозначим через $W^k_{p,\lambda}(V)$ весовое соболевское пространство, состоящее из функций $u\in L_p^{loc}(V\setminus 0)$ таких, что их обобщенные производные $D^\alpha_u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \in L_p^{loc}(V\setminus 0)$, если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ — мультииндекс, и $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant k$, причем

$$\|u\|^k_{p,\lambda} = \left(\int\limits_V \sum_{|\alpha|\leqslant k|} r^{|\alpha|-\lambda}|D^\alpha u|^p\frac{dr}{r}dw\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Если $V = R^n$, то $W^k_{p,\lambda}(R^n) = W^k_{p,\lambda}$.

Пусть $Q(D)$ — однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами порядка m.

Через Λ будем обозначать множество, которое в случае $m \geqslant n$ состоит из всех целых чисел, а в случае $m < n$ состоит из целых чисел, лежащих на множестве $(-\infty, m-n] \cup [0, +\infty)$.

Теорема. *Пусть $\lambda \in \Lambda$; $1 < p < +\infty$. Тогда оператор $Q(D)$ является изоморфизмом пространства $W^k_{p,\lambda}$ на $W^{k-m}_{p,\lambda-m}$.*

При доказательстве теоремы были использованы результаты, полученные в [1].

Литература

1. Мешков В.З. Весовое неравенство типа Харди для эллиптических операторов //Математические заметки. — 1987. — Т.42, № 4. — с.549-558.

2. Виноградова Г.А. Теорема об изоморфизме весовых пространтсв. Вестник ПММ. — 1997, №1. — с.31-35.

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В КЛАССИЧЕСКОМ КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ НА ЯЗЫКЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Винокурова Н.В. (Курск)

vinoknata@mail.ru

Стохастическая механика Нельсона – это математическая теория, основанная на классической физике, но дающая те же предсказания, что и квантовая механика для широкого класса задач, в которых и та, и другая теории применимы. Можно считать, что стохастическая механика является особым способом квантования, отличным от гамильтонова и лагранжева (в терминах интегралов по траекториям) способов. Одной из главных отличительных черт стохастической механики является то, что в ней квантуется второй закон Ньютона, а не уравнения Гамильтона или Лагранжа. Стохастический аналог закона Ньютона известен как уравнение Ньютона-Нельсона.

К настоящему времени на языке стохастической механики исследовано большое число задач квантовой теории. Однако не было осуществлено описание движения квантовой частицы в калибровочном поле, по-видимому, из-за того, что ранее не было известно описание классической частицы в калибровочном поле в терминах второго закона Ньютона. Такое описание было предложено в [1,2]. На основе этого мы разрабатываем описание движения квантовой частицы в калибровочном поле в терминах стохастической механики на лоренцевом многообразии. Построено уравнение

Ньютона-Нельсона на векторном расслоении со связностью над лоренцевым многообразием, у которого стандартный слой является комплексным пространством. Правая часть уравнения порождена формой кривизны связности. Получена теорема существования решения для этого уравнения. Для частного случая группы симметрий $U(1)$ и расслоения с одномерным комплексным слоем исследована связь с квантовой электродинамикой.

Рассматривается также модельная задача, в которой мы осуществляем указанную процедуру квантования в простейшем случае – когда базой расслоения является риманово (а не лоренцево) многообразие, а стандартный слой является вещественным (а не комплексным) линейным пространством. Построено соответствующее уравнение Ньютона-Нельсона. Доказана теорема существования его решения при более простых предположениях, чем в случае лоренцева многообразия.

Литература

[1] Гликлих Ю.Е. Об одном классе дифференциальных уравнений на расслоенных пространствах со связностями / Ю.Е. Гликлих, П.С. Ратинер// Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ.- Воронеж: ВГУ, 1999.- С.36-41

[2] Gliklikh Yu.E. On a certain type of second order differential equations on total spaces of fiber bundles with connections / Yu.E. Gliklikh, P.S. Ratiner // Nonlinear Analysis in Geometry and Topology.- Palm Harbor, Fl.: Hadronic Press, 2000.- P. 99-106

О ПСЕВДОВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Выгодчикова И.Ю. (Саратов)

VigodchikovaIY@info.sgu.ru

Пусть n, N - целые числа, $n \geqslant 0$, $N \geqslant n+1$, $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_N\}$, $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$: $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geqslant y_{1,k}$, $\Psi(t_k) = [\nu_{1,k}; \nu_{2,k}], \nu_{2,k} \geqslant \nu_{1,k}, k = \overline{0,N}$. Обозначим $g(A,t_k) = \max\{\nu_{1,k} - p_n(A,t_k), p_n(A,t_k) - \nu_{2,k}\}$, $h(A) = \max_{k=\overline{0,N}} g(A,t_k)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ, проект НШ (грант№ 4383.2010.1) и гранта РФФИ (№ 10-01-00270).

Для $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ рассмотрим задачу:

$$\pi(A,\Phi) := \max_{k=\overline{0,N}} \max\left\{p_n\left(A,t_k\right)-y_{2,k}, y_{1,k}-p_n\left(A,t_k\right)\right\} \longrightarrow \min_{A\in D}. \quad (1)$$

При $D = \mathbb{R}^{n+1}$, положим $\Re = \left\{A \in R^{n+1} : \pi\left(A,\Phi\right) = \min_{A\in R^{n+1}} \pi\left(A,\Phi\right)\right\}$. Пусть далее $D = \left\{A \in \mathbb{R}^{n+1} : h\left(A\right) \leqslant 0\right\}$.

Лемма 1. $|D| > 1 \leftrightarrow \min_{A\in R^{n+1}} \pi\left(A,\Psi\right) < 0$, *$|D|$-количество элементов D.*

Определим подмножества сетки T:

$$R_2^\pi\left(A\right) := \left\{t_k \in T : \rho\left(A\right) = p_n\left(A,t_k\right) - y_{1,k} < y_{2,k} - p_n\left(A,t_k\right)\right\},$$

$$R_1^\pi\left(A\right) := \left\{t_k \in T : \rho\left(A\right) = p_n\left(A,t_k\right) - y_{1,k} > y_{2,k} - p_n\left(A,t_k\right)\right\},$$

$$R_1^h\left(A\right) := \left\{t_k \in T : h\left(A\right) = p_n\left(A,t_k\right) - \nu_{2,k} > \nu_{1,k} - p_n\left(A,t_k\right)\right\},$$

$$R_2^h\left(A\right) := \left\{t_k \in T : h\left(A\right) = p_n\left(A,t_k\right) - \nu_{2,k} < \nu_{1,k} - p_n\left(A,t_k\right)\right\},$$

$R_3^h\left(A\right) := \left\{t_k \in T : h\left(A\right) = p_n\left(A,t_k\right) - \nu_{2,k} = \nu_{1,k} - p_n\left(A,t_k\right)\right\}$, $R_1\left(A\right) = R_2^h\left(A\right) \cup R_2^\pi\left(A\right), R_2\left(A\right) = R_1^h\left(A\right) \cup R_1^\pi\left(A\right)$, $RR\left(A\right) = R_1^\pi\left(A\right) \cup R_2^\pi\left(A\right)$.

Теорема 1. *Пусть $|D| > 1$. Вектор A^* является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда либо $A^* \in \Re\cap D$, либо $h\left(A^*\right) = 0$ и выполняется хотя бы одно из условий:* (I) $RR\left(A^*\right) \cap R_3^h\left(A^*\right) \neq \varnothing$,

(II) $\exists$ $n+2$ *точки* $\left\{t_{j_0} < ... < t_{j_{n+1}}\right\} \subset T$, *такие, что если* $t_k \in R_1\left(A^*\right)\left(R_2\left(A^*\right)\right)$, *то* $t_{k+1} \in R_2\left(A^*\right)\left(R_1\left(A^*\right)\right)$ *для* $k = \overline{0, n+1}$.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ[1]

Выгодчикова И.Ю. (Саратов)

VigodchikovaIY@info.sgu.ru

Пусть m, N - натуральные числа, $N \geqslant m$, $T_1 = \left\{t_{1,0} < t_{1,1} < ... < t_{1,N}\right\}$,$T_i = \left\{t_{i,0}, t_{i,1}, ..., t_{i,N}\right\}$, $i = \overline{2,m}$,$T = \left\{t_k = \left(1, t_{1,k}, ..., t_{m,k}\right) : t_{i,k} \in T_i, i = \overline{1,m}, k = \overline{0,N}\right\}$, $A =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ, проект НШ (грант№ 4383.2010.1).

$(a_0, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $f(A,t) = \langle A, t \rangle$, $t = (1, \overline{t}), \overline{t} \in \mathbb{R}^m$, на множестве векторов $(t_{1,k}, ..., t_{m,k})$: $t_{i,k} \in T_i, i = \overline{1,m}$ определена функция $y_k = y(t_{1,k}, ..., t_{m,k})$, $k = \overline{0,N}$.

Рассмотрим задачу:

$$\varphi(A) := \max_{k=\overline{0,N}} |y_k - f(A, t_k)| \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{m+1}} . \qquad (1)$$

Доказано, что решение задачи (1) существует, и эквивалентно решению некоторой подзадачи ($I = \{s_1 < ... < s_{m+2}\} \subset \overline{0,N}$):

$$\varphi^I(A) := \max_{k=\overline{1,m+2}} |y_{s_k} - f(A, t_{s_k})| \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{m+1}} . \qquad (2)$$

Разработан алгоритм решения этой задачи с использованием элементов субдифференциального исчисления. Способ аппроксимации данных, основанный на решении задачи (1), является альтернативой методу наименьших квадратов оценки параметров модели множественной линейной регрессии. Целесообразность использования предлагаемого способа продемонстрирована на примере аппроксимации данных о численности городского населения в РФ 1991-2010 гг.

Обобщим задачу (1) на случай аппроксимации сегментной функции. Пусть $y(t_{1,k}, ..., t_{m,k}) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geqslant y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$. Рассмотрим задачу:

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0,N}} max \{y_{2,k} - f(A, t_k), f(A, t_k) - y_{1,k}\} \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{m+1}} . \qquad (3)$$

Определим подмножество T:

$$R_3^\rho(A) := \{t_k \in T : \rho(A) = f(A, t_k) - y_{1,k} = y_{2,k} - f(A, t_k)\} .$$

Решением задачи (3) является либо вектор A^* такой, что $R_3^\rho(A^*) \neq \varnothing$, либо решение задачи (2) для $m+2$-точечного селектора сегментной функции: $y_{s_k} = y_{i,s_k}$, $i = 1$ или $i = 2$, $I = \{s_1 < ... < s_{m+2}\} \subset \overline{0,N}$.

СХОДИМОСТЬ СЛАБЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЖАДНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ[1]

Галатенко В.В. (Москва)

vvgalatenko@yahoo.com

Напомним определение ортогональных жадных алгоритмов [1–3]. Пусть H — пространство со скалярным произведением, D — нормированный словарь в H. Пусть f — произвольный элемент H. Определим индуктивно набор элементов $\{e_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ и набор остатков $\{r_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$. Положим $r_0(f) = f$; если уже определен остаток $r_n(f)$, положим $e_{n+1} = \arg\max_{d\in D}|(r_n(f), d)|$, $r_{n+1}(f) = f - P(f, < e_1, \dots, e_{n+1} >)$, где $P(\,\cdot\,, L)$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство L. Ортогональная проекция $P(f, < e_1, \dots, e_n >)$ элемента f на подпространство $< e_1, \dots, e_n >$ называется n-м ортогональным жадным приближением (OGA) f по словарю D.

Известно, что ортогональные жадные приближения при $n \to \infty$ сходятся к f [2] и что скорость сходимости ортогональных жадных приближений на стандартном классе $A_1(D)$ является оптимальной [1].

В ряде приложений поиск элемента e_{n+1}, в точности реализующего максимум, затруднителен или даже невозможен. Более того, в некоторых случаях такого элемента e_{n+1} может не существовать. В связи с этим вводится понятие слабого ортогонального жадного приближения (WOGA), отличающегося от определенного выше тем, что в качестве e_{n+1} берется произвольный элемент словаря, для которого $|(r_n(f), e_{n+1})| \geqslant \big(t_{n+1}\sup_{d\in D}|(r_n(f), d)| - \xi_{n+1}\big)$ (здесь $t_{n+1} \in [0; 1]$, $\xi_{n+1} \geqslant 0$). Если $t_{n+1} < 1$ или $\xi_{n+1} > 0$, то искомый элемент e_{n+1} заведомо существует.

Аналогичное определение рассматривалось в [3], но в качестве ослабляющих параметров использовались лишь t_n, то есть в качестве ξ_n выступали нули. В случае же функциональных пространств, с учетом того, что в квадратурных формулах чаще имеются оценки на абсолютные, а не на относительные величины погрешностей, представляется оправданным использование именно аддитивных ослабляющих параметров.

Для гарантированной сходимости слабых ортогональных жадных приближений в точности к разлагающему элементу необходи-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11–01–00476) и программы “Ведущие научных школ РФ” (проект НШ–3252.2010.1).

мо наложить некоторые ограничения на ослабляющие параметры.

Теорема. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(Ct_n - \xi_n)_+^2$ *расходится для каждого положительного* C $((x)_+^2 = (\max\{x;0\})^2)$. *Тогда слабые ортогональные жадные приближения сходятся в точности к приближаемому элементу для всех элементов* $f \in H$.

Отметим, что если все ξ_n равны нулю, то условие, гарантирующее сходимость WOGA к разлагаемому элементу, принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 = \infty$, что совпадает с аналогичным условием, полученным в [3]. Если же все t_n равны единице (то есть ослабление осуществляется исключительно за счет ξ_n), то условие принимает вид $\liminf_{n\to\infty} \xi_n = 0$. Отметим также, что условие теоремы не может быть ослаблено даже в том случае, когда словарь D ортогонален.

Литература

[1] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov *Some remarks on Greedy Algorithms* // Adv. Comput. Math., **5** (1996), 173–187.

[2] V. V. Dubinin *Greedy Algorithms and Applications* — Ph. D. Thesis, Univ. South Carolina, 1997.

[3] V. N. Temlyakov *Weak greedy algorithms* // Adv. Comput. Math. **12** (2000), 213–227.

О ВЫБОРЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В АЛГОРИТМЕ ВЕРНЕРА ПОИСКА РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ВИДА P_0/Q_n[1]

Галкин О.Е., Галкина С.Ю. (Нижний Новгород)

1. Предварительные сведения

Всюду далее m и n — неотрицательные целые числа. Обозначим символом $\mathcal{R}_{m,n}$ множество всех рациональных функций вида

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j} \qquad (1)$$

с вещественными коэффициентами.

Дефектом $d(R)$ рациональной функции (1) называется такое число d, что $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_{m-d+1} = 0$, $b_n = b_{n-1} = \ldots =$

[1]Работа выполнена при поддержке проектов: 1) АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)” Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и 2) ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (проект НК-13П-13).

$b_{n-d+1} = 0$, но хотя бы один из коэффициентов a_{m-d}, b_{n-d} отличен от нуля. В случае $R \equiv 0$ считаем, что $d(R) = n$.

Пусть K — произвольное компактное (в том числе конечное) подмножество множества действительных чисел $\mathbf{R}$. Обозначим символом $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ множество всех рациональных функций вида (1), таких что $Q_n(x) > 0$ при любом $x \in K$.

Пусть $f\colon K \to \mathbf{R}$ — некоторая непрерывная функция. Рациональная функция $R_* = P_m/Q_n$ называется *наилучшим равномерным рациональным приближением* (сокращённо *НРРП*) из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ для функции f, если выполняется равенство

$$\max_{x\in K} |R_*(x) - f(x)| = \inf_{R\in\mathcal{R}_{m,n}^{K+}} \max_{x\in K} |R(x) - f(x)|.$$

Теорема о наилучших рациональных приближениях гласит (ср. [1], стр. 66; [2]):

Теорема А. Несократимая рациональная функция $R_* = P_m/Q_n$ есть наилучшее равномерное рациональное приближение из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ для вещественной непрерывной функции f на компактном множестве $K \subset \mathbf{R}$, содержащем не менее чем $N = m+n+2-d(R_*)$ точек, тогда и только тогда, когда в K существует N точек $x_1 < \ldots < x_N$, и существует число $\varepsilon_0 \in \{-1, 1\}$, такие что выполняются равенства

$$R_*(x_k) - f(x_k) = \varepsilon_0(-1)^k \cdot \max_{x\in K} |R_*(x) - f(x)|, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Доказательство этой теоремы в такой форме аналогично доказательству этой же теоремы в случае, когда K есть отрезок, приведённому в [1].

Замечание 1. Если K — совершенное множество, то для любой непрерывной на нём функции f существует НРРП (см. [3], стр. 672). Если же множество K не является совершенным, наилучшее равномерное рациональное приближение из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ может не существовать. Например, оно не существует для $K = \{0, 1, 2\}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, и $m = 0$, $n = 1$ (см. [4], стр. 193). Кроме того, из теоремы А следует, что в классе $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ существует не более одного НРРП для f (ср. [1], стр. 68).

На применении теоремы А основан, в частности, алгоритм Ремеза поиска наилучших равномерных рациональных приближений (см. [4], стр. 200; [5], стр. 366; [6]). Приведем его описание, следуя [4] и [5], в случае $d = 0$, $N = m + n + 2$, который мы будем рассматривать далее. Алгоритм состоит из 4 шагов:

Шаг 1. Положим $p = 1$ и возьмём в множестве K произвольное подмножество $K_p = \{x_1^{(p)} < x_2^{(p)} < ... < x_N^{(p)}\}$ из N элементов.

Шаг 2. Из нелинейной системы относительно $a_0, \ldots, a_m$, $b_0, \ldots, b_n$ и h

$$\sum_{i=0}^{m} a_i (x_k^{(p)})^i \Big/ \sum_{j=0}^{n} b_j (x_k^{(p)})^j - f(x_k^{(p)}) = (-1)^k h^{(p)}, \quad k = 1, ..., N,$$

найдем рациональную функцию $R_p(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \Big/ \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ и число $h^{(p)}$.

Шаг 3. Положим $r_p(x) = R_p(x) - f(x)$ и вычислим $\bar{h}^{(p)} = \max\limits_{x \in K} |r_p(x)|$.

Если $\bar{h}^{(p)} = h^{(p)}$, то по теореме A дробь $R_p(x)$ является наилучшим приближением на множестве K, работа алгоритма успешно завершена.

Шаг 4. Если $\bar{h}^{(p)} > h^{(p)}$, то существует точка $x_* \in K$, такая что $|r_p(x_*)| = \bar{h}^{(p)}$. Возьмём в множестве K новое подмножество $K_{p+1} = \{x_1^{(p+1)} < x_2^{(p+1)} < ... < x_N^{(p+1)}\}$, такое что $\operatorname{sign}(r_p(x_{k+1}^{(p+1)})) = -\operatorname{sign}(r_p(x_k^{(p+1)}))$ при $k = 1, \ldots, N-1$, $|r_p(x_k^{(p+1)})| \geqslant |h^{(p)}|$ при $k = 1, \ldots, N$, а также $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |r_p(x_k^{(p+1)}))| = \bar{h}^{(p)}$. (Этого можно добиться, например, заменив одну из точек множества K_p на x_*.) Увеличим p на 1 и перейдём к шагу 2.

Замечание 2. Если в какой-то момент нельзя будет сделать шаг 2, то алгоритм не даст результата. Иначе в итоге работы алгоритма получаем последовательность рациональных функций $R_1, R_2, \ldots$. Она, как показал Ральстон в [7], в случае когда множество K_1 достаточно близко к множеству точек $K_0 = \{x_1, \ldots, x_N\}$ из теоремы A, будет сходиться к наилучшему рациональному приближению R_*.

Итак, в одном из шагов алгоритма Ремеза требуется на заданном множестве K_0, образованном $N = m+n+2-d$ точками, найти НРРП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K_0+}$. Для этого и предназначен алгоритм Вернера (см., например, [8]).

2. Описание алгоритма Вернера

Пусть $N = m + n + 2$, в точках $x_1 < \ldots < x_N$ определена вещественная функция f. Требуется подобрать рациональную дробь $R_*(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i / \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$, так чтобы на множестве $K_0 = \{x_1, \ldots, x_N\}$ она давала (дискретное) НРРП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K_0+}$.

По теореме A это равносильно следующей системе равенств:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x_k^i \Big/ \sum_{j=0}^{n} b_j x_k^j - f(x_k) = (-1)^k h, \quad k = 1, ..., N, \tag{2}$$

где $h = \varepsilon_0 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |R_*(x_k) - f(x_k)|$.

Теперь задача состоит в нахождении h и коэффициентов $a_0, ..., a_m; b_0, ..., b_n$ таких, чтобы они удовлетворяли системе (2), и чтобы знаменатель $Q_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ был положителен в точках $x_1, \ldots, x_N$.

Умножив равенство (2) на знаменатель и перенеся всё в левую часть, получим:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x_k^i + \sum_{j=0}^{n} b_j x_k^j ((-1)^{k+1} h - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, ..., N. \tag{3}$$

При фиксированном h эта однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её определитель $D_{n+1}(h)$ равен 0. Поскольку h входит лишь в последние $n+1$ столбцов её матрицы, то определитель $D_{n+1}(h)$ является многочленом степени $n+1$ от h. Все его корни $h_1, ..., h_{n+1}$, как доказал Вернер (см. [8], стр. 334), вещественны. Назовем их *собственными значениями*.

Для каждого собственного значения h_s $(s = 1, ..., n+1)$, решая систему (3) при $h = h_s$, можно найти коэффициенты $a_{0,h_s}, ..., a_{m,h_s}$, $b_{0,h_s}, ..., b_{n,h_s}$ и многочлены $P_{m,h_s}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_{i,h_s} x^i$, $Q_{n,h_s}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_{j,h_s} x^j$.

Предложение. (Ср. [9], стр. 261; [10], стр. 115.) Существует не более одного собственного значения h_s, для которого соответствующий многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках $x_1, ..., x_N$.

Замечание 3. Возможна ситуация, когда ни одному из $h_1, ..., h_{n+1}$ не соответствовует многочлен Q_{n,h_s}, положительный во всех точках $x_1, ..., x_N$. Например, так будет, если $m = 0$, и значения $f(x_1), ..., f(x_N)$ меняют знак больше одного раза. Маэли ([9], стр. 262) привел пример такой ситуации для $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; $f(x) = x$; $m = 0$, $n = 1$. Такая ситуация возможна, даже если все значения $f(x_1), ..., f(x_N)$ положительны.

Замечание 4. Если всё же существует h_s, для которого многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках $x_1, ..., x_N$, то не обязательно это h_s имеет минимальный модуль среди $h_1, ..., h_{n+1}$. Подтверждающий это пример приведен в [9] (стр. 262): $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$; $f(x) = (4 + 5x - x^2)/2$; $m = 0$, $n = 1$.

3. Основная теорема

Приводимая ниже основная теорема работы предлагает, в случае $m = 0$, способ выбора того собственного значения h_s, которое порождает многочлен Q_{n,h_s}, положительный на $\{x_1, ..., x_N\}$. Из условий теоремы следует, что $d = 0$, поэтому $N = n + 2$. Квадратными скобками обозначена целая часть числа, заключённого в них.

Теорема. Пусть $m = 0$, $x_1 < ... < x_{n+2}$, функция f во всех точках $x_1, ..., x_{n+2}$ имеет значения одного знака, $h_1 < ... < h_{n+1}$ — все собственные значения, и значение h_s порождает положительный во всех точках $x_1, ..., x_{n+2}$ многочлен Q_{n,h_s}. Тогда:

1) если $f(x_k) > 0$ при $k = 1, ..., n + 2$, то $s = [(n + 2)/2]$;

2) если $f(x_k) < 0$ при $k = 1, ..., n + 2$, то $s = [(n + 3)/2]$.

Литература

[1]. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* М. Наука. 1965. 407 с.

[2]. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* Харьков. Гостехиздат. 1940. 137 с.

[3] Walsh J. L. *The existence of rational functions of best approximation.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. Vol. 33. P. 668-689.

[4]. Watson G. A. *Approximation theory and numerical methods.* N. Y. John Wiley and sons. 1980. 229 p.

[5]. Sendov Bl., Andreev A. *Handbook of numerical analysis. V. III.* Lions, Carset editors, 1994.

[6]. Werner H. *Tschebyscheff-Approximation im Bereich der rationalen Funktionen bei Vorliegen einer guten Ausgangsnäherung.* // Archives for Rational Mechanics and Analysis. 1962. Vol. 10. P. 205-219.

[7]. Ralston A. *Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms.* // Numer. math. 1965. Vol. 7. P. 322-330.

[8]. Werner H. *Rationale Tschebyscheff Approximation, Eigenwerttheorie und Difrerenzenrechnung.* // Archives for Rational Mechanics and Analysis. 1963. Vol. 12. P. 330-347.

[9]. Maehly H. J., Witzgall C. *Methods for Fitting Rational Approximations. Parts II and III.* // Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 10. P. 257-277.

[10]. Powell M. J. D. *Approximation theory and methods.* Cambridge University Press. 1981. 339 p.

О СРАВНЕНИИ ДВУХ МОДЕЛЕЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Гальцев О.В. (Белгород)
galtsev@bsu.edu.ru

В настоящей работе рассматриваются две модели совместного движения несмешивающихся несжимаемых жидкостей в области $\Omega = \Omega_f \bigcup \Omega_s \bigcup \Gamma$, где Ω_f–область, занятая жидкостью, Ω_s–твердый скелет.

Обе модели описывают фильтрацию жидкостей в твердом скелете, имеющем геометрию в виде периодических несвязных капилляров.

Для такой геометрии порового пространства (Модель 1), когда твердый скелет является абсолютно твердым телом и, поры имеют размер ε, динамика жидкости описывается системой уравнений Стокса для безразмерной микроскопической скорости жидкости и безразмерного микроскопического давления. Это уравнение дополняется уравнением переноса для границы раздела Γ двух жидкостей и на общей границе S твердой и жидкой части выполняется условие прилипания.

Модель 2, в отличии от Модели 1, учитывает перемещения твердого скелета. Она состоит из уравнений Стокса и Ламэ, дополненных соответствующими граничными условиями непрерывности нормальных напряжений на общей границе S "жидкость - твердый скелет".

При $\varepsilon \longrightarrow 0$ в Модели 1, когда скорость жидкости на границе S равна нулю, и сверху находится более плотная жидкость, наблюдается неустойчивость Релея-Тейлора, в результате чего жидкости меняются местами.

На процесс в целом влияют три параметра:плотность верхней (ρ^+) и нижней (ρ^-) жидкости, а точнее их отношение $\delta = \rho^+/\rho^-$, вязкости μ^+ и μ^- жидкостей и размер пор ε. Изменяя эти параметры можно получить различные сценарии протекания релей-тейлоровской неустойчивости.

Для Модели 1 изменения этих параметров достаточно для возникновения нестабильности свободной границы. Если $\delta > 0$, то процесс протекает с нарастающей скоростью. Во Модели 2 к указанным параметрам добавляется коэффициент упругости твердого скелета λ, который сильно влияет на процесс фильтрации. При заданном значении λ отношение δ должно находиться в определенном диапазоне, чтобы обеспечить изменение границы раздела жидкостей. В противном случае изменения положения жидкостей относительно друг друга не наблюдается. И наоборот, варьируя значение λ можно добиться устойчивого состояния двух фаз.

При усреднении расчетной области, то есть, при устремлении ε к нулю, в Модели 1 возникает хорошо различимая переходная фаза раздела двух сред. В Модели 2 переходной фазы не наблюдается.

Для обеих моделей были разработаны алгоритмы их решения, основанные на методе расщепления. Получены устойчивые двумерные разностные схемы, которые аппроксимируют систему уравнений с погрешностью порядка $O(\tau, h^2)$, где h – шаг по координате прямоугольной сетки, а τ – шаг по времени.

Следует отметить, что наличие стратификации и внешней силы (в данном случае силы тяжести) существенно усложняет процесс вычислений по сравнению с обыкновенной методикой решения системы уравнений Стокса, так как неоднородность жидкости требует дополнительного расчета поля плотностей.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ ПРИМЕСИ ИЗ ВОДОЕМА В ПОРИСТЫЙ ГРУНТ

Гальцева О.А. (Белгород)

galtseva@bsu.edu.ru

В данной работе рассматривается задача диффузии примеси из водоема в пористый грунт.

Пусть $\Omega = \Omega_0 \bigcup \Omega_f \bigcup \Omega_s \bigcup \Gamma$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$, где Ω_0 – область, занятая водоемом, Ω_f – поровое пространство, Ω_s – абсолютно твердый скелет, $S = \partial\Omega$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t))$ – скорость жидкости, $p(\mathbf{x}, t)$ – давление, $c(\mathbf{x}, t)$ – концентрация примеси.

Будем рассматривать систему уравнений для скорости жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, давления $p(\mathbf{x}, t)$ и концентрации примеси $c(\mathbf{x}, t)$ в области $\Omega_f \bigcup \Omega_0$, которая имеет вид:

$$\operatorname{div}(\alpha_\mu \mu(c)\nabla\mathbf{v} + (\alpha_\nu \operatorname{div}\mathbf{v} - p)\mathbb{I}) - \nabla p = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \qquad (2)$$

$$(\alpha_\mu \nu(c)\mathbf{D}(\mathbf{v}) - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = p_0(x, t) \cdot \mathbf{n}, \text{ при } \mathbf{x} \in S_0 \qquad (3)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=0,\ \text{при}\,\mathbf{x}\in S_1=\Gamma\bigcup\Gamma_0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla c=\mathbf{D}\,\Delta c, \tag{5}$$

$$\frac{\partial c(\mathbf{x},t)}{\partial \nu}=0\ \text{при}\ \mathbf{x}\in S_1, \tag{6}$$

$$c(\mathbf{x},0)=c_0(\mathbf{x})\quad \text{при}\ \mathbf{x}\in\Omega_f\bigcup\Omega_0, \tag{7}$$

где Γ–граница раздела твердого скелета и порового пространства, S_0 – верхняя граница бассейна, $\Gamma_0=\partial\Omega_0\bigcap\partial\Omega_s$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S_0,ν — единичный вектор внешней нормали к S_1, $\mu(c)$ – безразмерная вязкость, зависящая от концентрации примеси, $\mathbf{D}$ – коэффициент диффузии, $\mathbf{I}$ – единичная матрица,

$$\alpha_\mu=\frac{2\mu}{\tau Lg\rho_0},$$

где l – средний размер поры, L–характерный размер рассматриваемой области,g – сила тяжести, μ–вязкость жидкости, ρ_0–плотность жидкости.

Результатом работы является численное решение системы уравнений (1)–(7), которое показывает, что при отсутствии силы тяжести и при воздействии внешней силы на поверхность водоема начинается процесс диффузии.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ЖЕВРЕ ДЛЯ СМЕШАННО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Геккиева С.Х. (Нальчик)

gekkieva_s@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}=\begin{cases} D_{0y}^{\alpha}u, & x>0,\\ D_{hy}^{\alpha}u, & x<0.\end{cases} \tag{1}$$

Здесь D_{0y}^{α} – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования порядка α, $0<\alpha<1$ [1, с. 28].

Пусть $D=D^-\cup D^+\cup A_0B_0$, где $D^-=\{(x,y):a<x<0,0<y<h\}$, $D^+=\{(x,y):0<x<b,0<y<h\}$, $A_0B_0=\{(0,y):0<y<h\}$.

Задача G. *Найти функцию* $u(x,y)$*:*

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+(x,y), & (x,y) \in D^+, \\ u^-(x,y), & (x,y) \in D^- \end{cases}$$

со свойствами: 1) функция $u(x,y)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в областях* D^+, D^- *и краевым условиям*

$$\lim_{y\to h}(h-y)^{1-\alpha}u^-(x,y) = \varphi_1(x), \quad a \leqslant x \leqslant 0,$$

$$u^-(a,y) = \psi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}u^+(x,y) = \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant b,$$

$$u^+(b,y) = \psi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h;$$

2) на границе раздела A_0B_0 *областей* D^+, D^- *выполняются условия сопряжения*

$$u^+(0,y) = u^-(0,y), \quad u_x^+(0,y) = u_x^-(0,y), \quad 0 < y < h.$$

Здесь $\varphi_1(x) \in C[a,0]$, $\psi_1(y) \in C[0,h]$, $\varphi_2(x) \in C[0,b]$, $\psi_2(y) \in C[0,h]$.

Используя свойства функции Грина первой краевой и смешанной краевой задач для уравнения диффузии дробного порядка [2], задача редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. –301 с.

2.*Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. –М.: Наука, 2005. –199 с.

О ПОСТРОЕНИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА В СИСТЕМЕ КОНТАКТИРУЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ

Гладышев Ю.А., Дворянчикова Ю.В. (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

Нахождение поля температур стационарного точечного источника тепла расположенного в произвольной точке системы тонких искривленных стержней представляет интерес для расчета строительных конструкций электротехнического оборудования, для учета термоупругих напряжений в системе. Выражение функции точечного источника важно при оценке степени прогрева стенок трубопровода, которое осуществляется с помощью устройства в виде токопроводящего кабеля. Выбор оптимального как при продольном, так и поперечном расположении тепла выделяющего элемента, нахождение условий теплоизоляции стержневой системы, то есть определение интервала температур не вызывающих разрушений связано с построением решения для источника тепла в данной месте стержневой системе. Значение температурного поля источника важно для решения задачи при произвольном распределении внешней температуры.

Уравнение стационарного процесса теплопроводности неоднородного стержня может быть записано в виде [1]:

$$a_z^{(i)} \frac{d}{dx} \left(a_1^{(i)} \frac{dT^{(i)}}{dx} \right) + m^2 \left(T_{\textit{в}}^{(i)} - T^{(i)} \right) = g. \tag{1}$$

В системе предполагается выполнение условий идеально контакта в местах соединения стержня.

Как известно [2] система стержней может быть представлена как геометрический граф. Здесь стержни это ребра графа, а точки контакта — вершины. Часть вершин числом e назовем открытыми и на них заданы значения температур T_j. Далее будем использовать терминологию теории графов. Остальные s вершины назовем закрытыми.

Условия задачи D заданы на внешних вершинах. В случае построения функции Грина — это нулевые условия, при нулевой внешней температуре.

Обозначим через ω_i множество открытых вершин за исключением точки x_i.

Считаем, что построена на графе функция [2, 3] $\mathrm{Sh}mX(x, \omega_i)$, которая обращается в ноль во всех открытых точках множества ω_i, за исключением точки x_i, где она отлична от нуля. Во всех внутренних точках выполнены условия непрерывности функции и суммарной непрерывности D_1 — производной.

Решение задачи D на графе, когда на открытых вершинах заданы значения температур T_i, $i = s, \ldots, e+s$ имеем вид [3]

$$T(x) = \sum_{i=s}^{i=s+e=n} T_i \frac{\mathrm{Sh} mX(x, \omega_i)}{\mathrm{Sh} mX(x_i, \omega_i)} \tag{2}$$

При построении функции точечного источника может представиться два случая. Источник расположен в произвольной точке стержня (ребра G) или в одной из внутренних вершин.

Переходя к построению функции Грина, выделим некоторое ребро за номером k. Проведем операцию разделения ребра, для чего разделим его точкой $x_\text{г}$, считая две новые вершины открытыми с номерами $s+e+1$, $s+e+2$.

Имеем граф или два несвязных графа. Проведем решение задач D считая, что на новых вершинах задано одно и тоже значение температуры T_Γ, а все остальные принимают нулевое значение. Следовательно, имеем для решения этих задач

$$\begin{aligned} f_1(x) &= T_\Gamma \frac{\mathrm{Sh} mX(x, \omega_{s+e+1})}{\mathrm{Sh} mX(x_{s+e+1}, \omega_{s+e+1})}, \\ f_2(x) &= T_\Gamma \frac{\mathrm{Sh} mX(x, \omega_{s+e+2})}{\mathrm{Sh} mX(x_{s+e+2}, \omega_{s+e+2})}. \end{aligned} \tag{3}$$

где $\omega_{s+e+1}, \omega_{s+e+2}$ множество точек $x_1, \ldots, x_{s+e+2}$ за исключением точек $s+e+1$, $s+e+2$ соответственно. В точках этих множеств функции $\mathrm{Sh} mX$ исчезают.

В случае, когда граф распадается на два графа, решения (3) относятся к этим графам. Проведем операцию замыкания вершин. Условия непрерывности температуры выполнения по построению. Остается удовлетворить заданным условием для потока $D_1^{(k)} f_2|_{X_\Gamma} - D_1^{(k)} f_1|_{X_\Gamma} = M$, где M — мощность источника тепла. С этой целью проводя D_1 — дифференцирование на графе найдем связь T и M.

$$-T_2 \left[\frac{\mathrm{ch} m\tilde{X}(x_\Gamma; \sqrt{\omega_{n+2}})}{\mathrm{sh} mX(x_{n+1}; \omega_{n+1})} - \frac{\mathrm{ch} m\tilde{X}(x_\Gamma; \sqrt{\omega_{n+1}})}{\mathrm{sh} mX(x_{n+2}; \omega_{n+2})} \right] = M. \tag{4}$$

Остается подставить найденное значение температуры в точке расположения источника через M. Соотношения (4) имеет большое значение в приложении, ибо дает связь температуры и мощности источника. В работе приведено большее число частных примеров в различной степени сложности. Результаты работы использованы при решении двумерных задач для систем оболочек.

Литература

1. Гладышев Ю.А. Краевые задачи теплопроводности в многослойной среде тр. РНКТ-I. т. X. 1994 стр. 59-61;

2. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. Москва Физмалит. 2004;

3. Кремкова Е.А., Кудрявцев А.С. О классе функций представляемых рядами обобщенных степеней Берса при разрывных весовых коэффициентах Совр. мет. теории функций. ВГУ. 2009. Воронеж.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ w-ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СВЕРХУ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Гликлих Н.Ю. (Воронеж)

nin-gl@yandex.ru

Пусть (X,ρ) и (Y,σ) метрические пространства и $F : X \to C(Y)$ – многозначное отображение. Через $U_r(A)$ мы обозначаем r-окрестность множества A.

Определение. Пусть задано $w > 0$. Назовем многозначное отображение F w-полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in X$ такого, что $\rho(x_0, x) < \delta$, выполнено $F(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x_0))$.

Определение. Многозначное отображение F назовем w-полунепрерывным сверху, если оно w-полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Определение. Точка x называется w-неподвижной точкой многозначного отображения $F : X \to P(X)$, если $\rho(x, F(x)) \leqslant w$.

Понятие w-полунепрерывного сверху многозначного отображения ввела и исследовала И.Була в работе [1]. В статье [2] нами был разработан альтернативный – аппроксимативный подход к исследованию w-полунепрерывных сверху многозначных отображений. На его основе было доказано существование $2w$-неподвижной точки у w-полунепрерывного сверху многозначного отображения, действующего из выпуклого компакта в себя.

Здесь мы используем аппроксимативный подход для построения топологических характеристик w-полунепрерывных сверху многозначных отображений. Построен аналог топологической степени векторного поля, который обладает свойствами, близким к обычным: эта характеристика сохраняется при гомотопии без $2w$-неподвижных точек на границе шара в классе w-полунепрерывных сверху многозначных отображений, и если степень на границе шара отлично от нуля, то внутри шара находится $2w$-неподвижная точка.

Литература

[1] Bula I. W-upper semicontinuous multivalued mappings and Kakutani theorem / I. Bula // Fifth Symposium on Nonlinear Analysis, Poland, Torun, 10-14 IX 2007.- Torun: J.Schauder Center for Nonlinear Studies, N. Copernicus Univ.- 2007.- P.11.

[2] Гликлих Н.Ю. Аппроксимативный подход к w-полунепрерывным сверху многозначным отображениям / Н.Ю.Гликлих // Семинар по глобальному и стохастическому анализу.- Воронеж: ВГУ, 2008.- Вып. 3.- С. 8 – 11.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

Глушакова Т.Н., Крыжко И.Б. (Воронеж)

glushakovatn@gmail.com

Начнем с того, что школьная система преподавания математики и требования к знаниям по ЕГЭ носят принципиально разный характер. В школьных учебниках не рассматриваются задания, аналогичные тестам, то есть учат одному, а проверяют совсем другое и по-другому. Приведем хотя бы один пример. Во время учебы от детей требуют, чтобы чертежи по геометрии делали карандашом, используя линейку и циркуль, а на ЕГЭ это надо делать от руки и ручкой. Где же логика? Хочется сказать и о формулировке заданий с параметрами в группе С. Несколько лет назад было очень модно формулировать их с двумя "не", хотя более понятно было бы сформулировать их без этих никому не нужных наворотов, которые к математике никакого отношения не имеют.

Сдача школьниками ЕГЭ вынуждает школьных учителей, помимо их желания, натаскивать детей по типовым заданиям в ущерб темам, которые в ЕГЭ отражены недостаточно или не отражены совсем. Это обусловлено тем, что результаты работы учителя и, в конечном итоге, всей школы оцениваются именно по результатам ЕГЭ. Из-за этого натаскивания теряется понимание математических основ, умение логически мыслить. А ведь именно это умение и является одной из важнейших черт математики как науки, а не тупое натаскивание на примитивные задачи. Поэтому стоит лишь переформулировать задание по-другому, и школьники теряются, даже если подобные задачи они и умеют решать.

"Благодаря" ЕГЭ школьники разучились думать. К тому же очень многие способные дети, решая простые задания в уме, делают досадные ошибки, которые говорят лишь о невнимательности, и эти же дети с успехом решают задачи повышенной сложности. Если бы они сдавали выпускные и вступительные экзамены по старой схеме, это было бы очевидно, а так они теряют очень нужные для них баллы.

Из-за введения ЕГЭ нет стимула в изучении математики у тех ребят, которым результаты ЕГЭ не нужны для поступления (а такие есть и в математических классах), поэтому на уроках они не работают, а на замечания учителей всегда готов ответ: "На минимальный балл я и так решу, а больше мне не надо". Мало того, что они сами ничего не делают на уроках, так они же еще и отвлекают тех, кому математика нужна.

Совершенно непонятно, зачем в школьный курс математики ввели элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики. Ведь дети даже обычные школьные темы недостаточно хорошо усваивают. В частности, не могут выделить полный квадрат, посчитать производную, построить график функции с исследованием, пользоваться единичной окружностью, не знают формул по тригонометрии, не могут решать задачи по стереометрии. И если бы это было только в обычных классах! Одно дело, когда на математику отводилось 6 дополнительных часов в 9 и 10 классах (как в физико-математических классах школы № 58 в 80-82 годах, когда я там училась) и совсем другое дело, когда этих часов гораздо меньше. Ведь задачи с параметром, которые всегда входили в углубленную школьную программу, сейчас в школьных учебниках практически не рассматриваются. К тому же те "огрызки" знаний по дисциплинам высшей математики, которые якобы даются в профильных учебниках, к этим предметам в ВУЗах никакого отношения не имеют, не говоря уже о том, что к тому времени, когда названия этих предметов появляются в ВУЗах, ребята благополучно забывают полученные ранее знания. Спрашивается, а зачем "гробить" время, которого и так не хватает?

Хотелось бы отметить также, что более четверти века назад с легкой рука академика А.В. Погорелова из школьных учебников по геометрии благополучно исчезли стандартные обозначения, принятые математиками во всем мире. В частности, обозначения отрезка, интервала, их длин, скалярного произведения векторов. В результате у большинства школьников сложилось стойкое убеждение, что отрезок и его длина, вектор и длина вектора, угол и величина угла - это одно и то же.

К сожалению, приходится отметить, что уровень знаний, получаемых школьниками, с каждым годом падает, и улучшения ситуации не видно.

ДИФФУЗИОННЫЙ ХАОС В ОДНОЙ МОДЕЛИ ТИПА «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ»

Глызин С.Д. (Ярославль)

glyzin@uniyar.ac.ru

Рассматривается процесс возникновения диффузионного хаоса в задаче

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_1 = \nu d_1 \Delta u_1 + r_1(1 + a(1 - u_3) - u_1)u_1,\\
&\dot{u}_2 = \nu d_2 \Delta u_2 + r_2(u_1 - u_2)u_2,\\
&\dot{u}_3 = \nu d_3 \Delta u_3 + r_3(u_2 - u_3)u_3, \quad \partial u_j/\partial \vec{n}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

представляющей собой одну из феноменологических моделей реакции Белоусова – Жаботинского (см. [1]). Здесь $u_j(t, x)$ – концентрации реагирующих веществ; a, $d_j > 0$, $r_j > 0$ $j = 1, 2, 3$; Δ – оператор Лапласа; $\nu > 0$ – параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к достаточно гладкой границе $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. При $a = a_0 + \varepsilon$, где $a_0 = (r_1 + r_2 + r_3)\left(r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1}\right) - 1$, $0 < \varepsilon << 1$ и при выполнении условия $r_1 - 3r_2 - r_3 < 0$ краевая задача (1) имеет пространственно однородный цикл с амплитудой порядка $\sqrt{\varepsilon}$, который экспоненциально орбитально устойчив для точечной ($\nu = 0$) задачи (1). Последнее утверждение следует из отрицательности вещественной части первой ляпуновской величины

$$\begin{aligned}
d_0 = 0.5(r_1 + r_2)(r_1 - 3r_2 - r_3)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)\times&\\
\times (r_1 + r_2 + r_3)(r_2 r_3 + r_1(r_2 + r_3))^2 \times&\\
\times \left(r_1^2 + r_2^2 + 3r_2 r_3 + r_3^2 + 3r_1(r_2 + r_3)\right)^{-1} \times&\\
\times \left(r_1^2 + r_2^2 + 6r_2 r_3 + r_3^2 + 6r_1(r_2 + r_3)\right)^{-1} r_2^{-2} r_3^{-2},&
\end{aligned}$$

при условии $r_1 - 3r_2 - r_3 < 0$. Отметим, что упомянутый выше пространственно однородный цикл устойчив при всех $\nu > \nu_c > 0$ и теряет устойчивость при $\nu < \nu_c$. Величина ν_c в задаче (1) пропорциональна ε, поэтому целесообразно выбрать $\nu = \nu_0\varepsilon$. В этой ситуации краевая задача (1) может быть сведена к квазинормальной форме

$$\dot{w} = \nu_0(1 - ia)\Delta w + w - (1 + ib)w|w|^2, \quad \partial w/\partial\vec{n}\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Краевая задача (2) представляет собой уравнение Гинзбурга – Ландау, в котором $w = w(t, x)$ – комплекснозначная функция, ν_0, c_1, c_2 – положительные параметры, вычисленные по правым частям (1). Удается показать (см. также результаты работы [2]), что в случае, когда область Ω представляет собой отрезок $[0, 1]$, параметры задачи (2) могут быть выбраны такими, что при всех достаточно малых $\nu_0 > 0$ динамическая система, порождаемая этой краевой задачей, в своем фазовом пространстве имеет хаотический аттрактор A_ν, ляпуновская размерность $d_L(A_\nu)$ которого стремится к $+\infty$ при $\nu_0 \to 0$. Учитывая, что хаотическое поведение решений квазинормальной формы (2) совсем не обязательно влечет хаотическое поведение исходной краевой задачи (1), возникает необходимость численного анализа (1) при значениях параметров, для которых у квазинормальной формы наблюдается явление диффузионного хаоса. Основным результатом выполненных вычислений является обнаруженное при $\nu \to 0$ неограниченное нарастание ляпуновской размерности аттрактора задачи (1).

Литература

[1] *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Майоров В. В.* Реакция Белоусова: математическая модель и экспериментальные факты // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1987. — С. 43–51.

[2] *Глызин С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. — Т.16, № 3 (2009). — С. 96–116.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКТНОЙ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

Гоза Н.И. (Архангельск)

goza@atnet.ru

В последнее время весьма актуальным является применение проектной технологии в образовательном процессе (см., напр., [1]). Ее суть состоит в том, что обучение идет на активной основе, в процессе решения какой-либо проблемы, как правило, общей для группы учащихся, или группы взаимосвязанных проблем. Решение осуществляется под руководством педагога, который направляет процесс в определенное русло, следит за выполнением поставленных целей, стимулирует интерес учащихся к освоению намеченного объема знаний.

Проектные технологии весьма важны особенно сейчас, когда идет переход системы высшего образования на государственные образовательные стандарты третьего поколения. Эти стандарты направлены на выработку у студентов компетенций с помощью интерактивных технологий.

В докладе описывается опыт автора по обучению студентов математического факультета Поморского государственного университета (ПГУ) в процессе их занятий научно-исследовательской работой в группах, на научных студенческих семинарах. Студентам 2-4 курсов предлагались темы курсовых работ по дискретным динамическим системам, топологии. Для выполнения работ им нужно было разобраться в новой, общей для всех них области математики, освоить разделы, не входящие в стандартные вузовские курсы. Между тем, у каждого студента было и индивидуальное задание, которое надо было выполнить самостоятельно. На заседаниях, семинарах, студенты под руководством преподавателя разбирали новый теоретический материал, критически его воспринимали, задавали вопросы друг другу, докладывали собственные научные результаты, которые потом оформлялись в качестве курсовых и квалификационных работ, в отдельных случаях — в виде научных статей.

Ряд студенческих исследований выполнялся в рамках совместных международных проектов ПГУ с университетами Швеции и Норвегии.

Литература

1. Полат Е.С., Бухаркина М.Ю., Моисеев М.В., Петров А.Е. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. — 272 с.

ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТЬ СПЕКТРА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Голованева Ф.В., Шабров С.А. (Воронеж)

Качественная теория дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами начала бурно развиваться после работы Ю.В. Покорного [1] 1999 года.

Столь успешное продвижение обусловлено тем, что дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + Q'u = F' \tag{1}$$

трактуется как побочно заданное, т.е. как обыкновенное.

Последнее позволяет применить качественные методы анализа решения (типа теорем Ролля) дифференциальных уравнений, что делает возможным получить столь важную для приложений информацию (например, количество нулей, экстремумов и пр.). Следует отметить, что изучение (1) с позиций теории обобщенных функций позволяет установить лишь слабую разрешимость (оставляем за кадром вопросы о перемежаемости нулей и пр.). Это неудивительно: (1) расценивается как равенство функционалов, определенных на D пространстве бесконечно дифференцируемых финитных на $[0;\, l]$ функций.

С позиции поточечной интерпретации уравнения (и позволившей для уравнения второго порядка [2], [3] построить точную параллель классической теории вплоть до осцилляционных теорем) для краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = \lambda u M'_\sigma, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

λ — спектральный параметр, удается доказать осцилляционность спектра. А именно справедлива

Теорема. Спектр состоит из действительных положительных собственных значений, единственная точка сгущения которых $+\infty$, (геометрическая) кратность каждого из них равна 1; если собственные значения занумеровать $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, и $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ - соответствующие им собственные функции, то

(а) нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются;

(б) нетривиальная комбинация $\sum\limits_{i=k}^{m} \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более m нулей и не менее k перемен знака.

Решение краевой задачи (2) мы ищем в классе непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, первая производная $u'(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$; вторая производная $u_{xx}^{//}(x)$ имеет конечное на $[0;\, l]$ изменение; $\left(pu_{xx}^{//}\right)(x)$ - абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$, $\left(pu_{xx}^{//}\right)_x^{/}(x) - \sigma$ - абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$.

В уравнении (2) все производные до третьего порядка включительно понимаются в обычном смысле, а четвертого – по Радону-Никодиму [1].

На коэффициенты $p(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ мы накладываем вполне физичные условия

1. $p(x)$ имеет конечные на $[0;\, l]$ изменения;
2. $\inf\limits_{x \in [0;\, l]} p(x) > 0$;
3. $Q(x)$ - не убывает на $[0;\, l]$;
4. $M(x)$ - возрастает на $[0;\, l]$;
5. $Q(x)$ и $M(x) - \sigma$-абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$.

Переменная x в уравнении принадлежит специальному множеству $\overline{[0;\, l]}_{\sigma}$, в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S\left(\sigma\right)$ точек разрыва функции $\sigma\left(x\right)$, заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0,\ \xi,\ \xi + 0\}$. В точках ξ уравнение понимается как равенство

$$\Delta \left(pu_{xx}^{//}\right)_x^{/}(\xi) + u\left(\xi\right)\Delta Q\left(\xi\right) = \lambda u\left(\xi\right)\Delta M\left(\xi\right),$$

где $\psi\left(\xi\right)$ - скачок функции $\psi\left(\xi\right)$ в точке ξ.

Литература

[1] Покорный Ю.В. Стилтьеса и производная по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364, 2. – С. 167 – 169.

[2] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Успехи матем. наук. – Т. 63, вып. 1 (379). – 2008. – С. 111 – 154.

[3] Покорный Ю.В. Осцилляционный метод в спектральных задачах / Покорный Ю.В. [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 192 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТАКАЧА

Головко Н.И., Пелешок О.В. (Владивосток)

cdo@psue.ru

Моделирование информационных сетей (ИС) является актуальной технической и научной проблемой. Для построения моделей информационных потоков могут использоваться как известные, так и новые средства мониторинга ИС. Необходимость разработки новых средств мониторинга ИС вызвана тем, что имеющиеся стандартные средства мониторинга недостаточно полно отражают показатели эффективности функционирования ИС.

Аналитическими моделями сети в целом и отдельных ее элементов являются соответственно сети и системы массового обслуживания (СМО). Большинство авторов изучают СМО в предположении, что параметры не изменяются со временем. Однако в настоящее время такие СМО хорошо изучены, поэтому большой интерес представляют модели параметры потоков сообщений которых с течением времени претерпевают случайные изменения. Анализ таких СМО является сложной математической задачей и, так как универсальных методов применительных к расчету вероятностных характеристик СМО пока еще не существует, есть необходимость в разработки таких методов хотя бы для определенных классов. В данной работе рассматривается СМО типа $M/G/1$ с произвольным законом обслуживания $B_\eta(u)$, то есть время обслуживания η распределено по закону $B_\eta(u) = P\{\eta < u\}$. На вход рассматриваемой дважды стохастической СМО поступает пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, изменяющийся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа плотность распределения:

$$\varphi(x) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx\}/dx.$$

Предполагается выполнение условия отсутствия перегрузок в стационарном режиме: $b < \mu$. Обозначим через $U(t)$ – незавершенную работу системы в момент времени t. Незавершенная работа представляет собой время, необходимое системе для освобождения от всех заявок, находящихся в ней в момент времени

t. В работе получено интегро - дифференциальное уравнение типа Такача для нестационарного режима :

$$-(\alpha+x)\mathbf{H}(w,t,x)+\frac{\partial\mathbf{H}(w,t,x)}{dw}+x\int_0^w B(w-s)\frac{\partial\mathbf{H}(s,t,x)}{\partial s}ds+$$

$$+\alpha\varphi(x)\int_a^b \mathbf{H}(w,t,x)dy=\frac{\partial\mathbf{H}(w,t,x)}{\partial t},w>0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{H}(w,t,x)=P\{U(t)<w,x<\lambda(t)<x+dx\}/dx$ – нестационарная функция распределения незавершенной работы $U(t)$ и интенсивности входного потока $\lambda(t)$. Решение данного уравнения получено с применением преобразований Лапласа и Стилтьеса.

Литература

1.*Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение. 1979.

2.*Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа. 1982.

ФЛУКТУАЦИИ ПОКАЗАНИЙ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ ПРИ ПОЗИЦИОНИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Голосной А.С. (С.-Петербург)

Существующие алгоритмы определения координат на основе сигналов навигационных спутников рассчитаны на применение в движущихся объектах.

Стандартный сигнал принимаемый навигационным прибором (GPS – навигаторы), априори несет в себе ограничение по двум составляющим :

- по предельной точности обусловленной такими показателями как: частота хода атомных часов, предельная точность расчета координат спутника на станциях слежения

- по наличию случайной составляющей, вызванной многими факторами, как-то: атмосферными возмущениями, магнитным полем земли, отражением и блокировкой сигнала от элементов рельефа, зданий, сооружений, деревьев и пр.

Опишем входной сигнал следующим выражением

$$T_i(\vec{R}_i,T)$$

Так как значения вектора $\vec{R}_i$ содержащего координаты i-го спутника и время T навигатор получает из альманаха и эфемерид, имеющих свой срок актуальности, то результирующие данные также являются случайным числом. Обозначив m_i математическое ожидание, i – номер спутника, σ_i– среднеквадратическое отклонение. Для уменьшения влияния имеющихся флуктуаций в Европе и США используется система дифференциальных поправок WAAS. В России в настоящее время такая система недоступна. Поэтому для повышения точности определения координат стационарных объектов предлагается следующий алгоритм.

Поскольку Нас интересуют координаты неподвижного объекта, можно произвести достаточно большое число измерений и по теореме Чебышева о сходимости по вероятности, снизить величину ошибки усреднения. Но здесь присутствует принципиальное ограничение, связанное с тем, что спутники двигаются не на геостационарных орбитах, а на высоте обеспечивающей орбитальный период в 12 часов, причем с невысоким наклонением орбит. То есть, для измерения годится небольшой промежуток времени ΔT, пока перемещение спутника поддается линеаризации относительно навигационного прибора. Тогда имеем возможность оценить предельную точность ε_x определения позиции в виде параметров формулы

$$P(\left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x \right| < \varepsilon_x) > 1 - \delta_x$$

X - соответствующая координата, n - число измерений за промежуток видимости спутника в линейном секторе наблюдения, δ_x отклонение по теореме Чебышева.

СИСТЕМЫ ОКОННЫХ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Голубева Е.С. (Самара)

depcy@yandex.ru

Рассматривается система оконных экспонент вида:

$$\mathcal{E}\left(g(x), \Lambda\right) = \left(g(x) \exp 2\pi i \lambda_n x\right)_{\lambda_n \in \Lambda}$$

в пространстве $L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Более детально изучается случай, когда Λ представляет собой $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{F}$, где F- конечное множество. Изучается вопрос о том, когда система оконных экспонент является фреймовой последовательностью, полной, минимальной системой а также базисом Шаудера.

Теорема 1.*Рассмотрим систему* $(| x |^\alpha \exp 2\pi inx)_{n\in\mathbb{Z}}$, *тогда справедливы следующие утверждения:*
1.Система $(| x |^\alpha \exp 2\pi inx)_{n\in\mathbb{Z}}$ *является полной, бесселевой последовательностью,не является минимальной, если* $\alpha > -\frac{1}{2}$
2.Система $(| x |^\alpha \exp 2\pi inx)_{n\in\mathbb{Z}}$ *является полной, минимальной, бесселевой последовательностью, при* $| \alpha |< \frac{1}{2}$, *при этом ее биортогональная последовательность имеет нижнюю фреймовую границу.*

Тот факт, что система $(| x |^\alpha \exp 2\pi inx)_{n\in\mathbb{Z}}$ при $| \alpha |< \frac{1}{2}$ -базис Шаудера, является классическим результатом Бабенко К.И.[3]

Теорема 2.*Рассмотрим систему* $(| x + a |^\alpha \exp 2\pi inx)_{n\in\mathbb{Z}}$ *при* $| a |> \frac{1}{2}$.*Справедливы следующие утверждения:*
1.Система $(| x + a |^\alpha \exp 2\pi inx)_{n\in\mathbb{Z}}$*является полной, фреймовой последовательностью при* $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$
2.Система $(| x + a |^\alpha \exp 2\pi inx)_{n\in\mathbb{Z}}$ *является полной, минимальной, фреймовой последовательностью с границами* A, B, *базисом Шаудера при* $| \alpha |\leqslant \frac{1}{2}$ *при этом ее биортогональная последовательность также является фреймовой последовательностью с границами* $\frac{1}{B}, \frac{1}{A}$.

Литература

1. *O.Christensen.* An Introduction to Frames and Riesz Bases.// Birkhäuser. Boston, 2002..
2. *C.Heil, G. Kutyniok.* Density of frames and Shauder bases of windowed exponentials.// Houston Journal of Mathematics, 2008
3.*Babenko K.I* On conjugate functions.//Doklady Akad. Nauk SSSR, 1948

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА ОТ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p–ВАРИАЦИИ[1]

Голубов Б.И. (Долгопрудный)
golubov@mail.mipt.ru

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $\chi_1(x) \equiv 1$ на $[0,1]$. Введем обозначение $I_i^k = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $i =$

[1]Работа поддержана РФФИ, проект 11-01-00321 и АВЦП Минобразования России “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект 2.1.1/1662.

$1,\ldots,\ 2^k,\ k=0,1,\ldots$. Представим натуральное $n \geqslant 2$ в виде $n=2^k+i,\ i=1,\ldots,2^k,\ k=0,1,\ldots$ и положим $\chi_n(x)=\sqrt{2^k}$ для $x\in I_{2i-1}^{k+1}$, $\chi_n(x)=-\sqrt{2^k}$ для $x\in I_{2i}^{k+1}$ и $\chi_n(x)=0$ для остальных точек отрезка $[0,1]$. Эта система ортонормирована на отрезке $[0,1]$ (см., например, [1], с. 70, где определение функции $\chi_n(x)$ при $n\geqslant 2$ отличается от приведенного здесь в конечном числе точек).

Введем теперь определение функции ограниченной p–вариации на квадрате $\Delta=[0,1]\times[0,1]$. Пусть заданы две системы точек $\tau_1=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_r=1\}$ и $\tau_2=\{0=y_0<y_1<\cdots<y_l=1\}$. Если для функции $f(x,y)$, заданной на квадрате Δ, при некотором $p\in[1,\infty)$ следующие три величины

$$V_{1,0}(f)_p=\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}\sup_{\tau_1}\left\{\sum_{i=1}^{r}|f(x_i,y)-f(x_{i-1},y)|^p\right\}^{1/p}\quad V_{0,1}(f)_p=$$

$$=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sup_{\tau_2}\left\{\sum_{j=1}^{l}|f(x,y_j)-f(x,y_{j-1})|^p\right\}^{1/p},$$

$$V_{1,1}(f)_p=$$

$$\sup_{\tau_1,\tau_2}\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l}|f(x_i,y_j)-f(x_{i-1},y_j)-f(x_i,y_{j-1})+f(x_{i-1},y_{j-1})|^p\right\}^{1/p}$$

конечны, то будем писать $f\in V_p(\Delta)$ и говорить, что функция f имеет ограниченную p–вариацию на квадрате Δ.

Для функции $f\in L(\Delta)$ положим $\hat f(m,n)=\iint_\Delta f(x,y)\,\chi_m(x)\,\chi_n(y)\,dxdy$, т.е. $\hat f(m,n)$ – коэффициенты Фурье функции f по двукратной системе Хаара $\{\chi_m(x)\,\chi_n(y)\}_{m,n=1}^{\infty}$.

Теорема 1. 1) Если $f\in V_p(\Delta)$, $p\in[1,\infty)$, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(mn)^{\gamma}\left|\hat f(m,n)\right|^{\beta}<\infty$ при $\gamma+1<\beta(1/p+1/2)$, $\beta>0$. 2) *Утверждение п. 1) теряет силу при* $\gamma+1=\beta(1/p+1/2)>0$.

Следствие 1. 1) Если $f\in V_p(\Delta),p\in[1,\infty)$, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\hat f(m,n)\right|^{\beta}<\infty$ при $\beta>\frac{2p}{p+2}$. 2) *Утверждение п. 1) теряет силу при* $\beta=\frac{2p}{p+2}$.

Следствие 2. 1) Если $f \in V_p(\Delta)$, $p \in [1,\infty)$, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(mn)^{\gamma}\left|\hat{f}(m,n)\right| < \infty$ при $\gamma < 1/p - 1/2$.2) *Утверждение п. 1) теряет силу при* $\gamma = 1/p - 1/2$.

Следствия 1-2 являются двумерными аналогами теоремы 8 работы автора [2].

Будем писать $f \in Lip\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ на Δ, если

$$\|f(\cdot + h,\, \cdot + \eta) - f(\cdot\,,\, \cdot)\|_C = O\left((h^2 + \eta^2)^{\alpha/2}\right),\ (h,\eta) \in \Delta.$$

Легко видеть, что $Lip\,\alpha \subset V_{2/\alpha}(\Delta),\ 0 < \alpha \leqslant 1$. Поэтому справедливо

Следствие 3. Если $f \in Lip\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ на Δ, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(mn)^{\gamma}\left|\hat{f}(m,n)\right|^{\beta} < \infty$ при $\gamma + 1 < \beta(\alpha+1)/2,\ \beta > 0$.

Утверждение этого следствия известно (см. [3], где также доказано, что при $\gamma + 1 = \beta((\alpha+1)/2),\ \beta > 0$ оно теряет силу). В случае $\gamma = 0$ следствие 3 ранее установлено в работе [4], где также доказано, что в этом случае оно не справедливо при $\beta(\alpha+1)/2 = 1$.

Литература

1. Б.С. Кашин, А.А. Саакян. Ортогональные ряды. Москва, изд-во АФЦ, 1999.

2. Б.И. Голубов. О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара // Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6 (1964), 1271-1296.

3. Г.З. Табатадзе. Об абсолютной сходимости рядов Фурье-Хаара // Сообщ. АН Груз. ССР, 103, № 3 (1981), 541-543.

4. В.Ш. Цагарейшвили. О коэффициентах Фурье-Хаара // Сообщ. АН Груз. ССР, 81, № 1 (1976), 29-31.

ОБОБЩЕННАЯ ВЕСОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ[1]

Голубов Б.И. (Долгопрудный), Волосивец С.С. (Саратов)
Golubov@mail.mipt.ru, VolosivetsSS@mail.ru

Будем писать, что функция $\lambda(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbf{R}_+$, принадлежит классу $\mathcal{A}_\gamma$, $\gamma \geqslant 1$, если найдется $C(\gamma) \geqslant 1$, такое что

$$\left(\int_{2^n}^{2^{n+1}} \lambda^\gamma(t)\,dt\right)^{1/\gamma} \leqslant C(\gamma) 2^{n(1-\gamma)/\gamma} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \lambda(t)\,dt; \quad n \in \mathbf{Z}_+. \qquad (1)$$

Это определение дано Ф.Морицем [1], аналогичное условие для рядов введено Л.Гоголадзе и Р.Месхиа [2] и является обобщением условия, использовавшегося П.Л.Ульяновым [3]. Через $V_s(f)$ обозначим s-вариацию f на $\mathbf{R}$. Пусть $F(f)$ — преобразование Фурье функции f, определенной на $\mathbf{R}$, $\omega(f,\delta)_p$ — модуль непрерывности $f \in L^p(\mathbf{R})$. Ф.Мориц [1] установил два следующих результата об интегрируемости типа Бернштейна-Саса и типа Зигмунда.

Теорема A. *Пусть* $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 < p \leqslant 2$, $0 < r < q$, $1/p + 1/q = 1$, $\lambda \in \mathcal{A}_{p/(p-rp+r)}$ *и* $\lambda(-t) = \lambda(t)$. *Тогда* $\int_{|t|\geqslant 2} \lambda(t)|F(f)(t)|^r\,dt \leqslant C\int_1^\infty \lambda(t) t^{-r/q} \omega^r(f,\pi/t)_p\,dt$.

Теорема B. *Пусть* $f \in L^p(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ *такова, что* $V_s(f) < \infty$, *где* $1 < p \leqslant 2$ *и* $0 < s < p$. *Если* r, q *и* $\lambda(t)$ *такие же, как в теореме A, то*

$$\int_{|t|\geqslant 2} \lambda(t)|F(f)(t)|^r\,dt \leqslant C\int_1^\infty \lambda(t) t^{-r} (\omega(f,\pi/t)_\infty)^{r(1-s/p)}\,dt.$$

Ряд работ был посвящен изучению поведения коэффициентов Фурье от сверток функций (см.[4]-[6]).

Теорема C. [4] 1) *Если* $g, h \in L^p_{2\pi}$, $1 < p \leqslant 2$, *то ряд из модулей коэффициентов Фурье их свертки* f *в степени* $\beta_0 = p/(2p-2)$ *сходится.*

2) *Для любого* $1 < p \leqslant 2$ *найдутся* $g, h \in L^p_{2\pi}$, *такие что ряд из модулей коэффициентов Фурье их свертки* f *в любой степени* $\beta < \beta_0$ *расходится.*

Во многих работах оценивался порядок коэффициентов Фурье интегрируемых функций при условии их монотонности. Отметим результат С.Алянчича и М.Томича [7].

---

[1] Работа первого автора поддержана РФФИ, проект 11-01-00321 и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы проект 2.1.1/1662, работа второго автора поддержана программой "Ведущие научные школы РФ"(проект НШ-4383.2010.1).

Теорема D. *Пусть коэффициенты Фурье* μ_n *четной (или нечетной) функции* $f \in L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$, *убывают. Тогда* $n^{1-1/p}\mu_n \leqslant C\omega(f, \pi/2n)_{L^p}$, *где* $\omega(f,\delta)_{L^p}$ *— модуль непрерывности* f *в* $L^p_{2\pi}$.

Дадим необходимые определения. Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{|j|\in\mathbf{N}}$, где для всех $j \in \mathbf{N}$ справедливо $p_j \in \mathbf{N}$, $2 \leqslant p_j \leqslant N$, $p_{-j} = p_j$. Положим $m_j = p_1 \dots p_j$ при $j \in \mathbf{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = 1/m_l$ при $l \in \mathbf{N}$. Тогда каждому $x \in \mathbf{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j/m_j, \quad x_j \in \mathbf{Z} \cap [0, p_j), \ |j| \in \mathbf{Z}_+. \tag{2}$$

Это разложение однозначно, если при $x = k/m_n$, $k \in \mathbf{Z}_+$, брать разложения с конечным числом ненулевых x_i. Если $x, y \in [0, +\infty)$ записаны в виде (2), то по определению $z = x \ominus y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_{-j} m_{j-1} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j/m_j$, $z_j = x_j - y_j \pmod{p_j}$, $z_j \in \mathbf{Z} \cap [0, p_j)$. Аналогично определяется операция $x \oplus y$. Для $x, y \in [0, +\infty)$, записанных в виде (2), определим ядро $\chi(x,y)$ равенством $\chi(x,y) = \exp\left\{2\pi i \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_j y_{-j} + x_{-j} y_j)/p_j\right)\right\}$. Для функции $f \in L^1(\mathbf{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$-преобразование Фурье определяется формулой $\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}_+} f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$ (справа стоит интеграл Лебега). Для $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, $\mathbf{P}$-преобразование Фурье вводится, как предел $\int_0^a f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$ в $L^q(\mathbf{R}_+)$, где $1/p + 1/q = 1$, при $a \to \infty$. При этом справедлив аналог неравенства Хаусдорфа-Юнга $\|\hat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$. Подробности см. в [8, §1.5 и глава 6]. Наконец, для убывающей к нулю на $\mathbf{R}_+$ функции f можно определить $\hat{f}$, как несобственный интеграл (см. теорему 3 в [9]).

Для $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 \leqslant p < \infty$, положим $\omega^*(f,\delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_{L^p(\mathbf{R}_+)}$ и $\omega_n(f)_p := \omega^*(f, 1/m_n)_p$, $n \in \mathbf{Z}$. Если $\omega_n(f)_p \leqslant C m_n^{-\alpha}$, то будем писать $f \in Lip^*(\alpha, p)$. Для $f, g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+)$ их сверткой назовем интеграл $\int_{\mathbf{R}_+} f(x \ominus t) g(t)\,dt$, если он существует. Пусть $I_j^n = [j/m_n, (j+1)/m_n)$ и $osc(f, [a,b)) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b)\}$. Функция f является функцией ограниченной s-флуктуации на $\mathbf{R}_+$, если $Fl_s(f) := \sup\limits_{k\in\mathbf{Z}} \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} osc^s(f, I_j^k)\right)^{1/s} < \infty$. Далее будем считать, что $\lambda \in A_\gamma$, если неравенство (1) выполняется при замене 2^n на m_n.

Теорема 1 является аналогом классического результата Харди-Литтлвуда и существенно дополняет теорему 2 из [9].

Теорема 1. *Пусть $g(x)$ не возрастает на $\mathbf{R}_+$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда функция $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, со свойством $\hat{f} = g$, существует в том и только в том случае, когда $g(x)x^{1-2/p} \in L^p(\mathbf{R}_+)$.*

Теорема 2. 1) *Пусть $f \in L^p(\mathbf{R}_+))$, $1 < p \leqslant 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\beta_n = \int_{m_{n-1}}^{m_n} \lambda(t)\,dt$. Если $\lambda \in A_{p/(p+r-pr)}$ для некоторого $r \in (0, q)$, $\lambda \in L^{q/(q-r)}[0,1)$ и сходится интеграл $\int_1^\infty \lambda(t)t^{-r/q}(\omega^*(f,1/t)_p)^r\,dt$ или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n^r(f)_p\beta_n m_n^{-r/q}$, то $\lambda(t)|\hat{f}(t)|^r \in L^1(\mathbf{R}_+)$.*

2) *Пусть $1 < p \leqslant 2$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < r < q$. Если $\lambda \geqslant 0$, $\lambda \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+)$ и $\omega_n \downarrow 0$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n^r\beta_n m_n^{-r/q} = \infty$ и выполнено условие Бари $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k = O(\omega_n)$, то найдется $f_0 \in L^p(\mathbf{R}_+)$, такая что $\omega_n(f)_p \leqslant C\omega_n$, но $\int_1^\infty \lambda(t)|\hat{f}(t)|^r\,dt$ расходится.*

Следствие 1. *Пусть $f \in L^p(\mathbf{R}_+))$, $1 < p \leqslant 2$, и $Fl_s(f) < \infty$, где $0 < s < p$. Если $\lambda \in A_{p/(p+r-pr)}$, где $0 < r < q$, $1/p + 1/q = 1$, и $\lambda \in L^{q/(q-r)}[0,1)$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{-r}\beta_n(\omega_n(f)_\infty)^{r(1-s/p)}(Fl_s(f))^{rs/p}$ вытекает конечность интеграла $\int_0^\infty \lambda(t)|\hat{f}(t)|^r\,dt$.*

Следствие 2. *Пусть $f \in L^p(\mathbf{R}_+))$, $1 < p \leqslant 2$, и $Fl_p(f) < \infty$. Если $\lambda(t)$ такое же, как в следствии 1, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{-r}\beta_n$ следует конечность интеграла $\int_0^\infty \lambda(t)|\hat{f}(t)|^r\,dt$.*

Следствие 3. *Если $f \in L^p(\mathbf{R}_+) \cap Lip^*(\alpha,\infty)$, $1 < p \leqslant 2$, $\alpha > 0$, и $Fl_1(f) < \infty$, то $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}_+)$.*

Следствие 3 является аналогом классической теоремы Зигмунда об абсолютной сходимости ряда Фурье. Теорема 2 и следствие 1 являются аналогами теорем А и Б. При этом следствие 1 получается из теоремы 2 с помощью следующей леммы

Лемма. *Пусть $Fl_s(f) < \infty$ и $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, где $1 < p \leqslant 2$ и $0 < s < p$. Тогда $\omega_n(f)_p \leqslant m_n^{-1/p}(\omega_n(f)_\infty)^{1-s/p}(Fl_s(f))^{s/p}$ при $n \in \mathbf{Z}_+$.*

Сходным образом теорема Б вытекает из теоремы А. Более интересной и независимой от теоремы 2 представляется

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant s < 2p$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < r < 2$, $Fl_s(f) < \infty$, $\lambda \in A_{2/(2-r)}$ *и* $\lambda \in L^{2/(2-r)}[0, 1)$. *Если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{-r/2-r/p}(\omega_k(f)_{s+(2-s)q})^{r-sr/2p}\beta_k,$$

то интеграл $\int_0^\infty \lambda(t)|\hat{f}(t)|^r\,dt$ *конечен.*

Теорема 3 при $\lambda(t) \equiv 1$ является аналогом результата М. и Ш.Изуми [10] для тригонометрических рядов. Приведем теперь два утверждения о преобразованиях Фурье сверток.

Теорема 4. 1) *Пусть* $g, h \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant 4/3$, $1/p + 1/q = 1$, $f = g * h$. *Тогда* $\hat{f} \in L^{q/2}(\mathbf{R}_+)$.

2) *Если* $1 < p \leqslant 4/3$, $1/p + 1/q = 1$ *и* $0 < r < q/2$, *то существуют* $g, h \in L^p(\mathbf{R}_+)$, *такие что для* $f = g * h$ *имеем* $\hat{f} \notin L^r(\mathbf{R}_+)$.

Теорема 5. 1) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$, $1/p + 1/q \geqslant 3/2$, $\alpha > 0$. *Если* $g \in Lip^*(\alpha, p)$, $h \in L^q(\mathbf{R}_+)$, $f = g * h$, *то* $\hat{f} \in L^\beta(\mathbf{R}_+)$ *при* $pq/(\alpha pq + 2pq - p - q) < \beta < pq/(2pq - q - p)$.

2) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$, $\alpha > 0$, $3/2 \leqslant 1/p + 1/q < \alpha + 2 - 1/q$. *Тогда существуют* $g \in Lip^*(\alpha, p)$ *и* $h \in L^q(\mathbf{R}_+)$, *такие что* $(g * h)\hat{} \notin L^{\beta_0}(\mathbf{R}_+)$, *где* $\beta_0 = pq/(\alpha pq + 2pq - p - q)$.

Следствие 4. 1) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$ *и* $\alpha > 1/p + 1/q - 1 \geqslant 1/2$. *Если* $g \in Lip^*(\alpha, p)$ *и* $h \in L^q(\mathbf{R}_+)$, *то для* $f = g * h$ *имеем* $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}_+)$.

2) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$ *и* $0 < \alpha = 1/p + 1/q - 1 \geqslant 1/2$. *Тогда существуют* $g \in Lip^*(\alpha, p)$ *и* $h \in L^q(\mathbf{R}_+)$, *такие что* $(g * h)\hat{} \notin L^1(\mathbf{R}_+)$.

Теорема 4 является аналогом теоремы C, тогда как часть 1) теоремы 5 и следствие 4 являются аналогами теоремы 6, следствия 5 и теоремы 7 из [5] для мультипликативных систем. Дальнейшие результаты см. в [6].

В заключение дадим аналог теоремы D.

Теорема 6. *Пусть* $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, *такова, что* $\hat{f}(x) \geqslant 0$ *и* $\hat{f}(x) \downarrow$ *на* $(0, +\infty)$. *Тогда при* $x \in [m_n, m_{n+1})$, $n \in \mathbf{N}$, *имеем* $\hat{f}(x) \leqslant C m_n^{-1/p}\omega_{n-1}(f)_p$.

Литература

1. F. Moricz. Sufficient conditions for the Lebesgue integrability of Fourier transforms // Analysis Math., 36, №2 (2010), 121-129.

2. L. Gogoladze, R. Meskhia. On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst., 141(2006),

29-40.

3. П. Л. Ульянов. О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Известия АН СССР. Сер.матем., 28, №4 (1964), 925-950.

4. C.W.Onneweer. On absolutely convergent Fourier series // Arkiv Mat., 12, №1 (1974), 51-58.

5. C.W.Onneweer. Absolute convergence of Fourier series on certain groups.II // Duke Math. J. 41, №3 (1974), 679-688.

6. С.С.Волосивец. О сходимости рядов из коэффициентов Фурье мультипликативных сверток // Изв. вузов. Матем., №11 (2008), 28-39.

7. S. Aljancic, M. Tomic. Über den Stetigkeitsmodul von Fourier Reihen mit monotonen Koeffizienten // Math. Zeitschr., 88, №2 (1965), 274-284.

8. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М., Наука, 1987.

9. B. I. Golubov, S.S. Volosivets. On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transforms // Georgian Math. J., 16, №3 (2009), 533-546.

10. M. Izumi and S. Izumi. On absolute convergence of Fourier series // Ark. Mat., 7, №12 (1967), 177-184.

ПРОСТРАНСТВА $\bar{S}_{\overline{p},\bar{l}}(\mathbb{R}^n)$ И ИХ ПОЛНОТА

Горлов В.А. (Воронеж)

gorlov.vladimir@gmail.com

Пусть $\overline{p}=(p_1,\dots,p_n)$ и $\overline{l}=(l_1,\dots,l_n)$— векторы с координатами $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $0<l_i<\infty$ $(i=1,\dots,n)$.

Обозначим через $I_{\overline{l}}=I_{l_1}\times\cdots\times I_{l_n}\subset\mathbb{R}^n$— параллелепипед со сторонами $I_{l_i}=\{x_i:\,0<x_i<l_i\}$.

Анизотропные пространства В.В. Степанова $S_{\overline{p},\overline{l}}$ определяются как множество локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых имеет место норма

$$\|f\|_{S_{\overline{p},\overline{l}}}=$$

$$=\sup_{\overline{t}\in\mathbb{R}^n}\left[\int_0^1\left[\dots\left\{\int_0^1(\int_0^1|f(\overline{x}+\overline{t})|^{p_1}dx_1)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\right\}^{\frac{p_3}{p_2}}\dots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dx_n\right]^{\frac{1}{p_n}}=$$

$$=\sup_{\overline{t}\in\mathbb{R}^n}\|T(\overline{t})f\|_{L_{\overline{p},I_{\overline{l}}}}. \qquad (3)$$

Класс $\bar{S}_{\bar{p},\bar{l}}(\mathbb{R}^n)$ - множество функций $f \in S_{\bar{p},\bar{l}}(\mathbb{R}^n)$, обладающих свойством непрерывности:

$$\lim_{|\bar{h}|\to 0} \|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})\|_{S_{\bar{p},\bar{l}}(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4}$$

Лемма 1. Пространства $\bar{S}_{\bar{p},\bar{l}}(\mathbb{R}^n)$ полны, то есть банаховы с нормой:

$$\|f\|_{S_{\overline{p},\overline{l}}} =$$

$$= \sup_{\overline{t}\in\mathbb{R}^n} \left[\int_0^1 \left[\dots\left\{\int_0^1 (\int_0^1 |f(\overline{x}+\overline{t})|^{p_1} dx_1)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\right\}^{\frac{p_3}{p_2}} \dots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n\right]^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \sup_{\overline{t}\in\mathbb{R}^n} \|T(\overline{t})f\|_{L_{\overline{p}}, I_{\overline{l}}}.$$

Литература

1. Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский.— Глав. ред. физ.-мат. литер. "Наука 1975— 480 с.

2. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В. Костин, В.А. Костин.— Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.— 259 с.

3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский.— М.: "Наука 1977— 454 с.

4. О двойственности анизотропных пространств Степанова и Никольского, В.А. Костин, А.В. Костин, В.А. Горлов, Журнал "Доклады Академии Наук 2010, том 435, №1, с. 1-4

ДИНАМИКА СЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ БЛИЗКИХ ВИДОВ

Горчакова Е.В. (Ярославль)

gorchakovaev@yandex.ru

1. Постановка задачи. В работе рассматривается система, представляющая собой математическую модель взаимодействия двух близких слабо связанных видов

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r[1+\varepsilon a(1-x_2) - x_1(t-1)]x_1, \\ \dot{x}_2 &= r[1+\varepsilon a(1-x_1) - x_2(t-1)]x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_1(t), x_2(t)$ — нормированные плотности популяций, $r > 0$ — коэффициент линейного роста, $0 < \varepsilon \ll 1$, параметр a регулирует интенсивность взаимодействия видов, при $a > 0$ виды конкурируют, при $a < 0$ — существуют в симбиозе.

2. Построение нормальной формы. Изучение окрестности состояния равновесия $(1, 1)$ системы (1) проводится методом нормальных форм. Пусть $r = \pi/2 + \varepsilon$, тогда характеристический квазимногочлен линейной системы при $\varepsilon = 0$ имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\pi/2$. Для построения нормальной формы в системе (1) выполняется замена

$$x_j(t) = 1 + \sqrt{\varepsilon}(z_j(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_j(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}) + \varepsilon u_{j\ 1}(t,\tau) + \\ + \varepsilon^{3/2}u_{j\ 2}(t,\tau) + \dots\ , \quad (j = 1, 2), \quad (2)$$

где $z_j(\tau) = \rho_j(\tau)e^{i\varphi_j(\tau)}$ — комплекснозначные функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$. В результате нормальная форма получается в следующем виде

$$\begin{aligned} \xi_1' &= (1 - d\cos\delta - \xi_1^2)\xi_1 + d\xi_2\cos(\alpha + \delta), \\ \xi_2' &= (1 - d\cos\delta - \xi_2^2)\xi_2 + d\xi_1\cos(\alpha - \delta), \\ \alpha' &= b_0(\xi_1^2 - \xi_2^2) - d\tfrac{\xi_2}{\xi_1}\sin(\alpha + \delta) - d\tfrac{\xi_1}{\xi_2}\sin(\alpha - \delta), \end{aligned} \quad (3)$$

где d и δ определяются функцией связи, b_0 — правыми частями системы (1), переменные $\xi_j = \rho_j\sqrt{\frac{3\pi-2}{10(1-a)}}$, — медленно меняющиеся амплитуды колебаний, $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ — их разность фаз, штрихом обозначена производная по новому времени $s = \frac{\pi^2+4}{2\pi(1-a)}\tau$.

3. Исследование нормальной формы. В случае симбиоза видов $a < 0$, параметр d положителен, система (3) полностью соответствует системе, полученной в работе [1], где проведен анализ ее качественного поведения, получены бифуркационные значения d и описаны фазовые перестройки при изменении d. При положительных a параметр $d < 0$, система (3) заменами сводится к системе аналогичного вида.

На основе полученных в [1] сценариев фазовых перестроек можно сделать ряд биологических выводов. Для случая симбиоза видов: при достаточно сильной связи между видами (d большое) колебания их численности синхронизируются, если d достаточно мало, реализуются колебания в противофазе. В случае конкуренции ситуация противоположная. В относительно узкой области изменения d имеются устойчивые периодические решения системы (3), которым соответствуют двухчастотные колебания исходной системы. Последний колебательный режим, вероятно, наиболее осмыслен с биологической точки зрения, так как средняя численность совокупности популяций в этом случае выше, чем во всех остальных.

Литература

1. *Глызин, С.Д.* Динамические свойства простейших конечно-разностных аппроксимаций краевой задачи "реакция-диффузия"// Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 6. — С. 805-811.

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Горшков А.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

tiger-nn@mail.ru; msumin@sinn.ru

Доклад посвящен конструированию алгоритма поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций вида $F(z,\lambda)$, $(z,\lambda)\in Z\times\Lambda$, где Z,Λ – пара гильбертовых пространств, на основе идеологии двойственной регуляризации [1]. Под выпукло-вогнутыми функциями, заданными на произведении двух гильбертовых пространств, понимаются функции, выпуклые по одной переменной z и вогнутые по другой переменной λ. Задачи поиска седловых точек таких функций, т.е. точек $(z^*,\lambda^*)\in Z\times\Lambda$ таких, что $F(z^*,\lambda)\leqslant F(z^*,\lambda^*)\leqslant F(z,\lambda^*)\ \forall\,(z,\lambda)\in Z\times\Lambda$, возникают в самых различных приложениях, среди которых можно выделить в первую очередь, приложения, связанные с вопросами математической экономики.

Предполагается, что функция $F(z,\lambda)$ сильно выпукла по z, дифференцируема по Фреше по переменным z и λ, а также локально липшицева по переменной z при каждом λ. В предположении непустоты множества седловых точек функции $F(z,\lambda)$, рассмотрим двойственную задачу:

$$\varphi(\lambda)\to\max,\ \ \lambda\in\Lambda,\ \ \varphi(\lambda)\equiv\min_{z\in Z}F(z,\lambda). \qquad (1)$$

Предлагаемый алгоритм заключается в решении на основе метода регуляризации Тихонова двойственной задачи (1). Он представляет собой процедуру решения при каждом фиксированном значе-

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)" Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и ФЦП"'Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (проект НК-13П-13).

нии параметра регуляризации $\alpha > 0$ с одновременным его стремлением к нулю задачи максимизации

$$R^\alpha(\lambda) \equiv \varphi(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2 \to \max, \lambda \in \Lambda \qquad (2)$$

с сильно вогнутой функцией R^α. Точки максимума λ_α регуляризованной задачи (2) сходятся при $\alpha \to 0$ ко множеству решений двойственной задачи (1), а именно к решению λ_m с минимальной нормой: $\|\lambda_m\| = \min_{\lambda \in \Lambda_m} \|\lambda\|$. Точки минимума функций $F(\cdot, \lambda_\alpha)$ сильно сходятся при $\alpha \to 0$ к точке $z[\lambda_m] \equiv \arg\min\{F(z, \lambda_m), z \in Z\}$, составляющей в паре с λ_m искомую седловую точку функции $F(z, \lambda)$.

Центральную роль при обосновании этого алгоритма играет утверждение, в соответствии с которым производная Фреше функции $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ в точке λ имеет вид

$$\varphi'(\lambda) = F'_\lambda(z[\lambda], \lambda),$$

где $F'_\lambda(z, \lambda)$ – производная Фреше по λ функции $F(z, \cdot)$ в точке λ.

В процессе доказательства этого факта существенно используется аппарат современного негладкого анализа, связанный с понятиями проксимальной нормали к замкнутому множеству, проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции, обобщенного градиента Кларка.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т47. №4. С. 602-625.

О РЯДАХ ФУРЬЕ ПО НЕСТАНДАРТНОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Григораш Н.Ю. (Москва)

nata_gri@list.ru

Для построения нестандартной системы Хаара на квадрате $[0,1] \times [0,1]$ будем использовать системы функций $\{\chi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^\infty$, определенные на отрезке $[0,1]$ (см. [3]). Ортонормированная система функций $\{\chi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ является системой Хаара на отрезке $[0,1]$ (см. [1] и [2]); $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ — нормированная система функций на отрезке $[0,1]$, в которой $\varphi_0^0(t) = \varphi_1(t) \equiv 1$, а при $n = 2^k + i, i = 1, \ldots 2^k, k = 0, 1, \ldots$ функция $\varphi_n(t) = \varphi_i^k(t)$ определяется следующим образом: $\varphi_n(t) = 0$, при $t \notin \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]$;

$\varphi_n(t) = 2^{k/2}$, при $t \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$; $\varphi_n(t) = \lim\limits_{\delta\to+0} \varphi_n(\delta)$, при $t = 0$; $\varphi_n(t) = \lim\limits_{\delta\to+0} \varphi_n(1-\delta)$, при $t = 1$; $\varphi_n(t) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\delta\to 0}(\varphi_n(t+\delta)+\varphi_n(t-\delta)$, при остальных $t \in [0,1]$.

Определение. *Нестандартная система Хаара* на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ — это ортонорм. система функций $\{\xi^k_{ij(p)}(x,y)\}, k = 0,1,2\ldots, i,j = 1,2,3\ldots 2^k, p = 1,2,3$, определенных следующим образом:

— $\chi^0_0(x)\varphi^0_0(y) \equiv 1$;

— каждому квадрату $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]\times\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right]$, $k = 0,1,\ldots$, $1 \leqslant i,j \leqslant 2^k$ соответствует три функции с носителем на нём: $\xi^k_{ij(1)}(x,y) := \chi^k_i(x)\chi^k_j(y)$, $\xi^k_{ij(2)}(x,y) := \chi^k_i(x)\varphi^k_j(y)$ и $\xi^k_{ij(3)}(x,y) := \varphi^k_i(x)\chi^k_j(y)$.

При этом под *стандартной системой Хаара* на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ понимается система функций $\{\xi_{nm}(x,y)\}^\infty_{m,n=1}$, состоящая из попарных произведений одномерных функций Хаара.

Для функций нестандартной системы Хаара определим сплошную нумерацию: $\xi_1(x,y) := \xi^0_{00}(x,y)$, $\xi_n(x,y) := \xi^k_{ij(p)}(x,y)$ при $n = 2^{2k} + 3\cdot 2^k(j-1) + 3(i-1) + p$.

Основными задачами было исследование свойств коэффицентов Фурье по нестандартной системе Хаара и обобщение теоремы о коэффициентах Фурье по системе Хаара для непрерывных функций (см. [2]) на двумерный случай.

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по Лебегу на $[0,1]\times[0,1]$. Тогда для её коэффициентов Фурье по нестандартной системе Хаара выполнены следующие оценки:

$$1)\quad \left|c^k_{ij(p)}(f)\right| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}\,\omega\Big(\frac{1}{2^{k+1}}, f\Big), \quad \text{если } f(x,y)\in C([0,1]\times[0,1]),$$

$$2)\quad \left|c^k_{ij(p)}(f)\right| \leqslant \frac{M}{2^k}, \quad \text{если } |f(x,y)| \leqslant M \text{ при } (x,y)\in[0,1]\times[0,1].$$

Теорема. Для коэффициентов Фурье по нестандартной системе Хаара каждой функции $f(t) \in C([0,1]\times[0,1])$, $f \neq const$, справедливо соотношение

$$\varlimsup_{n\to\infty} |c_n(f)|n^{3/2} > 0.$$

Литература

1. П. Л. Ульянов. *О рядах по системе Хаара*// Матем. сборник. — 1964. — Т. 63 (105), № 1, С. 356-391.

2. Б. С. Кашин, А. А. Саакян. *Ортогональные ряды* — М.: АФЦ, 1999. — 560 с.

3. Э. Столиц, Т. Роуз, Д. Салезин. *Вейвлеты в компьютерной графике* — М.-Ижевск: РХД, 2002.

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ

Гришанина Г.Э. (Дубна)
anora66@mail.ru

Рассмотрим однопараметрическое семейство систем

$$x' = F(x, \lambda), x \in \Re^n, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{1}$$

где $F : \Re^n \times [0,1] \mapsto \Re^n$- непрерывное векторное поле. Будем предполагать, что решение $x(t) = \varphi(t, y, \lambda)$ однозначно определяется начальным условием $x(0) = y = \varphi(0, y, \lambda)$. Будем изучать условия, обеспечивающие сохранение свойства асимптотической устойчивости в целом стационарного решения системы (1) при изменении параметра $\lambda \in [0,1]$. Говорят [1-2], что система (1) при $\lambda = \lambda_0$ имеет седло на бесконечности, если существует последовательность решений $x_k(t) = \varphi(t, y_k, \lambda_0)$ системы (1), удовлетворяющая условиям

$$\sup_k(|x_k(0)| + |x_k(T_k)|) < \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant T_k} |x_k(t)| = \infty.$$

Предположим, что система (1) при каждом $\lambda \in [0,1]$ имеет единственное стационарное решение $x_0(\lambda) : F(x_0(\lambda), \lambda) = 0$. Дополнительно предположим, что $x_0(\lambda)$ ограниченная вектор-функция. Без ограничения общности можно считать, что $x_0(\lambda) = 0$, $\lambda \in [0,1]$. Прежде чем сформулировать основной результат, выведем одно необходимое условие асимптотической устойчивости в целом стационарных решений $x_0(t, \lambda)$ семейства систем (1) при всех $\lambda \in [0,1]$.

Теорема 1. *Пусть стационарное решение $x(t, \lambda)$ системы (1) при каждом $\lambda \in [0,1]$ асимптотически устойчиво в целом. Тогда существует неубывающая функция $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$, не зависящая от λ, такая, что*

$$|x(t, \lambda)| \leqslant \sigma(|x(0, \lambda)| + |x(T, \lambda)|), 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2}$$

для любого решения $x(t, \lambda)$ семейства систем (1), определенного на $[0, T]$.

Теорема 2. *Пусть семейство систем (1) удовлетворяет следующим условиям: 1) при $\lambda = 0$ стационарное решение $x_0(t, 0) \equiv 0$*

системы (1) устойчиво; 2) системы (1) при всех $\lambda \in [0,1]$ не имеют ограниченных на всей оси решений, отличных от стационарного решения $x_0(t,\lambda) \equiv 0$; 3) системы (1) при всех $\lambda \in [0,1]$ не имеют седла на бесконечности. Тогда стационарное решение $x_0(t,\lambda) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом при всех $\lambda \in [0,1]$.

Теорема 2 следует из следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть семейство систем (1) удовлетворяет условиям: 1) при $\lambda = 0$ стационарное решение $x_0(t,0)$ системы (1) устойчиво; 2) системы (1) при всех $\lambda \in [0,1]$ не имеют ограниченных на всей оси решений в шаре $B[0,1] = \{x : |x| \leqslant 1\}$, отличных от стационарного решения $x_0(t,\lambda) = 0$. Тогда стационарное решение $x_0(t,\lambda) = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом при всех $\lambda \in [0,1]$*

Литература

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Наука, 1959. 211 с.

2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МГД ЗАДАЧИ ЛАМБА О ВОЛНАХ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Гуров М.Н., Задорожный А.И. (Ростов-на-Дону)

MGurov@inbox.ru

Рассматривается плоская линейная задача о собственных колебаниях тяжелой однородной вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины граничащей с вакуумом. На систему наложено стационарное горизонтальное магнитное поле постоянной напряженности. Задача описывается системой магнитогидродинамических (МГД) уравнений движения, неразрывности, индукции и отсутствия магнитных зарядов.

После стандартной процедуры линеаризации, разыскивая решения вида $f = F(z)e^{\sigma t - ix}$, задачу удается свести к следующей неклассической краевой задаче:

$$\frac{1}{RmRg}\left(Z^{VI} - 3Z^{IV} + 3Z'' - Z\right) -$$

$$-\left(\frac{\sigma}{Rm} + \frac{\sigma}{Rg}\right)\left(Z^{IV} - 2Z'' + Z\right) + \left(\sigma^2 + A\right)\left(Z'' - Z\right) = 0$$

$$\frac{1}{RmRg}\left(Z^{V}(0)-4Z'''(0)+3Z'(0)\right)-\frac{\sigma}{Rg}\left(Z'''(0)-3Z'(0)\right)-$$

$$-\frac{1}{Rm}\left(\sigma\left(Z'''(0)-Z'(0)\right)+\frac{1}{\sigma}\left(Z''(0)-Z(0)\right)\right)+$$

$$+\sigma^2 Z'(0)+Z(0)+A\left(Z'(0)+Z(0)\right)=0$$

$$\frac{1}{Rm}\left(Z'''(0)-Z(0)\right)-\sigma\left(Z''(0)+Z(0)\right)=0$$

$$Z''(0)-Z(0)=0$$

где σ - искомый спектральный параметр,Rg – гидродинамическое число Рейнольдса, Rm - магнитное число Рейнольдса, A – число Альфвена, Z – амплитуда возмущения горизонтальной компоненты индуцированного магнитного поля.

Для данной задачи, считая оба числа Рейнольдса (Rm, Rg), достаточно большими, вводя малый параметр ε следующим образом: $\frac{1}{Rg}=\varepsilon^2$, $\frac{1}{Rm}=k\varepsilon^2$ с помощью метода Вишика – Люстерника проведен асимптотический анализ спектрального параметра σ. В рамках выбранного порядка приближения пара собственных чисел, определяющих спектр поверхностной волны, задается асимптотической формулой

$$\sigma=\pm i\sqrt{1+2A}-2\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^2\right)$$

Обратим внимание, на то, что частота колебаний асимптотически совпадает с частотой колебаний идеальной жидкости, а декремент затухания не зависит от числа Альфвена, характеризующего величину напряженности МП. Более того, найденный декремент затухания совпадает с декрементом затухания для немагнитной жидкости в классической задаче Ламба [1]. Построенная асимптотика помимо того, что содержит информацию о поведении решения при весьма больших числах Рейнольдса, служит еще и достаточно хорошим начальным приближением для численного нахождения корней точного дисперсионного (частотного) уравнения.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М.,Л.: ГИТТЛ, 1947. – 928 с.

2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН – 1957. – т. 12:5(77). – С. 3-122.

О НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Давыдова М.Б. (Воронеж)

Изучается нелинейная спектральная задача

$$
\begin{cases}
Lu \equiv -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int\limits_0^x u\,dQ = \lambda \int\limits_0^x f(t,u(t))\,d\sigma(t) \\
(pu'_x)(+0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\
(pu'_x)(l-) + \gamma_2 u(l) = 0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

($t \in \overline{[0;l]}_\sigma$), здесь $\lambda \geqslant 0$ — спектральный параметр; функция $\sigma(x)$, порождающая меру на $[0;l]$, непрерывная на концах отрезка $[0;l]$, и такая, что $p(x)$ и $Q(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $[0;l]$; функция $f(x,u)$ порождает оператор

$$[Fu](x) = f(x,u(x)),$$

который непрерывно действует из $C[0;l]$ в $L_{p,\sigma}[0;l]$ — пространство измеримых на $[0;l]$ функций суммируемых с p степенью ($1 \leqslant p < \infty$). Нормой в $L_{p,\sigma}[0;l]$ служит величина $\|f\|_{p,\sigma} = \left(\int\limits_0^l |f(x)|^p\,d\sigma(x)\right)^{1/p}$. Для того, чтобы F непрерывно действовал из $C[0;l]$ в $L_{p,\sigma}[0;l]$ достаточно, чтобы $f(x,u)$ была совокупно равномерно $[\sigma,u]$-непрерывна: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких точек (x_1,u_1) и (x_2,u_2), удовлетворяющих неравенствам $|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \delta$ и $|u_1 - u_2| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2)| < \varepsilon$.

Опишем множество, которое мы в дальнейшем будем обозначать $\overline{[0;l]}_\sigma$. Через $S(\sigma)$ мы обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. Наиболее интересный и существенный для нас случай, когда $S(\sigma) \neq \varnothing$. Пусть $J_\sigma = [0;l] \setminus S(\sigma)$. На J_σ введем метрику $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S(\sigma) \neq \varnothing$, то метрическое пространство (J_σ,ρ), как нетрудно видеть, не является полным. Стандартное пополнение его обозначим через $\overline{[0;l]}_\sigma$. В полученном множестве всякая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на упорядоченную пару собственных элементов, которое мы будем обозначать через $\xi - 0$ и $\xi + 0$.

1. Введем обозначение

$$K = \{u(x) \in C[0;l] | u(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0;l]\}$$

Множество K является телесным, нормальным конусом в $C[0;l]$.

Будем говорить, что однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;l]$, если всякое нетривиальное решение имеет на $[0;l]$ не более одного нуля.

Более подробно с теорией неосцилляции этого уравнения можно ознакомиться в [2], [3].

Положим
$$\|u\|_{u_0} = \sup_{0<x<l} \left\| \frac{u(x)}{u_0(x)} \right\|,$$

где $u_0(x) = \dfrac{x(l-x)}{2l}$. Как нетрудно видеть, $\|\cdot\|_{u_0}$ является нормой в простанстве E_{u_0} функций $u(x)$ из $C[0;l]$, для каждой из которых $\|u\|_{u_0}$ конечна, более того, E_{u_0} является полным пространством по этой норме. Множество $K_{u_0} = K \cap E_{u_0}$ является телесным конусом. Кроме того, отношение $u \leqslant v$, эквивалентно, по определению, включению $v - u \in K_{u_0}$.

Теорема 1. *Пусть $G(x,s)$ — функция Грина краевой задачи*

$$\begin{cases} Lu = F(x) - F(0), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0; \end{cases}$$

однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;l]$. Тогда интегральный оператор

$$(GF)(x) = \int_0^l G(x,s)\, dF(s),$$

действует из K_{BV} — конуса неубывающих на $[0;l]$ функций (лежащего в $BV[0;l]$) в конус K_{u_0}, причем $(GF)(x)$ является внутренним элементом K_{u_0}, если $F(x) \in K_{BV}$ и $F(x) \not\equiv \mathrm{const}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следуюшие условия:*

1) *однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;l]$;*

2) *функция $f(x,u)$ порождает непрерывный из $C[0;l]$ в $L_{p,\sigma}[0;l]$ оператор суперпозиции $(Fu)(x) = f(x,u(x))$;*

3) *$f(x,u)$ не убывает по u при $u \geqslant$ и всех $x \in [0;l]$;*

4) $\dfrac{f(x,u)}{u}$ *убывает по* u *при* $u > 0$ *и почти при каждом* $x \in [0; l]$*;*

5) $f(x, 0) \equiv 0$.

Тогда множество Λ *значений* $\lambda \geqslant 0$*, при которых задача* (1) *имеет хотя бы одно нетривиальное решение в* K*, обладает следующими свойствами:*

а) Λ *непусто и совпадает с некоторым интервалом* $(\lambda_0, \lambda_\infty)$ *при* $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_\infty < \infty$*;*

б) *каждому* $\lambda \in \Lambda$ *отвечает лишь одно решение* $u_\lambda \in K$ *краевой задачи* (1)*, причем*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u_\lambda(x)| \to 0 \text{ \textit{при} } \lambda \to \lambda_0+$$

и

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u_\lambda(x)| \to \infty \text{ \textit{при} } \lambda \to \lambda_\infty-;$$

в) *функция* $u_\lambda(x)$ *монотонна по* λ*:*

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_{\lambda_1}(x) - u_{\lambda_2}(x)) \geqslant 0$$

для всех $x \in [0; l]$*;*

г) *при каждом* $\lambda^* \in \Lambda$ *для любого начального приближения* $u_0(x)$*, принадлежащего* K*, последовательность* $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$*, определяемая как решение линейной краевой задачи*

$$\begin{cases} -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int\limits_0^x u\,dQ = \lambda \int\limits_0^x f(t, u_{n-1}(t))d\sigma(t) \\ (pu'_x)(+0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l-) + \gamma_2 u(l) = 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$, *равномерно сходится к* $u_{\lambda^*}(x)$.

Интервал Λ может быть эффективно указан, если $f(x, u)$ непрерывно дифференцируема (по u) в окрестности нуля и бесконечности. Последнее понимается в смысле следующего определения.

Определение 1. *Функцию $f(x,u)$ назовем непрерывно дифференцируемой в окрестности бесконечности, если существует функция $f'_\infty(x)$ такая, что*

$$\frac{f(x,u)}{u} \rightrightarrows f'_\infty(x)$$

при $u \to +\infty$.

Теорема 3. *Числа λ_0 и λ_∞ являются минимальными собственными значениями соответствующих спектральных задач*

$$\begin{cases} Lu = \lambda f'_u(x,0)u, \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} Lu = \lambda f'_\infty(x)u, \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0, \end{cases}$$

2. Здесь получены достаточные условия существования нескольких различных решений задачи

$$\begin{cases} -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int\limits_0^x u dQ = \int_0^x f(s,u(s))d\sigma(s), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;l]$;*

2) *функция $f(x,u)$ не убывает по u при каждом $x \in [0;l]$ и*

$$f(x,0) \geqslant 0; \tag{3}$$

3) *существует N пар чисел α_i, β_i, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n \tag{4}$$

$$f(x, \beta_k u_0(x)) \leqslant \frac{\beta_k}{\displaystyle\int_0^l h_2(s)\, d\sigma(s)} \quad (x \in [0;l]). \tag{5}$$

4) *для каждого k существует множество $w_k \subset [0;l]$ положительной σ-меры такое, что*

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_{w_k} h_1(s)\,d\sigma(s)} \quad (x \in [0;l],\ k = 1, \ldots, N) \quad (6)$$

Если неравенства (5) *и* (6) *превращаются в строгие на множествах положительной σ-меры, то задача* (2) *имеет* $2N-1$ *нетривиальных решений* $\{u_i(x)\}_{i=1}^{i=2N-1}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$u_i(x) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2N-1) \qquad (7)$$

и

$$u_{2i-1}(x) \leqslant u_{2i+1}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1)$$

Неравенства (7) связывают лишь решения $u_i(x)$ с нечетными номерами. По отношению к этим решениям остальные расположены «между» ними в следующем смысле: при каждом $k = 1, 2, \ldots, N-1$ существуют точки x'_k и x''_k такие, что

$$u_{2k-1}(x'_k) < u_{2k}(x'_k) \quad \text{и} \quad u_{2k}(x''_k) \leqslant u_{2k+1}(x''_k).$$

3. Здесь мы продолжим изучение вопроса о разрешимости задачи

$$\begin{cases} -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \displaystyle\int_0^x u\,dQ = \int_0^x f(s, u(s))\,d\sigma(s), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

с неосциллирующим на $[0;l]$ уравнением $Lu = 0$; в отличие от предыдущего параграфа, ниже нас интересует условия нелокального типа, требующие проверки лишь в «окрестности бесконечности» и, может быть, в окрестности некоторой точки. Основное внимание уделяется случаю, когда задача имеет одно известное решение и стоит вопрос о существовании другого, связанного с известным с помощью некоторого неравенства. Без ограничения общности мы будем считать известное решение нулевым, так как в противном случае сделаем функциональную замену, осуществляющую сдвиг этого решения в нуль. Ниже изучается задача при $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *оператор суперпозиции, порождаемый функцией* $f(x,u)$, *действует из* $C[0;l]$ *в* $L_{\sigma,p}[0;l]$ *при некотором* $p \in (1;+\infty)$;

2) $f(x,u) \geqslant 0$ *при всех* $x \in [0;l]$ *и* $u \geqslant 0$;

3) *при некотором* $R > 0$ *и любом* $\lambda \in (0;l)$ *краевая задача*

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x,u), \\ u(0) = 0, \\ u(l) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

не имеет решений $u(x)$ *таких, что*

$$u(x) \geqslant Ru_0(x). \tag{10}$$

Тогда задача

$$\begin{cases} Lu = f(x,u), \\ u(0) = 0, \\ u(l) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

имеет хотя бы одно решение в K.

Литература

[1] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167-169.

[2] Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук, 2008, Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141

[3] Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009. — 192с.

ОБ ОЦЕНКЕ ВТОРЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Давыдова М.Б. (Воронеж)

В работе изучается уравнение

$$-pu'_\mu(x) + pu'_\mu(0) + \int_0^x u(s)d[Q(s)] = F(x) - F(0) \tag{1}$$

с разрывными решениями. Интеграл в (1) понимается по Ю. В. Покорному; его в дальнейшем мы будем называть π-интегралом, и чтобы отличить его от интеграла Лебега-Стилтьеса, дифференциал будем заключать в квадратные скобки.

На протяжении всей работы мы будем предполагать выполненными следующие условия:

1) $\mu(x)$ строго возрастает на $[0;l]$ и непрерывна в точках 0 и l;

2) $p(x), Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0;l]$ вариации;

3) $\inf\limits_{x\in[0;l]} p(x) > 0$;

4) $Q(x)$ не убывает на $[0;l]$.

Договоримся, что собственные значения функции $F(x) \in BV[0;l]$ в точках $x \notin S(\mu)$ для нас никакой роли не играют, т. е. если $F(x-0) = F(x+0)$ для $x \notin S(\mu)$, то $F(x) = F(x-0)(= F(x+0))$; значения $F(x)$ важны, когда $x \in S(\mu)$.

1. π-интеграл был введен Ю. В. Покорным в работе [1], и может быть описан следующим образом. Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — функции с конечным на $[0;l]$ изменением. Через $b_0(x)$ обозначим непрерывную составляющую $b(x)$; $\Delta^- b(s) = b(s) - b(s-0)$ — левый скачок функции в точке s; $\Delta^+ b(s) = b(s+0) - b(s)$ — правый скачок $b(s)$ в точке s. Тогда

$$\int\limits_0^l a\,d[b] = \int_0^l a\,db_0 + \sum_{0<s\leqslant l} a(s-0)\Delta^- b(s) + \sum_{0\leqslant s<l} a(s+0)\Delta^+ b(s).$$

Если $b(x)$ — непрерывна (или непрерывна во всех точках разрыва $a(x)$ на $[0;l]$), то π-интеграл совпадает с интегралом Римана-Стилтьеса; другие условия совпадения π-интеграла с интегралом Лебега-Стилтьеса можно найти в [2].

Опишем множество, которое мы в дальнейшем будем обозначать $\overline{[0;l]}_S$. Через $S(\mu)$ мы обозначим множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Наиболее интересный и существенный для нас случай, когда $S(\mu) \neq \varnothing$. Пусть $J_\mu = [0;l] \setminus S(\mu)$. На J_μ введем метрику $\rho(x;y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Если $S(\mu) \neq \varnothing$, то метрическое пространство (J_μ, ρ), как нетрудно видеть, не является полным. Стандартное пополнение его обозначим через $\overline{[0;l]}_\mu$. В полученном множестве всякая точка

$\xi \in S(\mu)$ заменена на упорядоченную пару собственных элементов, которое мы будем обозначать через $\xi - 0$ и $\xi + 0$.

Объединение $\overline{[0;l]}_\mu$ и $S(\mu)$ мы обозначим через R_μ. Функция $\sigma(x)$, определяемая равенством

$$\sigma(x) = \mu(x) + p_1(x) + p_2(x) + Q_1(x) + Q_2(x) + F_1(x) + F_2(x),$$

где $z_1(x)$ и $z_2(x)$ — возрастающие функции из жорданова представления функции $z(x)$ ограниченной вариации, определена на R_μ, причем в собственных элементах $\xi \pm 0$ своими предельными значениями. Через S обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, отличных от $S(\mu)$. Пусть $JR_\mu = R_\mu \setminus S$. Пополнение JR_μ по метрике $\rho_1(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ обозначим через $\overline{[0;l]}_S$.

В множестве $\overline{[0;l]}_S$ каждая точка $s \in S$ заменена на пару собственных элементов $\{s - 0, s + 0\}$. Таким образом, каждая точка $\xi \in S(\mu)$ в множестве $\overline{[0;l]}_S$ заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$; $\xi \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$ — на пару собственных элементов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$.

Если из уравнения (1), взятого при $x = \xi \in S(\mu)$, почленно вычесть (1) при $x = \xi - 0$, то мы получим уравнение связи

$$-\Delta^-(pu'_\mu)(\xi) + u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi). \tag{2}$$

Аналогично получим второе условие в точке ξ:

$$-\Delta^+(pu'_\mu)(\xi) + u(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi). \tag{3}$$

Отметим, что в (2) и (3) $u'_\mu(\xi) = \dfrac{\Delta u(\xi)}{\Delta\mu(\xi)}$.

В точках $\xi \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$ уравнение связи имеет вид

$$-\Delta(pu'_\mu(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi). \tag{4}$$

2. Функция влияния $G(x, s)$, определяемая как ядро интегрального оператора

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x, s)\, d[F(s)], \tag{5}$$

краевой задачи

$$\begin{cases} L_\mu u = F(x) - F(0), \\ u(0) = u(l) = 0, \end{cases}$$

имеет вид

$$G(x,s)=\frac{\varphi(x)\varphi(s)}{\psi(l)}\psi(\min\{x,s\})\left(\psi(l)-\psi(\max\{x,s\})\right), \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ — положительное на $[0;l]$ решение однородного уравнения $L_\mu u=0$ и $\psi(x)=\int\limits_0^x \frac{d\mu(t)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)}$.

Заметим, что $G(x,s)$ определена на множестве $\overline{[0;l]}_\mu\times\overline{[0;l]}_\mu$, и равномерно $[\mu\times\mu]$— непрерывна на $\overline{[0;l]}_\mu\times\overline{[0;l]}_\mu$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всяких (x_1,s_1) и (x_2,s_2), принадлежащих множеству $\overline{[0;l]}_\mu\times\overline{[0;l]}_\mu$, для которых справедливы неравенства $|\mu(x_1)-\mu(x_2)|<\delta$ и $|\mu(s_1)-\mu(s_2)|<\delta$ выполняется $|G(x_1,s_1)-G(x_2,s_2)|<\varepsilon$.

Последнее обстоятельство позволяет установить полную непрерывность в $C_\mu[0;l]$ — пространстве μ-непрерывных на $\overline{[0;l]}_\mu$ функций с нормой $\|u\|_{C_\mu}=\max\limits_{x\in\overline{[0;l]}_\mu}|u(x)|$.

3. Здесь получены оценки функции Грина краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x)+(pu'_\mu)(0)+\int\limits_0^x ud[Q]=F(x)-F(0),\\ u(0)=u(l)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что

$$g(x,s)=\frac{1}{\mu(l)-\mu(0)}(\mu(\min\{x,s\})-\mu(0))(\mu(l)-\mu(\max\{x,s\}))$$

является функцией Грина краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x)+u'_\mu(0)=F(x)-F(0),\\ u(0)=u(l)=0. \end{cases} \tag{8}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любых x,s и τ, принадлежащих $\overline{[0;l]}_\mu$, справедливо неравенство*

$$g(x,s)\geqslant u_0(x)g(\tau,s), \tag{9}$$

где

$$u_0(x)=\frac{(\mu(x)-\mu(0))(\mu(l)-\mu(x))}{(\mu(l)-\mu(0))^2}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Для функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи справедливо неравенство*

$$G(x,s) \geqslant u_0(x)G(\tau,s)$$

для всех x, s и $\tau \in \overline{[0;l]}_\mu$, где $u_0(x) = \frac{C_0^3}{C_1^3}\left(\frac{m}{M}\right)^8 u_0(x)$, $\varphi(x)$ — положительное решение однородного уравнения

$$-(pu'_\mu(x) + (pu'_\mu(0) + \int\limits_0^x ud[Q] = 0,$$

$m = \min\limits_{x\in\overline{[0;l]}_\mu} \varphi(x)$, $M = \max\limits_{x\in\overline{[0;l]}_\mu} \varphi(x)$, $C_0 = \inf\limits_{x\in[0;l]} p(x)$, $C_1 = \sup\limits_{x\in 0;l]} p(x)$.

Лемма 2. *Для функции Грина $g(x,s)$ краевой задачи* (8) *справедливы неравенства*

$$u_0(x)v_1(s) \leqslant g(x,s) \leqslant u_0(x)v_2(s)$$

при некоторых σ-суммируемых положительных функциях $v_1(s)$ и $v_2(s)$; $u_0(x)$ определяется равенством (10).

Теорема 2. *Для функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи* (7) *при некоторых σ-суммируемых функциях $\hat{v}_1(s)$ и $\hat{v}_2(s)$ справедливо двойное неравенство*

$$\hat{u}_0(x)\hat{v}_1(s) \leqslant G(x,s) \leqslant \hat{u}_0(x)\hat{v}_2(s). \tag{11}$$

4. Введем следующий интегральный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_0^l G(x,s)u(s)\,d[M(s)],$$

где $G(x,s)$ — функция Грина краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu(0) + \int\limits_0^x u\,d[Q] = F(x) - F(0), \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

Оператор A, как нетрудно видеть, компактно действует в $C_\mu[0;l]$ — пространстве μ-непрерывных на $[0;l]$ функций. Тогда задачу

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x u\,d[Q] = \lambda \int\limits_0^x ud[M], \\ u(0) = u(l) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

можно записать в виде

$$u = \lambda Au.$$

Для любой $u(x) \in C_\mu[0;l]$ справедливо двойное неравенство

$$\|Au\| \cdot \hat{u}_0(x) \leqslant (Au)(x) \leqslant \|Au\| \cdot v_0(x), \tag{13}$$

где

$$\hat{u}_0(x) = \frac{C_0^3}{C_1^3} \cdot \frac{m^8}{M^8} \cdot \frac{(\mu(x) - \mu(0))(\mu(l) - \mu(x))}{(\mu(l) - \mu(0))^2}$$

$v_0(x) \equiv 1$ и $\|w\| = \max\limits_{x \in \overline{[0;l]}_\mu} |w(x)|$ — норма в пространстве $C_\mu[0;l]$.

Ввиду положительности A, к (13) возможно применение оператора A:

$$\|Au\| \cdot (A\hat{u}_0)(x) \leqslant (A^2u)(x) \leqslant \|Au\| \cdot (Av_0)(x). \tag{14}$$

Полагая $u = \hat{u}_0$ в неравенстве $(Au)(x) \geqslant \|Au\| \cdot \hat{u}_0(x)$, будем иметь

$$\hat{u}_0(x)\|A\hat{u}_0\| \leqslant (A\hat{u}_0)(x). \tag{15}$$

Из (11) для $(Av_0)(x)$ находим оценку сверху

$$(Av_0)(x) = \int\limits_0^l G(x,s)\,d[M(s)] \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^l \hat{u}_0(x)\hat{v}_2(s)d[M(s)] = \hat{u}_0(x) \cdot \|A\hat{u}_0\| \cdot \rho, \tag{16}$$

где

$$\rho = \frac{1}{\|A\hat{u}_0\|} \cdot \int\limits_0^l \hat{v}_2(s)\,d[M(s)]. \tag{17}$$

Итак, неравенство (14), с учетом (15) и (16), принимает вид

$$\|Au\| \cdot \|A\hat{u}_0\| \cdot \hat{u}_0(x) \leqslant (A^2u)(x) \leqslant \rho \cdot \|Au\| \cdot \|A\hat{u}_0\| \cdot \hat{u}_0(x). \qquad (18)$$

Неравенство (18) показывает, что вторая интеграция оператора A является фокусирующим оператором [3]. Таким образом доказана

Теорема 3. *Пусть* λ_0 *— ведущее собственное значение задачи* (12)*;*

$$\hat{u}_0(x) = \frac{C_0^3}{C_1^3} \cdot \frac{m^8}{M^8} \frac{(\mu(x) - \mu(0))(\mu(l) - \mu(x))}{(\mu(l) - \mu(0))^2}; \quad \hat{v}_2(s) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant l} \frac{G(x,s)}{\hat{u}_0(x)},$$

где $G(x, s)$ *— функция Грина* (12)*. Тогда, для остальных собственных значений* (12) *справедлива оценка*

$$\lambda \geqslant \sqrt{\frac{\rho + 1}{\rho - 1}}\, \lambda_0,$$

где ρ *— определено равенством* (17)*.*

Литература

[1] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167-169.

[2] Клюева М.Б. Об интегрировании по частям в интеграле Лебега-Стилтьеса / М.Б. Клюева // Сб. тр. молодых ученых мат. фак. Воронеж. гос. ун-та .— 2001 .— С. 87-91.

[3] Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Линейные позитивные системы. — М.: Физматгиз, 1985.

МЕТОД ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ

Давыдова Н.В., Зайцева Р.М.

Одним из эффективных методов развития творческого мышления является метод проблемного обучения. Будущее образования находиться в тесной связи с перспективами проблемного обучения. И цель проблемного обучения широка:
усвоение не только результатов научного познания, но и самого пути процесса получения этих результатов;
формирование познавательной самостоятельности учеников и развития их творческих способностей.

Проблемное обучение, а не преподнесение готовых, годных лишь для заучивания фактов и выводов всегда вызывает неослабевающий интерес учеников. В проблемном обучении на общее обсуждение ставится вопрос- проблема, содержащий в себе иногда элемент противоречий, иногда неожиданности.

Решение проблемных задач вызывает со стороны учащихся живые споры, обсуждения, создаётся обстановка увлечённости, раздумий, поиска. Это плодотворно сказывается на отношении школьников к учению.

Например, предложить ученику решить дома следующее задание:

"Найти сумму всех чисел от -499 до 501." Ученик сел за работу, но дело шло медленно. Подключились мама, папа, бабушка. Вычисляли, пока от усталости не стали смыкаться глаза, а на следующий день все ругали неразумного учителя, задающего такие задания. Учитель предложил подумать найти более простой способ решения задачи.

Решение: $-499+(-498)+(-497)+\ldots+497+498+499+500+501 = 1001$.

Проблемная ситуация и учебная проблема являются основными понятиями проблемного обучения. Существует две основные функции учебной проблемы:

определение направления умственного поиска, то есть деятельности ученика по нахождению способа решения проблемы;

формирование познавательных способностей, интереса, мотивов деятельности ученика по усвоению новых знаний.

На уроках эффективно использовать следующие приёмы проблемного обучения:

эвристическая беседа, игровые проблемные ситуации, проблемное решение задач,

проблемные задания.

Для решения проблемной задачи учеников необходимо подвести к противоречию и предложить им самим найти способ его разрешения. Для активизации мыслительной деятельности ставятся конкретные вопросы (на обобщение, обоснования, конкретизацию, логику рассуждения), определяются теоретические и практические задания. На уроках рекомендуем использовать проблемные задачи:

с недостаточными или избыточными данными, с противоречивыми данными, с заведомо допущенными ошибками, с ограниченным временем решения.

Проблемное обучение не может быть одинаково эффективным в любых условиях. Практика показывает, что процесс проблемного обучения порождает различные уровни как интеллектуальных затруднений учащихся, так и их познавательной активности и самостоятельности при усвоении новых знаний или применении прежних значений в новой ситуации. В соответствии с видами творчества можно выделить три вида проблемного обучения.

Первый вид - теоретическое творчество.

Второй вид – практическое творчество.

Третий вид – художественное творчество.

Все виды проблемного обучения характеризуются наличием продуктивной, творческой деятельности ученика, наличием поиска и решения проблемы.

Первый вид чаще всего используется на уроке, где наблюдается индивидуальное, групповое или фронтальное решение проблемы; второй вид – на практических занятиях, в предметном кружке, факультативе; третий вид – на уроке или внеурочных занятиях.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Данченко В.И., Додонов А.Е. (Владимир)

danch@vpti.vladimir.ru, art-dodonov@mail.ru

В работе [1] рассматривался вопрос о скорости убывания при $x \to +\infty$ решений уравнения

$$v^{(n)}(x) + p_{n-1}v^{(n-1)}(x) + ... + p_0 v(x) = 0 \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами p_k при условии, что все корни z_k $(k = 1, ..., n)$ характеристического многочлена $P(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + ... + p_0$ простые и лежат в левой полуплоскости. При фиксированном наборе чисел $A_1, ..., A_n$ положим

$$R_0(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - z_k}, \quad r_0(y) = \operatorname{Im} R_0(iy), \quad \|r_0\| = \max_{-\infty<y<\infty} |r_0(y)|.$$

Теорема [1]. *Для решения* $v(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{xz_k}$ *уравнения* (1) *при* $x > 0$ *имеем* $|v(x)| \leqslant n\|r_0\|x^{-1}$. *Такая же оценка справедлива при замене* $r_0(y) = \operatorname{Im} R_0(iy)$ на $r_0(y) = \operatorname{Re} R_0(iy)$.

Нами показано, что если решение $v(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{xz_k}$ удовлетворяет начальным условиям

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad \dots \quad , v^{(n-1)}(0) = v_{n-1},$$

то соответствующая функция R_0 имеет вид

$$R_0(z) = P^{-1}(z) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k-1} p_{n-s} v_{k-1-s} z^{n-k} \right), \qquad p_n = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что для вычисления $\|r_0\|$ и применения оценки теоремы не требуется знать корни многочлена P, используется лишь вид уравнения (1).

Пример. Пусть $v_{n-1} = \alpha$ и $v_k = 0$ с $k \neq n-1$. Тогда $R_0(z) = \alpha P^{-1}(z)$, и, значит, в этом случае при $x > 0$ имеем оценку

$$|v(x)| \leqslant n\|r_0\| x^{-1}, \qquad \text{где} \qquad \|r_0\| \leqslant |\alpha| \left(\min_{y \in (-\infty, \infty)} |P(iy)| \right)^{-1}.$$

Литература

[1] Данченко В.И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы, Матем. сб., 2006. Т. 197 (4). С. 33–52.

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНОВ ПОСРЕДСТВОМ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Данченко В.И., Чунаев П.В. (Владимир)

danch@vpti.vladimir.ru, chunayev@rambler.ru

В работе [1] рассматривались рациональные дроби вида

$$\theta(z) = \frac{\rho_{1,n_1}(z) - \rho_{2,n_2}(z)}{\rho_{3,n_3}(z) - \rho_{4,n_4}(z)}, \tag{1}$$

где через $\rho_{s,n_s}(z)$ обозначены так называемые наипростейшие дроби (т.е. логарифмические производные некоторых многочленов) степени не выше n_s. В [1] отмечено, что дроби вида (1) аппроксимируют значительно лучше наипростейших дробей. Это вытекает из следующего предложения.

Теорема 1 [1]. *Пусть R — рациональная функция степени $n \geqslant 1$, p – натуральное число. Тогда существует дробь $\theta(p, R; z)$ вида*

(1) *со степенями* n_s*, не превосходящими* $n \cdot p$*, такая, что во всех точках* z*, выбранных из условии* $5|R(z)| \leqslant p$*, имеем*

$$|\theta(p, R; z) - R(z)| \leqslant 2e^{|R(z)|}|R(z)|^{p+1}\frac{1}{p!}, \qquad p \geqslant 5|R(z)|.$$

Для доказательстве теоремы 1 в [1] приводится явная конструкция аппроксимирующих дробей $\theta(p, R; z)$, которая используется в настоящей заметке для приближенного вычисления многочленов.

Для вычисления многочленов обычно применяется схема Горнера. При больших значениях аргумента или коэффициентов многочлена использование этой схемы может приводить к потере точности из-за многократных умножений. Поэтому может оказаться полезным предлагаемый ниже способ аппроксимации многочленов. Пусть $P(z) = p_m z^m + p_{m-1}z^{m-1} + \ldots + p_0$, $p_k \in \mathbb{C}$. При натуральных $n > m$ и $p > 5$ введем функции вида (1):

$$\theta(p; z) = \frac{Q'(z)/Q(z) - np/z}{P'(z)/P(z) - n/z}, \qquad \text{где} \quad Q(z) = z^{np} + \sum_{k=1}^{p}\frac{P^k(z)}{k!}z^{n(p-k)};$$

$$\theta_0(p; z) = -\frac{Q_0'(z)/Q_0(z) - np/z}{n/z}, \qquad \text{где} \qquad Q_0(z) = \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}z^{n(p-k)}.$$

Теорема 2. *Во всех точках* z*,* $|z| \geqslant 1$*, в которых* $|z^{-n}P(z)| \leqslant 1$*, имеем*

$$P(z) \approx \frac{\theta(p; z)}{\theta_0(p; z)}, \qquad \textit{точнее} \qquad P(z) = \frac{\theta(p; z)}{\theta_0(p; z) + \delta_0(z)} + z^n\delta(z),$$

где погрешности оцениваются так: $\max\{|\delta(z)|, |\delta_0(z)|\} \leqslant 2e/p!$.

Литература

[1] Данченко В.И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы, Матем. сб., 2006. Т. 197 (4). С. 33–52.

СРАВНЕНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ЧИСТО ЖАДНОГО И ОРТОГОНАЛЬНОГО ЖАДНОГО РАЗЛОЖЕНИЙ[1]

Деревенцов А.В. (Москва)

dereventsov@gmail.com

Рассмотрим действительное гильбертово пространство H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Множество $\mathcal{D}\subset H$, будем называть словарем, если норма всех элементов $\mathcal{D}$ равна 1 и $\overline{\operatorname{span}\mathcal{D}}=H$.

Для заданного словаря $\mathcal{D}$ и функции $f\in H$ чисто жадный и ортогональный жадный алгоритмы определяются следующим образом (см., например, [3]).

Чисто жадный алгоритм (PGA). $f_0^{PGA,\mathcal{D}}=f\in H$, $G_0^{PGA}(f,\mathcal{D})=0$;

$$g_{m+1}=\arg\max_{g\in\mathcal{D}}|\langle f_m^{PGA,\mathcal{D}},g\rangle|,\ G_{m+1}^{PGA}(f,\mathcal{D})=$$
$$=G_m^{PGA}(f,\mathcal{D})+\langle f_m^{PGA,\mathcal{D}},g_{m+1}\rangle g_{m+1},$$
$$f_{m+1}^{PGA,\mathcal{D}}=f_m^{PGA,\mathcal{D}}-\langle f_m^{PGA,\mathcal{D}},g_{m+1}\rangle g_{m+1}.$$

Ортогональный жадный алгоритм (OGA). $f_0^{OGA,\mathcal{D}}=f\in H$, $G_0^{OGA}(f,\mathcal{D})=0$;

$$g_{m+1}=\arg\max_{g\in\mathcal{D}}|\langle f_m^{OGA,\mathcal{D}},g\rangle|,\ G_{m+1}^{OGA}(f,\mathcal{D})=\operatorname{Proj}_{g_1,\dots,g_{m+1}}f_0^{OGA,\mathcal{D}},$$
$$f_{m+1}^{OGA,\mathcal{D}}=f_0^{OGA,\mathcal{D}}-G_{m+1}^{OGA}(f,\mathcal{D}).$$

Известно, что жадные алгоритмы сходятся для всех словарей $\mathcal{D}$ и функций $f\in H$ (см., например, [1], [2], [4]). Также известны некоторые оценки скорости сходимости жадных алгоритмов (см., например, [3], [5], [6], [7], [8]). В частности, известно, что на классе $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ ортогональный жадный алгоритм оптимален и существенно превосходит по скорости сходимости чисто жадный алгоритм.

Основным результатом настоящей работы является утверждение, показывающее, что при рассмотрении отдельных элементов класса $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ (и даже более узкого класса $\mathcal{A}_0(\mathcal{D})$), а не класса $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ в целом, ситуация может быть и противоположной: скорость сходимости ортогонального жадного алгоритма может быть существенно ниже скорости сходимости чисто жадного алгоритма.

Теорема 1. *Существуют такие словарь $\mathcal{D}$ и элемент $f\in\mathcal{A}_0(\mathcal{D})$, что для любого $m\geqslant 3$ выполняется равенство $\|f_m^{PGA}\|=0$, но $\|f_m^{OGA}\|\sim m^{-1/2}$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11–01–00321 и 11–01–00476).

Теорема 2. *Для любых* $\alpha \geqslant \beta \geqslant \frac{1}{2}$ *существуют словарь* $\mathcal{D}$, *элемент* $f \in \mathcal{A}_0(\mathcal{D})$ *и константы* C_1, C_2 *такие, что* $\|f_m^{PGA}\| \sim C_1 m^{-\alpha}$, *а* $\|f_m^{OGA}\| \sim C_2 m^{-\beta}$.

Литература

[1] L. Rejtö, G. G. Walter *Remarks on projection pursuit regression and density estimation* // Stoch. Anal. Appl. 1992. V. 10. P. 213–222.
[2] L. Jones *A simple lemma on greedy approximation in Hilbert space and convergence rates for projection pursuit regression and network training* // Ann. Statist. 1992. V. 20. P. 608–613.
[3] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov *Some remarks on Greedy Algorithms* // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 173–187.
[4] V. V. Dubinin *Greedy Algorithms and Applications* // Ph. D. Thesis Univ. South Carolina. 1997.
[5] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov *Rate of convergence of Pure Greedy Algorithm* // East J. Approx. 1999. V. 5. P. 493–499.
[6] E. D. Livshitz, V. N. Temlyakov *Two lower estimates in greedy approximation* // Constr. Approx. 2003. V. 19. P. 509–524.
[7] А. В. Сильниченко *О скорости сходимости жадных алгоритмов* // Матем. заметки. 2004. Т. 76. 628–632.
[8] Е. Д. Лившиц *О нижних оценках скорости сходимости жадных алгоритмов* // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73. Р. 125–144.

МЕТОДЫ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ НА ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ АСПИРАНТА И СТУДЕНТА

Донцов В.Н., Беляев Б.Д., Власов И.А., Лылов Е.В., Мусиенко В.К. (Воронеж)
don@math.vsu.ru

Комплексность применения психолого-педагогических и математических методов анализа данных - отличительная черта в профессионально-педагогической подготовке аспирантов и студентов-математиков в период педагогической практики как формы производственной. На начальном этапе педагогической практики в прикреплённой группе перед практикантом всегда возникает локальная профессионально-педагогическая задача о выявлении и описании социометрической структуры учебной группы. Психолого-педагогическая цель структурирования группы учащихся состоит в необходимости адекватного и оперативного выбора лектором и практикантом в начале учебного семестра профессиональной стратегии и тактики при проведении учебно-воспитательной работы. В докладе раскрыты эвристические возможности применения методов непараметрической статистики (критериев Уилкоксона, Манна-Уитни, коэффициента корреляции "ρ"Спирмена) на базе компьютерной системы STATISTICA к социометрическим индексам учебной группы (по тесту Морено) при формулировке и решении текущих, реальных педагогических задач. Объект социометрического структурирования и исследования - академическая группа студентов ($N = 17$ чел.), обучающихся на очно-заочном отделении одного из вузов. Прикреплённая группа учащихся оказалась **ассоциацией** (по классификации Л.И. Уманского) со следующими социометрическими параметрами: её связность равна $3,18$; сплочённость $0,04$; интегрированность $0,17$; коэффициент дезинтеграции $0,35$. В восприятии и понимании студентами друг друга выявлены значимые на 5%-ном уровне коэффициенты корреляции Спирмена между уровнем экзаменационной успеваемости и социометрическим статусом как в учебно-научной ($\rho = 0,88$), так и во внеакадемической деятельности ($\rho = 0,56$). Удовлетворённость организацией учебного процесса в вузе для успевающих студентов выше соответствующей удовлетворён-ности в школе. Отстающие же студенты проявляют к вузовскому учебно-научному процессу оппозицию: различия между успевающими и неуспевающими значимы по статистическому критерию Манна-Уитни на 5%-ном уровне. Тем не менее, межличностные отношения в группе-ассоциации существуют, но остаются лишь на уровне приятельских (по классификации Н.Н.Обозова). Для психологии успевающих различие между уровнями социометрического статуса в академической и внеакадемической деятельности статистически значимо на 5%-ном уровне по критерию Уилкоксона. Экзаменационная успеваемость по профильным дисциплинам значимо влияет лишь на статус учащегося в учебно-научной деятельности ($\rho = 0,76$), но на социометрический статус во внеакадемической деятельности не обнаружено значимого влияния ($\rho = 0,40$). В целом *группа-ассоциация* позволяет лектору и практиканту активно использовать её социометрический потенциал для решения текущих педагогических задач по профессиональному образованию, личностному воспитанию и математическому развитию в межсессионный период. Приобретённый практикантом-математиком локальный опыт системного применения педагогических и математических методов исследования в единстве может стать на этапе старта в педагогическую профессию акмеологическим инвариантом инновационного проектирования и совершенствования авторской педагогической деятельности.

Литература

1. Методы системного педагогического исследования/ Н.В. Кузьмина, В.А. Якунин, В.Н. Донцов... [и др.]; под ред. Н.В. Кузьминой. - М.: Нар. образование, 2002. - 208 с.

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ

Дудов С.И., Сорина Е.В. (Саратов)

dudovsi@info.sgu.ru

Пусть сегментная функция (с.ф.) $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ задана на отрезке $[c, d]$ непрерывными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причем $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ при $t \in [c, d]$. Графиком с.ф. $\Pi_n(A, r, t) = [P_n(A, t) - r, P_n(A, t) + r]$ является полиномиальная полоса ширины $2r$, ось которой задает полином $P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Рассматривается задача о наилучшем равномерном приближении с.ф. $F(\cdot)$ полиномиальной полосой $\Pi_n(A, r, \cdot)$:

$$\max_{t\in[c,d]} \max \{|f_1(t) - P_n(A, t) + r|, |f_2(t) - P_n(A, t) - r|\} \to \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}, r\geqslant 0}, \tag{1}$$

Показано, что задача (1) сводится к эквивалентной ей задаче

$$\rho(A) + \pi(A) \to \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}, \tag{2}$$

где $\rho(A) = \max\limits_{t\in[c,d]} \max \{P_n(A, t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A, t)\}$,

$\pi(A) = \max\limits_{t\in[c,d]} \max \{f_1(t) - P_n(A, t), P_n(A, t) - f_2(t)\}$.

Важным обстоятельством является выпуклость функций $\rho(A)$ и $\pi(A)$. Методами выпуклого анализа, используя специфику субдифференциалов функций $\rho(A)$ и $\pi(A)$, получены необходимые и достаточные условия решения задачи (1), а также условия единственности ее решения в формах, допускающих сравнение с чебышевским альтернансом для задачи равномерного приближения непрерывной функции полиномом. Будет дано сравнение и указана связь с другими задачами по оценке или приближению сегментных функций (см., напр.,[1]-[2]). Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ

(проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Литература

1. Сендов Б. Хаусдорфовые приближения. София, 1979.

2. Выгодчикова И.Ю., Дудов С.И., Сорина Е.В. Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой//ЖВМ и МФ, 2009, т.49, No 7, с.1175-1183.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Евченко В.К., Лобода А.В. (Воронеж)

В [1] и [2] построены семейства алгебраических аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^3$, отвечающие двум геометрически различным случаям: строго псевдо-выпуклому и индефинитному. Основой для получения обоих семейств является технически сложное интегрирование матричных алгебр Ли, полученных за счет продолжения [1] 3-мерной алгебры

$$g \sim \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad (1)$$

до 5-мерных вещественных алгебр вида

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \qquad (2)$$

Алгебраическая суть обсуждаемой задачи оказывается "сильнее" геометрической в силу следующего утверждения.

Теорема. *Пусть 5-мерная алгебра линейных векторных полей, касательных к аффинно-однородной гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^3$, является продолжением алгебры (1). Тогда M - алгебраическая гиперповерхность 6-го, 4-го или 3-го порядка.*

При доказательстве приведенной теоремы удается существенно упростить интегрирование семейства изучаемых алгебр, приводя их, независимо от геометрических свойств соответствующих однородных поверхностей, к верхнетреугольному виду.

Литература

1. Лобода А.В., Ходарев А.С. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплекс-

ного пространства // Известия ВУЗов. Сер. Математика. – 2003. – N 10. – С. 38 - 50.

2. Данилов М.С. Примеры аффинно-однородных индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. // "Вестник ВГУ Сер. "Физика. Математика". 2010, N 1. С. 52-61.

АСИМПТОТИКА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Елисеев А.Г., Шапошникова Д.А. (Москва)

predikat@bk.ru, shaposhnikovda@mpei.ru

В настоящей статье строится регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенного интегрального уравнения Вольтерра. Общий подход к построению регуляризованной асимптотики сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений описывается в работах С.А. Ломова [1] и его учеников [2]. В данной работе рассматривается случай жордановой структуры предельного оператора. Изучен вопрос корректности задачи для исходного сингулярно возмущенного интегрального уравнения Вольтерра и проведена оценка остатка.

Рассмотрим скалярное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\overline{\varepsilon}u(t) + \int\limits_0^t a(t,s)u(s)ds = h(t) \tag{1}$$

и выполнены следующие условия:

1) $a(t,s) \in C^\infty(0,T) \times (0,T)$ – бесконечно дифференцируемое ядро;

2) $h(t) \in C^\infty(0,T)$;

3) $\forall t \in [0,T]$ $a(t,t) \equiv \dot{a}(t,t) \equiv \ddot{a}(t,t) \equiv \ldots \equiv a^{(n-2)}(t,t) \equiv 0$, $a^{(n-1)}(t,t) \neq 0$ (производная берется по первому аргументу).

Причем, $0 \leqslant \overline{\varepsilon} \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 – малое число.

Продифференцировав уравнение (1) n-раз получим интегро-дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$\overline{\varepsilon}u^{(n)}(t) + a^{(n-1)}(t,t)u(t) + \int\limits_0^t a^{(n)}(t,s)u(s)ds = h^{(n)}(t), \tag{2}$$

где для краткости обозначим $a^{(n-1)}(t,t) = a^{(n-1)}(t,s)_{s=t}$, $a^{(n)}(t,s) \equiv \dfrac{\partial^n}{\partial t^n}a(t,s)$.

Можно показать, что уравнение (2) сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с предельным оператором, имеющим тождественно жорданову структуру с единственным нулевым собственным значением и одной жордановой клеткой.

Чтобы упростить изучение структуры ветвления нулевого собственного значения и построения регуляризованной асимптотики введем обозначения: $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^n$. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\varepsilon^n u^{(n)}(t,\varepsilon) + \overline{a}^{(n-1)}(t)u(t,\varepsilon) + \int\limits_0^t a^{(n)}(t,s)u(s,\varepsilon)ds = h^{(n)}(t), \qquad (3)$$

здесь $\overline{a}^{(n-1)}(t) = a^{(n-1)}(t,t)$.

Изучаемая далее задача с помощью ряда замен сводится к интегро-дифференциальной системе из n уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{z}(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) - \int\limits_0^t B(t,s)z(s,\varepsilon)ds + H_n(t), \\ z(0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon). \end{cases} \qquad (4)$$

- $z(t,\varepsilon)$ – n-мерный вектор:

$z(t,\varepsilon) = (u(t,\varepsilon), \nu_1(t,\varepsilon), \ldots, \nu_{(n-1)}(t,\varepsilon))^T$, $\dot{\nu}_{i-1}(t,\varepsilon) = v_i(t,\varepsilon)$,

- $z^0(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\begin{pmatrix} h(0) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \dfrac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ h^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} =$

$= \dfrac{1}{\varepsilon^n}H_0(0) + \ldots + \dfrac{1}{\varepsilon}H_{n-1}(0)$,

- $A(t)$ – матрица $(n \times n)$:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\overline{a}^{(n-1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

- $B(t,s)$ – матрица $(n \times n)$: $B(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{(n)}(t,s) & \ldots & 0 \end{pmatrix}$,
- $H_n(t)$ – вектор $(n \times 1)$: $H_n(t) = (0, 0, \ldots, h^{(n)}(t))^T$.

Спектр $\{\mu_k(t)\}$ матрицы $A(t)$ простой и имеет вид: $\mu_k(t) = \sqrt[n]{-\overline{a}^{(n-1)}(t)}$.

При этих условиях матрица $A(t)$ допускает спектральное разложение

$$A(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(t) P_k(t),$$

где $P_k(t)$ – попарно дизъюнктивные проекторы, образующие полную группу, т.е.

$$\text{a) } P_i(t)P_j(t) = \delta_j^i P_i(t), \qquad\qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{n} P_k(t) = I.$$

Пусть будут выполнены следующие условия:

1) $a(t,s) \in C^{\infty}[(0,T) \times (0,T)]$ – бесконечно дифференцируемое ядро;

2) $\forall h(t) \in C^{\infty}(0,T)$, $t \in [0,T]$;

3) $\forall t \in [0,T] \quad a(t,t) \equiv \dot{a}(t,t) \equiv \iddots a(t,t) \equiv \ldots \equiv a^{(n-2)}(t,t) \equiv 0$, $a^{(n-1)}(t,t) \neq 0$ (производная берется по первому аргументу);

4) $\mu_k(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,T]$, $k = \overline{1,n}$;

5) $Re(\mu_k) \leqslant 0$ $\forall t \in [0,T]$, $n \leqslant 2$;

6) $h(0) = \ldots = h^{(n-1)}(0) = 0$.

Замечание:

а) Уравнение (4) является интегро-дифференциальным, порожденным интегральным уравнением. Для однозначного его решения надо поставить начальные условия. Из структуры спектра $Re(\mu_k)$ могут быть как меньше, так и больше нуля. Отсюда следует, что при $n \leqslant 2$ задача Коши может быть корректна при специальных условиях на спектр $Re(\mu_k(t)) \leqslant 0$ $\forall t \in [0,T]$. В случае $n > 2$ в спектре присутствуют собственные значения с $Re(\mu_k(t)) > 0$ $\forall t \in [0,T]$. Постановка задачи Коши в этом случае требует специальных начальных условий, учитывающих $Re(\mu_k(t)) > 0$ $\forall t \in [0,T]$.

б) В неограниченность решения при $\varepsilon \to 0$ вносит также правая часть $h(t)$. Ограниченное решение по ε будет выполнено при дополнительном условии 6) на $h(t)$.

Согласно методу регуляризации введем дополнительные независимые переменные по формулам:

$$\varphi_i(t) = \int_0^t \mu_i(s)ds, \quad i = \overline{1,n}.$$

И вместо исходной задачи (4) рассмотрим расширенную задачу для $u = u(t, \tau, \varepsilon)$

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \tau, \varepsilon) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(t) \dfrac{\partial u}{\partial \tau_i} = \\ \qquad = A(t) u(t, \tau, \varepsilon) - \int\limits_0^t B(t, s) u(s, \tau, \varepsilon) ds + H_n(t), \\ u(0, \tau, \varepsilon)_{\tau=0} = z^0(\varepsilon). \end{cases} \tag{5}$$

Решение задачи (5) ищем в пространстве безрезонансных решений

$$U = \left\{ z : z = \sum_{i=1}^{n} e^{\tau_i} x^i(t) + y^i(t),\ i = \overline{1, n}, x^i(t), y^i(t) \in C^\infty[(0, T), C^n] \right\},$$

в виде ряда по степеням ε

$$u(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{m=-n}^{\infty} \varepsilon^m z_m(t, \tau) \tag{6}$$

с коэффициентами $z_m(t, \tau)$ из пространства U. Более подробно (6) запишется в виде

$$u(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} e^{\tau_i} \sum_{m=-n}^{\infty} \varepsilon^m x_m^i(t) + \sum_{m=-n}^{\infty} \varepsilon^m y_m(t). \tag{7}$$

Подставим ряд (7) в задачу (5) и в полученном при этом из (5) уравнении заменяем под знаком интеграла функции $x_i(t,)$, $y(t, \varepsilon)$ в соответствии с выражением (6). Слагаемые, содержащие интегралы с помощью n-кратного интегрирования по частям, заменяем рядами. После этого приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε и слагаемые с экспонентами и без них. Таким образом, мы получим следующие итерационные задачи для определения коэффициентов ряда (5):

$$\varepsilon^{-n} :\ (A(t) - \mu_i(t)) x_i^{-n}(t) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$A(t) y_{-n}(t) - \int\limits_0^t B(t, s) y_{-n}(s) ds = 0,$$

....

$$\varepsilon^{-n+l+1}:\ 0\leqslant l\leqslant n-2$$

$$(A(t)-\mu_i(t))x_i^{-n+l+1}(t)=\frac{d}{dt}(x_i^{-n+l}(t))+\frac{1}{\mu_i(t)}B(t,t)x_i^{-n+l}(t)+$$

$$+\sum_{p=1}^{l}(-1)^pD_i^p(s)\left(\frac{1}{\mu_i(s)}B(t,s)x_i^{-n+l-p}(s)\right)\Bigg|_{s=t},$$

$$T(t)y_{-n+l+1}(t)=\frac{d}{dt}(y^{-n+l}(t))-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{l}(-1)^pD_i^p(s)\left(\frac{1}{\mu_i(s)}B(t,s)x_i^{-n+l-p}(s)\right)\Bigg|_{s=0},$$

где $D_i^p(s)=\left(\dfrac{1}{\mu_i(s)}\ \dfrac{\partial}{\partial s}\right)^p$.

Теорема об оценке остаточного члена. Пусть выполнены условия:

- $a(t,s)\in C^{N+n+1}[(0,T)\times(0,T)]$;
- $\forall h(t)\in C^{N+n+1}(0,T),\quad t\in[0,T]$;
- $\forall t\in[0,T]\quad a(t,t)\equiv\dot a(t,t)\equiv\ddot a(t,t)\equiv\ldots\equiv a^{(n-2)}(t,t)\equiv 0$, $a^{(n-1)}(t,t)\neq 0$ (производная берется по первому аргументу);
- $\mu_k(t)\neq 0$, $\forall t\in[0,T]$, $k=\overline{1,n}$.

Тогда вышеописанным методом регуляризации можно построить ряд (7), сужение которого при $\tau_i=\dfrac{\varphi_i(t)}{\varepsilon}$ является асимптотическим рядом для решения задачи (4), то есть для достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливы неравенства в зависимости от размерности пространства n.

1) $n\leqslant 2$.

Пусть выполнены дополнительные условия:

- a) $a(t,s)\in C^{N+n+2}[(0,T)\times(0,T)]$;
- b) $\forall h(t)\in C^{N+n+2}(0,T)$, $t\in[0,T]$;
- c) $Re(\mu_k)\leqslant 0\ \forall t\in[0,T]$, $n\leqslant 2$.

В этом случае разрешающий оператор допускает оценку $||U(t,s,\varepsilon)||_c\leqslant C$, где C не зависит от t, ε.

Отсюда верна оценка

$$\left|\left|z(t,\varepsilon)-\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k z_k(t,\varepsilon)\right|\right|_c\leqslant$$

$$\leqslant \left|\left| z(t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k z_k(t,\varepsilon) \right|\right|_c + ||\varepsilon^k z_{N+1}(t,\varepsilon)||_c \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon}\varepsilon^{N+2} + \varepsilon^{N+1} C_2 =$$
$$= C\varepsilon^{N+1}.$$

2) $n \geqslant 3$.

В этом случае из (4) следует, что $\forall t \in [0,T]$ $Re\mu(t) > 0$, и разрешающий оператор допускает экспоненциально растущую оценку $||U(t,s,\varepsilon)||_c \leqslant Ce^{(1/\varepsilon)\int_s^t Re\mu(\theta)d\theta}$, где C не зависит от t, ε.

В этом случае оценка разрешающего оператора экспоненциально возрастающая:

$$\left|\left| z(t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k z_k(t,\varepsilon) \right|\right|_c \leqslant C\varepsilon^{N+1} e^{(1/\varepsilon)\int_0^t Re\mu(\theta)d\theta}.$$

В этом случае можно говорить об асимптотичности только регуляризованного ряда, то есть ряда вида

$$u(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} e^{\tau_i} \sum_{m=-n}^{\infty} \varepsilon^m x_m^i(t) + \sum_{m=-n}^{\infty} \varepsilon^m y_m(t).$$

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., Наука, 1981. - 408 с.

2. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Интегральные уравнения Вольтерра с быстроменяющимися ядрами и их асимтотическое интегрирование. // Математический сборник, 2001, т. 192, В 8, с. 53–78.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННО РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Еровенко В.А., Гулина О.В. (Минск)

erovenko@bsu.by, gulina_o@mail.ru

Пусть X – бесконечномерное банахово пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}(X)$ – банахово пространтсво линейных ограниченных операторов с областью опеределения X и областью значений $R(T) \subset X$. Рассмотрим оператор $T \in \mathbf{B}(X)$. Обозначим через $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ ядро оператора T и через

$R^{\infty}(T) := \bigcap\{R(T^k) : k = 1, 2, 3...\}$ обобщенную область значений оператора T.

Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется относительно регулярным, если для него существует псевдообратный оператор, т.е. оператор $S \in \mathbf{B}(X)$ такой, что $TST = T$.

О п р е д е л е н и е 1. Относительно регулярный оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется существенно регулярным, если для него выполняется существенное включение Като $N(T) \overset{e}{\subset} R^{\infty}(T)$, т.е. $N(T) \subset R^{\infty}(T) + F$, где $F \subset X$ – конечномерное подпространство банахова пространства X.

Множество всех существенно регулярных операторов, действующих на банаховом пространстве X, обозначим через $\mathbf{S}_e(X)$.

Для существенно регулярных операторов, действующих в банаховом пространстве, имеет место следующий результат об устойчивости при малых по норме коммутирующих возмущениях.

Т е о р е м а. *Пусть $T \in \mathbf{S}_e(X)$ – существенно регулярный оператор. Тогда существует такое малое $\varepsilon > 0$, что для любого возмущения $A \in \mathbf{B}(X)$, коммутирующего с оператором T, т.е. $TA = AT$, норма которого меньше ε, т.е. $\| A \| < \varepsilon$, возмущенный оператор $T - A$ также является существенно регулярным оператором, т.е. $T - A \in \mathbf{S}_e(X)$.*

Заметим, что условие коммутируемости операторов T и A в теореме существенно для устойчивости существенного включения Като. В этом можно убедиться на контрпримере, который приведен в работе [1].

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$. Существенным спектром Сафара оператора T называется подмножество спектра оператора T, которое определяется следующим образом: $\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \notin \mathbf{S}_e(X)\}$.

Подробная информация о свойствах существенного спектра Сафара изложена, например, в работе [2].

Вообще говоря, обобщение результата об устойчивости существенно регулярных операторов при достаточно малых по норме коммутирующих возмущениях на существенный спектр Сафара возможно только в случае наложения дополнительных ограничений на класс возмущающих малых по норме коммутирующих операторов, поскольку в сформулированной теореме присутствует произвольное $\varepsilon > 0$, и для всех возмущающих операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ наибольшая из нижних границ множества, состоящего из соответствующих $\varepsilon > 0$, может оказаться равной нулю.

Литература

1. Еровенко, В.А. Об устойчивости существенно регулярных операторов и соответствующего спектра Сафара / В.А. Еровенко, О.В. Гулина // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 27–32.

2. Гулина, О.В. Свойства существенного спектра Сафара для ограниченных операторов / О.В. Гулина // Вестник МГУ им. А.А. Кулешова. – 2007. – № 4. – С. 151–158.

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА ДЛЯ СЕТЕЙ С НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ

Ерусалимский Я.М., Водолазов Н.Н. (Ростов-на-Дону)

nickolay_vodolazov@rambler.ru

Нами рассматривается поток на графах с нестандартной достижимостью [1]. Под нестандартной достижимостью в [1] подразумевается, что допустимыми являются не все пути на графе, а лишь те, которые удовлетворяют некоторым условиям. В зависимости от того, какие условия рассматриваются, возникают разные виды нестандартной достижимости.

При решении задачи о максимальном потоке на графах с нестандартной достижимостью нами было обнаружено, что для некоторых видов нестандартной достижимости (барьерной достижимости, вентильной достижимости (при $k \geqslant 2$), магнитной достижимости, монотонной достижимости) задача нахождения максимального целочисленного потока является NP-полной, что означает отсутствие полиномиальных алгоритмов ее решения. В частности никакие модификации классических алгоритмов не приведут к "успеху".

При поиске потока на графах без дополнительных ограничений на достижимость могут возникать блокирующие потоки – потоки, величина которых не максимальна и нет увеличивающего пути из источника в сток. Классические алгоритмы поиска максимального потока, которые применяются для графов без дополнительных ограничений на достижимость, могут находить увеличивающие цепи на графах с блокирующими потоками и позволяют находить максимальный поток. Однако нами были построены примеры, показывающие, что причин для возникновения блокировки в случае введения дополнительных ограничений становится больше, чем в классическом случае. В сети с дополнительными ограничениями на достижимость возможен поток, величина которого не максимальна, но отсутствуют не только увеличивающие пути, но и увеличивающие цепи из источника в сток. Это делает неприменимым алгоритм прорыва [1] и другие алгоритмы поиска максимального потока на графах с нестандартной достижимостью, основанные на поиске увеличивающей цепи (например, приведенный в [2]).

Построены примеры, показывающие, что аналог теоремы Форда-Фалкерсона для сетей с нестандартной достижимостью не выполнен, а именно пропускная способность минимального разреза дает только оценку сверху максимального потока. Однако и такой результат является полезным – если к сети с нестандартной достижимостью применить алгоритм прорыва и найденный поток имеет величину, равную величине минимального разреза, то поток является максимальным.

Также следует отметить, что для некоторых видов нестандартной достижимости (для вентильной достижимости при $k = 1$ и для ограниченной магнитной достижимости) удалось построить полиномиальные алгоритмы решения задачи о максимальном потоке.

Литература

1. *Ерусалимский Я.М.* Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения: моногр. / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов, М.В. Кузьминова, А.Г. Петросян. –Ростов-на-Дону, 2009. – 195 с.

2. *Водолазов Н.Н.* Об особенностях потока в сетях с барьерной достижимостью. / Н.Н. Водолазов // Вестник ДГТУ. –2008 –Т.8. –№2 (37). – С.127-136.

ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ДЖЕКСОНА

Ершова Е.М. (Тверь)

elersh@list.ru

В 1960 г. в статье [1] П. П. Коровкин ввел и исследовал операторы, ставшие в настоящее время классическими и называемые операторами Фейера-Коровкина

$$K_n(f,x) = \frac{1}{2\pi A_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left| \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikt} \right|^2 dt, \qquad (1)$$

где $A_n = \sum_{s=0}^{n} \varphi^2(\frac{s}{n}) \neq 0$.

Им было показано, что оператор (1) можно привести к виду

$$K_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\cos(kt)\right] dt,$$

где $\lambda_{k,n} = \frac{A_{k,n}}{A_n}$, $A_{k,n} = \sum_{s=0}^{n-k}\varphi(\frac{s}{n})\varphi(\frac{s+k}{n})$.

Рассмотрим конструкцию подобных операторов, беря в (1) для удобства вычислений $2n$ вместо n. Пусть $\varphi_n(x) = x(1-x)$.

Тогда получаем, что множители суммирования полученного оператора вычисляются по формуле

$$\lambda_{k,n} = \frac{32n^5 - 2n + (1-20n^2)k + (10n - 40n^3)k^2 + 20n^2k^3 - k^5}{2n(16n^4-1)}.$$

Заметим, что порядок приближения дифференцируемых функций операторами (1) зависит от порядка разности $1 - \lambda_{1,n} = 1 - \frac{5}{4n^2+1}$. Это означает, что оператор (1) приближает дифференцируемые функции с тем же порядком, что и оператор Джексона.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. $K_n(f,x) - f(x) = \frac{5}{4n^2+1}D^2f(x) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, где $D^2f(x)$ – обобщенная вторая производная функции $f(x)$.

Теорема 2. Если $f \in C_{2\pi}$, то $||K_n(f) - f|| \leqslant c\omega\left(f; \frac{1}{n^2}\right)$.
Если $f \in C^1_{2\pi}$, то $||K_n(f) - f|| \leqslant c||f'||\frac{1}{n^2} + \frac{c_1}{n}\omega\left(f'; \frac{1}{n}\right)$, где $\omega(f;\delta)$ – модуль непрерывности функции $f(x)$.

Литература

1. Коровкин П.П. *Асимптотические свойства положительных методов суммирования рядов Фурье.*// Успехи математических наук. т.XV, вып.1(91) 1960 г.

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛА ТИТЧМАРША[1]

Ефимова М.П. (Москва)
efimova.margarita@gmail.ru

Титчмарш, исследуя сопряженные ряды Фурье в работе [1], ввел понятие Q-интеграла. Рассмотрим (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, E — измеримое множество конечной меры и действительнозначную измеримую на E функцию $f(x)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

Определение 1. Будем говорить, что $f(x)$ является *Q-интегрируемой* на множестве E, если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E [f(x)]_{n;0}\,dx$, где

$$[f(x)]_{n;0} = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant n; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

указанный предел будем обозначать $(Q)\int\limits_E f(x)\,dx$.

Определение 2. Будем говорить, что $f(x)$ является *Q-интегрируемой в обобщенном смысле* на множестве E, если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E [f(x)]_n\,dx$, где

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant n; \\ n\,\mathrm{sgn} f(x), & \text{иначе;} \end{cases}$$

этот предел будем обозначать $(Q_{\text{об}})\int\limits_E f(x)\,dx$.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ является Q-интегрируемой на E. Тогда $f(x)$ является Q-интегрируемой на E в обобщенном смысле, и $(Q_{\text{об}})\int\limits_E f(x)\,dx = (Q)\int\limits_E f(x)\,dx$.

В работе [1] было показано, что Q-интеграл не обладает свойством аддитивности по функциям.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ является Q-интегрируемой на множестве E в обобщенном смысле, $g(x)$ суммируема на E. Тогда функция $f(x) + g(x)$ также Q-интегрируема на E в обобщенном смысле, и верно равенство

$$(Q_{\text{об}})\int\limits_E (f(x) + g(x))dx = (Q_{\text{об}})\int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx.$$

Кроме того, существует пример двух Q-интегрируемых функций, сумма которых не Q-интегрируема в обобщенном смысле.

