Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XVIII»

УДК 517.94 (92; 054, 97)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 07-01-06020

Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XVIII». – Воронеж: ВГУ, 2007. 185 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

Программный совет: С. В. Емельянов, В. А. Ильин, С. К. Коровин, А. В. Кряжимский, А. Б. Куржанский, Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Осипов, В. А. Садовничий, С. М. Никольский

Программный комитет:

Председатель В. А. Ильин. Сопредседатели: Ю. В. Покорный, А. А. Шкаликов. Заместители председателя: А. Д. Баев, Н. Л. Григоренко, Ю. И. Сапронов. Члены программного комитета: А. И. Булгаков, А. В. Глушко, В. В. Жиков, В. А. Кондратьев, С. М. Никольский, А. И. Прилепко, В. И. Ряжских, И. П. Костенко, В. М. Тихомиров, А. С. Шамаев, С. А. Шабров (ученый секретарь)

Оргкомитет:

Председатель Оргкомитета: В. А. Ильин, академик. Сопредседатели: Е. И. Моисеев, академик, В. Т. Титов, ректор ВГУ. Заместители председателя: А. М. Ховив, Ю. В. Покорный. Члены оргкомитета: В. И. Гурман, Я. М. Ерусалимский, Л. В. Крицков, М. Г. Матвеев, М. С. Никольский, В. В. Провоторов (ученый секретарь), Е. И. Радзиевская, Н. Х. Розов, А. П. Хромов.

ISBN

© Математический факультет Воронежского госуниверситета, 2007

Памяти математика и человека

А.Г. Баскаков, Н.Н. Удоденко (Воронеж)

23 февраля 2007 года исполнилось бы 60 лет доктору физико-математических наук, профессору математического факультета Воронежского университета Юрию Тихоновичу Сильченко, памяти которого посвящается работа.

Ю. Т. Сильченко родился в г. Куйбышеве, а год спустя семья Сильченко переезжает в Воронеж. После окончания 58-й школы он поступает на математико-механический факультет Воронежского университета, который окончил с отличием в 1970 году. Отслужив год в армии Юрий Тихонович связал свою жизнь с университетом, в котором работал вплоть до своей трагической гибели 11 июня 2005 года. С 1973 года он работал на кафедре функционального анализа и операторных уравнений, где прошел путь от ассистента до профессора.

В 1979 году им была защищена кандидатская диссертация, в 1999 — докторская, а в 2002-м году ему было присвоено звание профессора. Научные интересы Юрия Тихоновича, сформировавшиеся под влиянием его научного руководителя — профессора П. Е. Соболевского, были связаны с некорректными задачами математической физики, при изучении которых он использовал теорию полугрупп операторов. Им было опубликовано более 90 работ, список наиболее важных приведён. Подробное изложение доклада опубликовано в [1,2].

Литература.

1. Баскаков А.Г., Удоденко Н.Н. Юрий Тихонович Сильченко (23.02.1974 – 11.07.2005) Вестник ВГУ // Серия физика, математика. т.1, 2006, с. 227-229.

2. Удоденко Н.Н. Человек, Учёный, Учитель // Труды математического факультета ВГУ (новая серия) вып. 10, 2006, с. 3–6.

Список наиболее важных публикаций Ю. Т. Сильченко.

1. Об уравнениях второго порядка с операторами полугруппы с особенностями // Дифф. уравнения, 1977, т.13, №4, с. 763-765.

2. Об эволюционном уравнении с оператором, порождающим неаналитическую полугруппу // Дифф. уравнения, 1979, т.15, №2, с. 363-366.

3. Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью (в соавт. с П.Е. Соболевским) // Сиб. матем. журнал, 1986, т.27, №4, с. 93-104.

4. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // ДАН УССР, физ.-мат. и техн. науки, 1989, №7, с. 23-25.

5. Эволюционные уравнения с неплотно заданным операторным коэффициентом // Сиб. матем. журнал, 1993, т.34, №2, с. 166-169.

6. Разрешимость задачи Коши для линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, порождающими полугруппы с особенностями // Известия ВУЗов. Математика, 1993, №11, с. 149-152.

7. О задаче Коши для линейного дифференциально уравнения второго порядка с переменными коэффициентами // Мат. заметки, 1996, т.60, №1, с. 149-152.

8. Оператор дифференцирования с нерегулярными краевыми условиями // Известия ВУЗов. Математика, 1997, №6, с. 32-36.

9. Одна краевая задача для области с подвижной границей // Известия ВУЗов. Математика, 1998, №3, с. 43-46.

10. Differential equations with singularities nondensely defined operator coefficients, generating semigroups with singularities // Nonlinear Analysis. Oxford, 1999, Vol. 36, p. 345-352.

11. Обыкновенный дифференциальный оператор с нерегулярными граничными условиями // Сиб. матем. журнал, 1999, №1, с. 183-190.

12. Об оценке резольвенты дифференциального оператора второго порядка с нерегулярными краевыми условиями // Известия ВУЗов. Математика, 2000, №2, с. 65-68.

13. Об одной смешанной задаче для дифференциального уравнения второго порядка // Известия ВУЗов. Математика, 2002, №5, с. 64-71.

14. Линейное дифференциальное уравнение с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим неаналитическую полугруппу // Фундаментальная и прикладная математика. МГУ, 2001, т.7, №1, с. 295-300.

15. Дифференциальное уравнение второго порядка по времени в области с подвижной границей // Дифф. уравнения, 2001, т.37, №2, с. 282-283.

16. Об одном классе полугрупп линейных ограниченных операторов // Фундаментальная и прикладная математика. МГУ, 2002, т.7, №4, с. 1177-1186.

17. The operator method of investigation of the forth order equations // Spectral and Evolutions Problems. Simferopol, 2004, Vol. 14, p. 234-236.

18. Об одном методе исследования связанной системы дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения, 2005, т.41, №6, с. 844-850.

19. Полугруппы с неплотно заданным производящим оператором // Известия ВУЗов. Математика, 2005, №7, с. 57-62.

20. Собственные значения и функции дифференциального оператора с нелокальными граничными условиями // Дифф. уравнения, 2006, №6, с. 764-768.

21. Уравнения параболического типа с нелокальными условиями // Современная математика. Фундаментальные направления, 2006, т.17, с. 5-10.

К 60–летию Б. Д. Гельмана

Борис Данилович Гельман родился 18 июня 1947 года в городе Москве. Окончил школу в городе Иваново в 1965 году и в этом же году поступил на первый курс математико-механического факультета Воронежского государственного университета. Окончил математический факультет Воронежского государственного университета в 1970 г. по кафедре алгебры и топологических методов анализа. Кандидатскую диссертацию защитил в 1975 году (руководитель проф. Ю. Г. Борисович). Является автором более 60 научных работ и трех монографий. Круг научных интересов: теория многозначных отображений и ее приложения; нелинейный анализ; дифференциальные уравнения.

Основные научные результаты, полученные Б. Д. Гельманом: для широкого класса многозначных отображений были введены и изучены новые конструкции топологических инвариантов типа топологической степени, охватывающие большинство известных ранее конструкций. Была изучена топологическая структура множества неподвижных точек многозначных отображений (связность, топологическая размерность, ацикличность). Была изучена топологическая размерность множества решений задачи Коши для дифференциальных включений. Была изучена разрешимость и свойства множества решений операторных уравнений вида $a(x) = f(x)$, где a — сюрьективный линейный оператор, f — вполне непрерывный оператор. Для бесконечномерного банахова пространства была доказана теорема, которая является естественным обобщением классической теоремы Борсука–Улама для конечномерных пространств.

Основные публикации за последние годы:

1. B. D. Gel'man. On topological dimension of a set of solutions of functional inclusions// Differential Inclusions and Optimal Control, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, v.2, 1998, p.163-178.

2. Б. Д. Гельман. Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений / Математ. сборник. - 1997, т.188, 12. - С. 33-56.

3. Б. Д. Гельман. Точки покоя обобщенных динамических систем// Матем. заметки, 1999, т.65, в.1, с.28-36.

4. N. M. Benkafadar, B.D. Gel'man. Generalized Local Degree for Multi-Valued Mappings// International Journal of Math., Game Theory

and Algebra, 2000, v.10, N5, p.413-434.

5. Б. Д. Гельман. Об одном классе операторных уравнений// Матем. заметки, 2001, т.70, в.4, с.544-552.

6. Б. Д. Гельман. Теорема Борсука-Улама в бесконечномерных банаховых пространствах// Матем. сборник, 2002, т.193, N 1, с.83-92.

7. Б. Д. Гельман. Бесконечномерная версия теоремы Борсука-Улама// Функциональный анализ и его приложения, 2004, т.38, N 4, с.1-5.

8. Б. Д. Гельман. Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки// Математические заметки. – 2005. – Т. 78, N 2. - С. 212–222.

9. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / М: КомКнига. - 2005, - 214 с.

К 60–летию Л. Н. Ляхова

7 декабря исполнится 60 лет доктору физико-математических наук, профессору кафедры высшей математики ВГТА Ляхову Л. Н. Он является известным математиком, специалистом в области весового гармонического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений.

Родился в г. Россошь. Закончил среднюю школу в Липецке. В 1972 году окончил Воронежский госуниверситет, математический факультет. В его дипломной работе был введен и исследован новый класс псевдодифференциальных операторов (руководитель — проф. И. А. Киприянов). По результатам этих исследований была опубликована первая его научная статья "Об одном классе псевдодифференциальных операторов" (совместно с И. А. Киприяновым) в журнале ДАН СССР в 1974 году. По окончании университета служил в армии командиром противотанкового взвода 2-го батальона Витебско-Новгородского гвардейского мотострелкового полка в Северной Группе Войск Варшавского договора. После окончания срочной службы работал инженером, младшим научным сотрудником в НИИМ ВГУ. С 1979 года по настоящее время работает в Воронежской государственной технологической академии.

Исследования сингулярных псевдодифференциальных операторов, начатые ранее, были продолжены и в 1982 году Л. Н. Ляхов защитил кандидатскую диссертацию "Граничные задачи для B-эллиптических уравнений" (руководитель В. Н. Врагов, впоследствии академик РАН), В это же время, исследования класса сингулярных п.д.о. порядка нуль (не вошедшие в кандидатскую диссертацию) привели к созданию теории весовых сферических функций, работа над которыми была начата примерно в 1976 году и продолжалась в течении многих лет. Результаты опубликованы в ДАН СССР в 1983 г. в работе [4]. Надо отметить, что большим препятствием для создания этой теории явилась теорема об интегральном представлении функций через фундаментальное решение B-гармонического уравнения. В ряде работ, где была необходимость в соответствующей формуле, использовали ее упрощенный вариант, но для описания класса весовых сферических функций такие упрощения не годились. Для доказательства теоремы пришлось применить очень громоздкий подход. Но нового, более простого доказательства пока не обнаружено.

Следующей область научных интересов Л. Н. Ляхова — теория гиперсингулярных интегралов. Классическая теория таких интегральных операторов создана усилиями многих известных математиков, среди которых И. Стейн, П. И. Лизоркин, С. Г. Самко. Л. Н. Ляховым введен и изучен новый класс гиперсингулярных интегралов, названный им — B-гиперсингулярными интегралами. Им рассмотрены основные приложения этих конструкций к описанию весового класса функций "дробной B-гладкости" (представляющих собой обобщения функциональных классов И. А. Киприянова) и к построению формул обращений "интегральных уравнений с B-потенциальным ядром". Ядро B-гиперсингулярного интеграла имеет сверх сильную особенность, для регуляризации которой впервые Л. Н. Ляхов применил "обобщенные конечные разности". В этот период им получено неравенство Соболева для весовых лебеговских классов функций, были введены "преобразования Рисса, порожденные обобщенным сдвигом "весовые нормированные кольца" (аналог колец Винера), доказана теорема об обобщенном свертывателе и мультипликаторе смешанного преобразования Фурье-Бесселя (аналог теоремы Гельфанда о свертывателе) получен критерий мультипликатора Фурье-Бесселя (типа критерия Михлина-Хермандера мультипликатора Фурье). Основные результаты этих исследований опубликованы в работах [3-7].

В 2002 году по результатам исследований законченных в 1997 году в Белорусском госуниверситете защищена докторская диссертация "Гиперсингулярные интегралы, порожденные обобщенным сдвигом и их приложения к описанию весовых функциональных классов дробной гладкости и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами" по специальности — математический анализ. Надо отметить, что одним из официальных оппонентов на защите диссетрации был академик С. М. Никольский.

С 1997 года Л. Н. Ляхов начинает исследования одного специального преобразования Радона. Это преобразование впервые появилось в исследованиях И. А. Киприянова еще в 1967 году, где были приведены формулы обращения преобразования Радона в случае осевой симметрии. При этом явно не было дано его определения ни для осесимметрических, ни для четных функций. До 1997 никто не опубликовал никаких исследований по этой теме. Трудность, разумеется, заключалась не в определении, а в том, что результатом такого определения должна стать формула обращения этого спец. преобразования Радона, включающая уже известный осесимметрический случай. В 1997 г. И. А. Киприянов заметил, что методика обращения B-потенциалов, развитая в работах Л. Н. Ляхова, использующая метод плоских сечений, должна сработать при обращении спец. преобразования Радона. Предпринятые тогда совместные исследования Л. Н. Ляхова и И. А. Киприянова привели к выяснению того, что должно называться "спец. преобразованием Радона". Были даны два эквивалентных определения этого преобразования и получена замечательная формула, связывающая все три классических интегральных преобразования — Фурье, Фурье-Бесселя и Радона. Этот результат был опубликован в [8]. Формулы обращения преобразования Киприянова-Радона (название предложено Л. Н. Ляховым) были получены позднее и опубликованы в работах [10] и [11].

Обобщения этих результатов получены Л. Н. Ляховым вместе со своими учениками в работах [12], [13], [14], [15].

Л. Н. Ляхов неоднократно выступал на семинарах в отделе теории функций МИ РАН имени В. А. Стеклова, на семинаре академика В. А. Ильина и академика Е. И. Моисеева в МГУ и продолжает активную научную и педагогическую деятельность.

Основные работы Л. Н. Ляхова

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов // ДАН. — 1974. — Т.218, N2. — С. 278–280.

2. Ляхов Л.Н. Об одном классе сферических функций и сингулярных псевдодифференциальных операторов // ДАН.— 1983.— Т.272, N4.— С.781-784.

3. Ляхов Л.Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // ДАН.— 1990.— Т.315, N2.— С.291-296.

4. Ляхов Л.Н. Обращение B-потенциалов // ДАН.— 1991.— Т.321, N3.— С. 466-469.

5. Ляхов Л.Н. Мультипликаторы смешанного преобразования Фурье-Бесселя // Тр.МИРАН.— 1996.— Т.214.— с.234-249.

6. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О мультипликаторах смешанного преобразования Фурье-Бесселя // ДАН.—1997.— Т.354, N4.— С.449-451.

7. Ляхов Л.Н. О свертывателях и мультипликаторах классов функций, связанных с преобразованием Фурье-Бесселя.// ДАН.— 1998.— Т. 360, N1.— С.16-19.

8. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // ДАН.— 1998.— Т.360, N2.— С.157-160.

9. Ляхов Л.Н. Весовые нормированные кольца и тауберова теорема аппроксимации, порожденные обобщенным сдвигом // ДАН.— 2001.— Т.380, N5.— С. 588-590.

10. Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Киприянова-Радона // ДАН.— 2004.— Т.399, N5.— С. 597-600.

11. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона
Тр. МИАН. 2005. Т. 248. С.153-163.

12. Гоц Е.Г., Ляхов Л.Н. Обобщенные разности и общие гиперсингулярные интегралы.// ДАН. – 2005. – Т. 405. N4 – С. 444-447.

13. Ляхов Л.Н., Шишкина Э. Л. Обобщенные B-потенциалы Рисса смешанного типа // ДАН.– 2006. – Т. 406. N3.– С.303-307.

14. Гоц Е.Г., Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Киприянова-Радона посредством дробного дифференцирования Грюнвальда-Летникова-Рисса. // ДАН. – 2007. – Т. 410. – С. 324-327.

15. Ляхов Л.Н., Шишкина Э. Л. Общие B-гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой. // ДАН. – 2007.– Т. 412. N2. – С. 306-400.

К 60–летию В. В. Обуховского

Обуховский Валерий Владимирович родился 27 апреля 1947 г. в Риге, Латвия. В 1950 г. вместе с родителями переехал в Воронеж. В 1965 году закончил среднюю школу № 58 и поступил на математико-механический факультет Воронежского госуниверситета. Начиная со второго курса принимал участие в студенческой научной работе в семинаре профессора Ю. Г. Борисовича. Первую научную работу опубликовал (совместно с Б. Д. Гельманом и Ю. И. Сапроновым) в 1968 г. будучи студентом 3 курса. В 1970 г. окончил математический факультет ВГУ и начал работу ассистентом кафедры алгебры и топологических методов анализа ВГУ, одновременно обучаясь в заочной аспирантуре под руководством проф. Ю. Г. Борисовича. В апреле 1975 г. успешно защитил в ВГУ кандидатскую диссертацию на тему "Уравнения с многозначными операторами и некоторые их приложения".

С 1980 года работал старшим преподавателем, затем доцентом кафедры алгебры и геометрии Воронежского госпединститута. В октябре 1993 года успешно защитил в Институте проблем управления РАН (Москва) докторскую диссертацию на тему "Топологические методы в теории нелинейных управляемых систем". С 1993 года — профессор кафедры алгебры и геометрии Воронежского госпедуниверситета, а сентября 1998 г. и по настоящее время — профессор кафедры алгебры и топологических методов анализа ВГУ. В ВГУ проф. В. В. Обуховский читает лекции по теории чисел и линейной алгебре, ведет спецкурсы по многозначному анализу, теории дифференциальных включений и другим актуальным проблемам. Руководит курсовыми и дипломными проектами, а также аспирантурой.

В круг научных интересов проф. В. В. Обуховского входят исследование проблем теории многозначных отображений, теории дифференциальных включений и их приложений к теории управления и оптимизации, к вариационным методам, гидродинамике и другим разделам современной математики.

К числу важнейших научных работ проф. В. В. Обуховского относятся:

монографии:

1) *Введение в теорию многозначных отображений.* Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986 (совместно с Ю. Г. Борисовичем, Б. Д. Гельманом, А. Д. Мышкисом).

2) *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces.* Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001 (совместно с М. И. Каменским и P. Zecca).

3) *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* КомКнига, Москва, 2005 (совместно с Ю. Г. Борисовичем, Б. Д. Гельманом, А. Д. Мышкисом).

обзорные работы:

1) *Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений,* Успехи мат. наук. 35 (1980), № 1, 59–126 (совместно с Ю. Г. Борисовичем, Б. Д. Гельманом, А. Д. Мышкисом).

2) *Многозначные отображения,* Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 19. ВИНИТИ, М., 1982, 127–231 (с теми же соавторами).

3) *Многозначный анализ и операторные включения,* Итоги науки и техники. Соврем. пробл. мат. Новейшие достижения. Т.29. ВИНИТИ, М., 1986, 151–211 (с теми же соавторами).

4) *О новых результатах в теории многозначных отображений. I. Топологические характеристики и разрешимость операторных включений,* Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т.25 ВИНИТИ, М., 1987, 123–197 (с теми же соавторами).

5) *О новых результатах в теории многозначных отображений. II. Анализ и приложения,* Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т.29 ВИНИТИ, М., 1991, 107–159 (совместно с Б. Д. Гельманом).

В.В. Обуховский является Соросовским профессором (1998-2001). Член редколлегии международных журналов "Discussiones Mathematicae / Differential Inclusions and Optimal Control"и "Fixed Point Theory. An International Journal on Fixed Point Theory, Computation and Applications". С 1996 года является научным руководителем грантов Российского фонда фундаментальных исследований.

Среди учеников В. В. Обуховского, защитивших в последние годы диссертации — С. В. Корнев (2004), И. Бенедетти (Италия) (2004), Х. Р. Ал-Хашеми (Ирак) (2006), А. Ю. Гликлих (2006).

Проф. В. В. Обуховский неоднократно вел научную работу и читал лекции в университетах зарубежных стран, в том числе в Италии (гранты университетов Флоренции, Перуджи, Модены и министерства Иностранных дел Италии), США (университет Рутгерс, грант Фулбрайта), Германии (Мюнхенский технический университет, грант ДААД), Польши, Канады и др.

Проф. В. В. Обуховский принимал участие в работе многих международных научных конференций, в их числе — Международные конгрессы математиков (Берлин 1998; Пекин 2002), Европейский конгресс математиков (Стокгольм 2004) и др.

К 60–летию Овчинникова Владимира Ивановича

12 августа 1947 года я родился в Уссурийске на Дальнем Востоке и до 1950 года жил там. С 1950 года я живу в Воронеже и с 1951 года даже по одному и тому же адресу. Учился я в трех школах. Сначала в 11 средней школе им. А. С. Пушкина. С четвертого по восьмой класс в 1-ой средней школе им. А. В. Кольцова, и заканчивал 58 школу. На моих глазах из центра Воронежа исчезали развалины времен войны среди которых прошла часть моего детства. В отличие от 11 и 1 школы само здание 58 школы я никогда не любил, хотя в ходе одного воскресника я даже участвовал в его строительстве. Но именно эта 58 школа оказала на мою жизнь решающее воздействие. Если быть точным, то не школа, а один учитель и товарищи по классу на самом деле предопределили то, о чем теперь предстоит написать. Д. Б. Сморгонский – наш учитель математики как-то сумел сделать так, что мы любили и понимали математику, могли отличить грамотное математическое высказывание от неграмотного. Склонность к математике скорее всего дается человеку от Бога, но нужно тренировать и усиливать эти способности. Обладая ими, человек уже сам в состоянии будет развиваться как математик, если захочет. И вот Давид Борисович Сморгонский блестяще умел делать так, что люди становились математиками, причем ничему их по существу не уча.

Наш выпуск 1964 года был первым выпуском 58 школы. Почему-то они в 58 школе не вспоминают об этом, хотя без ложной скромности можно сказать, что это был экстраординарный выпуск. Не каждый год в наших школах целый класс заканчивает школу экстерном, пройдя в течение четвертой четверти 10 класса программу 11 класса, при этом сдав экзамены по всем предметам, включая литературу (устно), английский и т.д.

И вот в 1964 году я поступил на математико-механический факультет Воронежского университета. С. Г. Крейн был председателем предметной комиссии в том году, и именно он сказал, что я принят, и как всегда, успел пошутить, когда увидел из документов, что я живу напротив университета. Он сказал, что этот студент всегда будет опаздывать на занятия. Я, конечно, почти никогда не опаздывал, но просыпался действительно за 10–15 минут до первой лекции довольно часто.