Литература

1. *Titchmarsh E.C.* On conjugate functions. //
Proc. London Math Soc. 1929. T. 29. C. 49–80.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды.
М.: Физматгиз, 1961. – гл. VIII, §18.

ТЕОРЕМА БОРСУКА-УЛАМА ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Жук Н.М. (Воронеж)
chuk _n_ m@mail.ru

Хорошо известна конечномерная классическая теорема Борсука-Улама (см., например, [1]). В работах [2] и [3] была доказана теорема, обобщающая эту теорему на случай бесконечномерных банаховых пространств.

Теорема 0. *Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $a : E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $S_r(0) \subset E_1$ - сфера радиуса r с центром в нуле, $f : S_r(0) \to E_2$ - вполне непрерывное нечетное отображение.*

Если $dim(Ker\ a) \geqslant 1$, то уравнение

$$a(x) = f(x) \tag{1}$$

имеет непустое множество $N(a, f)$ решений и $dim(N(a, f)) \geqslant dim(Ker\ a) - 1$.

Здесь $dim(N(a, f))$ означает топологическую размерность dim множества $N(a, f)$.

Рассмотрим случай, когда отображение является многозначным вполне непрерывным нечетным отображением.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $a : E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $S_r(0) \subset E_1$ - сфера радиуса r с центром в нуле, $F : S_r(0) \to Kv(E_2)$ – вполне непрерывное многозначное отображение.

Теорема 1. *Если размерность (конечная или бесконечная) $dim(Ker\ a) \geqslant 1$, то включение $a(x) \in F(x)$ имеет решение.*

Следствием этой теоремы является теорема об антиподах.

Пусть $S_r(0)$ — сфера в E_1 радиуса r с центром в нуле и $G : S_r(0) \to Kv(E_2)$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $\Psi : S_r(0) \to Kv(E_2)$, $\Psi(x) = a(x) + G(x)$.

Теорема 2. *Если $dim(Ker\ a) \geqslant 1$, то существует точка $x_0 \in S_r(0) \to Kv(E)$ такая, что $\Psi(x_0) \bigcap \Psi(-x_0) \neq \varnothing$.*

Имеют место и другие следствия из теоремы 1.

Литература

1. Dugundji J., Granas A. Fixed point theory. Warszawa: PWN. 1982.

2. Гельман Б.Д. Теорема об антиподах в бесконечномерных банаховых пространствах// Матем. сборник, 2002, т.193, N 1, с.83-92.

3. Гельман Б.Д. Бесконечномерная версия теоремы Борсука-Улама// Функц. анализ и его прил., 2004, т.38, № 4, с.1-5.

СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Жуковская З.Д., Обухова Л.А., Батаронов И.Л., Данкова И.Н.

Опираясь на концепцию учебной деятельности Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова, И.С. Якиманская в качестве основной задачи обучения выделяет организацию интериоризации продуктов общественного сознания. Основной путь формирования субъекта обучения организация "внешнего" и его перевод во внутреннее, поэтому, специально организованное обучающее воздействие рождает субъекта обучения носителя индивидуализированного научного знания. При этом смысл субъектности ученика необходимо рассматривать не как производную от обучающих воздействий, всецело зависящих от требований общества, а изначально (до всякого обучения) ему присущую.

Одна из основных задач образовательного процесса состоит в создании условий для раскрытия собственного потенциала учащегося, данного ему от природы. Ученик должен пропустить через свой субъектный опыт заданные обществом нормы обучения и признать эти нормы личностно значимыми для себя. Исследования субъекта познания, утверждает И.С. Якиманская, должны в первую очередь ориентироваться на процесс учения. Обучение должно быть отнесено к разряду не целей, а средств: "... личностно-ориентированное обучение есть прежде всего выявление особенностей ученика как субъекта; признание его субъектного опыта как самобытности и самоценности; построение педагогических воздействий с максимальной опорой на этот опыт; постоянное согласование в ходе обучения двух видов опыта -общественного и индивидуального; раскрытие индивидуального своеобразия получения знаний через анализ способов учебной работы". При этом необходимо применение таких педагогических технологий, которые содержат в себе большие возможности для эффективного формирования требуемых навыков с наперед заданными свойствами. Ученик должен получить возможность для формирования индивидуальных способов учебной работы, с учетом его личных предпочтений, мотивации, возможностей и способностей.

Это сочетание индивидуализированного и дифференцированного подходов к обучению особенно важно при обучении математике.

Главными принципами – составляющими при проектировании модели личностно-ориентированного обучения следует считать:

- приоритет индивидуальности, самоценности ученика как активного носителя субъектного опыта; ученик изначально является субъектом познания;

- образование - единство двух составляющих – обучения и учения;

- учение индивидуальная деятельность по преобразованию социально значимых норм обучения через свой субъектный опыт;

- конструирование и реализация образовательного процесса по математике обязательно предполагает выявление субъектного опыта ученика в области математического образования, контроль за складывающимися способам его учебной деятельности, а также согласование имеющегося индивидуального опыта работы через использование учеником своих познаний в собственной жизнедеятельности;

- развитие когнитивных способностей и предметной (математической) ментальности ученика через постоянное обогащение, преобразование субъектного опыта;

- оценка результатов учения с помощью определения познавательных способностей и предметных компетенций, сформированных в ходе овладения соответствующими математическими знаниями и умениями.

Такой подход позволяет учащемуся самореализоваться через овладение способами организации самостоятельной учебной работы и средствами приобретения знаний и практических умений, применяя их в ситуациях, не заданных обучением.

Основными требованиями к разработке дидактического обеспечения личностно-ориентированного образовательного процесса по математике следует считать:

- способность учебного материала выявлять содержание субъектного опыта ученика;

- направленность учебных заданий на использование и преобразование субъектного опыта ученика;

- обязательность согласования социально заданных норм с субъектным опытом ученика;

- стимулирование ученика к формированию самоценной образовательной деятельности;

- предоставление ученику реальной возможности выбирать содержание, вид и форму учебных заданий;

- четкая очерченность общелогических и специфических способов учебной деятельности при обучении математике с учетом их функций в личностном развитии ученика;

- обеспечение контроля и оценки как результата, так и самого процесса учения, “тех трансформаций, которые выполняет ученик, усваивая учебный материал”;

- наличие возможности для рефлексии, оценки результатов учения как субъектной деятельности.

В результате личностно-ориентированного педагогического процесса учащийся проходит следующие стадии:
проявления себя как субъекта предстоящего действия;
проявления себя как субъекта целеполагания;

- проявления себя как субъекта совершаемого "здесь" и "теперь" действия;

проявления себя как субъекта окончания действия;
проявления себя как субъекта состоявшегося действия.

“В отсутствии какой-либо из указанных стадий индивид будет считать себя объектом психолого-педагогических манипуляций, совершаемых без учета его желаний или даже вопреки им. Это может породить отказ от использования приобретенного опыта под предлогом его малоценности или неуверенности в своих силах”. (А.С. Очнев)

При проектировании педагогического процесса по математике необходима оценка значимости предстоящего, происходящего, свершившегося и того, что могло бы быть, путем анализа и оценки решаемых задач по следующим двум параметрам: по типу побуждения к решению задачи и по типу ориентации задачи.

Обязательным условием эффективности педагогической практики при личностно-ориентированном обучении математике является субъект-субъектный характер отношений между ее участниками (учителем и учащимся), так как порождение и воспроизведение себя как субъекта деятельности составляет суть трактовки образовательного общения как субъект-субъектного взаимодействия, признаков когнитивности личности и развития ее ментальности.

Литература

1. Якиманская И.С. Личностно-0риентированное обучение в со-

временной школе / И.С. Якиманксая – М.: сентябрь 1996 – 95 с. – (библиотека журнала “Директор школы”, вып. 2).

2. Петровский В.А. Личность в психологии: парадигма субъектности. Доп. учеб. пособ. для студентов вузов / В.А. Петровский – Ростов н/Д: Финикс- 1996 – 509с.

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ

Завгородний М.Г., Майорова С.П. (Воронеж)

В докладе обсуждается структура решений однородной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (см. [1, 2])

$$\begin{cases} (p(x)u''(x))'' - (g(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0, \\ -(\psi(x)\varphi'(x))' + \vartheta(x)\varphi(x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

заданной на объединении всех ребер геометрического графа Г при условиях

$$u_\gamma(a) = \sum_{\eta\in I_2} \alpha_{\gamma\eta} u_\eta(a), \quad \gamma \in I_1,$$

$$u'_\gamma(a) = \sum_{\eta\in I_4} \beta_{\gamma\eta} u'_\eta(a) + \sum_{\eta\in I_2} \delta_{\gamma\eta} u_\eta(a), \quad \gamma \in I_3,$$

$$\varphi_\gamma(a) = \sum_{\eta\in I_4} \varepsilon_{\gamma\eta} u'_\eta(a), \quad \gamma \in I(a),$$

$$\left((pu'')' - gu'\right)_\gamma(a) =$$

$$= -\sum_{\eta\in I_1} \alpha_{\eta\gamma} \left((pu'')' - gu'\right)_\eta(a) + \sum_{\eta\in I_3} \delta_{\eta\gamma} (pu'')_\eta(a), \quad \gamma \in I_2,$$

$$(pu'')_\gamma(a) = -\sum_{\eta\in I_3} \beta_{\eta\gamma} (pu'')_\eta(a) + \sum_{\eta\in I(a)} \varepsilon_{\eta\gamma} (\psi\varphi')_\eta(a), \quad \gamma \in I_4,$$

заданных в каждой вершине a графа Г. Здесь $I(a)$ – множество ребер, инцидентных вершине a; I_1, I_3 – некоторые подмножества $I(a)$; $I_2 = I(a)\backslash I_1$, $I_4 = I(a)\backslash I_3$ и $\alpha_{\gamma\eta}$, $\beta_{\gamma\eta}$, $\delta_{\gamma\eta}$ и $\varepsilon_{\gamma\eta}$ – некоторые константы, зависящие от a.

Теорема. Пусть $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) \geqslant \delta_1 > 0$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} \psi(x) \geqslant \delta_2 > 0$ и $g(x), q(x), \vartheta(x) \geqslant 0$. Тогда для решения $(u(x), \varphi(x))$ однородной краевой задачи (1) верно:

1) если $g(x) \equiv q(x) \equiv \vartheta(x) \equiv 0$ при $x \in \gamma$, то функция $u(x)$ является линейной: $u(x) = \alpha\tau(x) + \beta$, а функция $\varphi(x)$ – постоянной: $\varphi(x) = \delta$, на ребре γ;

2) если $g(x) \equiv 0$ и $q(x) \equiv 0$ при $x \in \gamma$, то функция $u(x)$ является постоянной: $u(x) = \beta$, а функция $\varphi(x)$ – тождественно нулевой на ребре γ;

3) если $q(x) \equiv 0$ при $x \in \gamma$, то функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ – тождественно нулевые на ребре γ;

Литература

1. Завгородний М.Г., Майорова С.П. Математические модели стержневых систем. / Вестник Тамбовск. ун-та, 2000. – Т. 5. Вып. 4. – С. 450 - 452.

2. Завгородний М.Г. Вариационные принципы построения моделей стержневых систем. // Математич. моделир. информац. и технологич. систем. / Воронеж: Воронеж. гос. технол. академия, 2000. – Вып. 4. – С. 59 - 62.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ

Завгородний М.Г., Майорова С.П. (Воронеж)

В докладе обсуждаются условия однозначной разрешимости однородной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (см. [1])

$$\begin{cases} (p(x)u''(x))'' - (g(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0, \\ -(\psi(x)\varphi'(x))' + \vartheta(x)\varphi(x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

заданной на объединении всех ребер геометрического графа Γ при условиях

$$u_j(a) = u_d(a)(j = \overline{1, d-1}), u_j'(a) = \alpha_{j1}u_1'(a) + \alpha_{j2}u_2'(a)(j = \overline{3, d}), \tag{2}$$

$$\varphi_j(a) = \beta_{j1}u_1'(a) + \beta_{j2}u_2'(a)(j = \overline{1, d}), \sum_{k=1}^{d} \Big((pu'')' - gu'\Big)_k (a) = 0, \tag{3}$$

$$(pu'')_j (a) = -\sum_{k=3}^{d} \beta_{kj} (pu'')_k (a) + \sum_{k=1}^{d} \varepsilon_{kj} (\psi\varphi')_k (a)(j = 1, 2), \tag{4}$$

заданных в каждой внутренней вершине a графа Γ, и условиях

$$u(b) = u'(b) = \varphi(b) = 0, \tag{5}$$

заданных в каждой граничной вершине b. Здесь d – степень вершины a и α_{jk}, β_{jk}, – некоторые константы, зависящие от a.

Условия (2) означают непрерывность функции $u(x)$ и компланарность всех троек касательных векторов к графику функции $u(x)$ в вершине a. Условия (3), кроме последнего, задают в вершине a согласование углов поворота $\varphi_j(a)$ каждого ребра γ_j с касательной плоскостью к графику функции $u(x)$.

Теорема. Пусть $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) \geqslant \delta_1 > 0$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} \psi(x) \geqslant \delta_2 > 0$ и $g(x), q(x), \vartheta(x) \geqslant 0$. Пусть граф Γ имеет хотя бы одну граничную вершину и для любой внутренней вершины a верно $(\alpha_{j1}\beta_{j2} - \alpha_{j2}\beta_{j1}) \neq 0$, $j = \overline{3, d(a)}$. Тогда решение однородной краевой задачи (1)-(5) единственно и тождественно равно нулю: $u(x) \equiv \varphi(x) \equiv 0$.

При соответствующем подборе констант условия (2)-(4) отвечают (см. [1]) жесткому соединению стержней плоской стержневой системы в их общем узле a. При этом для соответствующего стержня функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ задают смещение точки x при прогибе и угол поворота соответственно.

Литература

1. Завгородний М.Г., Майорова С.П. Математические модели стержневых систем. / Вестник Тамбовского ун-та, 2000. – Т. 5. Вып. 4. – С. 450-452.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕКОМПАКТНЫМИ ОБРАЗАМИ

Завьялова А.В. (Воронеж)

an-toshka85@mail.ru

Теория неподвижных точек многозначных отображений с выпуклыми компактными образами развита достаточно хорошо (см., например [1]), однако, существуют задачи, в которых многозначное отображение имеет замкнутые, выпуклые, но некомпактные образы. В работе [2] был рассмотрен случай, когда многозначное отображение имеет некомпактные образы и непрерывно по Хаусдорфу. В работе [3] полученные результаты применялись к изучению разрешимости неравенств в банаховом пространстве с конусом.

В настоящей работе рассматривается ситуация, когда многозначное отображение не обязано быть непрерывным по Хаусдорфу, но допускает однозначные аппроксимации.

Пусть E, E_1 – банаховы пространства, $\alpha : E \to E_1$ – непрерывный линейный оператор, T – ограниченное выпуклое замкнутое подмножество в E, $X = \overline{\alpha(T)}$ – компакт в E_1, $F : X \to Cv(T)$ - многозначное отображение, удовлетворяющее следующему условию:

(A) *существует последовательность непрерывных отображений $f_n : X \to T$ таких, что для любой последовательности точек $\{x_n\} \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n(x_n), F(x_0)) = 0$.*

Теорема. *Пусть выполнены сделанные предположения. Пусть для любой точки $x \in X$ множество $F(x) \subset E$ компактно в слабой топологии, тогда многозначное отображение $G = F \circ \alpha \colon T \to Cv(T)$ имеет неподвижную точку.*

Литература

[1] Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений/Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис и др. - М: КомКнига (УРСС). - 2005.

[2] Гельман А.Б. Об одном классе многозначных отображений с некомпактными образами/ А.Б. Гельман // Вестник ВГУ, серия физика, математика. - 2008. - В. 1. - С. 162-169.

[3] Гельман А.Б. Неподвижные точки h-вполне непрерывных многозначных отображений и неравенства в пространствах с конусом/ А.Б. Гельман// Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. - 2009. - № 4. - С. 5-13.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Задорожний В.Г.

zador@amm.vsu.ru

Хорошо известны условия существования периодических решений линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t) + f(t) \tag{1}$$

с ω-периодическими коэффициентами. Пусть коэффициенты ε и f уравнения (1) являются независимыми случайными процессами и

ε задано характеристическим функционалом

$$\varphi_\varepsilon(u) = \exp(i\int_{-\infty}^{\infty} a(s)u(s)ds - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(s_1, s_2)ds_1 ds_2), \qquad (2)$$

где a - заданная ω-периодическая функция и $b(s_1, s_2)$ - заданная ω-периодическая функция по обеим переменным.

Пусть I - оператор тождественного преобразования, $\chi(s, t, \tau) = \mathrm{sign}(\tau - s)$ при τ принадлежащем отрезку с концами s и t и равно нулю при других значениях τ и $U(t, s)$ оператор, определяемый по правилу

$$U(t, s)\varphi(u) = \varphi(u - i\chi(s, t, \cdot))$$

Случайный процесс $\varepsilon(t)$ называется ω -периодическим в среднем [1], если его математическое ожидание $M(\varepsilon)$ является ω - периодической функцией.

Теорема. Если случайный процесс ε задан характеристическим функционалом (2) и f является ω -периодическим в среднем независимым с ε случайным процессом и

$$\int_0^\omega U(\omega, s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds$$

принадлежит области значений оператора $I - U(\omega, 0)$, тогда уравнение (1) имеет ω-периодическое в среднем решение, математическое ожидание которого имеет вид

$$M(x(t)) = U(t, 0)(U(0, \omega) - I)^{-1}\int_t^{t+\omega} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, 0, \cdot))M(f(s))ds.$$

Литература

1. Хасьминский Н.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров/Н.З. Хасьминский.-М.: Наука, 1969.-367 с.

О ВАРИАЦИОННОМ ОБОСНОВАНИИ ОДНОГО УПРУГОГО КОНТИНУУМА

Зверева М.Б., Бахтина Ж.И. (Воронеж)

В классической науке деформация упругого континуума, например стержня, определяется уравнением

$$(pu'')'' - (qu')' = f(= \lambda mu). \qquad (1)$$

Напомним, что в физике в качестве $p(x)$ принимается EI, где E - модуль Юнга, I - момент инерции поперечного сечения. Параметр q определяется напряжением системы вдоль упругой оси, а $m(x)$ - распределением масс. Частота собственных колебаний системы определяется собственными значениями соответствующей спектральной задачи. Оказывается, классические осцилляционные свойства справедливы и для случая, когда функция $q(x)(\geqslant 0)$ не является тождественным нулем (при $q \equiv 0$ собственные функции спектральной задачи, отвечающие гармоническим собственным колебаниям, были описаны впервые академиком Крыловым для $m = const$).

Ниже уравнение (1) рассматривается в случае, когда $p(x) > 0$ не на всем отрезке $[0, l]$, а лишь на некотором куске $[0, \xi]$, и при этом $p(x) \equiv 0$ при $x > \xi$, т.е. на $[\xi, l]$. Физически это означает, что у рассматриваемого стержня по каким-либо причинам справа от ξ утрачена изгибная жесткость. Естественен интерес о сохранении у исходного стержня привычных физически свойств типа положительности функции влияния или осцилляционных спектральных свойств. С математической точки зрения эта ситуация, когда $p(x) \equiv 0$ при $x > \xi$, означает, что исходное уравнение (1) на $[0, l]$ как бы меняет порядок: слева от точки ξ оно имеет четвертый порядок, а справа - второй. При этом полезно сразу обратить внимание на главную математическую проблему: первое слагаемое в уравнении (1) при подстановке в него решения этого уравнения имеет крайне неприятную особенность: функция $p(x)u''(x)$ имеет вместе с $p(x)$ в точке скачок (если только $u''(\xi) \neq 0$). И последующее дифференцирование $\frac{d}{dx}(pu'')(x)$ этой функции должно порождать в $x = \xi$ дельта-функцию. Ясно, что очередное дифференцирование $\frac{d}{dx}(pu'')'(x)$ порождает в точке $x = \xi$ существенно более серьезную чем дельта-функция особенность. Мы изучаем еще более "испорченную" задачу, когда при $x > \xi$ и функция $q(x)$ может иметь особенности типа дельта-функции.

Отмеченные обстоятельства требуют прежде всего корректного математического описания, связанное с вариационным обоснованием задачи.

Литература

[1] *S.Nicaise*// Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission, Lect. Notes Math. № 1771. Springer-Verlag, 1985. P. 532-541.

[2] *von Below J.*// A characteristic equation associated to an

eigenvalue problem on c^{∞}-network, Linear Algebra and appl. 1985. V.71. P. 309-325.

[3] *Б.С.Павлов, М.Д.Фаддеев*// Модель свободных электронов и задача рассеяния, ТМФ. 1983. Т.55, №2. С. 257-269.

[4] *О.М.Пенкин, Ю.В.Покорный, Е.Н.Провоторова*// Об одной векторной краевой задаче. Краевые задачи. Пермь, 1983. С. 64-70.

[5] *Ю.В.Покорный и др.*// Дифференциальные уравнения на геометрических графах, Физматлит, М., 2004.

О РАЗРЕШИМОСТИ В ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ

Звягин А.В. (Воронеж)

zvyagin@math.vsu.ru

Рассматривается следующая краевая задача для системы уравнений, описывающей стационарное движение слабых водных растворов полимеров:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa \operatorname{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) + \operatorname{grad} p = f, \quad x \in \Omega; \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2)$$

где v - вектор-функция скоростей в точках области Ω пространства $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$, с границей $\partial\Omega$, p - функция давления, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij})$, $\mathcal{E}_{ij} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ - тензор скоростей деформации, f - плотность внешних сил, ν - кинематический коэффициент вязкости, а $\varkappa$ - время запаздывания.

В работе [1] доказана разрешимость этой краевой задачи в пространстве V (V — замыкание $\mathcal{V} = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$). Однако, представляет интерес разрешимость этой задачи в более узком смысле. Введем пространство V^{α}.

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to H$ - проектор Лере. Рассмотрим в пространстве V оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в пространстве H до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с $V^2 = W_2^2(\Omega)^n \cap V$. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в H. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ - собственные значения оператора A. Положим $E_\infty = \{v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j \ : \ v_j \in \mathbb{R}\}$, где N зависит от v и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме $||v||_\lambda = (\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2)^{1/2}$.

Определение. Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1)-(2) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^3$ равенству:

$$-\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx -$$
$$- \frac{\varkappa}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$
$$- \frac{\varkappa}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (3)$$

Теорема. Пусть $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1)-(2) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.

Разрешимость задачи (1)-(2) в указанном смысле представляет интерес с такой точки зрения. В работе [2] доказано существование глобального аттрактора для слабых решений соответствующей начально-краевой задачи для эволюционной системы. Естественно встает вопрос о полном или частичном описании этого глобального аттрактора. Поскольку стационарные решения (если они есть) входят в глобальный аттрактор, то естественно возникает задача о слабой разрешимости краевой задачи, соответствующей использованным функциональным пространствам и определениям решения. Это и показывается в настоящем докладе.

Литература

1. Звягин А.В. *О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров,* Известия вузов.Математика, N2, 103-105 (2011).

2. Кондратьев С.К. *Об аттрактарах модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров,* Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика, N1, 117-138 (2010).

КАЧЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ ДОЛЖНОСТНЫХ ЛИЦ СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

Змаева С.А., Житенев С.А., Плотникова И.Н., Байбеков Д.В.

Сетецентрические системы связи и управления являются одной из приоритетных технологических платформ, разработка теории и практическая реализация которых актуальны для нашей страны. За рубежом, по нашим данным, сетецентрические системы разрабатываются только для военных приложений. Особенности нашей страны (протяженность, состояние инфраструктуры и др.) требуют создания единого информационного пространства (ЕИП) и эффективных технологий его использования практически во всех сферах деятельности.

Конечными пользователями ЕИП являются должностные лица (в частном случае – обыватели), осуществляющие оценку обстановки (на рынке, предприятии, поле боя и т.д.) и выработку (принятие) решений по результатам этой оценки. Поэтому для проектирования сетецентрических систем необходимы так называемые функциональные модели работы должностных лиц. Эта работа, как правило, интеллектуальная.

Анализ научной литературы по проблеме моделирования интеллектуальной работы человека, опубликованной за последние 50 лет, позволил сделать вывод о целесообразности разработки требуемых функциональных моделей на основе методов статистической теории последовательных решений. Причем наиболее адекватной может быть модель оптимальной усеченной последовательной процедуры проверки многих гипотез. Однако математическое описание и анализ такой процедуры в общем случае возможно только численными методами. Это повышает риск принятия при проектировании сетецентрических систем связи и управления неоптимальных решений. Для снижения этого риска необходимы приближенные аналитические модели оптимальных усеченных последовательных процедур проверки многих гипотез, отражающие их закономерности на количественно-качественном уровне.

В докладе представляются результаты исследований по разработке приближенных аналитических моделей оптимальных усеченных последовательных процедур проверки многих гипотез и постановки задач дальнейших исследований.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ СТАЦИОНАРНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Зубова С.П. (Воронеж)

spzubova@mail.ru

Для динамической системы, описываемой уравнением

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)u(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u \in R^m$; $B(t)$, $D(t)$ — матрицы соответствующих размеров, $t \in [0, T]$, *полная управляемость* означает существование вектор–функции $u(t)$ такой, что уравнение (1) с этой функцией имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям

$$x(0) = x^0, \quad x(t) = x^T,$$

$\forall x^0$, $x^T \in R^n$.

В различных направлениях экономики, в химических процессах, в электрических сетях ... есть системы, в которых желательна стабильность, стационарность , неизменяемость состояния системы x с течением времени. К примеру, уравнением (1) описывается работа многокамерной нагревательной печи , где $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$, u^i — расход топлива в i–ой печи; $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, x^j —температура в j–ой камере. Компоненты b_{ij} матрицы $B(t)$ описывают влияние расхода топлива j–ой печи на температуру в i–ой камере, а компоненты a_{ij} матрицы $A(t)$ — возвратное поступление тепла от i–ой камеры в тепловую сеть, подводящую тепло к j–ой камере.

Существует ли управление, под воздействием которого температура в каждой камере постоянна и равна произвольно заданной величине? Если такого управления нет, то в каких камерах можно осуществить постоянный желаемый температурный режим?

Назовём систему *стационарно управляемой*, если существует управление $u(t)$, под воздействием которого

$$x(t) \equiv x(0) = x^0, \quad t \in [0, T], \quad \forall x^0 \in R^n.$$

Утверждение. *Если D — постоянная матрица и не сюръективная, то свойства полной управляемости и стационарной управляемости несовместимы.*

Это означает, что перевести полностью управляемую систему с постоянным несюръективным D из произвольного состояния x^0 в момент $t = 0$ в то же самое состояние в момент времени $t = T$ по прямой траектории невозможно. Можно лишь по переменной траектории.

В случае переменной матрицы $D(t)$ для полностью управляемой системы произвольное стационарное состояние возможно.

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *была полностью управляемой и стационарно управляемой, необходимо и достаточно выполнения следующих свойств:*

1) $Q(D(t))B(t) \equiv 0, \quad t \in [0, T]$;

2) *система*

$$\dot{x}_1(t) = B_1(t)x_1(t) + D_1(t)u_1(t)$$

является полностью управляемой.

Здесь $Q(D(t))$ — проектор на $CokerD(t)$, то есть на прямое дополнение к $ImD(t)$ (к образу $D(t)$) в R^n,

$$x_1(t) = Q(D(t))x(t), \quad u_1(t) = (I - Q(D(t)))x(t),$$

$$B_1(t) = \dot{Q}(D(t))Q(D(t)), \quad D_1(t) = \dot{Q}(D(t))(I - Q(D(t))).$$

Однако, в некоторых задачах управления желательна стационарность не всего состояния системы, а лишь некоторых компонент системы. Система (1) обладает некоторой "свободой а именно: если система полностью управляема, то некоторые компоненты $x(t)$, или их линейные комбинации, могут быть произвольно заданными пользователем, заказчиком.

В докладе будут рассмотрены два метода определения этих "свободных" компонент $x(t)$ или их линейных комбинаций.

Литература

[1]. Зубова С. П., Раецкая Е. В., Ле Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // Автоматика и телемеханика. —2008. — № 11. — С. 41–47.

ОБ АКТУАЛЬНОСТИ ЗАДАЧИ НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ

Зубова С.П., Раецкая Е.В., Фам Туан Кыонг (Воронеж)

spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru, tuancuonghd@yahoo.com

Задача наблюдения является фундаментальной задачей теории автоматического управления. Очевидно, что необходимым условием построения обратной связи является наличие полной информации о состоянии системы. Однако, в реальных условиях исследователь, как правило, сталкивается со значительными трудностями при установке и обслуживании контрольно-измерительных устройств (датчиков), предоставляющих информацию о компонентах вектора состояния системы. Зачастую свойства системы таковы, что измерить некоторые компоненты вектора состояния системы вообще не представляется возможным. Таким образом, исследователь вынужден решать задачу наблюдения, что обусловлено объективными причинами. И только после получения полной информации о векторе состояния системы (по измеряемым входным и выходным данным), можно приступать к решению задачи управления (в теории автоматического управления - к построению обратной связи).

При решении задачи управления для системы:

$$E\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + Du(t) \tag{1}$$

с необратимой матрицей E, если построено необходимое управление $u(t)$, то возникает вопрос о единственности состояния $x(t)$ системы (1), соответствующего найденному управлению, то есть приходим к задаче наблюдения системы (1) с фиксированной функцией $u(t)$.

К примеру, для системы:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + u_1(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} + \frac{dx_3(t)}{dt} = u_2(t),$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_3(t)}{dt} = x_1(t) + u_1(t) + u_2(t), \tag{2}$$

$$x_2(t) + x_3(t) = F(t)$$

решается задача управления:
требуется найти управление $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, под воздействием которого состояние системы $x(t)$ переходит из заданного состояния

$$x(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

в заданное состояние

$$x(0) = \begin{pmatrix} a \\ T \\ 1-T \end{pmatrix}, \forall a \in C. \tag{4}$$

Такое управление существует:
$u(t) = \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \end{pmatrix}$, но ему отвечают по крайней мере два состояния:
$x(t) = \begin{pmatrix} a \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$ и $x(0) = \begin{pmatrix} ae^t \\ (1-a)t \\ (a-1)t+1 \end{pmatrix}$.

При этом первая функция $x(t)$ удовлетворяет обоим заданным условиям (3),(4), а вторая только условию (3). Неединственность состояния $x(t)$ системы (2) с указанным управлением $u(t)$ означает её ненаблюдаемость. Из ненаблюдаемости системы (2) автоматически следует её неуправляемость.

Таким образом, решение задачи наблюдения для дескрипторных систем является действительно *актуальной задачей.*

Литература

1. Зубова С.П. Об инвариантности состояния линейной системы управления относительно некоторых возмущений /С.П. Зубова, Е.В. Раецкая/ Математические методы и приложения. Труды семнадцатых математических чтений МГСУ. Москва: Изд-во РГСУ, 2008.-С.63-69.

2. Раецкая Е. В. Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем. Дисс. канд-физ-мат наук. Воронеж, 2004.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ СЖАТИИ

Иванищева О.И., Трофимов В.Г. (Воронеж)

ivanischeva_ oi@mail.ru

О возможности локального осесимметричного выпучивания поверхности упругого полупространства при сжатии представлено в работе [1]. В данном сообщении в трехмерной постановке исследуется неосесимметричное локальное выпучивание поверхности трансверсально-изотропного полупространства при его сжатии. Докритические деформации являются малыми и однородными. Нижнее полупространство сжимается в двух взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей Ox_1 и Ox_2 нагрузкой интенсивности p. Поверхность полупространства $x_3 = 0$ свободна от нагрузок.

Используем линеаризированные уравнения устойчивости относительно возмущений перемещений [2]

$$(a_{11} - p)u_{1,11} + (G_{1,2} - p)u_{1,22} + Gu_{1,33}+$$

$$+(G_{12} + a_{12})u_{2,12} + (G + a_{13})u_{3,13} = 0$$

$$(G_{12} + a_{12})u_{1,12} + (G_{12} - p)u_{2,11}+$$

$$+(a_{11} - p)u_{2,22} + Gu_{2,33} + (G + a_{13})u_{3,23} = 0$$

$$(G + a_{13})u_{1,13} + (G + a_{13})u_{2,23} + (G - p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + a_{33}u_{3,33} = 0$$

Эта система двумерным преобразованием Фурье по координатам x_1 и x_2 преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображений возмущений перемещений. Последняя система сводится к одному уравнению четвертого порядка.

Локальное выпучивание поверхности характеризуется затуханием возмущений перемещений в глубину от поверхности $x_3 = 0$ при $x_3 \to -\infty$, кроме того возмущения перемещений также должны затухать при $|x_1| \to \infty$ и $|x_2| \to \infty$. Этим свойством должны обладать и изображения возмущений перемещений. В такой постановке получены изображения возмущений перемещений. Оригинал локального выпучивания имеет вид

$$u_3(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{C_1 x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + (k_1 x^3 - c)^2\right)^{3/2}} + \frac{C_2 x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + (k_{21} x_3 - c)^2\right)^{3/2}},$$

где c, C_1, C_2 — произвольные постоянные, коэффициенты содержат параметры среды и нагрузку. Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используются граничные условия на свободной поверхности, которые также подвергнуты преобразованию Фурье. Подставляем изображения возмущений перемещений в граничные условия, получаем алгебраическую систему линейных однородных уравнений. Из условия существования ненулевого решения системы следует характеристическое уравнение, из которого определяются «критические» нагрузки $p_{\text{кр}}$. Анализ проведенных вычислений показал: что локальное поверхностное выпучивание возможно только в средах с малой сдвиговой жесткостью $G = G_{13} = G_{23}$; в других средах «критические» нагрузки $p_{\text{кр}}$ имеют очень большую величину и являются нереальными.

Литература

1. Иванищева О.И., Трофимов В.Г. Осесимметричное выпучивание упругого полупространства при сжатии. ПМТФ, 1995, Т. 36, № 4, с. 152–155.

2. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наукова Думка, 1971, с. 276.

О ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ ОТ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Иванова О.А., Мелихов С.Н. (Ростов-на-Дону)

neo_ivolga@mail.ru, melih@math.rsu.ru

Через ω обозначим пространство Фреше всех числовых последовательностей с топологией покоординатной сходимости. Для локального выпуклого пространства E символ E' обозначает топологическое сопряженное к E.

Последовательность $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, называется последовательностью Айдельхайта (в E') [1], если (линейное непрерывное) отображение $R : E \to \omega,\ x \mapsto (\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, сюръективно.

Если $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность Айдельхайта в E', то возникает естественный вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного (коротко: ЛНПО) к *сюръективному* оператору $R : E \to \omega$, то есть такого линейного непрерывного оператора $\Pi : \omega \to E$, что $R \circ \Pi(c) = c$ для любого $c \in \omega$.

Всюду далее E — пространство Фреше с возрастающей фундаментальной последовательностью преднорм $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $\mathrm{Ker} p_n := \{x \in E : \ p_n(x) = 0\}, \ n \in \mathbb{N}$. В работе [2] был доказан следующий критерий существования ЛНПО к оператору $R : E \to \omega$:

Теорема 1. Пусть E — пространство Фреше с фундаментальной последовательностью преднорм p_n, $n \in \mathbb{N}$; $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, — последовательность Айдельхайта в E'. Оператор $R : E \to \omega$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда существуют элементы $x_j \in E$ такие, что $\varphi_k(x_j) = \delta_{k,j}$ для любых $k, j \in \mathbb{N}$ и для любого n существует j_n такое, что $p_n(x_j) = 0$ для каждого $j \geqslant j_n$.

С помощью теоремы 1 доказан новый критерий существования ЛНПО.

Теорема 2. Пусть E — пространство Фреше; $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность Айдельхайта в E'. Оператор $R : E \to \omega$, $x \to (\varphi_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$, имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда существует возрастающая фундаментальная система преднорм $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в E такая, что найдется неубывающая последовательность $k_n \in \mathbb{N}$, для которой выполняются следующие условия:

(i) $\varphi_j\Big|_{\mathrm{Ker}\tilde{p}_n} = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant k_n, \ n \in \mathbb{N};$

(ii) $\{\varphi_j\Big|_{\mathrm{Ker}\tilde{p}_n}\}_{j\geqslant k_n+1}$ – последовательность Айдельхайта в $(\mathrm{Ker}\,\tilde{p}_n)'$ ($\mathrm{Ker}\,\tilde{p}_n$ наделяется индуцированной из E топологией).

Приводятся конкретные примеры применения теорем 1 и 2 к пространству функций, аналитических на открытом множестве в $\mathbb{C}$, и к пространству функций, бесконечно дифференцируемых на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$.

Литература

1. M.Eidelheit, Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, Studia Math. 6 (1936), S. 139–148.

2. О.А.Иванова, С.Н.Мелихов. О правых обратных, определяемых последовательностями Айдельхайта // Владикавк. Мат. Журн., 2010, Т.12, вып. 2. С. 24 - 30.

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ НА НЕКОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ[1]

Игнатьев М.Ю. (Саратов)

ignatievmu@info.sgu.ru

Пусть G - геометрический граф с вершиной v_1 и ребрами r_0, r_1, где r_0 - луч с началом в v_1, r_1 - цикл $[v_1, v_1]$ длины π. На G рассмотрим дифференциальное выражение ℓy:

$$\ell_j y_j(x_j) = -y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j), \quad j = 0, 1 \tag{1}$$

с вещественным суммируемым потенциалом $q(x) = (q_0(x_0), q_1(x_1))$, $(1 + x_0)\, q_0(x_0) \in L(0, \infty)$.

Обозначим через Λ - множество собственных значений оператора L, порожденного в $L_2(G)$ дифференциальными выражениями (1) и стандартными условиями склейки. Рассмотрим на G функцию $\psi(x, \rho) = (\psi_0(x_0, \rho), \psi_1(x_1, \rho))$, которую определим как решение уравнения $\ell_j \psi_j = \rho^2 \psi_j, j = 0, 1,\ Im\rho > 0$, удовлетворяющее стандартным условиям склейки и нормированное асимптотикой: $\psi_0(x_0, \rho) = \exp(-i\rho x_0)(1 + o(1)), \quad x_0 \to \infty$.

Теорема 1. *$\psi_0(x_0, \rho)$ мероморфна в верхней полуплоскости. При $\rho \in \mathbf{R}, \rho \neq 0$ справедлива асимптотика*

$$\psi_0(x_0, \rho + i0) = \exp(-i\rho x_0) + s(\rho) \exp(i\rho x_0) + o(1), \quad x_0 \to \infty.$$

Множество полюсов Z функции $\psi_0(x_0, \rho)$ таково, что $\rho \in Z \Rightarrow \rho^2 \in \Lambda$. Все полюса простые, для вычетов $\psi_{0,\langle -1 \rangle}(x_0, \rho_0)$, $\rho_0 \in Z$ справедлива асимптотика:

$$\psi_{0,\langle -1 \rangle}(x_0, \rho_0) = \alpha(\rho_0) \exp(i\rho_0 x_0)(1 + o(1)), x_0 \to \infty.$$

Данные рассеяния определим как набор $J := \left\{ s(\rho), \rho \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \Lambda, \alpha(\rho), \rho \in Z, \omega_n, n = \overline{1, \infty} \right\}$, где $\omega_n, n = \overline{1, \infty}$ - знаки из периодической задачи на r_1[1].

Теорема 2. *Из $J = \tilde{J}$ следует $q = \tilde{q}$, т.е. задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал.*

Литература

1. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. Москва: Наука, 1984.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ[2]

Иофина Т.В. (Саратов)
iofinat@mail.ru

Пусть $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — система Виленкина, построенная по ограниченной последовательности $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{N}$ (см. [1, $1.5]). Для $f \in L[0,1)$ $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $L^p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, и $C^*[0,1)$ — пространство функций, непрерывных относительно $\mathbf{P}$-ичного сдвига, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$. $\omega^*(f,\delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x\ominus h) - f(x)\|_p$ — модуль непрерывности в этих пространствах. Будем говорить, что $\omega \in \Omega$, если $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на [0,1), $\omega(0) = 0$. Тогда $f \in H_p^\omega[0,1)$, если $f \in L_p[0,1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$ и $\omega^*(f,\delta)_p \leqslant C\omega(\delta)$; $\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$. При $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, пространство $H_p^\omega[0,1)$ обозначается через $Lip^*(\alpha,p)$. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая к 0 положительная последовательность. Тогда $E_p(\varepsilon)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$, $p = \infty$, таких что $\|f\|_{E_p(\varepsilon)} = \|f\|_p + \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k(f)_p/\varepsilon_k < \infty$.

Назовем $B_r(f)(x) = e^{-r}\sum_{n=0}^{\infty} r^n S_{n+1}(f)(x)/n!$ средними Бореля. Пусть также $A_{r,p} = 1$, при $1 < p < \infty$ или $A_{r,p} = \ln(r+2)$, при $p = 1, \infty$.

В [2] изучались оценки приближений средними Бореля тригонометрических рядов Фурье в $L_{2\pi}^p$ и $C_{2\pi}$ через модули непрерывности различных порядков. В случае мультипликативных систем удобнее получать оценки в терминах наилучших приближений по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, а вместо H_p^ω рассматривать $E_p(\varepsilon)$, которые можно назвать пространствами с метрикой типа Гёльдера.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$. Тогда*
$\|B_r(f) - f\|_p \leqslant CA_{r,p}\sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(f)_p$.

Теорема 2. *Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, последовательности $\varepsilon, \delta, \lambda$ таковы, что ε_n, δ_n и $\lambda_n = \varepsilon_n/\delta_n$ положительны и убывают*

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00097-а), гранта президента РФ (*проект* НШ-4383.2010.1)

к 0, причем $\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\varepsilon_{k+1}=O(e^n\varepsilon_{n+1})$. *Тогда справедливо неравенство* $\|B_r(f)-f\|_{E_p(\delta)}\leqslant CA_{r,p}\lambda_{[r]}$.

Терема 3. *Пусть* $\omega,\mu,\kappa\in\Omega$ *и* $\omega(\delta)/\mu(\delta)=\kappa(\delta)$. *Если для* $\varepsilon_k=\omega(1/k)$ *выполнено условие теоремы 2,* ω *удовлетворяет условию* $\omega(2\delta)\leqslant C\omega(\delta)$ *при* $\delta\in(0,1/2)$, *то*
$\|B_r(f)_p-f\|_{p,\mu}\leqslant CA_{r,p}\kappa(f,1/r)$.

Следствие 1. *Пусть* $f\in Lip^*(\beta,p)$, $\mu(\delta)=\delta^\alpha$, $0<\alpha<\beta$. *Тогда при* $r\geqslant 1$
$\|B_r(f)-f\|_{p,\mu}\leqslant CA_{r,p}r^{\alpha-\beta}$.

Литература

1. Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения, Наука, М., 1987.

2. L. Rempulska, K. Tomczak. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases, *Proc. of A.Razmadze Math. Institute*, **140** (2006), 141-153.

СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ СВОЙСТВАМИ ОПЕРАТОРОВ A И P_-A^*[1]

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Лемма. Для всякого линейного оператора A в пространстве Крейна следующие два условия эквивалентны:

1) $A\in\Gamma$.

2) $P_-A\in\Gamma$.

Далее, для всякого линейного оператора $A\in\Gamma$ имеет смысл преобразование Потапова-Гинзбурга:

$$B=\delta(A)=(P_-+P_+A)\cdot(P_++P_-A)^{-1}.$$

Теорема 1. Для всякого линейного оператора $A\in\Gamma$ имеет место формула:

$$\delta(P_-A)=P_-\cdot\delta(A)$$

С помощью этой формулы устанавливаются все последующие результаты.

Теорема 2. Пусть $A\in\Gamma$.

Тогда оператор

$$(P_++P_-A)^{-1}$$

ограничен в том и только том случае, когда

$$P_-A\in\Gamma_\beta$$

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 08-01-00566-а.

для некоторого $\beta \geqslant 0$.
Здесь же описаны соотношения между величинами

$$||(P_+ + P_- A)^{-1}|| \quad \text{и} \quad \beta.$$

Теорема 3. Если $A \in \Gamma_\alpha$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, то

$$P_- A \in \Gamma_\beta$$

для некоторого $\beta \geqslant 0$. При этом

$$\beta = ||P_- B||^2 \quad \text{и} \quad \beta \leqslant \alpha.$$

Построен пример, показывающий, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. из условия

$$P_- A \in \Gamma_\beta \text{ для некоторого } \beta \geqslant 0$$

не вытекает условие

$$A \in \Gamma_\alpha \text{ для некоторого } \alpha \geqslant 0.$$

Установлены различные достаточные условия, обеспечивающие справедливость обратного утверждения. Например,

Теорема 4. Пусть выполнены условия:
1) $P_- A \in \Gamma_\beta$ для некоторого $\beta \geqslant 0$.
2) Оператор $P_+ A$ ограничен.
Тогда

$$A \in \Gamma_\alpha$$

для некоторого $\alpha \geqslant 0$, при этом справедливо неравенство

$$\alpha \leqslant \beta + ||P_+ A||^2 \cdot (1 + \beta).$$

ОБ УРАВНЕНИЯХ С (A, ψ)-УПЛОТНЯЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Калабухова С.Н. (Воронеж)
Sv-tik.86@mail.ru

Разрешимость уравнений вида $A(x) - f(x) = 0$, где A – непрерывный линейный сюръективный оператор, а f – вполне непрерывный оператор, достаточно хорошо изучена в работах [1], [2]. Естественно возникает идея изучить уравнения такого же вида, но когда отображение f является уплотняющим относительно оператора A. В настоящей работе и рассматривается эта задача.

Определим понятие меры некомпактности множества относительно оператора.

Пусть E, E_0 - банаховы пространства. Пусть $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Рассмотрим отображение $\psi_A : P(E) \to R$, определенное следующим образом:

$$\psi_A(\Omega) = \psi(A(\Omega)).$$

Отображение ψ_A является мерой некомпактности. Эту меру некомпактности ψ_A будем называть *обратным образом меры некомпатности ψ при действии оператора A*.

Пусть $A : E \to E_1$ – линейный непрерывный сюръективный оператор, $f : D(f) \subset E \to E_0$ – непрерывное отображение.

Определение 1. *Отображение f называется (A, ψ)-уплотняющим, если для любого множества $Q \subset D(f)$ из неравенства $\psi(f(Q)) \geqslant \psi_A(Q)$ вытекает равенство $\psi_A(Q) = 0$.*

Пусть $x_0 \in E$ - некоторая точка, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $f : B_R[x_0] \to E_0$ – непрерывное (A, ψ)-уплотняющее отображение.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) = f(x). \tag{1}$$

Пусть $N(A, f)$ - множество решений этого уравнения.

Теорема 1. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство $\|A(x_0) - f(x)\| \leqslant \frac{R}{k}$, то уравнение (1) имеет решение.*

Доказательство этой теоремы содержится в [3].

В докладе будут рассмотрены некоторые приложения этой теоремы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной.

Литература

[1] Ricceri B. On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations/B. Ricceri // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 1997. – V. 325, no. 1. – P.65–70.

[2] Гельман Б.Д. Об одном классе операторных уравнений/Б.Д. Гельман// Матем. заметки. – 2001. – Т.70, № 4. – С.544–552.

[3] Гельман Б.Д., Калабухова С.Н. Об уплотняющих возмущениях линейных
сюрьективных операторов (в печати).

О РЕГУЛЯРНОЙ СХОДИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В БАНАХОВЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Калитвин А.С. (Липецк)
kalitvin@mail.ru

При приближенном решении уравнения с частными интегралами

$$x(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \iint_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \equiv (Kx)(t,s) + f(t,s), \qquad (1)$$

оно заменяется „близкими“ уравнениями $x = K_i x + f$ с частными интегралами. При этом важное значение имеет сходимость в выбранном пространстве последовательности операторов K_i к оператору K, в частности, сходимость к оператору K последовательности операторов K_i с вырожденными ядрами. В заметке приводятся условия регулярной сходимости последовательности операторов K_i $(i = 1, 2, ...)$ к оператору K в банаховых идеальных пространствах (БИП), из которой следует сходимость этой последовательности к оператору K по операторной норме.

Пусть X и Y — БИП с носителем $D = T \times S$, где T и S — множества с полными σ - конечными непрерывными лебеговыми мерами, Y/X — пространство мультипликаторов, $\mathcal{L}(X,Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y (эти и используемые далее определения и свойства пространств и операторов можно найти в [1,2]).

Через $\mathcal{L}_r(X,Y)$ обозначим пространство действующих из X в Y регулярных операторов с нормой Л.В. Канторовича. В силу [1,2] $K \in \mathcal{L}_r(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $c \in Y/X$, а определяемые вторым, третьим и четвертым слагаемыми правой части уравнения (1) операторы L, M, N принадлежат $\mathcal{L}_r(X,Y)$, т.е. из X в Y действуют операторы $|L|, |M|, |N|$, которые получаются из операторов L, M, N при замене ядер l, m, n ядрами $|l|, |m|, |n|$. Напомним, что регулярная сходимость последовательности действующих

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

из БИП X в БИП Y операторов K_i к оператору K, означает, что $|||K_i - K|||_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ при $i \to \infty$, а абсолютная ограниченность оператора $A \in \{L, M, N\}$ (последовательности операторов A_i) означает, что $||P_n A||_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ при $n \to \infty$ ($\sup_i ||P_n A_i||_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ при $n \to \infty$) для любой убывающей последовательности множеств $D_n \subset D$ с пустым пересечением, где P_n—оператор умножения на характеристическую функцию множества D_n. Пусть $\mathcal{R}_l(X,Y)$, $\mathcal{R}_m(X,Y)$, $\mathcal{R}_n(X,Y)$ — множества ядер регулярных операторов L, M, N, действующих из X в Y, а $\mathcal{R}_l^0(X,Y)$, $\mathcal{R}_m^0(X,Y)$, $\mathcal{R}_n^0(X,Y)$ — их подмножества с абсолютно непрерывной нормой.

Теорема. Если $c_i \to c$ в Y/X, последовательности функций $l_i \in \mathcal{R}_l^0(X,Y)$, $m_i \in \mathcal{R}_m^0(X,Y)$, $n_i \in \mathcal{R}_n^0(X,Y)$ сходятся по мере к фунциям l, m, n соответственно и множества операторов $L_i, M_i, N_i (i = 1, 2, ...)$ абсолютно ограничены, то последовательности операторов L_i, M_i, N_i, $K_i = C_i + L_i + M_i + N_i$ сходятся регулярно к операторам L, M, N, K соответственно.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами.— Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

О НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА БАРБАШИНА

Калитвин В.А. (Липецк)

kalitvin@gmail.com

В работе изучается интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ)

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} - \int_G m(t,s,\sigma) \frac{\partial x(t,\sigma)}{\partial t} d\sigma =$$

$$= c(t,s)x(t,s) + \int_G k(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + f(t,s) \qquad (1)$$

с начальным условием $x(0,s) = \varphi(s)$, где G — отрезок $[0,b]$ или прямоугольник $[0,b] \times [0,d], t \in [0,a]$, $s \in G$, $m(t,s,\sigma)$, $k(t,s,\sigma,u)$, $f(t,s)$ и $\varphi(s)$ — заданные функции. ИДУ (1) является естественным обобщением ИДУ Барбашина, которое получается из (1) при $m(t,s,\sigma) \equiv 0$. Различные задачи для линейных и нелинейных ИДУ

Барбашина детально исследованы в [1], при этом они интерпретировались как некоторые задачи для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве или сводились к интегральным уравнениям с частными интегралами. Аналогичные методы применимы к исследованию начальных и краевых задач для уравнения (1).

Пусть $D = [0,a] \times G$. Через $C(L^1)$ обозначим пространство измеримых на $D \times G$ функций $a(t,s,\sigma)$, которые при каждом $(t,s) \in D$ принимают значения в $L^1 = L^1(G)$ и при любом $(t_0,s_0) \in G$ $\lim\limits_{(t,s)\to(t_0,s_0)} \|a(t,s,\cdot) - a(t_0,s_0,\cdot)\|_{L^1} = 0$. Под решением уравнения (1) понимается функция $x(t,s)$, непрерывная вместе с частной производной $x'_t(t,s)$ по совокупности переменных.

Пусть $m \in C(L^1), c, f \in C(D)$, $\varphi \in C(G)$, а функция $k(t,s,\sigma,u)$ непрерывна на $D \times G \times (-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет условию Липшица $|k(t,s,\sigma,u) - k(t,s,\sigma,v)| \leqslant N|u-v|$. Через $M(t)$ обозначим оператор $M(t)y(s) = \int_G m(t,s,\sigma)y(\sigma)d\sigma$ $(t \in [0,a])$, а через M — оператор $Mx(t,s) = \int_G m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$. В силу [2] обратимость в $C(D)$ оператора $I - M$ равносильна обратимости в $C([0,a])$ при каждом $t \in [0,a]$ оператора $I - M(t)$, которая в виду компактности оператора $M(t)$, равносильна тому,что однородное интегральное уравнение $y(s) = \int_G m(t,s,\sigma)y(\sigma)d\sigma$ имеет при каждом $t \in [0,a]$ только нулевое решение. При этом $(I - M)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_G r(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, где резольвентное ядро $r \in C(L^1)$.

Если теперь однородное интегральное уравнение $y(s) = M(t)y(s)$ имеет в $C(G)$ только нулевое решение при каждом $t \in [0,a]$, то существует оператор $(I-M)^{-1}$. Применение его к обеим частям уравнения (1) приводит это уравнение с заданным начальным условием к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению Барбашина с таким же начальным условием. Отсюда и [3] вытекае, что при любых $f \in C(D)$ и $\varphi \in C(G)$ уравнение (1) с начальным условием $x(0,s) = \varphi(s)$ имеет единственное решение.

Численное решение уравнения (1) с заданным начальным условием легко строится с применением системы Scilab или языка программирования Python.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций // Дифференциальные урав-

нения, 2006. — Т. 42, №9. — С. 1194 – 1200.

3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ[1]

Канатов А.В., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

alexkanatov@yandex.ru; msumin@sinn.ru

Доклад посвящен изучению алгоритма двойственного типа [1] применительно к решению нелинейной задачи математического программирования общего вида в гильбертовом пространстве с ограничением типа равенства, содержащим аддитивно входящий в него бесконечномерный параметр

$$I_0(z) \to \inf, \;\; I_1(z) = p, \;\; z \in D \subset Z, \tag{1}$$

где $I_0 : D \to R^1$ – непрерывный функционал, $I_1 : D \to H$ – вполне непрерывный оператор, $D \subset Z$ – замкнутое ограниченное множество, Z, H – гильбертовы пространства, $p \in H$ – параметр.

Основная цель двойственного формализма в нелинейной задаче (1), в которой, вообще говоря, может и не быть оптимального элемента, состоит в конструктивном построении в ней минимизирующей последовательности допустимых элементов. В основе формализма лежит конструкция модифицированной функции Лагранжа, устройство которой полностью определяется дифференциальными свойствами полунепрерывной снизу функции значений (S-функции) $\beta : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ задачи (1):

$$\beta(p) \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \beta_\varepsilon(p), \qquad \beta_\varepsilon(p) = \begin{cases} \inf\limits_{z \in D_p^\varepsilon} I_0(z), & D_p^\varepsilon \neq \varnothing; \\ +\infty, & D_p^\varepsilon = \varnothing. \end{cases}$$

Здесь $D_p^\varepsilon \equiv \{z \in D : \|I_1(z) - p\| \leqslant \varepsilon\}, \;\; \varepsilon \geqslant 0$.

---

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)” Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и ФЦП“’Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (проект НК-13П-13).

В докладе показывается, что если функция значений обладает определенными дифференциальными свойствами в точке p (обобщенная субдифференцируемость в смысле непустоты проксимального субградиента или субдифференциала Фреше), то в задаче (1) существует так называемый обобщенный вектор Куна-Таккера, что, в свою очередь, влечёт за собой наличие седловой точки у соответствующей модифицированной функции Лагранжа. Центральным при этом является предположение о возможности сколь угодно точной минимизации модифицированной функции Лагранжа. Это предположение в совокупности с обобщенной субдифференцируемостью функции значений конструктивно приводит к построению минимизирующей последовательности (в смысле Дж. Варги) в исходной оптимизационной задаче. Обсуждается также возможность распространения формализма конструирования минимизирующей последовательности на случай задачи (1) с ограничениями-неравенствами. Существенным моментом при обосновании формализма двойственной регуляризации [1] в нелинейной задаче (1) является необходимость использования методов современного негладкого (нелинейного) анализа.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т47. №4. С. 602-625.

ПРОЕКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ СЧЕТНЫХ ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛОВ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ ЦЕЛЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Капитонова Е.В., Мелихов С.Н. (Ростов-на-Дону, Владикавказ)

melih@math.rsu.ru

Пусть Ω – локально замкнутое выпуклое открытое подмножество $\mathbb{R}^N$ (класс таких множеств Ω включает в себя все выпуклые компактные и выпуклые открытые подмножества $\mathbb{R}^N$); $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность (выпуклых) компактов в Ω; ω – некоторая весовая функция, как в [1]; H_n – опорная функция компакта K_n, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $w_{nk}(z) := \exp\left(-H_n(\mathrm{Im} z) - \frac{1}{k}\omega(z)\right), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad n, k \in \mathbb{N}.$

Введем весовые пространства целых функций

$$H_{nk}(\mathbb{C}^N) := \{f \in H(\mathbb{C}^N) | \ \ \|f\|_{nk} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| w_{nk}(z) < +\infty\},$$

$$n, k \in \mathbb{N}; WH(\mathbb{C}^N) := \mathrm{ind}_n \mathrm{proj}_k H_{nk}(\mathbb{C}^N).$$

Пространство $WH(\mathbb{C}^N)$ топологически изоморфно (посредством преобразования Фурье-Лапласа) сильному сопряженному к пространству ультрадифференцируемых на Ω функций типа Румье, определяемому ω. Ассоциированное с (w_{nk}) семейство весов $\overline{W}$ состоит из всех полунепрерывных сверху функций $\overline{w} : \mathbb{C}^N \to [0, +\infty)$ таких, что для любого n существуют $\alpha_n > 0$ и $k = k(n)$, для которых $\overline{w} \leqslant \alpha_n w_{nk}$ на $\mathbb{C}^N$. Проективная оболочка индуктивного предела $WH(\mathbb{C}^N)$ определяется следующим образом:

$$H\overline{W}(\mathbb{C}^N) := \{f \in H(\mathbb{C}^N) | \ \ \|f\|_{\overline{w}} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| \overline{w}(z) < +\infty \quad \text{для любого} \ \ \overline{w} \in \overline{W}\}.$$

Топология $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ задается семейством преднорм $\| \cdot \|_{\overline{w}}$, $\overline{w} \in \overline{W}$. Пространство $WH(\mathbb{C}^N)$ непрерывно вложено в $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$.

Теорема. Пространства $WH(\mathbb{C}^N)$ и $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ совпадают алгебраически.

Подобный результат был получен ранее в [2] для открытого выпуклого множества Ω.

Получены также результаты об алгебраическом и топологическом проективном описании для индуктивного предела $WC(\mathbb{C}^N)$ пространств Фреше непрерывных функций, задаваемых весами w_{nk}, $n, k \in \mathbb{N}$.

Литература

[1] Braun R. W., Meise R., Taylor B. A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis. Result. Math. —1990.—, V.17.—C. 206–237.

[2] Bonet J., Meise R. Ultradistributions of Roumieu type and projective descriptions. J. Math. Anal. Appl. —2001.—, V.255.—C. 122–136.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ НА ЕСТЕСТВЕННЫХ ФАКУЛЬТЕТАХ ВГУ

Каплан А.В., Митягина Н.А., Петрова Е.В. (Воронеж)

Авторы этих заметок долгое время преподают математику на естественных факультетах ВГУ. Как и многие другие, мы в последние годы наблюдаем снижение уровня математической подготовки студентов этих факультетов.

Например, средняя экзаменационная оценка по высшей математике на отделении почвоведения за последние три года изменялась так: 4,45 (2008)– 4,12 (2009) – 3,58 (2010).

Это снижение заметно невооруженным взглядом и объясняется рядом очевидных причин. Обозначим некоторые из них.

Причина 1: разрыв между все более *высокими требованиями* к качеству высшего профессионального образования и все более *низким уровнем* математической подготовки выпускников школ, поступающих в университет.

По некоторым данным, анализ исходного уровня знаний первокурсников показывает, что коэффициент усвоения теоретических знаний школьного курса математики составляет 32%, а умение решать задачи – менее 20%, причем этот уровень постоянно снижается в течение ряда лет.

Проблемы:

– *как установить минимальный исходный уровень* подготовки первокурсников, необходимый для успешного изучения курса высшей математики;

– *каковы способы определения реального* исходного уровня;

– *какими должны быть формы и способы организации* – при необходимости – “*корректирующего*” курса, на который нужно еще найти время?

Причина 2: противоречие между требованиями государственного образовательного *стандарта* (ГОС), рабочими *программами* учебных курсов, составленными в соответствии с этими стандартами, и действующими учебными *планами* для разных специальностей и направлений, в рамках которых выполнить требования ГОСов просто нереально.

Например, в госстандарте для того же отделения почвоведения на высшую математику отводится 500 часов, а в действующем учебном плане предусмотрено 120 аудиторных часов (60 часов лекций и столько же практических занятий) и не предусмотрено ни одной контрольной работы. Даже добавление положенной половины от 120 часов на самостоятельную работу студентов не спасет положение, и вместо декларированных в стандарте 10 дидактических единиц почвоведы едва успевают освоить 2 (две).

Проблемы:

– как привести в соответствие стандарты, программы и учебные планы?

– как добиться нормального соотношения между работой в аудитории и внеаудиторной самостоятельной работой студентов?

Причина 3: противоречие между современными тенденциями в образовании и состоянием математического образования на естественных факультетах университета.

Большинство из нас – преподавателей математики – работает в рамках древней *традиционной* дидактической системы, которую еще в XVII веке Я.А.Коменский назвал "дидахографией", то есть сочетанием *лекционного* способа преподавания с изучением *учебников*, и которая с тех пор практически не изменилась.

Проблемы:

– каким образом преподаватели математики могут овладеть современными средствами и методами обучения?

– как использовать инновационные педагогические технологии, которые в существующих условиях обеспечивали бы достижение требуемых результатов?

Причина 4: противоречие между множеством источников информации и ограниченным количеством средств обучения, доступных студентам.

Например, неограниченный доступ в Интернет, громадное количество учебной литературы при всех плюсах вызывает и значительные трудности. Даже опытным преподавателям не так просто выбрать нужный материал или найти источники, где бы этот материал был изложен наиболее близко к тому, что хотелось бы. О студентах и говорить не приходится.

Проблемы:

– каковы должны быть средства обучения, – доступные, компактные, но достаточные для удовлетворения всех требований успешности учебного процесса?

– должен ли преподаватель использовать готовые учебники, пособия, и т.п., *или создавать собственные, новые*?

Нами обозначена лишь малая часть наиболее актуальных проблем преподавания математики, обострившихся в последнее время.

Эти проблемы не решаются при постановке *целей* и определении заданных *результатов* обучения – за нас это делают другие. Мы практически не можем повлиять на элементы того, что в теории педагогических систем называется педагогическим *базисом* (содержание обучения; студенты; преподаватели). Но изменять элементы педагогической *надстройки* (методы, средства и формы организации обучения) мы можем.

Отсюда вытекает, пожалуй, **главная проблема**, определяющая направление дальнейших исследований: *анализ и поиск* инновационных *методов* обучения математике, адекватных этим методам *средств* обучения и современных организационных *форм*, которые отвечали бы объективным изменениям в сфере образования вообще и в области университетского математического образования в частности.

ТЕОРЕМА О ПОСТРОЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРНОЙ СТРУКТУРЫ ЛАКСА

Карюк А.И. (Ставрополь)
karyuk@mail.ru

В работе рассматриваются дифференциальные операторы с матричными 3×3.

Теорема. *При выполнении условий* $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, $\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{31} \neq 0$, $\alpha_{32} \neq 0$, $\beta_{j1} = k\alpha_{j1}$, $\beta_{32} = k\alpha_{32}$, $u_{12} \neq 0$, $u = u_{13} \neq 0$, $u_{13z} \neq 0$, $v_{11} = -v_{22} = v_{33}$, $v_{23} = ku_{23}$, $v_{k1} = ku_{k1} + \frac{\alpha_{k1}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)$, $v_{32} = ku_{32} + \frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)u$, $v_{1j} = ku_{1j}$, *где j=2,3,* $k \neq 0$ *– некоторый параметр, операторное уравнение Лакса [1] эквивалентно нелинейному уравнению с частными производными*

$$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}u_z - \frac{\alpha_{31}}{2}ku_x + \frac{1}{k}\left(\ln u\right)_{zz} - \alpha_{11}^2 k\left(\ln u\right)_{xx} = 0,$$

где операторы имеют вид:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{11} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + u,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3k\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k\alpha_{11} & 0 \\ k\alpha_{31} & k\alpha_{32} & k\alpha_{11} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + v,$$

α_{ij}, β_{ij} *– const, а матрицы* $u(x,t) = (u_{ij})$, $v(x,t) = (v_{ij})$ *порядка* 3×3 *с :*

$u_{13} = u(x,\, t)$,
$u_{11} = \frac{1}{2k}(\ln u)_z - \frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u)_x$,
$u_{12} = -\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} u \ln u$,
$u_{21} = u_{23} = 0$,
$u_{22} = -\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}} u - \frac{1}{2k}(\ln u)_z - \frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u)_x - \frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}} u$,
$u_{31} = \frac{\alpha_{31}^2}{4\alpha_{11}^2} u + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}}(\ln\, u)_z - \frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\frac{1}{u}\int u(\ln\, u)_{xz}\, dz$,
$u_{32} = \frac{\alpha_{31}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2} u\left(1 - \frac{k}{2} - \ln u\right) + \frac{\alpha_{11}\alpha_{32}}{2} k \int (\ln u)_{xx}\, dz + \frac{\alpha_{31}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} k \int u_x dz$,
$u_{33} = -\frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u)_x - \frac{1}{2k}(\ln u)_z$,
$v_{11} = -v_{22} = v_{33} = \frac{\alpha_{31}}{4\alpha_{11}} k u + \frac{1}{2}(\ln u)_z$,
$v_{12} = -\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} k\, u \ln u$,
$v_{13} = ku$,
$v_{21} = v_{23} = 0$,
$v_{31} = \frac{\alpha_{31}^2}{4\alpha_{11}^2} k u + \frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}(\ln\, u)_z - \frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\frac{k}{u}\int u(\ln\, u)_{xz}\, dz$,
$v_{32} = k\frac{\alpha_{31}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2}\left(1 - \frac{k}{2} - \ln u\right) u + \frac{\alpha_{11}\alpha_{32}}{2}\int (\ln u)_{xx}\, dz + \frac{\alpha_{31}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} k^2 \int u_x dz.$

Литература

[1] Карюк А. И., Редькина Т. В. *Нелиненое уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка// Современные методы физико-математических наук. С.Т.М.К., г.Орел. Т.1 - Издат. ОГУ, 2006г. - С.70-75*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СЕТЕЙ БЕСПРОВОДНОГО ДОСТУПА

Кащенко А.Г., Кащенко Г.А., Стародубцев Н.В., Фефилов И.И.

Задачи анализа устойчивости сетей беспроводного доступа (СБД) возникают в связи с необходимостью априорной оценки последствий произвольных случайных и неслучайных разрушающих деструктивных воздействий (ДВ), таких, как масштабные аварии, техногенные катастрофы, военные действия, террористические и хакерские атаки на реальные территориально-распределенные СБД. В докладе рассматривается задача анализа устойчивости СБД в случае повреждения полностью или частично узлов сети. Такие разрушения будут соответствовать выходу из строя базовых станций (БС), ретрансляторов, а также серверов и маршрутизаторов в сети Интернет.

Математическая модель $D^f = \left\langle G^f, M^f \right\rangle$ рассматриваемой задачи задается в виде неориентированного, связного и без петель графа сети $G^f = \left\langle N^f, A^f \right\rangle$, где $N^f = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$- множество узлов, $A^f = \{r_1, r_2^, ..., r_a\} \subset N^f \times N^f$ - множество ребер, соединяющих узлы, а также набором $M^f = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ тяготеющих пар (абонентов) - вершин (v_{s_i}, v_{t_i}) графа G^f, являющихся источником и стоком для пары $p_i, i = \overline{1, n}$. Пара (v_{s_i}, v_{t_i}) является терминальной для i-го вида потока данных. Узлы $N^f \times N^f / M^f$ являются транзитными. Для каждой тяготеющей пары p_i задана величина $d_i > 0$, имеющая смысл требования на соединение i-й пары абонентов, $p_i \in M^f$, а для каждой вершины графа G^f задан вес$y_k \in Z_+$, определяющий пропускную способность узла $v_k(k = \overline{1, n})$.Также задан неориентированный граф тяготений $G^p = \langle N^p, M^p \rangle$, где $N^p = \left\{ v \in N^f \left| \exists p_i \in M^f : v = v_{s_i} \text{ или } v = v_{t_i} \right. \right\}$ - подмножество узлов G^f, являющихся источником или стоком для какой-либо пары $p_i, i = \overline{1, m}$. Граф G^p может состоять из $j \leqslant m$. компонент связности в отличие от графа G^f, который предполагается связным.

Предполагается, что СБД подвергается случайному или неслучайному разрушающему ДВ, которое приводит к полному уничтожению одного или нескольких узлов сети D^f.Так как после ДВ передать поток данных в сети по ребрам, инцидентным разбитому узлу, оказывается невозможным, то все такие ребра не функционируют. Разрушению могут быть подвержены не только транзитные узлы, но и терминальные вершины (БС). При этом множество тяготеющих пар предполагается неизменным, а требование на поток данных для пары, у которой уничтожена одна из БС, считается неудовлетворенным. В работе для оценки устойчивости СБД моделируется разрушение ребер или вершин. В докладе рассматривается устойчивость СБД к случайным отказам и направленным ДВ (атакам). Показано, что СБД уязвимы к направленным атакам и достаточно устойчивы к случайным отказам.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА АНТИАРИТМИЧЕСКИХ ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ

Кащенко О.В.

При лечении больных с пароксизмальной формой фибрилляции предсердий (ПФФП) возникает проблема выбора из множества альтернатив наиболее эффективного варианта антиаритмических лекарственных средств (АЛС). В настоящее время этот выбор производится зачастую интуитивно, исходя из имеющегося опыта высококвалифицированных врачей – специалистов в данной области, без достаточно полного анализа всех возможных вариантов АЛС, имеющихся на рынке. В докладе предлагается метод решения задачи многокритериального ранжирования (построения эффективного кортежа Парето) вариантов АЛС для больных с ПФФП.

Для математической постановки задачи введем следующие обозначения: $S = \left\{S_\alpha, \alpha = \overline{1,n}\right\}$ - множество АЛС, где n – число АЛС;$Q_j(S_\alpha), j = \overline{1,r}$ - частные критерии, характеризующие АЛС S_α; $Q(S_\alpha) = \{q_1(S_\alpha), q_2(S_\alpha), ..., q_r(S_\alpha)\}$ - векторный критерий, характеризующий АЛС S_α; $Q(S) = \{Q(S_1), Q(S_2), ..., Q(S_n)\}$ - множество векторных критериев; $A\left\{\alpha_j, j = \overline{1,r}\right\}$ - множество коэффициентов важности критериев, α_j коэффициент важности j-го критерия, причём $\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j = 1$.

При решении задачи выбора АЛС необходимо иметь в виду следующие ее особенности: многоуровневость системы частных критериев, неравноценность критериев, нечисловые критерии и несогласованность экспертных данных. В докладе предлагается использовать для выбора АЛС метод анализа иерархий (МАИ), разработанный Т. Саати. На первом этапе данного метода строится иерархическая система, состоящая из нескольких уровней. Первым уровнем такой системы является цель, вторым – критерии, уточняющие цель, последним – альтернативы, которые должны быть оценены сначала по критериям второго уровня, а потом с точки зрения общей цели.

К основным процедурам реализованного варианта МАИ относятся следующие:

1) генерация множества альтернативных вариантов АЛС;

2) формирование множества критериев для оценки альтернативных вариантов АЛС;

3) выявление предпочтений экспертов на множестве альтернатив по различным критериям;

4) установление относительной важности влияния критериев на цель выбора и другие критерии;

5) получение ранжированных наборов альтернатив по всем критериям и целям.

Применение описанного выше подхода в рамках поставленной в докладе задачи позволяет быстро осуществить выбор наиболее эффективных АЛС для больных с ПФФП.

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ НА КЛАССЕ ТИПИЧНО - ВЕЩЕСТВЕННЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Кирьяцкий Э.Г. (Вильнюс)

Eduard.kiriyatzkii.@takas.lt

Теорема. Пусть $-1 < x < 1$ и

$$\frac{x}{f\left(x\right)}\frac{f\left(z\right)-f\left(x\right)}{z-x}=1+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left[f\left(x\right)\right]z^{k-1},$$

где $f\left(z\right)=z+a_2z^2+...$ – *типично - вещественная в круге* $|z|<1$ *функция.* Тогда

$$\left|a_k\left[f\left(x\right)\right]\right|\leqslant k+\left(k-1\right)\left|x\right|,\quad k=2,3,....$$

При фиксированных x и k знак равенства реализуется одной из функций

$$f_1\left(z\right)=\frac{z}{\left(1+z\right)^2},\quad f_2\left(z\right)=\frac{z}{\left(1-z\right)^2}.$$

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ ЗНАКОНЕОПРЕДЕЛЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Китаева Е.В., Аксенов А.В. (Самара)

el_kitaeva@mail.ru

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + p(t,\xi,u), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u\Big|_{\xi=-1} = u\Big|_{\xi=1} = 0. \tag{2}$$

Предположим, что

A1. Краевая задача (1)-(2) при $\varepsilon = 0$ имеет при $t \in R, \xi \in [-1,1]$ решение $u_0(t,\xi)$, причем для линейной краевой задачи для уравнения $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a(t,\xi)u + f(t,\xi)$ с граничными условиями (2), где $a(t,\xi) = p_u(t,\xi,u_0(t,\xi))$ выполнены предположения

B1. Функции $f(t,\xi), a(t,\xi)$ и все их частные производные $\frac{\partial^{|i|} f}{\partial t^{i-s}\partial \xi^s}, \frac{\partial^{|i|} a}{\partial t^{i-s}\partial \xi^s}$,$0 \leqslant i \leqslant 2k_1+1$, $0 \leqslant s \leqslant i$ при некотором $k_1 \geqslant 2$ равномерно ограничены при $t \in R, \xi \in [-1,1]$.

B2. При каждом фиксированном $t \in R$ для собственных значений оператора $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + a(t,\xi)$ с краевыми условиями (2) справедливы неравенства $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \cdots$, $|\lambda_i(t)| \geqslant \lambda_0 > 0$ и выполняются условия $\lambda_s = O^*(s^2), |\lambda_i - \lambda_j| \geqslant C|i-j|^2, i \neq j$, $\inf\limits_{t\in(-\infty,+\infty)} |\lambda_i(t)| \geqslant \lambda_0 > 0$.

A2. Функция $p(t,\xi,u)$ имеет на множестве

$$\{(t,\xi) : t \in R, |\xi| \leqslant r, |u| \leqslant r\},$$

где $r > 0$ — достаточно большое, но не зависящее от ε число, все $2k_1+1$ частные производные по ξ, t.

Теорема 1. *Задача (1)-(2) имеет в некотором шаре пространства $C(R\times[-1,1])$ с центром в $u_0(t,\xi)$ единственное ограниченное при $t \in (-\infty,+\infty)$, $\xi \in [-1,1]$ решение $u(t,\xi)$.*

Данная задача является модельной для описания критических режимов горения. Ее решение неустойчиво как в прямом так и в обратном времени.

В докладе предлагается численно-аналитический метод решения данной задачи, позволяющий приближенно отыскивать члены асимптотического разложения данной задачи по степеням малого параметра.

Литература

[1] Китаева Е.В., Соболев В.А. Численное отыскание ограниченных на всей оси решений дискретных сингулярно возмущенных уравнений и критических режимов горения. Журн. вычисл.матем. и матем. физики. 2005. Т.45, №1. с.56-87.

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

Козлова И.А. (Калуга)

irena1983.83@mail.ru

В настоящей работе для функции Больцано $f(x)$ при $a = 1$ и $h = 1$ (см. [1]) строятся многочлены Бернштейна

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\tfrac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Для нахождения значений функции Больцано используется разложение правильной положительной дроби $\frac{b}{c}$ в 4-ичную дробь: $\frac{b}{c} = (0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots)_4$. Раряды этой дроби находятся по изветному алгоритму теории чисел:

$$a_n = \left[\frac{4^n \cdot b}{c}\right] - 4 \cdot \left[\frac{4^{n-1} \cdot b}{c}\right],$$

где $[x]$–целая часть числа x.

В результате получается следующая последовательность многочленов Бернштейна:

$B_2(f;x) = x^2$
$B_3(f;x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x$
$B_4(f;x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x$
$B_5(f;x) = \frac{4x^5}{3} - \frac{22x^4}{3} + \frac{32x^3}{3} - \frac{8x^2}{3} - x$
$B_6(f;x) = 60x^5 - 14x^6 - 90x^4 + 60x^3 - 15x^2$
$B_7(f;x) = \frac{44x^7}{9} - \frac{56x^6}{3} + \frac{124x^5}{3} - \frac{170x^4}{3} + \frac{130x^3}{3} - 14x^2 + \frac{7x}{9}$
$B_8(f;x) = 25x^8 - 80x^7 + 84x^6 - 70x^4 + 56x^3 - 14x^2$

$B_9(f;x) = 320x^8 - 44x^9 - 848x^7 + 1120x^6 - 784x^5 + 252x^4 - 16x^2 + x$

$B_{10}(f;x) = \frac{2272x^9}{3} - \frac{476x^{10}}{3} - 1434x^8 + 1368x^7 - 700x^6 + 252x^5 - 168x^4 + 120x^3 - 39x^2 + \frac{10x}{3}$

...

$B_{16}(f;x) = 1447x^{16} - 3736x^{15} - 20800x^{14} + 132220x^{13} - 321750x^{12} + 419796x^{11} -$
$- 264264x^{10} - 45760x^9 + 248820x^8 - 240240x^7 + 129272x^6 - 42068x^5 + 7540x^4 - 420x^3 -$
$- 60x^2 + 4x$

Литература

[1] Бржечка В.Ф. О функции Больцано // Успехи математических наук. Т. 4, вып. 2, 1949, с. 15-20

ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ. ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Колесникова И.В. (Воронеж)

kolinna@inbox.ru

Данное сообщение посвящено проблемам, с которыми столкнулись учащиеся в процессе подготовки и сдачи ЕГЭ в 2010 году и предлагаются некоторые пути их решения в 2011. Целью этого рассуждения является повышение уровня готовности учащихся и учителей к ЕГЭ в 2011 году.

ЕГЭ – 2010 по информатике и ИКТ выявил определенные проблемы в качестве подготовки выпускников. Следует обратить внимание на малое количество учащихся 11-х классов, которые приняли участие в ЕГЭ и достаточно низкие результаты. Для этого есть целый комплекс причин информационного, организационного, кадрового и методического характера. При этом участие и результативность ЕГЭ по информатике и ИКТ являются, на мой взгляд, одним из важнейших показателей уровня информационной компетентности учеников и учителей, их готовности быть успешными в современном информационном обществе.

Проблема выбора экзамена по информатике в форме ЕГЭ стоит очень остро. Во-первых, не во многих ВУЗах Воронежа для поступления он необходим, во-вторых, информатика в общеобразовательной школе изучается с 5 класса по 1 часу в неделю и только начиная с 8-9 класса на нее отводится 2 часа. Таким образом преимущество имеют только школы с углубленным изучением математики и информатики. В-третьих, учебники и всевозможные методические пособия по информатике не могут подготовить выпускника к сдаче ЕГЭ на высокий балл.

Таким образом, возникает вопрос, каким образом учителя информатики и ИКТ "должны" организовать подготовку к ЕГЭ? Ведь ни для кого не секрет, что зачастую эта подготовка заключается в обычным "натаскивании" на задачи прошлых КИМов. Решаются десятки и сотни подобных задач, в том же время, учащиеся сталкиваются с огромной проблемой при малейшем изменении условия задачи на экзамене.

Решением этой проблемы может быть подготовка на специально организованных дополнительных занятиях, например, факультативах, кружках и т.д. Также очень важно выявить и развить заинтересованность ученика в самообразовании (дистанционное обучение, дополнительные занятия, самостоятельное обучение), при этом нужно чтобы его поддерживали родители и педагоги школы.

Серьезной проблемой при подготовки к ЕГЭ по информатике также является недостаточная подготовка (квалификация) учителей информатики во многих школах. Зачастую информатику преподают математики, физики, химики, географы...