С. Г. Крейн, в отличие от многих, с самого начала всерьез воспринял наше появление на матмехе (мы же были первый специализированный математический класс в Воронеже). Он уже во втором семестре прочел нашей группе курс лекций по основам функционального анализа, которые оказали самое серьезное влияние на все то, что происходило потом в течение многих лет. Однако, первую научную работу на первом курсе я сделал вместе с Е. М. Семеновым. Он рассказывал на семинаре нам о ковре Серпинского, а я там сделал небольшой комментарий. Была даже написана статья (о чем вспоминаю с отвращением), и говорили, что она опубликована в сборнике студенческих работ, но я ее опубликованной никогда не видел. Возможно, это какое-то недоразумение. В любом случае, на студенческой научной конференции я выступал уже на первом курсе.

За время моей учебы в университете перед нашими глазами прошли выдающиеся и замечательные математики, но похожими быть хотелось не на всех. Даже М. А. Красносельский не был в их числе для меня. Похожим хотелось быть на С. Г. Крейна, Б. С. Митягина. Другие даже как-то отпугивали. В дальнейшем мне пришлось сталкиваться с М. А. Красносельским по делу, и мне было приятно чувствовать, что он относится ко мне всерьез, и что было особенно важно, это его отношение было вызвано только моими работами. Я, кстати, никогда не хотел и не нуждался в неформальных отношениях с моими учителями (возможно, что и напрасно).

Я бы не сказал, что учиться было легко, но подготовка 58 школы делала свое дело. Все получалось. Недоброжелатели, которые всегда появляются неизвестно откуда, не могли понять, почему у нас, выпускников 58 школы, такая уверенность в себе. Они полагали, что от наглости. Откуда им было знать. Они же не сидели с нами в классе, когда нас загадочно учил и строго воспитывал Давид Борисович Сморгонский. За все время учебы в университете мне удалось получить только одну четверку по физике (на третьем курсе), когда ко всему прочему добавилась личная жизнь и понимание того, что не все можно знать на отлично.

Весь второй курс я размышлял над задачей, которую сам себе поставил, правда, по мотивам семинара, организованного Крейном и Красносельским для первого и второго выпусков 58 школы и, конечно, для всех остальных. Кстати, в университете мы встретились с похожими на нас ребятами, приехавшими в Воронеж с разных концов нашей страны, правда, в основном с Украины, из Киева. Их присутствие вселяло в нас чувство правоты нашего выбора (ведь в Москву-то мы либо не поехали, либо не попали). Здесь самый подходящий момент для того, чтобы перечислить моих товарищей по учебе. Но я не буду этого делать, потому что это очень большой список и мне не хотелось бы кого-то упустить. Все они оказали на меня влияние, и были и есть украшение моей жизни.

Так вот где-то в конце второго курса меня пригласил к себе домой в знаменитый кабинет на первом этаже зеленого дома на улице Морозова С. Г. Крейн для того, чтобы я рассказал ему о своей задаче. Кое-что мне там удалось сделать, кое-что осталось неясным. Видимо, с этого разговора и началось наше сотрудничество с Селимом Григорьевичем Крейном. Это было своеобразное сотрудничество, потому что у нас с ним только одна совместная работа. Но Селим Григорьевич помог написать все мои первые работы, опубликованные в центральной печати. К сожалению, мне не пришлось работать вместе с Крейном над одной и той же задачей. Но именно он заронил мне в сердце и в голову идею о том, что алгебраический подход может быть очень плодотворным в самых различных задачах, которые на первый или даже второй взгляд к алгебре никакого отношения не имеют. Произошло это где-то на третьем курсе на семинаре. Мы изучали теорию операторов. Как известно, часть этой теории может быть изложена как теория банаховых алгебр. И вот когда мы дошли до неограниченных операторов, Селим Григорьевич спросил, а почему нет аналога неограниченных операторов внутри теории банаховых алгебр? Мне удалось в какой-то мере создать нечто, напоминающее неограниченные операторы для банаховых алгебр. Эта работа не была опубликована, потому что стандарты, которые негласно существовали между нами, говорили, что они еще не достигнуты. Но это была серьезная репетиция или испытательный полет для работы, которую мне удалось сделать позднее, и которая легла в основу моей докторской диссертации "Метод орбит в теории интерполяции линейных операторов". Суть этой работы, и, видимо, главное мое достижение в теории интерполяции линейных операторов, состоит в том, что интерполяционные пространства можно описывать с помощью операторных идеалов (метод орбит). Это позволило доказать много новых интерполяционных теорем и уточнить старые. До этого все интерполяционные конструкции были основаны исключительно на функциональных пространствах. Осознать недостаточность такого подхода было нелегко. Лично мне помогла в этом одна задача, которую удалось решить методом орбит. Это задача об интерполяции в пространствах векторнозначных функций, причем интерполяции по внутренней норме.

Операторное описание интерполяционных пространств оказалось плодотворным даже в случае когда используются простейшие операторные пространства. На основе этой идеи было завершено изучение пространств вещественного метода интерполяции. Окончательных вклад в это дело был сделан не мной и не в Воронеже Ю.А.Брудным с соавторами. Серьезность этих задач подтверждает то, что за эти работы в Израиле Ю. А. Брудный был удостоен высокой математической награды. Возможность поучаствовать в этой работе мною была упущена, в частности, и потому, что я никогда не любил вещественного метода интерполяции и относился к нему как вымученному обобщению частного случая (что было ошибкой).

Операторный подход к теории интерполяции и смежным вопросам до сих пор оказывается полезным. Сравнительно недавно мне удалось решить в полном объеме задачу об описании интерполяционных орбит в парах пространств Лебега L_p. Для этого пришлось построить новые интерполяционные конструкции, обобщающие знаменитую конструкцию Лионса–Петре. Для изучения этих конструкций вновь оказались полезными нетривиальные операторные идеалы Неймана–Шаттена. В последнее время мне пришлось заниматься теоремами вложения для пространств Соболева. Но и здесь, как в известном анекдоте о самоварном заводе, вновь неожиданно оказалось, что правильные ответы об оптимальных теоремах вложения формулируются в терминах интерполяционных орбит.

Но вернемся к моей биографии. С. Г. Крейн был моим руководителем и по дипломной работе и руководителем моей кандидатской диссертации. Тему в обоих случаях я выбрал сам, и они были посвящены некоммутативной теории функций, точнее симметричным операторным пространствам. Эти работы затем многократно были повторены математиками в самых разных странах. И до сих пор ведутся работы, посвященные операторным пространствам, обобщающим перестановочно инвариантные пространства функций. Часть из них на очень высоком уровне. Занимаясь этими пространствами, и связанными с ними свойствами операторов, я впервые заочно столкнулся с замечательным математиком Александром Гротендиком. Оказалось, что он в годы своей молодости тоже отдал дань некоммутативным аналогам симметричных пространств. Мой скромный вклад состоял в том, что, опираясь на идеи И. Сигала, я распространил результаты Гротендика на неограниченные операторы, из которых в основном и состоят некоммутативные аналоги симметричных пространств. Причем, в начале работы и по ходу дела я совершенно не знал о работе Гротендика. Она была опубликована в трудах семинара Бурбаки и была тогда мало известна. Вообще же, мой интерес к алгебрам Неймана (они лежат в основе некоммутативного интегрирования) возник после лекций, которые прочел Г. И. Кац в первой Воронежской математической школе. Он рассказывал общую теорию C^*-алгебр, GNS-конструкцию и т.п. На меня, студента 3-его курса, они произвели огромное впечатление. Видимо, их содержание соответствовало моему внутреннему настрою. Впоследствии именно Г. И. Кац был оппонентом моей кандидатской диссертации.

С этой работой по некоммутативным симметричным пространствам связано одно интересное обстоятельство моей биографии. Занимаясь этой задачей, я обратил внимание, что Е. М. Семенов как-то равнодушно или даже осуждающе относится к моей работе. Это было неприятно, потому что я начинал свою научную карьеру рядом с ним, и его мнение тогда казалось мне важным. Мы оба были учениками С. Г. Крейна, и это на мой взгляд должно было предопределять наше позитивное отношение друг к другу. Так оно и было внешне и с моей стороны по крайней мере. Поэтому с 1973 года я работал на кафедре теории функций и геометрии, которой до сих пор заведует Е. М. Семенов. Как известно, при первой возможности я ушел с этой кафедры, и никогда не жалел об этом, в частности, и потому, что это удивившее меня поначалу отношение Семенова к моим работам продолжалось и далее. Мне кажется, что Е. М. Семенов, начиная с тех далеких лет, никогда не понимал, чем я занимаюсь и был не в состоянии адекватно оценить мои работы.

С моей кандидатской диссертацией связано еще одно имя, которое я вспоминаю в отличие от предыдущего с любовью. Это – Иосиф Семенович Иохвидов. Он был вторым оппонентом моей диссертации. Иохвидов переехал в Воронеж в 1968 году и начал работать в ВГУ.

Он сразу начал читать нам курс по пространствам с индефинитной метрикой. С этим курсом связан один математический "подвиг", который мне посчастливилось совершить. На этом спецкурсе Иосиф Семенович поставил много нерешенных задач, в частности, о разложении на нейтральные подпространства. По тогдашней нашей моде мы пошли сдавать ему экзамен досрочно, пусть всего лишь на несколько дней. Он в тот день принимал серьезный экзамен по математическому анализу на первом курсе и посадил нас в аудитории, чтобы поговорить с нами между делом. Естественно наш экзамен затянулся. Мне достался вопрос об этих нейтральных подпространствах. Я написал, что было рассказано в лекциях и ждал, когда можно будет ответить. Времени было навалом, и в это самое время мне удалось решить задачу, которую ставил Иосиф Семенович. Отвечая на вопрос, я ему и рассказал решение. И я и он были в восторге. Потом об этой задаче была написана небольшая статья, опубликованная в Кишиневе. Это была вторая моя опубликованная работа. Первая моя работа, посвященная строго сингулярным вложениям, оказалась связанной с идеей Гротендика о факторизации операторов Гильберта–Шмидта. Опять к такому подходу я пришел совершенно независимо. Связь с результатами Гротендика стала мне понятна значительно позднее. К этой мистике добавлю, что основная моя работа, в которой изложены идеи и результаты метода орбит, называется "Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика". Работы Гротендика, которые я читал, мне никогда не казались написанными непонятно, а такое мнение о его работах является общим местом. Очень жаль, что мне не пришлось встретиться с этим человеком.

Второй мой "подвиг" связан с М. А. Красносельским. Когда я поступил в аспирантуру, встретил меня в коридоре Марк Александрович и сказал, что вот есть задача о строении локально фредгольмового нелинейного гладкого отображения в окрестности выпуклого компакта, и никто не может ее решить. Речь шла об аналоге теоремы С. М. Никольского о строении линейного фредгольмового отображения нулевого индекса. Я сразу стал предлагать всякие глупые варианты, но вскоре мне стало ясно, что не все так просто. Что важно, у меня не было никакого опыта в нелинейных задачах. Впрочем на это, видимо, Марк Александрович и рассчитывал. И вот весь первый год – осень и зиму – в аспирантуре я занимался этой задачей, забросив все другие, потому что считалось, что моя дипломная работа почти годится для кандидатской. (Кстати, моя дипломная работа как раз в это время была удостоена золотой медали ВДНХ.) Это единственная в моей жизни награда. Селим Григорьевич, где-то к весне уже начал высказывать некоторое недовольство. Я же очень увлекся. Мне действительно удалось решить эту задачу, правда, в гильбертовом пространстве, но совершенно новым методом, основанным на гомотопических идеях, связанных с расслоениями. Когда решение было найдено, С. Г. Крейн был доволен, потому что оказалось, что эту же задачу решал Ю. И. Сапронов, и получилось некоторое соревнование, пощекотавшее нервы руководителю Ю. И. Сапронова профессору Ю. Г. Борисовичу, который всегда ревниво защищал своих учеников от мнимых и реальных угроз. Юрий Иванович нашел естественное решение, но там требовалась дополнительная гладкость. Так что в соревновании как бы не было победителя. Эта работа для меня памятна еще и тем, что объясняя свое решение Красносельскому, я столкнулся с его "командой". Из общения с ними я понял, что Марк Александрович действительно был реальный лидер этой группы.

Прошла длинная жизнь. Естественно мне приходилось общаться не только со своими учителями. Многие люди оказывали серьезное влияние на мою жизнь. Например, благодаря моему соавтору М. З. Берколайко я познакомился со своей будущей женой. Его сын Гриша Берколайко – это мой самый любимый ученик. А есть еще мои аспиранты из Курска, мои ученики из 58 школы. Именно благодаря этому еще одному математическому классу в 58 школе, организованному на сей раз Б. Н. Садовским, наш факультет еще сохранял дыхание последние годы. С особой благодарностью я думаю о кафедре математического моделирования, на которой я сейчас работаю.

Список избранных трудов

1. Вложение, компактное относительно гильбертова пространства // Труды семинара по функциональному анализу. 1968. В.10. С.67–71. (Воронеж, ВГУ).

2. О разложимости пространств с индефинитной метрикой // Математические исследования. 1969. Т.3, в.4 (10). С.175–177.

3. Симметричные пространства измеримых операторов // Докл. АН СССР. 1970. Т.191, N4. С.769–771.

4. О s-числах измеримых операторов // Функциональный анализ и его приложения. 1970. Т.4, в.3. С.78–85.

5. Об одной задаче в теории нелинейных фредгольмовых операторов // Математические заметки.1971. Т.10, в.5. С.541–547.

6. О вполне непрерывных операторах относительно алгебры Неймана // Функц. анализ и его прил. 1972. Т.6, в.1. С.37–40.

7. Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика // Функц. анализ и его прил. 1976. Т.10, в.4. С.45–54.

8. Интерполяционные орбиты классов S_p в парах гильбертовых пространств // Докл. АН СССР. 1978. Т.242, N 1. С.52–55.

9. О пространствах вещественного метода // Докл. АН СССР. 1979. Т.246, N4. С.794–797. Совм. с Дмитриевым В.И.

10. Об оценках интерполяционных орбит // Математический сборник. 1981. Т. 115. С.642–652.

11. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Труды МИАН СССР. 1983. Т.161. С.3–17. Совм. с Берколайко М.З.

12. Точная интерполяционная теорема в пространствах L_p // Докл. АН СССР. 1983. Т.272, N2. С.300–303.

13. The method of orbits in interpolation theory. Math. Reports. V.1. part 2. Chur–Paris–London–New-York: Harwood Acad. Pbl., 1984. 167 p.

14. Интерполяционные теоремы для пространств L_{pq} // Математический сборник. 1988. Т.136. №2. С.227–240.

15. On relation between complex and real methods of interpolation // Studia Math. 1997. V.125. N 3. P.201–218. Joint with M.Mastylo.

16. Расширения матриц, когерентно ядерные операторы и некоммутативные пространства BMO // Докл. РАН. 1998. Т.363. N1. С.17–19.

17. Nonclassical interpolation in spaces of smooth functions // Studia Math. 1999. V.135. N.3. P.203–218.

18. Interpolation orbits in couples of L_p spaces // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1. 2002. V.334. P. 881–884.

19. Описание интерполяционных орбит идеалов Неймана–Шаттена, действующих в гильбертовых парах, и теоремы вложения // Доклады РАН. 2003. Т.393. N 1. С. 10–13. Совместно с Е.Д.Кравишвили

20. Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега // Функциональный анализ и его приложения. 2005. Т.39. В.1. С.56–68.

21. Ovchinnikov V.I. Criteria for embedding of spaces constructed by the method of means with arbitrary quasi-concave functional parameters

// Journal of Functional Analysis. 2005. V. 228. P. 234- 243.

К 60–летию Ю. И. Сапронова

Юрий Иванович Сапронов родился 6 мая 1947 года в городе Уссурийске Приморского края, в Воронеже проживает с 21 ноября 1957 года. Окончил воронежскую среднюю школу № 58 (с математическим уклоном) в 1965 г. и в этом же году поступил на первый курс математико – механического факультета Воронежского государственного университета. Окончив в 1970 г. математический факультет ВГУ по кафедре алгебры и топологических методов анализа, поступил в аспирантуру (руководитель — проф. Ю. Г. Борисович). Кандидатскую диссертацию защитил в 1972 г. (Воронеж, ВГУ), докторскую — в 1992 г. (Харьков, ФТИНТ). Является автором более 150 научных работ, трех монографий и двух обзоров в УМН. Среди его учеников 14 кандидатов наук. С 1994 г. — профессор (по кафедре алгебры и топологических методов анализа), с 1998 г. по н.в. работает в должности профессора кафедры математического моделировния ВГУ.

Область научных интересов — нелинейный функциональный анализ, динамические системы, нелинейные краевые задачи, бифуркационный анализ уравнений математической физики.

Основные научные результаты, полученные Ю. И. Сапроновым в молодые годы, — принципы инвариантности топологической степени для компактных векторных полей в банаховых пространствах, теорема о биекивности множеств гомотопических классов для компактных и уплотняющих векторных полей, теорема о нелокальной приводимости фредгольмовых отображений к форме Лере – Шаудера. В более зрелом возрасте Ю. И. Сапронов переключился на бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений и его приложения к нелинейным задачам математической физики. Среди полученных им результатов — развитие методов бифуркационного анализа фредгольмовых уравнений в особых точках с многомерным вырождением, развитие методов нелокального бифуркационного анализа фредгольмовых уравнений, исследование многомодовых прогибов упругих систем, многомодовых фазовых переходов в кристаллах и многомодовых бифуркаций нелинейных волн.

Основные публикации:

1. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере – Шаудера// Успехи матем. наук, 1977. вып. 4. – С. 3–54.

2. Сапронов Ю.И. Многомодовые бифуркации упругих равновесий// Прикл. матем. и механ. – 1988. Т.52, вып 6. – С.997-1006.

3. Сапронов Ю.И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций// Матем. сборник. – 1989. Т.180, N 10. – С. 1299-1310.

5. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи матем. наук, 1996, Т.51, вып.6. – С. 101-132.

6. Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах// Матем. заметки. – 2000. Т. 58, N 5. – С. 745-754.

7. Darinskii B.M., Sapronov Yu.I., Shalimov V.V. Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter// Ferroelectrics. – 2002. V. 265. – P. 31-42.

8. Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. – Воронеж, ВГУ. 2002. – 185 с.

9. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов. Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т. 12 (2004). – С. 3-140.

10. Валюхов С. Г., Костин В. А., Сапронов Ю. И., Семенов С. М. Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей. – Воронеж: ВорГУ. 2005. – 177 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В., Савочкина А.А. (Пермь)
mc@pstu.ru

Исследуется на разрешимость периодическая задача

$$\begin{array}{l} \partial_{t,t}(x(t)) + \omega^2 x(t) = f(t, x(t)) + g(t), \\ x(0) = x(T), \partial_t(x(0)) = \partial_t(x(T)), \end{array} \tag{1}$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}, x : [0,T] \to R^1$ — искомая функция $f : [0,T] \times R^1 \to R^1$ — функция, удовлетворяющая условию Каратеодори. Решение задачи (1) будем искать в банаховом пространстве $W_2 = W_2[0,T]$ абсолютно непрерывных функций, имеющих абсолютно непрерывную первую производную, таких, что $\partial_{t,t}x \in L_2 = L_2[0,T]$. С применением теорем существования решения для квазилинейного операторного уравнения Lx = Fx доказаны новые признаки разрешимости задачи (1). Сформулируем одно из утверждений.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:
1) существует константа $m > 0$, что неравенство $(f(t,u) - f(t,v))(u - v) \geqslant m\left|u - v\right|^2$ справедливо для любого $t \in [0,T]$ и произвольных $u, v \epsilon R^1$;
2) существуют константы $a, b > 0$, что неравенство $|f(t,u)| \leqslant a + b|u|$ справедливо для любого $t \in [0,T]$ и всех $u \epsilon R^1$;
3) выполнено неравенство
$b\left(1 + \pi\sqrt{2}\right)\left(1 + \frac{b}{m}\left(\omega^2 + \sqrt{\frac{\omega+\omega^3}{\pi}}\right)\right) < 1.$

Тогда периодическая краевая задача (1) имеет решение для любого $g(\cdot)\epsilon L_2[0,T]$.

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. (Москва)
asn@cs.msu.su , *kiselev@cs.msu.su*

Описывается метод продолжения по параметру (МПП) в алгоритмах решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Приводятся результаты численных экспериментов решения краевых задач, в том числе краевых задач, возникающих в оптимальном управлении. МПП можно рассматривать как специальное развитие и модификацию классического метода Ньютона. Сжатая формулировка основной идеи подхода: *сведение краевой задачи к задаче Коши.* Рассматривая задачу Коши как элементарную операцию, приходим к компактному описанию алгоритма решения краевой задачи. Интерес к этой тематике связан с исследованием численных алгоритмов решения линейной задачи быстродействия и нацелен на краевые задачи принципа максимума. Разработанная программа позволяет решать в среде Maple регулярные краевые задачи для ОДУ, некоторые краевые задачи принципа максимума, возникающие в оптимальном управлении, задачи поиска периодических решений, предельных циклов и т.д. Предлагается простой алгоритм построения множеств достижимости (управляемости) плоских линейных управляемых систем с примерами его применения. Основой алгоритма служат параметрические уравнения границы плоского строго выпуклого компакта (заданного опорной функцией), позволяющие строить двумерные проекции множеств достижимости многомерных линейных управляемых систем. Приводятся достаточные условия оптимальности для нелинейных управляемых систем в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина, алгоритмы построения алгебраической суммы и геометрической разности. (Грант ВШ-7581.2006.1)

Литература

1. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. Екатеринбург. 2006. Т.12. N2. С. 1-15.

2. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Опорные функции некоторых специальных множеств // Проблемы динамического управления. / Под ред. Ю.С.Осипова, А.В.Кряжимского. М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 24-110.

О ЕДИНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МНОЖЕСТВ, МУЛЬТИМНОЖЕСТВ, НЕЧЕТКИХ И МЯГКИХ МНОЖЕСТВ

Алексеева С.М., Мациевский С.В. (Калининград)

matsievsky@newmail.ru

Нечеткие множества — основа современных методов управления с использованием мягких систем: нечетких систем, нейронных сетей, генетических алгоритмов и их различных гибридных систем [1, 2]. Кроме того, активно разрабатываются параллельные системы управления, основанные на мультимножествах [3] и мягких множествах [4]. По причине отсутствия изложения теории мультимножеств и мягких множеств в учебной литературе и предпринято данное исследование основ определения различных видов множеств, обогатившее терминологическую базу основ теории множеств и сделавшее более выпуклым понятие нечеткого множества [5].

Введены понятия мультимножеств, нечетких и мягких множеств без концепции универсума, для чего использованы кратности, степени принадлежности и множества принадлежности их элементов. Приведена концепция определения этих видов множеств через понятия носителя, уровней и спектра, состоящего из пороговых уровней.

Для всех трех видов неклассических множеств определены и изучены элементарные понятия высоты, мощности, размерности и равномерного и линейного индексов нечеткости, а для мягкого множества — еще и мягкой размерности и индексов мягкости.

Литература

1. Мациевский С. В., Толстель О. В. Нечеткие системы. Калининград, 2006.

2. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде matlab и fuzzytech. СПБ., 2003.

3. Петровский А. Б. Пространства множеств и мультимножеств. М., 2003.

4. Молодцов Д. А. Теория мягких множеств. М., 2004.

5. Мациевский С. В. Элементарная теория множеств, мультимножеств, нечетких и мягких множеств. Калининград, 2007.

ОЦЕНКА ОБРАТНОГО ИСКАЖЕНИЯ УГЛОВ ДЛЯ КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ КВАЗИРЕГУЛЯРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Асеев В.В. (Новосибирск)

btp@math.nsc.ru

В работе [1] было введено понятие обобщенного угла: это четверка непустых множеств $\Phi = (A_1, B_1, A_2, B_2)$, где $(B_1 \cup B_2) \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing$ и $B_1 \cup B_2$ содержит более одной точки; величина обобщенного угла Φ определяется формулой

$$\alpha(\Phi) = \inf\ \sup \frac{\rho(a_1, a_2)\rho(b_1.b_2)}{\rho(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2) + \rho(a_2, b_1)\rho(a_1, b_2)}.$$

где inf берётся по всем $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_1$, а sup – по всем $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$. Так как при любом отображении полный прообраз обобщенного угла является обобщенным углом, то можно рассматривать *обратное искажение* обобщенных углов при произвольных отображениях метрических пространств. В частности, при ортогональной проекции $\mathrm{pr} : R^n \to R^1$ пространства R^n на прямую R^1, продолженной условием $\mathrm{pr}(\infty) = \infty$ до отображения $\mathrm{pr} : \bar{R}^n \to \bar{R}^1$, соотношение

$$\alpha(\mathrm{pr}^{-1}(A_1), \mathrm{pr}^{-1}(B_1), \mathrm{pr}^{-1}(A_2), \mathrm{pr}^{-1}(B_2)) =$$

$$= \alpha(A_1, B_1 \cup \{\infty\}, A_2, B_2 \cup \{\infty\}) \geqslant \alpha(A_1, B_1, A_2, B_2)$$

выполняется для любого обобщенного угла (A_1, B_1, A_2, B_2), с $A_1 \cup A_2 \in R^1$, $B_1 \cup B_2 \in \bar{R}^1$. С учетом оценки, установленной в [1], получаем утверждение: Пусть $f : R^n \to R^n$ – непостоянное K-квазирегулярное отображение. Тогда для любого обобщенного угла $\Phi = (A_1, B, A_2, B)$ на прямой R^1 и любой координатной функции f_j отображения f верна оценка $\alpha(f_j^{-1}(\Phi)) \geqslant \omega(\alpha(\Psi))$, где оценка искажения $\omega(t) > 0$ зависит лишь от K и n.

Литература

1. *Асеев В.В., Сычев А.В., Тетенов А.В.*: Мебиусово - инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеевых пространствах. – Сибирск. матем. ж., **56**, No 2, 2005, pp. 189-204.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Астахов А.Т. (Воронеж)

АСТАХОВ@yandex.ru

Пусть $K_\alpha = \left\{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n : \|x'\| = \alpha x_1\right\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат и раствором α. Обозначим пересечение конуса K_α и сферы S_R^{n-1} радиуса R размерности $n-1$ с центром в начале координат из $\mathbb{R}^n$ через S_r^{n-2} – сфера радиуса r размерности $n-2$.

В настоящей работе доказана

Теорема. *Для существования ненулевой, гармонической в* $\mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$ *функции, равной нулю на сфере* S_r^{n-2}*, необходимо и до-*

статочно, чтобы существовал многочлен Гегенбауэра из последовательности

$$P_{\kappa-i}^{\beta+i}\left(\cos\vartheta_1\right), \quad \beta=\frac{(n-2)}{2}, \quad i=0,1,\ldots,\kappa, \quad \kappa=0,1,\ldots, \quad \operatorname{tg}\left(\vartheta_1\right)=\alpha,$$

для которого $\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}$ *является нулем. При этом* $r=\dfrac{\alpha R}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

Автор благодарен проф. В.З. Мешкову за внимание к работе.

КРИТЕРИЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Асташова И.В. (Москва)
ast@diffiety.ac.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(i)}+p(x)\,|y|^{k-1} y=0\,, \tag{1}$$

где $p(x)$ и $a_j(x)$ — непрерывные функции, $n \geqslant 1$, $k>1$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) функции* $p(x)$, $a_j(x)$, $j=0,1,\ldots,n-1$, *удовлетворяют условиям*

$$\int_x^{\infty} x^{n-1}\,|p(x)|\,dx<\infty, \tag{2}$$

$$\int_x^{\infty} x^{n-j-1}\,|a_j(x)|\,dx<\infty. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) имеет неколеблющееся решение, стремящееся к ненулевому пределу при $x\to\infty$.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1) функция* $p(x)$ *положительна, а функции* $a_j(x)$, $j=0,\ldots,n-1$, *удовлетворяют условиям (3).*

Тогда уравнение (1) имеет заданное в некоторой окрестности $+\infty$ *неколеблющееся решение* $y(x)$, *не стремящееся к нулю при* $x\to+\infty$,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00715).

в том и только том случае, когда функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству (2).

Теорема 3. *Пусть в уравнении (1) четного порядка n функция $p(x)$ положительна, а функции $a_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, удовлетворяют условиям (3).*

Тогда все решения уравнения (1) в окрестности $+\infty$ являются колеблющимися в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{x}^{\infty} x^{n-1}\, |p(x)|\, dx = \infty\,.$$

Замечание. Приведенные результаты являются обобщением известного критерия колеблемости Ф.Аткинсона [1], доказанным для уравнения (1) при $a_j(x) = 0$, $n = 2$, $k = 2l - 1$, где l - целое число, большее 1, обобщенным И.Т.Кигурадзе на случай произвольного $k > 1$ (см.[2]) и на случай $a_j(x) = 0$ и $n \geqslant 2$ (см.[3]).

Литература

1. *Atkinson F. V.* Pacif.J.Math. 1955. V. 5, No. 1. P. 643-647.
2. *Кигурадзе И. Т.* Čas. pěst. mat. 1962. V.87, No. 4. S. 492-495.
3. *Кигурадзе И. Т.* Мат. сборник. 1964. Т.65, No. 2. С. 172-187.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ

Бабич О.В. (Ижевск)

lg@izh.com

Пусть на отрезке $[a, b]$ A— $m \times n$-матрица с непрерывными, B — $m \times n$-матрица с суммируемыми, Φ — $k \times n$-матрица с измеримыми и ограниченными в существенном компонентами, Ψ — постоянная $k \times n$-матрица, f — вектор-функция с суммируемыми компонентами, $D = (E - AA^{-})$, $t_0 < ... < t_q$ — фиксированные точки, $t_0 = a$, $t_q = b$, $T_i = [t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1, q-1}$, $T_q = [t_q, b]$, v — кусочно постоянная вектор-функция, принимающая значения v_i, на T_i, $i = \overline{1, q}$.

Теорема. *Пусть существует полуобратная матрица A^{-} с непрерывными компонентами, такая что матрица DB — непрерывна. Существование управления v, определяющего абсолютно непрерывное решение x системы $A\dot{x} = Bx + Cv + f$, $t \in [a, b]$,*

$\int\limits_a^b \Phi\dot{x}ds + \Psi x(a) \geqslant \beta$ *эквивалентно существованию векторов* $\xi_i \in R^n$, $i = \overline{1,q}$ *и* $w_i \in R^m$, $i = \overline{1,q}$ *и вектор-функций* $u_i : T_i \to R^m$ *с суммируемыми компонентами, таких что* $Au_i = 0$, $N_i = M_i(\Gamma_i^1)^- \Gamma_i^2(u_i)$, $\Gamma_i^1(\xi_i, w_i)^\top = 0$, $\Gamma_i^3(u_i)(\xi_{i+1}, \xi_i, w_i)^\top = -X_i(t_i)F_i(t_i, u_i)$, $i = \overline{1, q-1}$, $\Gamma(\xi_1, ..., \xi_q, w_1, ..., w_q)^\top \geqslant P(u_1, ..., u_q)$, *где* $\Gamma_i^1 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} M_i^\top M_i dt$, $\Gamma_i^2 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} M_i^\top N_i dt$,

$\Gamma_i^3 = (E, -X_i(t_i), -X_i(t_i)H_i(t_i))$, $\Gamma = (\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi S_1 ds + \Psi, ...$

$$..., \int\limits_{t_{q-1}}^{t_q} \Phi S_q ds + \Psi, \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi S_1 \ (\int\limits_{t_0}^{s} X_1^{-1} A^- C d\tau + A^- C) ds, ... \ , \int\limits_{t_{q-1}}^{t_q} \Phi S_q \cdot$$

$$\cdot (\int\limits_{t_{q-1}}^{s} X_q^{-1} A^- C d\tau + A^- C) ds), \ P(u_1, ..., u_q) = \beta - \sum_{i=1}^{q} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(S_i \cdot$$

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{s} X_i^{-1}(A^- f + u_i) d\tau + A^- f + u_i) ds, \ M_i = (G_i, G_i H_i + DC),$$

$N_i(t) = G_i F_i(t, u_i) - Df$, $H_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t} X_i^{-1} A^- C d\tau$, $G_i = DBX_i$,

$F_i(t, u_i) = -\int\limits_{t_{i-1}}^{t} X_i^{-1}(A^- f + u_i) d\tau$, $\dot{X}_i = A^- BX_i$, $X_i(t_{i-1}) = E$, $S_i = A^- BX_i$, $t \in T_i$, $i = \overline{1,q}$, E *— единичная матрица.*

АСИМПТОТИКА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СОСЕДНИМИ НУЛЯМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПОЛИНОМА[1]

Бадков В.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{\Phi_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная с (2π-периодическим) весом φ система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации на $[-\pi, \pi]$ методом Шмидта последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \dots$; $\omega(F;\delta)_2$ — среднеквадратичный модуль непрерывности функции F.

Положительная функция $L(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если она измерима на $[0, A]$ ($A > 0$) и для произвольного $\lambda > 0$

[1]Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (НШ-5120.2006.01) и грантом РФФИ (05-01-00233).

$\lim\limits_{x\to+0}[L(\lambda x)]/L(x)] = 1.$

Основным результатом сообщения является следующая

Теорема. *Пусть вес $\varphi(\tau)$ имеет вид:*

$$\varphi(\tau) := h(\tau)w_1(|\sin[(\tau-\theta_1)/2]|)\cdots w_m(|\sin[(\tau-\theta_m)/2]|),$$

где $-\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqslant \pi$; $w_\nu(t)$ $(\nu = 1,\ldots,m)$ — действительные степени медленно меняющихся в окрестности нуля вогнутых модулей непрерывности; функция $h(\tau)$ измерима, ограничена сверху и снизу положительными константами и удовлетворяет условию $\omega(h;\delta)_2 = o(\delta^{1/2})$. Тогда для любой пары соседних нулей τ', τ'' $(\tau' < \tau'')$ полинома $\Phi_{2n-1}(\tau)$ (также и полинома $\Phi_{2n}(\tau)$) равномерно относительно этой пары $\tau'' - \tau' = \pi n^{-1}[1 + o(1)]$ $(n \to \infty)$.

Литература

1. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ.* – М.: Наука, 1985. – 144 с.

2. Бадков В.М. *Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса* // Тр. МИРАН. – 1992. – Т. 198. – С. 41-88.

3. Бадков В.М. *О нулях ортогональных полиномов* // Тр. Института математики и механики УрО РАН. – 2005. – Т. 11, № 2. – С. 30-46.

4. Бадков В.М. *Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: Учеб. пособие* – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. – 132 с.

ТЕОРЕМА О КОММУТАЦИИ ВЕСОВОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ И ОПЕРАТОРА КОММУТАЦИИ

Баев А.Д. (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t),\ t \in R^1_+$ для которой $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$, при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ при $t \geqslant d > 0$ для некоторого $d > 0$.

Введем интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование связано с преобразованием Фурье $F_{x\to\xi}$ следующим равенством:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],\ u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)},$$

где $\varphi^{-1}(t)$ - функция, обратная к функции $\upsilon = \varphi(t) = \int\limits_t^\alpha \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Преобразование F_α преобразует оператор "весового"дифференцирования $D_{\alpha,t} = \sqrt{-\alpha(t)}\frac{d}{dt}\sqrt{\alpha(t)}$ в оператор умножения на двойственную переменную η.

Определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^\sigma(t, D_x, D_{\alpha,t}u(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[u(x,t)]],$$

Предположим, что символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию: $\lambda(t,\xi,\eta) \in C^\infty(R^1_+ \times R^{n-1} \times R^1)$ и

$$|(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t})^k \frac{\partial^\ell}{\partial\xi^\ell}\frac{\partial^m}{\partial\eta^m}\lambda(t,\xi,\eta)| \leqslant C_{k\ell m}(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\sigma-m+\delta k-\ell},$$

где $0<\delta<1$ некоторое число.

Пусть пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ состоит из функций $u(x,t)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{s,\alpha} = \{\int\limits_{R^n}(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^s|F_\alpha F_{x\to\xi}[u]|^2 d\xi d\eta\}^{\frac{1}{2}}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $u(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$ тогда для оператора $M_{\ell,\sigma}v = \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}K^{(\sigma)}[u] - K^{(\sigma)}[\frac{\partial^\ell u}{\partial^\ell t}]$ справедлива оценка

$$\|M_{\ell,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leqslant C\sum_{j=0}^{\ell-1}\|\frac{\partial^j u}{\partial^j t}\|_{s-1+\delta+\sigma,\alpha}.$$

КВАЗИУРОВНИ ДВУХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Баранова Л.Е., Чубурин Ю.П. (Ижевск)
chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассмотрим оператор вида $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V(n-m)$, действующий в пространстве $l^2(\mathbf{Z}^{2d})$. Здесь $(H_0\psi)(n,m) = \sum\limits_{|(n',m')-(n,m)|=1} \psi(n',m')$, где $|(\nu,\mu)| = \sum\limits_{j=1}^{d}(|\nu_j| + |\mu_j|), \nu,\mu \in \mathbf{Z}^d$, а ненулевая вещественная функция $V(n)$ ($V(n-m)$ – потенциал взаимодействия частиц), удовлетворяет оценке $|V(n)| \leqslant Ce^{-a|n|}$, где $a > 0$.

Оператор H_ε коммутирует с операторами сдвига в $l^2(\mathbf{Z}^{2d})$ вида $\psi(n,m) \to \psi(n+\nu, m+\nu)$, $\nu \in \mathbf{Z}^d$, поэтому его можно "послойно"разложить в прямом интеграле пространств

$$\int\limits_{\mathbf{T}^d}^{\oplus} l^2(\mathbf{Z}^d)dk = l^2(\mathbf{Z}^d) \otimes L^2(\mathbf{T}^d),$$

где $\mathbf{T}^d = [-\pi,\pi)^d$ — d-мерный тор, в семейство операторов $H_\varepsilon(k)$ (k — квазиимпульс).

Пусть $d=1$. В окрестностях граничных точек $\pm 4\cos(k/2)$ существенного спектра оператора $H_\varepsilon(k)$ его функция Грина имеет ветвление второго порядка. Соответственно, у данного оператора могут существовать как собственные значения (на первом листе) так и резонансы (на втором листе); те и другие вместе назовем *квазиуровнями.*

Теорема 1. *Пусть $d=1$. Предположим, что $\overline{V} = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} V(n) \neq 0$. Тогда в некоторых окрестностях точек $\pm 4\cos(k/2)$ для всех достаточно малых ε существует ровно по одному квазиуровню $\lambda = \lambda_\varepsilon$ оператора $H_\varepsilon(k)$ кратности единица, для которых справедлива формула*

$$\lambda_\varepsilon = \pm\big(4\cos(k/2) + \frac{\varepsilon^2\overline{V}^2}{8(\cos(k/2))}\big) + O(\varepsilon^3).$$

При этом квазиуровень вблизи точки $4\cos(k/2)$ (соответственно, $-4\cos(k/2)$) является при $\overline{V} > 0$ собственным значением (соответ-

ственно, резонансом), а при $\overline{V} < 0$ *— резонансом (соответственно, собственным значением).*

Исследован также случай произвольной размерности.

СТЕПЕНЬ СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

Басова М.М. (Воронеж)

basova_marina@mail.ru

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $l : dom\ l \subset E_1 \to E_2$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $U \subset E_1$ — открытое ограниченное множество. Пусть X, Y — топологические пространства, $K(Y)$ — совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства Y.

Определение 1. Классом $A(X, Y)$ называется совокупность мультиотображений $G : X \to K(Y)$, удовлетворяющих условиям:
(1) G является аппроксимируемым мультиотображением;
(2) для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что для каждого δ $(0 < \delta < \delta_0)$ и любых двух δ-аппроксимаций $g_\delta, \widetilde{g}_\delta : X \to Y$ мультиотображения G найдется непрерывное отображение $h : X \times [0, 1] \to Y$ такое, что $h(x, 0) = g_\delta,\quad h(x, 1) = \widetilde{g}_\delta$ для всех $x \in X$; $h(x, \lambda)$ является ϵ-аппроксимацией мультиотображения G для каждого $\lambda \in [0, 1]$.

Определение 2. Классом $\mathbb{A}^c(\overline{U}, E_2)$ назовем совокупность мультиотображений $F : \overline{U} \overset{F_1}{\multimap} X_1 \overset{F_2}{\multimap} X_2 \overset{F_3}{\multimap} \ldots \overset{F_{k-1}}{\multimap} X_{k-1} \overset{F_k}{\multimap} E$, где X_i, $(i = 1, ..., k-1)$ — банаховы пространства,$F_1 \in A(\overline{U}_n, X_1)$, $\overline{U}_n = \overline{U} \cap E_n$, для любого E_n, $dim\ E_n = n$, и $F_i \in A(V_i, X_i)$ $(i = 2, ...k)$, где V_i — произвольное выпуклое компактное подмножество пространства X_{i-1}.

Строится теория топологической степени совпадения $deg(l, F, \overline{U})$ для l-компактных мультиотображений F из класса $\mathbb{A}^c(\overline{U}, E_2)$ и описываются ее основные свойства.

Литература

[1] Корнев С.В., Обуховский В.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений // Труды математического факультета, вып. 8, 2004, с.56-74.

О ПРОДОЛЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ДВУСТОРОННИМИ ОЦЕНКАМИ НА КОНУСЕ

Бахтин И.А. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве с конусом приводятся признаки продолжимости линейных операторов с подпространства на все пространство с сохранением свойств линейности и двусторонних оценок на конусе.

1. Пусть E — банахово пространство, а $K \subset E$ — конус.

Определение. *Оператор $P : K \to E$ называется однородно выпуклым (вогнутым), если $P(x+y) \leqslant Px + Py$ $(\geqslant)$ $\quad (x, y \in K)$ и $Ptx = tPx \quad (x \in K,\ t \geqslant 0)$.*

Теорема 1. *Пусть 1) в вещественном банаховом пространстве E конус K сильно миниэдрален;*

2) однородно выпуклый и однородно вогнутый на конусе K операторы P и Q удовлетворяют неравенству: $Qx \leqslant Px$ $(x \in K)$;

3) в подпространстве $L \subset E \quad (L \neq E)$, мажорирующем E, определен линейный оператор A, такой, что $Qx \leqslant Ax \leqslant Px$ $(x \in K_L = K \cap L)$.

Тогда в E существует линейный оператор F, такой, что

$$Fx = Ax \quad (x \in L) \text{ и } Qx \leqslant Fx \leqslant Px \quad (x \in K)$$

2. **Теорема 2.** *Пусть 1) в сепарабельном банаховом пространстве E воспроизводящий конус K сильно миниэдрален;*

2) на конусе K существуют непрерывные однородно выпуклый и однородно вогнутый операторы P и Q, такие, что

$$Qx \leqslant Px \quad (x \in K);$$

3) на подпространстве $L \subset E \quad (L \neq E)$ определен линейный оператор $A \neq 0$, такой, что

$$Qx \leqslant Ax \leqslant Px \quad (x \in K_L = K \cap L).$$

Тогда для существования в E линейного непрерывного оператора F, такого, что $Fx = Au \quad (x \in L)$ и $Qx \leqslant Fx \leqslant Px \quad (x \in K)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $x_0 \in K \setminus L$ выполнялось неравенство $\sup\limits_{x \leqslant x_0, x \in L} (Ax + Q(x_0 - x)) \leqslant \inf\limits_{x \leqslant x_0, x \in L} (Ax + P(x_0 - x))$

ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В НЕПОЛНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

Бахтин И.А., Болдырева А.В. (Воронеж)

Для сходящихся операторов, действующих в неполном метрическом пространстве, приводится принцип сжимающих отображений и его приложение к вопросу существования положительных собственных векторов линейных положительных операторов в банаховом пространстве с конусом, не обладающим свойством нормальности.

1. Определение. *Оператор A, действующий в метрическом пространстве X, называется сходящимся, если для любой фундаментальной последовательности $(x_n) \subset X$ последовательность (Ax_n) сходится.*

Теорема 1. *В неполном метрическом пространстве X каждый сходящийся сжимающий оператор A имеет и притом только одну неподвижную точку.*

2. Приведём теперь одно приложение теоремы 1.

Определение. *Линейный положительный оператор A, действующий в банаховом пространстве E с конусом K, называется h-экстремальным, если для любой возрастающей, ограниченной сверху последовательности $(x_n) \subset E$: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant y$ существует элемент $u = \sup(Ax_n)$.*

Теорема 2. *Пусть*
1) в банаховом пространстве с конусом $K \subset E$, не обладающим свойством нормальности, линейный положительный оператор A h-экстремален;
2) оператор A преобразует конус K в некоторый конус $K_{u,\rho}$ Красносельского, где $u > 0$ — фиксированный элемент, а число $\rho \geqslant 1$;
3) значение $Au \neq 0$.
Тогда существуют элемент $x_0 > 0$ и число $\lambda_0 > 0$, такие, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

Отметим, что теорема 2 ранее другим способом была доказана И.А. Бахтиным.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Бахтин И.А., Дорохов А.Н. (Воронеж)

В F-пространстве (пространстве Фреше) приводятся теоремы существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов.

1. Пусть X — F-пространство, а X^* — сопряженное пространство линейных непрерывных в X функционалов.

Определение. Сопряженное пространство X^* называется достаточным в F-пространстве X, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 1. Пусть

1) в F-пространстве X для каждого относительно компактного множества $M \subset X$ множество coM также относительно компактно;

2) сопряженное пространство X^* достаточно в X;

3) вполне непрерывный оператор A преобразует замкнутое ограниченное выпуклое множество $V \subset X$ $(V \neq \varnothing)$ в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

2. **Определение.** Число $\|x\|_\rho = \rho(x, 0)$, $(x \in X)$ назовём ρ-нормой элемента x в F-пространстве X.