Но все же, введение экзамена по информатике в форме ЕГЭ способствует созданию определенной системы подготовки учащихся, поиску новых методов работы с учениками, которые интересуются информатикой, а также способствует повышению уровня информатизации общества.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИКТ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Колесникова И.В. (Воронеж)

kolinna@inbox.ru

Стремительное развитие ИКТ ориентирует систему подготовки учителя на развитие профессиональной ИКТ-компетенции, под которой понимается готовность учителя решать профессиональные задачи в условиях информационного общества. Цели использования компьютера на уроках математики следующие: развитие межпредметных связей математики и информатики; формирование компьютерной грамотности; развитие самостоятельной работы учащихся на уроке; реализация индивидуального, личностно-ориентированного подхода. Применение ИКТ на уроках математики дает возможность учителю сократить время на изучение материала за счет наглядности и быстроты выполнения работы, проверить знания учащихся в интерактивном режиме, что повышает эффективность обучения, помогает реализовать весь потенциал личности - познавательный, морально-нравственный, творческий, коммуникативный и эстетический, способствует развитию интеллекта, информационной культуры учащихся. Использование ИКТ в учебном процессе предполагает повышение качества образования, т. е. решение одной из основных проблем современного общества. Процесс организации обучения школьников с использованием ИКТ позволяет: сделать этот процесс интересным, за счет новизны и необычности такой формы работы для учащихся, увлекательным и ярким, разнообразным по форме за счет использования мультимедийных возможностей современных компьютеров; эффективно решать проблему наглядности обучения, расширить возможности визуализации учебного материала, делая его более понятным и доступным для учащихся, свободно осуществлять поиск необходимого школьникам учебного материала в удаленных базах данных благодаря использованию средств телекоммуникаций, что в дальнейшем будет способствовать формированию у учащихся потребности в поисковых действиях; индивидуализировать процесс обучения за счет наличия разноуровневых заданий, за счет погружения и усвоения учебного материала в индивидуальном темпе, самостоятельно, используя удобные способы восприятия информации, что вызывает у учащихся положительные эмоции и формирует положительные учебные мотивы; раскрепостить учеников при ответе на вопросы, т.к. компьютер позволяет фиксировать результаты (в т.ч. без выставления оценки), корректно реагирует на ошибки; самостоятельно анализировать и исправлять допущенные ошибки, корректировать свою деятельность благодаря наличию обратной связи, в результате чего совершенствуются навыки самоконтроля; осуществлять самостоятельную учебно-исследовательскую деятельность (моделирование, метод проектов, разработка презентаций, публикаций и т.д.), развивая тем самым у школьников творческую активность. С целью увелечения интенсивности обучения, наряду с ранее использовавшимися в обучении математике классическими формами обучения в школе и в самостоятельной работе учеников все чаще используются программное обеспечение учебных дисциплин: программы-учебники, программы-тренажеры, словари, справочники, энциклопедии, видеоуроки, библиотеки электронных наглядных пособий, тематические компьютерные игры.

Компьютер может использоваться на всех этапах процесса обучения: при объяснении нового материала, закреплении, повторении, контроле, при этом для ученика он выполняет различные функции: учителя, рабочего инструмента, объекта обучения. Компьютер позволяет усилить мотивацию учения путем активного диалога ученика с компьютером, разнообразием и красочностью информации (текст + звук + видео + цвет), путем ориентации учения на успех (позволяет довести решение любой задачи, опираясь на необходимую помощь). Возможности компьютера, при использовании адаптированных к нему дополнительных технологий: программных продуктов, Интернета, сетевого и демонстрационного оборудования, составляют материальную базу информационно-коммуникативных технологий.

Литература

1. Гершунский В.С. Компьютеризация в сфере образования: проблемы и перспективы. Москва: Педагогика, 1987.

2. Селевко Г.К. Современные педагогические технологии: Учебное пособие. М.: Народное образование, 1998.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДЖЕФФРИСА С ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Кондратьев С.К. (Воронеж)

kondratjevsk@gmail.com

В области

$$\Omega = \{(x_1, x_2)\colon -R < x_1 < R, -1 < x_2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

при $t \geqslant 0$ рассматривается автономная система Джеффриса с полной производной

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\sigma + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} \right) \right).$$

[1]Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы» (государственный контракт № П941).

Здесь $\mathbf{v}$ — поле скоростей, σ — девиатор тензора напряжений, $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформации. Эта система линеаризуется вблизи течения Пуазёйля и исследуются малые возмущения типа бегущей волны этого течения, определяемые параметрами $\alpha > 0$ и $c \in \mathbb{C}$. Вид возмущения определяется с помощью аналога уравнения Орра—Зоммерфельда, имеющего вид

$$v^{\mathrm{IV}}(y) + p_1(y)v'''(y) + p_2(y)v''(y) + p_3v'(y) + p_4v(y) = 0,$$

снабжённого краевыми условиями

$$v(-1) = 0,\ v'(-1) = 0,\ v(1) = 0,\ v'(1) = 0.$$

Эта задача определяет одну из компонент возмущения, через которую выражаются остальные. Коэффициенты $p_i(y)$ нелинейно зависят от α, c и параметров уравнения. Возникает нелинейная спектральная задача определения параметров α, c, при которых существуют нетривиальные возмущения. Эта спектральная задача исследуется численно и устанавливается существование возмущений трёх типов: затухающих, периодических и возрастающих. Для затухающих и периодических возмущений строятся траекторные и глобальные аттракторы, предлагается их визуализация.

Литература

[1] Афендиков А. Л. О математическом моделировании турбулентности в течениях вязкой несжимаемой жидкости / А. Л. Афендиков, К. И. Бабенко // Математическое моделирование. — 1989. — Т. 1, № 8. — С. 45—74.

[2] Бетчов Р. Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. — М. : Мир, 1971. — 350 с.

[3] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. / М. А. Наймарк. — М. : «Наука», 1969. — 528 с.

[4] Orszag S. Accurate solution of the Orr—Sommerfeld stability equation / S. Orszag // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 50, Iss. 4. — P. 659—703.

[5] Zvyagin V. G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. — Berlin, New York : Walter de Gruyter, 2008. — 232 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННЫМИ И БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

Кононенко Л.И. (Новосибирск)
volok@math.nsc.ru

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y + f_1, \\ \varepsilon\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y + f_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$, $A_{ij} = A_{ij}(t,\varepsilon)$ — матричные функции и $f_i = f_i(t,\varepsilon)$ — векторные функции соответствующих размерностей, $i,j = 1,2$, $t \in \mathbb{R}$, ε — положительный малый параметр [1].

Задача отыскания функций $x(t), y(t)$, удовлетворяющих системе (1), по некоторым исходным данным при известных матрицах A_{ij} и векторах f_i, $i,j = 1,2$, представляет собой так называемую прямую задачу для дифференциальных уравнений.

Основная цель наших исследований — постановка и анализ задач, обратных к этой. А именно, мы будем интересоваться такими постановками, когда матрицы A_{ij} неизвестны и их требуется найти по некоторой известной информации о решении прямой задачи и заданным f_1, f_2 [2]. У нас есть предположение, что по заданию решения на *медленной поверхности* при известных векторах f_1, f_2 можно восстановить неизвестные матрицы A_{ij}, $i,j = 1,2$. Ясно, что для однозначного восстановления этих матриц минимальная информация о решении, лежащем на медленной поверхности, должна быть той же размерности, что и информация о восстанавливаемых элементах матриц A_{ij}, $i,j = 1,2$.

Литература

1. Воропаева Н. В., Соболев В. А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009.

2. Романов В. Г., Слинючева Л. И. Обратная задача для линейных гиперболических систем первого порядка. Математические проблемы геофизики. Вып. 3. С. 187–215. Новосибирск: Издательство ВЦ СО АН СССР, 1972.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный интеграционный проект №107) и РФФИ (проект 09–01–0070)

О ПРОБЛЕМЕ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[2]

Коробов А.А. (Новосибирск)

korobov@math.nsc.ru

Проблема точечной полноты впервые была поставлена Л.Вейсом в связи с проблемой нуль-управляемости для системы с последействием. Л. Вейс выдвинул гипотезу о точечной полноте линейной системы с постоянными коэффициентами и с постоянным запаздыванием. А.М. Зверкин и В.М. Попов построили первые примеры, опровергающие гипотезу Вейса, и положили начало исследованию свойств таких контрпримеров, которые были названы точечно вырожденными системами. В статье [1] дается полное описание точечно полной и точечно вырожденной системы

$$\dot{x} = Ax(t) + Bx(t-h), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где A, B – постоянные матрицы порядка 3, $h > 0$. В этом описании существенную роль играет один геометрический инвариант системы (1), а именно, старший коэффициент экспоненты e^{-hA}. Исследованию этого инварианта посвящен доклад [2]. Простейшая задача терминального оптимального управления для системы

$$\dot{x} = A^T x(t) + B^T x(t-h) + Cu(t), \ 0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2}$$

с критерием качества $q^T x(t_1)$ при $|u(t)| \leqslant 1$ решается только с помощью релейного управления, в случае, когда система (1) точечно полна, но это уже не верно в случае точечно вырожденной системы (1). Поэтому важно знать, является ли для системы (2) система (1) точечно полной или нет. Критерий точечной полноты А.В. Метельского опирается на знание точного значения корней характеристического квазиполинома уравнения (1), поэтому не является эффективным. С.А. Минок поставил проблему нахождения эффективных условий точечной полноты для системы (1). В статье [3] исследуется система (1) при следующем предположении: матрицы A и B можно разбить на m^2 квадратных блоков одинакового размера так, что совокупность блоков может быть вложена в конечномерную вещественную ассоциативную алгебру

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (проект № 85) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10 – 01 – 00035).

с делением, т.е. либо в точное двумерное представление поля комплексных чисел, либо в точное четырехмерное представление алгебры кватернионов. В докладе будут представлены результаты исследования, начатого в статье [3]. В частности, для системы (1) при $m = 3$ будет предложен алгоритм преобразования пары матриц (A, B) к новой канонической форме, по которой легко определить, является ли система (1) точечно полной или нет.

Литература

1. Коробов А.А. Эффективные условия точечной полноты для линейных систем с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, N1. С.96–114.

2. Коробов А.А. О старшем коэффициенте матричной экспоненты // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции. Ворнеж: ВГУ. 2005. С.125.

3. Коробов А.А. О точечно полных парах линейных преобразований // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, N3. С.58–67.

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ О ВОЗНИКНОВЕНИИ СИНХРОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Корольков О.Г. (Воронеж)

dahl@list.ru

Рассматривается задача взаимной синхронизации двух слабо связанных динамических систем с близкими частотами (см. [1]–[2]):

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= -\xi_2 + \varepsilon\big(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2\big) + \varepsilon\nu\big(p_{11}\eta_1 + p_{12}\eta_2\big) + X_1(\xi_1, \xi_2),\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= \xi_1 + \varepsilon\big(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2\big) + \varepsilon\nu\big(p_{21}\eta_1 + p_{22}\eta_2\big) + X_2(\xi_1, \xi_2),\\
\frac{d\eta_1}{dt} &= -\eta_2 + \varepsilon\big(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2\big) + \varepsilon\nu\big(q_{11}\xi_1 + q_{12}\xi_2\big) + Y_1(\eta_1, \eta_2),\\
\frac{d\eta_2}{dt} &= \eta_1 + \varepsilon\big(b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2\big) + \varepsilon\nu\big(q_{21}\xi_1 + q_{22}\xi_2\big) + Y_2(\eta_1, \eta_2),
\end{aligned}
$$

где ξ_1, ξ_2, η_1, $\eta_2 \in \mathbb{R}$; $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $\nu > 0$; $a_{11} + a_{22} > 0$, $b_{11} + b_{22} > 0$; нелинейности X_i, Y_j имеют непрерывные производные до 3-го порядка включительно по каждой из переменных. Предполагается, что устойчивость нулевого положения равновесия системы определяется только линейными, квадратичными и кубичекими членами. При остутствии взаимодействия (при $\nu = 0$) исходная система распадается на две независимые подсистемы. Предполагается, что константа Ляпунова для каждой из этих подсистем отрицательна, что обеспечивает существование предельного цикла в каждой из них. Требуется вывести достаточные условия синхронизации автоколебаний в смысле определения, данного в [1]-[2].

Иследование синхронизации автоколебаний основано на переходе в системе к полярным координатам $\xi_1 = r\cos\alpha$, $\xi_2 = r\sin\alpha$, $\eta_1 = \varrho\cos\beta$, $\eta_2 = \varrho\sin\beta$, новым масштабам $r = \varepsilon^{\frac{1}{2}}S$, $\varrho = \varepsilon^{\frac{1}{2}}T$ и новым фазовым углам $\varphi = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $\psi = \frac{\alpha+\beta}{2}$, а также переходе от времени t к фазовой переменной ψ. 2π-периодическое решение полученной системы ищется в виде рядов по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, причем для отыскания условий синфазной синхронизации берётся $\varphi_0(\psi) \equiv 0$, а для отыскания условий синхронизации в противофазе берётся $\varphi_0(\psi) \equiv \frac{\pi}{2}$. Условия существования 2π-периодического решения выводятся согласно И.Г. Малкину (см. [3]), а условия его устойчивости – с использованием метода Боголюбова – Штокало (см. [4]). В совокупности эти условия обеспечивают возникновение малых синхронных автоколебаний в исходной системе.

Литература

[1] *Стрыгин В.В., Северин Г.Ю.* Бифуркация малых синхронных автоколебаний двух динамических систем с близкими частотами // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2006. — №2. — С. 36–45.

[2] *Корольков О.Г., Северин Г.Ю., Стрыгин В.В.* Синхронизация автоколебаний двух близких динамических систем // ДАН. — 2009. — Т. 428, №1. — С. 38–40.

[3] *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М. : Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1966. — 492 с.

[4] *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М. : Наука, 1970. — 352 с.

О ТЕОРИИ ВЕЙЛЯ–ТИТЧМАРША ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА С СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Костенко А.С. (Донецк)

duzer80@gmail.com

Мы развиваем теорию Вейля–Титчмарша для одномерных операторов Шрёдингера с сильно сингулярными потенциалами, в частности, для так называемых операторов Бесселя. Хорошо известно, что в подобных ситуациях можно определить сингулярную m-функцию Вейля–Титчмарша, а также соответствующую спектральную меру. Наша основная цель – дать критерий того, когда сингулярная m-функция допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, исследовать ее аналитические свойства, а также установить аналог теоремы единственности Борга–Марченко.

Доклад основан на совместных работах с А.Л. Сахновичем и Г. Тешлем.

КАЧЕСТВО СОВРЕМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ И РЕФОРМА-1970

Костенко И.П. (Краснодар)
kost@kubannet.ru

Качество современного школьного математического образования, сравнительно с 1940-1950-ми годами, упало раз в тридцать. Основание: в 1949 г. по данным АПН примерно 70% учащихся 9-10 классов страны верно решали задания по алгебре, геометрии и тригонометрии, т. е. имели оценки не ниже “хорошо”, а в 2009 г. ЕГЭ-тестирование первокурсников МАДИ показало 2,4% таких студентов. Можно предположить, что во столько же раз (наверное, во много раз больше) упало количество качественных специалистов. Следствие – рост числа промышленных, экологических и социальных катастроф.

Исторический анализ позволяет точно установить *момент начала снижения качества обучения, – 1956 г., когда из школы-семилетки были “изгнаны” (термин реформаторов) учебники А. П. Киселёва.* И уже следующая министерская контрольная проверка 1957 г. фиксирует ухудшение показателей успеваемости.

1956 г. – рубежный год в истории нашей школы, с этого года в неё вторглись реформаторы и начали планомерную четырнадцатилетнюю подготовку её к реформе. Подготовка эта называлась тоже “перестройкой”. Качество обучения все эти годы продолжало перманентно снижаться.

Реформа началась в 1970 г. (ровно 40 лет назад, – юбилей!) и катастрофически завершилась в 1978 г. Вот свидетельство её непосредственного участника академика РАО Ю. М. Колягина: “Когда были обнародованы результаты приёмных экзаменов, . . . среди учёных АН СССР и преподавателей вузов началась паника. Было повсеместно отмечено, что математические знания выпускников страдают формализмом, навыки вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений фактически отсутствуют".

Т. е. в результате реформы произошло *обессмысливание знаний учащихся и утрата навыков.* С тех пор эти результаты только усугубляются, – сегодня уже фиксируется незнание студентами таблицы умножения.

Последовавшие за реформой в 1980-х гг. "меры" по "совершенствованию" "неудовлетворительных" программ и "недоброкачественных" учебников закрепили эти результаты. Потому что не затронули основные принципы онаученных программ и сохранили подкорректированные учебники реформаторов (они навязываются школе по сей день) и учебники их последователей.

"Демократические" реформы 1990-х гг. стимулировали дальнейшую деградацию уже всей школьной жизни и отвлекли внимание школы от учебного процесса. "Отвратительное" качество математических знаний школьников и студентов стало привычным. Его связь с реформой-70 постепенно забылась.

Нам предлагают новые объяснения низкого качества образования, наиболее массово понятное из которых – недостаток финансирования. Переводят наше внимание и активность на новые ложные цели – всеобщую компьютеризацию и информационные технологии обучения. В то время как строгие научные исследования физиологов доказывают, что "обучающие" компьютерные технологии приводят к атрофии способности анализировать информацию, т. е. к дальнейшему отуплению школьников. Уже необратимому.

Подлинная первопричина деградации заключена в реформе-70, в её идеологии "высокого теоретического уровня" обучения (принцип-ВТУ). Эта идеология, которую академик Л. С. Понтрягин назвал в 1980 г. "порочной", направляет наше образование (в частности, через учебники) по сей день. В 1997 г. В. И. Арнольд подтвердил диагноз: *"Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой".*

Вот несколько реформаторских инноваций, строго сохраняющихся 40 лет.

Ужатие арифметики. Уничтожение методики развития мышления с помощью устного счёта и с помощью содержательных арифметических задач. Разрушение классической методики обучения обыкновенным дробям. В итоге, разрушение фундамента – начального математического образования.

Перегрузка программ высшей математикой. Авторы не понимали, что она требует иного качества мышления, которым дети не обладают (их мышление конкретно-образное и конкретно-действенное). Результат – разбухание программ, резкий рост объёма учебников (сравнительно с Киселёвым, – в три раза), формализм знаний, сокращение времени для выработки навыков (их нет).

Смешение элементов арифметики, алгебры, геометрии и теории множеств в начальной школе. Смешение элементов алгебры, тригонометрии и анализа в старших классах. Т. е. ликвидация классического предметного обучения и выведение из школы дидактического принципа системности. В итоге, хаотизация содержания учебных программ, сильно затрудняющая учащимся их усвоение и сделавшая в принципе невозможным создание хороших учебников.

Изгнание из нашей школы лучших в мире учебников А. П. Киселёва (в некоторых зарубежных школах они работают до сих пор). Ликвидация принципа единого стабильного учебника. Результат – хаотизация работы учительского сообщества, затрудняющая обмен опытом и совершенствование преподавания.

Повышение "научного уровня" строгости и теоретичности изложения материала в учебниках. В частности, внедрение аксиоматического метода организации учебного материала в геометрии. Результат – вымывание из учебников настоящей методики. Нынешние учебники не читают ни учащиеся, ни учителя. Потому, что они непонятны. Геометрия стала самым нелюбимым предметом, геометрическую задачу могут решить лишь 1% абитуриентов (данные МАДИ).

Для официального сокрытия результатов реформы-70 использовалась "процентомания". А вина за низкое качество знаний учащихся перекладывалась на учителей. Эти приёмы ввёл в 1970-х гг. министр-реформатор М. А. Прокофьев.

Главный результат для детей – "унижение математикой" (проф. Ю. В. Покорный), отвращение к математике, деградация личности.

На вопрос – "что делать?" академик В. И. Арнольд ответил под аплодисменты участников Всероссийской конференции "Математика и общество" (Дубна-2000): "Я бы вернулся к Киселёву".

ПРОСТРАНСТВА СТЕПАНОВА НА $\mathbb{R}_+$ С ИССКУСТВЕННО ВВЕДЕННОЙ МНОГОМЕРНОСТЬЮ И ИНТЕГРАЛ БЕССЕЛЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Костин В.А., Костин А.В. (Воронеж)

На действительной полуоси $t \in (0,\infty) = \mathbb{R}_+$ рассматривается интеграл Бесселя дробного порядка $\alpha \in (0,1)$

$$(G_-^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-\omega s} f(t+s)ds, \qquad \omega > 0, \tag{1}$$

являющийся отрицательными дробными степенями операции $(\omega I + \frac{d}{dt})$. Известно, что пространства функций Степанова, с нормой

$$\|f\|_{S_-} = \sup_{r\in\mathbb{R}_+} [\int_0^1 |f(s+t)|^p ds]^{\frac{1}{p}} \qquad (p>1) \tag{2}$$

являются инвариантными относительно операции (1). Необходимость расширения классов функций также обладающих этим свойством, приводит к рассмотрению следующих пространств, которые мы вводим с помощью исскуственного повышения размерности, что позволяет включать функции имеющие неинтегрируемую особенность при $t=0$.

Введем обозначения: $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = \overline{t}_n$, $\overline{dt}_n = dt_1, \ldots, dt_n$, K_n— куб со сторонами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Для $p \geqslant 1$ вводятся пространства функций $S_p^{(n-m)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 0, 1, \ldots$, $m < n$ с нормой

$$\|f\|_{S_p^{(n-m)}} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{K_{n-m}} \left[\int_{K_m} |f(\overline{t}_m + t)| \overline{dt}_m \right]^p \overline{dt}_{n-m} \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

$S_p^{(n-m)}$- пространства являются банаховыми. Для них справедливы вложения $S_p^{(n-m)} \subset S_p^{n+1-m}$, при $n=1$ они являются пространствами Степанова S_p.

Теорема. Пространства $S_p^{(n-m)}$ инвариантны относительно операции $G_-^{\alpha,\omega}$ и для их норм справедливо неравенство

$$\|G_-^{\alpha,\omega} f\|_{S_p^{(n-m)}} \leqslant \omega^{-\alpha} \|f\|_{S_p^{(n-m)}}, \tag{4}$$

где константа $\omega^{-\alpha}$— точная.

Литература

1. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В. Костин, В.А. Костин.— Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.— 259 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ НА R^1 ВВЕДЕНИЕМ ИСКУССТВЕННОЙ МНОГОМЕРНОСТИ

Костин В.А., Костин Д.В. (Воронеж)
vlkostin@mail.ru, dvkostin@rambler.ru

На интервале $(0,a) \subset R^1$, для $p \geqslant 1$ рассматривается множество $L_p^{(n,m)}$ локально интегрируемых, вообще говоря, комплекснозначных функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^{(n,m)}} = \left[\int\limits_0^{\frac{a}{n}} \ldots \left[\int\limits_0^{\frac{a}{n}} \ldots \int\limits_0^{\frac{a}{n}} |f(\sum_{i=1}^n x_i)| dx_1 \ldots dx_m\right]^p dx_{m+1} \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left[\int\limits_{K_{n,n-m}} \left[K_{n,m} |f(\sum_{i=1}^n x_i)| dx_1 \ldots dx_m\right]^p dx_{m+1} \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

где $n = 1, 2, \ldots;\ \ m = 0, 1, \ldots;\ \ m < n$.

В случае $m = 0$ норма (1) имеет вид

$$\|f\|_{L_p^{(n,0)}} = \left[\int\limits_{K_n} |f(\sum_{i=1}^n x_i)|^p dx_1 \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Отсюда при $n = 1$ норма (1) определяет классические пространства L_p.

Утверждение 1. Пространства $L_p^{(n,m)}$ – банаховы.

Утверждение 2. Классы $L_p^{(n,m)}$ являются расширяющимися при возрастании параметров n и m, так как справедливы неравенства

$$\|f\|_{L_p^{(n+1,m)}} \leqslant M_1(n,m) \|f\|_{L_p^{(n,m)}}; \tag{3}$$

$$\|f\|_{L_p^{(n,m+1)}} \leqslant M_2(n,m) \|f\|_{L_p^{(n,m)}}, \tag{4}$$

а $f = x^\alpha \in L_p^{(n,m)}$ только тогда, когда $\alpha \leqslant m + \frac{n-m}{p}$.

Утверждение 3. Пространства $L_p^{(n,m)}$ и $L_{p'}^{(n,m)}$, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, сопряжены друг другу. При этом соответствующий линейный функционал имеет вид

$$
\begin{gathered}
(f,g)= \\
\int\limits_{K_{n,n-m}} \left(\int\limits_{K_{n,m}} f(\sum_{i=1}^{n} x_i) dx_1 \dots dx_m \times \right. \\
\left. \times \int\limits_{K_{n,m}} \overline{g}(\sum_{i=1}^{n} x_i) dx_1 \dots dx_m \right) dx_{m+1} \dots dx_n .
\end{gathered} \tag{5}
$$

Пространства $L_2^{(n,m)}$ гильбертовы.

ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЁННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЁЛЬДЕРОВОСТИ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

Кочуров Е.С. (Ростов-на-Дону)

ekochurov@yandex.ru

В данной работе рассмативаются дробные интегралы

$$
\mathrm{I}_{\mathrm{a}+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{1}{\Gamma[\alpha(x)]} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha(x)}}
$$

переменного порядка $\alpha(x), 0<\alpha(x)<1$. Везде далее символом $H^{\omega(\cdot)}([a,b],\rho)$ будем обозначать пространство обобщённой переменной гёльдеровости с весом $\rho(x)$. В нашем случае вес $\rho(x)$ имеет вид $(x-a)^{\mu}, 0<\mu<2$. Через $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b],\rho)$ обозначим подпространство функций $f \in H^{\omega(\cdot)}([a,b],\rho)$, для которых выполняется условие $\rho(a)f(a)=0$.

Пусть $\rho(x)=(x-a)^{\mu}, 0<\mu<2$, $\omega_{\alpha}(t,x)=h^{\alpha(x)}\omega(t,x)$. Будем считать, что $\omega(t,x)$ — функция типа модуля непрерывности по переменной t для каждого $x\in[a,b]$.

В работе было изучено действие оператора $\mathrm{I}_{\mathrm{a}+}^{\alpha(\cdot)}$ в обобобщённых весовых пространствах Гёльдера $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b],\rho)$. А именно, была доказана следующая

Теорема. *Пусть выполняются условия*

1. $0<\alpha_{-}\leqslant\alpha(x)\leqslant\alpha_{+}<1$ *для всех* $x\in[a,b]$, *2.* $\alpha \in Lip\,([a,b])$,

3. $\omega(t,x)$ *принадлежит классу Зигмунда-Бари-Стечкина* $\Phi^{\gamma-1}_{1-\alpha(x)}\,(\gamma = \max\{1,\mu\})$,

4. $\omega(t,a) = \inf\limits_{x\in[a,b]} \omega(t,x)$ *для всех* $t \in [0, b-a]$,

5. $\int\limits_0^{b-a} \frac{\omega(t,x)dt}{t^\mu}$ *сходится по* t *равномерно по* x.

Тогда оператор $\mathrm{I}^{\alpha(\cdot)}_{\mathrm{a}+}$ *ограниченно действует из пространства* $H^{\omega(\cdot)}_0([a,b],\rho)$ *в пространство* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}_0([a,b],\rho)$.

При доказательстве указанного результата используется метод оценок типа Зигмунда. В нашем случае эти оценки носят локальный характер и зависят от точек $x \in [a,b]$.

Полученная теорема о действии обобщает известный ранее (см. [1]) аналогичный результат для дробных интегралов постоянного порядка в обобщенных пространствах Гёльдера со степенными весами.

Литература

[1] Мурдаев Х.М., Самко С.Г. Весовые оценки модулей непрерывности дробных интегралов от функций, имеющих с весом заданный модуль непрерывности. Деп. в ВИНИТИ, Ростов-на-Дону, 1986. №3351-В. 42 с.

ОТОБРАЖЕНИЯ В НЕКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОРФИЗМОВ GL_c - РАССЛОЕНИЙ

Крейн М.Н. (Липецк)
travkin@lipetsk.ru

Пусть $\mathcal{A}$ - некоммутативная алгебра. Очевидно, всякий двусторонний идеал этой алгебры инвариантен относительно действия любого однородного отображения ненулевой степени, то есть отображения $f(x)$, являющегося конечной суммой слагаемых вида $a_1 \cdot x \cdot a_2 \cdot x \cdot \dots \cdot a_n \cdot x \cdot a_{n+1}$ $(a_1,\ \dots\ a_{n+1} \in \mathcal{A})$ и, следовательно, относительно действия всякого многочлена (конечной суммы однородных отображений), а в нормированной алгебре и относительно действия аналитического отображения (сходящегося ряда однородных отображений), у которого слагаемое нулевой степени принадлежит этому идеалу.

В частности, $C(E)$ - множество компактных линейных операторов банахова пространства E является замкнутым двусторонним идеалом в C*-алгебре $B(E)$ ограниченных линейных операторов того же пространства, поэтому оно инвариантно относительно действия в $B(E)$ отображений указанных выше видов. Следовательно, такое отображение $f : B(E) \to B(E)$ проектируется в отображение $\widehat{f}$, действующее в фактор-C*-алгебре $B(E)/C(E) = K(E)$ и являющееся там отображением того же вида, что и f (но не имеющим слагаемого нулевой степени).

Отображение, относительно которого $C(E)$ является инвариантным множеством, позволяет построить преобразование морфизмов GL_c -расслоений, то есть расслоений со слоем E и структурной группой $GL_c(E)$ изоморфизмов вида $I + C$, где C - компактный оператор. А именно, пусть $f : B(E) \to B(E)$ - такое отображение, $\varphi : \xi_1 \to \xi_2$ - морфизм GL_c -расслоений над базой M , $p_1 : \xi_1 \to M$, $p_2 : \xi_2 \to M$ - проекции. Каждой точке $m \in M$ соответствует при выборе тривиализаций в ξ_1 и ξ_2 линейное отображение слоев $\varphi_m : E = p_1^{-1}(m) \to p_2^{-1}(m) = E$, $\varphi_m \in B(E)$. Отображение f преобразует его в $f(\varphi_m)$. В силу того, что структурной группой расслоений является GL_c , при выборе других тривиализаций φ_m может измениться лишь на компактное слагаемое и $f(\varphi_m)$, в силу инвариантности $C(E)$ относительно f , может измениться лишь на компактное слагаемое, так что в факторалгебре $K(E)$ их образы $\widehat{\varphi_m}$ и $\widehat{f(\varphi_m)}$ определены однозначно.

Каждый морфизм φ GL_c -расслоений определяет отображение $\varphi_K : M \to K(E)$, которое под действием f преобразуется в $f_*(\varphi) = \widehat{f} \circ \varphi_K$. В более общем случае вместо одного отображения f можно взять непрерывное семейство отображений $\{f_m\}_{m \in M}$, тогда $[\{f_m\}_*(\varphi)](m) = \widehat{f_m}(\widehat{\varphi_m})$.

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕОРТОГОНАЛЬНЫМ ВСПЛЕСКАМ

Кудрявцев А.Ю. (Москва)
kudral@inbox.ru

Орторекурсивные разложения, являющиеся обобщением ортогональных разложений, были предложены Т.П. Лукашенко в работе [1]. Напомним их определение и основные свойства.

Определение 1. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — семейство ненулевых элементов H. Для произвольного элемента $f \in H$ определим коэффициенты разложения $\{\hat{f}_j\}_{j=1}^{\infty}$ следующим образом: 1) положим $\hat{f}_1 = (f, e_1)\|e_1\|^{-2}$; 2) если уже определены $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$, то $\hat{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1})\|e_{n+1}\|^{-2}$, где $r_n(f) = f - \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j e_j$. Коэффициенты $\{\hat{f}_j\}_{j=1}^{\infty}$ будем называть *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ (для ортогонального семейства они совпадают с обычными коэффициентами Фурье), а формальный ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_j e_j$ — *орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Теорема 1 ([1]). Для любого элемента $f \in H$ и любого семейства $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$ справедливы тождество Бесселя $\left\|f - \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j e_j\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\hat{f}_j|^2 \|e_j\|^2$, $n \in \mathbb{N}$, и неравенство Бесселя $\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}_j|^2 \|e_j\|^2 \leqslant \|f\|^2$. Орторекурсивный ряд Фурье элемента f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к f тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля $\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}_j|^2 \|e_j\|^2 = \|f\|^2$.

Определение 2. Семейство $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$ назовем *орторекурсивным семейством разложения в H*, если для любого элемента $f \in H$ орторекурсивный ряд Фурье f по семейству $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к f в H.

Пусть φ — действительно- или комплекснозначная функция на вещественной прямой, принадлежащая пространству Лебега $L^2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, соответственно. Рассмотрим семейство функций $\Phi = \{\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\varphi(2^k x - l) : k \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}, |l| \leqslant L_k\}$, где $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторые целые неотрицательные числа. Набор функций $\Pi_k = \{\varphi_{k,l} : |l| \leqslant L_k\}$ называется k-ой пачкой. Занумеруем семейство Φ одним натуральным индексом j так, чтобы при $j < j'$ выполнялось неравенство $k \leqslant k'$. Т.е. совокупность Φ нумеруется в порядке возрастания номеров пачек k, а каждая пачка нумеруется произвольным образом. К так упорядоченному семейству Φ можно применять определение 1.

Теорема 2. Пусть измеримая функция φ удовлетворяет следующим условиям: А) $\int_0^1 \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\varphi(x+m)|\right)^2 dx < \infty$; Б) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx \neq 0$; В) существует функция $F(\omega)$, невозрастающая на промежутке $[0, +\infty)$, такая, что $|\widehat{\varphi}(\omega)| \leqslant F(|\omega|)$ при всех $\omega \in \mathbb{R}$ и

$$\int_0^{+\infty} F^2(\omega)\ln(1+\omega)d\omega < \infty.$$

Тогда найдется последовательность целых неотрицательных чисел

$\{L_k\}_{k=0}^{+\infty}$ такая, что совокупность Φ, а также любая ее подсистема, содержащая бесконечное число пачек, при любой перестановке пачек является орторекурсивным семейством разложения в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Если $\omega(\widehat{\varphi}, \delta) = O(\delta^\alpha)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$, то можно положить $L_k = [2^{(1+1/(2\alpha))k}]$.

Литература

[1] Т. П. Лукашенко, "О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам", *Вестник МГУ Сер. I. Матем., мех.*, М., 2001, № 1, 6–10.

ОЦЕНКА ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЛАПЛАСИАНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Кулешов П.А. (Воронеж)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – стратифицированное множество (точные определения можно найти в работе [1]), являющееся связным объединением многогранников (стратов) одинаковой размерности, примыкающих друг к другу по типу симплициального комплекса. Пусть далее Ω_0 – связное подмножество Ω, составленное из стратов последнего и открытое в топологии, индуцированной на Ω стандартной топологией $\mathbb{R}^n$. Лапласиан Δ в точках стратов старшей размерности d в Ω_0 определим как обычный лапласиан, а в стратах σ_{d-1i} размерности $d-1$ как сумму нормальных производных по направлению внутрь d-мерных стратов σ_{dj}, примыкающих к σ_{d-1i}. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

$$u\Big|_{\partial\Omega_0} = 0,$$

где $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$. Решение предполагается непрерывным в целом на Ω_0.

Основной результат работы содержится в следующем утверждении.

Теорема. Минимальное (первое) собственное значение в спектре оператора Δ при условиях Дирихле не меньше минимального собственного значение в спектре классического лапласиана в d-мерном шаре объема, равного сумме объемов стратов старшей размерности в Ω.

Наше доказательство опирается на технику теории перестановок. Точнее нам удается доказать приведенное утверждение на основе симметризации функций по Шварцу и принципа Рэлея. Аналог принципа Рэлея содержится в следующем утверждении.

Лемма. Первое собственное значение оператора Δ при нулевых условиях Дирихле минимизирует функционал

$$\sum \int\limits_{\sigma_{dj}} |\nabla u|^2 \, dv,$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию

$$\sum \int\limits_{\sigma_{dj}} u^2 \, dv = 0.$$

Автор благодарит О.М. Пенкина за постановку задачи.

Литература

[1] Ю.В. Покорный и др. "Дифференциальные уравнения на графах М.:Физматлит, 2005

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, РАЗРЫВНЫМИ НА ДИАГОНАЛЯХ[1]

Курдюмов В.П., Хромов А.П. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

Обозначим через A интегральный оператор:

$$Af = \alpha \int\limits_0^x A_1(x,t) f(t)\, dt + \int\limits_{1-x}^1 A_2(1-x,t) f(t)\, dt, \quad x \in [0,1],$$

где $\alpha^2 \neq 1$, $A_i(x,x) = 1$ $(i = 1,2)$, $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_1(x,t)$ $\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_2(x,t)\right)$ $(k+l \leqslant 2$, причём если $k+l=2$, то $k=l=1)$ непрерывны, кроме линии $t=x$ $(t+x=1)$.

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций оператора A образует базис Рисса в $L_2[0,1]$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1).

В получении данного результата исследовались материалы из [1] и [2].

Литература

1. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломанных линиях // Матем. сб. 197:11 (2006), 115–142.

2. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки. 76:1 (2004), 97–110.

К ТЕОРЕМЕ И. Г. МАЛКИНА О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Кутищев И.Н., Письменный Н.А., Рачинский Е.В. (Воронеж)

iliakou@rambler.ru, nikitosp@bk.ru, RachinskyEV@mail.ru

В работе рассматривается система уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\varphi_1(x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\varphi_2(x_1), \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1 : R^n \to R^n$, $f_2 : R^m \to R^m$, $\varphi_1 : R^m \to R^n$, $\varphi_2 : R^n \to R^m$ непрерывно-дифференцируемые функции.

Предполагается, что невозмущенная система, то есть система, отвечающая нулевым значениям параметров μ_1 и μ_2, имеет решение $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t)$, где ψ_1 и ψ_2 - периодические функции несоизмеримых периодов. Линеаризованные на этих решениях системы $\frac{d}{dt}y_1 = A_1(t)(y_1)$, $\frac{d}{dt}y_2 = A_2(t)(y_2)$, где $A_1(t) = f_1^{'}(\psi_1(t))$, $A_2(t) = f_2^{'}(\psi_2(t))$, имеют единицу простым мультипликатором.

Найдены условия, гарантирующие существование почти-периодического решения у системы (1).

Основным условием является ограниченность первообразных почти периодических функций $< \varphi_1(\psi_2), u_1^* >$ и $< \varphi_2(\psi_1), u_2^* >$, где u_1^*, u_2^* - периодические решения однородных сопряженных уравнений: $\frac{d}{dt}u_1 = -A_1^*(t)u_1$, $\frac{d}{dt}u_2 = -A_2^*(t)u_2$, $< .,. >$ скалярное произведение в соответсвующем пространстве.

Литература

[1]. О.Блакьер, *Анализ нелинейных систем*, Мир, 1966, стр. 102-114.

[2]. И.Г.Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.*, Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1956, стр. 424-435.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ДИСКРИМЕНАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ЧЕТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Кущев А.Б. (Воронеж)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$x^{(6)} + a_5 x^{(5)} + a_4 x^{(1)} + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' +$$

$$+ f(x) + \varphi(t, x, x', x'', x''', x^{(4)}, x^{(5)}) = 0, \qquad (1)$$

где функции $f(x)$, $\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ непрерывны по совокупности переменных $(-\infty < t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 < \infty)$, а функция $\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \varphi(t, X)$ ω-периодична по t:

$$\varphi(t + \omega, X) = \varphi(t, X). \qquad (2)$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании ω-периодических решений у уравнения (1). Исследование будет проводиться методом направляющих функций [1].

Всюду ниже мы будем предполагать, что

$$k_1 < f(x)/x < k_2 \quad (|x| > R_1, k_1 k_2 > 0), \qquad (3)$$

и равномерно относительно t

$$\lim_{||X|| \to \infty} \frac{\varphi(t, X)}{||X||} = 0, \qquad (4)$$

где $||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_6^2}$.

Теорема. Пусть выполнены условия (2)-(4) и, кроме того,

$$a_4^2 - 4a_2 < 0, k_2 < 0. \qquad (5)$$

Тогда у уравнения (1) есть хотя бы одно ω-периодическое решение.

С помощью принципа родственности полученный результат распространяется на соответствующее дифференциальное уравнение с простейшим запаздыванием.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. –М.: Наука, 1975. – 512 с.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ларионов А.С., Загорулько Ю.А. (Братск)

larios84@yandex.ru; *ZagorulkoYulia@yandex.ru*

Рассматривается задача Коши

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + a(t)x(t) + b(t)x_h(t) = f(t, x(t), x_h(t)),\ t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = \alpha,\ \alpha \in R, \quad (2)$$

где

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если} \quad h(t) \in [0, T], \\ 0, & \text{если} \quad h(t) \notin [0, T]. \end{cases}$$

В уравнении (1) функции a, b суммируемы на $[0, T]$; h - измеримая функция, $h(t) \leqslant t$ при почти всех $t \in [0, T]$; функция f удовлетворяет условиям Каратеодори.

Будем предполагать, что существуют такие суммируемые на $[0, T]$ функции p_1, p_2, что $f(t, u_1, u_2) + p_1(t)u_1 + p_2(t)u_2 = M(t, u_1, u_2)$ не убывает по u_1, u_2. Обозначим $AC[0, T]$ - пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0, T] \to R$.

Теорема. Пусть существуют такие функции $v, z \in AC[0, T]$, что выполнены неравенства $v \leqslant z$, $(\mathcal{L}v)(t) \leqslant f(t, v(t), v_h(t))$, $(\mathcal{L}z)(t) \geqslant f(t, z(t), z_h(t))$, $v(0) \leqslant \alpha \leqslant z(0)$.

Пусть функция Коши уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t) + p_1(t)x(t) + p_2(t)x_h(t) = \eta(t) \quad (3)$$

положительна при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Тогда существует решение x задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам $v \leqslant x \leqslant z$.

Замечание. Теорема применяется для исследования уравнения Хатчинсона-Райта [1] динамики природных популяций. Эффективные признаки положительности функции Коши уравнения (3) приведены в работе [2].

Литература

1. Хэссард Б., Казаринов Н. Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

2. Березанский Л.М., Ларионов А.С. Положительность матрицы Коши линейного функционально–дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, №11. – С. 1843–1854.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ КЛАССА СЧЁТНО УПЛОТНЯЮЩИХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Ласая О.В. (Воронеж)

olga_lasaya@mail.ru

Пусть E – пространство Фреше ; β – вещественная, несингулярная, полуаддитивная и монотонная мера некомпактности в E;

Пусть $K \subset E$ – непустое, выпуклое, замкнутое подмножество E;

$U \subset K$ – относительно открытое подмножество.

Обозначим через KvK - совокупность непустых, выпуклых, компактных подмножеств K.

Полунепрерывное сверху мультиотображение $F : \overline{U} \to KvK$ называется счётно уплотняющим, если выполнено соотношение

$$\beta(F(C)) < \beta(C)$$

для любого счётного, ограниченного, но не предкомпактного подмножества $C \subseteq U$.

При условии,что мультиотображение F не имеет неподвижных точек ($x \notin F(x)$) на границе ∂U, определяется топологическая степень многозначного векторного поля $i - F$ на $\overline{U}$, описываются её основные свойства и даются приложения к теоремам о неподвижной точке.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. "Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений". Изд. 2-е, испр. и дополн., М., Либроком, 2011.

2. M.Kamenskii, V.Obukhovskii and P.Zecca "Condensing multivalued maps and semilinear differential indusions in Banach spaces " Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Листров Е.А., Листрова Л.В. (Воронеж)
listrovalv@yandex.ru

Проблема педагогических измерений заключается в том, что, с одной стороны, их измерители в своем большинстве являются идеальными, а с другой – большинство педагогических явлений не поддаются измерению из-за отсутствия соответствующих эталонов [1]. Ввиду чрезвычайной сложности и, в большей степени, практической невозможности измерения педагогических явлений в педагогических исследованиях широкое распространение получили методы приближенной количественной оценки этих явлений, такие, как метод регистрации и ранговый метод.

Важной особенностью *метода регистрации* является то, что он позволяет осуществить измерение даже тогда, когда невозможно количественно определить сами свойства изучаемых явлений (достаточно указать их наличие или отсутствие в изучаемом объекте). Например, регистрируя каждого неуспевающего студента, можно получить число неуспевающих студентов в группе, фиксируя каждый неуважительный пропуск занятий, получают количество прогулов за соответствующий период времени и т.д. Поскольку на современном этапе развития педагогической науки невозможно прямо измерить количество знаний, умений и навыков обучающихся, уровень развития их нравственных качеств, регистрационный метод позволяет определить косвенные количественные характеристики всех этих признаков, т.е. строго математически исследовать закономерности образовательного процесса.

Ранговой оценкой пользуются в тех случаях, когда невозможно измерить величину исследуемого признака, а также в ситуациях, когда не известно, что представляет собой эта величина. Примером ранжирования может служить оценка результатов учебной деятельности обучающихся по пятибалльной шкале. Основной областью применения метода ранжирования является исследование субъективных (нематериальных) явлений образовательного процесса.

Анализ взаимосвязи между большим количеством переменных осуществляется путем использования многомерных методов статистической обработки, целю которых является выявление скрытых закономерностей и выделение наиболее существенных взаимосвязей между переменными. Так, *факторный анализ* способствует выявлению и интерпретации факторов (обобщенных переменных, которые позволяют свернуть часть информации, т.е. представить ее в удобообозримом виде). Например, факторная теория личности выделяет ряд обобщенных характеристик поведения, которые в данном случае называются чертами личности. *Кластерный анализ* позволяет выделить ведущий признак и иерархию взаимосвязей признаков. *Дисперсионный анализ* используется для изучения одной или нескольких одновременно действующих и независимых переменных на изменчивость наблюдаемого признака. *Регрессионный анализ*, как правило, применяется тогда, когда требуется выяснить, насколько изменяется средняя величина одного признака при изменении на единицу другого признака. *Латентно-структурный анализ* дает возможность исследовать проявления сложных взаимосвязей непосредственно ненаблюдаемых характеристик педагогических явлений. Латентный анализ может являться основой для моделирования указанных взаимосвязей. *Многомерное шкалирование* обеспечивает наглядную оценку сходства или различия между некоторыми объектами, описываемыми большим количеством разнообразных переменных. Эти различия представляются в виде расстояния между оцениваемыми объектами в многомерном пространстве.

Литература

1. Глазунов А.Т. Педагогические исследования: содержание, организация и обработка результатов. – М.: Издательский центр АПО, 2003. – 41 с.

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ — СТЕКЛОВА В $\ell^2_N(\mathbb{R})$ И ИХ НОРМЫ

Лихобабенко М.А. (Самара)

marijalapshina@rambler.ru

Пусть M и N — натуральные числа, причем $M \geqslant N$, и пусть J — конечное или бесконечное множество индексов.

Определение 1. Последовательность элементов $\{\varphi_k\}_{k\in J}$ из пространства $\ell^2_N(\mathbb{R})$ называется фреймом Парсеваля — Стеклова для $\ell^2_N(\mathbb{R})$, если выполнено равенство Парсеваля — Стеклова $\sum\limits_{k\in J} |< x, \varphi_k >|^2 = \|x\|^2$, для любого x из $\ell^2_N(\mathbb{R})$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$.

Определение 2 [1]. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\ell_N^2(\mathbb{R})$ называется ε — почти фреймом Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$, если для любого $x \in \ell_N^2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства $(1-\varepsilon)\|x\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |<x, \varphi_k>|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|^2$.

Найдены условия на наборы положительных чисел, которые являются нормами фреймов Парсеваля — Стеклова.

Теорема 1 [2, 3]. В пространстве $l_N^2(\mathbb{C})$ и $l_N^2(\mathbb{R})$ существует фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ с одинаковыми нормами, равными $\|\varphi_k\| = \sqrt{\frac{N}{M}}$ для любого $M \geqslant N$.

Теорема 2 [4]. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_M > 0$, тогда следующие условия эквивалентны.

1) Существует фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$ такой, что $\|\varphi_k\| = a_k$ для любого $k = 1, 2, \ldots, M$.

2) Для последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{M}$ выполняются следующие условия: $a_k^2 \leqslant 1$ для $k = 1, \ldots, M$; и $\sum\limits_{k=1}^{M} a_k^2 = N$.

Теорема 3. Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ и $\|\varphi_k\| = a_k$ для $k = 1, 2, \ldots$, то $a_k^2 \leqslant 1$ для $k = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N$.

Теорема 4. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что $a_k^2 \leqslant 1$ для $k = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N$. Тогда существует $\varepsilon \in [0, 1)$ и ε — почти фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ и $\|\varphi_k\| = a_k$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Литература

1. Bodmann B., Casazza P. When are frames close to equal-norm Parseval frames? // Proc. SPIE. 2009. – № 7446(744616).

2. Драбкова Е.С., Новиков С.Я. Объем фрейма Парсеваля // Вестник Самарского государственного университета. Самара: Изд-во Самарский ун-т, 2007. – № 9/1(59). – С. 91–106.

3. Лапшина М.А. Равномерные фреймы в пространстве $\mathbb{R}^N$ // Вестник Самарского государственного университета. – 2008. – № 6(65). – С. 112–122.

4. Лапшина М.А. Выравнивание норм в строках ортогональной матрицы и равномерные фреймы // Вестник Самарского государственного университета. – 2009. — № 2(68). – С. 51–59.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ В СЛУЧАЕ НЕОРТОГАНАЛЬНОГО ВЕКТОРА НЕОДНОРОДНОСТИ

Логинова Е.А. (Воронеж)

Рассматривается задача, описывающая стационарное распределение тепла в неоднородном материале (FGM) с трещиной.

$$\frac{\partial^2 u(x_1,\, x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,\, x_2)}{\partial x_2^2}+k\cos\alpha\frac{\partial u(x_1,\, x_2)}{\partial x_1}+k\sin\alpha\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0. \tag{1}$$

$$u(x_1,\,+0)-u(x_1,\,-0)=q_0(x_1); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2}+k\sin\alpha u(x_1,+0)-$$

$$-\frac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2}-k\sin\alpha u(x_1,-0)=q_1(x_1);\ x_1\in[-1;1].$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $q_1(\sigma_1)\in C^2[-1,1], q_0(\sigma_1)\in C^2[-1,1]$.

Тогда существует классическое решение задачи (1) – (2), имеющее вид

$$U=-\frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{1}(-\frac{1}{2\pi})\int_{-1}^{1}e^{-\frac{k}{2}((x_1-\sigma_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha)}\times$$

$$\times K_l(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2})(\sum_{n=0}^{1}q_{1-n}(\sigma_1))\times$$

$$\times(-\frac{k\sin\alpha}{2})^n)^{1-l}(\frac{x_2q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2+(x_1-\sigma_1)^2}})^l(-\frac{k}{2})^l d\sigma_1.$$

При этом граничные условия (2) выполняются всюду в классическом смысле, кроме точек$(\pm1,0)$, в которых они выполнены в смысле главного значения. При дополнительном предположении $q_0'(\pm1)=0$граничные условия выполняются в классическом смысле всюду без ограничений.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение задачи (1) –(2) единственно в $L_2(\mathrm{R}^2)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения $U(x_1\,x_2)$ задачи (1)-(2) при $(x_1,\,x_2)\to(\pm1,0)$справедливо следующее асимптотическое представление

$$U=\frac{1}{4\pi}\sum_{\gamma=0}^{1}\sum_{z=0}^{1}\sum_{n=0}^{1}\sum_{m=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\sum_{k=1}^{2}\ln[((-1)^{k-1}-x_1)^2+x_2^2]\times$$

$$\times((((q_l'((-1)^{k-1})((-1)^{k-1}x_2)^{1-l}\times$$

$$\times\frac{(x_1+(-1)^k)^2+x_2^2}{2})^l)^{1-m}\times$$

$$\times((-1)^k\frac{k\sin\alpha}{4}x_2q_0'((-1)^{k-1}))^m)^{1-n}(\frac{1}{2}q_0'((-1)^{k-1})\times$$

$$\times(-\frac{1}{2}\cos\alpha((-1)^{k+1}-x_1)x_2-\frac{1}{2}x_2^2\sin\alpha))^n)^{1-z}\times$$

$$\times(\frac{1}{16}kq_1'(-1)^{k-1}(-1)^{k-1})^z)^{1-\gamma}$$

$$\times((\frac{1}{6}\cos\alpha(x_1+(-1)^k)^3+\frac{1}{2}\sin\alpha(x_1+(-1)^k)^2x_2+$$

$$+\frac{1}{2}\cos\alpha(x_1+(-1)^k)x_2^2-\frac{1}{2}\sin\alpha x_2^3)^z\times$$

$$\times((\frac{(-1)^k}{32}k^2\sin\alpha q_0'((-1)^{k-1}))^\gamma)^z-16+R(x_1,x_2).$$

Здесь $R(x_1,x_2)$ равномерно ограничена при $x_2\to+0$, $x_1\in[-1,1]$.

Литература

1. Erdogan F. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading/F.Erdogan- J.Appl. Mech. 52, 1985.-823–828c.

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики/ В.С.Владимиров.-4-е изд. Перераб. и доп.-М.:Наука, 1981- 512c.

3. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций /Г.Н. Ватсон-М.: Издательство иностранной литературы , 1949- 875c.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ И ЕГО АСИМПТОТИКА

Логинова Е.А. (Воронеж)

Рассматривается задача, описывающая стационарное распределение тепла в неоднородном материале (FGM) с трещиной.

$$\frac{\partial^2 u(x_1,\,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+k\frac{\partial u(x_1,\,x_2)}{\partial x_2}=0. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&u(x_1,\,+0)-u(x_1,\,-0)=q_0(x_1);\\ &\tfrac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2}+\tfrac{k}{2}u(x_1,+0)-\tfrac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2}+\tfrac{k}{2}u(x_1,-0)=\\ &=q_1(x_1);\ \ x_1\in[-1;1].\end{aligned} \tag{2}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема1. Пусть $q_1(\sigma_1)\in C^2[-1,1], q_0(\sigma_1)\in C^2[-1,1]$. Тогда существует классическое решение задачи (1) – (2), имеющее вид

$$U=e^{-\frac{k}{2}x_2}[-\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_0(\tfrac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2})q_1(\sigma_1)d\sigma_1+$$
$$+\tfrac{k}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_1(\tfrac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2})\left(x_2^2+(x_1-\sigma_1)^2\right)^{-0,5}x_2q_0(\sigma_1)d\sigma_1].$$

При этом граничные условия (2) выполняются всюду в классическом смысле, кроме точек $(\pm1,0)$, в которых они выполнены в смысле главного значения.

При дополнительном предположении $q_0'(\pm1)=0$ граничные условия выполняются в классическом смысле всюду без ограничений.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение задачи (1) –(2) единственно в $L_2(\mathrm{R}^2)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения $U(x_1\,x_2)$ задачи (1)-(2) при $(x_1,\,x_2)\to(\pm1,0)$справедливо следующее асимптотическое представление

$$U=\tfrac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\sum_{k=0}^{1}\sum_{n=1}^{2}[(-1)^{n+1}\tfrac{1}{2}x_2^{1-k}(0,5(((-1)^{n+1}+x_1)^2-x_2^2))^k\times$$
$$\times\ln(((-1)^{n+1}-x_1)^2+x_2^2)q_k'((-1)^{n+1})$$
$$+R(x_1,x_2).$$

При дополнительном предположении $q_0'(\pm 1) = 0$ асимптотика решения при $(x_1, x_2) \to (\pm 1, 0)$ принимает вид

$$U = -\frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi} \sum_{k=0}^{1} \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(x_2)^{1-k}(\tfrac{1}{2})^k q_k^{(2-k)}((-1)^{n+1} - x_1)^{1-k} \times$$
$$\times \ln(((-1)^{n+1} - x_1)^2 + x_2^2)(((-1)^{n+1} - x_1)^2 - x_2^2)^k + R_1(x_1, x_2).$$

Функции $R(x_1, x_2)$,$R_1(x_1, x_2)$ равномерно ограничены при $x_2 \to +0$, $x_1 \in [-1, 1]$.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики/ В.С.Владимиров.-4-е изд. Перераб. и доп.-М.:Наука, 1981- 512с.

2. Li Y.-D. An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities/ Yong-Dong Li, Kang Yong Lee – Int. J. Fract. 146, 2007.- 203-211.

3. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций /Г.Н. Ватсон-М.: Издательство иностранной литературы , 1949- 875с.

О СХОДИМОСТИ РЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ МЕР[1]

Лукашенко Т.П. (Москва)

lukashenko@mail.ru

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с неотрицательной мерой μ, где Ω — множество, Σ — алгебра (или σ-алгебра) его подмножеств, а μ — конечно (счётно) аддитивная неотрицательная мера на Σ. Пусть $\{E_k^m\}_k$ — конечные (не более чем счётные) системы множеств конечной строго положительной меры, где $m, k \in \mathbb{N}$, $E_k^m \cap E_l^m = \varnothing$ при $k \neq l$, а если $E_k^m \cap E_l^n \neq \varnothing$ и $m < n$, то $E_k^m \supset E_l^n$. Пусть также (Ω, Σ, ν) — пространство с ограниченной комплексной мерой ν (см. [1, глава III; 2, с. 105-107]).

Определение. Зададим *рекурсивное разложение* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$: 1) $r_0 = \nu$; 2) если для натурального m задана мера r_{m-1}, остаток приближения, и система множеств $\{E_k^m\}_k$, то полагаем $\widehat{\nu}_k^m = \frac{r_{m-1}(E_k^m)}{\mu(E_k^m)}$ и для всех допустимых k и для множеств $D \in \Sigma$ полагаем меру $r_m(D) =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00321) и ведущей научной школы НШ-3252.2010.1.

$r_{m-1}(D) - \sum\limits_k \widehat{\nu}_k^m \mu\left(D \cap E_k^m\right)$. Коэффициенты $\widehat{\nu}_k^m$ — *рекурсивные коэффициенты* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$, $m \in \mathbb{N}$, а ряд комплексных мер $\sigma(\nu/\mu; D) = \sum\limits_m \sum\limits_k \widehat{\nu}_k^m \mu\left(D \cap E_k^m\right)$ — *рекурсивный ряд* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$. Его*частичной суммой* с номером $n \in \mathbb{N}$ назовем меру $S_n(\nu/\mu; D) = \sum\limits_{m=1}^{n} \sum\limits_k \widehat{\nu}_k^m \mu\left(D \cap E_k^m\right)$. Рекурсивное разложение мер является развитием рекурсивных разложений функций из [3].

Если $\mu(D) = 0$, то рекурсивный ряд меры ν по мере μ тождественно нулевой и равен $\nu(D)$ только в случае, если $\nu(D) = 0$. Следовательно, не всегда рекурсивный ряд $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$. Пусть множества E_k^m имеют *свойство дробления* — любое множество E_k^m является конечным (не более чем счетным) объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$. Укажем условия сходимости рекурсивного ряда $\sigma(\nu/\mu; D)$ к $\nu(D)$.

Теорема. *Если множество $D \in \Sigma$ имеет конечное (не более чем счетное) покрытие множествами из системы $\{E_k^n\}_k$, то необходимым и достаточным условием сходимости рекурсивного ряда $\sigma(\nu/\mu; D)$ к $\nu(D)$ является равенство*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k \frac{\nu\left(E_k^m \setminus D\right) \mu\left(D \cap E_k^m\right) - \nu\left(D \cap E_k^m\right) \mu\left(E_k^m \setminus D\right)}{\mu\left(E_k^m\right)} = 0.$$

Следствие. *Если $D \in \Sigma$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая покрывающая D система $\{E_k^n\}_k$, что, обозначив $\Gamma^n = \{k : D \cap E_k^n \neq \varnothing \quad и \quad E_k^n \setminus D \neq \varnothing\}$, имеем $\sum\limits_{k\in\Gamma^n} \operatorname{var}\left(\nu, E_k^n\right) < \varepsilon$ (см. [1, с. 111]), то рекурсивный ряд $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$.*

Если, определив меру ν на всех множествах E_k^m, распространять ее по схеме Жордана (см. [2, с. 296]), то утверждение следствия означает, что на ν-измеримых по Жордану множествах рекурсивный ряд $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$.

Литература

1. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц. *Линейные операторы. Общая теория.* М., ИЛ, 1962; ЛКИ, 2008.

2. В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ: университетский курс*, М.-Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотич. динамика", 2009.

3. Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий. *О рекурсивных разложениях по цепочке систем* // Доклады РАН, Т. 425, №6 (2009), 1–6.

ОБ ОДНОЙ МАТРИЦЕ УЗЛОВ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ НА ДВУХ ОТРЕЗКАХ

Лукашов А.Л. (Саратов, Стамбул)
alukashov@fatih.edu.tr;LukashovAL@info.sgu.ru

А.Кроо на конференции в Созополе поставил следующую задачу: указать в явном виде матрицу узлов интерполирования, все узлы которой лежат на двух заданных несимметричных отрезках $E = [-1, a] \cup [b, 1]$, константы Лебега которой имели бы порядок роста $O(\log n)$.

Ранее автором (см. [1,2]) были получены оценки констант Лебега рациональных интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по нулям дробей Чебышева-Маркова, наименее уклоняющихся от нуля на двух отрезках, при условии регулярности соответствующей матрицы полюсов. Заметим, что условие регулярности может быть записано в существенно более короткой записи, чем в [1], как

$$\sum_{j=1}^{n} \omega(z_{j,n}) \in \mathbb{N},$$

где $\omega(z)$ обозначает гармоническую меру первого отрезка $[-1, a]$ относительно полюса z.

ТЕОРЕМА Пусть $z_{j,n} = \infty, j = 1, \ldots, n-1$ и $z_{n,n} \in \mathbb{R}$ таковы, что $\lim_{n\to\infty} z_{n,n} = \infty$ и выполнено условие регулярности. Пусть $\mathfrak{M} = \{x_{k,n}\}_{k=1,n=2}^{n,\infty} \subset E$ - матрица узлов интерполирования, составленная из нулей дробей Чебышева-Маркова, наименее уклоняющихся от нуля на E с матрицей полюсов $z_{j,n}$. Тогда константы Лебега полиномиальных интерполяционных процессов Лагранжа имеют порядок роста $O(\log n)$.

Литература

1. А.Л. Лукашов Об интерполировании рациональными функциями на двух отрезках. Деп. в ВИНИТИ 01.11.89, № 6616-В89, Сарат. ун-т, Саратов, 1989.

2. А. Л. Лукашов, Рациональные интерполяционные процессы на двух отрезках, Изв. вузов. Матем., 1998, № 5, 35–42.

ОПЕРАТОРЫ РАСТЯЖЕНИЯ НА ПРОИЗВЕДЕНИИ НУЛЬМЕРНЫХ ГРУПП[1]

Лукомский С.Ф. (Саратов)

Lukomskiisf@info.sgu.ru

Основным моментом при построении КМА в многомерном случае является наличие оператора растяжения [1]. Мы обсудим методы построения оператора растяжения на произведении нульмерных групп.

Пусть $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ – локально компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп

$$\cdots \subset \mathfrak{G}_n \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_{-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_{-n} \subset \dots \tag{1}$$

такой, что $(\mathfrak{G}_n/\mathfrak{G}_{n+1})^\sharp = p$ – простое число, $g_n \in \mathfrak{G}_n \setminus \mathfrak{G}_{n+1}$ – базисная последовательность в $\mathfrak{G}$, $\exists \beta_1, \dots, \beta_s \in \overline{0, p-1}$ такие, что

$$pg_n = \beta_1 g_{n+1} \dot{+} \beta_2 g_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} \beta_s g_{n+s}. \tag{2}$$

Произведение $G = \mathfrak{G}^d$ нульмерных групп снова является нульмерной группой, но подгруппы $G_{nd} = \mathfrak{G}_n^d$ не образуют основную цепочку, т.к. $(\mathfrak{G}_n^d/\mathfrak{G}_{n+1}^d)^\sharp = p^d$. Поэтому цепочку подгрупп $\mathfrak{G}_n^d$ необходимо дополнить до основной.

Теорема 1. *Пусть при фиксированном $n \in \mathbb{Z}$*

$$\mathfrak{G}_{n+1}^d = G_{(n+1)d} \subset G_{(n+1)d-1} \subset \cdots \subset G_{nd+1} \subset G_{nd} = \mathfrak{G}_n^d$$

строго возрастающая совокупность подгрупп. Тогда существует матрица $\mathcal{A}_n = \left(a_{\nu,l}^{(n)}\right)$ такая, что

$$G_{(n+1)d-l} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{(n+1)d-l+1} \dot{+} j\mathbf{g}_{(n+1)d-l}).$$

$$\mathbf{g}_{(n+1)d-l} = (a_{0,l}^{(n)} g_n, a_{1,l}^{(n)} g_n, \dots, a_{d-1,l}^{(n)} g_n,), \quad a_{\nu,l}^{(n)} = \overline{0, p-1}.$$

Матрицы $\mathcal{A}_n$ можно выбрать одинаковыми при всех n и можно указать алгоритм их построения.

Теорема 2. *Если матрицы $\mathcal{A}_n$ одинаковы при всех n, операция*

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента по поддержке ведущих научных школ, проект НШ-4383.2010.1 и фонда РФФИ, грант 10-01-00097-а.

$\dot{+}$ *в исходной группе* $\mathfrak{G}$ *удовлетворяет равенству (2), то векторы* $\mathbf{g}_{(n+1)d-l}$ *образуют базисную последовательность и равенство*

$$A_d\mathbf{x} = \sum_{n,l} a_{nd+l}\mathbf{g}_{nd+l-1} \ \text{ при } \ \mathbf{x} = \sum a_{nd+l}\mathbf{g}_{nd+l}$$

определяет в $G = \mathfrak{G}^d$ *оператор растяжения.*

Литература

1. Лукомский С. Ф. КМА на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64.

РЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЗАРЯДОВ ПО СИСТЕМЕ МНОЖЕСТВ[1]

Мазурчик Г.Б. (Москва)
mazurchikk@yandex.ru

В работе [1] было определено разложение функции на произвольном пространстве с мерой по характеристическим функциям некоторой системы подмножеств, а в [2] было дано обобщение этого разложения на случай мер. В данной работе это разложение обобщается на случай зарядов как в качестве разлагаемых элементов, так и в качестве элемента, по которому производится разложение.

Пусть Ω — компактное топологическое пространство, μ — заряд на Ω, вариация которого является борелевской регулярной мерой. Пусть также мы имеем семейство множеств $\{E_k^m\}_{m\in\mathbb{N},k\in K_m}$, $E_k^m \subset \Omega$, со следующими свойствами:

1. $\mu(E_k^m) \neq 0$;
2. $E_k^n \cap E_l^n = \varnothing$ при $k \neq l$;
3. Если $E_k^n \cap E_l^m \neq \varnothing$ и $m > n$, то $E_l^m \subset E_k^n$;
4. Для любых m и k $E_k^m = \bigcup\limits_{l:E_l^{m+1}\subset E_k^m} E_l^{m+1}$.

Построим рекурсивное разложение произвольной комплексной регулярной борелевской меры ν на Ω по заряду μ и системе множеств $\{E_k^m\}$. Положим $r_0 = \nu$, и при определённом r_{m-1} положим $\hat{\nu}_k^m = \frac{1}{\mu(E_k^m)} r_{m-1}(E_k^m)$, $r_m(D) = r_{m-1}(D) - \sum\limits_k \hat{\nu}_k^m \mu(E_k^m \cap D)$. В случае абсолютно непрерывной меры ν это определение совпадает с

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

определением из [1], если в качестве разлагаемой функции рассматривать плотность меры ν.

Сходимость этого разложения на каждом измеримом множестве для произвольной меры гарантировать нельзя. Однако имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть для любого борелевского множества B и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся набор $\{E^m_{k_p}\}_{p=1}^P$, приближающий множество B: $|\nu|(B \triangle \bigsqcup\limits_{p=1}^{P} E^m_{k_p}) < \varepsilon$. Тогда последовательность остатков $\{r_n\}$, рассматриваемых как линейные непрерывные функционалы на пространстве $C(\Omega)$, слабо сходится к нулю.

Литература

1. *Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Доклады академии наук. 2009. Т. 425, №6. С. 741–746.

2. *Мазурчик Г.Б.* Рекурсивные разложения зарядов по системе множеств // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 15-й Сарат. зимней школы. Саратов, 2010. С. 112.

О СВОЙСТВАХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПЛОСКОГО ТОРА

Макарова А.В. (Воронеж)

sga@math.vsu.ru

Вводится понятие параллельного векторного поля на группе соболевских H^s-диффеоморфизмов плоского n-мерного тора, $s > \frac{n}{2} + 1$. Доказывается теорема существования интегральных кривых параллельных векторных полей.

Мы исследуем векторные поля на группе $D^s(T^n)$ соболевских H^s-диффеоморфизмов плоского n-мерного тора T^n, $s > \frac{n}{2}+1$. Необходимые предварительные сведения о структуре гильбертова многообразия и структуре группы на этих пространствах имеются в [1,2].

На $D^s(T^n)$, кроме упомянутой выше алгебраической структуры, имеется дополнительная структура, порожденная абсолютным параллелизмом касательного расслоения на торе. Эта структура описывается следующим образом (см., например, [2]).

Введем операторы:

(i) $B : T\mathcal{T}^n \to R^n$, проекция на второй сомножитель в $TT^n = T^n \times R^n$;

(ii) $A(m) : R^n \to T_m\mathcal{T}^n$, обратное к B (см. (i)) отображение на касательное пространство к T^n в $m \in T^n$;

(iii) $Q_g = A(g(m)) \circ B$ – линейный изоморфизм $Q_g : T_mT^n \to T_{g(m)}T^n$, где $g \in D^s$ и $m \in T^n$.

Определение. Векторное поле X на $D^s(T^n)$ называется параллельным, если в каждой точке $\eta \in D^s(T^n)$ вектор $X_\eta = Q_\eta X_e$, где $X_e \in T_eD^s(T^n)$.

Отметим, что параллельное векторное поле X является инвариантным относительно Q_θ для любого $\theta \in D^s(T^n)$.

Теорема. *Пусть $X(t)$ – кривая в $T_eD^s(T^n)$, измеримая по t, сильная норма которой $\|X(t)\|$ интегрируема по t на каждом конечном промежутке. Пусть $\tilde{X}(t,\eta)$ – соответствующее ей параллельное векторное поле на $D^s(T^n)$. Тогда задача Коши*

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{X}(t,\eta), \qquad \eta(0) = \eta_0 \in D^s(T^n)$$

имеет решение при всех $t \in [0, +\infty)$, причем единственное.

Литература

[1] Эбин Д. Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости / Д. Эбин, Дж. Марсден // Математика (сб. переводов).- 1973.- Т. 17, N 5.- С. 142-167; N 6.- С. 111-146.

[2] Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю.Е. Гликлих.- М.: Комкнига, 2005.- 416 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АПЕРТУРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ В ПРОГРАММНО-ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РАДИОУСТРОЙСТВАХ

Маковий В.А.

При дискретизации вследствие апертурной неопределённости дискретизатора в цифровом сигнале возникают нежелательные составляющие (помехи). Расширение частотного диапазона программно-определяемых радиоустройств, повышение требований к избирательности и динамическому диапазону обусловливают актуальность исследований свойств этих помех.

Рассмотрено применение имитационных моделей двух основных типов, отличающихся методами внесения апертурной неопределенности. Вычислительный метод моделирования апертурной неопределённости заключается в вычислении значений дискретных отсчётов сигнала в моменты времени $\tilde{t}_i = t_i + \tau_i$ и присвоении полученных значений моментам времени t_i. При этом τ_i формируется для каждого отсчёта независимо в соответствии с моделируемым видом распределения. Предложена модель апертурной неопределённости, основанная на интерполяционном методе. Входным сигналом имитационной модели являются дискретные отсчёты. Задача имитационной модели состоит в замене входных значений сигнала $s(t_i)$, соответствующих моментам выборки t_i, на другие, соответствующие значениям входного сигнала в случайные моменты времени $\tilde{t} = t_i + \tau_i$ в соответствии с выражением $\xi_a(t_i) = s(t_i + \tau_i) - (s(t_i) + s'(t_i) \cdot \tau_i)$. Приведена структурная схема предложенной модели.

Получены аналитические выражения для оценки точности моделирования, позволяющие проводить верификацию моделей при различных законах распределения апертурной неопределённости. Для интерполяционного метода получен относительный уровень дополнительных помех, возникающих из-за использования более легко реализуемой линейной интерполяции вместо интерполяции по Котельникову. Доказано, что мощность ошибки интерполяции в практически значимых случаях много меньше мощности апертурных помех и не влияет на выходной сигнал предложенной модели.

Получены формулы для расчёта мощности помех, возникающих вследствие апертурной неопределённости при дискретизации синусоидального сигнала для трёх основных встречающихся на практике распределений апертурной неопределённости: нормального, равномерного и треугольного. Показано, что для задания параметров апертурного джиттера достаточно указания типа распределения и среднеквадратического отклонения момента взятия выборки от номинального значения. Приведённые формулы имеют практическую ценность и применяются в процессе верификации разрабатываемых имитационных моделей аналого –цифровых трактов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНО-ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РАДИОСРЕДСТВ

Маковий В.А., Чупеев С.А., Зародин С.Г.

Разработка и внедрение программно-определяемых радиосредств связана с новым взглядом и принципами: важно не только определить принципы РЭА но и связать их написанием сложного, многозадачного программного обеспечения.

Рассмотрена иерархическая структура разработки программно-определяемых радиосредств, от постановки возможной задачи до внедрения в цикл автоматизированного производства и сопровождения серийного выпуска изделий с учетом необходимой модернизации. Показан алгоритм взаимодействия различного уровня, позволяющий связать процесс разработки радиотехнических устройств и написания программного обеспечения в части управления и цифровой обработки сигналов.

При этом, решение задач имитационного моделирования различных радиотехнических устройств, приобретает особое значение, поскольку от точности полученных результатов зависит структура и параметры не только аппаратной но и программной части изделия

В качестве примера показано решение задачи вычисления спектральной характеристики сигнала для использования в программно-определяемом цифровом возбудителе или при преобразовании входной частоты для цифрового приемника. Показаны зависимости спектра сигнала от параметров опорного генератора и элементной базы цифро-аналоговых устройств.

Объектом исследования служит линеаризованная имитационная математическая модель преобразования фазовых шумов в цифровом возбудителе, при условиях, что спектральная плотность мощности фазовых шумов элементов системы достаточно мала по сравнению с полезным сигналом, фазовые шумы отдельных элементов аддитивны и взаимно некоррелированны.

Рассмотрены результаты моделирования в зависимости в зависимости от значения входных величин, определены возможные пути достижения заданных значений, проведен сопоставительный анализ с экспериментальными исследованиями макета.

Сделаны выводы о точности полученных результатов, достаточной для практического применения в процессе разработки, областях применения и эффективности решения поставленной задачи.

Проведенные исследования имеют практический результат и вносят существенный вклад в процесс разработки аналого-цифровых и цифро-аналоговых узлов в программно-определяемых радиосредствах.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЯГКОГО ОГРАНИЧИТЕЛЯ СИГНАЛА В СРЕДСТВАХ СВЯЗИ

Маковий В.А., Чупеев С.А., Зародин С.Г.

При формировании сигналов с OFDM или любых других многотоновых сигналов важным аспектом является получение наиболее низкого пикфактора сформированного сигнала. Одним из распространенных способов получения низкого пикфактора сигнала является ограничение его амплитуды. Однако при ограничении амплитуды сигнала происходит искажения формы передаваемого сигнала.

Рассмотрено использование математической модели для получения ограниченного сигнала. При этом достигаются следующие цели:

1. Исследование влияния ограничения амплитуды формируемого сигнала на помехоустойчивость формируемого сигнала.
2. Выбор оптимального порога ограничения амплитуды сигнала.
3. Вычисление ограничительной линии спектра формируемого сигнала.
4. Определение минимально возможного значения получаемого пикфактора.

Предложенная модель позволяет работать с входными и выходными wav файлами. При этом задаются следующие параметры моделирования:

1. Определяется количество ступеней ограничения сигнала.
2. Определяется относительный уровень ограничения сигнала на каждой ступени.
3. Определяется коэффициент интерполяции модели.
4. Длина импульсной характеристики используемого фильтра.

5. Ширина переходной характеристики используемого фильтра.

6. Центральная частота сигнала.

7. Частота дискретизации берется из входного файла.

Структурная схема модели приведена на рис.1

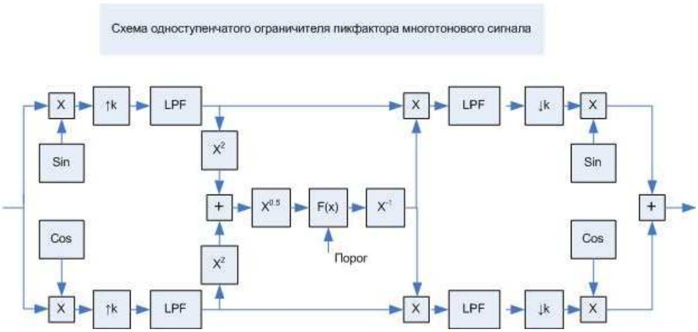

Рис. 1: Схема одноступенчатого ограничителя пикфактора многотонового сигнала.

Здесь обозначено:
LPF – фильтр нижних частот;
X – умножитель;
↑k – интерполятор;
↓k – дециматор;
X^2 – квадратор;
$X^{0,5}$- функция извлечения квадратного корня;
+ - сумматор;
Cos, Sin – функции вычисления функций косинуса и синуса соответственно;

Предложенная модель использовалась при моделировании устройства формирования сигналов с перестановочной модуляцией изделия “Терминал-10К”. В результате моделирования получены следующие характеристики. Для 24-х тонового сигнала пикфактор амплитуды сигнала составил 5 Дб для 8 тонового 4 Дб.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИЙ СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ДВУХМОДОВОМ ВЫРОЖДЕНИИ В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Малюгина М.А. (Воронеж)

Уравнение $\frac{d^2}{dx^2}\left(q\frac{d^2p}{dx^2}\right)+\kappa\frac{d^2p}{dx^2}+\varepsilon\frac{dp}{dx}+\alpha p+p^3=0$, на отрезке $[0,1]$ при локализизации параметров $\kappa=5+\delta_1, \alpha=4+\delta_2$, где $\varepsilon,\delta_1,\delta_2$ — малые параметры, $q(x)=1+\delta\gamma(x)$ — функция неоднородности материала, при краевых условиях $p(0)=\frac{d^2p}{dx^2}(0)=p(1)=\frac{d^2p}{dx^2}(1)=0$ при $\varepsilon\neq 0$ не является потенциальным. При различных комбинациях параметров δ, ε данное уравнение уже было исследовано ранее. ($\delta=1$, $\varepsilon=0$ - в работе [1], $\delta=0$, $\varepsilon>0$ - в работе [2]).

При изучении ветвлений решений в случае $\delta>0$, $\varepsilon>0$ подход с использованием ключевой функции $W(\xi)$ заменяется изучением ветвлений решения ключевого уравнения $\theta(\xi)$ на координатной плоскости.

В работе [3], была вычислена главная часть ключевого уравнения и дано локальное описание дискриминантного множества. Полученная параметризация выглядит следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{l}
\widetilde{\varepsilon}=-3s\frac{sin^3(\psi)}{cos(\psi)}-\frac{\delta_3 sin^2\psi+\delta_3}{2cos\psi}\ ,\\
\delta_1=-3s(1+cos^2(\psi))+\frac{\delta_3}{2}sin\psi+s\frac{(5cos^2(\psi)-3)}{cos(\psi)}-\frac{3\delta_3 sin\psi}{2cos\psi}\ ,\\
\delta_2=-3s(1+cos^2(\psi))+\frac{\delta_3}{2}sin\psi-s\frac{(5cos^2(\psi)-3)}{cos(\psi)}+\frac{3\delta_3 sin\psi}{2cos\psi}\ .
\end{array}\right.$$

тут $\widetilde{\varepsilon}$, δ_1, δ_2 и δ_3 - линейные функции от закритических приращений параметров ε, κ, α и параметра δ.

Там же, в работе [4] были представлены графические изображения $2D-$ и $3D-$сечений дискриминантного множества.

Литература

[1] Костин Д.В. Бифуркационный анализ критических точек функции двух переменных вблизи особенности типа 2–мерной сборки// Математические модели и операторные уравнения. Том 5, ч.1. Воронеж: ВГУ. 2008. – С.91–97.

[2] Малюгина М.А. К анализу посткритических прогибов слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения потенциальности//Семинар по глобальному и стохастическому анализу/ Сборник научных статей под ред. Ю.Е.Гликлиха и Ю.И.Сапронова. - Воронеж: ВГУ,2009. - Вып.4 – С.32-37

[3] Малюгина М.А. Сечение дискриминантных множеств слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушеня потенциальности // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1/2011 Воронеж: ВГУ. 2011 //отдано в печать

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Махинова О.А. (Воронеж)
moa1002@mail.ru

Рассматривается ряд простых и вместе с тем типичных задач математической физики в приложении к распределенным системам на геометрическом графе. На некоторых моделях представлен анализ устойчивости разностных схем таких задач, базирующийся на спектральной технике анализа Фурье.