Теорема 2. Пусть

1) в F-пространстве X для каждого элемента $x \in X \setminus 0$ функция $\varphi_x(t) = \|tx\|_\rho$ возрастает по переменной t в промежутке $[0, \infty)$;

2) существует число $b > 0$, такое, что $\|tx\|_\rho \leqslant bt\|x\|_\rho$ $(t \in [0,1],\ x \in X)$;

3) в X существует норма $\|x\|$ и числа $a > 0$ и $r_0 > 0$, такие, что $a\|x\| \leqslant \|x\|_\rho$ $(x \in X, \|x\|_\rho \leqslant r_0)$;

4) вполне непрерывный оператор A преобразует замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset$ X в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

3. **Теорема 3.** Пусть

1) выполняются условия 1) - 2) теоремы 1;

2) конус $K \subset X$ псевдонормален;

3) вполне непрерывный оператор A преобразует конусной отрезок $\langle u, v\rangle$, где $u, v \in X$ $(u \leqslant v)$ — фиксированные элементы, в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in \langle u, v\rangle$, такой, что $Ax_* = x_*$.

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ОДНОГО КЛАССА НЕКОМПАКТНЫХ ВЫПУКЛЫХ ОПЕРАТОРОВ

Бахтин И.А., Ле Суан Дай (Воронеж)
ytkadai@yahoo.com

В вещественном банаховом пространстве E с вполне правильным конусом K приводятся признаки существования положительных неподвижных точек непрерывных u-выпуклых операторов.

1. Определение. *Положительный монотонный u-измеримый на конусе $K \subset E$ оператор A называется u-выпуклым, если $\forall x \in K(u)$ и $\forall t \in (0,1)$ существует число $\eta = \eta(x,t) > 0$ такое, что $Atx \leqslant (1-\eta)tAx$.*

Теорема 1. *Пусть 1) в вещественном банаховом пространстве E конус $K \subset E$ вполне правилен;*
2) непрерывный оператор A u-выпукл;
3) существуют элементы $x_0 > 0, y_0 > 0$, такие, что $Ax_0 \leqslant x_0$, $Ay_0 \geqslant y_0$;
4) существует число $\exists\ r > 0$, такое, что из $x > 0, Ax \leqslant x$ следует $||x|| \leqslant r$;
5) если $x > 0$ и $Ax < x$, то существует элемент $x' > x$, такой, что $Ax' \leqslant x'$.
Тогда существует элемент $x_* > 0$, такой, что $Ax_* = x_*$.

2. Теорема 2. *Пусть*
1) выполняются условия 1)-3) теоремы 1;
2) если $x > 0$ и $Ax < x$, то существует элемент $x' \in K_q(u)$, где $K_q(u)-$ некоторый конус Рутмана, такой, что $x' > x$ и $Ax' \leqslant x'$.
Тогда существует элемент $x_* > 0$, такой, что $Ax_* = x_*$.

3. Определение. *Линейный оператор B называется положительно обратимым, если у него существует обратный положительный на конусе K оператор B^{-1}.*

Теорема 3. *Пусть 1) выполняются условия 1)-2) теоремы 1;*
2) существуют элементы $0 < x_0 < y_0$, такие, что $Ax_0 \leqslant x_0$, $Ay_0 \geqslant y_0$;
3) линейный оператор B-I, где I - тождественный оператор, положительно обратим и из $x_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y_0$ следует
$Ay - Ax \leqslant B(y-x)$.
Тогда существует элемент $x_* \in < x_0, y_0 >$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Отметим, что мы в понятие линейности оператора включаем его свойство непрерывности.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Бейлина Н.В. (Самара)
natalie@samdiff.ru

В прямоугольнике $D = \{(x,t):\ 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую в D уравнению

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{1}$$

и условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad \int\limits_0^l u(x,t)dx = S(t), \tag{3}$$

где $\varphi(x), \psi(x), S(t)$ – заданные функции и выполняются условия согласования: $\int\limits_0^l \varphi(x)dx = S(0), \int\limits_0^l \psi(x)dx = S'(0)$. Доказана следующая

Теорема. *Если $\varphi(x) \in C^2\ [0,l]$ и имеет кусочно непрерывную производную третьего порядка, $\psi(x) \in C^1[0,l]$ и имеет кусочно непрерывную производную второго порядка, выполняются условия согласования, $S(t) \in C^2(\overline{D})$, то существует единственное решение задачи* (1) – (3) $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$.

Для доказательства теоремы была показана связь задачи (1)–(3) с обратной задачей, что позволило предложить способ исследования поставленной нелокальной задачи, не опирающийся на метод биортогональных рядов, и получить явный вид решения.

Литература

1. Бейлин С.А. Нелокальная задача с интегральным условием для одномерного волнового уравнения. Труды XXIV Конференции молодых ученых мех.-мат. факультета МГУ им. Ломоносова, Т. I, 2002, с. 24-26.

2. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения. Дифференц.уравн., 2004, том 40, №7

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. 2004.

ОЦЕНКА ПРИРАЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА[1]

Беляева О.А., Сумин В.И. (Нижний Новгород)

belaeva84@rambler.ru; v_sumin@mail.ru

Пусть $\Pi \equiv \left\{t \equiv \{t_1, t_2\} \in \mathbf{R}^2 : \overline{c}t_1 \leqslant t_2 \leqslant T_2 - \overline{c}t_1, 0 \leqslant t_1 \leqslant T_1\right\}$, фиксированы $\underline{c}$, $\overline{c}$, $\widehat{c}$, T_1, $T_2 \in \mathbf{R}_+$, $0 < \underline{c} \leqslant \overline{c}$. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}_c\,[x] \equiv x''_{t_1 t_1} - (c\,(t_1))^2\, x''_{t_2 t_2} = g(t, x(t)),\ t \in \Pi, \tag{1}$$

$$x\,(0, t_2) = 0, \quad x'_{t_1}\,(0, t_2) = 0 \ \text{ при } \ t_2 \in [0, T_2]\,, \tag{2}$$

где $g(t,l)\colon \Pi \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – задана, $c(\cdot) : [0,T_1] \to \mathbf{R}$ – управление, $g(t,l)$ и $g'_l(t,l)$ удовлетворяют условиям Каратеодори и ограничены на любом ограниченном множестве. Допустимы c из класса D абсолютно непрерывных функций таких, что $\underline{c} \leqslant c\,(t_1) \leqslant \overline{c}, |c'\,(t_1)| \leqslant \widehat{c}$ при $t_1 \in [0, T_1]$. Пусть Γ – "нижнее основание"$\{t \in \partial\Pi : t_1 = 0\}$ множества Π. Для любых $x \in W_2^1\,(\Pi)\,,\ c \in D,\ \eta \in W_2^1\,(\Pi)\,,\ z \in L_\infty\,(\Pi)$ положим $J\,[x, c, \eta, z] \equiv \int\limits_{\Pi} \left\{x'_{t_1}\eta'_{t_1} - (c)^2\, x'_{t_2}\eta'_{t_2} + z\eta\right\} dt$. Решением (1), (2), отвечающим управлению c, назовем функцию $x \in W_\infty^1\,(\Pi)$, для которой при любом $\eta \in W_2^1\,(\Pi)$, равном нулю на $\partial\Pi\backslash\Gamma$, имеем $J\,[x, c, \eta, g(\cdot, x)] = 0$. Каждому $c \in D$ может отвечать не более одного такого, глобального, решения. Пусть Ω – множество тех $c \in D$, каждому из которых отвечает глобальное решение. Обозначим через $A_c[z]$ решение из $W_\infty^1(\Pi)$ задачи Коши с условием (2) для уравнения $\mathcal{L}_c\,[x] = z(t),\ t \in \Pi$ при $c \in D,\ z \in L_\infty(\Pi)$. Линейный оператор $A_c[\cdot] : L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)$ ограничен, $c \in D$. Положим $r(c, c_0) \equiv \|A_c - A_{c_0}\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)}$. Как указано в [1], $\forall c_0 \in \Omega\ \exists \delta > 0 :$ $c \in D,\ r(c, c_0) < \delta\ \Rightarrow c \in \Omega$.

Теорема. $\forall c_0 \in \Omega\ \exists \delta > 0, K > 0, M > 0 : c \in D,\ r(c, c_0) < \delta$ $\Rightarrow c \in \Omega,\ \|x - x_0\|_{L_\infty(\Pi)} \leqslant K r(c, c_0)$, где x и x_0 – решения (1),(2), отвечающие c и c_0, и $r(c, c_0) \leqslant M\left(\|c - c_0\|_{C[0,T_1]} + \|c' - c'_0\|_{L_\infty[0,T_1]}\right)$

[1] Поддержка грантом РФФИ 04-01–00460.

Литература

1. Беляева О.А., Сумин В.И. // Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XVII". Воронеж. 2006. С.22-23.

УРАВНЕНИЕ $[axb] = c$ В ТЕРНАРНОМ ГРУППОИДЕ

Блюмин С.Л. (Липецк)

slb@stu.lipetsk.su

Пусть $\Gamma =< S, [\cdots] >$ — *тернарный группоид*, где $[\cdots] : S^3 \to S$ — *тернарная операция* $(a, b, c) \longmapsto [abc]$ над элементами множества S. Предположения об уравнении $[axb] = c$ и его коэффициентах a, b: (i)$(\exists f, g, h)\{[afb] = c, [aga] = a, [bhb] = b\}$;(ii)$[[aga]f[bhb]] = [a[g[afb]h]b]$. Из них $c = [afb] = [[aga]f[bhb]] = [a[g[afb]h]b] = [a[gch]b]$, $x^* = [gch]$. Предположение $(\exists f)\{[afb] = c\}$ означает разрешимость уравнения, а вывод $c = [a[gch]b]$ — ее необходимое условие; оно и достаточно, т. е. является *критерием разрешимости* в терминах a, b, c, g, h, т. к. дает *некоторое решение* $x^* = [gch]$ в терминах c, g, h. Предположения $(\exists g)\{[aga] = a\}$, $(\exists h)\{[bhb] = b\}$ означают *регулярность* коэффициентов a, b. Предположение (ii) означает некоторую *локальную* связь типа *ассоциативности* между элементами a, b, f, g, h относительно операции $[\cdot\cdot\cdot]$. Таким образом, тернарный группоид — естественная структура для исследования и решения *двустороннего уравнения с регулярными коэффициентами.*

Пример: трехэлементный тернарный группоид

$[\cdot\cdot u]$	u	v	w	$[\cdot\cdot v]$	u	v	w	$[\cdot\cdot w]$	u	v	w
u	$*$	u	$*$	u	w	v	w	u	$*$	$*$	$*$
v	$*$	$*$	$*$	v	$*$	$*$	v	v	u	u	u
w	v	u	u	w	$*$	$*$	$*$	w	w	$*$	$*$

(звездочки означают неиспользуемые ниже элементы).

Для уравнения $[uxv] = w$ можно положить $f = u, g = v, h = w$, при этом $[[uvu]w[vwv]] = [u[v[uwv]w]v]$; критерий $w = [u[vww]v]$ выполняется; $x^* = [vww] = u$. Для $[uxv] = u$ критерий не выполняется: $[u[vuw]v] = w \neq u$ (при этом (ii) выполняется $\forall f \in \{u, v, w\}$). Для $[vxw] = u$ можно положить $f = u, g = w, h = u$, при этом $[[vwv]u[wuw]] = [v[w[vuw]u]w]$; критерий $u = [v[wuu]w]$ выполняется; $x^* = [wuu] = v$. Для $[wxu] = v$ не выполняется (ii) при $f = u$, являющемся решением.

Предположение (ii) *глобально* выполняется в *тернарной полугруппе*, где $(\forall a, b, c, d, e)\{[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]]\}$.

Для получения *общих решений* может быть развит подход, предложенный в [1] для бинарных группоидов.

Литература

1. Блюмин С.Л. Уравнение $(a \cdot x) \times b = c$ в тетрагруппоиде, в котором нет законов для операций//Материалы ВВМШ'06.С.25-26.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РАЗДЕЛА «МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ» НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Богатырев Ф.Н., Мануйлова О.В. (Липецк)

Изучение и интерпретации матричных алгебр — центральный момент в пропедевтике раздела «Линейная алгебра». Важнейшее место занимают разделы, связанные с теорией n-мерных векторов, матриц, систем линейных уравнений. Традиционные методы не позволяют хорошо классифицировать задачи, связанные с нахождением ранговых соотношений, анализом композиций невырожденных и вырожденных матриц. Этих проблем можно, в определенной мере, избежать, если излагать указанные разделы на основе критерия замещения — теоретической основы симплекс-метода [1].

Теорема 1. (теорема о замещении). Даны две системы векторов

$$b_1, b_2, \ldots, b_n; \tag{1.1}$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_m; \tag{1.2}$$

Система (1.1) линейно выражается через систему (1.2):

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} a_i; (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Если $\tau_{rs} \neq 0$, тогда найдется система векторов

$$a_1, \ldots, ar-1, b_s, ar+1, \ldots, a_m, \tag{1.4}$$

что:

1. Система (1.1) линейно выражается через систему (1.4). При этом

$$b_j = \sum_{i \neq r}^{m} \tau'_{ij} a_i + \tau'_{rj} b_s; (j = 1, 2, \ldots, n); \tag{1.5}$$

2. Система (1.2) подобна системе (1.4), т. е. (1.2) преобразуется в (1.4) элементарными преобразованиями.

3. Если система (1.2) – линейно независимая, тогда и система (1.4) — линейно независимая.

Теорема 2. Пусть система (1.1) линейно выражается через (1.2). Тогда для каждой линейно независимой системы

$$b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik}, \tag{2.1}$$

подсистемы системы (1.1), существует в (1.2) подсистема из k векторов, которую можно заместить системой (2.1). Полученная система векторов

$$b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik-1}, b_{ik}, a_{k+1}, \dots, a_m, \tag{2.1}$$

обладает свойствами:

1. Через нее линейно выражается каждый вектор системы (1.1).
2. Она подобна системе (1.2).
3. Если система (1.2) - линейно независимая, тогда система (2.2) тоже линейно независимая.

Следствие 1. Из теоремы 2 следует: $k \leqslant m$.

Следствие 2. Если каждый вектор из системы (1.1) линейно выражается через систему (1.2) и $m < n$, система (1.1) – линейно зависимая.

Следствие 3. Каждая система линейно независимых n-мерных векторов - $a_1, a_2, \dots, a_n$ подобна системе n-мерных единичных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Следствие 4. Систему (2.2) можно получить, используя k раз теорему 1. Это дает возможность воспользоваться правилом замещения для получения системы (2.2), удовлетворяющей условиям 1, 2, 3.

Следствие 5. В матрице ее строчный ранг равен столбцовому рангу.

В итоге имеем большинство выводов и результатов в виде конструктивных следствий. Интерпретация учебного курса на основе критерия замещения дает возможность объединить эффективность двойственных категориальных подходов: 1) *свертывания информации* -– принципиальной возможности найти комплексный подход к доказательству большинства обобщающих утверждений; 2) *развертывания информации* -– принципиальной возможности получить решение конкретных частных задач.

Литература

1. Dantzig G. Linear Programming and Exstensions. Princeton University Press. New Jersy, 1963.

КРАТНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА

Болилый В.А. (Кировоград)

E-mail:basilb@kspu.kr.ua

Рассматривается сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение (СВДУ)

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^6 y^{(4)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^5 a_3(x) y'''(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 a_2(x) y''(x,\varepsilon) + \\ + \varepsilon^2 a_1(x) y(x,\varepsilon) + a_0(x) y(x,\varepsilon) = h(x)\end{gathered} \tag{1}$$

при $\varepsilon \to +0$ и достаточной гладкости коэффициентов уравнения (1) при $x \in I = [-l; l]$.

Предполагается, что коэффициенты дифференциального уравнения (1)

$$\begin{gathered}a_3(x), a_2(x), a_1(x) \equiv x^{r_1}\tilde{a}_1(x), \\ a_0(x) \equiv x^{r_2}\tilde{a}_0(x), h(x) \in C^\infty[I].\end{gathered} \tag{2}$$

В данном исследовании рассматривается случай когда $a_0(0) \equiv a_1(0) \equiv 0$, и следовательно сингулярно возмущенное уравнение (1) содержит классическую кратную точку поворота $x = 0$. В работе показано, что характер точки поворота зависит от значений показателей $r_{1,2}$.

Учитывая тот факт, что в точке поворота обращается в нуль не только коэффициент при неизвестной функции, а и при ее первой производной (см. (2)), то такую точку поворота принято называть *псевдодифференциальной* [1,2].

Отдельно выделены наборы r_1 и r_2, при которых может быть построена равномерная асимптотика решения исследуемого уравнения (1) на всем отрезке I, включая точку поворота; отдельно выделены наборы r_1 и r_2, при которых аппарат функций Эйри не позволяет построить асимптотику решения уравнения (1).

Литература

1. Бобочко В.М., Болілий В.О. Псевдодиференціальна точка звороту в диференціальному рівнянні четвертого порядку // Вісник

Київського університету. Математика та механіка, 2002. – Вип. 7-8. – С. 5-9.

2. Болілий В.О. Нестабільна точка звороту в диференційному рівнянні третього порядку // Математичні Студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 157-168.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В СЛУЧАЕ ГАУССОВСКОГО И РАВНОМЕРНОГО ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Боровикова М.М. (Воронеж)

monnya@yandex.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения диффузии

$$u_t = \varepsilon_1(t)u_{xx} + \varepsilon_2(t)u_{yy} + \varepsilon_3(t)u + f(t,x,y), \tag{1}$$

$$u(t_0) = g(x,y), \tag{2}$$

где $t \in T = [t_0, t_1], u$- искомая функция, $f, g, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - случайные функции.

Теорема. Пусть случайный процесс ε_1 имеет равномерное распределение с математическим ожиданием $M\varepsilon_1(t)$ и дисперсией $a(t)$, ε_2, ε_3 - гауссовские случайные процессы с математическим ожиданием $M\varepsilon_2(t)$, $M\varepsilon_3(t)$ и ковариационной функцией $b_2(s_1, s_2)$, $b_3(s_1, s_2)$ соответственно [1], процессы $f, g, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ независимы, $M\varepsilon_1(t)$, $M\varepsilon_2(t) > 0$ при $t \in T$. Тогда

$$Mu(t,x,y) = Mg(x,y) * [\{\frac{1}{2\sqrt{\pi B_2(t_0,t)}} D(t_0,t)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2)^k}{2^k k!} (\frac{d}{dy})^{4k} \exp(-\frac{y^2}{4B_2(t_0,t)})\}$$

$$\times \{\frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4iA(t_0,t)})}{8\pi A(t_0,t)\sqrt{iA(t_0,t)B_1(t_0,t)}} *^x \mid x \mid *^x \exp(-\frac{x^2}{4B_1(t_0,t)})\}]$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} [\{\frac{D(\tau,t)}{2\sqrt{\pi B_2(\tau,t)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t} b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2)^k}{2^k k!}$$

$$\times(\frac{d}{dy})^{4k}\exp(-\frac{y^2}{4B_2(\tau,t)})\}\{\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4iA(\tau,t)})}{8\pi A(\tau,t)\sqrt{iA(\tau,t)B_1(\tau,t)}}$$

$$*^x \mid x \mid *^x \exp(-\frac{x^2}{4B_1(\tau,t)})\}] * Mf(\tau,x,y)d\tau,$$

где

$$A(\tau,t)=\int_\tau^t a(s)ds, B_1(\tau,t)=\int_\tau^t M\varepsilon_1(s)ds,$$

$$B_2(\tau,t)=\int_\tau^t M\varepsilon_2(s)ds,$$

$$D(\tau,t)=\int_\tau^t M\varepsilon_3(s)ds+\frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t b_3(s_1,s_2)ds_1ds_2,$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Литература

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа/В.Г.Задорожний, М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2006.- 316 с.

ОБРАТИМЫЕ СУЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Брук В.М. (Саратов)

vladislavbruk@mail.ru

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство; $A(t)$ — сильно измеримая на отрезке $[a,b]$ функция, значения которой — ограниченные неотрицательные операторы в H; норма $\|A(t)\|$ суммируема на $[a,b]$. Обозначим $l[y]=y''+\mathcal{A}_1(t)y+q(t)$, где $q(t)=q^*(t)$ — ограниченные операторы, функция $q(t)$ сильно непрерывна на $[a,b]$; операторы $\mathcal{A}_1(t)$ таковы, что $\mathcal{A}_1(t)=\mathcal{A}_1^*(t)>\gamma E$ $(\gamma>0)$; область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1(t))=\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ не зависит от t; функция $\mathcal{A}_1(t)x$ сильно непрерывно дифференцируема при любом $x\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. Также как в [1] определяются минимальное L_0 и максимальное L_0^* отношения, порожденные выражением $l[y]$ и функцией $A(t)$ в пространстве

$\mathrm{B} = L_2(H, A(t); a, b)$; $L_0 \subset L_0^*$. Введем обозначения: $W_j(t,\lambda)$— операторное решение уравнения $l[y] = \lambda A(t)y$, удовлетворяющее начальным условиям: $W_j^{(k-1)}(a,\lambda) = (-1)^{j+1}\delta_{jk}E$ ($\lambda \in \mathbf{C}$, δ_{jk} — символ Кронекера, $j,k = 1,2$); $W(t,\lambda) = (W_1(t,\lambda), W_2(t,\lambda))$ — операторная однострочная матрица; Q_0 — множество таких $x \in H^2$, что $A(t)W(t,0)x = 0$ почти всюду; $Q = H^2 \ominus Q_0$; Q_- — пополнение Q по норме $\|W(t,0)x\|_{\mathrm{B}}$; Q_+ — позитивное пространство относительно Q, Q_-; J — матрица второго порядка с первой строкой $(0, -E)$ и второй — $(E, 0)$. Также как в [1] доказывается, что $V(\lambda)f = \int_a^b W^*(s,\bar\lambda)A(s)f(s)ds \in Q_+$.

Теорема. *Отношение* $R(\lambda) \subset \mathrm{B} \times \mathrm{B}$ *тогда и только тогда обладает свойством* $(L_0 - \lambda E)^{-1} \subset R(\lambda) \subset (L_0^* - \lambda E)^{-1}$ *и является оператором, когда* $R(\lambda)$ *имеет вид:* $R(\lambda)f = \int_a^b K(t,s,\lambda)A(s)f(s)ds$, *где* $K(t,s,\lambda) = W(t,\lambda)(M(\lambda) + (1/2)\mathrm{sgn}(s-t)J)W^*(s,\bar\lambda)$ *и* $M(\lambda)$ *— оператор, действующий из* Q_+ *в* Q_-. *При этом оператор* $R(\lambda)$: а) *замкнут,* б) *плотно определен,* в) *всюду определен в том и только том случае, когда этими свойствами обладает оператор* $M(\lambda)$.

(В теореме предполагается, что $f \in \mathcal{D}(R(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $V(\lambda)f \in \mathcal{D}(M(\lambda))$.)

Литература

1. Bruk V.M. On spaces of boundary values for relation generated by a formally selfadjoint expression and a nonnegative operator function //J. of Math. Physics, Analysis, Geometry, 2006, v. 2, N 3, pp. 268-277.

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)

bums@kma.vsu.ru

На геометрическом графе из двух ребер, образующих цикл, рассматривается оператор L, который при соответствующей параметризации ребер графа отрезком $[0,1]$ принимает вид

$$Ly = (l_1(y_1), l_2(y_2))^T, \qquad y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T, \quad x \in [0,1] \qquad (1)$$

$$y_1(0) = y_2(1), \quad y_1(1) = y_2(0), \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 06-01-00003, 07-01-00397.

где $\quad l_1(y_1) = \alpha y_1'(x) + \beta y_1'(1-x) + p_1(x)y_1(x) + p_2(x)y_1(1-x),$
$\qquad\quad l_2(y_2) = y_2'(x) + p(x)y_2(x),$

$\alpha^2 \neq \beta^2, \beta \neq 0$, $p_i(x), p(x) \in C^1[0,1]$, T — знак транспонирования.

В [1] для подобного оператора установлена теорема равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям и разложений в тригонометрический ряд Фурье. В данной работе найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости к вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ обобщенных средних Рисса вида $J_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r\sqrt{d}} g(\mu,r)R_\lambda f(x)\,d\lambda$,где R_λ резольвента оператора L, $d = \alpha^2 - \beta^2$, а функция $g(\mu,r)$ удовлетворяет следующим условиям: а) $g(\mu,r)$ непрерывна по μ в круге $|\mu| \leqslant r$ и аналитична по μ в $|\mu| < r$ при любом $r > 0$; б) существует $C > 0$ такая, что $|g(\mu,r)| \leqslant C$ при всех $r > 0$ и $|\mu| \leqslant r$; в) существуют положительные β и h такие, что $g(re^{i\varphi},r) = O(|\varphi-\psi|^\beta)$, при $|\varphi-\psi| \leqslant h$, где $\psi = \{0, \pi, \pm\pi/2\}$; г) $g(\mu,r) \to 1$, при $r \to \infty$ и фиксированном μ.

Примеры таких функций есть в [2].

Теорема. *Для того, чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - J_r(f,x)\|_{C[0,1]} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ имела непрерывные компоненты и удовлетворяла краевым условиям (2).

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.// Совр. мет. теории функций и смежные пробл.: Материалы Воронеж. зимн. мат. школы. – Воронеж, ВГУ, 2007. – С. 43

2. Гуревич А.П., Хромов А.П.// Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. №6. – С. 809–814.

ПОИСК, ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ИНТЕГРАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ИНТЕРНЕТ

Бывшев В.А., Богомолов А.И., Костюнин В.И. (Москва)

alivbog@gmail.com

Математическое моделирование экономических процессов и систем является широко распространённой практикой, как в учебных процессах, так и в экономических исследованиях. Огромное множество созданных за последние десятилетия разнообразных математических моделей ежедневно пополняется вновь создаваемыми моделями, имеющими различную степень новизны и практической значимости. Создание и ведение банков знаний математических моделей, имеющих общепринятые (стандартизованные) классификационные признаки, "погружённых" в единое информационное пространство)Интернет) будет способствовать дальнейшему развитию "индустрии знаний". Если математические модели представлены в Интернет в стандартизованном виде, то в ряде случаев при решении практических задач они могут быть объединены в одну систему. Для решения этой задачи можно использовать уже имеющиеся решения и технологии из области е-бизнеса, например, технологию UDDI [1].

Пример положительного эффекта от интеграции нескольких моделей в одну являет собой использование статистической процедуры Эйткена [2] в системе массовой оценки стоимостных показателей объектов недвижимости г. Москвы. Разработка вышеназванной системы было поручено Правительством Москвы Финансовой академии при Правительстве РФ. В качестве ядра этой системы использовалась эконометрическая нелинейная по параметрам модель массовой оценки объектов недвижимости г. Москвы

В предположении, что помимо разработанной эконометрической модели для повышения точности оценки стоимостных показателей объекта недвижимости, могут быть использованы и другие модели, была осуществлена интеграция данной и дополнительной моделей на основе статистической процедуры Эйткена, что дало возможность существенно улучшить качество модели и точность вычисляемых стоимостных характеристик.

Данный пример иллюстрирует актуальность создания регистров с банками знаний, включающих в себя математические модели различных классов, а также технологий их стандартизованного описания, поиска и взаимодействия.

Литература

1. http://www.ibusiness.ru/development/offshore/19050/ 2.Бывшев В., Бабешко Л., Арсеньева Л. Алгоритм оценивания основных инвестиционных характеристик финансовых активов при помощи оптимальной статистической процедуры Эйткена. М., Управление риском, №4, 2000.

ОБ ОБНОМ ОБОБЩЕНИИ ζ-ФУНКЦИИ

Вирченко Н. (Киев)

Введем (τ,β)- обобщенную ζ-функцию Гурвица в виде:

$$ {}_{\tau,\beta}\zeta_b(\alpha,q;\omega,\gamma;a,c) \equiv \tilde{\zeta}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}e^{-qt}}{(1-e^{-t})^\omega}\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-bt^{-\gamma})dt, \tag{1} $$

где $Re\alpha>0, Rec>Rea>0,\ Req>0;\ \tau,\ \beta\in R,\ \tau>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \omega\geqslant 1; Reb>0,\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ – (τ,β)- обощенная конфлюэнтная гипергеометрическая функция [1]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\ {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c|c} (c,\tau); & \\ (c,\beta); & zt^\tau \end{array}\right]dt \tag{2} $$

здесь ${}_1\Psi_1$-функция Фокса-Райта [2].

При $b=0,\ q=\omega=\gamma=1,\ a=c,\ \beta=\tau=1$ в (1) имеем классическую ζ- функцию [3].

В работе изучены основные свойства функции $\tilde{\zeta}(\alpha)$, доказано ряд функциональных, дифференциальных, интегральных соотношений, например:

$$ {}_\tau\zeta_\beta(\alpha,q;\omega,\gamma;a,c)\Gamma(\alpha) = 2^{\alpha-\omega} \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}e^{-(2q-\omega)t}}{\operatorname{sh}^\omega t}\ {}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;-b(2t)^{-\gamma})dt. \tag{3} $$

Очевидна связь функции (1) с интегральными преобразованиями, в частности, $\tilde{\zeta}(\alpha)$ можно записать как преобразование Меллина:

$$ \tilde{\zeta}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} M\left\{ \frac{e^{-qt}}{(1-e^{-t})^\omega}\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-bt^{-\gamma});\alpha \right\}, \tag{4} $$

как преобразование Лапласа:

$$ \tilde{\zeta}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{exp((\omega-q)e^{-x})}{[exp(e^{-x})-1]^\omega}\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-be^{-\gamma x})e^{-x\alpha}dx, \tag{5} $$

как преобразование Фурье:

$$\tilde{\zeta}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} F \left\{ \frac{exp(-\sigma x + (\omega - q)e^{-x})}{[exp(e^{-x}) - 1]^{\omega}} \; {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -be^{-\gamma x}); \nu \right\} \quad (6)$$

при подстановке $\alpha = \sigma + i\nu$, $(\sigma > 1)$ в (5).

Литература

1. Virchenko N.O. Generalised special functions and their applications// Naukovi visti of NTUU "KPI Kyiv.- 2006, N4.- P.42-49.

2. Kilbas A.A., Saigo M. H-Fransforms. Theory and Applications.- Chapman and Hall, 2004. - 390 p.

3. Erdelyi A. (Editor). Higher transcendental functions, McGraw-Hill, New York.- 1953.- 296 p.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКОГО ТИПА

Волков А.В., Вязьмин А.В., Полянин Д.А. (Москва)

vav@krasn.mosreg.ru

При математическом моделировании технологических процессов хемосорбции приходится сталкиваться с необходимостью решения систем уравнений диффузионно-кинетического типа. Такие системы являются нелинейными за счет слагаемых, описывающих кинетику химических превращений, и решаются, как правило, численно. Однако для решения задач гидродинамической устойчивости необходимы точные решения подобных систем уравнений.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений диффузионно-кинетического типа, описывающую нестационарный массоперенос с химической реакцией в неподвижной среде, когда кинетическая функция объемной химической реакции является произвольной функцией концентраций

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + g(C_1, C_2),$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} - g(C_1, C_2),$$

где C_1, C_2 — неизвестные функции, x - координата, t — время, g — произвольная функция искомых величин C_i.

Методом подстановки система уравнений сводится к одному уравнению, решение которого ищется в виде

$$C = C(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t).$$

После подстановки в полученное уравнение и применения процедуры функционального разделения переменных [1], приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для $\varphi(t)$, $\psi(t)$, g и C. Для некоторых функций g простейшего вида функции C могут быть рассчитаны аналитически.

Литература

1. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Волынская М.Г. (Самара)
volyn79@mail.ru

Рассмотрим в области $Q = \{(x,t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ нагруженное гиперболическое уравнение:

$$u_{tt} = (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u + \int\limits_0^\ell K(x,t)u(x,t)dx. \qquad (1)$$

Поставим для уравнения (1) смешанную задачу с начальными условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x); \qquad (2)$$

и граничными условиями:

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \qquad (3)$$

Введем определение обобщенного решения задачи (1)-(2)-(3) в пространстве

$\overset{\circ}{W}{}_2^1 (Q) = \{u(x,t) \in W_2^1(Q);\ u(\ell,t) = u(0,t) = 0\}.$

Обобщенным решением задачи (1)-(2)-(3) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству (4) $\forall v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, таких что $v(x,T) = 0:$

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^\ell (a(x,t)u_x v_x - u_t v_t - c(x,t)uv)dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^\ell v \int\limits_0^\ell K(\xi,t)u(\xi,t)d\xi dxdt + \int\limits_0^\ell v(x,0)\psi(x)dx. \tag{4}$$

Методом Галеркина доказано существование обобщенного решения задачи (1)-(2)-(3). Единственность решения рассматриваемой задачи следует из полученной априорной оценки.

Литература

1. Л. Гординг Задача Коши для гиперболических уравнений, издательство иностранной литературы — М.: 1961, - 120с.

2. О.А. Ладыженская Краевые задачи математической физики - М.:Наука, 1973 - 408с

ОБ ОДНОМ АДАПТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Габидуллина З.Р. (Казань)

Zulfia.Gabidyllina@ksu.ru

Пусть $I = \{1, 2, ..., m\}$, функции $f_i(x)$, $i \in I_1$, определены, выпуклы и удовлетворяют условию A на E_n (см. [2]) , при этом $f_i(x)$, $i \in I_1$ являются нелинейными, $f_i(x) = \langle a_i, x\rangle$, $a_i \neq 0$, для $i \in I_2$, $b_i \in E_1$ для $\forall i \in I$, $I_1 \cup I_2 = I$. Положим $D = \{x \in E_n : f_i(x) \leqslant b_i$, $\forall i \in I\}$. Пусть функция $f_0(x)$ определена, выпукла и удовлетворяет условию A на множестве D. Предполагается, что функции $f_i(x), i \in I_1 \cup \{0\}$ непрерывно дифференцируемы на области своего определения.

В [2] показано, что класс непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию A, достаточно широк, например, шире класса $C^{1,1}(D)$.

Адаптивный метод, предлагаемый в данной работе для решения задачи $\min\{f_0(x) \,/\, x \in D\}$, выгодно отличается от релаксационного метода из [1] тем, что в нем для решения задачи выбора направления не требуется знания точных верхних оценок констант κ_i из условия А. Достаточно решить задачу отыскания вектора s, удовлетворяющего системе: $\langle f_i^{'}(x_k), s\rangle + \theta_k^i \cdot \|s\|^2 \leqslant 0,\ i \in I(x_k, \varepsilon_k) \cup \{0\},$

$$\|s\|^2 \geqslant \delta_k,$$

где $x_k \in D,\ k = 0, 1, 2, \dots, \theta_k^{(i)} > 0,\ i \in I_1 \cup \{0\},\ \theta_k^{(i)} \geqslant 0,\ i \in I_2,\ \delta_k > 0,$ $\varepsilon_k > 0,\ I(x_k, \varepsilon_k) = \{i \in I : b_i - \varepsilon_k \leqslant f_i(x) \leqslant b_i\}$.

Затем необходимо вычислить значение итерационного шага, используя один из методов регулировки шага по $\theta_k^{(i)}$−нормированному направлению спуска (см. [2], с. 48), $i \in I(x_k, \varepsilon_k)$, не допуская нарушения границ с индексами $i \in I \backslash I(x_k, \varepsilon_k)$. После чего провести итеративную настройку параметра $\theta_k^{(i)}$−нормирования направления спуска по процедуре, описанной в [2]. Пусть $k = 0, 1, 2, \dots \{x_k\}$- последовательность точек, выработанная по предложенному алгоритму. Доказано, что $\lim\limits_{k \to +\infty} f_0(x_k) = \min\limits_{x \in D} f_0(x)$.

Литература

1. Габидуллина З.Р., Заботин Я.И. Релаксационный метод для одного типа задач пседовыпуклого прграммирования // Изв.вузов. Математика.- 1993.- №12.- с.44-51.

2. Габидуллина З.Р. Адаптивные методы с регулировкой шага для решения задач псевдовыпуклого программирования.- Дис. ...канд.физ.-мат.наук.- Казань, 1994. -125 с.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАВНОМЕРНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ И ГИЛЬБЕРТОВОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Гаврилова И.А. (Санкт-Петербург)

gavrilova.irina@gmail.com

Преобразование В.Д.Будаева модифицирует произвольную систему корневых функций дифференциального оператора произвольного порядка в новую систему корневых функций этого же оператора, для которой антиаприорная оценка (оценка нормы предыдущей корневой функции через норму последующей) выполняется с произвольной наперед заданной положительной константой. Систему корневых функций понимаем по аналогии с работами В.А. Ильина. Обозначим $b_n = \min\limits_{i=\overline{0,m_n}} \left\{ \frac{\|u_{n,i}\|}{\|u_{n,0}\|} \right\}$, $B_n = \max\limits_{i=\overline{0,m_n}} \left\{ \frac{\|u_{n,i}\|}{\|u_{n,0}\|} \right\}$, где m_n - ранг собств. функции. Для системы $\{u_{n,i}\}$ выполнено условие $(*)$, если $\inf\limits_n b_n > 0$ и выполнено условие $(**)$, если при $n: \; m_n > 1, \sup\limits_n B_n < +\infty$. Пусть $\{u_{n,i}\}$ - произвольная система корневых функций, которая полна и равномерно минимальна в $L_p(G)$. Пусть $\{\tilde{u}_{n,i}\}$ — система, построенная с помощью преобразования Будаева.

Теорема 1. A) Если для системы $\{u_{n,i}\}$ выполнено условие $(*)$ и условие $(**)$, то $\{\tilde{u}_{n,i}\}$ равномерно минимальна в $L_p(G)$; B) Если $\{u_{n,i}/\|u_{n,i}\|\}$ бесселева и гильбертова $L_p(G)$ и для $\{u_{n,i}\}$ выполнено условие $(*)$ и условие $(**)$, то $\{\tilde{u}_{n,i}\}$ гильбертова в $L_p(G)$.

Теорема 2. Если для $\{u_{n,i}\}$ не выполняется оценка антиаприорного типа, то не существует линейного преобразования, переводящего ее в новую систему корневых функций с антиаприорной оценкой, которое сохраняет равномерную минимальность в $L_p(G)$.

Литература

1. Будаев В.Д. Некоторые свойства корневых функций дифференциальных операторов, связанные с безусловной базисностью //Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32. №1.- С.9-14

2. Будаев В.Д. // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Мат.-лы науч. конф. "Герценовские чтения - 2005 - СПб.,2005.-С.3-7.

3. Гаврилова И.А. // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и диф. ур.-ям/ Смоленский гос. ун.-т. - Смоленск 2006. Вып.7, С.27 - 37.

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ[1]

Голубь А.В., Хромов А.П. (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t)\, dt,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in (\frac{1}{2}, 1]$. Функция $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$ и является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) \equiv x$. Функция $A(x,t)$ обладает свойствами: $A(x,t) = 0$ при $t > x$ и $A(x, x-0) \equiv 1$. Кроме того, положив $\tilde{A}(x,t) = A(\theta(x), t)$ при $t \leqslant \theta(x)$, $\tilde{A}(x,t) = 0$ при $t > \theta(x)$ и обозначив

$$B_{ij}(x,t) = \tilde{A}\left(\frac{i-1}{2} + x, \frac{j-1}{2} + t\right) \quad (i,j = 1,2), x, t \in [0, \frac{1}{2}],$$

требуем, чтобы $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} B_{ij}(x,t)$ $(k + l \leqslant 2)$ были непрерывны всюду, кроме, быть может, линии $t + x = \frac{1}{2}$ и $\frac{\partial}{\partial x} B_{ij}(x,t)\Big|_{t = \frac{1}{2} - x \pm 0}$, $\frac{\partial}{\partial x} B_{ij}(x, \gamma)$, $\gamma = 0, \frac{1}{2}$, были непрерывно дифференцируемы. Тогда справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ имеют место соотношения:*

$$\lim_{r \to \infty} \|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r \to \infty} \|S_r(f,x) - \sigma_r(g, x - 1/2)\|_{\left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon\right]} = 0,$$

где $g(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(g,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{4k\pi i x}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ для тех k, для которых $|4k\pi| < r$.

НЕКОТОРЫЕ СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ[1]

Гриднев А.В. (Москва)

gridnev_a@mail.ru

Рассматривается третье уравнение Пенлеве

$$\ddot{w} = \frac{\dot{w}^2}{w} - \frac{\dot{w}}{t} + \frac{aw^2 + b}{t} + cw^3 + \frac{d}{w}, \quad bd \neq 0, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00715).

где t — комплексная переменная, $w(t)$ — неизвестная функция, a, b, c и d — комплексные параметры.

В случае общего положения (когда все параметры a, b, c и d не равны нулю) решается следующая задача.

З а д а ч а. Для уравнения (1) в окрестности особой точки $t = 0$ найти все степенно-логарифмические разложения решений вида

$$w = c_r t^r + \sum_s \beta_s t^s, \quad r, s \in \mathbb{R},\ s > r,\ s \in \mathbf{K}, \tag{2}$$

где $c_r \neq 0$ — комплексная константа, β_s — многочлены от $\ln t$ с комплексными коэффициентами, $\mathbf{K}$ — дискретное множество на вещественной прямой без точек накопления.

Теорема.

1) Пусть $\xi = b/\sqrt{-d}$. Если $\mathrm{Im}(\xi) = 0$ и $|\xi|$ является четным числом, то уравнение (1) имеет семейство формальных решений вида (2):

$$w = -\frac{d}{b}\, t + \sum_{k=1}^{-1+|\xi|/2} c_{2k+1} t^{2k+1} + \sum_{k=|\xi|/2}^{\infty} \beta_{2k+1} t^{2k+1}, \tag{3}$$

где c_{2k+1} — однозначно определенные постоянные, β_{2k+1} — многочлены от $\ln t$, $\beta_{1+|\xi|}$ — многочлен первого порядка от $\ln t$ с произвольным свободным членом;

2) Пусть $\eta = a/\sqrt{c}$. Если $\mathrm{Im}(\eta) = 0$ и $|\eta|$ является четным числом, то уравнение (1) имеет семейство формальных решений вида (2):

$$w = -\frac{a}{c}\, t^{-1} + \sum_{k=1}^{-1+|\eta|/2} c_{2k-1} t^{2k-1} + \sum_{k=|\eta|/2}^{\infty} \beta_{2k-1} t^{2k-1}, \tag{4}$$

где c_{2k-1} — однозначно определенные постоянные, β_{2k-1} — многочлены от $\ln t$, $\beta_{-1+|\eta|}$ — многочлен первого порядка от $\ln t$ с произвольным свободным членом.

П р и м е р ы.

Приведем примеры разложения (3) при конкретных значениях $|\xi|$.

1) При $|\xi| = 2$ семейство (3) имеет вид

$$w = -\frac{d}{b}t + \left(\frac{ad^2}{4b^2}\ln t + \tilde{c}\right) t^3 + \left(-\frac{a^2d^3}{16b^3}\ln t + \frac{7a^2d^3}{192b^3} - \frac{ad\tilde{c}}{4b} - \frac{cd^3}{12b^3}\right) t^5 + \ldots,$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная.

2) При $|\xi| = 4$ семейтво (3) имеет вид

$$w = c_1 t + c_3 t^3 + \left[\left(\frac{ac_1c_3}{4} + \frac{cc_1^3}{8} \right) \ln t + \tilde{\tilde{c}} \right] t^5 + \ldots ,$$

где $\tilde{\tilde{c}}$ — произвольная постоянная, $c_1 = -d/b$, а c_3 определяется соотношением

$$c_3 = \frac{ad^3}{b^2(4d + b^2)}.$$

Аналогичные примеры можно привести и для семейства разложений (4).

З а м е ч а н и я.

1) все вышеуказанные решения являются формальными, вопрос о сходимости представляющих их рядов пока открыт;

2) уравнение (1) не имеет разложений решений вида (2), отличных от (3) и (4);

3) степенные разложения третьего уравнения (1) представлены в [1].

Литература

1. *А.В. Гриднев.* Степенные и экспоненциальные асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве. // Дифференциальные уравнения, 2004, т. 41, № 11, с. 855.

О МЕТОДЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гробова Т.А., Колодяжная Т.И. (Ставрополь)
grobova@yandex.ru

В работах [1,2] был предложен вариант метода итеративного агрегирования для решения линейных интегральных уравнений, заданных в виде операторного уравнения

$$x = Ax + f \tag{1}$$

с линейным оператором A. По этому варианту был накоплен большой экспериментальный материал, показывающий эффективность этого метода и устанавливающий факты его сходимости для уравнений вида (1) с операторами A, спектральный радиус которых не только близок к единице, но и в ряде случаев превосходит единицу, т.е. в случае, когда $r(A) > 1$. Накопленный опыт использования метода [2] подсказал возможности использования аналога метода итеративного агрегирования и для решения нелинейных операторных уравнений вида

$$x = F(x) + f \tag{2}$$

с нелинейным оператором $F(x)$ методом многопараметрического итеративного агрегирования. В данной работе изучается часть имеющегося экспериментального материала по применению аналога метода итеративного агрегирования для решения нелинейных операторных уравнений вида (2). Рассмотрим метод однопараметрического итеративного агрегирования для решения нелинейных уравнений.

Пусть $l_0(x)$ — некоторый выбранный функционал "агрегирования x_1 — выбранное начальное приближение. Перейдем от уравнения (2) к уравнению

$$tl_0(x_1) = tl_0[F(x_1)] + l_0(f), \tag{3}$$

где t — неизвестная скалярная величина.

Из уравнения (3) находим, что решение уравнения $t = t(x_1)$ определяется формулой

$$t(x_1) = \frac{l_0(f)}{l_0(x_1) - l_0[F(x_1)]}, \tag{4}$$

если знаменатель в правой части не равен нулю.