В центре исследований находится одномерный оператор Лапласа $(A\varphi)(x) \equiv -\frac{d^2\varphi(x)}{d^2x}$, определенный на гладких функциях, заданных на графе-звезде. Изучены его спектральные характеристики, представление собственных функций и их свойства (спектральная полнота в $L^2(\Gamma)$).

Получены явные разностные схемы для уравнений теплопроводности и колебаний на графе. Сеточная функция u^h на сетке Γ^h графа Γ является решением соответствующей разностной схемы. Ее представление в виде ряда Фурье по собственным векторам имеет вид:

$$u_j = \sum_{n=1}^{m(N-1)+1} U_n^j \widetilde{\varphi}_n, \ ,$$

где

$$U_n^j = \tfrac{1}{\omega_n}[u^j, \widetilde{\varphi}_n] = \tfrac{1}{\omega_n} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^j)_{\gamma_k} (\tilde{\varphi}_i)_{n_{\gamma_k}} +$$

$$+\tfrac{1}{\omega_n} \sum_{i=N+1}^{2N-1} (u_i^j)_{\gamma_k} (\tilde{\varphi}_i)_{n_{\gamma_k}}, \qquad \omega_n = [\widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\varphi}_n].$$

Получены рекурентные соотношения и оценки для коэффициентов Фурье U_n^j, что дает возможность установить устойчивость разностной схемы по Неймону и получить аналоги теоремы

А.Ф.Филипова. Представление решения конечно-разностного аналога дифференциальной системы дает возможность задачу управления такой системой свести к конечной l-проблеме моментов.

ПЯТЬ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ О КАЛЬКУЛЯТОРЕ ИЗ ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Мациевский С.В. (Калининград)
matsievsky@newmail.ru

Радует, что в школьной программе появились наконец задачи по занимательной математике. Правда, в структуре ЕГЭ по информатике и ИТК, причем информатика преподается не в каждой школе. В качестве примера рассмотрим задачу о калькуляторе.

Например, в демо-версии 2011 г. [1] эта задача имеет вид:

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера: 1) прибавь 1; 2) умножь на 3. Выполняя первую из них, Калькулятор прибавляет к числу на экране 1, а выполняя вторую, утраивает его. Запишите порядок команд в программе получения из 2 числа 26, содержащей не более 6 команд, указывая лишь номера команд.

Качественная подготовка к ЕГЭ одной из своих составляющих имеет изучение решения задач несколькими способами. Многие способы рещения задач ЕГЭ по информатике собраны в [2]. Задачу о калькуляторе можно решить пятью способами.

1. Подбором. Вполне эффективный способ. Успешно используется учащимися, незнакомыми с этой задачей.

2. Прямым деревом. Исследуются с помощью дерева команд калькулятора все возможные варианты получения чисел из первоначального. Самый трудоемкий способ.

3. Прямой картой. Составляется таблица, в которой указывается количество команд, за которые можно получить из первоначального все числа вплоть до конечного. Удобен для составления новых задач.

4. Обратным деревом. Исследуются с помощью обратного дерева команд калькулятора все возможные варианты получения чисел из конечного числа. Самый быстрый способ, поскольку одна из команд калькулятора — умножение, и обратная команда — деление — применима не на каждом шаге. Можно рекомендовать для устного решения.

5. Обратной картой. Составляется таблица, в которой указывается количество команд, за которые можно получить из конечного числа все числа вплоть до начального. Удобен для составления новых задач.

Литература

1. *ФИПИ.* [Электрон. ресурс]. URL: http://www.fipi.ru.

2. *Мациевский С. В.* Энциклопедия методов решения задач ЕГЭ по информатике и ИКТ. Калининград: РГУ им. И. Канта, 2010.

НЕКОТОРЫЕ ПРАВИЛА ГРУППОВОГО ВЫБОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Мелькумова Е.М. (Воронеж)

pmim@yandex.ru

Многокритериальность является особенностью реальных систем, при этом критерии, которые необходимо оптимизировать, зачастую противоречат друг другу. В данной статье предлагается подход к решению задач многокритериальной оптимизации на основе использования различных правил для принятия группового решения.

Пусть задана многокритериальная задача линейного программирования:

$$f_p(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i^p x_i^p \to \max(p = \overline{1,n}),$$

$$x \in X \subseteq R^n \tag{1}$$

где $X-$множество допустимых значений переменной x, а $n-$число целевых функций.

Предлагается следующий *алгоритм решения* задачи математического программи-рования, учитывающий групповое правило принятия решения:

1. Для каждой целевой функции решить задачу максимизации с исходными гранич-ными условиями, получив оптимальное решение x_p^* и соответствующее значение целевой функции $f_p(x_p^*)$.

2. Для выбранного принципа принятия группового решения (принцип большинства, правило Борде и др.) построить ранжирование $(x_{i_1}^*, .., x_{i_p}^*)$ точек - решений x_p^* по предпочтительности в зависимости от значений целевых функций [1].

Соответствующим образом упорядочить целевые функции.

3. Определить решение задачи математического программирования, используя определенное правило принятия группового решения.

Рассмотрим следующую многокритериальную задачу линейного программирования:

$$f_1(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$f_2(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$f_3(x) = -2x_1 + 4x_2 \to \max, \qquad (2)$$

при условии

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 8,$$

$$-x_1 + 3x_2 \leqslant 9,$$

$$2x_1 - x_2 \leqslant 10,$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \qquad (3)$$

В качестве основы будем использовать несколько правил для принятия группового решения: правило большинства, правило Борда, правило Кондорсе и стратегическое голосование.

Используя описанный выше алгоритм и правила принятия решений [1], получаем следующий результат: в соответствии с правилами большинства и Кондорсе в качестве приближенного решения соответствующей многокритериальной задачи следует принять точку $(6, 2)$, а по правилам Борда и стратегического голосования лучшей является точка $(3, 4)$.

Литература

[1] Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1986 - 495 с.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА[1]

Мещерякова Е.А. (Саратов)

narelena@yandex.ru

Пусть D выпуклый компакт из $\mathbb{R}^p$, с непустой внутренностью, $n(x)$ - некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Задачей об асферичности компакта D называется

$$\varphi\left(x\right) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \longrightarrow \min_{x \in D}, \tag{1}$$

где функции

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x-y),\ \rho(x) = \min_{y \in \Omega} n(x-y), \Omega = \overline{\mathbb{R}^p \backslash D}.$$

Известно([1]), что функция $\varphi\left(x\right)$ является квазивыпуклой и субдифференцируемой в смысле В.Ф. Демьянова - А.М. Рубинова ([2]), но, по крайней мере, в общем смысле не является выпуклой. В [3] получен критерий решения задачи (1) и условие его единственности. Здесь предлагается подход к приближенному решению задачи (1).

Пусть x_0 - произвольная точка из $intD$, а $c_0 = \varphi(x_0)$. Последовательность $\{x_k\}_{k=1,2,...}$ строиться следующим образом. Если уже получена точка $\{x_k\}$ и $c_k = \varphi(x_k)$, то точка $\{x_{k+1}\}$ является решением задачи

$$\psi_k(x) \equiv R(x) - c_k\rho(x) \longrightarrow \min_{x \in D}. \tag{2}$$

Важным обстоятельством является то, что задача (2) является задачей выпуклого программирования, поскольку функция $R(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^p$, а $\rho(x)$-вогнута на D.

Теорема 1. *Любая предельная точка последовательности $\{x_k\}_{k=1,2,...}$ является решением задачи (1).*

Отметим, что если шар нормы $n(\cdot)$ и сам выпуклый компакт D являются многогранниками, то задача (2) сводится к задаче линейного программирования.

Литература

1. *Мещерякова Е.А.* О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром // Математика. Механика: Сб.науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. вып. 10. С. 48–50.

[1]Работа поддержана грантом Президента РФ проект НШ-2970.2008.1.

2. *Демьянов В.Ф. Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.

3. *Дудов С.И. Мещерякова Е.А.* Об асферичности выпуклого компакта// Математика. Механика: Сб.науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. вып. 11. С. 43–45.

О РАДИУСЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ОСНОВНОГО РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СЕМЕЙСТВУ БЕККЕРА, ЕСЛИ ПОРОЖДАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ОБОБЩЕННО ВЫПУКЛОЙ

Микка В.П., Микка К.В. (Йошкар-Ола)
mikkav@marsu.ru

Основное решение внешней обратной краевой задачи в постановке Ф.Д. Гахова [1] определяется функцией $F(z)$, порождаемой оператором

$$F(z) = F\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) \equiv Af = \int \frac{f'(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta, \quad \zeta = \frac{1}{z}, \tag{1}$$

где регулярная в $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ функция восстанавливается с помощью краевых условий. Ставится следующая задача. Пусть

$$S^a_{n;1,1} = \Big\{f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + a_{n+2}\zeta^{n+2} + \ldots : \mathbf{Re}\,\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + 1 > -a\Big\},$$

$$B_3 = \Big\{F(z) = z + \frac{b_{-n+1}}{z^{n-1}} + \frac{b_{-n}}{z^n} + \ldots : \Big|z\frac{F''(z)}{F'(z)}\Big| \leqslant \frac{1}{|z|^2 - 1}\Big\}$$

– семейство Беккера [2]. Требуется определить

$$r_{B_3}[S^a_{n;1,1}] =$$

$$= \inf\sup\Big\{r_0 > 0 : A\psi_{r_0}(\zeta) \equiv A\Big(\frac{1}{r_0}f(r_0\zeta)\Big) \in B_3\Big\};\ f(\zeta) \in S^a_{n;1,1}.$$

Теорема. *Радиусы принадлежности*

$$r_{B_3}[S^a_{n;1,1}] = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n-2}{2(1+a)}}\sqrt{\frac{n(1+2a)}{2(n-2)(1+a)}}, & a > \frac{n}{4} - 1,\ n \geqslant 3, \\ 1, \quad -1 < a \leqslant \frac{n}{4} - 1,\ n \geqslant 3, \end{cases}$$

$$r_{B_3}[S^a_{2;1,1}] = \begin{cases} \frac{\sqrt{2(1+2a)}}{2(1+a)}, & a > -\frac{1}{2}, \\ 1, \quad -1 < a \leqslant -\frac{1}{2} \end{cases}$$

являются точными, т.к. регулярные функции

$$\psi_{r_0}(\zeta) = \frac{1}{r_0} f(r_0\zeta) = \frac{1}{r_0} \int\limits_0^{r_0\zeta} (1-\tau^n)^{-\frac{2(1+a)}{n}}\, d\tau$$

порождают функции $A\psi_{r_0}(\zeta)$, *которые не принадлежат семейству* B_3 *при* $r_0 > r_{B_3}[S^a_{n;1,1}]$.

Литература

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. - 640 с.

2. *Becker J., Pommerenke Ch.* Schlichtheitskriterien und Jordangebiete// J. reine und angew. Math. – 1984. – Bd. 354. – S.74-94.

О СОБСТВЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ $T-$ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Михайленко Б.А. (Воронеж)

B_Mikh@mail.ru

Рассматривая задачу о $T-$периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

обычно определяют некоторый интегральный оператор F в банаховом пространстве E, такой, что существует взаимно однозначное cоотеветствие между его неподвижными точками y_0 и $T-$периодическими решениями x_0 уравнения (1). Это соответствие будем называть T-эквивалентностью, оператор F назовем $T-$эквивалентным для уравнения (1). Линеаризованная на периодическом решении x_0 система (1):

$$\dot{x} = f'(t, x_0(t))x, \tag{2}$$

Будем полагать, что оператор F дифференцируем по Фреше, и его производная, вычисленная в точке y_0, является вполне непрерывным или $q-$уплотняющим относительно нормальной меры некомпактности с константой $q < 1$ оператором, $T-$ эквивалентным линейной задаче (2). Пусть система (2) имеет $T-$периодическое решение $\tilde{x}_0$. Для оператора сдвига W_0^T из 0 в T по траекториям системы

(2) очевидно, что $W_0^T\tilde{x}_0(0) = \tilde{x}_0(0)$. Будем считать, что к периодическому решению $\tilde{x}_0$ существуют присоединенные решения Флоке $x_j(t) = \sum_{k=0}^{j} v_k(t)P_k^{j-k}(t)$, где $v_0(t) = \tilde{x}_0(t), P_j^{j-k}(t)-$многочлены степени $j-k$ от переменной t, $j = 1,..,m, m < n$. Тогда оператор сдвига W_0^T имеет присоединенные к $\tilde{x}_0(0)$ векторы, отвечающие единичному собственному значению:

$$W_0^T x_j(0) = x_j(0) + x_{j-1}(0), j = 1,..,m.$$

Производная $F'(y_0)$ оператора F, вычисленная в точке y_0, по нашему предположению, является $T-$эквивалентным оператором для системы (2), следовательно, $1 \in \sigma(F'(y_0))$. Так как этот оператор вполне непрерывен (или $q-$уплотняет с константой $q < 1$), то единица является его собственным значением конечной кратности и, вообще говоря, эта кратность не совпадает с $(m+1)$. Т.е. в общем случае нет соответствия между структурами собственных инвариантных подпространств, отвечающих единичному собственному значению оператора сдвига и оператора F. Справедлива следующая теорема.

Теорема (об эквивалентном интегральном операторе). Существуют линейные непрерывные операторы $B : E \to E$ и $\xi : Im(B) \to E$, где $Im(B)-$ образ оператора B, такие что $\dim(Im(B)) < \infty$, оператор ξB вполне непрерывен, $1 \notin \sigma(B\xi)$, и для оператора $\tilde{F} = F - \xi B(F - I)$ справедливо, что $\tilde{F}y_0 = y_0$, $\tilde{F}'(y_0)v_0 = v_0$, $\tilde{F}'(y_0)v_j = v_j + v_{j-1}, j = 1,..,m$.

Литература

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. - М.: Наука, 1966. - 331 с.

2. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р.Р. Ахмеров [и др.]. - Новосибирск: Наука, 1986. - 265 с.

3. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. - М.: Наука, 1975. - 512 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ

Михайлов А.П. (Старый Оскол)

mikhailovap@mail.ru

В «Электронном Журнале Дифференциальных Уравнений» опубликована следующая задача 2010-1 ($http://math.uc.edu/ode/odeprobs/odeprobs.html$) :

Пусть $f(t) \in C^2\,[0;1]$**,** $f(0) = f(1)$**. Доказать, что существует** $t \in (0;1)$ **такое, что** $t^2 f(t) - 2\int_0^t \xi f(\xi) d\xi = 0$.
Это утверждение нами доказано при более слабых предположениях.
Теорема 1. Пусть функция $f(t) \in C^1\,[0;1]$, $f(0) = f(1)$. Тогда существует $t \in (0;1)$ такое, что $t^2 f(t) - 2\int_0^t \xi f(\xi) d\xi = 0$.
Эта теорема может быть обобщена следующим образом:
Теорема 2. Пусть функция $f(t) \in C^1\,[0;1]$, $f(0) = f(1)$, $g(t) \in C^1\,[0;1]$, $g(t) \geqslant 0$, $g(0) = 0$. Тогда существует $t \in (0;1)$ такое, что

$$g(t)f(t) = \int_0^t g'(\xi) f(\xi) d\xi.$$

При некотором изменении доказательства может быть доказана более общая
Теорема. 3. Пусть функция $f(t) \in C\,[0;1]$, $f(0) = f(1)$, $g(t) \in C^1\,[0;1]$, $g(t) \geqslant 0$, $g(0) = 0$. Тогда существует $t \in (0;1)$ такое, что

$$g(t)f(t) = \int_0^t g'(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Приведем набросок доказательства Теоремы 1. Пусть $g(t) = t^2 f(t) - 2\int_0^t \xi f(\xi) d\xi$. Очевидно, что $g(t) = \int_0^t \xi^2 f'(\xi) dt$. Поэтому можно считать, что $f(0) = f(1) = 0$.
Предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда без ограничения общности можно считать, что для всех $t \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \xi^2 f'(\xi) d\xi > 0.$$

Рассмотрим функцию $F(\alpha)$, определенную следующим образом:

$$F(\alpha) = \int_0^1 e^{-\alpha\xi} f'(\xi) d\xi, \quad \alpha \in [0;+\infty).$$

Очевидно, что

1. $F(0) = 0$;
2. $F(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$
3. $F''(\alpha) = e^{-\alpha}\int_0^1 \xi^2 f'(\xi) d\xi + \alpha \int_0^1 e^{-\alpha\xi} \int_0^\xi x^2 f'(x) dx d\xi > 0$ при $\alpha \in (0;+\infty)$.

Таким образом, $F''(0) \geqslant 0$для всех $\alpha \in [0; +\infty)$. Очевидно, невозможно, чтобы $F'(\alpha_0) = 0$ для некоторого $\alpha_0 > 0$. Следовательно, $F'(\alpha) < 0$ для всех $\alpha \in (0; \infty)$. Но тогда функция $F(\alpha)$ монотонно убывает при $\alpha \in (0; \infty)$, что противоречит 1)-2).

УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИКА ДВУМЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В O(3) ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. (Душанбе)
muminov@tascampus.eastera.net, shokirov@rambler.ru

Математическое моделирование и вычислительные эксперименты при изучении нелинейных явлений на сегодняшний день являются одним из важнейших инструментов исследования [1]. В частности, в теории солитонов, применение методов математического моделирования и компьютерные эксперименты зачастую позволяет найти численные локализованные решения, дать предварительное освещение вопросов устойчивости данных солитонных решений, исследовать задачи взаимодействия солитонов и др., в тех случаях, когда точные аналитические методы ещё не созданы.

С точки зрения физических приложений исследование и анализ динамических свойств классических локализованных решений в моделях нелинейной теории поля, описывающих антиферромагнетики, представляют наибольший интерес. Вместе с тем, нелинейные непертурбативные модели теории поля, начиная с пионерских работ Т.Х.Р.Скирма (T.H.R.Skyrme) [2], привлекают неослабевающее внимание исследователей. В непертурбативных моделях, являющихся существенно нелинейными, в отличие от хиггсовской модели, элементарные частицы находят свое естественное описание как «сгустки» энергии, - так называемые солитоны, или скирмионы, - уединенные нелинейные локализованные объекты. Другое важное преимущество данных моделей заключается в отсутствии расходимостей, для преодоления которых, как известно, в Стандартной Модели вводится техника перенормировок. С другой стороны, в ряде работ отмечается, что в качестве модельного представления уравнений Янга-Миллса теории поля может служить класс SU(N) двумерных векторных нелинейных сигма-моделей (ВНСМ) [3].

Наличие топологических индексов (ненётеровских интегралов движения), часто называемых топологическим зарядом (ТЗ) (индекс Хопфа), открывает дополнительные возможности для существования частицеподобных решений [2-5], хотя, вообще говоря, не гарантирует их существования и устойчивости. Среди нелинейных моделей, допускающих существование локализованных полевых распределений с ненулевым ТЗ-ом, частный интерес представляют сигма-модели, широко использующиеся в физике твердого тела и конденсированного состояния, а также и в физике элементарных частиц [3,6-9]. Физически важный класс сигма-моделей включает и гейзенберговские магнетики, в рамках этих моделей трехкомпонентный изовектор поля $s_a(x,t), a = 1,2,3$ (вектор антиферромагнетизма) принимает свои значения на сфере S^2 [5].

В настоящей работе методами математического моделирования и численными экспериментами исследованы нелинейные возбуждения с нетривиальным индексом Хопфа в двумерной O(3) ВНСМ в изотропном и анизотропном случаях. Особое внимание уделяется динамике взаимодействий топологических объектов. Получены модели эволюции и взаимодействия двумерных топологических солитонов (ТС) O(3) ВНСМ, изучены их основные свойства, в частности, обнаружено проявление дальнодействующих сил в динамике упругого взаимодействия данных ТС-ов.

Плотность лагранжиана в 2D пространстве, соответственно, в изотропном и анизотропном случаях имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a,$$

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a + (s_a^2 - 1)], s_a s_a = 1; \mu = 0,1,2; a = 1,2,3.$$

Решения, зависящие от времени данной модели подчиняются уравнениям Лагранжа-Эйлера, соответственно:

$$\partial_\mu \partial^\mu s_i + (\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a) s_i = 0,$$

$$\partial_\mu \partial^\mu s_i + (\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a) s_i - s_3(\delta_{i3} - s_i s_3) = 0, i = 1,2,3.$$

В терминах эйлеровой параметризации полевые функции имеют вид:

$$s_1 = \sin\theta\cos\varphi, s_2 = \sin\theta\sin\varphi, s_3 = \cos\theta.$$

ТС-ы, полученные Белавиным и Поляковым [3], имеют следующий вид:

$$\theta_s(r,R) = 2\arctan\left(\frac{r}{R}\right)^m, \varphi_s = m\chi, (\varphi_s = m\chi - T),$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \cos\chi = \frac{x}{r}, \sin\chi = \frac{y}{r},$$

где m – ТЗ (индекс Хопфа).

Для проведения моделирования эволюции данного начального решения была составлена разностная схема с весами явного типа, второго порядка точности, как по времени, так и по координате [10]. Параметры численного моделирования: шаг по координате $h = 0.01$, шаг по времени $\tau = 0.006$, время моделирования эволюции динамики взаимодействий $T = [0 - 150]$, область моделирования $[-L, L]$ от $L = 5.0$ до $[L = 10.0]$ [5].

В данных экспериментах контроль консервативности численной схемы осуществлялся вычислением интеграла энергии, которая сохранялась с точностью $\Delta E/E \approx 10^{-5} - 10^{-6}$ [11]. Далее, на основе применения преобразования Лоренца были получены численные топологические решения, движущиеся со скоростями меньше c – скорости света. Исследована эволюция данного типа солитонов и численно продемонстрирована их устойчивость. Результаты численного моделирования динамики взаимодействий ТС-ов двумерной O(3)-ВНСМ (анизотропный случай) показывают, что при малых скоростях имеют место упругие взаимодействия.

Численные моделирования показали, что процесс столкновения данных ТС имеет характерные особенности: в зависимости от траектории встречного движения взаимодействие ТС-ов происходит разным образом. В частности, в случае лобового нецентрального столкновения солитоны сначала движутся по параллельным траекториям, но динамика их взаимодействий чувствительна к симметричному изменению траекторий.

Для исследования причин вышеуказанных свойств взаимодействий была исследована структура ТС с точки зрения анализа проекции первых двух составляющих единичного изовектора $S_a (a = 1, 2, 3)$. Для исследования динамики взаимодействий ТС-ов, с точки зрения анализа вышеуказанных свойств, была произведена серия изменений в структуре одного из ТС-ов. Эти изменения соответствуют замене ТЗ-а на противоположный.

После многочисленных экспериментов с моделями столкновений, в процессе которых наблюдались различные варианты эволюции взаимодействия солитонов, от полного затухания излучением сконцентрированной в них энергии до состояния коллапса, нами получена новая группа моделей эволюции взаимодействия солитонов, отличающихся от всех других наших экспериментов – ТС-ы отражались без явного столкновения (так называемое дальнодействие).

Таким образом, в настоящей работе получена эволюционная модель двумерных ТС-ов O(3) ВНСМ, показана их устойчивость при различных значениях ТЗ (индекса Хопфа). Созданы модели взаимодействия данных солитонов и получены дальнодействующие модели эволюции динамики упругого взаимодействия.

Литература

1. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент//ЭЧАЯ,1983.,т.14.вып.1., 58с.

2. Skyrme T.H.R.–London: Proceedings of the Royal Society – Mathematical and Physical Sciences, Series A, (Feb.7, 1961), vol.206, No.1300, pp.127-138.

3. Белавин А.А., Поляков А.М. – ЖЭТФ, 1975, 22(10), с. 503-506.

4. Faddeev L.D. // Lett.Math.Phys.1 (1976) p.289.

5. Косевич А.М., Иванов Б.А., А.С.Ковалёв. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев: Наукова думка, 1983, 193с.

6. Rajaraman R. Solitons and instantons. (North Holland, Amsterdam, 1982).

7. Schwartz A.S. Quantum Field Theory and Topology (Springer-Verlag, 1993).

8. Bogolubsky I., Bogolubskaya A. // Preprint JINR E17-95-273.

9. Makhankov V.M., Fedyanin V.K. // Phys. Scripta 28, 221 (1983).

10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971, 553 с.

11. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Комплекс компьютерных программ для нахождения бризерных численных решений, проведения анализа и эволюции в двумерной O(3) нелинейной сигма-модели непертурбативных квантовых теорий поля. Свидетельство о регистрации интеллектуального продукта, 0265TJ от 29.06.2010 г.

БРИЗЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ O(3) ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ – ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ И ЧАСТОТНЫЙ ПРЕДЕЛ

Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. (Душанбе)

muminov@tascampus.eastera.net, shokirov@rambler.ru

O(3) векторные нелинейные сигма-модели (ВНСМ) привлекают внимание исследователей в связи с тем, что они являются наиболее вероятными кандидатами на роль альтернативных непертурбативных теорий поля. Как было отмечено еще в работах А.М.Полякова, имеется глубоко коренящая аналогия между четырехмерными теориями Янга-Миллса и ВНСМ [1]. Таким образом, упрощенная ВНСМ может служить своеобразной теоретической лабораторией для апробации методов моделирования непертурбативных теорий поля. Идея использования многомерных нелинейных моделей для описания физики элементарных частиц восходит еще к работам Т.Скирма (T.H.R.Skyrme) [2]. Некоторые свойства известных в настоящее время частиц, имеющих составную структуру, описываются, в том числе теорией связанных состояний, природа образования которых определяется непертурбативными эффектами (например, в моделях, основанных на использовании динамических уравнений Бете-Солпитера, Тамма-Данкоффа, в модели бэби-скирмиона и др. [3]). Таким образом, исследование новых связанных состояний, описываемых бризерными решениями, представляют значительный интерес при описании элементарных частиц, в частности, в физике адронов.

В данной работе приведены результаты моделирования новых решений бризерного типа в одномерной O(3) ВНСМ. Методами математического моделирования и теории разностных схем, получены бионные (бризерные) решения одномерной O(3) ВНСМ. При получении данных решений мы исходим из того, что уравнения O(3) ВНСМ в меридианном сечении, в изотопическом пространстве сводятся к точно интегрируемой модели уравнения синус-Гордона (СГ). Исходя из этого, мы можем в качестве некоторого начального приближения использовать бризерные решения уравнения СГ и, соответственно, вводя в него некоторое специальным образом подобранное возмущение путем численного решения задачи Коши, получаем новые численные решения уравнения O(3) ВНСМ. Напомним, что в эйлеровой параметризации уравнения O(3) ВНСМ имеют следующий вид [1]:

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right) + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \delta\right]\sin\theta\cos\theta, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

здесь $\theta(x,t), \varphi(x,t)$ - эйлеровы углы, δ - постоянная анизотропии. В сечении $\varphi = const$ система уравнений (1) сводится к уравнению

СГ:

$$2\Box\theta = \delta \sin 2\theta \tag{2}$$

Для формирования численного решения системы уравнений (1) будем решать задачу Коши. Интервал численного интегрирования $[-L, L]$ эффективно будет моделировать процессы в бесконечном интервале в случае убывающих, тривиальных граничных условий искомого решения при введении затухающих граничных условий – т.н. условий типа «черный ящик». Линейные возмущения, покидающие формируемое локализованное солитонное решение, будут излучаться до границы, и, попадая в поглощающий слой на границе, не смогут отразиться и привести к возмущениям солитонного решения, а будут полностью поглощены на границе, то есть эффективно произойдет их «излучение на бесконечность» [4].

Мы использовали известное бризерное решение уравнения СГ и задавали вращение в изопространстве в следующем виде:

$$\theta = 2\arctan\frac{1}{\cosh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}, \varphi = \omega\tau,$$

где ω - частота вращения в изопространстве, τ - шаг по времени.

Для численного моделирования уравнений была написана разностная схема с весами явного типа, второго порядка точности, как по времени, так и по координате [5]. Контроль точности численной схемы осуществлялся вычислением интеграла энергии, которая во всех численных экспериментах после сформирования устойчивого солитона сохранялась с точностью $\Delta E/E \approx 10^{-5}{-}10^{-6}$. Для анализа результатов численных экспериментов использовались программы визуализации и прикладные программы по быстрому преобразованию Фурье.

В результате, в анизотропном случае, нами были получены решения в виде двух взаимосвязанных осциллирующих горбов. Проведенная серия численных экспериментов позволила определить зависимость энергии связи компонент бризера от частоты вращения в изопространстве [4]. При $\omega = 0.0$ (бризеры СГ) энергия связи составляет $En.bond \approx 0.244$ от полной энергии бризера, при увеличении частоты до $\omega_{Sat} \approx 0.6$ энергия связи плавно нарастает и достигает порога насыщения, при котором $En.bond \approx 1.0$, а решение принимает вид единого «дышащего» горба. Дальнейшее увеличение частоты вращения в изопространстве $\omega > 0.9$ приводит к разрушению полученного решения, что позволяет говорить о наличии порога устойчивости $\omega_{St.t} \approx 0.6$. Фурье-анализ сформированного решения показывает наличие двух гармоник бионного решения $\omega_1 \approx 1.152, \omega_2 \approx 1.004$. Очевидно, что вдобавок к бионной динамике, появляется дополнительная частота, вследствие вращения в изопространстве.

Свойства Лоренц-инвариантности O(3) ВНСМ позволяет, благодаря применению преобразования Лоренца, получить также движущиеся бризерные решения. Серия численных экспериментов с движущимися бризерными решениями позволила установить область устойчивости данного бризерного решения в зависимости от двух параметров решения: значений частоты вращения в изопространстве и скорости движения бризера.

Аналогичные исследования бризерных решений в случае изотропной O(3) ВНСМ демонстрируют распад первоначального «бризера» на две уединенные двугорбые волны при отсутствии характерной для бризеров динамики.

Итак, в результате работы получены новые бионные (бризерные) решения в одномерном случае, обладающие динамикой внутренней степени свободы в изопространстве. Определена энергия связи для составляющих бризерного решения. Выявлен порог устойчивости численных бризерных решений в зависимости от частоты вращения в изопространстве и от скорости движения солитона.

Литература

1. Поляков А.М. Калибровочные поля и струны. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 312с.

2. Skyrme T.H.R. – London: Proceedings of the Royal Society – Mathematical and Physical Sciences, Series A, (Feb. 7, 1961), vol.206, No.1300, pp.127-138.

3. Kudryavtsev A., Piette B., Zakrjevski W.J. Mesons, Baryons and Waves in the Baby Skyrmion Model // England, Durham: DH1 3LE – arXiv:hep-th/9611217v1, 26 NOV 1996, DTP-96/17.

4. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Комплекс компьютерных программ для нахождения численных решений, проведения анализа и визуализации их эволюции в одномерной O(3) нелинейной сигма-модели непертурбативной квантовой теории поля. Свидетельство о регистрации интеллектуального продукта, 0242TJ от 16.03.2010 г.

5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971, 552 с.

О ТЕОРЕМЕ А. В. АРУТЮНОВА

Мусиенко В.К. (Воронеж)

piccolo1@yandex.ru

В 2007 году А.В.Арутюновым [1] была доказана теорема о существовании точек совпадения двух отображений, одно из которых является α-накрывающим, а другое β-липшицевым. Настоящий доклад посвящен новому доказательству теоремы А.В. Арутюнова, основанном на теореме Надлера [2].

Пусть X, Y – метрические пространства, многозначное отображение $F : X \to Y$ называется k-липшицевым, если для любых x_1, $x_2 \in X$ справедливо неравенство $h(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \rho(x_1, x_2)$, где h – метрика Хаусдорфа в пространстве Y.

Лемма 1. *Пусть $F : X \to Y$ – α-липшицево и $G : Y \to X$ – β-липшицево многозначное отображение. Тогда $Q : X \to X$, $Q(x) = G(F(x))$, является $\alpha\beta$-липшицевым многозначным отображением.*

Пусть $B_X(r_1, x)$ — замкнутый шар радиуса r_1 с центром в точке $x \in X$, $B_Y(r_2, y)$ — замкнутый шар радиуса r_2 с центром в точке y. Пусть α — некоторое положительное число. Пусть $F : D \subset X \to C(Y)$ некоторое многозначное отображение.

Определение 1. *Отображение F будем называть α-накрывающим, если для любого числа $r > 0$ и любой точки $x \in D$ выполнено включение: $F(B_X(r, x) \cap D) \supseteq B_Y(\alpha r, F(x))$.*

Пусть $\Gamma(F)$ – график многозначного отображения F. Определим проекции из графика $t(x, y) = x$, $g(x, y) = y$. В прямом произведении $X \times Y$ определим метрику следующим образом:

$$\rho_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_X(x_1, x_2), \frac{1}{\alpha}\rho_Y(y_1, y_2)\},$$

где α – некоторое положительное число.

Лемма 2. *Пусть F – α-накрывающее многозначное отображение, тогда:*
(1) g является α-накрывающим однозначным отображением;
(2) t является является 1-липшицевым однозначным отображением.

Опираясь на эти леммы можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $F : D \subset X \to C(Y)$ – α-накрывающее, $G : X \to C(Y)$ – β-липшицево многозначное отображение. Если график $\Gamma(F)$ является полным множеством в метрике $\rho_{X\times Y}$ и*

$\beta < \alpha$. Тогда для любой точки $x_0 \in D$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка x_*, что $F(x_*) \bigcap G(x_*) \neq \varnothing$ и

$$\rho(x_0, x_*) \leqslant \frac{\rho(F(x_0), G(x_0)) + \varepsilon}{\alpha - \beta},$$

где $\rho(F(x_0), G(x_0)) = \inf\limits_{u \in F(x), v \in G(x)} \rho(u, v)$.

Литература

Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки// Доклады РАН. – 2007. - Т.76, №2. – С. 665-668.

2. Nadler S.B. Multi-valued contraction mappings// Pasif. J. Math. - 1969, v.30, N 2. - P. 475-488.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. (Вологда)

emuhamadiev@rambler.ru, nan67@rambler.ru

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$-\psi''(x) + \left(1 + \frac{c}{x^2}\right)\psi = \frac{1}{x^\alpha}|\psi(x)|^{k-1}\psi(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(+\infty) = 0, \tag{2}$$

где c, k, α - постоянные, $k > 1$, $\alpha > 0$. Ненулевыми решениями краевой задачи (1), (2) описываются движения элементарных частиц в определенных средах с радиальной симметрией. Представляет интерес вопрос о существовании ненулевых решений краевой задачи (1), (2), а также вопрос о числе нулей и поведении решений при $x \to 0$ и $x \to +\infty$.

В работе [1] краевая задача (1), (2) исследована в случае, когда $\alpha = k - 1$, $1 < k < 5$, $c = l(l + 1)$, l - целое неотрицательное число. Доказано существование положительного решения краевой задачи (1), (2).

Имеет место следующая теорема.

Теорема.*Пусть $c = \nu(\nu - 1)$, где $\nu = \alpha/(k-1)$. Тогда существует положительное решение краевой задачи (1), (2) такое, что*

$$\lim_{x \to 0} x^{-\nu}\psi(x) = \varphi_0 > ((k + 1)/2)^{1/(k-1)},$$

$$\lim_{x\to 0} x^{-2}(x^{1-\nu}\psi'(x) - \nu x^{-\nu}\psi(x)) = (\varphi_0 - \varphi_0^k)/(2\nu+1),$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^x\psi(x) = D, \quad \lim_{x\to +\infty} e^x\psi'(x) = -D,$$

где D - ненулевое положительное число.

Литература

[1]. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. Достаточное условие существования положительного частицеподобного решения нелинейного уравнения скалярного поля // Препринт Р5-11705 Объединенного института ядерных исследований, Дубна, 1978

ТЕОРЕМА ВИНЕРА ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЯКОБИ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Мхаскар Х.Н. (Лос-Анджелес), Тихонов С.Ю. (Москва)
tikhonov@mccme.ru

Пусть $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$ и $w_{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ при $-1 < x < 1$. Для $1 \leqslant p < \infty$ определим $L^p = L^p(\alpha,\beta) = \{f : \|f\|_{\alpha,\beta;p} := \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p w_{\alpha,\beta}(x)dx\right)^{1/p} < \infty\}$.

Для $f \in L^1$ определим ряд Фурье-Якоби $\sum_{k=0}^\infty \hat f(k)R_k(x)$, где $\{R_k{}^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ — система полиномов Якоби, и

$$\hat f(k) := \left(\|R_k{}^{(\alpha,\beta)}\|_{\alpha,\beta;2}\right)^{-2}\int_{-1}^1 f(y)R_k{}^{(\alpha,\beta)}(y)w_{\alpha,\beta}(y)dy.$$

Определим локальные пространства. Если $Y \subset L^1$, то Y_{loc} — класс всех функций $f \in L^1$, таких что существует $I \subseteq [-1,1]$, $1 \in I$, причем для любой $\varphi \in C^\infty$ с носителем I, $f\varphi \in Y$.

Подпространство $X \subset L^1$ обладает свойством S (*solid space*) если $f, g \in L^1$, $f \preceq g$, и $g \in X$ влечет $f \in X$. Здесь, $f \preceq g$ означает, что $|\hat f(k)| \leqslant \hat g(k)$ для всех $k \in \mathbf{N}$.

Для $f \in L^1$ будем писать $f \in \mathbb{P}$, если $\hat f(k) \geqslant 0$ для всех k.

Теорема. Пусть $X \subset L^1$ обладает свойством S. Тогда $X_{\text{loc}} \cap \mathbb{P} = X \cap \mathbb{P}$. В частности, если $1 < p < \infty$, то

$$L^p \subseteq X \implies L^p_{\text{loc}} \cap \mathbb{P} \subseteq X$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00175) и программы Поддержки ведущих научных школ (проект НШ-32-52.2010.1), а также при поддержке грантов DMS-0908037, W911NF-09-1-0465, MTM2008-05561-C02-02/MTM, 2009 SGR 1303.

и

$$L^p_{\mathrm{loc}} \cap \mathbb{P} \subseteq L^p, \qquad p = 2k.$$

Заметим также, что

$$L^p_{\mathrm{loc}} \cap \mathbb{P} \not\subseteq L^p, \qquad p \neq 2k.$$

В случае, когда рассматриваются тригонометрические ряды Фурье, данный результат получен в работе [1].

Литература

1. J. M. Ash, S. Tikhonov and J. Tung, *Wiener's positive Fourier coeffcients Theorem in variants of L^p spaces*, Michigan Math. J., Vol. 59, 1 (2010), 143–152.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

Насыров С.Р., Низамиева Л.Ю. (Казань)

snasyrov@ksu.ru, NizamievaLU@yandex.ru

Рассматривается смешанная обратная краевая задача (задача со свободной границей) по параметру x в постановке В. Н. Монахова (см. [1], [2]) в случае, когда известная часть границы L^1_z искомой области является полигоном. В интегральное представление решения задачи входят неизвестные параметры — прообразы вершин ломаной на границе полуплоскости, которые по аналогии с интегралами Кристоффеля-Шварца назовем акцессорными параметрами.

В докладе предлагается приближенный метод нахождения акцессорных параметров, который назван методом движущегося разреза. (Ранее другие приближенные методы предлагались В. Н. Монаховым и его учениками.) Суть метода состоит в следующем. Рассматривается однопараметрическое семейство решений задачи, зависящее от вещественного параметра t и соответствующих случаю, когда известная часть границы $L^1_z(t)$ является объединением двух лучей и разреза вдоль части границы ломаной L^1_z. В начальный момент времени ($t = 0$) разрез отсутствует, в финальный — конец разреза завершает обход ломаной L^1_z. Получена система дифференциальных уравнений для определения акцессорных параметров.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-01-97008-р_поволжье_а, № 09-01-12188-офи_м) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (госконтракт № 02.740.11.0193).

Идея предложенного метода восходит к известному методу П. П. Куфарева нахождения акцессорных параметров в интегралах Кристоффеля-Шварца (см., например, [3]).

Литература

1. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 424 с.

2. Насыров С.Р. Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях/ Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 25–36.

3. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ КАК ОДИН ИЗ ФАКТОРОВ РЕАЛИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТАНДАРТОВ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Насырова Е.В. (Казань)

strezh@yandex.ru

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) [2] определяет современный обязательный минимум содержания основных образовательно-профессиональных программ и требования к уровню подготовки выпускников по конкретному направлению. Ключевой проблемой успешной реализации требований ФГОС ВПО по общекультурным и профессиональным компетенциям (ОК, ПК), предъявляемым к выпускникам вузов, является совершенствование самостоятельной работы студентов (СРС), активизация их познавательной деятельности. Такие требования ОК как способность к анализу, к саморазвитию, совершенствованию своего интеллектуального и общекультурного уровня, к самостоятельному обучению новым методам исследования, а так же ПК как способность самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности новые знания и умения, анализировать литературные и патентные источники, выбирать методы исследования и обработки результатов, ставят новые задачи по реализации СРС.

Специфика в организации учебной деятельности студентов радио-технического факультета КГТУ при изучении математики состоит в том, что эта дисциплина изучается студентами на младших курсах. Большинство студентов первого курса не умеют рационально организовать свой труд в условиях вуза, а иностранные студенты (Йемен, Замбия) испытывают определенную трудность с языком при чтении специальной литературы. В силу этого первоочередная задача, стоящая перед преподавателями с самого начала учебного процесса – научить студентов самостоятельно работать над учебной литературой; утвердить внутреннюю потребность к образованию; сформировать культуру умственного труда; привить желание учиться самостоятельно. Важность самостоятельной деятельности обучаемых еще в середине XIX века подчеркивал Ушинский К.Д [1]: "... у нас покудова все внимание обращено единственно на учение, и лучшие дети проводят все свое время только в том, что читают, да учатся, учатся да читают, не упражняя своих сил и своей воли ни в какой самостоятельной деятельности ..."

Руководство СРС реализуется через разработку методик и форм проведения учебных занятий, направленных на закрепление и расширение знаний и умений, на приобретение навыков, на развитие логического мышления студентов, их творческих способностей; формирование внутренних мотивов дальнейшей познавательной деятельности. При проведении учебных занятий со студентами широко применяются тесты, математические диктанты, опорные конспекты, составленные с учетом матрицы межпредметных связей и прикладной направленности. Большое значение придается системе контроля. Высокая требовательность преподавателя в процессе контроля является одним из основных стимулов ответственности студентов за качество СР над учебным материалом, способствует формированию у студентов ОК и ПК ФГОС ВПО.

Литература

1. Ушинский К.Д. Собрание соч. в 6-ти томах. М.: Педагогика, 1989, Т.6, С.391.

2. ФГОС ВПО по направлению подготовки 20400 "Радиотехника"от 13.01.2010.

АФФИННО-ОДНОРОДНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ТРУБЧАТОГО ТИПА В $\mathbb{C}^3$

Нгуен Тхи Тхюи Зыонг (Воронеж)

thuyduongpy@yahoo.com

Вещественно-аналитическую гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^3$ (с координатами z_1, z_2, w) назовем поверхностью трубчатого типа, если для коэффициентов ее аффинно-канонического уравнения (см. [1])

$$Im\ w = |z_1|^2 + |z_1|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \overline{z_1^2}) + \varepsilon_2(z_2^2 + \overline{z_2^2}) + \sum_{k\geqslant 3} F_k(z, \bar{z}, Rew) \quad (1)$$

выполняется условие $\varepsilon_1 = \varepsilon_1 = 1/2$.

Предложение 1. ($Re\ w$)-компоненту многочлена $F_3(z, \bar{z}, Re\ w)$ из уравнения (1) поверхности трубчатого типа можно привести к виду

$$F_3^{(1)} = Re\,(i(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)) \cdot Re\ w, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

На любом аффинно-однородном подмногообразии $M \subset \mathbb{C}^3$ имеется "большая" алгебра $g(M)$ линейных векторных полей.

ТЕОРЕМА 1. *Размерность алгебры $g(M)$ на аффинно-однородной поверхности (1) трубчатого типа не превосходит 7.*

Единственной (с точностью до аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$) однородной поверхностью с 7-мерной алгеброй является квадрика (трубка над параболоидом) $Im\ w = (Re\ z_1)^2 + (Re\ z_2)^2$.

Однородной гиперповерхностью пространства $\mathbb{C}^3$ с 6-мерной алгеброй $g(M)$ является трубка над сферой $(Re\ z_1)^2 + (Re\ z_2)^2 + (Re\ w)^2 = 1$.

Отметим, что в приведенных примерах трубок $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если у поверхности M трубчатого типа $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, то $\dim_{\mathbb{R}} g(M) = 5$.*

Доказательства теорем 1 и 2 выводятся из условия касания линейным векторным полем поверхности, заданной каноническим уравнением (1). Алгебры из теоремы 2 устроены сложно, поэтому вопрос о примерах поверхностей трубчатого типа с 5-мерными алгебрами пока не решен.

Литература

1. Лобода, А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия ВУЗов. Сер. Математика. – 2003. – N 10. – С. 38 - 50.

ОБ ОЦЕНКЕ БЛИЗОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ К ТОЧНОМУ РЕШЕНИЮ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Нгуен Тхи Хоай (Воронеж)
nthoai0682@yahoo.com

Рассматривается задача P_ε, состоящая в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{z}, \overset{(j)}{W}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{z}\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{u}, \overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}\right\rangle\right)dt \qquad (1)$$

на траекториях системы

$$E(\varepsilon)\frac{d\overset{(j)}{z}}{dt} = \overset{(j)}{A}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{z} + \overset{(j)}{B}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}, \quad t\in[t_{j-1},t_j], \ \ j=1,2, \qquad (2)$$

$$\overset{(1)}{z}(0,\varepsilon) = z^0, \ \overset{(2)}{z}(t_1,\varepsilon) = \overset{(1)}{z}(t_1,\varepsilon). \qquad (3)$$

Здесь $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$, значения $t_j (j = 0, 1, 2)$ фиксированы; $E(\varepsilon) = diag(I_m, \varepsilon I_{n-m})$, I_m, I_{n-m} - единичные операторы, действующие в пространствах $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{n-m}$ соответственно; $\overset{(j)}{z} = \overset{(j)}{z}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $\overset{(j)}{u} = \overset{(j)}{u}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$; угловые скобки означают скалярное произведение в соответствующих пространствах, $\varepsilon \geqslant 0$ - малый параметр, соответствующих размеров матрицы $\overset{(j)}{W}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{A}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{B}(t,\varepsilon)$, являются достаточно гладкими при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$ и $\varepsilon \geqslant 0$, матрицы $\overset{(j)}{W}(t,\varepsilon)$ и $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$ симметричны, а матрицы $\overset{(j)}{W}(t,0)$ и $\overset{(j)}{R}(t,0)$ положительно определены при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$.

Через $(\overset{(j)}{A}(t,\varepsilon))_{ik} = \overset{(j)}{a}_{ik}(t,\varepsilon)$, $i,k = \overline{1,n}$ обозначены элементы соответствующей матрицы. Введем обозначение $\overset{(j)}{D}(t,\varepsilon) = (\overset{(j)}{a}_{ik}(t,\varepsilon)), i,k = \overline{m+1,n}$.

Обозначим через $\overset{(j)}{\lambda}_i(t)$ собственные значения операторов $\overset{(j)}{D}(t,0)$. Предположим, что выполнено условие: $\overset{(j)}{\lambda}_i(t) \neq \overset{(j)}{\lambda}_k(t), i \neq k$, $\operatorname{Re}\overset{(j)}{\lambda}_i(t) < 0, i,k = \overline{1,n-m}$.

Через $v(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overset{(1)}{v}(t,\varepsilon), & t \in [0, t_1], \\ \overset{(2)}{v}(t,\varepsilon), & t \in [t_1, T] \end{cases}$, $v = \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}$ обозначаем решение задачи P_ε.

Оценим n - е приближенние решения задачи P_ε: $\widetilde{v}_n(t,\varepsilon)$, где

$$\widetilde{v}_n(t,\varepsilon) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\overset{(1)}{\overline{v}_i}(t) + \overset{(1)}{\Pi}_i v(\tau_0) + \overset{(1)}{Q}_i v(\tau_1)), & t \in [0, t_1], \\ \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\overset{(2)}{\overline{v}_i}(t) + \overset{(2)}{\Pi}_i v(\tau_1) + \overset{(2)}{Q}_i v(\tau_2)), & t \in [t_1, T], \end{cases}$$

символы $\overset{(j)}{\Pi}$, $\overset{(j)}{Q}$, $j = 1, 2$ означают функции погранслоя экспоненциального типа вблизи левых и правых концов промежутков $[0, t_1]$ и $[t_1, T]$ соответственно, $\tau_0 = \frac{t}{\varepsilon}$, $\tau_1 = \frac{t-t_1}{\varepsilon}$, $\tau_2 = \frac{t-T}{\varepsilon}$.

Теорема 1. *Для всех $t \in [0, T]$ и при достаточно малых $\varepsilon > 0$ для решения задачи P_ε: функции $v(.,\varepsilon)$ имеют место оценки*

$$\|\widetilde{v}_n(t,\varepsilon) - v(t,\varepsilon)\| \leqslant c\varepsilon^{n+1}, \;\; J_\varepsilon(\widetilde{u}_n) - J_\varepsilon(u) \leqslant c\varepsilon^{2(n+2)},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от t, ε.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Некрасова И.В. (Белгород)
Nekrasova_I@bsu.edu.ru

В настоящей работе рассматривается задача о совместном движении деформируемого упругого тела, перфорированного периодической системой каналов (пор), заполненных жидкостью. Представленная модель описывает быстропротекающие физические явления такие как гидравлический удар, когда длительность процесса исчисляется долями секунд. В безразмерных переменных дифференциальные уравнения модели для безразмерного вектора перемещений $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ состоят из уравнений Стокса для вязкой жидкости в порах и уравнений Ламэ для упругого скелета грунта. В модели имеются два безразмерных параметра α_μ и α_λ, зависящих от естественного малого параметра ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру области L. Нашей основной целью является вывод предельных режимов при стремлении малого параметра ε к нулю. При этом будем считать, что безразмерные параметры удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 < \mu_0 < \infty, \quad \lambda_0 = 0, \quad 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \infty,$$

где

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon), \quad \lambda_1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2}.$$

Результатом усреднения являются уравнения, состоящие из системы анизотропных уравнений Стокса для скорости жидкой компоненты связанной с двумя различными типами неклассических уравнений в случае $0 \leqslant \lambda_1 < \infty$, описывающими двухскоростной континуум для твердой компоненты или системы анизотропных уравнений Стокса для односкоростного континуума ($\lambda_1 = \infty$).

ПРИНЦИПЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, ВЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И СЖАТОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

Новиков С.Я. (Самара)
nvks@ssu.samara.ru

Принцип неопределенности в гармоническом анализе [1] утверждает, что функция f и ее преобразование Фурье $\hat{f}$ не могут быть одновременно малы. Это общее утвеждение имеет много разнообразных и точных воплощений. Например, известное неравенство Гейзенберга-Паули-Вейля

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2 \leqslant \|xf\|_2^2 + \|\omega \hat{f}\|_2^2 \tag{1}$$

относится к их числу. Следствием неравенства (1) является вложение весовых пространств $L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$.

Развитая в последние годы техника частотно-временного анализа [2] позволяет получить много новых интересных вложений подобного типа.

Рассматриваются обобщения (1) в форме теорем вложений вида

$$E_1(w_1) \cap \mathcal{F}E_2(w_2) \hookrightarrow X,$$

для пары симметричных пространств E_1 и E_2 с весами и банаховым пространством X.

В работах T.Tao, D.Donoho и др. принципы неопределенности рассматриваются как прототипы идей сжатого зондирования, т.е.

возможности точного восстановления разреженного или сжатого сигнала по небольшому количеству измерений.

Литература

1. Ёрикке Б., Хавин В.П. *Принцип неопределенности в гармоническом анализе.* – В кн.: Коммутативный гармонический анализ-3. Итоги науки и техники.
Сер."Соврем.проблемы математики". М.:ВИНИТИ, 1991.

2. Grochenig K. *Foundations of Time-Frequency Analysis.* – Birkhauser, 2001.– 360 p.

ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛЯРНО-СИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Огарков В.Б., Бугаков В.М. (Воронеж)

Рассмотрим полярно-симметричную обобщённую плоскую деформацию упруго-пластического цилиндра из несжимаемого материала при равномерном вращении [1]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta+\frac{\gamma w^2r^2}{g}=0; \tag{1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right)-r\frac{d\varepsilon_r}{dr}=0; \quad \varepsilon_r=\frac{du}{dr};\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r} \tag{2}$$

$$\varepsilon_r=\Psi(\sigma_r-\sigma_0);\ \ \varepsilon_\theta=\Psi(\sigma_\theta-\sigma_0);\ \varepsilon_z=\Psi(\sigma_z-\sigma_0) \tag{3}$$

$$\varepsilon_z=const; \quad \varepsilon_0=\frac{1}{3}(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)=0; \quad \varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=0 \tag{4}$$

$$\psi=\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}; \quad \sigma_0=\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) \tag{5}$$

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_\theta-\sigma_r)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2} \tag{6}$$

$$\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_\theta-\varepsilon_r)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_r)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_\theta)^2} \tag{7}$$

Подставим первые два соотношения (3) в условие несжимаемости (4):

$$\Psi(\sigma_r+\sigma_\theta-2\sigma_0)=-\varepsilon_z; \quad \sigma_r+\sigma_\theta-2\sigma_0=\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\theta-2\sigma_{я}) \tag{8}$$

$$\Psi = \frac{-3\varepsilon_z}{(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_я)} \tag{9}$$

Если соотношение (9) выполнено, то третье соотношение (3) выполняется:

$$\varepsilon_z = \Psi(\sigma_z - \sigma_0) = \frac{-3\varepsilon_z}{(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_я)^3}(2\sigma_я - \sigma_r - \sigma_\theta) = \varepsilon_z \tag{10}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_я + \psi(\ \sigma_r - \sigma_я);\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_я + \psi(\ \sigma_\theta - \sigma_я) \tag{11}$$

Сложим и вычтем соотношения (11):

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 2\varepsilon_я + \psi(\ \sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_я) =\ 2\varepsilon_я - 3\varepsilon_я = -\varepsilon_я \tag{12}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \psi(\ \sigma_r - \sigma_\theta) =\ \frac{-3\varepsilon_я(\ \sigma_r - \sigma_\theta)}{\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_я} \tag{13}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{3\varepsilon_я(\ \sigma_r - \sigma_\theta)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)} \tag{14}$$

Для пластического материала имеем условие пластичности Мизеса [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \sigma_T \tag{15}$$

Подставим в условие пластичности (15) формулу (14):

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + \left[\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{3\varepsilon_z(\sigma_r - \sigma_\theta)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)} - \sigma_r\right]^2 +$$

$$+\left[\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \sigma_\theta + \frac{3\varepsilon_z(\sigma_r - \sigma_\theta)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}\right]^2 = 2\sigma_T^2 \tag{16}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 = \frac{4\sigma_T^2}{3\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]};\quad \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} \tag{17}$$

Подставим формулу (17) в уравнение равновесия (1):

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} - \frac{w^2\gamma r^2}{g} \tag{18}$$

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sigma_T dr}{r\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} - \frac{w^2 \gamma r^2}{2g} + C_1 \tag{19}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sigma_T dr}{r\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} - \frac{\gamma w^2 r^2}{2g} + C_1 \tag{20}$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sigma_T dr}{r\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} - \frac{\gamma w^2 r^2}{2g} + C_1 \tag{21}$$

Запишем уравнение совместности деформаций (2) с учётом условия несжимаемости (4):

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{C_2}{r^3}; \quad \varepsilon_\theta = -\frac{C_2}{2r^2} + C_3 \tag{23}$$

Используем соотношения Коши (2):

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_r = \frac{C_2}{2r^2} - C_3 - \varepsilon_z; \quad \frac{u}{r} = -\frac{C_2}{2r^2} + C_3 \tag{24}$$

$$u(r) = -\frac{C_2}{2r} - (C_3 + \varepsilon_z)r; \quad u(r) = -\frac{C_2}{2r} + C_3 r \tag{25}$$

Чтобы радиальное перемещение было однозначным, необходимо положить:

$$\varepsilon_z = -2C_3; \quad u(r) = -\frac{C_2}{2r} + C_3 r \tag{26}$$

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sigma_T dr}{r\sqrt{\left[1 + \frac{3\varepsilon_z^2 r^4}{C_2^2}\right]}} - \frac{\gamma w^2 r^2}{2g} + C_1 \tag{27}$$

Константы C_1 , C_2 и C_3 для цилиндра с днищем следует находить из граничных условий [1]:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \quad \sigma_r(r = r_2) = -q; \quad 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = N \tag{28}$$

Здесь p и q – заданные внешнее и внутреннее давления, N – заданное осевое усилие.

Полученное решение легко обобщается на случай неоднородного цилиндра: $\sigma_T(r)$ и $\gamma(r)$.

Найденные напряжения и деформации реализуют полное пластическое состояние по всей толщине цилиндра, что впервые позволяет изучить задачу деформирования слоистого упруго-пластического цилиндра.

Литература

1. Н.Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., “Машиностроение”, 1975, 400 с.

ОБОБЩЁННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В УСЛОВИЯХ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Огарков В.Б., Шабанов М.Л., Петков А. (Воронеж)

Рассматривается полярно-симметричная обобщённая плоская деформация упруго-пластического цилиндра из несжимаемого материала в условиях теплового воздействия [1]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \tag{1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \varepsilon_r = \frac{du}{dr};\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_r - \alpha T = \psi(\sigma_r - \sigma_0);\\ &\varepsilon_\theta - \alpha T = \psi(\sigma_\theta - \sigma_0);\\ &\varepsilon_z - \alpha T = \psi(\sigma_z - \sigma_0);\ \varepsilon_0 = \alpha T \end{aligned} \tag{3}$$

$$\varepsilon_z = const;\ \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) = \alpha T \tag{4}$$

$$\psi = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i};\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta) \tag{5}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} \tag{6}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2} \tag{7}$$

Подставим первые два соотношения (3) в четвёртое соотношение:

$$\alpha T + \Psi(\sigma_r - \sigma_0) + \alpha T + \Psi(\sigma_\theta - \sigma_0) = -\varepsilon_z + 3\alpha T \tag{8}$$

$$\Psi = \frac{-3(\varepsilon_z - \alpha T)}{\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_я} \tag{9}$$

Если выполняется соотношение (9), то третье и четвёртое соотношения (3) выполняются автоматически. Имеют место следующие соотношения:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_я + \psi(\sigma_r - \sigma_я);\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_я + \psi(\sigma_\theta - \sigma_я) \tag{10}$$

Сложим и вычтем эти формулы:

$$\varepsilon_r \ + \varepsilon_\theta = 2\varepsilon_z + \Psi(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_z) = -\varepsilon_z + 3\alpha T \tag{11}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{-3(\varepsilon_z - \alpha T)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_я} \tag{12}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)} \tag{13}$$

Условие пластичности Мизеса:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \sigma_T \tag{14}$$

Подставим в условие пластичности соотношение (13):

$$\varepsilon_z = (\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + \left[\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r) + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}\right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}\right]^2 = 2\sigma_T^2 \tag{15}$$

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 = \frac{4\sigma_T^2}{2\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}; \quad (\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} \tag{16}$$

Используем уравнение равновесия (1):

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} \tag{17}$$

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \int\limits_{r_1}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} + C_1 \tag{18}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} + \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \int\limits_{r_1}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} + C_1 \tag{19}$$

$$\sigma_я = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}\sqrt{\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} + \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \int\limits_{r_1}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left[1 + \frac{3(\varepsilon_z - \alpha T)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2}\right]}} + C_1 \tag{20}$$

Используем логарифмический закон изменения теплового потока:

$$T(r) = A \ln r + B \tag{21}$$

Из условия несжимаемости:

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta - \varepsilon_z + 3\alpha A \ln r + 3\alpha B \tag{22}$$

Уравнение совместности деформаций (2):

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - 3\alpha A = 0; \tag{23}$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{C_2}{r^3} + \frac{3\alpha A}{2r}; \quad \varepsilon_\theta = -\frac{C_2}{2r^2} + \frac{3\alpha A}{2} \ln r + C_3 \tag{24}$$

$$\varepsilon_r = \frac{C_2}{2r^2} + \frac{3\alpha A}{2} \ln r - \varepsilon_z - C_3 + 3\alpha B \tag{25}$$

Воспользуемся соотношениями Коши (2):

$$\frac{du}{dr} = \frac{C_2}{2r^2} + \frac{3\alpha A}{2} \ln r - \varepsilon_z - C_3 + 3\alpha B \tag{26}$$

$$\frac{u}{r} = -\frac{C_2}{2r^2} + \frac{3\alpha A}{2} \ln r + C_3 \tag{27}$$

$$u(r) = -\frac{C_2}{2r} + \frac{3\alpha A}{2}(r \ln r - r) - \varepsilon_z r - C_3 r + 3\alpha B r \tag{28}$$

$$u(r) = -\frac{C_2}{2r} + \frac{3\alpha A}{2} r \ln r + C_3 r \tag{29}$$

Чтобы радиальное перемещение было однозначным, необходимо положить:

$$\varepsilon_{я} = -2C_3 + 3\alpha B - \frac{3\alpha A}{2} \tag{30}$$

Константы C_1 , C_2 и C_3 необходимо найти из граничных условий:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \ \sigma_r(r = r_2) = -q; \quad 2\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = N \tag{31}$$

Здесь p и q – заданные внутреннее и внешнее давления; N – заданное осевое усилие.

Литература

1. Н.Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., “Машиностроение”, 1975, 400с.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Ойнас И.Л. (Краснодар)

ioinas@mail.ru

Рассматривается разностное уравнение вида

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k + f_n, \ \ (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

где $a_0 \neq 1$. Для последовательностей $a = \{a_n\}$ определяется свертка $a * b = \{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\}$ и производящая функция $\hat{a}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Равенством $\beta_n^{(r)}(\lambda) = \left\{ \frac{\lambda^n}{n!} \prod\limits_{i=1}^{n} (r+i) \right\}$

$(\lambda \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{R}, \prod\limits_{i=1}^{0} = 1)$ задается последовательность $\beta^{(r)}(\lambda) = \{\beta_n^{(r)}(\lambda)\}$. Через l_1 обозначается пространство последовательностей ν, т.ч. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\nu_k| < \infty$, через $E(x)$ - целая часть $x \in \mathbf{R}$.

Резольвента r ядра a определяется уравнением

$$r = (\delta + r) * a,$$

где $\delta = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Тогда решение (1) представимо в виде $x = (\delta + r) * f$. Поэтому асимптотическое поведение решения при заданном f полностью определяется структурой резольвенты. Так как $\hat{r}(z) = \hat{a}(z)(1 - \hat{a}(z))^{-1}$, то структура резольвенты r, в свою очередь, зависит от нулей функции $1 - \hat{a}(z)$. В случае конечного множества нулей целой кратности асимптотическое поведение резольвенты изучено достаточно хорошо, особенно для суммируемых ядер (см., например, [1]). Далее рассматриваются ситуации:

1) $1 - \hat{a}(z)$ в круге $|z| \leqslant 1$ имеет конечное число нулей $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $m_1, \ldots, m_k$ соответственно, причем $m_1, \ldots, m_s$ – целые, а m_j при $j > s$ – нет;
2_0) $a \in l_1$;
2_1) $a = a^{(1)} + a^{(0)}$, где $a^{(0)} \in l_1$, $a_n^{(1)} = \sum\limits_{j=1}^{l} P_{n_j}(n)\mu_j^{-n}$, $|\mu_j| \leqslant 1$ ($P_r(n)$ - многочлен степени $\leqslant r$).

Ранее было показано (см. [2]), что в случае 1)–2_0), когда $\{n^p a_n\} \in l_1$ $(p = \max\limits_{|\lambda_j|=1} m_j)$ и при всех j, для которых $|\lambda_j| = 1$, выполнено условие

$$(\delta - a) * \beta^{(m_j-1)}(\lambda_j^{-1}) \in l_1, \tag{2}$$

резольвента r представима в виде

$$r = r^{(1)} + b + b * r^{(2)},$$

где $r^{(i)} \in l_1$, а $b_n = \sum\limits_{j=s+1}^{k} \beta^{(m_j - E(m_j)-1)}(\lambda_j^{-1})P_p(n) + \sum\limits_{j=1}^{k} P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}$.

В настоящее время с помощью некоторого, определяемого ядром a, класса последовательностей b найдено необходимое и достаточное условие соответствующего представления резольвенты. Итак, пусть выполнено условие 1). Тогда последовательность

$$b = \sum_{j=1}^{s} \sum_{r=0}^{m_j-1} c_{jr}\beta^{(r)}(\lambda_j^{-1}) +$$

$$+ \sum_{j=s+1}^{k} \left[\sum_{r=0}^{E(m_j)-1} c_{jr}\beta^{(r)}(\lambda_j^{-1}) + \sum_{r=0}^{E(m_j)} c_{jr}\beta^{(m_j-r-1)}(\lambda_j^{-1}) \right]$$

называется $a-$регулярной, если $\prod_{i=1}^{k}(z-\lambda_j)^{m_j}(1-\hat{b}(z)) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$ $\bigl($Здесь $\sum\limits_{0}^{-1} = 0$, λ_j и m_j зависят от $a\bigr)$. Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–2_0) и, кроме того, для тех j, при которых $|\lambda_j| = 1$, справедливо (2). Тогда для любой $a-$регулярной последовательности b найдется такая последовательность $u \in l_1$, что резольвента r ядра a представима в виде

$$r = u - b - b * u. \tag{3}$$

Обратно, если для любой $a-$регулярной последовательности b выполнено (3) с $u \in l_1$, то справедливо и (2).

Если же $a \notin l_1$, то для ядер вида 2_0) представление резольвенты было найдено лишь в случае нулей целой кратности (см. [3]). В более общей ситуации справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–2_1) и, кроме того, для тех j, при которых $|\lambda_j| = 1$,

$$(\hat{a}^{(0)}(\lambda_j)\delta - a^{(0)}) * \beta^{(m_j-1)}(\lambda_j^{-1}) \in l_1.$$

Тогда для любой $a-$регулярной последовательности b найдется такая последовательность $u \in l_1$, что резольвента r ядра a представима в виде (3).

Литература

1. Ойнас И. Л., Цалюк З. Б. Асимптотический характер резольвенты дискретного уравнения в свертках // Рук. деп. в ВИНИТИ 30.10.98, №3127- В98. 13 с.

2. Ойнас И. Л. Асимптотическое поведение резольвенты дискретного уравнения типа свертки в неустойчивом случае // Рук. деп. в ВИНИТИ 12.08.99, №2636- В99. 25 с.

3. Ойнас И. Л. Асимптотическая структура резольвенты для некоторого класса ядер разностного уравнения // Рук. деп. в ВИНИТИ 30.03.04, №517- В2004. 17 с.

ПОВЕДЕНИЕ МОМЕНТОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ[1]

Онуфриев А.А. (Москва), Пыркова О.А. (Долгопрудный)
onfr@mail.ru, opyr@mail.ru

В книге [2] отмечается, что если для турбулентности за решеткой в аэродинамической трубе действительно имеет место автомодельность в переменных $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}(\xi)$ и $(\xi) = \dfrac{\mathbf{r}}{\lambda}$, где λ – тейлоровский микромасштаб, то кривые в различные моменты времени должны были бы совпадать. Однако сопоставление с опытами Стюарта и Таунсенда показывает, что это не так.

В настоящей работе рассматривается поведение $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}(\xi_1)$, $(\xi) = \dfrac{\mathbf{r}}{\Lambda}$, где Λ – интегральный корреляционный масштаб, с точки зрения автомодельного решения Люткина Ю.М. и Черных Г.Г. [1] в модели с учетом перемежаемости. То есть, поток предполагается как смесь двух режимов [3]: чисто турбулентного колмогоровского режима (τ), взятого с весом, равным значению коэффициента перемежаемости (доли турбулентного режима) $\gamma = \rho_\tau/\rho$ и чисто вязкого режима (ν), взятого с весом $(1-\gamma)$.

Влияние перемежаемости приводит к совпадению кривых $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}(\xi_1)$, что подтверждает гипотезу об автомодельности.

Без учета перемежаемости поведение $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}(\xi)$ качественно и количественно согласуется с данными Стюарта и Таунсенда.

Авторы благодарят Онуфриева А.Т. за неоценимую помощь в работе.

Литература

1. Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Об одном способе замыкания уравнения Кармана-Ховарта // Динамика сплошной среды: Сб. ст./ СО АН, Ин-т Гидродинамики - Новосибирск, 1976. - Вып. 27. - С. 124-130.

2. Монин А. С. Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. — М.: Физмат., 1967. — 720 с.

3. Онуфриев А. А., Онуфриев А. Т., Пыркова О. А. Задача о затухании однородной изотропной турбулентности с учетом явле-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1/11133) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 – 2013 годы.

ния перемежаемости // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики: Сб. науч. трудов. — М.: МФТИ, 2009. — С. 124–135.

АНАЛИЗ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИНСТРУМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Павлов Ю.С. (Воронеж)

Во многих случаях реальность внутри изучаемых предметных областей (ПО) описывается в теоретико-множественной форме, т.е. множеством $\mathbf{M} = \{a_i\}, i = 1, 2...k$, дискретных объектов a_i. Она допускает естественную геометризацию в точечно-дистанционной модели, которая обрабатывается методами многомерного шкалирования (МШ), являющегося очень мощным инструментом самых разнообразных наук [1].

МШ отображает $\{a_i\}, i = 1, 2, ..., k$, в абстрактное координатное пространство моделирования E_M возможно меньшей размерности N с минимальным искажением структуры $\mathbf{M}$, выражаемой исходной матрицей попарных близостей $\mathbf{D} = \|D_{ij}\|, i, j = 1, 2, ..., k$, элементов $a_n \in \{a_i\}, n \in \{1, 2, ..., k\}, i = 1, 2, \ldots, k$. В ней $D_{ij} = D_{ji}$. Обычно $N = 2$ или $N = 3$. Метрика E_M обычно евклидова, но возможны [1] и другие виды метрики.

Внутри E_M определяют координаты точек - объектов a_i, $i = 1, 2, ..., k$, так, чтобы матрица $\mathbf{d} = \|d_i j\|$ геометрических расстояний в парах $(a_l, a_n), l, n = 1, 2, ..., k, l \neq n$, вычисленных по метрике E_M, была близка к $\mathbf{D}$ по выбранному критерию сравнения $\mathbf{D}$ и $\mathbf{d}$. Т.е. в E_M выполняется взаимно-однозначное отображение $\varphi : \mathbf{D} \to \mathbf{d}$ или $\varphi : D_{ij} \to d_{ij}, i, j = 1, 2, ..., k$.

С учетом дальнейшего такое МШ целесообразно называть традиционным или непосредственным.

Однако, гораздо чаще реальность изучаемых ПО не допускает представление точечно-дистанционной моделью в форме $\mathbf{D}$ и непосредственное применение МШ. Из инструментов моделирования таких реальностей наиболее известны:

1) теория игр, оперирующая основным содержательным понятием "множество выигрышей" (платежей)$\mathbf{L}_1(W_{ij}), i, j = 1, 2, ..., k$,

2) марковские процессы, опирающиеся на "множество вероятностей переходов" $\mathbf{L}_2(P_{ij}), i, j = 1, 2, ..., k$,

3) потоковые модели, выражаемые через "множество продуктовых потоков" $\mathbf{L}_3(\prod_{ij}), i, j = 1, 2, ..., k$,

4) теория фракталов, оперирующая множеством "фрактальных размерностей" $\mathbf{L}_4(\text{Д}_{ij}), i,j=1,2,...,k$,

В них модели имеют форму квадратной матрицы элементов, одноименных с основным понятием теории:

$\mathbf{W} = \|W_{ij}\|, \mathbf{P} = \|P_{ij}\|, \mathbf{\Pi} = \|\prod_{ij}\|$, $\mathbf{Д} = \|\mathbf{Д}_{ij}\|, i,j = 1,2,\ldots,k$. Она выражает структуру $\mathbf{L}_m, m = 1,2,3,4$, порождаемого в соответствующем E_m, $m = 1,2,3,4$, некоторым первичным $\mathbf{M}_m = \{a_i\}, i = 1,2,\ldots,k$. Содержательный смысл $a_n \in \{a_i\}, n \in \{1,2,\ldots,k\}, i = 1,2,\ldots,k$, определяется для $\mathbf{L}_1(W_{ij})$ понятием "стратегия" ("поведение"), для $\mathbf{L}_2(P_{ij})$ - "состояние", для $\mathbf{L}_3(\prod_{ij})$ - "объект" ("состояние") и для $\mathbf{L}_4(\text{Д}_{ij})$ — "пространственная точка". Эти же понятия отображают характер E_m, $m = 1,2,3,4$.

Абстрагирование от содержательных понятий приводит к полной функциональной аналогии $W_{ij}, P_{ij}, \prod_{ij}$, и $\mathbf{Д}_{ij}$, элементам d_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,k$ и позволяет говорить следующее.

1) Справедливы относительные определения, имеющие вид высказываний

$$\mathbf{W} \sim \mathbf{d}, \mathbf{P} \sim \mathbf{d}, \mathbf{\Pi} \sim \mathbf{d}, \mathbf{Д} \sim \mathbf{d}, \tag{1}$$

где " $\sim$ " — символ эквивалентности, а все отличия сопоставляемых инструментов моделирования только в различии

— характеров используемых E_m между собой и E_M,

— мер измерения близости D_{ij} в парах $(a_i, a_j), i,j = 1,2,\ldots,k$, выражаемых в приведенных основных содержательных понятиях.

2) Матрица $\mathbf{d}$ в системном плане — обобщение всех элементов из $\{\mathbf{W}, \mathbf{P}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{Д}\}$, т.к. они выполняют те же функции в своих E_m и их метриках, что и $\mathbf{d}$ в E_m.

3) Совокупность высказываний из (1) образует нетранзитивное отношение, т.к.

$$\mathbf{W} \neq \mathbf{P} \neq \mathbf{\Pi} \neq \mathbf{Д}. \tag{2}$$

4) Из (1) и (2) следует существование одно-многозначного отображения $\psi : E_m \to \{E_m\}$, $m = 1,2,3,4$, и из (2) справедливость операций

$$E_i \cap E_j = \varnothing,\ i,j \in \{1,2,3,4\}, i \neq j,\ \bigcup_{m=1}^{4} = E_M, \tag{3}$$

позволяющих ввести частные отображения $\psi_m : E_M \to E_m, m = 1,2,3,4$, определяемые из аналогий: $\psi_1 : d_{ij} \to W_{ij}$, $\psi_2 : d_{ij} \to P_{ij}$, $\psi_3 : d_{ij} \to \prod_{ij}$, $\psi_4 : \mathrm{d}_{ij} \to \text{Д}_{ij}$.

Это согласно современной геометрии задает

— расслоение [2] глобального E_M и конкретизацию полученных слоев в качестве частных функциональных подпространств $E_m, m = 1, 2, 3, 4$, роли которых согласно (3) эквивалентны,

— иерархию в соотношении E_M и $\{E_m\}$, $m = 1, 2, 3, 4$.

Отсюда следуют

— функциональная эквивалентность всех инструментов моделирования, обобщаемых теорией МШ,

— взаимное методологическое обогащение этих инструментов в парах, связываемых высказываниями из (1).

Из последнего тезиса следует возможность опосредованного применения МШ к реальностям любых ПО. Опосредованное МШ имеет два этапа. Из них 1-й (подготовительный) — один из четырех перечисленных методов моделирования, а второй — выполнение любого типового метода традиционного МШ. В особо сложных случаях процедура моделирования трехэтапна. В ней подготовительный этап — тандемное использование, например [3], теорий конфликта и игр.

Такая T-этапность процедуры, $T = 2, 3$-особенность опосредованного МШ, отличающая его от традиционного одноступенчатого [1] МШ.

Все инструменты моделирования, сопоставляемые с МШ в (1), становятся геометрически наглядны, выявляя внутри E_m топологию моделей и возможности кластеризации данных, полученных из них и визуализированных. В настоящее время такая наглядность полностью отсутствует.

Литература

1. Дэйвисон М. Многомерное шкалирование - М.: Финансы и статистика, 1988-254с.

2. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства - М.: Мир, 1970-442с.

3. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. - М.: Наука, 1981 - 336с.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ В КОНЦЕВЫХ ТОЧКАХ

Павлова Н.Г. (Москва)
natasharussia@mail.ru

Проведено исследование задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$\dot{x} = f(x, u, t);\ t \in [t_1, t_2];\quad u(t) \in U\ \dot{\forall} t; \tag{1}$$

$$k^1(p) \leqslant 0;\ k^2(p) = 0;\ p = (t_1, t_2, x_1, x_2); \tag{2}$$

$$x_i = x(t_i),\ i = 1, 2;$$

$$G(x, t) \leqslant 0; \tag{3}$$

$$J = J(p, u) = k^0(p) + \int_{t_1}^{t_2} f^0(x, u, t)dt \to min. \tag{4}$$

Здесь x — фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — управление, f^0 — скалярная функция, а векторные функции f, G, k^1 и k^2 принимают значения в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^{d_1}$ и $\mathbb{R}^{d_2}$ соответственно, где n, m, d, d_1, d_2 — заданные натуральные числа. Неравенства $k^1(p) \leqslant 0$ и $G(x, t) \leqslant 0$ понимаются как выполняющиеся покоординатно.

Для любых фиксированных (x, t) вектор-функция f линейна по переменной u, а функция f^0 выпукла по u.

Все функции, определяющие задачу, достаточно гладкие.

Допустимое управление — измеримая и существенно ограниченная функция $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, для которой $u(t) \in U\ \dot{\forall} t$ (для п.в. t). Здесь U — выпуклый компакт.

Концевые и фазовые ограничения регулярны. Фазовые ограничения согласованы с концевыми.

Минимум в рассматриваемой задаче ищется среди всевозможных, определенных каждое на своем конечном отрезке времени, решений (1), удовлетворяющих концевым и фазовым ограничениям (2), (3).

Для задачи (1) - (4) доказан принцип максимума при предположении r-слабой управляемости исследуемой траектории в концевых точках.

Получены условия, гарантирующие для экстремали выполнение условия нетривиальности.

Доказан принципа максимума для более широкого класса задач с фазовыми ограничениями при различных предположениях об управляемости в концевых точках.

О СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ЛИСТАХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ МАКСВЕЛЛА

Паринов М.А. (Иваново)

mparinov@ivanovo.ac.ru

Пространство Максвелла есть тройка (M, g, F), где M — гладкое 4-мерное многообразие, $g = g_{ij}\,dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика лоренцевой сигнатуры $(---+)$, а $F = \frac{1}{2}F_{ij}\,dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура (замкнутая дифференциальная 2-форма) на M [1]. Пространства Максвелла интерпретируются как электромагнитные поля.

В каждой точке многообразия однозначно определяется тип пространства Максвелла в соответствии с алгебраической классификацией (один невырожденный и три вырожденных). Если тип не меняется от точки к точке, то говорят, что пространство Максвелла имеет чистый тип [1: гл. 2, § 6].

С пространствами Максвелла чистых вырожденных типов однозначно связаны невырожденные симплектические структуры на 2-мерных многообразиях N_0^2 — симплектические листы [1: гл. 2, § 6]. Для таких пространств Максвелла в M существуют системы координат $\{\bar{x}^i\}$, в которых форма F имеет канонический вид: $F = d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2$. При этом *ограничение метрической формы* $g(\xi, \eta) = g_{ij}\xi^i\eta^j$ *на многообразия* N_0^2 *является либо невырожденной отрицательно определенной формой, либо невырожденной знакопеременной формой, либо вырожденной неположительной формой.* В частности, 2-мерные многообразия N_0^2 для электростатических полей являются римановыми, для магнитостатических — псевдоримановыми, для плоских электромагнитных волн — полуримановыми (изотропными).

В монографии [1] приведены примеры приведения формы F к каноническому виду для пространств Максвелла чистых вырожденных типов (для кулоновского поля, для плоской монохроматической волны, для поля, образованного постоянным током, текущим по бесконечному прямолинейному проводнику). В докладе будут представлены и другие примеры приведения формы F к каническому виду: для пространств Максвелла с нулевым током, полученных в результате их групповой классификации [2 – 4].

Литература

1. Паринов М. А. Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.

2. Паринов М. А. Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие одномерные подгруппы группы Пуанкаре // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2009. – Вып. 1 (6). – С. 59–82.

3. Паринов М. А. Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие двумерные подгруппы группы Пуанкаре // Там же. – 2008. – Вып. 1 (5). – С. 21–42.

4. Паринов М. А. Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие подгруппы группы Пуанкаре размерностей 3–6 // Там же. – 2009. – Вып. 1 (6). – С. 83–102.

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО БАЗИСАМ ВЛОЖЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ[1]

Паунов А.К. (Москва)

paunov_ ak@mail.ru

Напомним определение орторекурсивных разложений ([1], [2]). Пусть H — пространство со скалярным произведением, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система ненулевых элементов H. Для произвольного элемента $f \in H$ нулевой остаток $r_0(f)$ положим равным f; если уже определен остаток $r_n(f)$, то положим

$$\hat{f}_{n+1} = \frac{(r_n(f), e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}, \qquad r_{n+1}(f) = r_n(f) - \hat{f}_{n+1}e_{n+1}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$*.