Определив $t(x_1)$, мы далее положим

$$x_2 = \Phi(x_1) = t(x_1)F(x_1) + f. \tag{5}$$

Аналогично, пусть определено x_n. По индукции находим

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = t(x_n)F(x_n) + f. \tag{6}$$

Последовательность (6) определяет алгоритм метода итеративного агрегирования. При этом в качестве агрегирующих использован широкий класс функционалов. Естественно, что в этом случае для сходимости метода к решению уравнения приходится предъявлять более жесткие требования к оператору $F(x)$ по сравнению с линейными уравнениями. Более того, проведенные эксперименты свидетельствуют о том, что даже сам факт "экспериментальной" сходимости метода далеко не всегда обеспечивает его сходимость к решению уравнения (2).

В этой связи представляет определенный интерес теорема 1, содержащая достаточное условие сходимости метода многопараметрического итеративного агрегирования к решению нелинейного уравнения (2). Эти достаточные условия выглядят несколько жесткими, однако вычислительная практика свидетельствует о сходимости метода итеративного агрегирования и при нарушении этих условий.

Теорема 1. Пусть выполнено условие

$$[C|F(x)| + q|t(y)|] \leqslant q_1 < 1. \tag{7}$$

Тогда уравнение (2) имеет, и притом единственное решение x^*, и к этому решению сходятся последовательные приближения (6).

Доказано, что в данном случае оператор $\Phi(x)$ является оператором сжатия.

Литература

1. Итеративное агрегирование и его применение в планировании. Под ред. Дудкина Л.М. - М.: Экономика, 1979. - 328 с.

2. Гробова Т.А., В.Я. Стеценко. Методы итеративного агрегирования для приближенного решения линейных и нелинейных алгебраических систем и интегральных уравнений. //Монография, Ставрополь, 2003.- 87 с.

КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЖЕСТКОСТЬЮ

Гуда С.А. (Ростов-на-Дону)

gudasergey@mail.ru

Исследуется совместная задача о крутильных колебаниях твердого тела вращения внутри сосуда, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. На тело действует момент упругой силы с периодической по времени жесткостью. Ранее автором совместно с В.И. Юдовичем была рассмотрена задача о крутильных колебаниях тела в вязкой жидкости под действием упругой силы с постоянной жесткостью, доказана глобальная асимптотическая устойчивость состояния покоя. Модуляция жесткости может привести к параметрическому возбуждению неустойчивости.

Здесь проводится качественное исследование линеаризованной на состоянии покоя задачи. Изучается спектр Флоке. Спектральная задача сводится к отысканию нулей определителя Хилла. Исследована топологическая структура спектра Флоке. Оказалось, что в случае гармонической модуляции из счетного множества мультипликаторов Флоке только два могут пересекать единичную окружность и вызывать неустойчивость состояния покоя. Это позволяет установить топологические свойства нейтральных кривых.

Построены асимптотики спектра. Доказано существование значений параметров, при которых состояние покоя неустойчиво, и существование нейтральных кривых всех трех типов: синхронного, субгармонического и комбинационного.

Доказана полнота решений Флоке. Спектральную задачу для решений Флоке $\mathrm{w}(t) = e^{-\sigma t}\widetilde{\mathrm{w}}(t)$ (где $\widetilde{\mathrm{w}}$ – периодическая функция) уравнения $\dot{\mathrm{w}} = A_0\mathrm{w}+B(t)\mathrm{w}$ можно трактовать как задачу на собственные значения для оператора $L = \frac{\partial}{\partial t}+A_0+B(t)$, действующего в пространстве периодических вектор-функций. Напрямую применить теорему М.В. Келдыша мешает несамосопряженный оператор дифференцирования по времени $\partial/\partial t$, который не является подчиненным по отношению к A_0. Несмотря на это необходимую оценку резольвенты $(\sigma I - L)^{-1}$ оператора L доказать удалось. Это позволило провести рассуждения теоремы Келдыша и получить полноту корневых векторов оператора L.

ВЗАИМОСВЯЗЬ СООТВЕТСВУЮЩИХ СПЕКТРОВ СУЩЕСТВЕННО РЕГУЛЯРНЫХ И ДЕКОМПОЗИЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Гулина О.В. (Минск)
gulina_ o@mail.ru

Обозначим через $L(X)$ банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих на бесконечномерном банаховом пространстве X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

О п р е д е л е н и е. Оператор $T \in L(X)$ имеет обобщенный обратный, если существует оператор $S \in L(X)$ такой, что выполняется равенство $TST = T$.

Подробная информация об обобщенных обратных операторах и их свойствах содержится в книге [1].

О п р е д е л е н и е. Оператор $T \in L(X)$ называется существенно регулярным, если он имеет обобщенный обратный и выполняется включение $N(T) \overset{e}{\subset} R^{\infty}(T)$, т.е. размерность выступа нулей оператора T на обобщенной области значений конечна.

Существенно регулярные операторы порождают соответствующий спектр, который называется существенным спектром Сафара оператора T и определяется формулой $\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ не является существенно регулярным$\}$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $T \in L(X)$. Говорят, что $\lambda \in \rho_{gr}(T) \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существует окрестность $U(\mu)$ и голоморфная функция $F : U(\mu) \to L(X)$ такая, что $F(\lambda)$ принадлежит максимальной группе обратимых элементов в $L(X)$ и выполняется равенство $(T - \lambda)F(\lambda)(T - \lambda) = T - \lambda$ для любого $\lambda \in U(\mu)$.

Тогда множество $\sigma_{gr}(T) := \mathbb{C} \setminus \rho_{gr}(T)$ определяет соответствующий спектр [2].

Для существенного спектра Сафара оператора $T \in L(X)$ справедливо включение $\sigma_{es}(T) \subseteq \sigma_{gr}(T)$. В работе [3] было анонсировано выполнение теоремы об отображении существенного спектра Сафара оператора $T \in L(X)$. Для определенного выше спектра $\sigma_{gr}(T)$ в общем случае теорема об отображеннии не выполняется.

Литература

1. Caradus S.R. Generalised inverses and operator theory. — Kingston: Queen's University, 1978. — 209p. 2. Schmoeger Ch. On Decomposably regular operators // Portugaliae Mathematica. – Vol.54. – 1997. – P.41-50. 3. Гулина О.В. Теорема об отображении существенного спектра Сафара // Тез. докл. междунар. мат. конф. "Еругинские чтения –X". – 2005. – с.106-107.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Данилкина О.Ю. (Самара)

danola@mail.ru

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T)\}$, где Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей, параболическое уравнение

$$Lu \equiv u_t - (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + a(x,t)u = f(x,t). \qquad (1)$$

Поставим для уравнения (1) задачу со следующими условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (2)$$

$$u\,|_{S_T} = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega K(x,y,t,\tau)u(y,\,\tau)\,dy\,d\tau,\ 0 < t < T,\ x \in \partial\Omega. \qquad (3)$$

Отметим, что условие (3) — это нелокальное интегральное условие. Покажем, что задачу (1)–(3) можно свести к стандартной смешанной задаче. Для этого рассмотрим оператор

$$Bu = u(x,t) - \int_0^t \int_\Omega K(x,\,y,\,t,\,\tau)u(y,\,\tau)\,dy\,d\tau.$$

Положим $v(x,t) = Bu$. Тогда справедливо утверждение:

Лемма. Задача (1)–(3) эквивалентна задаче

$$Lv + L\Phi = f(x,t), \tag{4}$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \tag{5}$$

$$v\,|_{S_T} = 0, \tag{6}$$

где

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \Gamma(x,\,y,\,t,\,\tau)v(y,\,\tau)\,dy\,d\tau,$$

а $\Gamma(x,\,y,\,t,\,\tau)$— резольвента ядра $K(x,\,y,\,t,\,\tau)$.

Перейдем к исследованию задачи (4)–(6).

Теорема. Пусть $K(x,\,y,\,t,\,\tau) \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T] \times [0,T]\right)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$, $a_{ij}(x,t)$, $a(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$. Тогда задача (4)–(6) имеет единственное обобщенное решение из пространства $V_2(Q_T)$.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Денисов М.С. (Воронеж)

den_i_sov@rambler.ru

Пусть $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$ — гильбертово пространство. $G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейные, непрерывные и самосопряженные операторы, при этом $0 \notin \sigma_p(G)$ и $0 \notin \sigma_p(A)$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с формой $[x,y] := (Gx,y)$ называется сингулярным G-пространством, если $0 \in \sigma_c(G)$, и регулярным G-пространством при $0 \in \rho(G)$.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

В работе, методами теории пространств с индефинитной метрикой, исследуются спектральные свойства операторов AG и GA, если отрицательные части спектров операторов A и G ($\sigma(A) \cap (-\infty, 0)$ и $\sigma(G) \cap (-\infty, 0)$) состоят из n и m собственных значений с учетом их кратности, причем $n \neq m$.

Литература

[1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С *Теория линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. М. Наука 1986. 352стр.*

[2] Langer.H *Spectralfunctionen einer Klasse J-selbstadjungierter Operatoren. — Math. Nachr., 1967, 33, 1-2, S. 107-120.*

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАЙТА

Дикарева Е.В. (Воронеж)

В докладе рассматривается неравенство для обобщённой биномиальной функции из [1], контролирующее важнейшие для этой работы оценки. Это неравенство является обобщением формулы бинома Ньютона (случай p=1):

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} \ x^{k/p} \leqslant K(n,p)(1+x)^{n/p}. \tag{1}$$

Рассматривается задача об оценке наилучшей постоянной $K(n,p)$ в этом неравенстве. В [1] приведено утверждение E.R. Love, что $K = p^2$, однако это опровергнуто в работе [2], так как неверно уже при $n = 1$. В [2] найдена наилучшая постоянная K при $n = 2$, выражающаяся через гамма – функции Эйлера.

В докладе рассмотрены почленные оценки суммы в (1). Возможным альтернативным методом является нахождение интегрального представления для функции в левой части (1) с последующим применением интегральных неравенств. Отметим, что указанная функция является функцией типа Райта, или функцией типа Фокса. Неравенства для подобных специальных функций, как правило, очень трудно доказываются и только начинают изучаться. Как оценку из этого класса можно рассматривать и само неравенство (1).

Литература

1. Lyons T. Differential equations driven by rough signals// Revista Matematica Iberoamericana, 1998. Vol.(14). — № 2. — P. 215–310.

2. Ситник С.М. Об обобщении биноминальной теоремы, возникающем в теории дифференциальных уравнений// Вестник ВИ МВД России, 2004. — № 1(16). — С. 143–147.

3. Дикарева Е.В., Ситник С.М. Математические приложения одного обобщения биноминальной теоремы// Тезисы Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. Воронеж. — 2006 г. — С. 37.

4. Дикарева Е.В., Ситник С.М., Телкова С.А. Об одном подходе в теории дифференциальных уравнений// Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы борьбы с преступностью», Радиотехнические науки, Выпуск 1. — Воронеж. — 2005. — С. 86.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДУ

Долженков А.А. (Воронеж)

dolzhenkov_a_a@mail.ru

В рамках задачи о волновых периодических решениях двойного SG–уравнения изложена новая методика нелокального бифуркационного анализа нелинейных краевых задач. Предложен алгоритм приближенной параметризации двумерных сечений дискриминантного множества (множества особых значений) нелинейного дифференциального оператора, основанный на вариационном принципе и нелокальных редукциях гладких функционалов к функциям на конечномерных пространствах. Приведены примеры вычисления сечений дискриминантного множества и приближений к решениям соответствующих краевых задач. Сравнительно недавно в ряде работ были изучены волновые решения уравнений, являющихся обобщениями широко известных уравнений КДФ, СГ–уравнения, НУШ и др. Например, рассмотрены и частично изучены волновые решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(c_1 u^2 + c_2 u^4\right)\frac{\partial u}{\partial x} + c_3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_4\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0.$$

Решение типа “бегущая волная” этого уравнения определяется соотношением $d_0 w + d_1 w^3 + d_2 w^5 + d_3 \frac{d^2 w}{dx^2} + d_4 \frac{d^4 w}{dx^4} = c$, полученным из подстановкой $u(x,t) = w(kx + vt)$ и последующим взятием квадратуры. Периодические решения уравнения исследовались методами функционального анализа в работах в связи с задачей о зарождении и распространении периодических волн в упругой балке на упругом основании. В настоящем докладе проведен нелокальный анализ существования и бифуркаций волновых решений двойного СГ–уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin(u) + \frac{1}{2}\sin(2u),$$

не входящего в совокупность эталонных уравнений "солитонной математики", так как оно не поддается исследованию методами этого направления математики. Это уравнение можно достаточно успешно исследовать методами нелинейного функционального анализа (разумеется, развитый подход применим и в случае обычного СГ–уравнения).

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗМУЩЕННЫХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Дорохов А.Н. (Воронеж)

В F-пространстве (пространстве Фреше) приводятся признаки существования неподвижных точек сжимающих операторов, возмущенных вполне непрерывными операторами.

1. **Лемма.** Пусть

1) в F-пространстве X оператор A преобразует замкнутое, ограниченное выпуклое множество $V \subset X (V \neq \varnothing)$ в себя;

2) оператор A представляется в виде: $A = B + C$, где B — сжимающий, а C — вполне непрерывный на множестве V операторы.

Тогда существует замкнутое выпуклое множество $V_0 \subset V$, такое, что $\overline{co} A V_0 = V_0$.

2. **Теорема 1.** Пусть

1) выполняются условия леммы;

2) в F-пространстве X для любого относительно компактного множества $M \subset X$ множество coM также относительно компактно;

3) сопряженное пространство X^* достаточно в X;

4) всякое замкнутое выпуклое множество $V_0 \subset V$, такое, что $\overline{co} A V_0 = V_0$ компактно.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $A x_* = x_*$.

3. **Определение.** Число $\|x\|_\rho = \rho(x,0)$ $(x \in X)$ называется ρ-нормой элемента x.

Теорема 2. Пусть

1) выполняются условия леммы и условие 4) теоремы 1.

2) при каждом $x \in X\backslash 0$ функция $\varphi_x(t) = \|tx\|_\rho$ возрастает по переменной t в промежутке $[0,\infty)$;

3) существует число $b > 0$, такое, что $\|tx\|_\rho \leqslant bt\|x\|_\rho$ $(t \in [0,1]; x \in X)$;

4) в X существует норма $\|x\|$ и числа $a > 0$ и $r_0 > 0$, такие, что $a\|x\| \leqslant \|x\|_\rho$ $(x \in X,\ \|x\|_\rho \leqslant r_0)$.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

4. Отметим, что если оператор A усиленно непрерывен на множестве V, то в теореме 1 условия 2) - 4) можно опустить.

К ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СТЕПЕНИ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

Дубровский В.В. (Магнитогорск)

E-mail: vvdubrov@mail.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2(\Pi_n)$ рассмотрим оператор T_0, порожденный краевой задачей Неймана для однородного уравнения Гельмгольца, где $\Pi_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ :\ 0 \leqslant x_j \leqslant a_j, j = 1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N},\ a_j > 0$.

Введем оператор $T = \int\limits_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ – разложение единицы оператора T, степень $\beta \geqslant n/2$ и $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ оператора T, будем нумеровать через $\lambda_t^{(k)}$, где $m_j, t \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, \delta_t}$ δ_t – кратность числа λ_t.

Пусть P – оператор умножения на функкцию $p \in L_\infty(\Pi_n)$, часто называемую потенциалом.

С помощью теории регуляризованных следов операторов и принципа сжимающих отображений С. Банаха доказана теорема о существовании и единственности потенциала p, удовлетворяющего следующим условиям:

$$p(a_1 - x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1, a_2 - x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \dots = p(x_1, x_2, \dots, a_n - x_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для почти всех $x \in \Pi_n$,

$$\int \dots \int\limits_{\Pi_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{n} \cos\Big(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\Big) dx_1 \dots dx_n = 0$$

при $\prod\limits_{j=1}^{n} m_j = 0,\ m_j = 0, 1, \dots,$

$$\|p\|_{L_\infty(\Pi_n)} \leqslant 4^{-1} \min_{d \neq l} \rho(\lambda_d^{(k)}, \lambda_l^{(k)}),$$

восстановленного по заданной последовательности комнлексных чисел, в определенном смысле близкой к $\{\lambda_t^{(k)}\}_{t=1}^{\infty}$.

О КВАНТОВЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ПОВТОРНЫХ КОДАХ

Думачев В.Н., Крупская Е.Н. (Воронеж)

В работе рассматривается теория построения совершенных кодов на многообразиях Грассмана. Многообразием Грассмана $G(N, K)$ назовем многообразие всех K-мерных подпространств N-мерного векторного пространства V^N. Тогда, ассоциированный с данным Грассманианом, $G(N, K)$ код $[n, k]$ над конечным полем Галуа $GF(q)$ строится по правилу

$$n = \left[\begin{array}{c} N \\ K \end{array} \right]_q = \frac{(q^N - 1)(q^N - q)...(q^N - q^{K-1})}{(q^K - 1)(q^K - q)...(q^K - q^{K-1})},$$

$$k = \left(\begin{array}{c} N \\ K \end{array} \right)_q = \frac{N!}{K! \cdot (N - K)!}.$$

Построим квантовый аналог QP_m классического корректирующего кода с повторением P_m. При передачи информации по каналам связи она может искажаться. Алгоритм квантовой коррекции ошибок аналогичен классическому и требует введения дополнительных кубитов для обнаружения и коррекции ошибки. В качестве примера рассмотрим градуированную алгебру Грассмана

$$G\left(V^5\right) = \Lambda = \Lambda^0 \otimes \Lambda^1 \otimes \Lambda^2 \otimes \Lambda^3 \otimes \Lambda^4 \otimes \Lambda^5,$$

На вход квантового канала связи подается расширенный код с 4 дополнительными, проверочными битами QP_4, отображающий $|0\rangle \to |00000\rangle$,$|1\rangle \to |11111\rangle$. С помощью этого кода мы можем корректировать как единичные, так и двойные ошибки. Для коррекции двойной ошибки оператор выделения ошибки строится по правилу

$$\begin{array}{l} S\,|z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\rangle \to \\ \to |z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8, Z_9, Z_{10}\rangle \end{array}.$$

Проверочные символы $\Lambda^3 \supset \{Z^1, Z^2, Z^3, Z^4, Z^5, Z^6, Z^7, Z^8, Z^9, Z^{10}\}$ строятся как элементы базиса Λ^3 алгебры Галуа-Грассмана $G\left(V^5\right)$ относительно операции композиции $\oplus$ — сложения по модулю 2. Коррекция ошибки строится по элементам сопряженного базиса $\Lambda^2 = *\Lambda^3$.

Литература

1. Rieffel E., Polak W. Quantum computing // ACM Computing Surveys, 2000, V.32, N3, PP.4-57.

2. . Ryan C.T., Ryan K.M. The Minimum Weight of the Grassmann Codes G(k,n) // Discrette Appl.Math. 1990, V.28.P.149-156.

МНОГОМЕРНЫЕ МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ ГИЛЬБЕРТА

Ермаков В.В. (Москва)

vikvve@rambler.ru

Предлагается многомерное обобщение модулярных форм, построенных по аналогии с двумерными модулярными формами Гильберта.

Пусть $k = Q(\varepsilon_1)$ – вещественное поле алгебраических чисел степени n. $\varepsilon_1 = \sqrt[n]{D}$, D – целое, $D > 0$. O – соответствующее кольцо целых алгебраических чисел. Элементы этого кольца представляются в виде линейных комбинаций $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$, где
$\varepsilon_i = (\varepsilon_1)^i$. Пусть $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\varepsilon_i \in O$. Введем $(n-1)$ отображение S_i , $1 \leqslant i \leqslant n-1$, положив $S_i(a) = \sum_{j\neq i} a_j\varepsilon_j - a_i\varepsilon_i$; положим также $S_0(a) = a$. Пусть H – верхняя комплексная полуплоскость; H^n –

прямое произведение n экземпляров H. Определим действие группы $SL(2,O)$ на H^n.

Пусть $z=(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1})\in H^n$, $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,O)$.
Тогда $g(z)=(g(z_0),g(z_1),\ldots,g(z_{n-1}))$,
где $g(z_i)=(S_i(a)z_i+S_i(b))/(S_i(c)z_i+S_i(d))$, $0\leqslant i\leqslant n-1$.

Определение. n-мерной модулярной формой Гильберта веса $(2k_0,2k_1,\ldots,2k_{n-1})$ называется мероморфная в H^n функция $f(z)$ такая, что для всех $g\in SL(2,O)$
$f(z)=f(g(z))\prod_{i=0}^{n-1}(S_i(c)z_i+S_i(d))^{-2k_i}$.

Аналогичное определение можно дать дляконгуэнц-подгрупп $\Gamma\subset SL(2,O)$.

СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ СПЕКТРА, ПОРОЖДЕННОГО СУЩЕСТВЕННО ПОЛУРЕГУЛЯРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Еровенко В.А. (Минск)
erovenko@bsu.by

Пусть X — бесконечномерное комплексное банахово пространство и $B(X)$ — множество ограниченных линейных операторов на X. Обозначим через $N(T)$ и $R(T)$, соответственно, нуль-пространтсво и область значений оператора T. Положим $R^\infty(T)=\cap_n R(T^n)$. Говорят, что оператор $T\in B(X)$ полурегулярный если область значений $R(T)$ замкнута и справедливо вложение $N(T)\subset R^\infty(T)$, соответственно, оператор $T\in B(X)$ называется существенно полурегулярным если область значений $R(T)$ замкнута и справедливо существенное вложение $N(T)\subset_e R^\infty(T)$.

Для мотивировки изучения указанных классов операторов заметим следующее. С одной стороны, если на нормально разрешимые операторы, т.е. операторы с замкнутой областью значений, накладываются условия полуфредгольмовости, то для таких операторов имеется широкий класс допустимых возмущающих операторов, сохранияющих замкнутость области значений. С другой стороны, если на нормально разрешимые операторы не наложено никаких ограничений, то соответствующие допустимые возмущающие операторы образуют весьма узкий класс даже в пространстве ограниченных операторов.

Полурегулярный оператор является существенно полурегулярным, кроме того множество полуфредгольмовых операторов вкладывается в множество существенно полурегулярных операторов. Заметим, что, вообще говоря, полурегулярный оператор не является полуфредгольмовым. Существенно полурегулярные операторы устойчивы относительно возмущений операторами конечного ранга, кроме того они устойчивы относительно компактных коммутирующих операторов, хотя полурегулярные операторы, вообще говоря, неустойчивы ни относительно операторов конечного ранга, ни относительно коммутирующих компактных операторов.

Наиболее интересным для приложений является свойство устойчивости существенно полурегулярных операторов при возмущении их коммутирующими строго сингулярными операторами. Спектр, порожденный существенно полурегулярными операторами, называется существенный спектр Апостола и определяется следующим образом: $\sigma_{e\gamma}(T) = \{\lambda : T - \lambda I$ не является существенно полурегулярным$\}$. Оператор называется строго сингулярным если его сужение на любое замкнутое бесконечномерное подпространство не имеет ограниченного обратного.