Орторекурсивные разложения обобщают разложения в ряды Фурье по ортогональным системам и обладают рядом свойств ортогональных разложений. В частности, для орторекурсивных разложений по произвольным системам справедливы тождество Бесселя, неравенство Бесселя, эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу равенству Парсеваля ([1]). При этом

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

орторекурсивные разложения по ряду переполненных систем обладают также свойствами, выгодно отличающими эти разложения от классических ортогональных разложений. К таким свойствам можно отнести абсолютную устойчивость как к малым изменениям системы, так и к достаточно широкому классу погрешностей в вычислении коэффициентов ([2]).

Важным вопросом теории орторекурсивных разложений является вопрос об условиях на систему элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, гарантирующих сходимость разложения к разлагаемому элементу. В частном случае, когда система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ составлена из базисов вложенных конечномерных подпространств пространства H, ответ на этот вопрос может быть сформулирован следующим образом.

Пусть $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$ — последовательность вложенных конечномерных подпространств пространства H, $\dim H_i = d_i < \infty$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i$ всюду плотно в H; $\{e_j^i\}_{j=1}^{d_i}$ — нормированный базис подпространства H_i; через α_i обозначена l^1–строчная норма матрицы $(G_i - I_i)$, где G_i — матрица Грама системы $\{e_j^i\}_{j=1}^{d_i}$, а I_i — единичная матрица соответствующего размера:

$$\alpha_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant d_i} \left\{ \sum_{k \neq j} \left| \left(e_k^i, e_j^i \right) \right| \right\}.$$

Теорема. *Если* $\liminf\limits_{i\to\infty} \alpha_i < \frac{1}{2}$, *то для любого элемента* $f \in H$ *орторекурсивное разложение* f *по системе* $\{\{e_j^i\}_{j=1}^{d_i}\}_{i=1}^{\infty}$ *сходится к* f *по норме пространства* H.

Литература

[1.] Т. П. Лукашенко *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Матем., механ. 2001. №1. С. 6–10.

[2.] В. В. Галатенко *Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов* // Известия РАН. Сер. матем. 2005. **68**, №1. С. 3–16.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ

Пашаев Н.Дж. (Азербайджан, Ленкоранский Государственный Университет)

npasa@rambler.ru

В работе исследуются вопросы единственности и „условной" устойчивости решения задачи определения коэффициентов при младших членах системы реакция-диффузия. Отыскиваемые многомерные функции не зависят от одной пространственной переменной, дополнительные условия заданы в интегральном виде.

Пусть $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$- произвольные точки $(n-1)$-мерного евклидова пространства R^{n-1} и бесконечной области $D = R^{n-1} \times (y_1(x'), y_2(x'))$ $(y_i(x),\ i = 1,2$ -заданные достаточно гладкие функции), соответственно, $Q' = R^{n-1} \times (0,T]\,, Q = D \times (0,T]\,, S = \partial D \times [0,T]\,, T > 0$. Рассмотрим задачу об определении функций $\left\{c_k(x',t), u_k(x,t), k = \overline{1,m}\right\}$ из условий:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} + c_k(x',t)\,u_k = g_k(x,t,u_1,...,u_m)\,, \quad (x,t) \in Q, \quad (1)$$

$$u_k(x,0) = \varphi_k(x)\,,\ x \in \overline{D}, \quad u_k(x,t) = \psi_k(x,t)\,,\ (x,t) \in S, \qquad (2)$$

$$\int\limits_{y_1(x')}^{y_2(x')} u_k(x', x_n, t)\,dx_n = h_k(x',t)\,, (x',t) \in Q', \qquad (3)$$

где $g_k(\cdot)\,,\ \varphi_k(\cdot)\,,\ \psi_k(\cdot)\,,\ h_k(\cdot)\,,\ k = \overline{1,m}$ заданные функции.

Определение. Функции $\left\{c_k(x',t)\,,\ u_k(x,t)\,,\ k = \overline{1,m}\right\}$ назовем решением задачи (1)-(3), если: 1)$c_k(x',t) \in C(Q')$; 2)$u_k(x,t) \in C^{2,1}(Q) \cap C\left(\overline{Q}\right)$; 3) удовлетворяются соотношения (1)-(3).

Обозначим

$$K_\alpha = \left\{(c_k, u_k) \mid c_k(x',t) \in C^{\alpha,\alpha/2}\left(\overline{Q}\,'\right), u_k(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{Q}\right),\right.$$

$$\left.|u_k|\,, \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2}\right|,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m} \quad \text{равномерно ограничены.}\right\}$$

Пусть $\left\{c_k^l(x',t)\,,\ u_k^l(x,t)\,,\ k = \overline{1,m},\ l = 1,2\right\}$-два решения задачи (1)-(3), соответствующие данным $g_k^l(\cdot)\,,\ \varphi_k^l(\cdot)\,,\ \psi_k^l(\cdot)\,,\ h_k^l(\cdot)$.

Теорема. Пусть 1) $g_k^l(x,t,\upsilon_1,...,\upsilon_m) \in C_{x,\ t}^{\alpha,\ \alpha/2}(A)$, $g_k^l(x,t,\upsilon_1,...,\upsilon_m)$ непрерывна по Липшицу по переменным $\upsilon_1,...,\upsilon_m$, равномерно по отношению $(x,t,\upsilon_1,...,\upsilon_m)$ в ограниченных множествах $A = \overline{D} \times [0,T] \times R^m$, $\varphi_k^l(x) \in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right)$ $\psi_k^l(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S)$, $\varphi_k^l(x) = \psi_k^l(x,0)$, $x \in \partial D$, $h_k^l(x',t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{Q}\ '\right)$, $\left|h^l(x;t)\right| \geqslant const > 0$, $(x';t) \in Q'$ 2) существуют решения $\left\{c_k^l(x',t),\ u_k^l(x,t),\ k=\overline{1,m},\ l=1,2\right\}$ задачи (1)-(3) и они принадлежат множеству K_α.

Тогда при $(x,t) \in \overline{D} \times [0,T]$, для любого конечного $T>0$, решение задачи (1)-(3) единственно и верна оценка устойчивости

$$\left\|c^1-c^2\right\|_0 + \left\|u^1-u^2\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant M\left[\left\|g^1-g^2\right\|_0 + \left\|\varphi^1-\varphi^2\right\|_2 + \left\|\psi^1-\psi^2\right\|_{2,1} + \left\|h^1-h^2\right\|_{2,1}\right]$$

где $M>0$-зависит лишь от данных задачи (1)-(3) и множества K_α, $\left\|\upsilon^1-\upsilon^2\right\|_p = \sum\limits_{k=1}^{m}\left\|\upsilon_k^1-\upsilon_k^2\right\|_{C^p}$.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ

Платонов С.С. (Петрозаводск)
platonov@psu.karelia.ru

Пусть группа Ли G транзитивно действует справа на гладком многообразии X. Через $\mathcal{E}(X)$ обозначим топологическое векторное пространство гладких комплекснозначных функций на X снабженное обычной топологией. Линейное замкнутое подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}(X)$ назовем инвариантным подпространством, если оно инвариантно относительно преобразований

$$\tau_g : f(x) \mapsto f(xg), \quad f \in \mathcal{E}(X), g \in G.$$

Естественными задачами гармонического анализа являются задачи об описании
строения всех инвариантных подпространств для различных конкретных групп Ли G и однородных многообразий X (см., например, [P1], где дается обзор решений таких задач). В докладе будет рассказано о решении этой задачи для нового случая: X — верхняя

пола светового конуса в $\mathbb{R}^3$, G — группа псевдоортогональных преобразований и растяжений. Перейдем к более точному описанию задачи.

Пространство $\mathbb{R}^3$ будем рассматривать как псевдоевклидово пространство в билинейной формой

$$\langle x, y\rangle := x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2, \quad x = (x_0, x_1, x_2),\, y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть X — верхняя пола светового конуса, т. е.

$$X := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x\rangle = 0, x_0 > 0\}.$$

Через $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ обозначим группу псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$ (точнее говоря ее связную компоненту единицы). Если

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ состоит из всех матриц $u = (u_{ij})$, $0 \leqslant i, j \leqslant 2$, таких, что

$$uJu^t = J, \quad \det u = 1, \quad u_{00} > 0,$$

где u^t — матрица, транспонированная к матрице u.

Пусть $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1, 2)$. Группа G действует справа на X: если $g = (t, u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathrm{SO}_0(1, 2)$, $x \in X$, то $xg := e^t xu$. Каждый элемент $u \in \mathrm{SO}_0(1, 2)$ будем отождествлять с элементом $(0, u) \in G$ и тем самым считать, что $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ является подгруппой группы G. Элемент (t, e) ($t \in \mathbb{R}$, e — единичный элемент группы $\mathrm{SO}_0(1, 2)$) будем обозначать $\gamma(t)$. Подмножество $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ является подгруппой в группе G изоморфной $\mathbb{R}$. Будем называть Γ подгруппой растяжений в G.

Основным результатом работы является полное описание всех G-инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{E}(X)$. В частности, получено описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств.

Литература

[P1] *Platonov S. S.* On describing invariant subspaces of the space of smooth functions on a homogeneous manifold // Acta Applicandae Mathematicae (Niderlands) V.81, 2004. P.327-338.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ НА ОСНОВЕ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИЙ

Плещева Е.А. (Екатеринбург)
glucanat@mail.ru

В работе [1] были рассмотрены ортонормированные системы вида $\{2^{nj/2}\psi^1(2^{nj}x - k), 2^{(nj+1)/2}\psi^2(2^{nj+1}x - k), \ldots$ $\ldots, 2^{(nj+(n-1))/2}\psi^n(2^{nj+(n-1)}x - k) \ : \ k, j \in \mathbb{Z}\}$, образующие ОНБ в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

В данной работе построены периодические масштабирующие функции и всплески на основе нескольких функций φ^s :

$$\Phi^s_{j,k}(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi^s_{j,k}(x+l), \quad \Psi^s_{j,k}(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi^s_{j,k}(x+l), \tag{1}$$

образующие КМА и ортонормированный базис всплесков в пространстве $\mathbf{L}^2[0,1)$:

$$\mathbf{V}^s_j = \overline{Span\{\Phi^s_{j,k}(x) : k \in \mathbb{Z}\}}, \quad \mathbf{W}^s_j = \overline{Span\{\Psi^s_{j,k}(x) : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Обозначим $p_s = 1 +$ Выч.$s(mod\ n)$, $s \in \mathbb{N}$. Легко получить по аналогии с [2, п.9.3], что $\mathbf{W}^s_j \perp \mathbf{V}^s_j$, $\mathbf{V}^s_j \subset \mathbf{V}^{p_s}_{j+1}, \mathbf{W}^s_j \subset \mathbf{V}^{p_s}_{j+1}$, $\mathbf{W}^s_j \bigoplus \mathbf{V}^s_j = \mathbf{V}^{p_s}_{j+1}$. Базис пространства $\mathbf{V}^{p,s}_j, j = 0,1,2,\ldots$ образуют 2^j масштабирующих функций.

Получено n цепочек пространств периодического n-раздельного КМА:

$$\mathbf{V}^{p_{s-1}}_0 \subset \mathbf{V}^{p_s}_1 \subset \mathbf{V}^{p_{s+1}}_2 \subset ...,$$

для которых выполняются следующие свойства: $\{\Phi^{p_{s-1}}_{0,0}(x), \Psi^{p_{s-1}}_{nj,k}(x), \Psi^{p_s}_{nj+1,k}(x), \ldots$ $\ldots, \Psi^{p_{s+n-2}}_{nj+n-1,k}(x)\}, j \in \mathbb{Z}^+, k \in \{0,1,2,...2^j-1\}$, являются базисами пространства $\mathbf{L}^2(0,1]$ для любого $s = 1,2,\ldots n$.

$\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbf{V}^s_{nj} = \mathbf{V}_0$, $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathbf{V}^s_{nj+l}} = \mathbf{L}^2[0,1), s = 1,2\ldots n;\ l = 0,1,\ldots n-1$.

Для периодических n-всплесков и масштабирующих функций справедливо

Утверждение 1. *Пусть $\Phi^s(x)$, $\Psi^s(x)$ определены в (1). Тогда их можно представить следующим образом:*

$$\Phi^s(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{j/2}\widehat{\psi}^s(l/2^j)e^{2\pi i\nu(x-\nu/2^j)},$$

$$\Psi^s(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{j/2}\widehat{\psi}^s(l/2^j)e^{2\pi i\nu(x-\nu/2^j)}.$$

Коэффициенты проекции функции на пространства с меньшим номером по коэффициентам проекции функции на пространства с большим номером, и наоборот, вычисляются по формулам

$$C_k^{s,j-1} = \sum_{l=0}^{2^{2j}-1} C_l^{p_s,j}\overline{h_{l-2k}^{s,p_s}};\quad D_k^{s,j-1} = \sum_{l=0}^{2^{2j}-1} C_l^{p_s,j}(-1)^{l-1}\overline{h_{2k+1-l}^{s,p_s}};$$

$$C_l^{p_s,j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(C_k^{s,j-1}h_{l-2k}^{s,p_s} + D_k^{s,j-1}(-1)^l\overline{h^{s,p_s}}_{2k+1-l}).$$

Литература

[1] *Плещева Е.А.* Построение и свойства n-раздельного КМА. // Тезисы 41-й молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики Екатеринбург, 31 января-5 февраля 2010 года. С. 172–178.

[2] *Добеши И.* Десять лекций по вэйвлетам. Москва-Ижевск: Динамика, 2001, 464 с.

ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

Плотников Л.Г. (Воронеж)

lavrentiy.plotnikov@mail.ru

В работе в рамках метода малого параметра строится математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние толстостенной цилиндрической трубы (a – внутренний радиус, b – внешний радиус), находящейся под действие сжимающих нагрузок, с учетом собственного веса. При этом свойства материала трубы моделировались соотношениями упруговязкопластического тела [1]. Функция нагружения, в этом случае, имеет вид

$$F = \left(S_i^j - c\left(\varepsilon_i^j\right)^p - \eta\left(e_i^j\right)^p\right)\left(S_j^i - c\left(\varepsilon_j^i\right)^p - \eta\left(e_j^i\right)^p\right) - 2k^2,$$

где c и η – коэффициент упрочнения и вязкости соответственно; k – предел текучести; $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma\delta_i^j$ – девиатор тензора напряжений; $\sigma = \sigma_k^k/3$; δ_i^j – символ Кронекера; ε_i^j – компоненты тензора деформаций; e_i^j – компоненты тензора скоростей деформаций. Верхний индекс “p” обозначает величины, относящиеся к пластической области.

Предполагается, что под действием равномерно сжимающих нагрузок интенсивностями p – по внешней образующей и p_0 – по внутренней образуется пластическая зона, полностью охватывающая внутренний контур трубы.

При определении напряженно-деформируемого состояния все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра δ, характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния (от состояния без учета силы тяжести)

$$\left\{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}, \varepsilon_{ij}^{e}, e_{ij}^{p}, \ldots\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n} \left\{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}, \varepsilon_{ij}^{e}, e_{ij}^{p}, \ldots\right\}.$$

Уравнения равновесия имею в декартовой системе координат вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma,$$

где γ – объемная сила.

Влияние силы тяжести учитывается в первом приближении, полагая [2]

$$q = \delta c_1, \gamma = \delta c_2,$$

где c_1, c_2 – $const.$ δ – малый параметр, характеризующий отклонение распределения веса по оси Ox от распределения веса по оси Oy.

Литература

1. Спорыхин, А.Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А.Н. Спорыхин, А.И. Шашкин. М.: Физматлит, 2004. 232 с.

2. Матвеев, С.В. Упругопластическое состояние среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести / С.В. Матвеев // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. Самара, 2007. №2(52). С.107-114.

О ТЕОРЕМЕ ТИПА ЗИГМУНДА ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ УОЛША[1]

Плотников М.Г. (Вологда)

mgplotnikov@mail.ru

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_n\}$ — монотонно убывающая к нулю последовательность, $\Theta(\boldsymbol{\varepsilon})$ — класс одномерных рядов Уолша с коэффициентами b_n такими, что $|b_n| \leqslant \varepsilon_n$ для всех n. В. Шапиро доказал [1], что для всякого $\delta > 0$ существует $U(\Theta(\boldsymbol{\varepsilon}))$-множество меры большей, чем $1 - \delta$. Множество A называется $U(\Theta(\boldsymbol{\varepsilon}))$-множеством, если любой ряд Уолша из класса $\Theta(\boldsymbol{\varepsilon})$, сходящийся к нулю вне A, является тождественно нулевым. Теорему Шапиро усилили, доказав наличие $U(\Theta(\boldsymbol{\varepsilon}))$-множеств полной меры, А. В. Бахшецян [2] и Г. Г. Геворкян [3]. Теорема Шапиро является аналогом известной теоремы Зигмунда [4, гл. 9] для тригонометрических рядов. Теоремы А. В. Бахшецяна и Г. Г. Геворкяна являются аналогами теорем Кахана–Кацнельсона [5] (в одномерном случае) и Ш. Т. Тетунашвили [6] (в многомерном случае при сходимости по прямоугольникам), установленных для тригонометрических рядов.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_n\}$ — монотонно убывающая к нулю последовательность, $\Theta_m(\boldsymbol{\varepsilon})$ — класс m-**кратных** рядов Уолша с коэффициентами $b_{n_1,\ldots,n_m}$ такими, что $|b_{n,\ldots,n}| \leqslant \varepsilon_n$ для всех n. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует $U(\Theta_m(\boldsymbol{\varepsilon}))$-множество меры большей, чем $1 - \delta$.*

Если m-кратные ряды Уолша рассматривать на $[0,1]^m$, то теорема 1 справедлива для сходимости по прямоугольникам, а если на группе G^m — то и для сходимости по кубам. Неизвестно, верен ли аналог теоремы 1, если рассматривать m-кратные ряды Уолша на $[0,1]^m$, сходящиеся по кубам.

Отметим, что принадлежность одному из классов $\Theta_m(\boldsymbol{\varepsilon})$ не накладывает никаких ограничений на те коэффициенты m-кратного ряда Уолша, которые находятся вне "диагонали то есть эти классы не слишком узки. В связи с этим напомним, что для кратных тригонометрических рядов и кратных рядов Уолша остается нерешенной (и при сходимости по прямоугольникам, и при сходимости по кубам) следующая фундаментальная для теории кратных ортогональных рядов проблема: существует ли множество положительной меры такое, что любой сходящийся вне этого множества ряд

[1]Работа поддержана РФФИ (проекты 08-01-00669 и 11-01-00321) и государственной программой "Ведущие научные школы" (проект НШ-3252.2010.1)

является тождественно нулевым? Эта проблема была поставлена Н. Н. Холщевниковой в [7].

Литература

[1] V. L. Shapiro, "$U(\varepsilon)$-sets for Walsh series *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**:5 (1965), 867–870.

[2] А. В. Бахшецян, "Об $U(\varepsilon)$-множествах полной меры для системы Уолша *Изв. АН Армян. ССР. Сер. матем.*, **16** (1981), 431–443.

[3] Г. Г. Геворкян, "О множествах единственности для систем Хаара и Уолша *Докл. АН Армян. ССР*, **73**:2 (1981), 91–96.

[4] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.

[5] J.-P. Kahane, V. Katsnelson, "Sur les ensembles d'unicite $U(\varepsilon)$ de Zygmund *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A., **277** (1973).

[6] Ш. Т. Тетунашвили, "О единственности кратных тригонометрических рядов *Матем. заметки*, **58**:4 (1995), 596–603.

[7] Н. Н. Холщевникова, "Объединение множеств единственности кратных рядов — Уолша и тригонометрических *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 135–160.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ШКАЛЫ В РАМКАХ ЭКСПЕРТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Погосян К.С. (Воронеж)

pogosyan_k_s@mail.ru

Основная проблема группового принятия решений заключается в согласовании индивидуальных суждений экспертов. Ее решение во многом зависит от модели представления экспертной информации и принципа согласования. Практически не разработаны подходы для случая, когда экспертные оценки являются лингвистическими.

Особенностью задачи формирования согласованного группового решения является то, что в рамках групповой экспертизы каждый эксперт может использовать свою лингвистическую шкалу, мощность которой зависит от его способности различать градации неопределенности, т.е. компетентности. При этом возникает задача согласования индивидуальных лингвистических шкал, которая осуществляется путем унификации лингвистической информации – процедуры, предполагающей переход к единой *универсальной лингвистической шкале* [1]. В данной ситуации возникает проблема, связанная с построением оптимальной для всех экспертов универсальной лингвистической шкалы. Проблема построения лингвистической шкалы является актуальной и важнейшей в рамках экспертного оценивания, так как она наилучшим образом отражает нюансы описания реальных объектов в условиях неопределенности, а отсутствие в литературе математического аппарата для построения оптимальной лингвистической шкалы обусловливает актуальность данного исследования

Для решения проблемы выбора оптимального множества значений лингвистической переменной используется следующий *критерий оптимальности:* если объект описывается группой экспертов, то под оптимальное понимается такое терм-множество, которое обеспечивает минимальную степень рассогласованности описаний [2]. В работе предлагается подход, при котором переход от индивидуальных лингвистических шкал к универсальной шкале строится на основе решения оптимизационной задачи, суть которой заключается в определении шкалы, находящейся на минимальном расстоянии от индивидуальных экспертных шкал.

В рамках исследования получены результаты, касающиеся лингвистического моделирования. Была решена задача формирования оптимальной лингвистической шкалы для группы экспертов. Предложен алгоритм решения оптимизационной задачи построения универсальной для всех экспертов лингвистической шкалы на основе индивидуальных лингвистических шкал экспертов. В частности, было введено оригинальное понятие коэффициента рассогласованности лингвистических шкал, с помощью которого и проверялся критерий оптимальности. Дальнейшие исследования будут посвящены развитию подходов к оценке взаимодействия экспертов в группе и учету этого взаимодействия при формировании согласованного группового решения.

Литература

1. Леденева Т.М. Обработка нечеткой информации. Воронеж: Изд-во Воронежский государственный университет, 2006. – 233с.

2. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений / А.П. Рыжов – Москва: “Диалог – МГУ”, 2003. - 81с.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ БИРЕКУРСИВНЫЕ СПЛАЙН-РАЗЛОЖЕНИЯ[1]

Подкопаев А.И. (Москва)

tony-meshok@yandex.ru

В компьютерном анализе данных широко применяются разложения по системам сжатий и сдвигов B-сплайнов $B^{1,0} = \chi_{[0,1]}$, $B^{1,2r-1} \equiv B^{1,2r-2} * \chi_{[-1,0]}$, $B^{1,2r} \equiv B^{1,2r-1} * B^{1,0}$ $(r \in \mathbb{N})$ и бокс-сплайнов $B^{2,0}((x,y)) = \max(0, \min(1-|x|, 1-|y|, 1-|x+y|))$, $B^{2,r} \equiv B^{2,r-1} * B^{2,0}$ $(r \in \mathbb{N})$, одним из преимуществ которых является кусочная полиномиальность. Среди них выделяются *би*ортогональные вейвлет-разложения [1], а также сплайн-пирамиды [2] (увы, их применение в двумерном случае слишком трудоёмко из-за необходимости обращения фильтров) — одни из первых примеров *рекурсивных* разложений по неортогональным цепочкам систем (в [3] дано общее определение, а в [4] показана возможность получения точных разложений при приближённом вычислении их коэффициентов, которой не дают алгоритмы из [1], к тому же использующие более одной пары порождающих функций).

Предлагается совмещающая идеи из [1–4] конструкция *бирекурсивного* разложения $\sum_{j=1}^{\infty} P_j R_{j-1} f$ (с погрешностями $\xi_{j,k}$) функции f на $\mathbb{R}^d$ $(d \in \{1,2\})$, где $P_j f = 2^{jd}\lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\langle f, B^{d,s}(2^j \cdot -k)\rangle + \xi_{j,k}) B^{d,r}(2^j \cdot -k)$, $r, s \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $R_0 = \mathrm{Id}$, $R_j = R_{j-1} - P_j R_{j-1}$ $(j \in \mathbb{N})$. Его сходимость к f в банаховом пространстве X (например соболевском: $X := W_p^m(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,\infty]$, $m \in \mathbb{N}_0$) равносильна тому, что $R_j f \xrightarrow[j\to\infty]{X} 0$, ибо $f \equiv (\sum_{j=1}^{J} P_j R_{j-1} f) + R_J f$. Следующий результат свидетельствует об оптимальной скорости сходимости указанного разложения в ряде случаев.

Теорема. *Если* $(r+s)/(3-d) \in [0, 3-d] \cap \mathbb{Z}$, $|\lambda - 1| < 2^{-dr-d}$, $f \in W_p^n(\mathbb{R}^d)$ *(*$n \leqslant dr + d$*) и* $\limsup_{j\to\infty} 2^{(n-d/p)j} \|\{\xi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_p = L < \infty$ *(*$d/\infty := 0$*), то для всех целых* $m \in [0, n-1]$ $\limsup_{j\to\infty} 2^{(n-m)j} \|R_j f\|_{W_p^m} \leqslant C_\lambda(\|f\|_{W_p^n} + L)$ *(где* C_λ *не зависит от* f *и* $\xi_{j,k}$*), и если к тому же* $n = dr + d - 1$ *и* $L = 0$ *(при* $p = \infty$ *дополнительно предполагается, что* $f \in C^n(\mathbb{R}^d)$*), то* $R_j f \xrightarrow[j\to\infty]{W_p^n} 0$.

Литература

1. Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.-C. *Biorthogonal bases of*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321) и программы "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-3252.2010.1).

compactly supported wavelets // Comm. on Pure and Appl. Math., 45 (1992), pp. 485–560.

2. Unser M., Aldroubi A., Eden M. *The L_2 Polynomial Spline Pyramid* // IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intellig., 85:4 (1993), pp. 364–378.

3. Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. *О рекурсивных разложениях по цепочке систем* // Докл. АН, 425:6 (2009), с. 1–6.

4. Галатенко В.В. *Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов* // Изв. РАН, Сер. матем., 69:1 (2005), с. 3–16.

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Политов А.В. (Москва)

kentghost@yandex.ru

Напомним определение орторекурсивного разложения по фиксированной системе элементов. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, $\{e_n\}_{n=1}^N$ $(N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$— система элементов $\mathcal{H}$ с единичной нормой, линейная оболочка которых всюду плотна в $\mathcal{H}$. Для каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ определим орторекурсивное разложение следующим образом. Положим $r_0(f) = f$. Далее, если уже определен остаток $r_{n-1}(f)$ $(1 \leqslant n < N)$, положим $\hat{f}_n = (r_{n-1}(f), e_n)$, $r_n(f) = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n$.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{N} \hat{f}_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением* (*рекурсивным рядом Фурье*) элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^N$.

Систематическое изучение орторекурсивных разложений было начато в работе [1], в которой, в частности, и было предложено приведенное выше определение орторекурсивных разложений.

В отличие от классических рядов Фурье по полным системам, орторекурсивные разложения не обязательно сходятся к разлагаемому элементу. Более того, орторекурсивное разложение может представлять собой расходящийся ряд. В связи с этим в 2007 году Б. С. Кашиным был поставлен вопрос о получении выраженных в терминах матрицы Грама условий на систему, гарантирующих

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11–01–00476) и программы “Ведущие научных школ РФ” (проект НШ–3252.2010.1).

сходимость орторекурсивных разложений по этой системе к разлагаемому элементу. Основным результатом работы и является ответ на этот вопрос.

Обозначим через G матрицу Грама системы $\{e_n\}_{n=1}^N$. Через H обозначим матрицу, получающуюся из G обнулением всех элементов, лежащих выше главной диагонали. Через H^{-1} обозначим правую обратную к H матрицу (подробнее о действиях с бесконечными матрицами и, в частности, об обращении бесконечных матриц, см., например, [2, гл. 2]).

В общем случае справедлив следующий критерий сходимости.

Теорема 1. *Сходимость орторекурсивного ряда Фурье каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ по системе $\{e_n\}_{n=1}^N$ к разлагаемому элементу равносильна следующей системе условий:*

а) $G(H^{-1}G) = G$;

б) $(CH)C^T = C(HC^T)$, где $C = G(H^{-1})^T$.

Для случая конечномерных пространств и конечной системы критерий допускает более простой вид.

Теорема 2. *Сходимость орторекурсивного ряда Фурье каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ по системе $\{e_n\}_{n=1}^N$ к разлагаемому элементу равносильна равенству $GH^{-1}G = G$.*

Литература

[1.] Т. П. Лукашенко *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестник МГУ. Сер.1. Матем., мех. 2001, №1. С. 6–10.

[2.] Р. Кук *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей* — М.: Физматлит, 1960.

ПРИМЕРЫ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ ШИРОКОГО КЛАССА ПЕРЕСТАВЛЕННЫХ СИСТЕМ УОЛША-ПЭЛИ[1]

Поляков И.В. (Москва)

igorp86@mail.ru

Для тригонометрической системы широко известен классический результат Карлесона о сходимости почти всюду ряда Фурье функции из $L^2[0, 2\pi]$ по тригонометрической системе к этой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00321) и программы "Ведущие научные школы проект НШ-3252.2010.1

функции. Не менее известен классический пример Колмогорова, который доказал существовании функции из $L^1[0, 2\pi]$, ряд Фурье по тригонометрической системе которой расходится почти всюду. Усилением теоремы Карлесона является результат Антонова (см. [1]). Он показал, что для всякой функции из класса $L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ \ln^+ L([0, 2\pi])$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду. Это наилучший результат касающийся сходимости для данной системы. Аналогичный результат получен для системы Уолша в нумерации Пэли Сьелином и Сориа в [2]. В то же время многие авторы обобщали пример Колмогорова. Например, Конягин в [3] показал, что для всякой функции $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ и последовательности $\{\beta(m)\}$ со следующими свойствами: функция $\varphi(u)/u$ является неубывающей на $(0, +\infty)$, $\beta(m) \geqslant 1$ $(m = 1, 2, \dots)$ и выполнено

$$\varphi(m)\beta(m) = o(m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m}) \text{ при } m \to \infty,$$

найдется функция $h \in L[-\pi, \pi]$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|h(x)|)dx < \infty$$

и $\limsup_{m\to\infty} S_m(h, x)/\beta(m) = \infty$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$, где $S_m(h)$ – m-я частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции h.

Для системы Уолша наиболее сильный результат в этом направлении принадлежит Бочкареву, который в [4] доказал, что для всякой $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ - неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{\log u}), \text{ при } u \to \infty,$$

существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье-Уолша-Пэли которой расходится всюду на $[0, 1)$.

Этот пример является более сильным, чем существоваший ранее пример Муна ([5]), который построил пример функции из класса $L(\ln^+ \ln^+)^{1-\epsilon} L$, ряд Фурье - Уолша - Пэли которой расходится почти всюду.

Отметим также пример Балашова для системы Уолша в нумерации Качмажа, который показал в [6], что для всякого класса $L(Ln^+ L)^{1-\epsilon}([0, 1])$, $\epsilon \in (0, 1)$ найдется функция из этого класса, ряд Фурье - Уолша - Качмажа которой расходится почти всюду.

Система Уолша обычно рассматривается в нумерациях Пэли, Качмажа и самого Уолша. Наиболее известна первая из них. Шипп рассматривал некоторые классы перестановок (кусочно-линейные), с помощью которых из нумерации Пэли можно получить нумерации Качмажа и Уолша ([7]). Система Уолша может быть определена как на отрезке $[0,1]$, так и на специальной двоичной группе G. В данной работе выделяется некоторый класс Шипповских перестановок системы Уолша-Пэли. На этот класс переносится конструкция Бочкарева и для систем из этого класса строится соответствующий пример. Отметим, что выделенный класс содержит в себе систему Уолша в нумерации самого Уолша.

Литература

[1] Antonov N. Y. Convergence of Fourier series, East Journal on Approximations. 1996. V. 2. № 2. P. 187–196.

[2] P. Sjolin, F. Soria Remarks on theorem by N. Y. Antonov, Studia Math. 158, 2003.

[3] С. В. Конягин, О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье, Матем. сб., 2000, т. 191, № 1, с. 103–126.

[4] Бочкарев С. В. , Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша и мультипликативным системам, Успехи Мат. Наук 2004, т. 59 , вып. 1(355), с 103—124.

[5] K. Moon, An everywhere divergent Fourier—Walsh series of the class $L(\ln^+\ln^+)^{1-\epsilon}L$, Proc. Amer. Math. Soc., 50 (1975), 309–314.

[6]

Балашов Л.А., О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами, Сиб. Мат. журн. 1971, т. 12, номер 1, с. 25 - 39.

[7] F. Schipp, Некоторые перестановки системы Уолша, Мат. заметки 18 (1975) 193—201.

[8] Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов, Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М., Наука, 1987.

[9] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon, Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis, Budapest 1990.

[10] L. Carleson, On the convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta. Math. 116 (1966), 135-157.

[11] A.N. Kolmogoroff, Une serie de Fourier-Lebesgue divergente partout, C.R. Acad. Sci. Paris, 1926, V. 183, 1327-1329.

ОЦЕНКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Потапов Д.К. (Санкт-Петербург)

dkpotapov@mail.ru, potapov@apmath.spbu.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$ рассматриваются основные краевые задачи для полулинейных уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью следующего вида:

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)), \;\; x \in \Omega,$$

$$Bu|_{\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Здесь L – равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; λ – параметр; функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измерима и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbf{R}$ разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$ $\forall u \in \mathbf{R}$, $g_-(x, u) = \varliminf\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \varlimsup\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$; граничное условие (1) имеет вид: либо условие Дирихле $u(x)|_{\Gamma} = 0$, либо условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}_L}(x)|_{\Gamma} = 0$ с конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}_L}(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(\mathrm{n}, x_j)$, n – внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(\mathrm{n}, x_j)$ – направляющие косинусы нормали n, либо третье краевое условие $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_{\Gamma} = 0$, функция $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ.

Пусть $X = \mathbf{H}^1_{\circ}(\Omega)$, если (1) – граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (1) – граничное условие Неймана или третье краевое условие. Положим $J_1(u) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} c(x)u^2(x)dx$ в случае граничного условия Дирихле или Неймана; $J_1(u) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \sigma(s)u^2(s)ds$ в случае третьего краевого условия; $J_2(u) = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g(x, s)ds$. Предположим, что найдется элемент $u_0 \in X$, для которого $J_2(u_0) > 0$.

Вариационным методом получена следующая теорема об оценках дифференциального оператора в рассматриваемых задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями (см. работу [1]).

Теорема. *Пусть выполнены условия теорем 1, 2 из работы [2]. Тогда для почти всех $x \in \Omega$ имеют место следующие оценки дифференциального оператора L:*

$$0 \leqslant \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}|g(x, u(x))| < |Lu(x)| \leqslant b(x),$$

где $b(x)$ – некоторая функция из $\mathbf{L}_q(\Omega)$, $q \geqslant \frac{2n}{n+2}$.

Литература

1. *Потапов Д.К.* Оценки дифференциального оператора в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 2(21). (в печати)

2. *Потапов Д.К.* Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 5. С. 715–716.

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО УЛЬЯНОВА ДЛЯ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ[1]

Потапов М.К. (Москва), Симонов Б.В. (Волгоград), Тихонов С.Ю. (Москва)

mkpotapov@mail.ru

Пусть $L_p = L_p(\mathbf{T}^2)(1 < p < \infty)-$ пространство измеримых функций двух переменных $f(x, y)$, 2π - периодических по каждой переменной, таких, что

$$||f||_p := ||f||_{L_p(\mathbf{T}^2)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)|^p dxdy\right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11.01.00161) и Программы Поддержки Ведущих Научных Школ (проект НШ 32-52.2010.1).

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f;\delta_1,\delta_2)_p =$$

$$= \sup_{|h_1|\leqslant\delta_1,|h_2|\leqslant\delta_2} \left\| \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2}\binom{\alpha_1}{k_1}\binom{\alpha_2}{k_2} f(x+(\alpha_1-k_1)h_1, y+(\alpha_2-k_2)h_2)\right\|_p$$

– смешанный модуль гладкости функции $f(x,y) \in L_p(\mathbf{T}^2)$ порядков $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ по переменным x и y соответственно.

Справедливо следующее

Утверждение [1]. Пусть $f \in L_p(\mathbf{T}^2), 1 < p < q < \infty, \alpha_i > \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, i = 1,2.$

Тогда

$$\omega_{\alpha_1-\theta,\alpha_2-\theta}(f;\delta_1,\delta_2)_q \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\int_0^{\delta}\int_0^{\delta} \left[\left(t_1t_2\right)^{-\theta} \omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f;t_1,t_2)_p \right]^q \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (1)$$

где C_1 не зависит от f, δ_1 и δ_2.

Оценка (1) точна на классе функций $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, где $f_i \in \mathrm{Lip}(\alpha_i,\omega_i,p) = \big\{f_i \in L_p(\mathbf{T}) : \omega_{\alpha_i}(f_i,\delta_i)_p = O[\omega_i(\delta_i)]\big)\big\}, i = 1,2$. Действительно, для любых двух функций ω_1 и ω_2- функций типа модулей гладкости порядков α_1 и $\alpha_2,-$ найдется функция $f^*(x,y) = f_1^*(x)f_2^*(y)$ такая, что $f_i^* \in \mathrm{Lip}(\alpha_i,\omega_i,p), i = 1,2$, причем для любых $\delta_i \in (0,1])(i = 1,2)$ выполняется неравенство

$$\omega_{\alpha_1-\theta,\alpha_2-\theta}(f^*;\delta_1,\delta_2)_q \geqslant C_2 \left(\int_0^{\delta}\int_0^{\delta} \left[\left(t_1t_2\right)^{-\theta} \omega_1(t_1)\omega_2(t_2) \right]^q \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}},$$

где C_2 не зависит от $\delta_i, i = 1,2$.

Литература

[1] М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов, Соотношениях между модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского, Труды МИРАН, 2010, Т. 269, с. 204-214.

МЕТОД МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

Провоторова Е.Н., Провоторов В.В. (Воронеж)

enprov@mail.ru

Рассматриваются вопросы, связанные с возможностью отыскания условий на заданные управляющие функции в задаче управлении колебательными процессами на графе-звезде.

Пусть многообразие Γ - граф-пучок с ребрами γ_k и узлом ξ, при этом ребра γ_k $(k=\overline{1,m-1})$ параметризованы отрезком $[0,\ell/2]$, ребро γ_m- отрезком $[\ell/2,\ell]$; ориентация на ребрах γ_k $(k=\overline{1,m-1})$ "к узлу", на ребре γ_m - "от узла", узлу ξ соответствует число $\ell/2$. Колебания $U(x,t)$ системы "мачта-растяжки" (§ 1.2) на каждом ребере γ_k $(k=\overline{1,m})$ при произвольном значении времени $t\in[0,T]$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,t)_{\gamma_k}=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t)_{\gamma_k} \tag{1}$$

с условиями гладкости в узле ξ

$$\tfrac{\partial}{\partial x}U(\tfrac{\ell}{2},t)_{\gamma_m}-\sum_{k=1}^{m-1}\tfrac{\partial}{\partial x}U(\tfrac{\ell}{2},t)_{\gamma_k}=0. \tag{2}$$

Начальные условия определяются соотношениями

$$U(x,0)=\varphi(x),\ \tfrac{\partial}{\partial t}U(x,0)=\psi(x),\ x\in\Gamma, \tag{3}$$

граничные условия имеют вид:

$$U(0,t)_{\gamma_k}=\mu_k(t)\ (k=\overline{1,m-1}),\ \ U(\ell,t)_{\gamma_m}=\nu(t),\ t\in[0,T]. \tag{4}$$

Задача управления системой (1)-(4) состоит в определении времени $t=T$ и управляющих функций $\mu_k(t)$ и $\nu(t)$ таких, чтобы в момент времени $t=T$ выполнялись финальные условия

$$U(x,T)=\varphi^1(x),\ \ \frac{\partial}{\partial t}U(x,T)=\psi^1(x).$$

Основополагающим в исследовании задачи (1)-(4) является спектральный подход (анализ Фурье), приводящий к задаче о собственных значениях на графе Γ (задача Штурма-Лиувилля на графе).

Задача управления системой (1)-(4) сводится к проблеме моментов [1], конечно-разностный аналог системы (1)-(4) формирует конечную l-проблему моментов.

Литература

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

РАЗРАБОТКА ТРАНСЛЯТОРА К ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ КОНТРОЛЯ И ОБУЧЕНИЯ ПО ЯЗЫКУ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПАСКАЛЬ

Пшеничных А.А. (Воронеж)

В процессе обучения студентов-первокурсников программированию часто бывает трудно объяснить им все процессы, происходящие при выполнении даже сравнительно простых программ. Программы не имеют постоянного состояния, значения переменных изменяются в процессе выполнения. Если переменных немного, то конечно можно написать их значения в каждый необходимый момент выполнения программы, выполняя при этом программу «в уме». Но гораздо более лучшим решением этой проблемы видится автоматизация этого процесса. Здесь возникает задача визуализации процесса выполнения программы, отображения значения переменных, структур данных в памяти, текущей исполняемой строки и т. д.

Эти задачи призвана реализовать Информационная система обучающая и контролирующая система «Паскаль», разрабатываемая на факультете Прикладной математики, информатики и механики Воронежского Государственного университета.

В качестве учебного языка программирования был выбран язык Pascal, первоначально созданный Н. Виртом для обучения и являющийся достаточно мощным средством для демонстрации всех основных алгоритмов.

В системе «Паскаль» предусмотрена возможность исполнения программ, написанных на языке Pascal, и визуализация выполнения программ. Под визуализацией выполнения программы понимается возможность отображения состояния программы в любой момент времени ее выполнения, отображения созданных программой структур данных, а также динамическое изменение отображаемой информации в зависимости от текущего состояния программы.

Для реализации этих требований необходимо разработать свой компилятор языка Pascal и средства для выполнения программ.

В настоящее время вопросы создания компиляторов разработаны достаточно хорошо. Но тем не менее эта тема не теряет актуальности. К сегодняшнему дню создано большое число языков программирования. Для Информационной контролирующей и обучающей системы требуется создать свой собственный компилятор языка Pascal. Специфика системы, а именно, требование визуализации выполнения программы, не позволяет использовать ни один из существующих компиляторов.

Разработать средства для проверки корректности и выполнения программ на языке Pascal для Информационной контролирующей и обучающей системы. Разрабатываемые средства должны также предоставлять возможность визуализации процесса выполнения программ на языке Pascal.

Согласно представленным требованиям, Информационная обучающая система должна проверять корректность программ на языке Pascal, написанных ее пользователями и выполнять их. Для выполнения первого требования необходимо реализовать средства для лексического, синтаксического и семантического анализа программ на языке Pascal.

Поскольку помимо обычного исполнения программ требуется также создать средства визуализации процесса выполнения, оптимальным решением видится создание небольшой виртуальной машины. Проектируемая виртуальная машина должна выполнять программы и иметь средства для просмотра и анализа текущего состояния выполняемой на ней программы, т. е. состояния памяти, сведений об открытых файлах и т. д.

Таким образом, задача разбивается на две:

1. создать виртуальную машину, удовлетворяющую указанным требованиям;

2. создать компилятор языка Pascal в код виртуальной машины.

Литература

1. Вирт Н. Алгоритмы+структуры данных = программы: Пер. с англ.-М. Мир, 1985.-406 с.

2. Wirth N. Good Ideas, through the Looking Glass // Computer, V. 39, No 1, 2006

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТРАДИЦИОННОГО ЛЕКЦИОННОГО КУРСА ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Райцин А.М. (Москва)
arcadiyram@rambler.ru

Традиционный курс высшей математики предусматривает проведение как лекционных, так и практических занятий в соответствии с учебными программами соответствующих специальностей. Теоретический лекционный материал прорабатывается и закрепляется решением соответствующих задач. В последние годы наметился резкий спад в математической подготовке школьников. Этому спаду способствует факт развития коммерческой формы обучения студентов, при которой снижаются требования к необходимому объему знаний. Большой процент студентов первого и второго курса оказываются малоподготовленными к формулировкам и доказательствам теорем высшей математики. На экзаменах многие студенты не в состоянии показать даже элементарное владение теоретическим материалом. В результате становится нецелесообразным и бессмысленным традиционный порядок чтения лекций.

Предлагается изменить программу лекционного курса по высшей математике таким образом, чтобы уменьшить количество времени, затрачиваемое на доказательства теорем, оставив самый необходимый минимум материала, без понимания которого нельзя обойтись для решения задач. Следовательно, необходимо разработать курс математики - практикум, где сначала должны быть приведены четкие теоретические формулировки, направленные исключительно для решения задач. Время, затрачиваемое на доказательства теорем, следует потратить на ознакомление с различными методами решения задач, сопровождаемое разбором решений большого количества типовых задач. Практическое занятие должно углублять процесс ознакомления студентов с упомянутыми методами решения и быть направлено на развитие самостоятельных навыков. Таким образом, сглаживаются различия между лекциями и практическими занятиями, так как и первое и второе направлено исключительно на развитие практических навыков у студентов. Представляется, что по распределению времени изложения теоретического материала и практической лекционной частью должно быть приблизительно равное соответствие или в пользу его практической части. Для реализации такого курса необходимо создать объединенный комплекс - учебник практикум и соответствующий ему задачник с большим количеством вариантов для самостоятельной работы студентов по типу известного задачника Кузнецова Л.А. [1]. Надо заметить, что отход от традиционной формы преподавания курса высшей математики не следует считать единственно правильным решением, и он имеет свои недостатки, но в данной ситуации представляется оптимальным и целесообразным.

Литература

1. Кузнецов Л.А. "Сборник заданий по высшей математике"(Типовые расчеты), Изд. Высшая школа, М., 1983

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕПЛОФИЗИКЕ И АКУСТИКЕ

Раутиан Н.А. (Москва)

nrautian@mail.ru

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для интегродифференциального уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + K(0)A^2u(t) + \int_0^t K'(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \quad (2)$$

где A - самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. При этом предполагается, что скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \quad (3)$$

где числа $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$ и выполнено условие

$$K(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < \infty. \quad (4)$$

Частным случаем уравнения (1) является уравнение Гуртина-Пипкина, описывающее процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Кроме того, к уравнениям подобного типа приводят задачи усреднения (закон Дарси).

В нашей работе получено представление сильного решения задачи (1), (2) в виде суммы функциональных рядов, построенных по точкам спектра оператор-функции, являющееся символом уравнения (1). При этом члены ряда определяются правой частью и начальными вектор-функциями задачи (1), (2).

Литература

[1] *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. —2011. —(принята к печати).

[2] *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике. // Доклады РАН. —2010. — *434* —N 1. —С. 12–15.

[3] *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2011. —(принята к печати).

ОБ УСЛОВИЯХ СТРЭНГА-ФИКСА ДЛЯ ДИАДИЧЕСКИХ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Робакидзе М.Г., Фарков Ю.А. (Москва)

irubak@gmail.com

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – положительная полупрямая, $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел, $w_k(x)$ – функции Уолша и $\oplus$ – операция двоичного сложения на $\mathbb{R}_+$ (см., например, [1]). Обозначим через $d^l f$ производную Гиббса порядка l функции f, и пусть $L^2_c(\mathbb{R}_+)$ – множество функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, имеющих компактные носители. В работе [2] доказано, что если уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

имеет решение $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то $\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k = 2$ и $\operatorname{span} \varphi \subset [0, 2^{n-1}]$. Для преобразования Фурье-Уолша этого решения φ справедлива формула

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega), \quad \text{где} \quad m(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega).$$

Кроме того, $\widehat{\varphi}(r) = 0$ при всех $r \in \mathbb{N}$ и $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \varphi(x\oplus k) = 1$ для п.в. $x \in \mathbb{R}_+$. В дополнение к этому результату имеет место (сравните с [3, с.151]) следующая теорема.

Теорема. *Для данного целого* $L \geqslant 0$ *и данного решения* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *уравнения* (1) *такого, что* $\widehat{\varphi}(0) = 1$, *следующие свойства эквивалентны*:

1) $d^l\widehat{\varphi}(r) = 0$, $l = 0, \ldots, L$, $r \in \mathbb{N}$ (*модифицированное условие Стрэнга – Фикса*);

2) $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}(x \oplus k)^l\varphi(x \oplus k) = C$ *для п.в.* $x \in \mathbb{R}_+$ *и каждого* $l = 0, \ldots, L$.

Аналогичный результат доказан и для масштабирующих функций на группах Кантора и Виленкина, изучавшихся в [4].

Литература

1. *Голубов Б.И.* Элементы двоичного анализа. М.: Издательство ЛКИ, 2007.

2. *Протасов В.И., Фарков Ю.А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сборник. 2006. Т. 197:10. С. 129–160.

3. *Новиков И.Я., Протасов В.И., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

4. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82:6. С. 934–952.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Родионов В.И., Родионова Н.В. (Ижевск)

rodionov@uni.udm.ru

1. Пусть точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ таковы, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ попарно ортогональны (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$), а числа p_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, таковы, что $p_{ij} = p_{ji}$. В семействе всех квадратичных полиномов вида $P(\xi) = (A\xi, \xi) + (b, \xi) + c$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, существует ровно один такой, что: 1) матрица A симметрична; 2)

$P(\frac{1}{2}\,x_r+\frac{1}{2}\,x_s) = p_{rs}$ для всех $r, s = 0, 1, \ldots, n$. Согласно [1] он представим в виде

$$P(\xi) = 2 \sum_{i,j=1}^{n} (\,p_{ij}-p_{i0}-p_{0j}+p_{00}\,)\,\varphi_i(\xi)\,\varphi_j(\xi)- \\ - \sum_{m=1}^{n} (\,p_{mm}-4\,p_{m0}+3\,p_{00}\,)\,\varphi_m(\xi) + p_{00}, \quad (1)$$

где $\varphi_m(\xi) \doteq (\,\xi-x_0, \Delta x_m) \,/\, \|\Delta x_m\|^2,\ m = 1, \ldots, n.$

2. Мы применяем формулу (1) при численном решении задач математической физики, а в рамках настоящей работы при фиксированных $\gamma \neq 0$ и $\tau > 0$ изучается начально-граничная задача для простейшего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, x) = \varphi(x),\ x \in [0, 1];$$

$$u(t, 0) = \alpha(t),\ u(t, 1) = \beta(t),\ t \in [0, 2\tau].$$

(Предполагается выполненным естественное требование: $\alpha(0) = \varphi(0)$, $\beta(0) = \varphi(1)$.) Через Ω обозначим прямоугольник $[0, 2\tau] \times [0, 1]$. Пусть $h \doteq \frac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, $\theta \doteq \gamma^2\,\frac{\tau}{h^2}$, $\nu \doteq \frac{h}{3\tau}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau,\ i = 0, 1, 2,\ \ h_j \doteq jh,\ j = 0, 1, \ldots, 2N.$

3. Массив u_j^i, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, 2N$, называется допустимым, если $u_j^0 \doteq \varphi(h_j)$, $j = 0, 1, \ldots, 2N$; $u_0^i \doteq \alpha(\tau_i)$, $u_{2N}^i \doteq \beta(\tau_i)$, $i = 0, 1, 2$. Сетка $\{\,(\tau_i, h_j)\,\}$ и допустимый массив $(\,u_j^i\,)$ порождают четыре серии $(\,k = 1, \ldots, N\,)$ полиномов вида (1):

$$P_k^1(t, x) \doteq \big(\,u_{2k-2}^2 - 2\,u_{2k-2}^1 + u_{2k-2}^0\big)\,\frac{t^2}{2\,\tau^2} + \\ +\big(\,u_{2k-1}^1 - u_{2k-2}^1 - u_{2k-1}^0 + u_{2k-2}^0\big)\,\frac{t\,(\,x-h_{2k-2}\,)}{\tau\,h} + \\ +\big(\,u_{2k}^0 - 2\,u_{2k-1}^0 + u_{2k-2}^0\big)\,\frac{(\,x-h_{2k-2}\,)^2}{2\,h^2} + \\ +\big(-u_{2k-2}^2 + 4\,u_{2k-2}^1 - 3\,u_{2k-2}^0\big)\,\frac{t}{2\tau} + \\ +\big(-u_{2k}^0 + 4\,u_{2k-1}^0 - 3\,u_{2k-2}^0\big)\,\frac{x-h_{2k-2}}{2h} + u_{2k-2}^0\,,$$

$$P_k^2(t,x) \doteq \bigl(u_{2k}^0 - 2\,u_{2k}^1 + u_{2k}^2 \bigr) \, \frac{(\,2\tau - t\,)^2}{2\,\tau^2} +$$

$$+\bigl(u_{2k-1}^1 - u_{2k}^1 - u_{2k-1}^2 + u_{2k}^2 \bigr) \, \frac{(\,2\tau - t\,)\,(\,h_{2k} - x\,)}{\tau\, h} +$$

$$+ \bigl(u_{2k-2}^2 - 2\,u_{2k-1}^2 + u_{2k}^2 \bigr) \, \frac{(\,h_{2k} - x\,)^2}{2\,h^2} + \bigl(- u_{2k}^0 + 4\,u_{2k}^1 - 3\,u_{2k}^2 \bigr) \, \frac{2\tau - t}{2\tau} +$$

$$+ \bigl(- u_{2k-2}^2 + 4\,u_{2k-1}^2 - 3\,u_{2k}^2 \bigr) \, \frac{h_{2k} - x}{2h} \; + \; u_{2k}^2 \,,$$

$$P_k^3(t,x) \doteq \bigl(u_{2k}^2 - 2\,u_{2k}^1 + u_{2k}^0 \bigr) \, \frac{t^2}{2\,\tau^2} +$$

$$+\bigl(u_{2k-1}^1 - u_{2k}^1 - u_{2k-1}^0 + u_{2k}^0 \bigr) \, \frac{t\,(\,h_{2k} - x\,)}{\tau\, h} +$$

$$+ \bigl(u_{2k-2}^0 - 2\,u_{2k-1}^0 + u_{2k}^0 \bigr) \, \frac{(\,h_{2k} - x\,)^2}{2\,h^2} + \bigl(- u_{2k}^2 + 4\,u_{2k}^1 - 3\,u_{2k}^0 \bigr) \, \frac{t}{2\tau} +$$

$$+ \bigl(- u_{2k-2}^0 + 4\,u_{2k-1}^0 - 3\,u_{2k}^0 \bigr) \, \frac{h_{2k} - x}{2h} \; + \; u_{2k}^0 \,,$$

$$P_k^4(t,x) \doteq \bigl(u_{2k-2}^0 - 2\,u_{2k-2}^1 + u_{2k-2}^2 \bigr) \, \frac{(\,2\tau - t\,)^2}{2\,\tau^2} +$$

$$+\bigl(u_{2k}^2 - 2\,u_{2k-1}^2 + u_{2k-2}^2 \bigr) \, \frac{(\,x - h_{2k-2}\,)^2}{2\,h^2} +$$

$$+\bigl(u_{2k-1}^1 - u_{2k-2}^1 - u_{2k-1}^2 + u_{2k-2}^2 \bigr) \, \frac{(\,2\tau - t\,)\,(\,x - h_{2k-2}\,)}{\tau\, h} +$$

$$+\bigl(- u_{2k-2}^0 + 4\,u_{2k-2}^1 - 3\,u_{2k-2}^2 \bigr) \, \frac{2\tau - t}{2\tau} +$$

$$+ \bigl(- u_{2k}^2 + 4\,u_{2k-1}^2 - 3\,u_{2k-2}^2 \bigr) \, \frac{x - h_{2k-2}}{2h} \; + \; u_{2k-2}^2 \,.$$

4. Сетка $\{\,(\tau_i, h_j\,)\,\}$ порождает в плоскости (t,x) четыре серии треугольников:

$$\Omega_k^1 \doteq \{\, t \geqslant 0,\; x \geqslant h_{2k-2},\; x + \tfrac{h}{\tau}\, t \leqslant h_{2k} \,\},$$

$$\Omega_k^2 \doteq \{\, t \leqslant 2\tau,\; x \leqslant h_{2k},\; x + \tfrac{h}{\tau}\, t \geqslant h_{2k} \,\},$$

$$\Omega_k^3 \doteq \{\, t \geqslant 0,\; x \leqslant h_{2k},\; x - \tfrac{h}{\tau}\, t \geqslant h_{2k-2} \,\},$$

$$\Omega_k^4 \doteq \{\, t \leqslant 2\tau,\; x \geqslant h_{2k-2},\; x - \tfrac{h}{\tau}\, t \leqslant h_{2k-2} \,\}.$$

Каждый треугольник содержит ровно шесть точек сетки: три из них расположены в вершинах треугольника, а еще три — в серединах сторон. В соответствии с [1] на множестве Ω определены две непрерывные функции (квадратичные сплайны)

$$u_{L}(t,x) \doteq \begin{cases} P_k^1(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega_k^1\,, \\ P_k^2(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega_k^2\,, \end{cases} \tag{2}$$

$$u_{R}(t,x) \doteq \begin{cases} P_k^3(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega_k^3\,, \\ P_k^4(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega_k^4\,. \end{cases} \tag{3}$$

5. Зафиксируем $\lambda \in [0,1]$ и введем обозначения: $\mu \doteq 1-\lambda$, $\omega \doteq \lambda - \mu$. Очевидно, $\mu\in[0,1]$, $\omega\in[-1,1]$. Функции (2) и (3) порождают на множестве Ω квадратичный сплайн $u_\lambda \doteq \lambda\, u_L + \mu\, u_R$. Разнообразие сплайнов определяется лишь наборами чисел u_j^i, $i=1,2$, $j=1,\ldots,2N-1$. Это означает, что сплайны образуют конечномерное линейное пространство размерности $4N-2$. Обозначим его $\sigma_\lambda(\Omega)$. В качестве приближенного решения исходной задачи принимаем сплайн, реализующий задачу

$$J = J(u) \doteq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to \min, \quad u\in\sigma_\lambda(\Omega). \tag{4}$$

Для явного описания решения задачи (4) введем ряд вспомогательных обозначений.

6. Последовательность $\{U_n(x), x\in\mathbb{R}\}$, состоящую из многочленов Чебышева 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x)\doteq 0$, $U_0(x)\doteq 1$, $U_{n+1}(x)\doteq 2x\,U_n(x)-U_{n-1}(x)$, а многочлены Чебышева 1-го рода определяем равенством $T_{n+1}(x)\doteq x\,U_n(x)-U_{n-1}(x)$. Известно, что $U_n(x)\neq 0$ и $T_n(x)\neq 0$ для любых $x\notin(-1,1)$ и $n\in\mathbb{N}$. При фиксированном $n\in\mathbb{N}$ определена матрица $B(x)\doteq\big(B_{ij}(x)\big)$, $i,j=1,\ldots,n$, такая, что

$$B_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} U_{i-1}(x)\,U_{n-j}(x), & \text{если } i\leqslant j\,, \\ U_{j-1}(x)\,U_{n-i}(x), & \text{если } i\geqslant j\,. \end{cases}$$

7. Легко проверить, что $\eta \doteq \big(31+30\omega^2+3\omega^4\big)\,/\,\big((1-\omega^2)(1+3\omega^2)\big) \geqslant 15+8\sqrt{3}$ при любом $\omega\in(-1,1)$. Пусть, далее, $r\doteq 1+3\theta$,

$$P\doteq 2r\theta\omega, \quad R\doteq \tfrac{7}{8}+4\theta+6\theta^2+\big(\tfrac{1}{8}+2\theta^2\big)\,\omega^2, \quad Q\doteq 3R-2r^2, \quad S\doteq R-2\theta^2\omega^2.$$

Справедливы оценки $R>0$, $Q>0$, $S>0$, $Q-S<0$, $\xi\doteq(Q+S)\,/\,(Q-S)<-1$ и неравенства $U_n(\xi)\neq 0$, $U_n(\eta)\neq 0$.

8. Для описания допустимого массива $(\,u^i_j\,)$, реализующего задачу (4), определим ряд объектов. Функция $\varphi(\cdot)$ порождает конечные разности $z_k \doteq u^0_{2k-2} - 2\,u^0_{2k-1} + u^0_{2k}$, $k = 1,\ldots,N$, а для всех $k = 1,\ldots,n \doteq N-1$ определены величины

$$w_k \doteq 2\theta\,\big(\,(\,1-P/Q\,)\,z_k + (\,1+P/Q\,)\,z_{k+1}\big),$$

$$x_{2k} \doteq \frac{1}{U_n(\xi)}\,\Big(\,(-1)^k U_{n-k}(\xi)\,x_0 + (-1)^{N-k} U_{k-1}(\xi)\,x_{2N} +$$

$$+(1+\xi\,)\sum_{j=1}^{n} B_{kj}(\xi)\,w_j\,\Big),$$

$$y_{2k} \doteq$$

$$\begin{cases} \frac{1}{U_n(\eta)}\,\big(\,(-1)^k U_{n-k}(\eta)\,y_0 + (-1)^{N-k} U_{k-1}(\eta)\,y_{2N}\,\big), & \text{если } \omega \in (-1,1), \\ 0, & \text{если } \omega = \pm\,1, \end{cases}$$

где $x_0 \doteq u^2_0 - u^0_0$, $y_0 \doteq u^2_0 - 2\,u^1_0 + u^0_0$, $x_{2N} \doteq u^2_{2N} - u^0_{2N}$, $y_{2N} \doteq u^2_{2N} - 2\,u^1_{2N} + u^0_{2N}$ — конечные разности функций $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ соответственно. Для всех $k = 1,\ldots,N$ полагаем

$$x_{2k-1} \doteq \frac{1}{2R}\,\big(\,(\,R-r+\theta\omega\,)\,x_{2k-2} + (\,R-r-\theta\omega\,)\,x_{2k} + 4r\theta\,z_k\,\big),$$

$$y_{2k-1} \doteq \theta\,(\,x_{2k-2} - 2\,x_{2k-1} + x_{2k}\,) - \frac{1-\omega^2}{2\,(3+\omega^2)}\,(\,y_{2k-2} + y_{2k}\,).$$

Окончательно полагаем $u^1_j \doteq u^0_j + (\,x_j - y_j\,)/2$, $u^2_j \doteq u^0_j + x_j$ для всех $j = 1,\ldots,2N-1$. (Заметим, что $x_j = u^2_j - u^0_j$, $y_j = u^2_j - 2u^1_j + u^0_j$ для всех $j = 0,1,\ldots,2N$.)

9. Для минимума J^* функционала (4) имеет место точная формула: $J^* = J_x + J_y$,

$$J_x \doteq \frac{P}{R}\,\frac{\nu}{U_n(\xi)}\,\Big[\,U_n(\xi)\,\big(\,x^2_0 - x^2_{2N}\big)\,/\,2 +$$

$$+\,2\,\theta\,x_0\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\big(\,U_{N-k}(\xi) + U_{n-k}(\xi)\big)\,z_k +$$

$$+\,2\,\theta\,x_{2N}\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^{N-k}\big(\,U_{k-1}(\xi) + U_{k-2}(\xi)\big)\,z_k\,\Big] +$$

$$+\frac{Q}{R}\,\frac{\nu}{U_n(\xi)}\Big[\,\frac{1}{1+\xi}\,\big(\,T_{\scriptscriptstyle N}(\xi)\,x_0^2+2\,(-1)^n x_0\,x_{\scriptscriptstyle 2N}+T_{\scriptscriptstyle N}(\xi)\,x_{\scriptscriptstyle 2N}^2\,\big)/\,2\,+$$

$$+\,4\theta^2\,U_n(\xi)\,\sum_{k=1}^{N} z_k^2\,+$$

$$+\,2\theta x_0\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\big(\,U_{N-k}(\xi)-U_{n-k}(\xi)\,\big)\,z_k+$$

$$+2\theta x_{\scriptscriptstyle 2N}\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^{N-k}\big(\,U_{k-1}(\xi)-U_{k-2}(\xi)\,\big)\,z_k\,-$$

$$-\,2\theta^2\,(\,1+\xi\,)\,\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\xi)\big[\,(\,1-P/Q\,)\,z_i+(\,1+P/Q\,)\,z_{i+1}\big]\times$$

$$\times\big[\,(\,1-P/Q\,)\,z_j+(\,1+P/Q\,)\,z_{j+1}\big]\,\Big],$$

если $\omega=\pm\,1$, то $J_y \doteq \nu\,\big(\,y_0^2+y_{\scriptscriptstyle 2N}^2\big)$, а если $\omega\in(-1,1)$, то

$$J_y \doteq \frac{31+30\omega^2+3\,\omega^4}{16\,(\,3+\omega^2)}\,\frac{\nu}{\eta\,U_n(\eta)}\,\big(\,T_{\scriptscriptstyle N}(\eta)\,y_0^2+2\,(-1)^n y_0\,y_{\scriptscriptstyle 2N}+T_{\scriptscriptstyle N}(\eta)\,y_{\scriptscriptstyle 2N}^2\,\big).$$

10. При фиксированных $\tau>0$ и $\lambda\in[0,1]$ определена последовательность $\{\,J_{\scriptscriptstyle N}\,\}$, где $J_{\scriptscriptstyle N}$ — это значение J^*, вычисленное при заданном $N\in\mathbb{N}$. При выполнении определенных условий на функции α, β и φ имеем $J_{\scriptscriptstyle N}\to 0$, поэтому полученные формулы позволяют при заданной точности вычислений $\varepsilon>0$ решить (например, программным образом) неравенство $\sqrt{J_{\scriptscriptstyle N}}<\varepsilon$ и получить априори достаточное количество узлов сетки $\{\,(\tau_i,h_j)\,\}$. Мы также имеем возможность варьировать параметр λ.

Литература

1. Родионов В.И. Об аппроксимации функций многих переменных специальными сплайнами // Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования: Сб. докл. I междунар. конф. Ижевск: УдГУ, 2009. — Т. 1. — С. 164–168.
`http://conf3d.udsu.ru/2008/images/stories/files/tom1.pdf`

О ГЛАДКОСТИ ВСПЛЕСКОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПО ФУНКЦИЯМ ВИЛЕНКИНА-КРИСТЕНСОНА

Родионов Е.А. (Москва)

evgeny_980@list.ru

Пусть $p, n \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. Обозначим через $\oplus$ и $\ominus$ операции p-адического сложения и вычитания на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ (см., например, [1]). Предположим, что $\varphi \in L_2(\mathbb{R}_+)$ является решением функционального уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{p^n-1} c_k \, \varphi(px \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

Для мультипликативного преобразования функции φ имеем равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = p^{-1} \left(\sum_{k=0}^{p^n-1} c_k w_k(\omega) \right) \widehat{\varphi}(p^{-1}\omega),$$

где $w_k(\omega)$ – функции Виленкина-Кристенсона (при $p = 2$ они совпадают с функциями Уолша). Показатель гладкости функции φ определяется по формуле

$$\alpha_\varphi = \sup\{ \alpha \ : \ \omega(\varphi, \delta) \leqslant C(\varphi, \alpha)\delta^\alpha, \ \alpha > 0\},$$

где

$$\omega(\varphi, \delta) := \sup\{ \, |\varphi(x \oplus y) - \varphi(x)| \ : \ x, y \in [0, p^{n-1}), \ 0 \leqslant y < \delta \, \}, \, \delta > 0.$$

В работе [2] рассмотрены случаи $p = 2, n = 3$ и $p = 2, n = 4$ (относительно случая $p = n = 2$ см. [3, пример 4.3]). В докладе будут приведены точные значения α_φ для $p = 3, n = 2$. В этом случае коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_8$ определяются по параметрам $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ таким, что

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

(см. [4, с. 275]). Доказано, что

1) если $\gamma b \neq 0$ и либо $\beta = 0$, либо $c = 0$, то $\alpha_\varphi = -\log_3(\max\{|\gamma|, |b|\})$;

2) если $\beta c \neq 0$ и $\gamma = b = 0$, то $\alpha_\varphi = -(1/2)\log_3 |\beta c|$.

Кроме того, приведены все наборы значений коэффициентов, при которых φ постоянна на интервалах вида $[k/3^m, (k+1)/3^m)$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$.

Литература

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

2. *Родионов Е.А., Фарков Ю.А.* Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши // Математические заметки, 2009. Т. 86. Вып. 3 С. 392–406.

3. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. N 3. С. 193–220.

4. *Farkov Yu.A.* On wavelets related to the Walsh series // Journal of Approximation Theory. 2009. Vol. 161. N 1. P. 259–279.

О РАВНОМЕРНЫХ ФУНКЦИЯХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Родионов Т.В. (Москва)

rodionovtv@mail.ru

Пусть T — множество, $\mathcal{S}$ — мультипликативное семейство подмножеств T, содержащее $\varnothing$ и T, X — нормированное пространство. Функцию $f : T \to X$ назовём *$\mathcal{S}$-равномерной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое конечное покрытие $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T, что колебание $\omega(f, S_i) \equiv \sup\{\|f(s) - f(t)\| \mid s, t \in S_i\} < \varepsilon$ для всех $i \in I$. Обозначим множество всех таких функций через $U(T, \mathcal{S}, X)$. В случае $X = \mathbb{R}$ такие функции были введены В. К. Захаровым (см., например, [1]).

Если $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство с семействами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ открытых и замкнутых множеств, а $\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \,\&\, F \in \mathcal{F}\}$, то $\mathcal{K}$-равномерные функции называются *симметризуемыми* (метаполунепрерывными).

Действительнозначные равномерные, в особенности симметризуемые, функции и их обобщения нашли своё применение в различных задачах функционального анализа и теории меры [1,2,3].

Для любого пространства X семейство $U(T, \mathcal{S}, X)$ является линейным пространством, замкнутым относительно равномерной сходимости последовательностей, кроме того $U(T, \mathcal{S}, X) \subset$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-01-00321) и гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-3252.2010.1).

$M_b(T, \mathcal{S}_\sigma, X)$. При дополнительном требовании сепарабельности X и σ-аддитивности $\mathcal{S}$ (т. е. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$) имеет место равенство семейств $\mathcal{S}$-равномерных и ограниченных $\mathcal{S}$-измеримых функций $U(T, \mathcal{S}, X) = M_b(T, \mathcal{S}, X)$.

Если $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство, а X — сепарабельное, то $C_b(T, X) \equiv M_b(T, \mathcal{G}, X) \subset U(T, \mathcal{K}, X)$, причём для некоторых T, как "плохих" (не вполне регулярных), так и "хороших" (например, для обычного отрезка $[0, 1]$), это вложение — строгое, т. е. пространство симметризованных функций шире пространства непрерывных функций.

Литература

[1] *Захаров В. К.* Новые классы функций, связанные с общими семействами множеств // Докл. РАН, **407**:2 (2006), 167–171.

[2] *Захаров В. К., Родионов Т. В.* Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций // Матем. заметки, **84**:6 (2008), 809–824.

[3] *Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В.* Проблема Рисса – Радона – Фреше характеризации интегралов // Успехи матем. наук, **65**:4 (2010), 153–178.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ С СЮРЬЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Рыданова С.С. (Воронеж)

swetlanka24@mail.ru

В теории дифференциальных уравнений естественно возникают операторные уравнения:

$$a(x) = f(x), \tag{1}$$

где a – линейный оператор, f – вполне непрерывное нелинейное отображение.

В работе [1] был рассмотрен случай, когда a является линейным ограниченным сюрьективным оператором, а в работе [2] случай, когда оператор a является замкнутым и сюрьективным.

Метод изучения таких уравнений основывался на том, что оператор a имеет непрерывное правое обратное отображение. Однако, существуют примеры сюрьективных линейных операторов, которые не являются замкнутыми, но имеют непрерывный правый обратный. В настоящей работе будет рассматриваться как раз этот случай.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \longrightarrow E_2$ – линейный оператор. Пусть V – ограниченное открытое множество в E_1 , и $f : \overline{V} \longrightarrow E_2$ – вполне непрерывное отображение. Пусть $N(a,f)$ множество решений уравнения (1), т.е. $N(a,f) = \left\{x \in \overline{V} \mid a(x) = f(x)\right\}$.

Имеет место следующая теорема:

Теорема. *Пусть существует непрерывный оператор $p : E_2 \longrightarrow E_1$, такой что:*

1) $a(p(y)) = y$ для любой точки $y \in E_2$;

2) отображение $g = p \circ f : \overline{V} \longrightarrow E_1$ не имеет неподвижных точек на ∂V;

3) топологическая степень $\gamma(i - g, \partial V) \neq 0$.

Тогда:

1) $N(a,f) \neq \emptyset$;

2) $dim(N(a,f)) \geqslant dim(Ker(a))$;

3) $N(a,f) \cap \partial V \neq \emptyset$.

При доказательстве этой теоремы используются свойства топологической степени вполне непрерывных отображений (см.[3]) и теоремы о топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений, доказанные в работе [4].

Литература

[1] Гельман Б. Д. Об одном классе операторных уравнений // Математические заметки. 2001, т. 70, №4, с. 544-552.

[2] Гельман Б. Д. Операторные уравнения и задачи Коши для вырожденных дифференциальных уравнений // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. 2007, №2, с. 86-91.

[3] Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа / М: Наука, 1975, 510 с.

[4] Гельман Б. Д. Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений // Математический сборник. 1997, т. 188, №12, с. 33-56.

О КРАТНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННОЙ КВАДРАТИЧНЫМ ПУЧКОМ, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ЛУЧЕ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается краевая задача для для квадратичного пучка с постоянным коэффициентами на отрезке $[0,1]$

$$y'' - 3\lambda y' + 2\lambda^2 y = h_2' - 2\lambda h_1, \quad y(0) = y(1) = 0, \qquad (1)$$

где h_1, h_2 — заданные функции, такие что $h_1', h_2' \in L_2[0,1]$.

Собственный значения этой задачи есть числа $\lambda_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$. Пусть $\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 2\pi k + \pi,\ k \in \mathbf{N}\}$ и $y(x,\lambda;h)$ есть решение задачи (1), где $h = (h_1, h_2)^T$. Обозначим $S_\nu^1(x,h) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} y(x,\lambda;h)\,dx$, $S_\nu^2(x,h) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \frac{1}{\lambda_k} y'(x,\lambda;h)\,dx$.

Тогда справедливы следующие формулы при $x \in [0,\frac{1}{2}]$

$$S_\nu^1(x,h) = h_1(x) +$$

$$+ \left(-4h_1(x) + h_1\big(\frac{x}{2}\big) + h_1\big(\frac{x+1}{2}\big) + 2h_1(2x) - h_1\big(\frac{2x+1}{2}\big)\right) +$$

$$+ \big(2h_2(x) - h_2\big(\tfrac{x}{2}\big) - h_2\big(\tfrac{x+1}{2}\big) - h_2(2x) + h_2\big(\tfrac{2x+1}{2}\big)\big) +$$

$$+ \Big(h_1(0) - h_1(1)\Big)\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \tfrac{e^{\lambda x} - e^{2\lambda x}}{\lambda(1-e^\lambda)}\,d\lambda + o(1), \qquad (2)$$

$$S_\nu^2(x,h) = h_2(x) +$$

$$+ \left(-4h_1(x) + h_1\big(\frac{x}{2}\big) + h_1\big(\frac{x+1}{2}\big) + 4h_1(2x) - 2h_1\big(\frac{2x+1}{2}\big)\right) +$$

$$+ \big(2h_2(x) - h_2\big(\tfrac{x}{2}\big) - h_2\big(\tfrac{x+1}{2}\big) - 2h_2(2x) + 2h_2\big(\tfrac{2x+1}{2}\big)\big) +$$

$$+ \Big(h_1(0) - h_1(1)\Big)\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \tfrac{e^{\lambda x} - e^{2\lambda x}}{\lambda(1-e^\lambda)}\,d\lambda + o(1), \qquad (3)$$

а при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$S_\nu^1(x,h) = h_1(x) +$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1)

$$+\Big(-4h_1(x)+h_1\big(\frac{x}{2}\big)+h_1\big(\frac{x+1}{2}\big)+2h_1(2x-1)-h_1\big(\frac{2x-1}{2}\big)\Big)+$$

$$+\big(2h_2(x)-h_2\big(\tfrac{x}{2}\big)-h_2\big(\tfrac{x+1}{2}\big)-h_2(2x-1)+h_2\big(\tfrac{2x-1}{2}\big)\big)+$$

$$+\Big(h_1(0)-h_1(1)\Big)\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}\tfrac{e^{\lambda x}-e^{\lambda(2x-1)}}{\lambda(1-e^\lambda)}\,d\lambda+o(1), \qquad (4)$$

$$S_\nu^2(x,h)=h_2(x)+$$

$$+\Big(-4h_1(x)+h_1\big(\frac{x}{2}\big)+h_1\big(\frac{x+1}{2}\big)+4h_1(2x-1)-2h_1\big(\frac{2x-1}{2}\big)\Big)+$$

$$+\big(2h_2(x)-h_2\big(\tfrac{x}{2}\big)-h_2\big(\tfrac{x+1}{2}\big)-2h_2(2x-1)+2h_2\big(\tfrac{2x-1}{2}\big)\big)+$$

$$+\Big(h_1(0)-h_1(1)\Big)\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}\tfrac{e^{\lambda x}-e^{\lambda(2x-1)}}{\lambda(1-e^\lambda)}\,d\lambda+o(1). \qquad (5)$$

Здесь $o(1)\to 0$ при $\nu\to\infty$ равномерно по $x\in[0,1]$.

Если функции $h_1,h_2\in L_2[0,1]$ таковы, что $h_1',h_2'\in L_2[0,1]$ и выражения во всех больших круглых скобках в (2)–(5) равны нулю, то равномерно по $x\in[0,1]$

$$\lim_{\nu\to\infty}S_\nu^1(x,h)=h_1(x), \quad \lim_{\nu\to\infty}S_\nu^2(x,h)=h_2(x).$$

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ

Рябцов И.С. (Самара)

tinnulion@mail.ru

Будем рассматривать конечные фреймы Парсеваля (см. [1]) в пространстве $\mathbb{R}^N$, без повторов. Определим оператор V для произвольного фрейма $F=\{f_i\}_{i=1}^M$. Пусть существует пара векторов

$$f_k,f_p\in F,\ \langle f_k,f_p\rangle=\|f_k\|\,\|f_p\|\,,\ k\neq p,$$

$$V\left(F\right)=F\setminus\{f_k,\ f_p\}\cup\left\{\sqrt{\|f_k\|^2+\|f_p\|^2}\frac{f_k}{\|f_k\|}\right\}.$$

Если такой пары не существует, то $V\left(F\right)=F$. Число коллинеарных векторов в конечном фрейме конечно, применяя оператор V достаточное число раз мы получим фрейм без коллинеарных векторов $V_\infty=V\circ V\circ V\circ\ldots\circ V$.

Определение. Будем называть фрейм Парсеваля $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ *составным*, если существует набор неотрицательных констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$, такой что система векторов $F_\alpha=\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ — также фрейм

Парсеваля, при этом хотя бы одно α_i равно нулю. В противном случае будем называть фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ *простым.*

Суммой пары фреймов $F_1 = \left\{f_i^{F_1}\right\}_{i=1}^{M_1}$ и $F_2 = \left\{f_i^{F_2}\right\}_{i=1}^{M_2}$ будем называть фрейм, который строится следующим образом

$$F_1 \oplus F_2 = V_\infty\left(\left\{f_i^{F_1}\right\}_{i=1}^{M_1} \cup \left\{f_i^{F_2}\right\}_{i=1}^{M_2}\right).$$

Данная операция является коммутативной и ассоциативной, очевидно $F \oplus F = F$. Аналогично можно определить сумму конечного числа фреймов

$$\bigoplus_{k=1}^{K} F_k = V_\infty\left(\bigcup_{k=1}^{K}\left\{f_i^{F_k}\right\}_{i=1}^{M_k}\right), \quad F_k = \bigcup_{k=1}^{K}\left\{f_i^{F_k}\right\}_{i=1}^{M_k}.$$

Введём *взвешенную сумму* пары фреймов Парсеваля F_1 и F_2, как

$$(\lambda_1 F_1) \oplus (\lambda_2 F_2), \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1.$$

Эта операция переводит пару фреймов Парсеваля в новый фрейм Парсеваля (при $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$). Операция взвешенной суммы K фреймов вводится по аналогии.

Теорема. Любой составной фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ можно представить как взвешенную сумму конечного числа простых фреймов Парсеваля.

Теорема. Для любого равноугольного жесткого фрейма (см. [2, 3]) $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ существует один и только один фрейм Парсеваля, получаемый перенормировкой $\left\{\sqrt{N/M} f_i\right\}_{i=1}^{M}$ векторов фрейма, причём этот фрейм всегда простой.

Литература

[1] P. G. Casazza, J. C. Tremain. *A brief introduction to Hilbert space frame theory and its applications*, Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, MO 65211-4100,http/framerc.org

[2] P. G. Casazza, D. Redmond and J. C. Tremain, *Real Equiangular Frames*, CISS Meeting Information Sciences and Systems, Princeton, NJ, 2008.

[3] S. Ya. Novikov, I. S. Ryabtsov. *Optimization of Frame Representations for Compressed Sensing and Mercedes-Benz Frame*, Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа, Сборник статей Тр. МИАН, 2009, том 265, стр. 211–219, МАИК,

М., 2009.

ОСАЖДЕНИЕ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВЗВЕСИ СТОКСОВСКИХ ЧАСТИЦ В СФЕРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Ряжских В.И., Богер А.А., Рябов С.В. (Воронеж)

kafvm@vgta.vrn.ru

Анализируется кинетика перераспределения малоконцентрированных монодисперсных частиц между взвесью и осадком на смоченной поверхности сферического объема в условиях перемешивания. Сделаны допущения о тождественности «эффективных» коэффициентов диффузии дисперсной и дисперсионной фаз, а на границе осадка реализуются аналогия с кристаллохимической реакцией первого порядка. В этом случае математическая формализация физической постановки имеет вид краевой задачи для параболического уравнения в сферической системе координат в безразмерном виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \theta}+cos\varphi\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial R}+\frac{sin\varphi}{R}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \varphi}- \\ -Bo^{-1}\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2 sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(sin\varphi\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \varphi}\right)\right];\end{gathered} \tag{1}$$

$$N\left(R,\varphi,0\right)=1; \tag{2}$$

$$\left.\left(\frac{\partial N}{\partial \varphi}\right)\right|_{\varphi=0}=\left.\left(\frac{\partial N}{\partial \varphi}\right)\right|_{\varphi=\pi}=0; \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left.\left(cos\varphi N-Bo^{-1}\frac{\partial N}{\partial R}\right)\right|_{R=1}=\left.KN\right|_{R=1}; \\ \left.\left(cos\varphi N-Bo^{-1}\frac{\partial N}{\partial R}\right)\right|_{R=0}=0;\end{gathered} \tag{4}$$

где $N=n/n_0$; $\theta=rw/r_0$; $Bo=wr_0/D$; $K=k/w$; n_0, n - начальная и текущая концентрации взвеси; τ - время; w - скорость осаждения по Стоксу; r, φ - локальные сферические координаты; r_0 - радиус сферы; D – эффективный коэффициент диффузии частиц взвеси; k – скорость встраивания частиц в структуру осадка.

Система (1) – (4) проинтегрирована численно по маршевой конечно-разностной схеме, устойчивость и сходимость которой установлены на основе принципа максимума. Показано, что если известна функция плотности распределения частиц взвеси по размерам, то полученное численное решение может быть обобщена на полудисперсный случай суперпозицией концентрационных полей для монодисперсной взвеси. Кроме того, вычислительный анализ позволяет оценить локальную толщину осадка на смоченной поверхности. Полученные результаты использованы при прогнозировании накопления высококипящих примесей в криогенных резервуарах хранения жидкого водорода. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №10-08-00120.

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ГОМОТОПНОГО АНАЛИЗА К РЕШЕНИЮ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Ряжских В.И., Попов М.И. (Воронеж)

Общеизвестно, что крайне трудно получить аналитическое решение задач с сильной нелинейностью. Поэтому возрастает интерес к современным методам, решающим эту проблему. Существующий спектр методов приближенного решения, таких как метод возмущения, метод малого параметра Ляпунова, метод разложения Адомиана, метод δ-расширения и другие не обладают универсальностью и инвариантностью к нелинейным постановкам.

В связи с этим рассмотрим новейший метод приближенного решения - метод гомотопного анализа[1], идея которого основана на топологическом понятии гомотопии.

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$A[u(\vec{x},t)] = 0,$$

где A - нелинейный оператор, $\vec{x}$ - пространственный координатный вектор, t - время, $u(\vec{x},t)$ - неизвестная функция. Обозначим за $u_0(\vec{x},t)$ начальное приближение функции $u(\vec{x},t)$. Обозначим L вспомогательный оператор, такой что $L[f(\vec{x},t)] = 0$, когда $f(\vec{x},t) = 0$. Строится гомотопия:

$$\Gamma[\varphi(\vec{x},t,q),q] = (1-q)L[\varphi(\vec{x},t,q) - u_0(\vec{x},t)] + qA[\varphi(\vec{x},t,q)],$$

где $q \in [0,1]$ - гомотопный параметр, $\varphi(\vec{x},t,q)$ -непрерывная функция зависящая от $\vec{x}$, t и q. При $q = 0$ получим $\Gamma[\varphi(\vec{x},t,q),q] = L[\varphi(\vec{x},t,0) - u_0(\vec{x},t)]$. При $q = 1$ соответственно $\Gamma[\varphi(\vec{x},t,q),q] =$

$A[\varphi(\vec{x},t,q)]$. Очевидно, $\varphi(\vec{x},t,0) = u_0(\vec{x},t)$ решение уравнения $\Gamma[\varphi(\vec{x},t,q),q] \mid_{q=0}= 0$ и $\varphi(\vec{x},t,1) = u(t)$ решение уравнения $\Gamma[\varphi(\vec{x},t,q),q] \mid_{q=1}= 0$. Таким образом решение уравнения $\Gamma[\varphi(\vec{x},t,q),q] = 0$ с ростом параметра q от 0 до 1 изменяется от начального приближения $u_0(\vec{x},t)$ к точному решению $u(\vec{x},t)$ нелинейной задачи.

Дифференцируем $\varphi(\vec{x},t,q)$ по q бесконечное число раз и составляя степенной ряд по переменной q с соответствующими производными $\varphi(\vec{x},t,q)$ в качестве коэффициентов ряда, можно убедиться, что полученный ряд сходится к точному решению нелинейной задачи. Чтобы управлять процессом сходимости необходимо обобщить введенную гомотопию, введя вспомогательную функцию $H(\vec{x},t) \neq 0$ и вспомогательный параметр $h \neq 0$:

$$\Gamma[\Phi,q,H,h] = (1-q)L[\Phi(\vec{x},t,q,h)-u_0(\vec{x},t)]-qhH(\vec{x},t)A[\Phi(\vec{x},t,q,h)]$$

Рассмотренный метод гомотопного анализа применен к двумерной задаче свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне в формулировке первой тестовой задачи[2].

Получены приближенные аналитические решения задачи согласующиеся с известными численными результатами. Отмечена эффективность применения гомотопного метода анализа и быстрая сходимость полученных рядов.

Литература

1. Liao Shijun. Beyond perturbation : introduction to homotopy analysis method. CRC Press, 2004.

2. Davis G., De V. Natural convection of air in square cavity: a bench mark numerical solution. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, 1983. v.3, n.3, p.249-264

ЛЕММА О НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Савастеев Д.В. (Воронеж)

savasteev@gmail.com

Лемма о производной по внутреннему направлению, доказанная независимо О.А. Олейник и Э. Хопфом (см. [1,2]) для решений эллиптических уравнений второго порядка в области эвклидова пространства играет ключевую роль в целом ряде вопросов. Нами получен аналог леммы о нормальной производной (частного случая леммы Олейник – Хопфа) для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. Ранее подобный факт доказывался А.А. Гавриловым и О.М. Пенкиным в случае двумерного стратифицированного множества. Без ограничений на размерность, но при ограничениях геометрического характера на страты, подобный факт доказан С.Н. Ощепковой. Нам удалось освободится от подобных ограничений.

Определение стратифицированного множества $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega$ (Ω_0 – внутренность, а $\partial\Omega_0$ – граница, определяемые специальным образом) и эллиптического оператора $\Delta_p u = \nabla(p\nabla u)$ на нем можно найти в монографии [3]. Основной результат нашей работы содержится в следующем утверждении.

Теорема: Пусть p – положительная функция на Ω_0 (p предполагается ограниченной и непрерывно дифференцируемой в пределах каждого страта, но не обязательно в целом на Ω_0). Пусть далее u – непрерывное в целом на Ω решение неравенства $\Delta_p u \geqslant 0$, достигающее максимума в граничной точке $X_0 \in \partial\Omega_0$, тогда нормальная производная функции u в точке X_0 отрицательна.

Нормальная производная решения u определяется чисто аналитическим способом, т.е. слову "нормаль" не придается никакого геометрического смысла (подробности см. в [3]). Более точно, если $X_0 \in \sigma_{k-1,i} \subset \partial\Omega_0$, то нормальная производная есть сумма выражений вида $p\nabla u(X_0)\cdot\vec{\nu}$ по всем k-мерным стратам σ_{kj}, примыкающим к $(k-1)$-мерному страту $\sigma_{k-1,i}$ и лежащим в Ω_0.

Доказательство теоремы опирается на специальную методику построения барьеров. Следует заметить, что ввиду сложности геометрии стратифицированного множества построение барьеров – весьма громоздкая процедура. Это и не позволяло ранее другим авторам получить результат в максимальной общности.

Автор благодарит О.М. Пенкина за полезное обсуждения результата.

Литература

[1] E. Hopf A remark on linear elliptic differential equation of second order. Proc. Amer. Math. Soc, 1952, V.3, стр.791-793.

[2] О.А. Олейник О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Матем. сб. (н. сер.), 1952, Т.30, №3, стр. 695-702.

[3] Ю.В. Покорный и др. "Дифференциальные уравнения на геометрических графах", М.:Физматлит, 2005

СВЯЗЬ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Савотин А.И. (Калуга)

irena1983.83@mail.ru

Пусть заданы два треугольных метода суммирования с линейными средними $\sigma_i = \sum_{j=0}^{i} C_{ij} S_j$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\sigma'_n = \sum_{k=0}^{n} C'_{nk} S_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, причем первый из этих методов является невырожденным, т. е. $c_{ii} \neq 0$ при любом i, а поэтому он является обратимым. В работе [1] были указаны формулы обратного преобразования, применяя которые можно установить связь муждy средними σ'_n и σ_i в следующем виде:

$$\sigma'_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{C'_{ni} M^i_{i-k}}{C_{kk} \ldots C_{ii}} \right) \sigma_k \tag{1}$$

где $M^n_n = M_{0n}$–минор элемента c_{0n} матрицы C первого метода суммирования, M^n_{n-k} — определитель $(n-k)$-го порядка, получающийся из определителя M^n_{n-k+1} вычеркиванием первой строки и первого столбца; $M^n_1 = c_{nn-1}$, $M^n_0 = 1$.

В качестве непосредственного следствия формулы (1) получим формулу связи между средними двух различных методов Вороного (W, p_n) и (W, p'_n):

$$\sigma'_n = \frac{1}{P'_n} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} p'_{n-i} M_{i-k} \right) P_k \sigma_k, \tag{2}$$

где $P'_n = \sum_{k=0}^{n} p'_k$, $P_k = \sum_{i=0}^{k} p_i$, $M_0 = 1$, $M_1 = p_1$, а при $n > 1$ M_n —- определитель n-го порядка,

$$M_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \ldots & p_1 \end{vmatrix}$$

(см. [2]).

Из формулы (2), как частный случай, получается хорошо известный результат выражения зависимости между средними двух различных методов Чезаро: $\sigma^{\alpha+\delta}_n =$
$= \frac{1}{A^{\alpha+\delta}_n} \sum_{k=0}^{n} A^{\delta-1}_{n-k} A^{\alpha}_k \sigma^{\alpha}_k$.

Литература

[1] Савотин А.И. Обратимость треугольных методов суммирования// Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции Воронежской зимней математической школы. — Воронеж, 2009, с. 160-161.

[2] Савотин А.И. Об обратимость метода суммирования Вороного// Прикладные задачи математики и механики: Материалы 18 международной научно-технической конференции. — Севастополь, 2010, с. 220-222.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

Савченко Г.Б., Ткачева С.А., Ярцева Н.А. (Воронеж)

В области $Q_n = T_0^{n-1} \times R_+$, где $T_0^{n-1} = \{y_i | y \in R^{n-1}; |y_j| < \pi, j = 1, \ldots, n-1\}$, $R_+ = \{t | 0 < t < \infty\}$ рассматривается уравнение с комплексным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ в классе периодических (с периодом 2π) по $y \in R_{n-1}$ решений:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y}, \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \lambda u = f(t, u), \quad (y, t) \in Q_n \tag{1}$$

при условиях

$$\lim_{t \to +0} u(y, t) = \lim_{t \to \infty} u(y, t) = 0, \quad y \in T_0^{n-1} \tag{2}$$

где функция $\alpha(t) \in C^m$, $\alpha(t) > 0, \quad t \in R_+$, причем существует конечный предел

$$J(\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} J(t); \quad J(t) = \int\limits_0^t \frac{ds}{\alpha(s)}; \tag{3}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y}, \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right) u \equiv L\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

– линейный дифференциальный оператор с однородным степени mэллиптическим символом $L(\xi, \eta)$, $\xi \in R_{n-1}$, $\eta \in R$. (см. [1]).

Разрешимость задачи (1)-(2) основано на выполнении следующего условия.

Условие 1. При любых $(\xi, \eta) \in R^n$ и $\lambda = \rho e^{i(\Theta + 1/2m\pi)}\rho \geqslant 0$, $|\Theta| < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ многочлен $L(\xi, \eta) - \lambda$ не обращается в нуль при $|\xi|^2 + |\eta|^2 + \rho^{2/m} > 0$.

Теорема. Пусть $0 < \delta < 1$ и функция $\alpha(t)$ удовлетворяет следующим условиям: $\alpha(t) \in C^m$, $\alpha(t) > 0, \quad t \in R_+$ и существует конечный предел (3). Тогда при выполнении условия 1 и при любой $f(y,t_) \in C_{\alpha}^{\delta}(Q_n)$, существует единственное решение $u(y,t)$ задачи (1) – (2), причем справедлива оценка

$$\sum_{|\sigma|+\sigma_n} \rho^{\frac{m-|\sigma|-\sigma_n}{m}} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\sigma} \left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sigma_n} \tilde{v} \right\|_{\widehat{C}_{\alpha}^{\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant c \left\| L\left(\frac{\partial}{\partial y}, \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \lambda u \right\|_{\widehat{C}_{\alpha}^{\delta}},$$

где $\lambda = \rho e^{i(\Theta+1/2m\pi)}$, $\rho \geqslant 0$, $|\Theta| < \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$. Постоянная $c > 0$ зависит лишь от m, n, ρ и Θ.

Литература

1. Глушко В.П. Об одной эллиптической периодической задаче с вырождением в Lp / В.П. Глушко, Н.А.Ярцева. // Мат. заметки . – Б.м. – 1998 . – Т.63, вып. 4 . – С.628 – 632.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

Савченко Ю.Б., Ткачева С.А. (Воронеж)

Исследуется разрешимость начально-граничной задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x' u - \alpha(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\alpha(x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (1)$$

$$0 < x_n \leqslant 1, \quad t > 0,$$

$$x' = (x_1, ..., x_{n-1}), \quad x' \in E_{n-1},$$

$$u|_{x_n=0} = \Phi(x', t), \quad u|_{t=+0} = 0 \quad . \qquad (2)$$

где $x' \in E_{n-1}, \quad 0 < x_n \leqslant 1, \quad 0 < t < \infty, \quad \Delta_x' u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}$ - оператор Лапласа по переменной $x' \in E_{n-1}$; $\alpha(x_n)$ - весовая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\alpha(x_n) \in C^n(0,1), \quad \alpha(x_n) > 0, \quad 0 < x_n \leqslant 1,$$

$$\alpha\,(+0) = \alpha(1-0) = \alpha'(1-0) = 0 \quad ; \quad \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Гладкость решения задачи (1)-(2) устанавливается в терминах весовых пространств Гельдера $C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}$ $(0<\delta<1)$с нормой (см. [1]):

$$\|u\|_{C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_n^+\times(0,T)\right)} =$$

$$\sum_{j=0}^{2\ell}\ \sum_{0\leqslant|\nu'|+\nu_n+2\nu_0\leqslant j}\ \sup_{t\in(0,T)}\ \sup_{E_{n-1}\times(0,1)} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'} (\alpha D_{x_n})^{\nu_n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_o} u\,(x',x_n,t)\right| +$$

$$+ \sum_{0\leqslant|\nu'|+\nu_n+2\nu_0\leqslant 2\ell} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'} (\alpha D_{x_n})^{\nu_n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_o} u \right\rangle_{x,\alpha,\left(E_{n-1}^{\times}(0,1)\times(0,T)\right)} +$$

$$+ \sum_{0\leqslant|\nu'|+\nu_n+2\nu_0\leqslant 2\ell} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'} (\alpha D_{x_n})^{\nu_n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_o} u \right\rangle_{x,\alpha,\left(E_{n-1}^{\times}(0,1)\times(0,T)\right)}$$

Теорема. Пусть $\Phi\,(x',t) \in C_{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^{\times}(0,1)\times(0,T)\right)$, $(0<\delta<1)$ Тогда функция $u\,(x',x_n,t)$ и ее производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ $\left(\alpha\,(x)\,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 u\,(x',x_n,t)$ принадлежат при каждом фиксированном $t\in(0,T)$ пространству $C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^{\times}\,(0,T)\right)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{C_\alpha^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}\left(E_{n-1}^{\times}(0,1)\times(0,T)\right)} \leqslant C\,\|\Phi\|_{C^{2\ell+\delta,\ell+\delta/2}(E_{n-1}\times(0,T))}\,.$$

Литература

1. Глушко В.П. Об уравнении теплопроводности с существенно переменным коэффициентом / В.П. Глушко, С.А. Ткачева. – ДАН РФ, т.335, №6, 1996. – с. 684–687.

МЕТОД РАНЖИРОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЕРЕВА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА ДАННЫХ В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Сальтевский И.В.

Рассматривается метод ранжирования показателей оценки качества данных на основании анализа дерева принятия решений, строящегося на статистических сведениях влияния данных на результат их использования в автоматизированных телекоммуникационных системах.

Выявление характеристик оценки качества поступающих данных является довольно трудоемкой задачей, поскольку для различных процессов, протекающих в автоматизированных телекоммуникационных системах, перечень характеристик будет различным.

Целью работы является определение методики количественной оценки множества данных в соответствии с функциями системы.

В качестве характеристик качества используемых в системе данных, рассматриваются такие качественные аспекты упорядоченных множеств, как полнота, актуальность, достоверность, безошибочность и конфиденциальность.

Для каждой системы совокупность приоритетных характеристик качества информации может быть различен, однако здесь рассматриваются наиболее общие из них.

Данную оценку можно проводить методом сравнения нормированных или статистических значений показателей характеристик качества информации.

На основании статистических сведений можно выстроить дерево принятия решений о качестве данных, которое позволяет ранжировать показатели оценки качества в соответствии со степенью их влияния на качество данных, определяемое в результате работы приложения, а также оперативно реорганизовать алгоритмы оценки (выявления качественности) поступающих данных и выделить упорядоченную совокупность показателей качества для каждой из категории данных.

На основании проведенной оценки можно собирать статистические сведения о влиянии показателей на данные полученные в результате работы приложения. Какой из показателей соответствовал заданному значению, а какой нет.

Результатом статистических сведений является выявление меры влияния показателей на конечный результат работы приложения.

На основании статистических сведений можно (спрогнозировать) выявить несоответствие поступающих данных показателям качества используя метод построения деревьев принятия решений, применяющийся для решения задач классификации данных при аппроксимации заданной булевской функции.

Поступающие данные, дополняя статистические сведения, требуют пересмотра ранжирования показателей их оценки. Это обусловлено возможностью отличия результата использования этих данных от прогнозируемого.

Для того чтобы получить актуальную картину дерева принятия решений, нужно на каждом шаге выбирать те показатели оценки качества поступающих данных, которые “лучше всего” характеризуют целевую функцию. Это требование формализуется посредством понятия *энтропии.*

Несложно заметить, что для множество A из n элементов, m из которых обладают некоторым свойством S, энтропия по отношению к свойству S – это

$$H\{A,S\} = -\frac{m}{n}Ln\frac{m}{n} - \frac{n-m}{n}Ln\frac{n-m}{n}, \tag{1}$$

Энтропия зависит от пропорции, в которой разделяется множество. По мере возрастания этой пропорции от 0 до $1/2$ энтропия тоже возрастает, а после $1/2$ — симметрично убывает.

В данном случае энтропия рассматривается, как количество бит, требующихся для того, чтобы описать свойство S у элемента множества A. Если вероятность появления S равна $1/2$, то энтропия равна 1, и соответственно, нужен полноценный бит; а если S появляется не равновероятно, то можно описать последовательность элементов A более эффективно.

Таким образом, при выборе признака для классификации целесообразно осуществлять его таким образом, чтобы после классификации энтропия стала как можно меньше (свойство S в данном случае – значение целевой булевской функции). Энтропия при этом будет разной в разных потомках, и общую сумму нужно считать с учетом того, сколько исходов осталось в рассмотрении в каждом из потомков.

Множество элементов A, некоторые из которых обладают свойством S, классифицировано посредством показателя Q, имеющего q возможных значений. Тогда *изменение энтропии* определяется как

$$Gain_(A,Q) = H\{A,S\} - \sum_{i=1}^{q}\frac{|A_i|}{|A|}H\{A_i,S\}, \tag{2}$$

где, A_i – множество элементов A, на которых показатель Q имеет значение i.

На каждом этапе, при поступлении данных о состоянии системы, алгоритм адаптации должен выбирать тот показатель, для которого *изменение энтропии* максимален. Данный показатель должен быть перенесен в начало классификационного списка и в последствии дерево решений будет производить прогнозирование в соответствии с новой классификацией.

Причем, для различных категорий данных, вес одних и тех же показателей может быть различен. Например, для разведывательной информации о противнике, первоочередным требованием является актуальность и достоверность, а для хозяйственной деятельности – точность.

Таким образом, практическая реализация данного алгоритма позволяет видоизменять дерево принятия решений в соответствии с вновь поступающей информацией.

ПРЕДПРОФИЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА В 9 КЛАССЕ

Санина В.С.

Система образования вступила в период существенных перемен, характеризующихся новым пониманием целей и ценностей образования.

Важнейшими направлениями инновационной деятельности в школе являются предпрофильная подготовка и профильное обучение. Введение профильного обучения является приоритетным направлением в реализации стратегии модернизации образования. В настоящее время обществом востребовано образование, способное обеспечить жизненное самоопределение выпускника, реально помочь ему в решении проблемы социальной адаптации.

Предпрофильная подготовка в 9 классе вводится с целью создания условий для самоопределения учащихся в выборе профиля обучения, а также способа получения дальнейшего образования.

Главная задача педагогов в данной деятельности – помочь учащимся в определении их природных склонностей и способностей. Элективные курсы являются хорошим помощником в решении данной задачи.

Я веду элективные курсы по математике с ориентацией на естественно – научный профиль обучения. Мною разработаны несколько элективных курсов. Среди них: “Мир вокруг нас глазами математики”, “Решение систем уравнений”, “Что нам стоит дом построить…”, которые утверждены научно – методическим советом информационно – методического центра и рекомендованы для изучения в школе.

Наиболее интересным для учащихся оказался элективный курс "Что нам стоит дом построить...".

Целесообразность введения данного курса состоит в том, что содержание курса, форма его организации помогут школьнику увидеть практическое применение знаний, полученных на занятиях, увидеть межпредметные связи, ознакомиться со спецификой разных видов деятельности.

В процессе обучения школьники научатся:

1. Проектировать дом, земельный участок.

2. Рассчитывать количество кирпича, необходимого для строительства дома.

3. Делать расчет количества необходимых материалов на приготовление раствора для кладки дома.

4. Рассчитывать количество обоев для оклейки стен.

5. Определять количество линолеума.

На заключительном занятии выбираем победителей в каждой номинации: самый дешевый дом, самый удобный, самый красивый.

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МУЛЬТИВСПЛЕСКОВ

Северов П.Г. (Воронеж)

severovpg@gmail.com

Пусть $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{r-1})^T \in L^2(\mathbb{R})^r$ мультимасштабирующая вектор-функция, которая удовлетворяет мультимасштабирующему уравнению

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \sqrt{2}\sum_k H_k \boldsymbol{\varphi}(2t-k), \ , k \in \mathbb{Z},$$

где H_k – матричные коэффициенты размерности $r \times r$.

Пусть также $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_{r-1})^T \in L^2(\mathbb{R})^r$ соответствующая мультивсплеск вектор-функция, удовлетворяющая уравнению

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_k G_k \boldsymbol{\varphi}(2t-k), \ k \in \mathbb{Z},$$

где G_k – матричные коэффициенты размерности $r \times r$.

Фильтры $h_{i,j}[k]$ и $g_{i,j}[k]$ определим, как соответствующие элементы матриц H_k и G_k.

Обозначим также $\overline{x}[n] := x[-n]$.

Теорема 1 Для любого $j \leqslant 0$ справедливы формулы разложения

$$a_i^{j-1}[n] = \sqrt{2} \sum_{m=0}^{r-1} a_m^j \star \overline{h}_{i,\,m}^{-j}[n],$$

$$d_i^{j-1}[n] = \sqrt{2} \sum_{m=0}^{r-1} a_m^j \star \overline{g}_{i,\,m}^{-j}[n]$$

и восстановления

$$a_k^j[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{r-1} \left(a_i^{j-1} \star \widetilde{h}_{i,\,k}^{-j}[n] + d_i^{j-1} \star \widetilde{g}_{i,\,k}^{-j}[n] \right).$$

Здесь $h_{i,\,m}^{-j}[n]$ и $g_{i,\,m}^{-j}[n]$ получаются из $h_{i,\,m}[n]$ и $g_{i,\,m}[n]$ в результате подстановки $2^{-j} - 1$ нулей между каждыми двумя отсчетами, а $\widetilde{h}$ и $\widetilde{g}$ в образах Фурье удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(\widetilde{h}_{im}(\xi/2)\overline{h_{im}(\xi/2)} + \widetilde{g}_{im}(\xi/2)\overline{g_{im}(\xi/2)} \right) = 1$$

и

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(\widetilde{h}_{im}(\xi/2)\overline{h_{ij}(\xi/2)} + \widetilde{g}_{im}(\xi/2)\overline{g_{ij}(\xi/2)} \right) = 0,$$

для всех $m = 0, \ldots, r-1$, $j = 0, \ldots, r-1$, $j \neq m$, $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$

Литература

1. Keinert F. Wavelet and Multiwavelet / F. Keinert. Chapman & Hall/CRC, 2004.

2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов / С. Малла. М.: Мир, 2005. 671 с.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА

Седов А.И., Михеева С.С. (Магнитогорск)

sedov@masu.ru, miheevass@masu.ru

Пусть T - самосопряженный полуограниченный снизу дискретный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеет простой спектр $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть упорядоченные по возрастанию собственные числа имеют асимптотику:$\lambda_n \sim Cn^{\beta}$, C>0, $\beta > 1$. Пусть P - ограниченный оператор в H. Обозначим через v_n - ортонормированные собственные функции оператора T соответствующие собственным числам λn, а через u_n собственные функции оператора T+P.

Теорема . Имеет место асимптотика

$$u_n = v_n + \sum_{m \neq n} \frac{(Pv_n, v_m)v_m}{\lambda_n - \lambda_m} + O(\frac{1}{n^{2(\beta-1)}})$$

.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Селиванова Н.Ю., Шамолин М.В. (Москва)
shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Изучается некоторая однофазная задача со свободной границей. Доказывается локальная разрешимость (по времени) данной задачи, при этом разрабатываемый общий метод применяется в более конкретном случае. Для этого вводятся новая замена пременных, параметризация границы, и исследуемая задача сводится к задаче в постоянной области [1–5].

Литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

2. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. 1985. *40*, № 5(245). С. 133–185.

3. Елтышева Н.А. О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. *132*, № 2. С. 186–209.

4. Лаврентьев М.М. (мл.), Люлько Н.А. Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач // Сиб. мат. ж. 1997. *38*, № 1. С. 109–124.

5. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ДВУМЕРНОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ

Семенов С.Л. (Воронеж)

sergo_ 7@list.ru

В работе устанавливается разрешимость задачи дирихле для уравнения лапласа заданном на стратифицированном множестве, страты которого имеют размерность не больше 2, в предположении что все страты плоские и $\partial\Omega$ непуста. Для существования и единственности решения задачи

$$\begin{array}{l} \triangle U(x) = F(x) \quad x \in int\Omega \\ U|_{x\in\partial\Omega} = \psi \end{array} \tag{1}$$

достаточным условием накладываемым на геометрическую структуру множества Ω является наличие "прочной"цепочки между любыми двумя стратами и образование одномерными стратами примыкающими к двумерному страту замкнутой кривой.

Решение задачи лежит в пространстве с топологией заданной счетной системой полунорм. А именно на одномерных стратах Γ полунормы определяются как

$$p_0(\varphi) = ||\varphi||_{C(\Gamma)}$$

$$p_i(\varphi) = ||\varphi||_{C^{2+\lambda}(D_i)} \quad i = 1, 2, \dots$$

,где $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \ldots \subset \Gamma$ и $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i} = \Gamma$, и на двумерных

$$p_0(\varphi) = ||\varphi||_{C(\Gamma)}$$

$$p_i(\varphi) = ||\varphi||_{C^{2+\lambda}(D_i)} + ||\varphi||_{C^{2+\lambda}(B_i)} \quad i = 1, 2, \dots,$$

где ∂B_i — гладкая кривая, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \ldots \subset \Gamma$, $\partial B_i \cap \partial\Omega = \varnothing$, $\underline{\partial B_i \cap \partial\Gamma} \neq \varnothing$, $\partial B_1 \cap \partial\Gamma \subset B_2 \cap \partial\Gamma \subset \ldots \subset \partial\Gamma$ и $\overline{\partial\Gamma \setminus \partial\Omega} = \overline{\bigcup\limits_{i}^{\infty}(\partial B_1 \cap \partial\Gamma)}$

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах /Ю.В.Покорный, О.М.Пенкин, В.Л.Прядиев,

А.Л.Боровских, К.П.Лазарев, С.А.Шабров.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.-272с.

2. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики — М.:ФИЗМАТЛИТ, 1953.-415с.

3. Рудин, У. Функциональный анализ /У. Рудин ; Пер. с англ. В.Я. Лина, под. ред.

УТОЧНЕНИЕ ЧИСЛА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Семенова Т.Ю. (Москва)

station@list.ru

Пусть $x \in [0,1]$, функция $F(x,u)$ класса Липшица по u, т.е. для любых u, v выполняется неравенство $|F(x,u) - F(x,v)| \leqslant A(x)|u-v|$, $A(x) \in L_p[0,1], p \in [1,\infty]$. Обозначим $C = \sqrt{\| A \|_\infty}$ при $p = \infty$ или $C = 2 \| A \|_p$ при $p \in [1,\infty)$.

Пусть $u_1, u_2 \in W_2^1[0,1]$ – два обобщенных решения дифференциального уравнения $u'' = S(x,u) + F(x,u)$ с одинаковыми граничными условиями, S – монотонно возрастающая по u функция. Введем обозначение $P_x(u) = \frac{1}{d}\int_x^{x+d} u(t)dt$ – линейный функционал, $d \in [0,1)$ – фиксировано, $x \in [0, 1-d]$.

В работе [2] показано, что для любого $d < \frac{2\pi}{C}$ существуют $x_1, ..., x_N$, $N = \left[\frac{C}{\pi}\right]$, такие, что

$$P_{x_i}(u_1) = P_{x_i}(u_2) \text{ для } i = 1, ..., N \Rightarrow u_1 \equiv u_2,$$

то есть набор функционалов $P_{x_1}, ..., P_{x_N}$ является определяющим (см. [1]).

Рассмотрим дифференциальное уравнение $u'' = S(x,u) + F(x,u)$ с такой функцией $F(x,u)$, что $A(x) \leqslant C_1$ на $[0,\varepsilon]$ и $A(x) \leqslant C_2$ на $[\varepsilon, 1]$, где $C_1 \gg C_2$. Тогда утверждение работы [2] будет верным с $C = \min\{\sqrt{C_1}, 2(C_1\varepsilon + C_2(1-\varepsilon))\}$ и $N = \left[\frac{C}{\pi}\right]$.

Однако при малых значениях ε и d, например, при $(\varepsilon + d)\sqrt{C_1} < \pi$, достаточным числом определяющих функционалов будет $N = \left[\frac{\sqrt{C_2}}{\pi}\right] + 1$. При определенных соотношениях на C_1, C_2 и ε эта оценка оказывается лучше.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00442-а.

Литература

1. Чуешов И.Д. Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // Успехи мат. наук. 53:4 (1998), 77-124.

2. Семенова Т.Ю. Приближение классов Соболева ступенчатыми функциями и единственность решений дифференциальных уравнений вида $u'' = F(x, u, u')$//Известия РАН, 71:1 (2007), 155-186.

ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЦЕПОЧЕК ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Сергеев С.М. (С.-Петербург)

Имеющиеся средства математического моделирования позволяют решать целый ряд вопросов связанных с логистикой. Например, использование методов линейного программирования позволяет выстроить оптимальные схемы доставки грузов что отражено в значительном количестве методик и исследований. Поскольку современные требования к организации снабжения сетей магазинов продовольственными и другими товарами основаны на минимизации издержек и подразумевают серьезный научный подход, недостаточно использования аппарата детерминированных моделей. Многие ситуации при доставке грузов требуют более широкого подхода. Например доставка товаров через государственную границу очень характерна для таких городов, как Санкт-Петербург ввиду близости государств Евросоюза. Возникающие время от времени многокилометровые пробки перед пограничными переходами наносят значительный ущерб торговле, в частности из-за нарушения сроков хранения продуктов. Необходимо учитывать, что даже если успеть ввезти товар до истечения срока хранения, все равно требуется время на его реализацию и торговое предприятие может потерпеть убыток.

Для того, чтобы принимать решение о закупке и доставке из-за рубежа товара надо проанализировать всю цепочку доставки. Для этого проведена формализация задачи: общее время нахождения товара в пути до момента выкладывания на прилавок разделено на время в пути до границы, время проведенное на границе (очередь, таможенная процедура), время в пути до магазина, время на перенос товара (очередь на разгрузку, разгрузка, процедура оформления). Введены величины характеризующие интенсивность потока транспорта перед пограничным переходом, интенсивность обслуживания транспорта.

Получены выражения для функции распределения интервала времени между прибытием транспорта, предельной длины очереди. Получено решение в виде выражений для относительной пропускной способности пограничного перехода, абсолютной пропускной способности, средней длины очереди, среднего времени ожидания в очереди и среднего времени пребывания на таможенной процедуре.

В работе даны рекомендации по многофазовости процесса и применению аппарата марковских случайных процессов. Расчеты произведенные по приведенным формулам представляют собой основу для принятия решений о целесообразности закупки товара требующего транспортировки через границу.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ОСИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Сергиенко Л.С., Баенхаева А.В. (Иркутск)

lusia_ss@mail.ru, ayunab2000@mail.ru

Рассматривается эллиптическое уравнение при $l > 0$

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{(x^2 + y^2)^l}{R^2 + (x^2 + y^2)^m} u_{zz} = 0, \qquad (1)$$

параболически вырождающееся на оси аппликат при $x = y = 0$. При $R = 0$ и $l = m$ из (1) получаем классическое уравнение Лапласа. Случай $R = 0$, $l > m > 0$ подробно исследован в [2].

Возьмем цилиндр $D = \{x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < h\}$ с боковой поверхностью Γ, верхним Γ_0 и нижним Γ_1 основаниями. Обозначим D_0 часть оси OZ , лежащую внутри и на границе D.

Поставим задачу: найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u\,|_{\Gamma} = f, u\,|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \qquad (2)$$

где функция $f \in C^2(\Gamma)$ обращается в нуль на границе множества Γ.

Доказана следующая

Т е о р е м а. В классе функций $C^2(D/D_0) \cap C(\bar{D}/D_0)$ при $l =$

$m = 1/2$ и $l = m = 1$ существует единственное ограниченное при $(x^2 + y^2) \to 0$ решение задачи (1) - (2).

Решение построено в виде тригонометрического ряда, абсолютно и равномерно сходящегося внутри цилиндра.

С помощью альтернирующего метода Шварца полученное решение может быть продолжено в области более общего вида [1].

Решение при $l = 1$:

$$u(\varphi, \rho, z) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\psi(\rho)}{\psi(R)} \cdot sin \frac{n\pi z}{h} \cdot [A_{nm} cos(m\varphi) + B_{nm} cos(m\varphi)] \right\},$$

где

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi Rh} \int_{\Gamma} f(\varphi, z) sin \frac{m\pi z}{h} cos(n\varphi) d\Gamma,$$

и

$$B_{nm} = \frac{2}{\pi Rh} \int_{\Gamma} f(\varphi, z) sin \frac{m\pi z}{h} sin(n\varphi) d\Gamma,$$

$$n, m = 0, 1, 2, 3, ...$$

Литература

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964.

2. Сергиенко Л.С. Математическое моделирование физико-технических процессов. - Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2006. - 228 с.

ОЦЕНКА МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Пусть $L_p (1 \leqslant p < \infty)-$ пространство $2\pi-$ периодических, измеримых функций $f(x)$ с конечной нормой $\| f \|_p = (\int\limits_0^{2\pi} | f(x) |^p dx)^{1/p}$; $L_\infty-$ пространство непрерывных $2\pi-$ периодических функций $f(x)$ с нормой $||f||_\infty = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|$;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00175) и Программы Поддержки Ведущих Научных Школ (проект НШ 32-52.2010.1).

$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!} f(x+(\alpha-\nu)h)$ - разность порядка $\alpha > 0$ функции $f(x)$ (при целых α это будет $\alpha-$ая разность, например, при $\alpha = 1$ имеем $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$); $\omega_\alpha(f,t)_p = \sup\limits_{|h|\leqslant t} \| \Delta_h^\alpha f(x) \|_p$ – модуль гладкости порядка $\alpha > 0$; $\sum_1(\theta,n,\lambda,f,\alpha,\rho,p) = \Big((n+1)^{-\alpha\theta} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{(\alpha+\rho)\theta}\big(\lambda_\nu^\theta \nu^{-\rho\theta} - \lambda_{\nu+1}^\theta(\nu+1)^{-\rho\theta}\big) \cdot$
$\cdot \omega_{\alpha+\rho}^\theta(f,1/\nu)_p + \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \big(\lambda_{\nu+1}^\theta - \lambda_\nu^\theta\big)\omega_{\alpha+\rho}^\theta(f,1/\nu)_p + \lambda_{n+1}^\theta \omega_{\alpha+\rho}^\theta(f,1/(n+1))_p\Big)^{1/\theta}$; $q^* = q$, если $q < \infty$ и $q = 1$, если $q = \infty$.

Пусть функция $f(x) \in L_p$. Тогда ей можно поставить в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Преобразованный ряд Фурье функции $f(x)$ при помощи последовательности $\lambda = \{\lambda_n\}$ и β определяется следующим образом:

$$\sigma(f,\lambda,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(a_n \cos(nx+\beta\pi/2) + b_n \sin(nx+\beta\pi/2)).$$

A). Рассмотрим случай $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Рассмотрим оценки сверху для $\omega_\alpha(\varphi,n^{-1})_q$.

Утверждение 1. Пусть $\beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \lambda = \{\lambda_n\}$– неубывающая последовательность такая, что $\{\lambda_n n^{-\rho}\}$ не возрастает при некотором $\rho \geqslant 0$.

I. Пусть $1 < p < q < \infty$. Если для $f \in L_p$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^q n^{\frac{q}{p}-2} \omega_{\alpha+\rho+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}^q (f,n^{-1})_p$, то существует функция $\varphi \in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$ и $\omega_\alpha(\varphi,m^{-1})_q \ll \Big\{(n+1)^{\alpha q}\Big(\sum\limits_{n=1}^{m} \big(\lambda_n^{\min(q,2)} \cdot$
$\cdot\, n^{-\rho\min(q,2)} - \lambda_{n+1}^{\min(q,2)}(n+1)^{-\rho\min(q,2)}\big) n^{(\alpha+\rho+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\min(q,2)} \cdot$
$\cdot\, \omega_{\alpha+\rho+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}^{\min(q,2)}(f,n^{-1})_p\Big)^{\frac{q}{\min(q,2)}} + \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n^q n^{\frac{q}{p}-2} \omega_{\alpha+\rho+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}^q(f,n^{-1})_p\Big\}^{\frac{1}{q}}.$

II. Пусть $1 = p < q = \infty$, последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}$ дополнительно удовлетворяет условию $\Delta^2\big(\lambda_n n^{-\rho}\big) \geqslant 0$. Если для $f \in L_p$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \omega_{\alpha+\rho+1}(f,n^{-1})_p$, то существует функция $\varphi \in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$ и

$$\omega_\alpha(\varphi,m^{-1})_q\ll\Big\{(1-\mathrm{sign}\big|\sin\frac{(\beta-\rho)\pi}{2}\big|)m^{-\alpha}\sum_{\nu=1}^{m}\Big(\frac{\lambda_\nu}{\nu^\rho}-\frac{\lambda_{\nu+1}}{(\nu+1)^\rho}\Big)\nu^{\alpha+\rho+1}\cdot$$
$$\cdot\,\omega_{\alpha+\rho+1}(f,\nu^{-1})_p+\mathrm{sign}\big|\sin\frac{(\beta-\rho)\pi}{2}\big|m^{-\alpha}\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu\nu^\alpha\omega_{\alpha+\rho+1}(f,\nu^{-1})_p+$$
$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\lambda_n\omega_{\alpha+\rho+1}(f,n^{-1})_p\Big\}.$$

Утверждение 2. Пусть $\beta\in\mathbb{R},\ 0<\alpha<k,\ 1=p<q<\infty$ или $1<p<q=\infty; q^*=q$, если $q<\infty$ и $q^*=1$, если $q=+\infty$; $\lambda=\{\lambda_n\}-$ неубывающая последовательность. Если для $f\in L_p$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{q^*}n^{q^*(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}\omega^{q^*}_{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,n^{-1})_p$, то существует функция $\varphi\in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$ и

$$\omega_\alpha(\varphi,m^{-1})_q\ll\Big\{\sum_{n=m+1}^{\infty}\lambda_n^{q^*}n^{q^*(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}\omega^{q^*}_{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,n^{-1})_p+$$
$$+m^{-\alpha q^*}\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^{q^*}n^{q^*(\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}\omega^{q}_{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,n^{-1})_p\Big\}^{1/q^*}.$$

Рассмотрим оценки снизу для $\omega_\alpha(\varphi,n^{-1})_q$.

Утверждение 3. Пусть $\beta\in\mathbb{R},\alpha>0,\lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}-$ неубывающая последовательность такая, что $\lambda_n n^{-\rho}$ не возрастает при некотором $\rho\geqslant 0$.

I. Пусть $1<p<q\leqslant\infty$. Если для $f\in L_p$ существует функция $\varphi\in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$, то

$$\omega_\alpha(\varphi,n^{-1})_q\gg\textstyle\sum_1(\max(p,2),n,\lambda,f,\alpha,\rho,p).$$

II. Пусть $1=p<q\leqslant\infty,p_1\in(p,q)$. Если для $f\in L_p$ существует функция $\varphi\in$
L_q с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$, то

$$\omega_\alpha(\varphi,n^{-1})_q\gg\textstyle\sum_1(\max(p_1,2),n,\lambda,f,\alpha,\rho,p).$$

Б). Рассмотрим случай $1\leqslant q<p\leqslant\infty$.

Рассмотрим оценки сверху для $\omega_\alpha(\varphi,n^{-1})_q$.

Утверждение 4. Пусть $\beta\in\mathbb{R},\alpha>0,\lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}-$ неубывающая последовательность такая, что $\lambda_n n^{-\rho}$ не возрастает при некотором $\rho\geqslant 0$.

I. Пусть $1\leqslant q<p<\infty$. Если для $f\in L_p$ сходится ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(\lambda_{n+1}^{\min(p,2)}-\lambda_n^{\min(p,2)}\big)\omega^{\min(p,2)}_{\alpha+\rho}(f,n^{-1})_p$, то существует функция $\varphi\in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$, и $\omega_\alpha(\varphi,n)_q\ll$ $\sum_1(\min(p,2),n,\lambda,f,\alpha,\rho,p)$.

II. Пусть $1\leqslant q<p=\infty$. Если для $f\in L_p$ при некотором

$p_1 \in (q,p)$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(\lambda_{n+1}^{\min(p_1,2)} - \lambda_n^{\min(p_1,2)}\big)\omega_{\alpha+\rho}^{\min(p_1,2)}(f,n^{-1})_p$, то существует функция $\varphi \in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$, и

$$\omega_\alpha(\varphi,n)_q \ll \sum\nolimits_1(\min(p_1,2),n,\lambda,f,\alpha,\rho,p).$$

Рассмотрим оценки снизу для $\omega_\alpha(\varphi,n^{-1})_q$.

Утверждение 5. Пусть $\beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.

I. Пусть $1 < q < p < \infty, \lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$– такая последовательность, что $\{\lambda_n n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\}$ не убывает, а последовательность $\{\lambda_n n^{-\rho}\}$ не возрастает при некотором $\rho \geqslant 0$. Тогда, если для функции $f \in L_p$ существует функция $\varphi \in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$, то

$$\omega_\alpha(\varphi,(n+1)^{-1})_q \gg \lambda_{n+1}(n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+\rho}(f,(n+1)^{-1})_p + \Bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Big(\big(\lambda_{\nu+1}\cdot$$

$$\cdot(\nu+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\big)^{\max(p,2)} - \big(\lambda_\nu \nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\big)^{\max(p,2)}\Big)\omega_{\alpha+\rho}^{\max(p,2)}(f,\nu^{-1})_p +$$

$$+(n+1)^{-\alpha\max(p,2)}\sum_{\nu=1}^{n}\big(\lambda_\nu \nu^{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+\rho}(f,\nu^{-1})_p\big)^{\max(p,2)}\nu^{-1}\Bigg)^{1/\max(p,2)}.$$

II. Пусть $1 = p < q = \infty$ или $1 = p < q < \infty$ или $1 < q < p = \infty, \lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$– неубывающая последовательность такая, что $\Delta^2\big(\frac{1}{\lambda_n}\big) \geqslant 0$, $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\nu^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1}/\lambda_\nu \leqslant cn^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}/\lambda_n$ для всех $n = 1,2,...$ и для некоторого $\rho \geqslant 0$ последовательность $\lambda_n n^{-\rho}$ не возрастает, $\Delta^2(\frac{n^\rho}{\lambda_n}) \geqslant 0$ или $\Delta^2(\frac{n^\rho}{\lambda_n}) \leqslant 0$ и $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\nu^{\rho+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1}/\lambda_\nu \leqslant cn^{\rho+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}/\lambda_n$ для всех $n = 1,2,....$ Тогда, если для $f \in L_p$ существует функция $\varphi \in L_q$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)$, то

$$\lambda_n n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+\rho}(f,(n+1)^{-1})_p \ll \omega_\alpha(\varphi,(n+1)^{-1})_q.$$

ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Пусть $L_p(1 \leqslant p < \infty)$– пространство 2π– периодических, измеримых функций $f(x)$ с конечной нормой $\| f \|_p = (\int\limits_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^p$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00175а) и Программы Поддержки Ведущих Научных Школ (проект НШ 32-52.2010.1).

$dx)^{1/p}$; $L_\infty-$ пространство непрерывных $2\pi-$ периодических функций $f(x)$ с нормой $||f||_\infty = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)|$.

$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!} f(x+(\alpha-\nu)h)$ - разность порядка $\alpha > 0$ функции $f(x)$ (при целых α это будет $\alpha-$ая разность, например, при $\alpha = 1$ имеем $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$); $\omega_\alpha(f,t)_p = \sup\limits_{|h|\leqslant t} \| \Delta_h^\alpha f(x) \|_p$ – модуль гладкости порядка $\alpha > 0$.

Утверждение 1. Пусть $\beta > \alpha > 0$.

I. ([1], [2]). Пусть p и q таковы, что $1 < p < q < \infty$ или $1 = p < q = \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, q^* = q$, если $q < \infty$ и $q = 1$ если $q = \infty$. Если для $f(x) \in L_p$ сходится ряд

$$\int\limits_0^1 \left(t^{-\theta}\omega_{\alpha+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t},$$

то функция $f(x) \in L_q$ и для любого $\delta \in (0,1]$ справедливо неравенство

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \left\{ \int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{\alpha+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q^*}}.$$

II. Пусть p и q таковы, что $1 < p < q = \infty$ или $1 = p < q < \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, q^* = q$, если $q < \infty$ и $q = 1$ если $q = \infty$. Если для $f(x) \in L_p$ сходится ряд

$$\int\limits_0^1 \left(t^{-\theta}\omega_{\beta+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t},$$

то функция $f(x) \in L_q$ и для любого $\delta \in (0,1]$ справедливо неравенство

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \left\{\delta^{\alpha q^*} \int\limits_\delta^1 \left(t^{-(\alpha+\theta)}\omega_{\beta+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{\beta+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}}.$$

Замечание 1. Из утверждения 1 следует неравенство П.Л. Ульянова ([1], [2]):

$$\omega_1(f,\delta)_q \ll \left\{ \int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{1+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q^*}} \ll \left\{ \int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{1}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q^*}} (1 < p < q < \infty, 1 = p < q = \infty);$$

$$\omega_1(f,\delta)_q \ll \left\{\delta^{\alpha q^*} \int\limits_\delta^1 \left(t^{-(\alpha+\theta)}\omega_{2+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t} +\right.$$

$$\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{2+\theta}(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\Bigg\}^{\frac{1}{q^*}} \ll$$

$$\ll \left\{\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_1(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}} (1<p<q=\infty, 1=p<q<\infty).$$

Покажем, что в соотношениях (в случае $1<p<q<\infty, 1=p<q=\infty$)

$\left\{\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{1+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}} \ll \left\{\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_1(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}}$; (в случае $1<p<q=\infty, 1=p<q<\infty$)

$$\left\{\delta^{q^*}\int\limits_\delta^1 \left(t^{-(1+\theta)}\omega_{2+\theta}(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{2+\theta}(f,t)_p\right)^{q} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}} \ll$$

$\ll \left\{\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_1(f,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}}$ знак $\ll$ нельзя заменить на $\asymp$.

Для этого рассмотрим функцию $f_0(x)=\sin x : \omega_1(f_0,\delta)_q \asymp \delta$;

$$\left\{\delta^{q^*}\int\limits_\delta^1 \left(t^{-(1+\theta)}\omega_{2+\theta}(f_0,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{2+\theta}(f_0,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}} \asymp \delta;$$

$$\left\{\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_1(f_0,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}} \asymp \delta^{1-\theta};$$

$$\left\{\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_{1+\theta}(f_0,t)_p\right)^{q^*} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q^*}} \asymp \delta.$$

Утверждение 2. Пусть $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$; $q^* = q$, если $q<\infty$ и $q=1$, если $q=\infty$; $T_N(x)=\sum\limits_{\nu=1}^N (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin \nu x)$- тригонометрический полином порядка N. Тогда

1) если $1<p<q<\infty$ или $1=p<q=\infty$, то $||T_N(x)||_q \ll ||T_N^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x)||_p$,

2) если $1=p<q<\infty$ или $1<p<q=\infty$, $2^n \leqslant N < 2^{n+1}$, для некоторого $n=0,1,...$ то $||T_N(x)||_q \ll \left(\sum\limits_{\nu=0}^{n+1} ||\big(V_{2^\nu}(T_N) - V_{[2^{\nu-1}]}(T_N)\big)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x)||_p^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}}$.

Замечание 2. Из утверждения 2 следует неравенство Никольского:

1) если $1<p<q<\infty$ или $1=p<q=\infty$, то

$||T_N(x)||_q \ll ||T_N^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x)||_p \ll N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||T_N(x)||_p$,

2) если $1=p<q<\infty$ или $1<p<q=\infty$, то

$||T_N(x)||_q \ll \left(\sum\limits_{\nu=0}^{n+1} ||\big(V_{2^\nu}(T_N) - V_{[2^{\nu-1}]}(T_N)\big)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x)||_p^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \ll$

$N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||T_N(x)||_p$.

Покажем, что в соотношениях $||T_N^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x)||_p \ll N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||T_N(x)||_p$, $\left(\sum_{\nu=0}^{n+1}||\left(V_{2^\nu}(T_N) - V_{[2^{\nu-1}]}(T_N)\right)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x)||_p^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \ll N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||T_N(x)||_p$ знак $\ll$ нельзя заменить на $\asymp$.

1) Пусть $1 < p < q < \infty$ и $T_N(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{q}}}\cos(\nu x)$. Тогда $||T_N^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||_p \asymp \ln^{\frac{1}{p}}(N+1)$. В то же время $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||T_N||_p \asymp N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

2) Пусть $1 = p < q = \infty$ и $T_N(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\nu}(\cos(\nu x)+\sin(\nu x))$. Тогда $||T_N^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||_1 \asymp \ln(N+1)$. В то же время $N||T_N||_1 \asymp N$.

3) Пусть $1 = p < q < \infty$ и $T_N(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\nu^{2-\frac{1}{q}}}\sin\nu x$.Тогда $\left(\sum_{\nu=0}^{n+1}||V_{2^\nu}(T_N^{(1-\frac{1}{q})}) - V_{[2^{\nu-1}]}(T_N^{(1-\frac{1}{q})})||_1^q\right)^{\frac{1}{q}} \ll \ln^{\frac{1}{q}}(N+1)$. В то же время $N||T_N||_1 = N||T_N(x)||_1 \gg N$.

4) Пусть $1 < p < q = \infty$ и $T_N(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\nu}\cos(\nu x)$. Тогда $\sum_{\nu=0}^{n+1}||V_{2^\nu}(T_N^{(\frac{1}{p})}) - V_{[2^{\nu-1}]}(T_N^{(\frac{1}{p})})||_p \ll \ln(N+1)$. В то же время $N||T_N(x)||_p \gg N$.

Литература

[1] М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов, О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках, Вестн. Моск. ун-та, Математика. Механика, 2009, N 3, с. 17-25.

[2] S.Tikhonov, Weak type inequalities for moduli of smoothness the case of limit value parameters, J. Fourier Anal. Appl., 2010, V. 16, Is. 4, p. 590 - 608 .

[3] П.Л. Ульянов, Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье, Матем. сб., 1967, т. 72 (114), с. 193 - 225.

[4] П.Л. Ульянов, Вложение некоторых классов функций H_p^ω, Изв. АНСССР, сер. мат. мех., 1968, т. 32, N 3, с. 649 - 686.

О ПОСТРОЕНИИ ПРИМЕРОВ О. Н. С., УСТАНАВЛИВАЮЩИХ ТОЧНОСТЬ ТЕОРЕМЫ МЕНЬШОВА–РАДЕМАХЕРА [1]

Солодов А.П. (Москва)
apsolodov@mail.ru

Рассматривается задача о сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам. Классический пример Д. Е. Меньшова О. Н. С., устанавливающий точность множителя Вейля $\log_2^2 n$ в теореме Меньшова–Радемахера, опирается на свойства матрицы Гильберта $\left\{\frac{1}{i-j}\right\}$. Первый пример, не использующий матрицу Гильберта, был построен А. Паскевичем [1]. Аналогия примеров Паскевича и Меньшова, а также ряд обобщений примера Паскевича был исследованы в [2].

Здесь будет предложен еще один метод, при помощи которого можно возможно построение О. Н. С. со свойствами системы Меньшова. Пусть функция $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Обозначим $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} f(x)dx$, $c_n^+(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{inx} f(x)dx$. Справедлива следующая

Теорема. Пусть для последовательности периодических функций $f_N \in L_2[-\pi, \pi]$, найдутся последовательность $\omega_N \to +\infty$ и число $C_1 > 0$ такие, что выполнены условия:

$$\sup_x \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| c_n(f_N) \right|^2 e^{inx} \right| \leqslant 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| c_n^+(f_N) \right|^2 e^{inx} \right| \geqslant C_1 \omega_N.$$

Тогда существует $C_2 > 0$ такая, что для каждого N система функций
$\left\{\varphi_n = f_N(x - \frac{2\pi n}{N})\right\}_{n=1}^{N}$ — почти О. Н. С. и для некоторого набора коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^N$ справедлива оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi} \max_j \left| \sum_{n=1}^{j} a_n \varphi_n(x) \right|^2 dx \geqslant C_2 \omega_N \sum_{n=1}^{N} a_n^2.$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта НШ-3252.2010.1

Под словами "почти О. Н. С." мы понимаем возможность продолжения функций системы с отрезка $[-\pi, \pi]$ на более широкий отрезок до О. Н. С.

Литература

1. Paskiewich A., “A new proof of Menshov–Rademacher theorem”, Acta Sci. Math.

2. Солодов А. П., “Об одном примере Паскевича”, Матем. заметки, 78:2 (2005), 286–291.

НАИЛУЧШЕЕ m-ЧЛЕННОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССА $B^{1/2}_{p,\theta}$

Стасюк С.А. (Киев)

stasyuk@imath.kiev.ua

Пусть L_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — пространство Лебега 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ со стандартной нормой $||\cdot||_q$. Объектом исследований являются классы Никольского–Бесова $B^r_{p,\theta}$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbf{R}^d$, $0 < r_1 = \cdots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_d$. В случае $1 < p < \infty$ классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом (см. [1]):

$$B^r_{p,\theta} = \{f \in L_p : ||f||_{B^r_{p,\theta}} \leqslant 1\},$$

где

$$||f||_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s>0} \left(2^{(r,s)} ||\delta_s(f, \cdot)||_p \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leqslant \theta < \infty,$$

$$||f||_{H^r_p} = ||f||_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s>0} 2^{(r,s)} ||\delta_s(f, \cdot)||_p,$$

а $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbf{N}^d$, $(r, s) = r_1 s_1 + \cdots + r_d s_d$, $\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$, $\rho(s) = \{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbf{Z}^d :\ 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}\}$, $\hat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье f.

Мы ставим целью установить слабую асимптотику величины наилучшего m-членного тригонометрического приближения классов $B^r_{p,\theta}$, которая определяется согласно формуле

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \inf_{k^j \in \mathbf{Z}^d,\, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^m c_j\, e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $2 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r_1 = 1/2$, *тогда*

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{1}{2}} \left(\log m\right)^{\nu\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Приведенная теорема дополняет результаты, которые получены в [2] при других ограничениях на параметры p, q, θ и r_1.

Литература

1. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН. — 1989. — Т. 187. — С. 143 – 161.

2. Романюк А. С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Известия РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 76, N 2. — С. 61–100.

МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ СИТУАЦИОННЫХ КОНФЛИКТОВ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Сухоруков Ю.С., Меркулов С.Н., Житенёв С.А.

Анализ практики управления сложными организационно-техническими системами (ОТС) военного назначения, предназначенными для применения в конфликтных ситуациях, показывает насущную потребность обеспечения автоматизации управления, как целостного процесса, протекающего в реальном масштабе времени. При проектировании и совершенствовании систем управления (СУ) возникает необходимость объективной оценки эффективности вариантов разнородных технических решений по их построению.

В соответствии с основами теории управления СУ являются организационно-технической основой процессов управления ОТС, основной целью которых в ходе применения ОТС в конфликтах является обеспечение успешного выполнения поставленных перед ОТС задач. В антагонистических конфликтах выполнение ОТС задач, как правило, связано с нанесением противнику заданного ущерба (потерь) с минимальными собственными потерями. Поэтому наиболее полно всю совокупность свойств СУ будут характеризовать потери сил и средств ОТС сторон после выполнения соответствующих задач и их изменения за счёт реализации варианта технических решений по построению СУ.

Проводится анализ известных подходов к моделированию конфликта сложных систем. Показывается, что они не в полной мере учитывают процессы управления сторон.

Предлагается метод для оценки влияния процессов оперативного управления на результаты ситуационного конфликта ОТС. Описываются основные положения метода. Метод основан на аппроксимации динамики действий ОТС в конфликте ветвящимся полумарковским случайным процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем, ветви которого – ситуации конфликта, комбинации возможного развития конфликта ОТС в зависимости от упреждения во времени другой стороны по оперативному управлению и физическим воздействиям (ударам). Промежуточными являются состояния, соответствующие частным выигрышам (упреждениям по времени) в совершении действий по оперативному управлению, предшествующих ударам, а конечные состояния соответствуют исходам конфликта с учетом начала и продолжительности нанесения ударов. Метод, несмотря на усложнение аналитического описания, позволяет в полной мере отразить случайный характер и взаимозависимость процессов управления и действий ОТС при нанесении ОТС сторон упреждающих ударов.

Возможности метода иллюстрируются примерами.

МЕТОД НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ ГЛАДКОСТИ: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Таныгина А.Н. (Минск)
anast-minsk@yandex.ru

Одним из наиболее эффективных приближенных методов решения операторных уравнений вида

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f : X \to Y$ — нелинейное отображение, дифференцируемое в каждой внутренней точке выпуклого множества $D \subset X$, X и Y — банаховы пространства, является метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{2}$$

где x_0 — известное начальное приближение.

В работах ряда специалистов [1] при различных предположениях и в различных терминах были получены оценки скорости сходимости метода (2). Среди рассмотренных можно выделить случаи, когда производная f' оператора f удовлетворяет условиям Липшица, Гельдера, а также обобщающему их условию *ω-гладкости*:

$$\|f'(x_2) - f'(x_1)\| \leqslant \omega(\|x_2 - x_1\|), \quad \forall\, x_1,\ x_2 \in D,$$

где $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — монотонно возрастающая функция, $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = 0$.

Однако, как отмечается в работах [2, 3], полученные при таких предположениях результаты являются во многих отношениях неудовлетворительными, а условие ω-гладкости представляет собой слишком "грубый" инструмент для анализа сходимости метода (2). Это привело авторов указанных работ к рассмотрению более ограничительного условия гладкости, называемого *регулярной гладкостью.*

Пусть $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — непрерывная строго монотонно возрастающая вогнутая функция, причем $\omega(0) = 0$; $\mathcal{N}$ — класс функций, обладающих такими свойствами; $h(f) = \inf\limits_{x \in D} \|f'(x)\|$. Оператор f называется *ω-регулярно гладким* на D, если существует число $h \in [0, h(f)]$ такое, что для любых x_1, $x_2 \in D$ имеет место неравенство

$$\omega^{-1}\left(h_f(x_1, x_2) + \|f'(x_2) - f'(x_1)\|\right) - \omega^{-1}\left(h_f(x_1, x_2)\right) \leqslant \|x_2 - x_1\|,$$

где $h_f(x_1, x_2) = \min\{\|f'(x_1)\|, \|f'(x_2)\|\} - h$. Оператор f называется *регулярно гладким* на D, если он является ω-регулярно гладким на D для некоторого $\omega \in \mathcal{N}$.

Как показали вычисления, выполненные в системе Mathematica для функции числового аргумента $f(x) = x + \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} - 3$ с $\omega(t) = \sqrt{2t}$, оценки последовательных приближений, полученные в [2, 3] при предположении регулярной гладкости функции f, являются более точными по сравнению с оценками, полученными в [1] при предположении ее ω-гладкости.

Литература

1. Лысенко Ю.В. Новые условия сходимости метода Ньютона–Канторовича и некоторые их приложения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. – Минск, 1993. – 129 л.

2. Galperin A., Waksman Z. Newton's method under a weak smoothness assumption // J. Comp. Appl. Math. – 1991. – Vol. 35. – P. 207–215.

3. Galperin A., Waksman Z. Regular smoothness and Newton's method // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1994. – Vol. 15, № 7&8. – P. 813–858.

ОБ УРАВНЕНИИ ЛАПЛАСА ВДОЛЬ ТРЕХ ПРЯМЫХ[1]

Теляковский Д.С. (Москва)

dtelyakov@mail.ru

Будем говорить, что функция $u(z) = u(x, y)$ дважды дифференцируема в смысле Пеано в точке ζ вдоль прямой l, $\zeta \in l$, если найдутся числа a_l и b_l для которых выполнено следующее условие

$$u(z) = u(\zeta) + a_l h + \frac{b_l}{2} h^2 + o(h^2) \text{ при } z \to \zeta, z \in l,$$

где h — координата точки z прямой l. Числа a_l и b_l называются соответственно первой и второй пеановскими производными функции $u(z)$ в точке ζ вдоль l. Пусть в точке ζ функция $u(z)$ дважды дифференцируема по Пеано вдоль трёх пересекающихся в ζ прямых l_1, l_2, l_3, причём прямые занумерованы против часовой стрелки, а $\alpha_{j,j+1}$ — угол между прямыми l_j и l_{j+1}. Будем говорить, что функция $u(z)$ удовлетворяет в точке ζ уравнению Лапласа вдоль прямых l_1, l_2, l_3, если выполнено равенство

$$b_1 \sin 2\alpha_{1,2} + b_2 \sin 2\alpha_{2,3} + b_3 \sin 2\alpha_{3,1} = 0.$$

Если функция $u(z)$ суммируема в области G и в каждой точке области удовлетворяет уравнению Лапласа относительно некоторой тройки прямых, причём все образованные этими прямыми углы меньше $\pi/2$, то функция $u(z)$ является в G гармонической. Если же, кроме выполнения уравнения Лапласа, на прямых из тройки наложить на функцию следующее более жёсткое условие дифференцируемости

$$u(z) = u(\zeta) + a_l h + \frac{b_l}{2} h^2 + o(h^{2+\varepsilon}) \text{ при } z \to \zeta, z \in l, \qquad (*)$$

где $\varepsilon > 0$, то условие на величины углов снимается.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта АВЦП 2.1.1/6827 и гос. контрактов с Рособразованием П268 и П943.

Теорема. *Пусть функция $u(z)$ в каждой точке ζ области G удовлетворяет уравнению Лапласа относительно некоторой тройки прямых, причем вдоль каждой прямой выполнено условие дифференцируемости $(*)$ и $u^2(z)$ суммируема в G. Тогда функция $u(z)$ гармонична в G.*

ОЦЕНКА ОДНОВРЕМЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ[1]

Теляковский С.А. (Москва)

sergeyAltel@jandex.ru

Работа [1] посвящена следующей задаче об одновременном приближении функций класса $W^r H[\omega]$ и их производных суммами Фурье.

Для фиксированного набора m целых чисел $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant r$ требуется выяснить поведение при $n \to \infty$ величины

$$E_n^{(m)}(W^r H[\omega], S_n, x) := \sup_{f \in W^r H[\omega]} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n^{k_i}} \left| f^{k_i}(x) - S_n(f^{k_i}, x) \right|.$$

Приведенная в [1] оценка не является равномерной относительно параметров, в частности, относительно существенного в этой задаче параметра m.

В настоящем сообщении даётся оценка сверху указанной величины для класса W^r. Например, если в качестве чисел k_i взяты числа от $r - m + 1$ до r, то при $r \leqslant n$

$$E_n^{(m)}(W^r, S_n, x) \leqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{m}{n^r} \log \frac{n}{m} + O\left(\frac{m}{n^r}\right)$$

равномерно относительно всех параметров.

Литература

1. А.И. Степанец, Одновременное приближение функций и их производных суммами Фурье // Доклады АН СССР, 1980, т. 254, 543 – 544.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08 – 01 – 00598).

СВОЙСТВО КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ БАНАХОВЫХ ФРЕЙМОВ[2]

Терехин П.А. (Саратов)

terekhinpa@info.sgu.ru

Пусть X - банахово пространство последовательностей с естественным базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и F - некоторое банахово пространство.

Определение ([1]). Говорят, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ обладает *свойством квантования* или является *квантовой* (ε, δ, C)*-сетью относительно* X, если найдутся постоянные $\varepsilon, \delta > 0$ и $C \geqslant 1$ такие, что для любого $f \in F$ существует конечный набор целых чисел $\{m_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{Z}$, удовлетворяющий ограничению

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} m_k \delta e_k \right\|_X \leqslant C \|f\|_F$$

и неравенству

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} m_k \delta \varphi_k \right\|_F < \varepsilon.$$

Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по *стандартному представлению* $n = 2^j + k$, где $j = 0, 1, \dots$ и $k = 0, \dots, 2^j - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{j,k}(t) = \varphi(2^j t - k).$$

Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называтся *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ.

Теорема. *Аффинная система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, *обладает свойством квантования в том и только том случае, когда порождающая функция* φ *имеет отличный от нуля интеграл* $\int_0^1 \varphi(t)\, dt \neq 0$.

Литература

[1] P. G. Casazza, S. J. Dilworth, E. Odell, Th. Schlumprecht, A. Zsak, “Coefficient quantization for frames in Banach spaces”, J. Math. Anal. Appl., **348** (2008), 66–86.

[2]Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ для ведущих научных школ, проект НШ-4383.2010.1, и молодых ученых, проект МК-346.2009.1, а также Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00097а.

K-МОНОТОННЫЕ ВЕСОВЫЕ ПАРЫ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

Тихомиров К.Е. (Самара)
ktikhomirov@yandex.ru

Пусть X — банахова решетка функций, определенных на пространстве с мерой (T, Σ, μ). Пусть также w — строго положительная почти всюду конечная функция на T. Через $X(w)$ обозначим *весовое пространство*, содержащее все функции x, для которых $xw \in X$, с нормой $\|x\|_{X(w)} := \|xw\|_X$. K-функционал Петре на сумме $X + X(w)$ определяется по хорошо известной формуле

$$K(s, x, X, X(w)) := \inf_{x=x_0+x_1} \{\|x_0\|_X + s\|x_1\|_{X(w)}\}. \tag{1}$$

Рассмотрим следующий вопрос: при каких условиях на X и w все интерполяционные пространства пары $(X, X(w))$ можно описать K-методом (другими словами, пара $(X, X(w))$ — пара Кальдерона–Митягина, или K-монотонная пара)? Эта проблема подробно рассматривалась Цвикелем и Нильссоном; также значительный вклад в ее решение был сделан Калтоном в работе, посвященной K-монотонным парам симметричных банаховых решеток. Обобщение результатов Калтона позволяет доказать критерий K-монотонности пары $(X, X(w))$ при условии, что решетка X обладает свойством Фату и является *"насыщенной"*. Оказывается, что K-монотонность в этом случае эквивалентна так называемому свойству *w-разложимости* [1], являющемуся обобщением свойств RSP и LSP, введенных Калтоном. Этот критерий позволяет получить интересные следствия для симметричных пространств [2]. Оказывается, что при достаточно "слабых" дополнительных условиях K-монотонность $(X, X(w))$ для некоторого нетривиального (то есть, не эквивалентного единице) веса w, где X — пространство Лоренца, Орлича или Марцинкевича на отрезке $[0; 1]$, предполагает, что фундаментальная функция X является *регулярно меняющейся* (regularly varying).

Литература

[1] *К.Е. Тихомиров.* K-монотонные весовые пары банаховых решеток (планируется публикация).

[2] *S.V. Astashkin, L. Maligranda, K.E. Tikhomirov.* New examples of K-monotone weighted Banach couples (to appear).

ДОБАВЛЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ПОПОВИЧУ О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНА[1]

Тонков В.О. (Москва)
votonkov@mail.ru

Эссен [1] доказал, что наименьшее возможное для непрерывных неравных константе на $[0,1]$ функций f значения величины

$$\varlimsup_{n\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \frac{|f(x)-B_n(f,x)|}{\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \tag{1}$$

равно

$$C = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)(\Phi(2\nu+2)-\Phi(2\nu)) = 1,045564\ldots\,, \tag{2}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt,$$

и это значение C не может быть улучшено.

Условие на функцию f здесь можно ослабить и вместо непрерывности f на $[0,\ 1]$ предполагать, что в точке x для всех t таких, что точки $x+t$ принадлежат $[0,1]$ имеет место оценка

$$|f(x)-f(x+t)| \leqslant \omega(|t|), \tag{3}$$

где $\omega(\delta)$ – некоторый модуль непрерывности. Тогда если в (1) вместо максимума по x брать уклонение в фиксированной точке x, а в знаменателе $\omega\left(f,1/\sqrt{n}\right)$ заменить на $\omega\left(1/\sqrt{n}\right)$, то наименьшее значение максимума по x полученной величины также равно C.

При том же условии (3) на f показано, что максимум по x предела

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|f(x)-B_n(f,x)|}{\omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)} \tag{4}$$

не превосходит величины

$$L = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)(\Phi(\nu+1)-\Phi(\nu)) = 1,365574\ldots, \tag{5}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00598).

и это значение L не может быть улучшено.

Литература

1. *C.G. Esseen* Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen. Numerische Mathematik **2**, 206-213, 1960.

О ТИХОНОВСКИХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛОСЕ

Туртин Д.В. (Иваново)

Turtin@mail.ivanovo.ac.ru

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^m U(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{j=0}^{m-1} P_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^j U(x,t)}{\partial t^j} \tag{1}$$

($U(x,t)$ — неизвестная $(s \times s)$ - матрица, $P_j(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{k=0}^{n_j} P_{jk}(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ($j = \overline{0, m-1}$), элементы матриц $P_{jk}(x)$ — комплекснозначные функции) с начальными условиями

$$\frac{\partial^j U(x,t)}{\partial t^j} \mid_{t=0} = F_j(x) \quad (j = \overline{0, m-1}) \tag{2}$$

в полосе $\Pi_T = \{(x,t): -\infty < x < \infty, \, 0 \leqslant t < T\}$.

Доказана теорема единственности "типа Тихонова" задачи Коши (1)-(2). А именно, если p_0 — приведенный порядок системы (1) и $p_0^{'}$ — двойственное по Юнгу к p_0 число $\left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0^{'}} = 1\right)$, то задача Коши (1)-(2) имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\left\| \frac{\partial^{k+j} U(x,t)}{\partial x^k \partial t^j} \right\| \leqslant c_1 e^{c_2 |x|^{p_0^{'}}}$$

($(x,t) \in \Pi_T$, $j = \overline{0, m-1}$, $k = \overline{0, n-1}$, $n = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant m-1} n_j$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$).

Данный результат обобщает теорему единственности, доказанную в [1]. Доказательство опирается на полученную ранее [2] автором асимптотику фундаментальной системы решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

Литература

1. Палюткин В.Г. Классы единственности решения задачи Коши уравнений с переменными коэффициентами // Мат. заметки. - 1979. - Т. 26. - Вып. 6. - с. 835-844.

2. Туртин Д.В. Асимптотика решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром // Математика и ее приложения. Журнал Ивановского математического общества. - 2006. - Вып. 1(3). - с. 67-80.

ИЗ ЖИЗНИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ВОРОНЕЖСКОГО УНИВЕРСИТЕТА НАЧАЛА 30-Х ГОДОВ ПРОШЛОГО СТОЛЕТИЯ

Удоденко Н.Н. (Воронеж)

В докладе будет рассказано о событиях, происшедших в период с 1930 по 1935 годы. Эти события связаны с реформой системы высшего образования, предпринятой руководством страны и затронувшей Воронежский университет, возрождением физико-математического факультета университета и репрессиями, начавшимися после убийства 1 декабря 1934 года С.М. Кирова, которые затронули ряд преподавателей физмата. Подробному изложению этх событий посвящена работа [1].

Литература

1. Удоденко Н.Н. Некоторые страницы из истории физико-математического факультета Воронежского университета 30-х годов 20 века / Н.Н. Удоденко // Актуальные проблемы математики и информатики. - 2010. - вып. 2. - с. 122-136.

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ, НЕРАЗРЕШЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Фам Туан Кыонг (Воронеж)
tuancuonghd@yahoo.com

Рассматривается полностью наблюдаемая система:

$$E\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + f(t), \tag{1}$$

$$B\bar{x}(t) = F(t), \tag{2}$$

где $E, A : R^n \to R^m,\ B(t) : R^n \to R^k,\ t \in [0, T]$, T - конечно или бесконечно, $x(t) \in R^n$, $f(t) \in R^n$, $F(t) \in R^k$.
Вектор-функция $x(t)$ называется вектором состояний системы, $f(t)$ и $F(t)$ – входной и выходной функциями, соответственно.

Система (1), (2) называется полностью наблюдаемой, если по известным входной и выходной функциям состояние системы определяется однозначно.

Исходная система возмущается с помощью произвольных матриц G_1, G_2, G_3 соответствующих размеров:

$$(E + G_1 B)\frac{dx(t)}{dt} = (A + G_2 B)x(t) + (I + G_3 B)f(t), \tag{3}$$

$$Bx(t) = F(t). \tag{4}$$

Полная наблюдаемость исходной и возмущенной систем выявляется методом каскадного расщепления исходных пространств на подпространства (этот метод применялся ранее в работах [1], [2] для исследования полной наблюдаемости различных систем в случае $E = I$).

В работе устанавливаются условия инвариантности системы (1), (2) относительно возмущений указанного типа. Также решается задача наблюдения для указанных систем, а именно:
1) находятся связи между входными и выходными функциями, которые необходимы и достаточны для реализации процесов, описываемых системами (1),(2) и (3),(4);
2) устанавливается единственность состояния $\bar{x}(t)$ и $x(t)$ систем (1),(2) и (3),(4), соответственно;
3) выводятся формулы для $\bar{x}(t)$ и $x(t)$.

Литература

1. Зубова С.П. Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы /С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Воронежского государственного технологического университета. Воронеж; 2010 том 6, № 8, С. 82–86.

2. Раецкая Е. В. Построение управления для полной наблюдаемости одной динамической системы / Е.В. Раецкая, С.П. Зубова // Математические методы и приложения. Труды шестнадцатых математических чтений РГСУ (31 января - 3 февраля 2007 года).–М: 2007. С.49–53.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Феоктистов В.В., Мякинник О.О. (Москва)

pfeoktis@mail.ru, olga.mknk@ipmtel.ru

Модель волнового взаимодействия, которая включает в себя

$$A_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in N_0; A = \sum_{k=1}^{s} A_k \cdot \partial_{x_k},\ x = (x_1, \ldots, x_s); \exp(At);$$
$$X_k^{\alpha_k}, \quad X_k = (Ix_k + tA_k); W_p^\alpha,$$
$$W_p^\alpha \equiv W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_p^{\alpha_p}),\ p = \overline{1, s}; \vec{\varphi}(x) \tag{1}$$

(где A_k — числовые квадратные некоммутативные, вообще говоря, матрицы размера $n \times n$, I — единичная матрица; X_k — бегущие волны; W_p^α — оператор волнового взаимодействия размерности p порядка $\|\alpha\|$, результатом действия которого является сумма всех возможных произведений волн-аргументов; $\vec{\varphi}(x)$ — n-мерная локально-аналитическая в R^s функция, рассматриваемая как начальное состояние $W_0^\alpha(x)$ оператора W_s^α) и построена в [1]–[2] для системы

$$I \cdot \partial_t = A\,\vec{B}(t, x) \tag{2}$$

(где $\vec{B}(t, x)$ — неизвестная n-мерная вектор-функция в $R^s \times [0; T]$), предлагается использовать для представления решения смешанной задачи для системы однородных уравнений Максвелла (3)–(4)

$$\begin{aligned} \partial\vec{E}/\partial t &= \operatorname{rot}\vec{H} \\ \partial\vec{H}/\partial t &= -\operatorname{rot}\vec{E} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{H} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{E} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

с аналитическими в окрестности точки x_0 начальными данными (5) и условием (6) на касательную составляющую вектора $\vec{E}$ на гладкой идеально-проводящей поверхности S, ограничивающей область Ω, $\Omega \subset R^3$:

$$\vec{E}(t, x)\,|_{t=0} = \vec{\varphi}_E(x)\ , \quad \vec{H}(t, x)\,|_{t=0} = \vec{\varphi}_H(x)\ , \quad (\vec{\varphi}_E, \vec{\varphi}_H)^\top = \vec{\varphi}(x) \tag{5}$$

$$\vec{E}_\tau\,|_S = 0. \tag{6}$$

Воспользуемся ортогональным разложением Вейля [3] для гильбертова пространства $L_2(\Omega)$:

$$L_2(\Omega) = \dot{\Re}(\mathrm{grad}\,)\oplus U\oplus\dot{\Re}(\mathrm{rot}\,) = \Re(\mathrm{grad}\,)\oplus\dot{\Re}(\mathrm{rot}\,) = \dot{\Re}(\mathrm{grad}\,)\oplus\Re(\mathrm{rot}\,), \tag{7}$$

где $\Re(\ )$ — область значений, заключенного в скобки оператора, точка над знаком $\Re$ означает, что функции из области определения оператора подчинены нулеым граничным условиям, U — замыкание множества градиентов гармонических функций. Тогда, зная [1]–[2] разложение в ряд по бегущим волнам решения $\exp(At)\vec{\varphi}(x)$ системы (3) с начальным условием (5), для удовлетворения условия соленоидальности (4) и условия на границе (6) следует выполнить проектирование в соответствующее подпространство Вейля:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(t,x) = {} & (\vec{E}(t,x), \vec{H}(t,x))^\top = & (8)\\
= {} & \exp(At)\,(P_{\Re(\mathrm{rot}\,)}\vec{\varphi}_E(x),\ P_{\dot{\Re}(\mathrm{rot}\,)}\vec{\varphi}_H(x))^\top = & \\
= {} & \sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty} \frac{1}{\|\alpha\|!}\, W_3^\alpha \cdot \partial_\alpha\,(P_{\Re(\mathrm{rot}\,)}\vec{\varphi}_E,\ P_{\dot{\Re}(\mathrm{rot}\,)}\vec{\varphi}_H)^\top\Big|_{x=x_0}, & (9)\\
& W_3^\alpha = W_3^\alpha(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, X_3^{\alpha_3}), & (10)
\end{aligned}$$

где, в соответствии с (1), A — оператор, заданный блочными числовыми матрицами A_k размера 6×6, $k=\overline{1,3}$, которые построены по оператору rot и сопряженному с ним оператору $(-\mathrm{rot}\,)$; W_3^α — операторы волнового взаимодействия размерности 3; $P_{\Re(\mathrm{rot}\,)}$ и $P_{\dot{\Re}(\mathrm{rot}\,)}$ операторы проектирования.

Литература

[1] Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Структура ряда для решения системы уравнений с частными производными 1-го порядка // Вестник МГТУ. Серия "Естественные науки". — 2009. No 4 . — С. 3–22.