Теорема. *Пусть T и S ограниченные линейные коммутирующие операторы, где S — строго сингулярные возмущающие операторы, тогда существенный спектр Апостола, порожденный существенно полурегулярным оператором, инвариантен относительно указанных возмущений, т.е.*

$$\sigma_{e\gamma}(T) = \cap\{\sigma_{\gamma}(T + S) : TS = ST\}.$$

Литература

1. Еровенко В.А., Северенчук Н.Б. Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах. — Мн.: БГУ, 2000. — 135 с.

ТОЖДЕСТВА С БИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ФАКТОРИАЛОВ И СТЕПЕНЕЙ

Ерусалимский Я.М. (Ростов-на-Дону)
dnjme@math.rsu.ru

Как простые следствия из формулы для числа сюрьективных отображений ([1], [2]) доказаны комбинаторные тождества:

$$n^m = C^1_{n-k}(n-1)^m - C^2_{n-k}(n-2)^m + \cdots + (-1)^{n-k+1}C^{n-k}_{n-k} \cdot k^m,$$
$$1 \leqslant m \leqslant n-k-1, \quad 0 \leqslant k < n \tag{1}$$

$$(n-k)! = n^{n-k} - C^1_{n-k} \cdot (n-1)^{n-k} + C^2_{n-k} \cdot (n-2)^{n-k} - \cdots$$
$$+(-1)^{n-k}C^{n-k}_{n-k} \cdot k^{n-k}, \quad 0 \leqslant k < n. \tag{2}$$

По теореме единственности для многочленов из (2) получается тождество:

$$n! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot C^i_n \cdot (x-i)^n, \quad x \in R(C).$$

Пусть

$$E_{n-1}(x) = C^{n-1}_n(x-1)^{n-1} - C^{n-2}_n(x-2)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}C^0_n(x-n)^{n-1}.$$

Из формул (1) следует, что значение многочлена $E_{n-1}(x)$ и его производных до порядка $n-1$ включительно в точке $x = n$ совпадает со значением многочлена x^{n-1} и его производных до порядка $n-1$ включительно. Тогда по теореме единственности для многочленов мы получаем, что имеет место тождество:

$$x^{n-1} = E_{n-1}(x), \quad \forall x \in R \ (\forall x \in C).$$

Ясно, что для любых $n,\ k \in N,\ x \in R(C)$ имеет место равенство:

$$x^n = C^1_{n+k}(x-1)^n - C^2_{n+k}(x-3)^n + \cdots + (-1)^{n+k-1}C^{n+k}_{n+k}\left(x-(n+k)\right)^n$$

Литература

1. Rosen, Kenneth H. *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw-Hill, Inc. 2nd ed., ISBN 0–07–053744–5.

2. Ерусалимский Я.М.*Дискретная математика: теория, задачи и приложения.* Москва, Вузовская книга, 2006, 8 изд., 280 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАБОТЫ ВАЛА В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ С УЧЕТОМ СТРУКТУРЫ СИЛ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ

Завьялов Г.О. (Челябинск)
Zavyalov@ursei.ac.ru

Развитие машиностроения и приборостроения приводит к непрерывному увеличению числа оборотов вала в опорах скольжения и ставит специфические вопросы динамики рассматриваемой сложной механической системы. В настоящее время настоятельно требуется изучение нестационарного пространственного течения смазки с включением инерционных членов в уравнения движения тонкого вязкого слоя жидкости между двумя твёрдыми стенками. Повышение скоростей вала на смазочном слое опор скольжения требует решения вопросов стабилизации равновесного положения уравновешенного вала или периодического движения неуравновешенного вала. В настоящее время четко выделены два характерных вида колебаний валов в подшипниках скольжения, обусловленные наличием смазочного слоя, которые носят характер прецессии. Одно из прецессионных движений вала связано со специфическим свойством смазочного слоя в цилиндрических опорах терять несущую способность при скорости вращения линии центров, равной половине угловой скорости вращения вала. Второе периодическое прецессионное движение, называемое синхронной прецессией, происходит с частотой, равной частоте вращения вала, наблюдаемое при любой скорости вращения вала. В настоящей работе рассматриваются условия стабилизации работы вала с учетом структуры сил смазочного слоя.

Литература

1. Завьялов Г.А., Емельянов А.В. Основные вопросы неустановившегося течения газовой смазки и неустойчивости равновесного положения вала в цилиндрических подшипниках / Доклад на совещании по газовой смазке подшипников 12-14 февраля 1968 г. // М.: ин-т Машиноведения, 1968. С. 98-112

2. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах.- М.: Наука, 1982. 280 с.

СПЕЦИФИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЛАМБА О ГРАВИТАЦИОННЫХМГД-ВОЛНАХ ПРИ НАЛИЧИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Задорожный А.И., Задорожная Н.С. (Ростов-на-Дону)
simon@rsu.ru

Плоская задача о свободных колебаниях невязкой жидкости бесконечной электрической проводимости в стационарном магнитном поле с вектором напряженности $H^0 = (H_x^0, 0, H_z^0)$ в безразмерных переменных сводится к следующей краевой задаче на собственные значения со спектральным параметром в граничном условии

$$A_V[W^{IV} - W''] + (\omega^2 - A_H)[W'' - W(z)] = 0, z \in [-d, 0];$$

$W(-d)$ (непроницаемость дна); $W''(-d) = W''(0) = 0$ – (обращение в нуль горизонтальной составляющей возмущенного движением жидкости магнитного поля на дне и на свободной поверхности);
$A_V W'''(0) - (A_V + A_H - \omega^2)W'(0) - (1 + A_H)W(0) = 0$ – (условие равенства нормальных компонент тензора полных напряжений на границе раздела жидкость-вакуум). Здесь A_V, A_H — вертикальное и горизонтальное числа Альфвена, соответственно; d - глубина слоя; ω – искомая частота колебаний. Сформулированной задаче отвечают функционал Рэлея

$$\omega^2 = A_H + (1 + A_H)\frac{|W(0)|^2}{K(W)} + A_V\frac{|W'(0)|^2 + |W'(-d)|^2 + M(W)}{K(W)},$$

где $K(W) = \int_{-d}^{0}[|W'|^2 + |W|^2]dz, M(W) = \int_{-d}^{0}[|W''|^2 + |W'|^2]dz$, и дисперсионное уравнение $\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{d^3 \tanh d}{D(\theta)}$,
$D(\theta) = \theta^4 - \frac{1+A_H}{A_V}d^2 \tanh d\,\theta^2 - \frac{1+A_H}{A_V}d^4 \tanh d, \theta = d\sqrt{\frac{\omega^2 - A_H}{A_V}}$.

В известных нам публикациях полагается $A_V \equiv 0$(см., например, [1] и цитированную там библиографию). Спектр в таком случае – одноточечный: $\omega^2 = \tanh d + A_H(1 + \tanh d)$, собственная функция $W(z) = \sinh(z + d)$ описывает единственную (с точностью до знака ω, а, значит, и направления движения волны) поверхностную моду. Имеет место тривиальный переход к задаче Ламба $(d \to \infty)$:
$\omega = \sqrt{1 + 2A_H}, W(z) = \exp(z)$. В случае $A_V > 0$ спектр становится

счетным $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \cdots$ с единственной предельной точкой на бесконечности. Для каждой фиксированной пары чисел Альфвена поверхностная (монотонная по z) мода существует лишь при достаточно малых значениях d, все остальные моды представляют типичные внутренние волны.

С ростом глубины режим с наибольшей амплитудой на свободной поверхности приобретает вид так называемой нехарактерной внутренней волны [2]. При $d \to \infty$ решений, затухающих с глубиной нет, имеются только осциллирующие по z ограниченные решения. Спектр задачи Ламба является сплош-ным, что физически вполне объяснимо с точки зрения теоремы о "вмороженности"в жидкость натянутых как струны магнитных силовых линий.

Литература

1. Баринов В.А., Тактаров Н.Г. Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. Саранск:Изд. Мор-дов. ун-та,1991. 96 с.

2. Краусс В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1968.272 с.

НЕОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАБИЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Зеленская И.А. (Кировоград)

E-mail: Kopchuk@yandex.ru

Цель данной работы состоит в построении равномерной асимптотики решения системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (СВДУ) вида

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = h(x), \tag{1}$$

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$Y(x,\varepsilon)$ – искомая вектор-функция. Векторное уравнение (1) исследуется при условии, что $a(x) \equiv x\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0$.

Для построения асимптотики системы (1) применяется методика, разработанная для уравнения Лиувилля и систем СВДУ с алгебраической точкой поворота [2].

Асимптотика решения расширенного уравнения строится в виде

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon)+\omega(x,t,\varepsilon), \tag{2}$$

$$D_k(x,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon^{s_1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s_2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s_3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_k(t)+\varepsilon^{\gamma}\begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1}\beta_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{k_2}\beta_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{k_3}\beta_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} {U_k}'(t),$$

$$\omega(x,\varepsilon)\equiv colon(\omega_1(x,\varepsilon),\omega_2(x,\varepsilon),\omega_3(x,\varepsilon)),$$

где $\theta(x,\varepsilon) \equiv \{\alpha_{ks}(x,\varepsilon),\beta_{ks}(x,\varepsilon),\omega_s(x,\varepsilon)\}$, $s = \overline{1;3}$–аналитические вектор-функции относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ и бесконечно дифференцируемые по переменной $x \in [0;1]$, которые необходимо определить, $U_k(t)$, $k = 1,2$ – функции Эйри-Дородницина [1].

Литература

1. Бобочко В.М., Перестюк М.О. *Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту.* – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.

2. *Бобочко В.Н.* Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота. // Изв. Вузов. Математика. – 2006. – № 5. С. 8–18.

О НЕСИНГУЛЯРНОСТИ ОДНОЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Зубова С.П., Раецкая Е.В. (Воронеж)

raetskaya@inbox.ru

Рассматривается линейная динамическая система, описываемая уравнением

$$A\frac{dx(t)}{dt}=Bx(t)+Du(t), \tag{1}$$

где $A,B:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^k,\ D:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^k,\ t\in[0,T]$.

Задача управляемости динамической системы состоит в установлении существования управления $u(t)$ такого, что под воздействием этого управления система переводится из произвольного состояния $x(0)$ за время T в произвольное состояние $x(T)$ (полная управляемость).

Оператор, стоящий при производной в уравнении (1) получает специальное приращение εB, где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$:

$$(A + \varepsilon B)\frac{d\tilde{x}(t,\varepsilon)}{dt} = B\tilde{x}(t,\varepsilon) + D\tilde{u}(t,\varepsilon), \qquad (2)$$

Несингулярность задачи управляемости для (2) означает, что добавление возмущения εB не влияет на свойство управляемости. Доказывается

Теорема. *Система (2) является полностью управляемой тогда и только тогда, когда является полностью управляемой система(1).*

В частном случае $A, B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ и регулярности пучка $A + \varepsilon B$ этот результат может быть получен из результатов [1].

В общем случае теорема доказывается с помощью расщеплений уравнений (1) и (2) на уравнения в подпространствах $im\ A$ и $coker\ A$ (см. [2]).

Литература

В.Ф. Чистяков. Управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова// Автоматика и телемеханика. – 2002. – №3. – С. 62–75.

Раецкая Е.В. Критерий полной условной управляемости сингулярно возмущенной системы. Оценки функции состояния и управляющей функции / Е.В. Раецкая // Кибернетика и технологии XXI века: V международ. научн.-техн. конф., Воронеж, 2004. – С. 28–36.

КОМБИНАТОРНОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Иванов О.А. (С–Петербург), Лушникова Г.А (Норильск)

oleg_ivanov2002@mail.ru

Рассмотрим операторы $D:\ u^k \mapsto ku^k$ и $T:\ u^k \mapsto u^{k+1}$ в кольце $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$ формальных степенных рядов Лорана. В работе [1] было доказано комбинаторное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (D - T)(D - T + 1)\ldots(D - T + k - 1)(u^{n-k}) = 0. \qquad (1)$$

Покажем, что оно прозрачный смысл. Пусть $\Phi = DT^{-1}$, тем самым

$\Phi : u^k \mapsto (k-1)u^k$, так что $\Phi(u) = 0$, более того, очевидно, что

$$\Phi^n(u^n) = 0. \qquad (2)$$

Ясно, что $D - T = (DT^{-1} - 1)T = (\Phi - 1)T$.

Лемма. $DT^k - T^k D = kT^k$.

Действительно, $\left(DT^k - T^k D\right)(u^n) = D(u^{n+k}) - T^k(nu^n) = (n+k)u^{n+k} - nu^{n+k} = ku^{n+k} = kT^k(u^n)$.

Следствие 1. $T^k(D - T + k) = (\Phi - 1)T^{k+1}$.

Действительно, в силу доказанной леммы, $T^k(D - T + k) = T^k D - T^{k+1} + kT^k = DT^k - kT^k - T^{k+1} + kT^k = DT^k - T^{k+1} = (\Phi - 1)T^{k+1}$.

Из следствия 1 нетрудно вывести по индукции, что верно

Следствие 2. $(D-T)(D-T+1)\dots(D-T+k-1) = (\Phi-1)^k T^k$.

Теорема. Тождества (1) и (2) равносильны.

В силу тождества, установленного в следствии 2, имеем,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (D-T)(D-T+1)\dots(D-T+k-1)(u^{n-k}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\Phi-1)^k T^k(u^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\Phi-1)^k(u^n) =$$
$$= (1 + \Phi - 1)^n(u^n) = \Phi^n(u^n).$$

Литература

1. P. A. Kuchment, S. Ya. L'vin, Paley–Viener Theorem for Exponential Radon Transform. *Acta ApplicandæMathematicæ*, 18, 1990, pp. 251–260.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, ОПРЕДЕЛЕННОГО НА ЛИНЕАЛЕ, УГЛОВОЙ ОПЕРАТОР КОТОРОГО ОГРАНИЧЕН[1]

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

В пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, где $H_\pm = P_\pm H$ рассматривается семейство "горизонтальных конусов"N_λ, заданных формулами:

$$N_\lambda = \{x \in H \quad | \quad \| P_- x \|^2 \leqslant \lambda \cdot \| P_+ x \|^2\}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203.

Известно, что линеал L принадлежит множеству N_λ при некотором $\lambda \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда угловой оператор этого линеала существует и ограничен.

Основные результаты.

Теорема 1. *Если область определения оператора A принадлежит множеству N_λ при некотором $\lambda \geqslant 0$, то оператор $(P_+ + P_- A)^{-1}$ существует и ограничен.*

Построен пример линейного оператора A, чья область определения D_A имеет нулевое пересечение с компонентой H_-, что обеспечивает существование углового оператора линеала D_A, однако условие $D_A \subset N_\lambda$ не выполняется ни при каком $\lambda \geqslant 0$. Показано, что в этом примере оператор $(P_+ + P_- A)^{-1}$ не является ограниченным. Таким образом, установлено, что условие

$$D_A \subset \bigcup N_\lambda, \quad \lambda \geqslant 0$$

теоремы 1 является существенным.

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРИНЦИПА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Каменский М.И. (Воронеж)
mikhailkamenski@mail.ru

В работе рассматривается уравнение

$$x'(t) = \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) x(t - h_i) + \varepsilon^2 g(t, x_t, \epsilon), \qquad (1)$$

где $A_i(t) : R^N \to R^N$ непрерывные $T-$периодические по t операторы, $0 = h_0 < h_1 < ... < h_k < ...$, $h_k \to \infty$, оператор $g : R^1 \times C((-\infty, 0], R^N) \times [0,1] \to R^N$, непрерывен по совокупности переменных и $T-$периодичен по первой переменной, $C((-\infty, 0], R^N)$ – пространство непрерывных ограниченных на $(-\infty, 0]$ функций со значениями в R^N.

Предполагается, что

$$\int_0^T A_i(t) dt = 0,$$

[1]Работа поддержана РФФИ, гранты 07-01-00035, 06-01-72552 и 05-01-00100.

для операторов A_i справедливы оценки $\| A_i(t) \| \leqslant a_i$ и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ сходится.

Положим $\mathbf{A}_i(t) = \int_0^t A_i(s)ds$,

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}_i(t) A_j(t - h_i)dt.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$x'(t) = \varepsilon^2 V x + \varepsilon^2 g_0(x), \tag{2}$$

где $g_0 : R^N \to R^N$ и определяется формулой

$$g_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t, \overline{x}, 0)dt,$$

в которой через $\overline{x}$ обозначена функция из $C((-\infty, 0], R^N)$, тождественно равная $x \in R^N$.

Используя уравнение (2) в качестве усредненного для уравнения (1) устанавливаются аналоги первой и второй теорем Н.Н.Боголюбова-Н.М.Крылова в принципе усреднения. В аналоге первой теоремы близость решений гарантируется на промежутке порядка ϵ^{-2}. Для обыкновенных дифференциальных уравнений такого типа результаты были получены в [1].

Литература

[1] Каменский М.И. Доклады РАН 1996, т.347, N2 С.151-153.

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Квитко А.Н. (Санкт–Петербург)
alkvit46@mail.ru

Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1}$$

$$x \in R^n, \ u \in R^r, \ r \leqslant n, \ t \in [0, 1], \ f \in C^1(R^n \times R^r \times R^1; R^n); \tag{2}$$

$$f(0, 0, t) \equiv 0, \qquad rank(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = u;$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1) \right\}, \quad B = \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1) \right\}; \tag{3}$$

$$\|x\| < C_1, \quad \|u\| < C_2. \tag{4}$$

Рассмотрим бесконечное разбиение интервала $[0,1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < 1$, где $t_k \to 1$ при $k \to \infty$. Функцию $u(t) = u_k \ \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ $(k = 0, 1, \ldots)$ будем называть дискретной управляющей функцией. Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \ u(0) = 0, \ x(1) = x_1 \in R^n, \ \|x_1\| < C_1. \tag{5}$$

Задача. Найти дискретное управление $u(t)$, так чтобы решение системы (1) удовлетворяло условию

$$x(0) = 0 \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to 1. \tag{6}$$

Предложен алгоритм решения поставленной задачи.

Литература

1. Квитко А.Н. Об одном методе решения граничной задачи для нелинейной управляемой системы. // ЖВМиМФ 2006, т.46 №7. С. 1241 – 1250.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ПО ВОЗРАСТАМ

Кетова К.В., Сабирова О.Р. (Ижевск)

primat@istu.ru

Будем рассматривать постановку задачи оптимального управления макроэкономической системой в виде [1]. Региональная экономика описывается производственной функцией (ПФ) типа Кобба-Дугласа. Для описания динамики факторов, входящих в ПФ, введем функции распределения $\vartheta_i(t,\xi)$ соответствующих факторов i по возрастам ξ: $\frac{\partial \vartheta_i(t,\xi)}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta_i(t,\xi)}{\partial \xi} = -\eta_i \vartheta_i(t,\xi)$, где η_i - коэффициенты амортизации соответствующих факторов.

Рассмотрим случай, когда в процессе производства однородного валового регионального продукта $Y(t)$ используются два однородных фактора: капитал $K(t) = \int_0^\infty \vartheta_1(t,\xi) d\xi$, и эффективный объем трудовых ресурсов $Z(t) = \int_0^\infty \vartheta_2(t,\xi)d\xi$. Тогда начальные и граничные условия имеют вид: $\vartheta_i(0,\xi) = \vartheta_{0i}(\xi)$, $\xi \geqslant 0$, $\vartheta_i(t,\xi_{0i}) = s_iY$, $t \geqslant 0$, где s_i - норма накопления i-го фактора, определяется в ходе решения задачи оптимального управления.

Будем решать задачу с использованием принципа максимума Понтрягина. Учет распределения факторов по возрастам затрудняет применение указанного принципа, поэтому перейдем от распределений факторов по возрастам ξ к распределениям по дате рождения τ с использованием замены $\tau = t - \xi$. В результате в исходной постановке задачи дифференциальные уравнения в частных производных преобразуются в уравнения в полных производных и оптимальная стратегия управления строится на основе принципа максимума [2].

Литература

1. Кетова К.В., Сабирова О.Р. Постановка задачи оптимального управления региональной экономикой с учетом инновационной составляющей // Материалы Всерос. науч.-практ. конф. "Инновационная экономика и региональное инновационно-устойчивое развитие 2006, Чебоксары, Изд-во ЧувГУ - С. 41-44.

2. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. - М.: Наука, 1989. - 61 с.

ТЕОРИЯ ИЗМЕНЯЕМОСТИ

Ключанцев М.И. (Воронеж)

kluchancev@pmemm.org.ru

Изменяемость системы обусловливается либо изменениями объектов, составляющих структуру системы, либо изменением количества этих объектов. Изменения первого вида называются последовательными действиями, второго – параллельными действиями. Последовательные и параллельные объекты образуютI область действительности, для исследования которой предлагается аксиоматическая теория, математическая по форме. Эта теория упорядочивает понятия, определения и утверждения, касающихся внутренней структуры и внутренней организации самоэволюционирующихся систем. Аксиомы теории последовательных и параллельных действиями, т. е. теории изменяемости, приведены в [1].

Общая схема формирования математического формализма теории изменяемости имеет вид

$$\left\{\frac{\textit{формализм}}{\textit{временное представление}}\right\} \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \left\{\frac{\textit{графы}}{\textit{бифурканты}}\right\} \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \left\{\frac{\textit{элементы}}{(x, t, t_1, \ldots, t_n, , A, A_1, \ldots, A_n)}\right\} \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \left\{\frac{\textit{эволюционирующееся пространство}}{Dtt_1 \ldots t_n R(AA_1 \ldots A_n)}\right\}.$$

Эволюционирующееся пространство играет главную роль в математическом формализме теории и дает логически последовательный и удобный метод выражения неклассических результатов и их интерпретацию. Пополняя так построеннй формализм формализмами теорий исчисления будущих [2] и операции вставка [3], устойчивыми в последовательном t и параллельном θ временах соответственно и поэтому дающими возможность конструировать и реконструировать само развивающиеся операторы (системы), получаем полный непротиворечивый формализм теории изменяемости.

Литература

1.*Ключанцев М. И.* Аксиоматический и математический формализм теории параллельных действий // Понтрягинские чтения - XVII. 2006.– С. 84.

2.*Ключанцев М. И.* Исчисление будущих и графы // Понтрягинские чтения - XI, 2001. – С. 87.

3.*Ключанцев М. И.* Операция вставка // Понтрягинские чтения - XIII, 2002. – С. 76.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключев В.В. (Йошкар-Ола)

vfri@mail.ru

Рассматривается задача Коши $dx(t)/dt = Ax(t),\ x(0) = f$, где $A : D(A) \subset X \to X$ — неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве X; $\overline{D(A)} = X$, $f \in D(A)$. Предполагается, что для спектра $\sigma(A)$ и резольвенты $(\zeta E - A)^{-1}$ оператора A выполняется условие $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ и имеет место оценка $\|(\zeta E - A)^{-1}\| \leqslant C_0(1 + |\zeta|)^{-1}\, \forall \zeta \in \mathbf{C}\backslash K(\varphi_0)$, где

$K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbf{C}\backslash\{0\} : |\arg\zeta| < \varphi\}$. ($C_i > 0$ – постоянные). Данная задача поставлена, вообще говоря, некорректно.