[2] Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Оператор волнового взаимодействия и нормальная форма системы линейных уравнений в частных производных 1-го порядка // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXI". — Воронеж, 2010. — С. 232–233.

[3] Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала

// Герман Вейль. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. — 1984.— С. 275–308.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВЕСОВЫХ ЛИУВИЛЛЕВСКИХ КЛАССОВ $L_p^{r,\gamma}$

Феоктистова А.А. (Липецк)
alek-feoktistova@yandex.ru

Будем рассматривать функции, определенные в части евклидова пространства точек $R_N^+ = R_n \times R_{N-n}$ и $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m \leqslant N$. Введем обозначения

$$u{=}(x,y){\in}R_N^+, \quad x{=}(u_1,\ldots,u_n){\in}R_n^+, \quad y{=}(u_{n+1},\ldots,u_N){\in}R_{N-n}^+.$$

Каждая из переменных x и y, в свою очередь разбита на части

$$x{=}(x',x''), \quad y=(y',y''),$$

$$x'{=}(u_1,\ldots,u_k), \quad x''{=}(u_{k+1},\ldots,u_n),$$

$$y'{=}(u_{n+1},\ldots,u_{n+m}), \quad y''{=}(u_{n+m+1},\ldots,u_N).$$

Через $S_{ev} = S_{ev}(R_N^+)$ обозначим подпространство пространства Шварца основных функций $S(R_n)$, состоящее из функций, четных по каждой из весовых переменных u_i и u_j, $i = 1, \ \ldots \ ,k$ и $j = n+1, \ \ldots \ ,n+m$.

В работе используются, так называемые, малые функции Бесселя j_ν, связанные с функциями Бесселя первого рода J_ν равенством $j_\nu(t) = \frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\,J_\nu(t)$.

Рассмотрим случай только для части переменных x.

Смешанное преобразование Фурье-Бесселя по переменным x определяется соответственно формулой

$$\widehat{\varphi}^x(\xi,y) = (F_B)_x[\varphi](\xi,y) =$$

$$= \int\limits_{R_n^+} \varphi(x,y) \prod_{i=1}^k j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(u_i\xi_i)\ e^{-i\langle x'',\xi''\rangle} \prod_{i=1}^k {u_i}^{\gamma_i} dx,$$

Как известно (см. [2]), это преобразование обратимо в классе функций S_{ev} и, соответсвенно, обратное емупреобразование определяется выражением

$$\varphi(u){=}(F_B^{-1})_\xi[\hat{\varphi}^x](u) =$$

$$= 2^{k-|\gamma_1|}(2\pi)^{k-N}\prod_{i=1}^{k}\Gamma^{-2}\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)(F_B)_x[\hat{\varphi}^x](-x,y),$$

Введем операцию

$$F = I_{B,xr}f = (F_B^{-1})_\xi\left[(1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2}}(F_B)_x[f]\right] = \\ = F_B^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[f]\right], \quad (1)$$

$\left(|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ I_{B,xr} = I_{B,r} \text{ при } n = N,\ f \in S'_{ev}\right)$, соответствующую действительному числу r, отображающую S'_{ev} на S'_{ev} взаимно однозначно. Мы также рассмотрим подобные операции на координатных осях. Если выбрана ось u_j , то операцию (1) обозначим через I_{B,u_jr}.

Лемма. *Для функции* $f \in L_p^\gamma = L_p^\gamma(R_N)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *операция* $I_{B,xr}$ *при* $r > 0$ *сводится к обобщенной свертке*

$$F = I_{B,xr}f = \int\limits_{R_n^+} f(s,y)T_s^x G_r^\gamma(s)s^{\gamma_1}ds, \quad (2)$$

где ядро G_r^γ *имеет своим образом Фурье-Бесселя функцию*

$$(F_B)_x[G_r^\gamma](\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2}}.$$

Определение: *Функция* $F \in S'_{ev}$ *принадлежит к весовому лиувиллевскому классу*

$$L_{xp}^{r,\gamma} = L_{xp}^{r,\gamma}(R_N^+), \quad L_{u_jp}^{r,\gamma} = L_{u_jp}^{r,\gamma}(R_N^+), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ -\infty < r < +\infty,$$

если она представима соотвественно в виде

$$F = I_{B,xr}f,\ \ F = I_{B,u_jr}f,$$

где $f \in L_p^\gamma$. *При этом вводятся нормы* $\|F\|_{L_{xp}^{r,\gamma}} = \|f\|_{L_p^\gamma}$, *в частности,* $\|F\|_{L_{u_jp}^{r,\gamma}} = \|f\|_{L_p^\gamma}$, *указывающие на изоморфизмы*

$$I_{B,xr}(L_p) = L_{xp}^r,\ \ I_{B,u_jr}(L_p) = L_{u_jp}^r,$$

осуществляемые операциями $I_{B,xr}$, I_{B,u_jr}. *Класс* $L_{xp}^{\bar{r},\gamma} = L_{xp}^{\bar{r},\gamma}(R_N^+)$, *соответствующий произвольному действительному вектору* $\bar{r}$, *определяется как пересечение*

$$L_{xp}^{\bar{r},\gamma} = \bigcap_{j=1}^{n} L_{u_jp}^{r_j,\gamma}$$

с нормой

$$\|f\|_{L^{\bar{r},\gamma}_{xp}} = \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{L^{r_j,\gamma}_{u_j p}}.$$

$L^{r,\gamma}_{xp}$ можно определить еще как класс функций, представимых в виде интеграла (2), где $f \in L^{\gamma}_{p}(R^{+}_{N})$.

Теорема: *При* $1 < p < \infty$ *пространства* $L^{r,\gamma}_{xp} = L^{r,\ldots,r,\gamma}_{xp}$, $L^{r,\gamma}_{xp}$ *и* $W^{r,\gamma}_{xp} = W^{r,\ldots,r,\gamma}_{xp}$ $(r = 1, 2, \ldots)$, $L^{\bar{r},\gamma}_{xp}$ *и* $W^{\bar{r},\gamma}_{xp}$ *совпадают.*

$$L^{r,\gamma}_{xp} = L^{r,\ldots,r,\gamma}_{xp}, \tag{3}$$

$$L^{r,\gamma}_{xp} = W^{r,\gamma}_{xp} = W^{r,\ldots,r,\gamma}_{xp} \ \ (r = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$$L^{\bar{r},\gamma}_{xp} = W^{\bar{r},\gamma}_{xp} \ \ (\bar{r} = (r_1, \ldots, r_n), r_i > 0). \tag{5}$$

Литература

[1] Ляхов, Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В - потенциальными ядрами / Л. Н. Ляхов. — Липецк: ЛГПУ, 2007. — 232 с.

[2] Киприянов, И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М.: Наука, 1997. — 199 с.

[3] Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.:Наука, 1977. — 436 с.

О СВОЙСТВАХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПЛОСКОГО ТОРА

Фильчаков С.В. (Курск)

sergeifil@gmail.com

Вводится понятие параллельного векторного поля на группе соболевских H^s-диффеоморфизмов плоского n-мерного тора, $s > \frac{n}{2} + 1$. Доказывается теорема существования интегральных кривых параллельных векторных полей.

Мы исследуем векторные поля на группе $D^s(T^n)$ соболевских H^s-диффеоморфизмов плоского n-мерного тора T^n, $s > \frac{n}{2}+1$. Необходимые предварительные сведения о структуре гильбертова многообразия и структуре группы на этих пространствах имеются в [1,2].

На $D^s(T^n)$, кроме упомянутой выше алгебраической структуры, имеется дополнительная структура, порожденная абсолютным параллелизмом касательного расслоения на торе. Эта структура описывается следующим образом (см., например, [2]).

Введем операторы:

(i) $B : T\mathcal{T}^n \to R^n$, проекция на второй сомножитель в $TT^n = T^n \times R^n$;

(ii) $A(m) : R^n \to T_m\mathcal{T}^n$, обратное к B (см. (i)) отображение на касательное пространство к T^n в $m \in T^n$;

(iii) $Q_g = A(g(m)) \circ B$ – линейный изоморфизм $Q_g : T_mT^n \to T_{g(m)}T^n$, где $g \in D^s$ и $m \in T^n$.

Определение. Векторное поле X на $D^s(T^n)$ называется параллельным, если в каждой точке $\eta \in D^s(T^n)$ вектор $X_\eta = Q_\eta X_e$, где $X_e \in T_e D^s(T^n)$.

Отметим, что параллельное векторное поле X является инвариантным относительно Q_θ для любого $\theta \in D^s(T^n)$.

Теорема. *Пусть $X(t)$ – кривая в $T_e D^s(T^n)$, измеримая по t, сильная норма которой $\|X(t)\|$ интегрируема по t на каждом конечном промежутке. Пусть $\tilde{X}(t,\eta)$ – соответствующее ей параллельное векторное поле на $D^s(T^n)$. Тогда задача Коши*

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{X}(t,\eta), \qquad \eta(0) = \eta_0 \in D^s(T^n)$$

имеет решение при всех $t \in [0, +\infty)$, причем единственное.

Литература

[1] Эбин Д. Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости / Д. Эбин, Дж. Марсден // Математика (сб. переводов).- 1973.- Т. 17, N 5.- С. 142-167; N 6.- С. 111-146.

[2] Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю.Е. Гликлих.- М.: Комкнига, 2005.- 416 с.

ОБ ОБОЗНАЧЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Фомин В.И. (Тамбов)

kulikov@apmath.tstu.ru

Несмотря на то, что множество иррациональных чисел несчетно, а множество рациональных чисел счетно, т.е. что основную массу вещественных чисел представляют иррациональные числа, отсутствует общепринятое обозначение множества иррациональных чисел, хотя наличие такого обозначения существенно сокращало бы записи рассуждений, в которых для вещественных чисел приходится рассматривать отдельно два случая: когда вещественные числа являются рациональными и когда вещественные числа являются иррациональными. Для других базовых множеств вещественных чисел такие обозначения имеются: $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел (natural - натуральный); $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел (quotient - отношение). Учитывая англ. irrational - иррациональное, естественно использовать для обозначения множества иррациональных чисел символ I, но этот символ уже занят под другие общепринятые обозначения (I - единичный оператор (identity operator), I - интеграл (integral) и т.д.). Вопрос об общепринятом обозначении множества иррациональных чисел остается открытым. В качестве одного из вариантов такого обозначения можно предложить букву Υ (ипсилон) греч. алфавита, ибо 1) иррациональные числа - это принципиально новые математические объекты по сравнению с рациональными числами и для обозначения множества таких объектов можно использовать букву другого алфавита; 2) первая буква в названии Υ совпадает с первой буквой в слове "иррациональное"; 3) символ Υ не задействован в других общепринятых обозначениях. В итоге получаем краткую информативную запись множества вещественных чисел: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \Upsilon$

ОБ ОПЕРАТОРАХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

Фролова Е.В. (Липецк)

lsnn48@mail.ru

Многочисленные задачи математической физики приводятся к уравнениям вида

$$x(t,s) = (Kx)(t,s) + f(t,s),$$

где $K = L + M + N$, $(Lx)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau$, $(Mx)(t,s) = \int_c^S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma$, $(Nx)(t,s) = \int_a^t \int_c^S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau$, $S \in \{s,d\}$, $t,\tau \in \{[a,b],[a,+\infty)\}$, $s,\sigma \in \{[c,d],[c,+\infty)\}$, $D \in \{[a,b] \times [c,d],[a,+\infty) \times [c,d],[a,+\infty) \times [c,+\infty)\}$.

В заметке оператор K и данное уравнение изучаются в пространстве $C(D)$ равномерно непрерывных и ограниченных на D функций.

Теорема 1. *Если оператор K действует в пространстве $C(D)$, то он непрерывен.*

Пусть $\Omega \in \big\{[a,b],[c,d],[a,+\infty),[c,+\infty),D\big\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется непрерывной в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot)-u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ при $|t_1-t_2|$, $|s_1-s_2| < \delta$ и интегрально ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant U < \infty$.

Теорема 2. *Оператор K с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами l,m,n действует в пространстве $C(D)$ и непрерывен.*

Теорема 3. *Уравнение Вольтерра $(S=s)$ с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами l,m,n однозначно разрешимо в $C([a,b]\times[c,d])$.*

Теорема 4. *Уравнение Вольтерра-Фредгольма $(S=d)$ с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами l,m,n однозначно разрешимо в $C([a,b]\times[c,d])$ при условии обратимости оператора $I-M$.*

Пусть l, m, n — непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции и существуют такие числа p,q, что при $t>p$, $s>q$

$$\|l(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon,\ \|m(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon,\ \|n(t,s,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon < 1$. Тогда справедлива

Теорема 5. *При сделанных предположениях уравнение Вольтерра (при дополнительном условии обратимости оператора $I-M$ на каждом конечном прямоугольнике и уравнение Вольтерра-Фредгольма) равносильно в $C([a,+\infty)\times[c,d])$ $(C([a,+\infty)\times[c,+\infty))$ уравнению*

$$x(t,s)=g(t,s)+\int_a^t\int_c^S h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

где $h(t,s,\tau,\sigma)$ — непрерывное в целом и интегрально ограниченное ядро оператора $H=(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}(LM+N)$, $g=(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$.

Если, кроме того, при $t>p, s>q$ $\|h(t,s,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon < 1$, то уравнение Вольтерра (Вольтерра-Фредгольма) однозначно разрешимо в $C([a,+\infty)\times[c,d])$ $(C([a,+\infty)\times[c,+\infty))$, причем

$$x(t,s)=f(t,s)+\int_a^t r_1(t,s,\tau)f(\tau,s)\,d\tau+\int_c^S r_2(t,s,\sigma)f(t,\sigma)\,d\sigma+$$

$$\int_a^t\int_c^S r(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

где r_1, r_2, r — некоторые непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРОБЛЕМЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО СОУДАРЕНИЯ РАЗНОМАСШТАБНЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ[1]

Хорев И.Е., Горельский В.А., Захаров В.М., Климкин К.А., Ярош В.В. (Томск)

khorev@main.tusur.ru

Разрабатывается математическая модель и проводится предварительное математическое моделирование предельных состояний в проблеме высокоскоростного соударения твёрдых тел в пространственной постановке численным методом конечных элементов. В процессе экспериментального изучения высокоскоростных ударных явлений в широком диапазоне скоростей встречи различных ударников и преград Томской школой механиков обнаружены впервые новые неизвестные ранее предельные состояния, появившиеся в процессе пробивания преград конечной толщины ударниками различного удлинения [1, 2, 3]. Они заключаются в следующем. В работе [1] установлено, что в случае высокоскоростного соударения различных бойков (компактных, удлинённых, пуль и снарядов) с достаточно прочными преградами (стальными, титановыми и алюминиевыми) конечной толщины время развития откольного разрушения тыльной поверхности преграды может стать сравнимым с временем проникания бойка или его деформированной части через преграду, в результате чего происходит контактное взаимодействие формирующейся в преграде откольной тарелочки с ударником. При этом в пластичных материалах в откольной тарелочке образуется сквозное отверстие, равное диаметру бойка или его деформированной части, а в достаточно прочных конструкционных материалах (на основе закалённых сплавов из железа, титана и алюминия) откольная тарелочка дробится на фрагменты. Это установлено независимыми экспериментами по рентгенографированию процесса пробивания различными бойками преград и улавливанию тарелочек в специальных устройствах – уловителях (набор преград от кошмы до песка).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10–08–00398 а) и РНП ВШ (рег. №2.1.1/4147).

Дальнейшие систематические исследования этого явления показали, что в достаточно прочных и вязких конструкционных материалах (броневые стали, титановые и алюминиевые сплавы и т.д.) наблюдается дробление откольной тарелочки при контакте с ударником или с его деформированной частью на фрагменты. При этом в процессе разрушения откольной тарелочки образуется только нечётное число фрагментов, одинаковых по конфигурациям (три, пять, семь и т.д.)

В систематических опытах на специальных стендах прослежено дробление откольной тарелочки до одиннадцати фрагментов. Далее процесс улавливания фрагментов осложняется их высокой скоростью (для увеличения числа фрагментов необходимо увеличивать скорость удара или уменьшать толщину преграды). При этом происходит дополнительное (и неизбежное) дальнейшее дробление фрагментов откольной тарелочки при взаимодействии их с градиентным пакетом материала уловителя.

В процессе проведения более тщательных систематических экспериментов по ударному взаимодействию высокопрочных ударников с различными преградами нами было обнаружено новое, ранее не описанное физическое явление, названное авторами "ударно-сдвиговой асимметрией"в процессе разрушения высокопрочных бойков с преградами при ударе.

Установлено, что в случае соударения высокопрочных стальных ударников со стальными преградами характер деформации и разрушения их существенно изменяется при увеличении скорости встречи ударника с преградой [2]. Головная часть уловленного в опытах остатка ударника после взаимодействия с преградой часть напоминает по форме "зубило"(существенно несимметричное разрушение при ударе бойка по нормали к лицевой поверхности преграды). Это неописанное ранее явление названо авторами "ударно-сдвиговой асимметрией". Его нельзя описать в рамках осесимметричной задачи даже при строго осесимметричном взаимодействии ударников с преградами из-за несимметричного разрушения головной части бойков [3].

На рис. 1 показан осевой срез кратера в преграде конечной толщины из стали средней твёрдости (HB 300) толщиной 17 мм и остаток ударника с удлинением 6 калибров ($\lambda = 6$), где λ - отношение длины ударника к его диаметру, непосредственно в кратере. Скорость встречи при строго осесимметричном ударе составляла $V_0 = 1065$ м/с. Параметры цилиндрического ударника составляли:

масса $m = 10.8$ г, диаметр $d = 6.6$ мм, удлинение $\lambda = 6$, материал ударника – сталь 35Х3НМ. Отчётливо видна коническая форма головной части внедрившегося в преграду цилиндрического ударника.

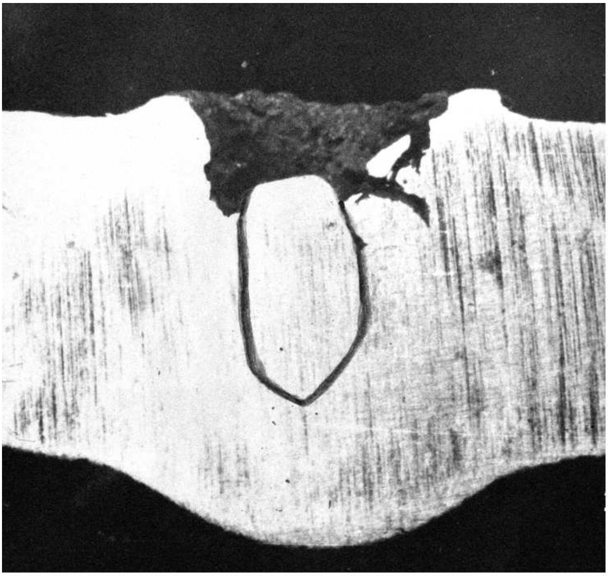

Рис. 1:

Эти явления имеют чрезвычайно важное научное (фундаментальное) и прикладное (практическое) значение, связанное с разработкой и совершенствованием широкодиапазонной теории динамического разрушения различных материалов (включая новые высокопрочные материалы из нанопорошков), более глубоким изучением физики и механики пробивания сложных конструкций, формированием осколочных потоков, использованием этих явлений в новых ударно-волновых технологиях. Представляют научный и практический интерес теоретическое объяснение и обоснование этих явлений и разработка их полной физико-математической модели.

Численное описание высокоскоростного взаимодействия различных бойков с преградами конечной толщины и их разрушение проводилось методом конечных элементов, который достаточно хорошо и надёжно проявил себя в течении 30 лет использования его в работах томской школы механиков для решения широкого круга задач удара и взрыва [4].

В общем случае, в первом приближении, предлагается математическая модель, которая описывается сжимаемой упругопластической средой. Поведение такой среды при динамических нагрузках характеризуется уравнением состояния, модулем сдвига, динамическим пределом текучести и константами кинетической модели разрушения активного типа, описывающей накопление, развитие и эволюцию микроповреждений, которые непрерывно изменяют свойства разрушающегося материала и вызывают релаксацию напряжений [4].

Физико-математическое моделирование откольного и сдвигового разрушения конструкционных материалов осуществлялось, исходя из представления о непрерывной мере разрушения, в качестве которой выбран удельный объём трещин. При этом скорость роста удельного объёма трещин задавалась как функция действующего давления и достигнутого объёма трещин, а по мере разрушения среды прочностные характеристики её падают по определённым зависимостям [5].

В чистом виде разрушение вблизи лицевой поверхности, происходящее в результате деформирования пластины под действием внедряющегося тела, иллюстрирует рис. 2. Ударник с конической головной частью внедряется в пластину из алюминиевого сплава, имеющего динамический предел текучести 0,3 ГПа, с начальной скоростью 610 м/с. Расчеты показывают, что интенсивность ударно-волновых процессов при данных начальных условиях недостаточна для образования в преграде повреждений. Хронограммы, на которых изолинии удельного объема трещин представлены через 2 мкс в момент времени 4 и 12 мкс соответственно, свидетельствуют о формировании двух зон разрушения, одна из которых обусловлена наличием свободной поверхности и имеет форму усечённого конуса.

На рис. 3 представлены хронограммы процесса разрушения пластины при нагруженни ее цилиндрической частицей со скоростью 2688 м/с. Разрушение вблизи лицевой поверхности на начальном этапе обусловлено взаимодействием волн разрежения. Начиная с 3 мкс основным фактором, определяющим разрушение, является деформирование преграды, обусловленное внедрением частицы. Зона с максимальным уровнем разрушения вытесняется непосредственно на поверхность. К 8 мкс максимальный объем трещин 0,214 см

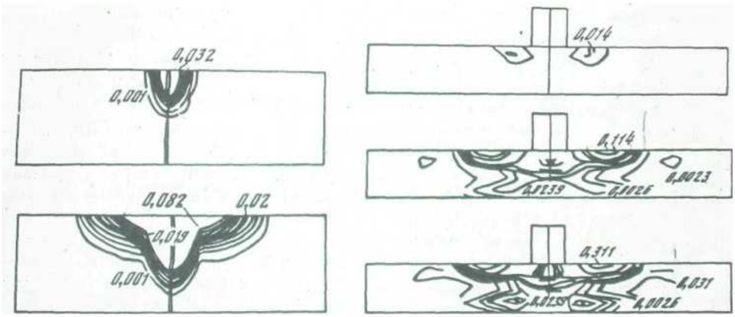

Рис. 2: Рис. 3

/г находится на лицевой поверхности на расстоянии 10 мм от оси. В целом по всем вертикальным сечениям наблюдается в этот момент времени монотонное падение величины удельного объема трещин в глубину преграды. Формирование лицевого откольного кольца отчетливо проявляется лишь к 12 мкс.

Литература

1. Хорев И.Е., Горельский В.А. Осесимметричный откол в задачах широкодиапазонного взаимодействия твёрдых тел. ДАН, 1982, том. 271, № 3, с. 623 – 626.

2. Хорев И.Е. Ударно-откольная асимметрия в проблеме высокоскоростного соударения твёрдых тел. Письма в ЖТФ, 2005, том 31, вып. 4, с. 71 – 76.

3. Захаров В.М., Хорев И.Е. Ударно-сдвиговая асимметрия в проблеме высокоскоростного соударения твёрдых тел. Письма в ЖТФ, 20010 (в печати).

4. Хорев И.Е. Физическое и математическое моделирование разрушения материалов и конструкций по анализу предразрушения соударяющихся тел. Химическая физика, 2002, т. 21, № 9, с 17 – 21.

5. Канель Г.И., Разорёнов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е Ударноволновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1999, 408 с.

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Хромов А.А., Хромова Г.В. (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

В данном сообщении предложен метод приближения непрерывных функций, в котором и сама функция, и ее приближения удовлетворяют одному и тому же интегральному граничному условию.

Рассмотрена последовательность операторов $-rR_r$, где $r > 0$, R_r – резольвента дифференциального оператора L, где

$$L : y', U(y) \equiv \int_0^1 p(t)y(t) = 0,$$

$y(x) \in C^1[0,1]$, $p(x) \in C^1[0,1]$.

Лемма. *Справедливо представление:*

$$R_r u = g_r u - \frac{1}{\Delta(r)} e^{rx} U(g_r u)$$

где $g_r u = -\int_x^1 e^{r(x-t)} u(t)dt, \Delta(r) = U(e^{rx})$,

$$U(g_r u) = \frac{1}{r} \int_0^1 K_r(t)u(t)dt,$$

$$K_r(t) = p(0)e^{-rt} + e^{-rt} \int_0^t p'(\tau)e^{r\tau} d\tau.$$

Теорема. При $p(t) \in C^1[0,1], p(1) \neq 0, \int_0^1 p(t)dt \neq 0$ для сходимости

$$\| - rR_r u - u\|_{C[0,1]} \to 0, \text{при } r \to \infty$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$u \in M = \{u \in C[0,1] : U(u) = U_1(u) = 0\},$$

$$U_1(u) = p(1)u(1) - p(0)u(0) - \int_0^1 p'(t)u(t)dt.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА[2]

Хромов А.П. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривается дифференциальная система Дирака вида:

$$y'(x) + P(x)y(x) = \lambda D y(x), \tag{1}$$

где $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $q_j(x) \in C^1[0,1]$, λ — комплексный параметр.

Для решений уравнения (1) хорошо известны асимптотические формулы при больших $|\lambda|$ (см. [1]). В данной работе асимптотика решений получена другим элементарным методом. Приведем описание метода.

Представляя систему (1) в покомпонентном виде:

$$y_1'(x) - \lambda y_1(x) = -q_2(x) y_2(x), \tag{2}$$

$$y_2'(x) - \lambda y_2(x) = -q_1(x) y_1(x), \tag{3}$$

интегрируя (2), (3), и выполняя замену $w_1(x) = y_1(x)e^{-\lambda x}$, $w_2(x) = y_2(x)e^{\lambda x}$, получим

$$w_1(x) = c_1 - \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\, dt, \tag{4}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) w_1(t)\, dt. \tag{5}$$

Пусть для определенности $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$. Выполним подстановку (5) в (4):

$$w_1(x) = c_1 - c_2 \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\, dt + \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) w_1(t)\, dt \int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau)\, d\tau.$$

---

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1)

Полагая $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, и учитывая, что $\int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau)\, d\tau = O\left(\lambda^{-1} e^{-2\lambda t}\right)$, получим $w_1(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$, и отсюда и из (5) $w_2(x) = O\left(\lambda^{-1}\right)$. Далее, положим $c_2 = 1$ и подставим (4) в (5). Тогда

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x,\lambda)\left[c_1 - \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\, dt\right] + \\ + \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) \varphi(t,\lambda)\, dt,$$

где $\varphi(x,\lambda) = \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\, dt = O\left(\lambda^{-1} e^{2\lambda x}\right)$. Полагая $c_1 = \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\, dt$, получим, что $w_2(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$, а $w_1(x) = O\left(\lambda^{-1}\right)$. Выполняя обратную замену, придем к следующему результату.

Теорема. *При $q_j(x) \in C^1[0,1]$ фундаментальная матрица решений уравнения (1) имеет асимптотическое представление*

$$Y(x,\lambda) = \left(E + O\left(\lambda^{-1}\right)\right) e^{\lambda D x},$$

где E — единичная матрица.

Литература

1. *Раппопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений/ И.М. Раппопорт. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 258 с.

ГЛОБАЛЬНАЯ НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ

Царьков И.Г. (Москва)
tsar@mech.math.msu.su

Обозначим через (B) класс всех действительных банаховых пространств. Для произвольного числа $\alpha > 0$ через α^0 обозначим наибольшее целое число строго меньшее, чем α, и пусть $\beta^0 = \alpha - \alpha^0$. Для непустого подмножества $M \subset V \in (B)$ через $\mathcal{H}^\alpha(M) = \mathcal{H}^\alpha(M,Y)$ обозначим класс всех таких α^0-дифференцируемых по Фреше в каждой точке множества M функций $f : M \to Y$, что для любого ограниченного множества $N \subset M$ найдется число $c = c(N) > 0$, для которого выполнено неравенство: $\forall x, y \in N \quad \left\|f^{(\alpha^0)}(x) - f^{(\alpha^0)}(y)\right\| \leqslant c\|x-y\|^{\beta^0}$.

Рассмотрим положительные функции $\delta(\cdot), C(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и $\varepsilon(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ со свойствами: $\inf\limits_{t \in [0,a]} \delta(t) > 0$ и $\inf\limits_{t \in [0,a]} \varepsilon(t) > 0$ для всех $a > 0$, и $C(\cdot) \uparrow$.

Пусть $X, Y, Z \in (B)$, $M \subset X$ – звездное относительно некоторой точки $x_0 \in M$ множество, и $F : X \times Y \to Z$ – некоторое отображение множества $M \times Y$ в пространство Z. Будем полагать, что $F(x_0, y_0) = 0$, где $(x_0, y_0) \in M \times Y$. Определим следующие множества в $X \times Y$:

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times Y \mid \|F(x, y)\| \leqslant \varepsilon(\|x - x_0\|)\}.$$

В произвольном $X \in (B)$ через B_X обозначим единичный шар с центом в нуле. Будем писать, что $X \in D(\alpha)$, если $\|\cdot\|_X \in \mathcal{H}^\alpha(X \setminus B_X)$.

Будем говорить, что частная производная F'_y является δ-регулярным линейным оператором на множестве $M \times Y$, если для единичных шаров B_Y и B_Z и для произвольной точки $(x, y) \in M \times Y$ верно включение $F'_y(x, y)[B_Y] \supset \delta(\|x - x_0\|)B_Z$.

Далее, для некоторого непустого множества $A \subset X \times Y$ через $CH^1(A) = CH^1(A, Z)$ обозначим класс всех отображений $f : A \to Z$, удовлетворяющих для всех $(x_i, y_i) \in A$ $(i = 1, 2)$ неравенству: $\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\| \leqslant C\big(\max\limits_{i=1,2} \|x_i - x_0\|\big)\{\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\}$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \geqslant 1$; $X \in D(\alpha)$; Y, Z – гильбертовы пространства или $Z = \mathbb{R}^m$ и $Y^* \in D(\alpha + 1)$; $M \subset X$ – звездное относительно x_0 множество, $(x_0, y_0) \in M \times Y$; отображение $F : M \times Y \to Z$ таково, что $F(x_0, y_0) = 0$, и $F, F'_y \in CH^1(\Sigma_\varepsilon) \cap \mathcal{H}^\alpha(\Sigma_\varepsilon)$, а $F'_y : Y \to Z$ – ограниченный δ-регулярный на Σ_ε оператор. Тогда для любой точки $y_0 \in Y : F(x_0, y_0) = 0$ найдется отображение $\varphi \in \mathcal{H}^\alpha(M \times Y) : F(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и $\varphi(x_0) = y_0$.*

Замечание. *В случае, когда $\alpha = 1$, в качестве X, Y, Z можно взять произвольные банаховы пространства. Если при этом пространство Y изоморфно некоторому пространству $C(K)$ или $L_\infty(K)$ (например, в случае, когда $Y = W^\beta_\infty(\Omega)$), то в качестве множества M можно рассмотреть произвольное метрическое пространство (изометрично вложенное в некоторое банахово пространство X), при этом требование звездности этого множества можно отбросить.*

УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Чадаев В.А. (Грозный)

chadaev53@mail.ru

Рассмотрим для уравнения в частных производных дробного порядка

$$L[u] \equiv \partial_{0x}^{\alpha} u(s,y) + \partial_{0y}^{\beta} u(x,t) = 0 \tag{1}$$

первую краевую задачу (Дирихле)

$$L[u(P)] = 0 \ \text{ при } \ p \in D, \quad u(P) = \varphi(p) \ \text{ при } \ p \in G, \tag{2}$$

где $\partial_{0z}^{\varepsilon}$ - регуляризованный оператор дробного дифференцирования порядка $1 < \varepsilon \leqslant 2$ с началом в точке 0 и концом в точке $z \in [0,r]$ [1], $u(x,y) \in C^4([0,X] \times [0,Y])$, $1 < \alpha, \beta \leqslant 2$, $\varphi(p) = \varphi(x,y)$ - заданная функция, непрерывная на контуре G, ограничивающем область $D = \{0 < x < X; 0 < y < Y\}$.

Получен разностный аналог для уравнения (1) [2]

$$\frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} R_x u_{i,k} \triangle S_{j-k}^{\alpha-1} + \frac{\ell^{-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{k=1}^{i} R_y u_{k,j} \triangle S_{i-k}^{\beta-1} = 0, \tag{3}$$

где R - Римана разностный оператор второго порядка, а $S_k^{\delta} = k^{1-\delta}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ - степенная сеточная функция.

Доказана теорема об устойчивости и сходимости разностной схемы (3) решения задачи (2).

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. - 272 с.

2. Чадаев В.А. Численное решение задачи Дирихле для фрактального уравнения Лапласа. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 10, N2.

О ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ БОЕВЫЕ ДЕЙСТВИЯ ДВУХ АРМИЙ

Чан Тхань Туан (Воронеж)

tuanbg2007@mail.ru

Рассматривается линейная дискретная система управления (см. [1]), описывающая боевые действия двух армий — аналог непрерывного случая, представленного в [2]:

$$\begin{cases} x_1(k+1) - x_1(k) = -\alpha_1 x_1(k) - \beta_2 x_2(k) + \gamma_1(k), \\ x_2(k+1) - x_2(k) = -\alpha_2 x_2(k) - \beta_1 x_1(k) + \gamma_2(k). \end{cases} \qquad (1)$$

Главной характеристикой соперников являются численности сторон $x_1(k) \geqslant 0$ и $x_2(k) \geqslant 0$; коэффициенты $\alpha_1,\ \alpha_2 \geqslant 0$ характеризуют скорости потерь в силу причин, непосредственно не связанных с боевыми действиями; $\beta_1,\ \beta_2 \geqslant 0$ — темпы потерь из–за действий соперника; $\gamma_1(k),\ \gamma_2(k) \geqslant 0$ — скорости поступления подкреплений, которые в дальнейшем трактуются как управляющие воздействия, $k = \overline{0, N-1}$.

Пусть заданы численности сторон соответственно в моменты начала и окончания процесса управления:

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ x(N) = \begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти управление $(\gamma_1(k), \gamma_2(k))$, которое приводит систему (1) от начального состояния $x(0)$ к желаемому состоянию $x(N)$.

Изучив данную задачу управления методом каскадного расщепления, получаем следующие результаты:

Первый случай: если $\gamma_1(k)$ и $\gamma_2(k)$ линейно независимы, то система (1) является полностью управляемой.

Второй случай: если $\gamma_1(k)$ и $\gamma_2(k)$ линейно зависимы, например, $\gamma_2(k) = \varepsilon\gamma_1(k)$, ε — некоторая неотрицательная постоянная, то система (1) является полностью управляемой в каждом из следующих случаев:

- $M_2 > 0,\ a_1 \geqslant 0,\ b^1 \geqslant M_1^{N-1} a^1$;
- $M_2 > 0,\ a_1 < 0,\ b^1 \geqslant (M_1 - M_2)^{N-1} a^1$;
- $M_2 < 0,\ a_1 \geqslant 0,\ b^1 \leqslant (M_1 - M_2)^{N-1} a^1$;

- $M_2 < 0$, $a_1 < 0$, $b^1 \leqslant M_1^{N-1} a^1$,

где $M_1 = 1 - \alpha_2 + \varepsilon\beta_2$, $M_2 = (1 - \alpha_2 + \varepsilon\beta_2) - \big(1 - \alpha_1 + \frac{1}{\varepsilon}\beta_1\big)$, а a^1, b^1 определяются по формулам $a^1 = M_1(a_2 - \varepsilon a_1) + M_2 \varepsilon a_1$, $b^1 = b_2 - \varepsilon b_1$.

Литература

1. Зубова С.П., Чан Тхань Туан. О полной управляемости линейной дискретной системой управления // Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения — XXI”. Воронеж. 2010. с. 99–100.

2. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. — М.:Наука, 1997. — 320 с.

О ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Чан Тхань Туан (Воронеж)

tuanbg2007@mail.ru

Рассматривается линейная дескрипторная дискретная система управления:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ k = \overline{0, N-1}, \tag{1}$$

с условиями

$$x(0) = a,\ x(N) = b, \tag{2}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — дискретные сигналы (состояние) системы в соответствующих дискретных значениях времени, $u(k) \in \mathbb{R}^s$ — управляющее воздействие, $E, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^l)$ — постоянные матрицы, a, b — произвольно заданные элементы из $\mathbb{R}^n$.

Возможны следующие случаи:

1. Если $Q_B E = 0$, $Q_B A \neq 0$, то система (1) неуправляема.
2. Если $Q_B E \neq 0$, $Q_B A = 0$, то система (1) неуправляема.
3. Если $Q_B E = Q_B A = 0$, то система (1) полностью управляема.
4. Если $Q_B E \neq 0$, $Q_B A \neq 0$, то методом каскадного расщепления (см. [1]) от системы (1) с условиями (2) переходим к системе:

$$\tilde{x}(k+1) = \widetilde{A}\tilde{x}(k) + \widetilde{B}\tilde{u}(k),\ k = \overline{1, N-1},$$

полная управляемость которой исследовалась в [2], с соответственными условиями

$$\tilde{x}(1) = \tilde{a},\ \tilde{x}(N) = \tilde{b},$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы система (1) с условиями (2) была полностью управляема, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие требования:*

1) $Q_S Q_B A = 0$;

2) *существует неотрицательное число* p, $p < N-1$, *такое, что* $\widetilde{B}_p$ *– сюръективная матрица.*

3) $(E - \lambda A)z = 0 \to z = 0,\ \lambda \in \dot{U}(0),\ z \in \mathbb{R}^n$;

Здесь $S = Q_B E$, $\widetilde{B}_p$ — коэффициент, стоящий при управляющем элементе $\tilde{u}_p(k)$ в редуцированной системе p–го этапа ($\widetilde{B}_0 = \widetilde{B}$).

Находятся все значения дискретных сигналов $x(k)$, $k = \overline{1, N-1}$ и управляющих воздействий $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Литература

1. Зубова С.П., Раецкая Е. В., Ле Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // Автоматика и телемеханика. 2008. №11. С. 41-47.

2. Зубова С.П., Чан Тхань Туан. О полной управляемости линейной дискретной системой управления // Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения — XXI”. Воронеж. 2010. с. 99–100.

О ПРИЗНАКЕ ТОТАЛЬНОГО СОХРАНЕНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

chavnn@mail.ru

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbf{N}$ – заданные числа, $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое ограниченное множество, $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ – *банаховы идеальные пространства* (БИП) измеримых на Π функций, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ – выпуклое множество, $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – *линейный ограниченный оператор* (ЛОО) такой, что: A_1) $A[y] \leqslant A[z]$ $\forall y, z \in \mathcal{Z}^m$, $y \leqslant z$; A_2) $\forall \delta > 0$ $\exists$ вольтеррова δ-цепочка ЛОО A. Рассмотрим управляемое уравнение [1–4]

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f(., x(.), u(.))\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП ”Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (проект НК-13П(9)) и АЦВП ”Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)” Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927).

где $u \in \mathcal{D}$ – управление, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $f(t,x,v) : \Pi \times \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – заданная функция, измеримая по t, непрерывная по $\{x,v\}$ и такая, что: 1) $\forall y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$ суперпозиция $f\Big(.,y(.),u(.)\Big) \in \mathcal{Z}^m$; 2) $\forall u \in \mathcal{D}$, $y_* \in \mathcal{X}_+$ $\exists \mathcal{N}[u,y_*] = \mathrm{const} > 0$:

$$\Big\| f\big(.,y,u\big) - f\big(.,z,u\big) \Big\|_{\mathcal{Z}^m} \leqslant \mathcal{N}[u,y_*] \, \|y-z\|_{\mathcal{X}^\ell} \quad \forall y,z \in \mathcal{X}^\ell, |y|,|z| \leqslant y_*;$$

3) $\exists \varphi(t,x), \psi(t,x) : \Pi \times \mathbf{R}^\ell \to \mathbf{R}^m$, измеримые по t, непрерывные и неубывающие по x и такие, что: а) $\varphi\big(.,y(.)\big), \psi\big(.,y(.)\big) \in \mathcal{Z}^m$ $\forall y \in \mathcal{X}^\ell$; б) $\varphi(t,x) \leqslant f\Big(t,x,u(t)\Big) \leqslant \psi(t,x)$ для п.в. $t \in \Pi$ и $\forall x \in \mathbf{R}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$.

Как показывают примеры [1–4], к уравнению вида (1) путем обращения главной части дифференциального оператора может быть сведен широкий класс управляемых распределенных систем. Проблема *тотального* (по множеству $\mathcal{D}$) *сохранения разрешимости* (ТСР) уравнения (1) возникает при исследовании различных вопросов оптимизации таких систем, см. [2,4]. В [2] был доказан простейший (монотонный) признак ТСР уравнения (1). Ниже формулируется его обобщение на случай вольтеррова оператора A (точнее, удовлетворяющего условию A_2)).

Уравнение вида (1) при $f = \varphi$ и $f = \psi$ назовем соответственно *минорантным* и *мажорантным* для (1).

Теорема 1.1. *Пусть минорантное и мажорантное уравнения имеют соответственно решения $\overline{x}$, $\widehat{x} \in \mathcal{X}^\ell$, $\overline{x} \leqslant \widehat{x}$. Тогда $\forall u \in \mathcal{D}$ уравнение (1) имеет решение $x_u \in \mathcal{X}^\ell$ такое, что: $\overline{x} \leqslant x_u \leqslant \widehat{x}$.*

Литература

1. В.И. Сумин, А.В. Чернов. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. Сер. Мат. моделир. и оптим. упр. Вып. 1(26).-2003.-С. 39-49.

2. А.В. Чернов. О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 3. – С. 130-137.

3. А.В. Чернов. О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах // Матем. заметки. – 2010. – Т.88. – № 2. – С. 288-302.

4. А.В. Чернов. К вопросу о сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Вестник Ниже-

городского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – № 2(1). – С. 124-130.

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КАК СРЕДСТВО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Чернякова Н.В., Волобуева Е.В. (Воронеж)

Современное состояние математического, да и любого естественно-научного, образования характеризуется постоянно увеличивающимся объемом изучаемого материала и постоянным сокращением аудиторных часов учебной нагрузки. Естественно, качество математической подготовки выпускников вуза постоянно.

В то же время, современный рынок труда, современные условия развития науки, техники, производства требуют от специалистов с высшим техническим образованием умения не только применять полученные теоретические знания, но и использовать их в нестандартных ситуациях, выбирать неочевидный путь решения задачи, работать самостоятельно.

Достижение такого уровня математической подготовки возможно только при грамотной организации самостоятельной работы студентов, основанной на современных подходах и технологиях обучения.

Традиционно, учебный процесс в вузе, особенно по фундаментальным дисциплинам, носит объяснительный характер. Преподаватель объясняет, показывает, рассказывает, контролирует, оценивает. Студенты пассивны. Такой подход не позволяет развивать навыки самостоятельной работы, подготовить специалиста, способного к решению профессиональных задач.

Основная цель современного вуза - создание такой системы обучения, которая обеспечила бы образовательные потребности любого студента в соответствии с его склонностями, интересами возможностями и гарантировала конкурентоспособность своих выпускников на рынке труда.

Поэтому решая проблему ограниченности аудиторных занятий, возрастающей сложности и объема изучаемого материала, пропуска занятий, возможно даже страха перед новыми учебным предметом, наша цель – организовать самостоятельную работу студентов, отвечающую всем вышеперечисленным требованиям.

Методической основой такой организации обучения будет контекстный подход, активные технологии и методы проблемного обучения. Содержательно, это означает сдвиг акцентов в процессе преподавания математических дисциплин с усвоения определенного объема знаний, умений и навыков к формированию готовности обучаемого к выполнению интеллектуальных и практических действий.

Что же подразумевает такая “готовность”?

Прежде всего умение рефлексировать. Обучаемый знает, что он знает и чего не знает.

Умение рассмотреть изученный материал в нестандартных ситуациях, правильно интерпретировать и применить.

Восприятие как примера такой готовности преподавателя.

На современном этапе “готовность” к решению практических, профессионально ориентированных задач значительно важнее традиционных ЗУН, так как проблема вычисления интегралов или решения ДУ решается грамотным применением пакетов прикладных практических задач.

С нашей точки зрения при изучении математических дисциплин, читаемых студентам старших курсов или факультативно, наиболее адекватен решаемым педагогическим задачам проектно-проективный метод организации самостоятельной работы.

Проект предполагает работу над некоторым вопросом программы более углубленно, параллельно изучению основного курса. Проективный подход подразумевает самостоятельное оформление, обработку информации, выбор формы конечного продукта, отчета.

Проекты могут быть одного из следующих видов:

а) изучение нового вопроса, представляющего собой ответвление основного курса;

б) решение исследовательской задачи;

в) создание программной реализации.

Выбор вида проектной деятельности зависит от содержания конкретной дисциплины. Однако, по нашему мнению, современный проект в техническом вузе должен быть основан на использовании информационных технологий. Так как умение выпускника вуза использовать в своей будущей профессиональной деятельности современные компьютерные технологии значительно повышает его шансы найти достойную работу.

Организация самостоятельной работы студентов на основе проектной деятельности с использованием информационных технологий возможна в рамках различных дисциплин математического цикла. Например, при изучении дискретной математики – написание программных реализаций алгоритмов теории графов, математической статистики – использование ресурсов интернета для сбора статистической информации и пакетов прикладных статистических программ для их обработки. Наиболее широкие возможности для организации самостоятельной работы студентов (включая их научно – исследовательскую работу) раскрываются в процессе изучения дисциплины математические методы (математические методы в сервисе). Здесь, кроме вышеназванных методов, можно внедрять комплексный подход – создание студентами информационных обучающих сред, электронных пособий, видеороликов, раскрывающих возможности использования математических методов или позволяющих решать практические задачи на основании того или иного метода.

Таким образом, современные информационные и педагогические технологии предоставляют широкие возможности для творческого подхода к организации обучения в вузе и самореализации участников педагогического процесса, их профессионального и личностного роста.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЕ

Чертов Е.Д., Ряжских А.В. (Воронеж)
ryazhskihav@mail.ru

Идентификация входного термического участка с учетом эффекта продольной теплопроводности в плоском канале при движении среды в режиме идеального вытеснения со смешанными граничными условиями (1-го и 2-го родов) на стенках приводит к необходимости решения уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{Pe}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 Z}\right) \tag{1}$$

с начально-краевыми условиями

$$T(X, 0) = T(1, Z) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T(X, 0)}{\partial Z} = PeT_0(1 - X), \quad \frac{\partial T(0, Z)}{\partial X} = 1, \tag{3}$$

где $X = x/h$; $Z = z/h$; $Pe = vh/a$; $T(X,Z) = \lambda[t(x,z) - t_0]/(qh)$; x, z - декартовы координаты с началом на входной кромке нижней стенке канала; v, h - скорость среды и ширина канала; a, λ - температуропроводность и теплопроводность среды; q - величина теплового потока на нижней стенке канала; t_0 - температура среды на входе в канал и верхней его стенки; $T_0 = \lambda t_0/(qh)$.

После приведения (1) - (3) к каноническому виду экспоненциальной заменой искомого потенциала, с целью исключения конвективного слагаемого в правой части (1), применением интегрального преобразования Лапласа по переменной Z получено решение сформулированной задачи

$$T(X,Z) = \left\langle 2T_0(1-X)sh\left(\frac{Pe}{2}Z\right) + \frac{sh\left[\frac{\sqrt{3}}{4}Pe(1-X)\right]}{\frac{\sqrt{3}}{4}Pe\cdot ch\left(\frac{\sqrt{3}}{4}Pe\right)} + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{sin[\beta_n(1-X)]}{\frac{1}{4}Pe - \sqrt{\frac{Pe^2}{4}+\beta_n^2}} - \frac{T_0 Pe\cdot cos(\beta_n X)}{\beta_n}\right\}\times$$

$$\left.\times\frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{Pe^2}{4}+\beta_n^2}Z\right)}{sin\beta_n\sqrt{\frac{Pe^2}{4}+\beta_n^2}}\right\rangle \exp\left(\frac{Pe}{2}Z\right),$$

где $\beta_n = \frac{\pi}{2}(1+2n)$, $n = \overline{0,\infty}$.

УСЛОВИЯ НЕ ЗАМЫКАЕМОСТИ И УСЛОВИЯ ЗАМКНУТОСТИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ

Чшиев А.Г. (Воронеж)
zchaslan@mail.ru.

Пусть X — комплексное банахово пространство и $EndX$ — банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X. Под полугруппой операторов будем понимать сильно непрерывную операторную функцию $T\colon (0,\infty) \to EndX$, для которой $T(t+s) = T(t)T(s)$ при всех $t, s > 0$. Согласно работе [1], определим следующие подпространства из X: $KerT = \{x \in X: T(t)x = 0$ при всех $t > 0\}$ — ядро полугруппы T; $X_1(T) = \{x \in X\colon \int_0^1 ||T(t)x|dt < \infty\}$; $\widetilde{X}_1(T) = \{x \in X_1(T)\colon \lim_{\eta\to 0+}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta T(t)xdt = x\}$.

Определение. Инфинитезимальным оператором *полугруппы T называется линейный оператор $A_0\colon D(A_0) \subset X \to X$ вида $A_0x_0 = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x_0 - x_0}{t}$, $x_0 \in D(A_0) = \{x \in X\colon \exists \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x-x}{t}\}$.*

В следующих теоремах приводятся необходимые условия и достаточные условия для того, чтобы инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы T был замкнутым, был не замыкаемым в классе операторов, то есть замыкание $\overline{A_0}$ оператора A_0 не являлся оператором.

Теорема 1. *Пусть инфинитезимальный оператор A_0 не замыкаем в классе операторов. Тогда $\overline{ImA_0} \cap KerT \neq \{0\}$.*

Теорема 2. *Пусть $X_1(T) = X$ и $\overline{ImA_0} \cap KerT \neq \{0\}$. Тогда инфинитезимальный оператор A_0 не замыкаем в классе операторов.*

Следствие 1. *Пусть $\overline{ImA_0} \cap KerT = \{0\}$. Тогда оператор A_0 замыкаем.*

Теорема 3. *Пусть $X_1(T) = X$, и пусть инфинитезимальный оператор A_0 замкнут. Тогда $\overline{ImA_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$.*

Теорема 4. *Пусть $X_1(T) = X$, и пусть $\overline{ImA_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$. Тогда инфинитезимальный оператор A_0 замкнут.*

Литература

1. *Баскаков А. Г.:* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов /А. Г. Баскаков // Математические заметки. - 2008, т.84, №2. - с. 175-192.

2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд. ИЛ, 1962.-829с.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ОТЫСКАНИИ МАРТИНГАЛЬНОЙ МЕРЫ В СЛУЧАЕ ФИНАНСОВОГО РЫНКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СКУПЩИКОВ АКЦИЙ

Шамраева В.В., Цветкова И.В. (Ростов-на-Дону)

shamraeva@mail.ru

Рассмотрим одношаговый финансовый рынок, заданный на стохастическом базисе $(\Omega,\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}= (F_0, F_1)$ - одношаговая фильтрация, причём $F_0 = \{\Omega, \oslash\}$, а F_1 - порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i, $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции. Введём следующие множества вероятностных мер: $\overline{P} = \{P = (p_1, p_2, ..., p_i, ...)\colon p_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots\}$, $Z_0|_\Omega = a$, $Z_1|_{A_i} = b_i$

$(i = 1, 2, \ldots)$, $\overline{P}(Z, F) = \{P \in \overline{P}\colon \sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_i| p_i < \infty,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i p_i = a\}$. Пусть, $f(P) = (C, P) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i p_i$ цена финансового обязательства $f_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i I_{A_i}$, вычисленная по мартингальной мере $P \in \overline{P}(Z, F)$.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче **I**: $f(P) = (C, P) \to \sup(\inf)$ при

$$\widetilde{P} : \begin{cases} p_1 + p_2 + ... + p_i + ... = 1, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + ... + b_i p_i + ..., \\ p_i \geqslant 0, i = 1, 2, ... \end{cases}$$

Исследование финансовых рынков со счётным числом состояний было проведено в [1]. При этом использовался принципиально новый метод перехода от неполных рынков к полным – метод интерполяции, оперирующий такими понятиями как СУХЕ (свойство универсальной хааровской единственности) и ОСУХЕ (ослабленное свойство универсальной хааровской единственности). Однако в упомянутой работе остался нерешённым вопрос о нахождение достаточных условий (на a, b_1, b_2, $\ldots$), гарантирующих существование мартингальных мер P, удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). В данных тезисах анонсируется подход к решению этой проблемы при помощи построения двойственной к **I** задачи **II**: $g(U) = u_1 + a \cdot u_2 \longrightarrow \inf(\sup)$ при $\widetilde{U} = \{u_1 + b_j u_2 \geqslant c_j, j = 1, 2, ...\}$.

Приведём результат, который получен на данный момент, и наметим дальнейшие пути решения поставленной задачи.

Теорема. *Пусть задача* **II** *имеет финитно-определенную систему ограничений. Тогда* 1) *если* $N > -\infty$, *то задача* **I** *разрешима, при этом* $N = M$; 2) *если задача* **I** *разрешима, то* $N > -\infty$ *и тогда* $N = M$.

Следовательно, условия на a, b_1, b_2, $\ldots$, гарантирующие финитно-определённость системы ограничений задачи **II**, дадут вместе с тем и условия разрешимости задачи **I**. Кроме того, имея условия на эти же коэффициенты, найденные в работе [1], можно изучить некую между ними взаимосвязь. Что даст возможность найти ряд ещё одних условий (возможно, отличных от условий, предложенных в [1]), гарантирующих существование мартингальных мер P, удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). Что в конечном итоге, позволит преобразовывать неполные и безарбитражные рынки в полные безарбитражные, что в финансовой математике является весьма актуальной задачей.

Литература

[1] Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счётном вероятностном пространстве. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 2005.

О СЛОЕВОЙ СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВ СИММЕТРИЙНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Шананин Н.А. (Москва)

nashananin@inbox.ru

Введем обозначения: Ω - открытое множество в $\mathcal{R}^n$, $\langle\varrho,\alpha\rangle = \varrho_1\alpha_1 + \ldots + \varrho_n\alpha_n$- взвешенный порядок дифференцирования ∂^α, $\varrho \in \mathcal{N}^n$, $\mu = \min_j \varrho_j$, $[u]_k(x)$ - совокупность значений всех производных функции $u(x)$ в точке x, взвешенный порядок которых не превышает k, $x' = \{x_j|\varrho_j = \mu\}$ и $x'' = \{x_j|\varrho_j > \mu\}$. Пусть $u \in C^\infty(\Omega)$ - решение уравнения

$$\sum_{m-\mu<\langle\varrho,\alpha\rangle\leqslant m} a_\alpha(x,[u]_{m-\mu}(x))\,\partial^\alpha u = f(x,[u]_{m-\mu}(x)), \qquad (1)$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x,[u]_{m-\mu}(x))$. Через

$$\mathcal{H}_u(x,\xi,h) = \sum_{k=0}^{\mu-1} h^k \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle=m-k} a_\alpha(x,[u]_{m-\mu}(x))(i\xi)^\alpha,$$

обозначим пучок символов уравнения на решении $u(x)$, $(x,\xi,h) \in \Omega\times\mathcal{R}^n\times\mathcal{R}$. Предположим, что из равенства $\mathcal{H}_u(x,\xi',0,0) = 0$ следует $\xi' = 0$ и, кроме того, для каждой точки $y \in \mathcal{F}_{x^0}$ и любых неколлинеарных векторов (ξ'^0,ξ''^0) и $(\eta'^0,0)$ существует окрестность W точки $(y,\eta'^0,\xi^0,0)$, в которой уравнение

$$\mathcal{H}_u(x,z\eta'+\xi',\xi'',h) = 0$$

имеет только простые корни, причём для каждого из них либо мнимая часть тождественно равна нулю в этой окрестности, либо отлична от нуля во всех ее точках. Через $u_{[y]}$ обозначим росток u в точке y. Пусть u и v - два C^∞-решения уравнения (1). Тогда

Теорема 1. $u_{[x^0]} = v_{[x^0]} \Rightarrow u_{[x]} = v_{[x]}, \quad \forall x \in \mathcal{F}_{x^0}$

Пусть G - группа симметрий уравнения (1). Решение u назовем G - инвариантным в точке x^0, если найдутся открытые окрестности U точки x^0 и V единицы группы такие, что $g \circ u(x) = u(x), \forall x \in U$ и $g \in V$. Обозначим через $\mathcal{F}_{x^0}$ связную компоненту слоя $\{x \in \Omega | x'' = x''^0\}$, содержащую $x^0 \in \Omega$.

Теорема 2. *Если решение u G - инвариантно в точке x^0, то оно G - инвариантно во всех точках компоненты $\mathcal{F}_{x^0}$*

О ВОЗМОЖНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ТЕПЛООБМЕННЫХ НАСАДОК

Шацкий В.П., Гриднева И.В., Федулова Л.И. (Воронеж)

mathem@agroeng.vsau.ru

Одним из путей повышения эффективности работы водоиспарительных охладителей является рациональный выбор длины насадки в зависимости от сечения каналов и входных условий. Решение поставленного вопроса можно осуществить посредством моделирования процессов тепло-массопереноса вдоль каналов испарительной насадки, позволяющего определить температуру и влажность воздуха по длине испарительной насадки [1]. Однако имеющаяся модель не имеет аналитического решения, столь необходимого для инженерных расчетов.

С этой целью, разбив длину пластины на 2 участка: начальный $[0, L_{\text{нач}}]$ и установившийся $[L_{\text{нач}}, x]$, где $L_{\text{нач}} = 0,055 \cdot \frac{C\rho v H^2}{\lambda}$, были получены приближенные формулы для вычисления температуры воздуха на выходе из охладителя.

При $x \leqslant L_{\text{нач}}$

$$T(x) = T_{\text{пов}} + 0,896 \cdot (t_{\text{вх}} - T_{\text{пов}}) \cdot e^{-\frac{2\lambda}{\rho C v H^2}[-L_{\text{нач}} \cdot exp(-\frac{13,733x}{L_{\text{нач}}}) + 3,777x]},$$

при $x > L_{\text{нач}}$

$$T(x) = T_{\text{пов}} + 0,896 \cdot (t_{\text{вх}} - T_{\text{пов}}) \cdot e^{-\frac{7,554\lambda}{\rho C v H^2}x},$$

здесь C - удельная теплоемкость воздуха, Дж/(кг · К); ρ - плотность воздуха, кг/м^3; H - сечение канала; v- средняя скорость потока воздуха; λ - коэффициент теплопроводности воздуха; x - координата по длине канала; $t_{\text{вх}}$ - температура воздуха на входе; $t_{\text{вх}}$ - температура поверхности испарительной пластины.

Из последней формулы можно определить длину охладительной насадки L при заданной температуре воздуха T на выходе из нее:

$$L = -\frac{C\rho v H^2}{7,554\lambda} \cdot ln\left(1,12\frac{T - T_{\text{пов}}}{t_{\text{вх}} - T_{\text{пов}}}\right).$$

Полученная формула с достаточной точностью позволяет определить наиболее оптимальные геометрические параметры охладителей в зависимости от его расходных характеристик. При этом можно производить как прямые расчеты - определение динамики изменения температуры по длине охладителя с последующим выбором его наиболее рациональной длины, так и обратные - определение геометрии охладителя в зависимости от заданных параметров охлажденного воздуха.

Литература

1. Шацкий В.П., Федулова Л.И., Шалиткина А.Н. Алгоритм расчета модели тепломассопереноса для косвенных теплообменников водоиспарительных охладителей // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сб. тр. междунар. школы-семинара. - Воронеж: ВГУ, 2004. – Ч.1, Т.2. – С. 531–533.

ОКРЕСТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Шмырин А.М., Роенко С.С., Корниенко Н.А., Митина О.А. (Липецк)

amsh@lipetsk.ru

Использование полилинейных окрестностных моделей при моделировании иерархических систем, в частности, нейронных сетей, подсказывает возможность применения окрестностных моделей и для промежуточных этапов [1,2]. В ряде прикладных задач возникает проблема моделирования полиномиальных зависимостей. Такого рода вопросы возникают при разработке нейронных сетей с использованием полиномиальных функций активации. Для моделирования линейной зависимости в полной билинейной окрестностной модели для двух узлов [1]

$$w_x[1,1]x[1] + w_x[1,2]x[2] + w_x[1,1]\nu[1] + w_x[1,2]\nu[2]+$$

$$+w_{x\nu}[1,1]x[1]\nu[1]+w_{x\nu}[1,2]x[1]\nu[2]+w_{x\nu}[2,1]x[2]\nu[1]+w_{x\nu}[2,2]x[2]\nu[2] \quad (1)$$

полагаем $w_{x\nu}[1,1] = w_{x\nu}[1,2] = w_{x\nu}[2,1] = w_{x\nu}[2,2] = 0, \nu[2] = y$, $w_\nu[1,1] = 0$,
$w_\nu[1,2] = -1$, $w_\nu[1,1] = 0$, $x[2] = 1$, $x[1] = x$. Тогда (1) определяет зависимость вида $y = ax + b$. Для получения квадратичной зависимости вида $y = ax^2 + bx + c$ полагаем в (1) $w_{x\nu}[1,2] = w_{x\nu}[2,1] = w_{x\nu}[2,2] = 0$, $\nu[2] = y$, $w_\nu[1,2] = -1$,
$\nu[1] = x[1] = x$, $w_\nu[1,1] = 0$, $x[2] = 1$. При этом отличие (1) от обычной регрессионной модели состоит в матричном характере билинейного члена $w_{x\nu}[1,1]x[1]\nu[1]$. Разработка аналога регрессионной модели требует построения скалярных билинейных уравнений для каждой строки исходных данных и последующего усреднения скалярных моделей по количеству пар исходных данных. Особый интерес представляет также использование нечётко-окрестностной билинейной модели для построения полиномиальных зависимостей. Обсуждаемая методика позволяет строить зависимости с произвольным количеством факторов.

Литература

1. Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырина О.А. Билинейные окрестностные системы- Липецк: ЛГТУ, 2006. - 130 с.

2. Шмырин А.М., Седых И.А., Корниенко Н.А., Сапожников Н.А., Митина О.А., Шмырина Т.А. Окрестностные иерархические системы с переменными окрестностями // Вестник Тамбовского Университета, Серия Естественные и технические науки, том 15, выпуск 6, 2010. С. 1941-1942.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕКОМПАКТНЫХ ГРАФАХ[1]

Юрко В.А. (Саратов)

yurkova@info.sgu.ru

Рассмотрим некомпактный звездообразный граф T в $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \ldots, e_p\}$ и множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_0, \ldots, v_p\}$, где $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,p}$ – конечные отрезки, а $e_0 = [v_0, v_{p+1})$ – бесконечный луч, $v_{p+1} := \infty$. Пусть l_j – длина e_j, $j = \overline{1,p}$. Ребро e_j параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$, причем начальная точка v_j соответствует $x_j = 0$. Луч $e_0 = [v_0, \infty)$ параметризуется параметром $x_0 \in [0, \infty)$. Функция Y на T имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,p}}$, где $y_j(x_j)$ определена на e_j. Рассмотрим диффе-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00099).

ренциальное уравнение на T:

$$\begin{aligned} &\ell_j y_j(x_j) := -y_j''(x_j) + Q_j(x_j) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \\ &Q_j(x_j) = \frac{\nu_j^2 - 1/4}{x_j^2} + q_j(x_j), \; j = \overline{0,p}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $Re\,\nu_j > 0, \; \nu_j \notin \mathbf{N}, \; \nu_0 = 1/2$, и $q_j(x_j) x_j^{1-2Re\,\nu_j}$ интегрируемы на e_j. Введем линейные формы

$$\sigma_{jk}(y_j) := (-1)^{k-1} \langle y_j(x_j), S_{j,3-k}(x_j,\lambda)\rangle_{|x_j=0}, \quad k = 1,2, \; j = \overline{1,p},$$

где $\langle y(x), \tilde{y}(x)\rangle := y(x)\tilde{y}'(x) - y'(x)\tilde{y}(x)$, $\{S_{jm}(x_j,\lambda)\}_{m=1,2}$ – решения Бесселя на e_j такие, что

$$S_{jm}(x_j,\lambda) \sim c_{jm} x_j^{\mu_{jm}}, \; x_j \to 0, \; \mu_{jm} = (-1)^m \nu_j + 1/2, \; c_{j1} c_{j2} = (2\nu_j)^{-1}.$$

Положим $U_j(y_j) = \sigma_{j2}(y_j) - h_j \sigma_{j1}(y_j)$, $V_j(y_j) = \sigma_{j1}(y_j)$, где h_j - комплексные числа.

Фиксируем $k = \overline{1,p}$. Пусть $\Psi_k = \{\psi_{kj}\}_{j=\overline{0,p}}$ – решение уравнения (1) на графе T, удовлетворяющее стандартным условиям склейки [1] и краевым условиям

$$U_j(\psi_{kj}) = \delta_{kj}, \; j = \overline{1,p}, \quad \psi_{k0}(x_0,\lambda) = O(\exp(i\rho x_0)), \; x_0 \to \infty,$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Функция $M_k(\lambda) := V_k(\psi_{kk})$ называется функцией Вейля относительно вершины v_k, а вектор $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ называется вектором Вейля.

Обратная задача. Дан вектор Вейля $M(\lambda)$, построить потенциал Q на графе T и вектор h.

Теорема 1. *Задание вектора Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет потенциал Q на T и вектор h.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [1] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Литература

1. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* - М.: Физматлит, 2007.

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ – КАК ОДНА ИЗ ФОРМ ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

Якшин С.А., Якшина А.С. (Благовещенск)
Yakshina@freemail.ru

В настоящее время при обучении в высшем учебном заведении большое внимание уделяется исследовательской работе студентов. Повышенный интерес к ней объясняется тем, что исследовательские и творческие способности являются основным элементом в модели современного специалиста. Однако в методической литературе чаще встречается описание возможностей организации студентом своей исследовательской деятельности. Мы бы хотели акцентировать внимание на работе преподавателя при организации научно-исследовательской деятельности студентов в учебном процессе.

Под научно-исследовательской деятельностью студентов понимают такую деятельность, которая направлена на формирование умения мыслить и действовать методами, категориями науки, на получение важных результатов для личности или общества. В тоже время она относится к внеаудиторной деятельности, непосредственно связанной с учебной деятельностью студентов, и имеет качественную и относительную самостоятельность. Подразумевается, что научно-исследовательская деятельность студентов обеспечивает связь между изучением ими учебных дисциплин и научной работой преподавателей ВУЗа.

В связи с этим возникает вопрос о финансировании такой деятельности. На наш взгляд существует несколько путей решения финансовой стороны при организации научно-исследовательской деятельности студентов.

1. Получение грантов на проведение исследования. Тогда финансирование получает как организатор (преподаватель), так и исполнитель (студент), а иногда и ВУЗ в целом. Но при грантозаявлении приходиться конкурировать с ведущими школами, работающими в аналогичных направлениях, а это сопряжено с некоторыми трудностями.

2. Организация лабораторий при учебном заведении. В этом случае у преподавателя возможно снижение учебной нагрузки и, как следствие, появление большего времени на проведение исследований с привлечением студентов. Однако для каждого преподавателя соб-

ственную лабораторию создать сложно, хотя бы по причине невозможности финансирования такого большого количества проектов ВУЗом.
3. Организация научного исследования в рамках курсовой работы студента. На наш взгляд это самое доступное из перечисленных решений. Так как подобная деятельность ежегодно запланирована в нагрузке как преподавателя, так и студентов старших курсов. Кроме того, обязательность выполнения курсовой работы студентом служит одним из мотивов проведения исследования. Поэтому мы остановимся на способе организации исследовательской работы в рамках курсового проекта.

Исследовательская деятельность базируется на трех элементах (этапах): мотивационном, теоретическом и творческом.

Мотивом при написании курсовой работы, в первую очередь, служит необходимость продолжения обучения, хотя этот мотив и не является устойчивым, но у каждого студента он присутствует в той или иной степени. Преподаватели, как организаторы работы, должны с первого курса поддерживать у студента потребность в получении выбранной им специальности и, как следствие, желание учиться. Деятельность преподавателя по созданию и развитию интереса и устойчивой положительной мотивации к исследованию у студентов должна начинаться с первых моментов его общения с ними и пронизывать приоритетной линией всё обучение, предшествующее написанию курсовой работы. На наш взгляд такая деятельность включает в себя, во-первых, учебную работу по преподаванию дисциплины, во-вторых, учебно-исследовательскую деятельность студентов, организованную преподавателем в рамках изучения дисциплины. Приведём некоторые возможности для осуществления подобной деятельности:
- работа с литературой: выполнение студентом небольших и несложных заданий, предложенных преподавателем на занятиях, требующих от студента поиска информации в каталогах и библиотеках, сети "Интернет"; самостоятельное изучение студентом материала по монографиям, фундаментальным учебным пособиям, которое включает конспектирование, анализ, систематизацию материала, умение изложить изученное другому студенту или преподавателю в личной беседе;
- работа с лекциями: самостоятельное выполнение заданий аналогичных тем, которые были рассмотрены на лекции, по заданному образцу; решение задач, предложенных на лекции; изучение стен-

довых лекций;
- выполнение домашних заданий;
- написание докладов, рефератов, выступление с ними;
- подготовка и чтение студентами фрагментов лекций и т.д. Отметим, что результат проведения таких мероприятий зависит от интереса студента к предмету и регулярного контроля преподавателем за выполнением студентом полученных заданий.

Теоретический элемент научно-исследовательской деятельности студента предполагает получение теоретических знаний и о предмете, которым он занимается, и об исследовательской работе. То есть при планировании своей деятельности преподаватель должен выделить время для разъяснения студенту понятия "исследовательская деятельность объяснения, как рационально организовать работу над темой, подобрать материал, выделить в нём существенное, использовать его для решения каких-либо задач, приведения примеров и т.д., описать преимущества, получаемые студентом, который ведёт научно-исследовательскую работу.

Творческий элемент научно-исследовательской деятельности студента - это итог работы как педагога, так и студента. Он предполагает выполнение исследования студентом, написание курсовой работы, подготовку доклада, выступление перед аудиторией.

Руководителю курсового проекта необходимо учитывать ряд рекомендаций по планированию и организации исследовательской работа студента:
- при планировании задания исследования и выборе темы необходимо обратить внимание на то, что уже известно студенту по теме. Если материал будет слишком прост для восприятия, то не произойдёт развития исследовательских навыков, с другой стороны, если будет слишком большой разрыв между имеющимися у студента знаниями, умениями и поставленной проблемой, задачей исследования, то студент может переписать материал из источников без осмысления и не усвоить нового;
- преподавателю необходимо спланировать те узловые моменты, на которых студент должен увидеть все этапы исследования, узнать новые для себя методы, средства и способы исследовательской деятельности, направленные на сбор, обработку и анализ материала;
- преподавателю необходимо чётко распределить время на все этапы исследования. Исходя из этого плана, составить график отчета о проделанной работе.

Таким образом, планирование и руководство написанием курсового проекта должно качественно изменять не только студента (приобретение навыков исследовательской работы), но и приводить к повышению уровня подготовки руководителя. Только в этом случае курсовая работа может претендовать на полноценное исследование.

Именной указатель

Abrashina-Zhadaeva N.G., 12

Egorov A.A., 12

Абанина Д.А., 13
Азаров С.В., 14
Акиньшин П.О., 40
Аксенов А.В., 171
Анисимов М.Н., 16
Антонов Н.Ю., 17
Арутюнян Г.В., 18
Аршава Е.А., 19
Асеев В.В., 25
Астахов А.Т., 26
Асташкин С.В., 26
Афанасьева Т.Н. , 27
Ашихина Е.С., 28

Багдасарян А.С., 30
Баев А.Д., 31, 33
Баенхаева А.В., 311
Байбеков Д.В., 145
Балгимбаева Ш.А., 35
Баркина У.В., 36
Барсуков А.И., 38
Батаронов И.Л., 38, 40, 134
Батаронова М.И., 41
Бахвалов А.Н., 42
Бахтина Ж.И., 141
Беляев Б.Д., 118
Бесаева С.В., 44
Бессонов В.В., 45
Бибикова Р.И., 46
Блатов И.А., 49
Бободжанова М.А., 16
Богер А.А., 50, 294
Бондаренко Н.П., 51
Брук В.М., 52
Бугаков В.М., 241
Бурлуцкая М.Ш., 53
Бутерин С.А., 55

Васильева А.А., 56
Виноградова Г.А., 57
Винокурова Н.В., 58
Власов И.А., 118
Водолазов Н.Н., 129
Волобуева Е.В., 354
Волосивец С.С., 88
Выгодчикова И.Ю., 59, 60

Галатенко В.В., 62
Галкин О.Е., 63
Галкина С.Ю., 63
Гальцев О.В., 68
Гальцева О.А., 69
Геккиева С.Х., 70
Гладышев Ю.А., 71
Гликлих Н.Ю., 74
Глушакова Т.Н., 75
Глызин С.Д., 77
Гоза Н.И., 78

Голованева Ф.В., 79
Головко Н.И., 82
Голосной А.С., 83
Голубева Е.С., 84
Голубов Б.И., 85, 88
Горельский В.А., 340
Горлов В.А., 92
Горчакова Е.В., 93
Горшков А.А., 95
Григораш Н.Ю., 96
Гриднева И.В., 361
Гришанина Г.Э., 98
Гулина О.В., 127
Гуров М.Н., 99

Давыдова М.Б., 101, 106
Давыдова Н.В., 112
Данкова И.Н., 134
Данченко В.И., 114, 115
Дворянчикова Ю.В., 71
Деревенцов А.В., 117
Додонов А.Е., 114
Донцов В.Н., 118
Дудов С.И., 120

Евченко В.К., 121
Елисеев А.Г., 122
Еровенко В.А., 127
Ерусалимский Я.М., 129
Ершова Е.М., 130
Ефимова М.П., 131

Житенёв С.А., 321
Житенев С.А., 145
Жук Н.М., 133
Жуковская З.Д., 134

Завгородний М.Г., 137, 138
Завьялова А.В., 139
Загорулько Ю.А., 195
Задорожний В.Г., 140
Задорожный А.И., 99
Зайцева Р.М., 112
Зародин С.Г., 211, 212
Захаров В.М., 340
Зверева М.Б., 141
Звягин А.В., 143
Змаева С.А., 145
Зубова С.П., 146, 148

Иванищева О.И., 150
Иванова О.А., 151
Игнатьев М.Ю., 153
Иофина Т.В., 154
Иохвидов Е.И., 155
Ислентьев О.В., 38

Калабухова С.Н., 156
Калитвин А.С., 158
Калитвин В.А., 159
Канатов А.В., 161
Капитонова Е.В., 162
Каплан А.В., 164
Карюк А.И., 166
Кащенко А.Г., 167
Кащенко Г.А., 30, 167
Кащенко О.В., 169
Кирьяцкий Э.Г., 170
Китаева Е.В., 171
Климкин К.А., 340
Козлова И.А., 172
Колесникова И.В., 173, 174
Кондратьев С.К., 176
Кононенко Л.И., 178
Корниенко Н.А., 362
Коробов А.А., 179
Корольков О.Г., 180
Костенко А.С., 181
Костенко И.П., 182
Костин А.В., 185
Костин В.А., 185, 186

Костин Д.В., 186
Кочуров Е.С., 187
Крейн М.Н., 188
Кручинин С.В., 45
Крыжко И.Б., 75
Кудрявцев А.Ю., 189
Кузеванов А.Л., 30
Кузнецов А.В., 45
Кулешов П.А., 191
Курдюмов В.П., 192
Кутищев И.Н., 193
Кущев А.Б., 194

Ларионов А.С., 195
Ласая О.В., 196
Листров Е.А., 197
Листрова Л.В., 197
Лихобабенко М.А., 198
Лобода А.В., 121
Логинова Е.А., 200, 202
Лукашенко Т.П., 203
Лукашов А.Л., 205
Лукомский С.Ф., 206
Лылов Е.В., 118

Мазурчик Г.Б., 207
Майорова С.П., 137, 138
Макарова А.В., 208
Маковий В.А., 209, 211, 212
Малюгина М.А., 214
Марчевская Е.В., 18
Махинова О.А., 215
Мациевский С.В., 216
Мелихов С.Н., 36, 151, 162
Мелькумова Е.М., 217
Меркулов С.Н., 321
Мещерякова Е.А., 219
Микка В.П., 220
Микка К.В., 220
Милушева Л.В., 40
Митина О.А., 362
Митягина Н.А., 164
Михайленко Б.А., 221
Михайлов А.П., 222
Михеева С.С., 306
Муминов Х.Х., 224, 227
Мусиенко В.К., 118, 231
Мухамадиев Э.М., 232
Мхаскар Х.Н., 233
Мякинник О.О., 332

Наимов А.Н., 232
Насыров С.Р., 234
Насырова Е.В., 235
Нгуен Тхи Тхюи Зыонг, 236
Нгуен Тхи Хоай, 238
Некрасова И.В., 239
Нечаев Ю.Б., 33
Низамиева Л.Ю., 234
Николаев О.В., 30
Новиков С.Я., 240

Обухова Л.А., 134
Огарков В.Б., 241, 244
Ойнас И.Л., 247
Онуфриев А.А., 250

Павлов Ю.С., 251
Павлова Н.Г., 254
Паринов М.А., 255
Паунов А.К., 256
Пашаев Н.Дж., 258
Пелешок О.В., 82
Петков А., 244
Петренко В.Р., 38, 40
Петрова Е.В., 164
Пешков В.В., 38
Письменный Н.А., 193
Платонов С.С., 259
Плещева Е.А., 261
Плотников Л.Г., 262

Плотников М.Г., 264
Плотникова И.Н., 145
Погосян К.С., 265
Подкопаев А.И., 267
Политов А.В., 268
Поляков И.В., 269
Попов М.И., 295
Потапов Д.К., 272
Потапов М.К., 273
Провоторов В.В., 275
Провоторова Е.Н., 275
Пшеничных А.А., 276
Пыркова О.А., 250

Раецкая Е.В., 148
Райцин А.М., 278
Раутиан Н.А., 279
Рачинский Е.В., 193
Робакидзе М.Г., 280
Родионов В.И., 281
Родионов Е.А., 287
Родионов Т.В., 288
Родионова Н.В., 281
Роенко С.С., 362
Рыданова С.С., 289
Рыхлов В.С., 291
Рябов С.В., 294
Рябцов И.С., 292
Ряжских А.В., 356
Ряжских В.И., 294, 295

Савастеев Д.В., 296
Савотин А.И., 298
Савченко Г.Б., 299
Савченко Ю.Б., 300
Сальтевский И.В., 301
Санина В.С., 304
Свиридов А.А., 45
Северов П.Г., 305
Седов А.И., 306
Селиванов В.Ф., 38, 40
Селиванова Н.Ю., 307
Семенов Р.В., 30
Семенов С.Л., 308
Семенова Т.Ю., 309
Сергеев С.М., 310
Сергиенко Л.С., 311
Симонов Б.В., 273, 312, 315
Солодов А.П., 319
Сорина Е.В., 120
Старов А.И., 49
Стародубцев Н.В., 167
Стасюк С.А., 320
Стромов А.В., 33
Сумин В.А., 50
Сумин М.И., 95, 161
Сухоруков Ю.С., 321

Таныгина А.Н., 322
Теляковский Д.С., 324
Теляковский С.А., 325
Терехин П.А., 326
Тихомиров К.Е., 327
Тихонов С.Ю., 233, 273
Ткачева С.А., 299, 300
Тонков В.О., 328
Трофимов В.Г., 150
Туртин Д.В., 329

Удоденко Н.Н., 330

Фам Туан Кыонг, 148, 330
Фарков Ю.А., 280
Федоров Ю.С., 16
Федулова Л.И., 361
Феоктистов В.В., 332
Феоктистова А.А., 334
Фефилов И.И., 167
Фильчаков С.В., 336
Фомин В.И., 337
Фролова Е.В., 338

Хорев И.Е., 340
Хромов А.А., 345
Хромов А.П., 192, 346
Хромова Г.В., 345

Царьков И.Г., 347
Цветкова И.В., 358

Чадаев В.А., 349
Чан Тхань Туан, 350, 351
Чернов А.В., 352
Чернякова Н.В., 354
Чертов Е.Д., 356
Чунаев П.В., 115
Чупеев С.А., 211, 212
Чшиев А.Г., 357

Шабанов М.Л., 244
Шабров С.А., 79
Шамолин М.В., 307
Шамраева В.В., 358
Шананин Н.А., 360
Шапошникова Д.А., 122
Шацкий В.П., 361
Шмырин А.М., 362
Шокиров Ф.Ш., 224, 227
Шунин Г.Е., 41

Юрко В.А., 363

Яковлев Е.К., 49
Якшин С.А., 365
Якшина А.С., 365
Ярош В.В., 340
Ярцева Н.А., 299

Верстка и подготовка оригинал-макета:

Шабров С.А.

Издательство Воронежского государственного университета,
394053, г. Воронеж, Университетская пл., 1.
Тир. 500 экз. Подписано к печати 15.12.2010

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=chx$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$