В продолжение [1], рассмотрим следующий класс разностных схем численной аппроксимации функции $x = x(t)$: $\sum\limits_{\nu=0}^{k} \alpha_\nu x_{n+\nu} = \Delta t \sum\limits_{\nu=0}^{k} \beta_\nu A x_{n+\nu}; \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-k; \qquad \Delta t = \frac{T}{N};$ $x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = f$. Здесь $k \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число, α_ν, β_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant k$ — вещественные числа, выбор которых определяет конкретную разностную схему.

В работе [1] установлены условия на α_ν, β_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant k$ и ограничения на величину отрезка $[0;\ T]$, на котором ищется решение, при выполнении которых для приближений x_n, порождаемых схемой, существование решения на отрезке $[0;\ T_1]$, $T_1 > gT > T$ влечет оценку $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_1(\Delta t)^q$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $\Delta t \in (0, \varepsilon)$ для $\forall q \in (0; p)$, где $p = O(T_1 - gT)$, $T_1 \to gT$ определяется выбранным методом.

В данном сообщении анонсируется условие $x(T) \in D(A^{q_1})$ с произвольным $q_1 \in (0, q)$ как необходимое для выполнения оценки $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_2(\Delta t)^q$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $q \in (0, 1]$ $\Delta t \in (0, \varepsilon)$ при соответствующих ограничениях на параметры разностной схемы.

Литература

1. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Вычисл. методы и программирование.-2006, Т.7.-С.163-171.

УСТОЙЧИВЫЙ ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ КВАЗИРЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Кокурин М.Ю., Козлов А.И. (Йошкар–Ола)

kokurin@marsu.ru, kozlovv@marsu.ru

Рассматривается задача нахождения квазирешения $x^* \in Q$ уравнения $F(x) = 0, x \in H_1$ на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset H_1$: $\varphi(x^*) = \min\limits_{x \in Q} \varphi(x), \varphi(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$, где $F : H_1 \to H_2$ – нелинейный

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант06–01–00282а)

оператор, H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Предполагается, что F дважды дифференцируем по Фреше, оператор $x \to F''(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Считается, что вместо точного оператора F доступно лишь его приближение $\widetilde{F}\colon H_1 \to H_2$, такое, что $\|\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}(x) - F'^*(x)F(x)\| \leqslant \delta$. Выбираются управляющий элемент $\xi \in H_1$ и конечномерное линейное подпространство $M \subset H_1$. Для нахождения квазирешения x^* предлагается следующий итерационный процесс: $x_0 \in Q$,

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n)P_Q(P_{M_\xi}(x_n) - \gamma_n P_M \widetilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n))\widetilde{F}(P_{M_\xi}(x_n))),$$

$$\beta_n \in [0,\overline{\beta}], \quad \gamma_n \in [\underline{\gamma},\overline{\gamma}]; \quad 0 \leqslant \overline{\beta} < 1, \quad 0 < \underline{\gamma} < \overline{\gamma}.$$

Здесь P_D – оператор метрического проектирования из H_1 на выпуклое замкнутое множество $D \subset H_1$; $M_\xi = \{x \in H_1 : x = \xi + y, y \in M\}$.

Теорема. *Пусть выполняются условия* $Ker\big(F'(x^*)\big) \cap M = \{0\}$, $\|(P_M - E)(x^* - \xi)\| \leqslant \Delta, \|(P_M - E)F'^*(x^*)F(x^*)\| \leqslant \Delta_1$; E *– единичный оператор. Тогда существуют такие положительные константы* $C, l, \underline{\gamma}, \overline{\gamma}, \overline{\beta}$, *что если начальное приближение* x_0 *удовлетворяет условию* $\|x_0 - x^*\|^2 \leqslant l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \underline{\gamma})$, *то выполняется предельное соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n - x^*\|^2 \leqslant C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \overline{\gamma}). \tag{1}$$

Неравенство (1) означает устойчивость рассматриваемого итерационного процесса по отношению к вариации начального приближения x_0 в окрестности квазирешения x^*, а также к малым погрешностям в задании исходного оператора F.

О ПРИВЕДЕНИИ КВАРТИЧНОЙ ФОРМЫ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ К НОРМАЛЬНОМУ ВИДУ

Колесникова И.В. (Воронеж)
Inna384@yandex.ru

Функционал

$$V(\rho, \kappa_1, \kappa_2, \alpha) = \int_0^\pi \mathcal{L}\left(\frac{d^3p}{dx^3}, \frac{d^2p}{dx^2}, \frac{dp}{dx}, p\right) dx$$

с лагранжианом $\mathcal{L}$ в виде

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^3p}{dx^3}\right)^2-\kappa_1\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)^2+\kappa_2\left(\frac{dp}{dx}\right)^2-\alpha p^2\right)+\frac{p^4}{4}$$

при краевых условиях

$$p(0)=\frac{d^2p}{dx^2}(0)=\frac{d^4p}{dx^4}(0)=p(\pi)=\frac{d^2p}{dx^2}(\pi)=\frac{d^4p}{dx^4}(\pi)=0$$

и локализации параметров

$$\alpha=\bar{\alpha}+\delta_1,\quad \kappa_1=\bar{\kappa}_1+\delta_2,\quad \kappa_2=\bar{\kappa}_2+\delta_3,$$

где

$$(\bar{\alpha},\ \bar{\kappa}_1,\ \bar{\kappa}_2)^\top=(n^2+m^2+l^2,\ n^2m^2+m^2l^2+n^2l^2,\ n^2m^2l^2)^\top,$$

сводится [1] к изучению бифуркаций критических точек некоторого полинома четвертой степени от трех переменных. В связи с этим возникает вопрос о приведении квартичной формы к нормальному виду.

Квартичная форма трех переменных

$$W(x_1,x_2,x_3)=a_1\ x_1^4+a_2\ x_2^4+a_3\ x_3^4+b_1\ x_2^2x_3^2+b_2\ x_1^2x_3^2+b_3\ x_1^2x_2^2+$$
$$+c_1\ x_1^2x_2x_3+c_2\ x_1x_2^2x_3+c_3\ x_1x_2x_3^2+d_1\ x_1^3x_2+d_2x_1^3x_3+d_3\ x_1x_2^3+$$
$$+d_4\ x_2^3x_3+d_5\ x_1x_3^3+d_6x_2x_3^3=$$
$$=N(x_1,x_2,x_3)+R(x_1,x_2,x_3),$$

где

$$N(x_1,x_2,x_3)=a_1\ x_1^4+a_2\ x_2^4+a_3\ x_3^4+b_1\ x_2^2x_3^2+b_2\ x_1^2x_3^2+b_3\ x_1^2x_2^2+$$
$$+c_1\ x_1^2x_2x_3+c_2\ x_1x_2^2x_3+c_3\ x_1x_2x_3^2+c_1\ x_1^2x_2x_3+c_2\ x_1x_2^2x_3+c_3\ x_1x_2x_3^2,$$
$$R(x_1,x_2,x_3)=d_1\ x_1^3x_2+d_2x_1^3x_3+d_3\ x_1x_2^3+d_4\ x_2^3x_3+d_5\ x_1x_3^3+d_6x_2x_3^3$$

заменой $x=y+Hy$, где $H=(h_{jk})$ – матрица, $h_{jj}=0\,\forall j$, приводится к квартичной форме

$$\widetilde{W}(y_1,y_2,y_3)=\widetilde{N}(y_1,y_2,y_3)+\widetilde{R}(y_1,y_2,y_3). \tag{1}$$

Матрица H подбирается так, чтобы

$$\widetilde{R}(y_1, y_2, y_3) \equiv 0. \tag{2}$$

Литература

[1] Зачепа А.В. О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3-мерной сборки/ А.В. Зачепа, Ю.И. Сапронов Ю.И.// Труды математического факультета, вып.9 (новая серия). Воронж: ВорГУ, 2005.-С.57-71.

[2] Колесникова И.В. Особенности многомерной сборки и нормализация квартичных форм// Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения. Материалы международной научной конференции ТВМНА - 2005. Воронеж: ВорГУ, 2005. - С.61-62.

[3] Колесникова И.В., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. К бифуркационному анализу 2-точечных краевых задач классической механики. Труды ВЗМШ-2006.

[4] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. -М.: Мир. 1987. – 312 с.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ СИСТЕМЫ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Колодежнов В.Н. (Воронеж)
kvn@vgta.vrn.ru

Рассматривается система трехкомпонентных гиперкомплексных чисел [1] вида

$$X = \sum_{j=1}^{3} S_j \cdot X_j; \quad X_j \geqslant 0, \tag{1}$$

Здесь x_j — компоненты гиперкомплексного числа; s_j — базисные единицы, отождествляемые в некотором смысле со знаками компонент. Аксиоматика и основные операции над объектами вида (1) определены в [1]. Таблица Кэли для перемножения базисных единиц задается следующим образом

$$s_i \cdot s_j = s_{ij}; \quad \| s_{ij} \| = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 & s_2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_2 & s_1 & s_3 \end{pmatrix}.$$

Для такой системы гиперкомплексных чисел в рамках итерационной процедуры

$$X_{n+1} = X_n^2 + C; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad X_1 = 0,$$

с помощью ПЭВМ в плоскости параметра проведено качественное исследование отдельных участков фрактальных границ области, для точек которой аттрактором является бесконечность. Проведена визуализация и рассмотрены особенности процесса сходимости для некоторых структур при $n \to \infty$.

Литература

1. Колодежнов В.Н. Об осной ситеме гиперкомплексных чисел на двумерной плоскости. // Вестник Воронежского государственного технического университета, 2006. Т.2. № 5. С.25-30

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА УЧАСТКЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ И ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Колодежнов В.Н., Колтаков А.В. (Воронеж)
kvn@vgta.vrn.ru

Рассматривается течение вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами, одна из которых движется вдоль оси Ox со скоростью U_w. При этом подвижная пластина представляется участком ленты конечной длины L. Предполагается, что вязкость жидкости $\mu(T)$ зависит от температуры T по степенному закону в форме

$$\mu(T) = \frac{\mu_0}{(T - T_p)^n},$$

где μ_0, T_p, n —- эмпирические константы.

Основу математической модели теплопереноса в такой системе с учетом ряда допущений составляет нелинейное уравнение для распределения средней по сечению канала температуры

$$G_z \cdot U'_w \frac{\partial \Theta(x')}{\partial x'} = Na \frac{U'^2_w}{\Theta^n(x')} - Nu \cdot (\Theta(x') - \Theta_s),$$

$$\text{при} \quad x' = 0, \quad \Theta(0, x') = \Theta_b,$$

где $\Theta(x'), x'$ — соответственно безразмерные температура и продольная координата; G_z, Nu и N_a — числа Гритца, Нуссельта и Наме-Гриффитса соответственно; Θ_s, Θ_b — безразмерные температуры окружающей среды и жидкости на входе в канал.

Решение представленного дифференциального уравнения теплопереноса искалось в виде разложения искомой функции по степеням малого параметра. Анализ влияния параметров модели на сходимость полученного приближенного решения, показал, что для $G_z \geqslant 10^6$ с достаточной для инженерных расчетов точностью, не превышающей 5%, допустимо ограничиваться 1 членом разложения.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ И ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Колтаков А.В. (Воронеж)
teormech@vgta.vrn.ru

Рассматривается краевая задача, описывающая теплоперенос в слое вязкой жидкости при течении типа Куэтта с учетом диссипации и зависимости вязкости жидкости от температуры, которая в безразмерном виде может быть представлена следующим образом

$$\frac{d^2 T'}{dy'^2} + Na \cdot T' n = 0;$$

при $y' = 0; \quad T' = T'_{w1}$; при $y' = 1; \quad T' = T'_{w2}$. Здесь n — эмпирическая константа.

Показано, что эта краевая задача имеет решение при выполнении следующего условия

$$Na < Na_{max}.$$

где Na_{max} — некоторое предельное значение числа Наме Na, величина которого определяется из решения следующей системы уравнений относительно T_{max} и Na_{max}

$$Na_{max}(T'_{max}) = \frac{n+1}{2}\left[\int\limits_{T'_{w1}}^{T'_{max}} \frac{dT'}{\sqrt{T'^{n+1}_{max} - T'^{n+1}}} - \int\limits_{T'_{max}}^{T'_{w2}} \frac{dT'}{\sqrt{T'^{n+1}_{max} - T'^{n+1}}}\right]^2;$$

$$\frac{dNa_{max}(T'_{max})}{dT'_{max}} = 0.$$

В случае же, когда $Na \geqslant Na_{max}$, задачу следует рассматривать в нестационарной постановке.

О ГОМОТОПИЗАЦИИ УНИТАРНОГО K_1-ФУНКТОРА

Копейко В.И. (Элиста)
kopeiko52@mail.ru

Все рассматриваемые в работе функторы действуют из категории колец в категорию групп. Функтор F называется гомотопически инвариантным, если $F(A[X]) \cong F(A)$ для произвольного кольца A. Например, K_n-функторы Квиллена гомотопически инвариантны на подкатегории регулярных колец. Гомотопизацией произвольного функтора F называется гомотопически инвариантный функтор $[F]$ вместе с естественным преобразованием $h : F \to [F]$, удовлетворяющим условию универсальности. Например, гомотопизацией K_n-функторов Квиллена на категории колец являются KV_n-функторы Каруби-Вилламайера.

Пусть A — ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $*$ и пусть $\epsilon = \pm 1$. Обозначим через $HU^{\epsilon}_{2r}(A)$ нормализатор подгруппы в $U^{\epsilon}_{2r}(A)$, порожденной матрицами следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1_r - \alpha & \beta \\ \gamma & 1_r + \alpha^* + (\alpha^*)^2 + \cdots + (\alpha^*)^n \end{pmatrix} \in U^{\epsilon}_{2r}(A)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in M_r(A)$ удовлетворяют условиям: β, γ — $(-\epsilon)$ - эрмитовы, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha^*$, $\gamma \cdot \alpha = \alpha^* \cdot \gamma$, $\beta \cdot \gamma = -\alpha^{n+1}$. Через $U^{\epsilon}(A)$, $HU^{\epsilon}(A)$,$EU^{\epsilon}(A)$ обозначим проективные пределы соответствующих групп. Тогда корректно определены (абелевы) группы $K_1U^{\epsilon}(A) = U^{\epsilon}(A)/EU^{\epsilon}(A)$, $K_1HU^{\epsilon}(A) = U^{\epsilon}(A)/HU^{\epsilon}(A)$.

Теорема . Гомотопизацией функтора K_1U^ϵ на категории колец с инволюцией является функтор K_1HU^ϵ . В частности, функтор K_1HU^ϵ - гомотопически инвариантен.

Замечание . Гомотопическая инвариантность функторов K_nU^ϵ на подкатегории регулярных колец с инволюцией, в которых 2 - обратимый элемент, была доказана ранее в [1] и значит в этом случае $K_1HU^\epsilon \cong K_1U^\epsilon$.

Литература

1. Hornbostel J. $\mathbf{A}^1$-representability of hermitian K-theory and Witt groups.-Topology, 44(2005), 661-687.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ РЕБРАМИ

Копытин А.В. (Воронеж)

kopytin@cs.vsu.ru

Дифференциальные уравнения на геометрических графах интенсивно изучаются уже более 20 лет (см. [1]).

Рассматривается волновое уравнение на графе Γ

$$u_{tt} = \Delta_\Gamma u, \tag{1}$$

где скалярная функция $u(x,t)$ определена на множестве $\Gamma \times [0,+\infty)$, а Δ_Γ – оператор Лапласа-Бельтрами, т.е. оператор взятия второй производной по натуральному параметру вдоль каждого ребра Γ.

В случае, когда длины ребер графа Γ рационально соизмеримы, в [2] доказывается, что для того, чтобы все обобщенные решения уравнения (1) были ограничены по равномерной норме необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора $-\Delta_\Gamma$ содержался в промежутке $(0,+\infty)$ и оператор $-\Delta_\Gamma$ не имел присоединенных функций.

В том же случае, когда длины ребер графа рационально несоизмеримы, для графа, имеющего всего два ребра и одну внутреннюю вершину, удается показать, что уравнение (2) имеет неограниченные решения.

Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Ю.В. Покорный и др. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с. – ISBN 5-9221-0245-X.

2. Копытин А. В. О существовании неограниченных решений волнового уравнения на сети/ А. В. Копытин // Вестник ВГУ, Серия физика, математика, 2003. №2. С. 168-172.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА-ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Корнев В.В. (Саратов)

KornevVV@info.sgu.ru

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha\int\limits_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt, \quad x\in[0,1], \qquad (1)$$

где ядро $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t, $\frac{\partial^s}{\partial x^s}A(x,t)|_{t=x} = \delta_{s,n-1}$ $(s=0,\ldots,n)$, $\delta_{s,n-1}$ – символ Кронекера, α – произвольное число, $\alpha^2\neq 1$. Для оператора (1) в [1] установлена равносходимость разложений произвольной суммируемой функции по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) в сравнении с тригонометрическими рядами Фурье. Следующую теорему можно рассматривать как аналог известного признака Жордана-Дирихле сходимости тригонометрических рядов.

Теорема. *Пусть* $\arg\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\neq 0$ *и* m *– одно их чисел* $0,1,\ldots,n-1$. *Тогда для любой* $f(x)\in C^m[0,1]$, *у которой* $f^{(m)}$ *имеет на* $[0,1]$ *ограниченную вариацию и которая удовлетворяет условиям* $f^{(k)}(1)=(-1)^k f^{(k)}(0)$ $(k=0,1,\ldots,m)$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}||f(x)-S_r(f,x)||_{C^m[0,1]}=0,$$

где $S_r(f,x)$ *– частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* A, *соотвествующим характеристическим значениям, модули которых не превосходят* r.

Литература

1. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001 — Т. 192, № 10. — С. 33-50.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ПРИ ЕДИНСТВЕННОЙ ЗАКРЕПЛЁННОЙ ГРАНИЧНОЙ ВЕРШИНЕ

Коровина О.В. (Борисоглебск)
olesya_korovina@mail.ru

Рассматривается следующая начально-краевая задача для волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad (x \in R(\Gamma),\ t > 0) \\ \sum\limits_{h \in T(x)} \alpha_h(x) u_h^+(x,t) = 0 \qquad (x \in \mathcal{J}(\Gamma),\ t \geqslant 0) \\ u(b,t) = 0 \qquad (t \geqslant 0) \\ u_h^+(x,t) = 0 \qquad (x \in \partial\Gamma \setminus \{b\},\ h \in T(x),\ t \geqslant 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \lim\limits_{t \to 0+} u_t(x,t) = 0 \qquad (x \in \overline{\Gamma}) \end{cases} . \tag{1}$$

Здесь производная по x понимается в смысле [1], $R(\Gamma)$ – объединение всех рёбер Γ, $\mathcal{J}(\Gamma)$ – множество внутренних вершин Γ, $T(x) = \{h \,|\, \|h\| = 1$ и $(x + \varepsilon h) \in \Gamma$ для достаточно малых $\varepsilon > 0\}$, $\alpha_h(x)$ – заданные положительные числа, $u_h^+(x,t)$ – правая производная функции $u(\,\cdot\,, t)$ в точке x по вектору h, b – фиксированная граничная вершина, $\partial\Gamma$ – множество граничных вершин Γ, $\overline{\Gamma}$ – замыкание Γ в $\mathbb{R}^n$. Решение $u(x,t)$ задачи (1) ищется в классе непрерывных на $\overline{\Gamma} \times [0, +\infty)$ функций, удовлетворяющих всем соотношениям из (1).

Теорема. Пусть помимо естественных условий на φ (определяемых понятием решения задачи (1)) выполнены ещё и следующие:
1) $\forall (x \in \mathcal{J}(\Gamma) \cup \partial\Gamma) \forall (h \in T(x)) \left[\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varphi''(x + \varepsilon h) = \left(\varphi_h^+\right)_h^+(x) \right]$;
2)$\forall (x \in \mathcal{J}(\Gamma) \cup \partial\Gamma) \forall (h, \eta \in T(x)) \left[\left(\varphi_h^+\right)_h^+(x) = \left(\varphi_\eta^+\right)_\eta^+(x) \right]$;
3) $\left(\varphi_h^+\right)_h^+(b) = 0$, где $h \in T(b)$.
Тогда существует функция $g : \overline{\Gamma} \times [0, +\infty) \times R(\Gamma) \to \mathbb{R}$ такая, что для любой φ, удовлетворяющей перечисленным условиям, решение

$u(x,t)$ задачи (1) представимо в виде:

$$u(x,t) = -\int\limits_{R(\Gamma)} g(x,t;s)\varphi''(s)\,ds,$$

где интеграл по $R(\Gamma)$ понимается как сумма несобственных римановых интегралов по всем рёбрам Γ.

Доказательство теоремы основано на подходе, предложенном в [2] для случая, когда все условия в граничных вершинах Γ – типа Дирихле.

Автор выражает благодарность В. Л. Прядиеву за постановку задачи и полезные консультации.

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

2. Прядиев В. Л. Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Совр. матем. и её прилож. Т. 38. - Тбилиси: Институт академии наук Грузии, 2006. - С. 82–94.

РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КВАЗИМОДЕЛЬНЫМИ КОНЦАМИ[1]

Корольков С.А. (Волгоград)
sergei.korolkov@rambler.ru

В работе рассматриваются многообразия M с квазимодельными концами $D_1, ..., D_m$, т.е. каждый конец D_i изометричен прямому произведению $[r_0, +\infty) \times S_{i1} \times S_{i2} \times .. \times S_{ik}$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + g_{i1}^2(r)d\theta_{i1}^2 + ... + g_{ik}^2(r)d\theta_{ik}^2$. Здесь S_{ik} — компактные римановы многообразия без края, $g_{ik}(r)$ — положительные гладкие на $[r_0, +\infty)$ функции, $d\theta_{ik}^2$ — метрика на S_{ik}.

Будем рассматривать на таких многообразиях решения стационарного уравнения Шредингера $Lu = \Delta u - c(x)u = 0$, причем $c(x) = c_i(r)$ на каждом конце D_i многообразия M. В дальнейшем

[1]Работа выполнена при поддержке гранта математического факультета Волгоградского государственного университета

решения стационарного уравнения Шредингера будем называть L-гармоническими функциями.

Говорят, что конец D_i имеет L-гиперболический тип, если его L-гармоническая мера не равна тождественно нулю. В противном случае будем говорить, что конец D_i имеет L-параболический тип.

Пусть $\mathrm{BH}_L(M)$ — пространство ограниченных L-гармонических на M функций; $\mathrm{H}'_L(M)$ — пространство L-гармонических на M функций, ограниченных либо сверху, либо снизу на каждом конце D_i многообразия M; $\mathrm{H}^+_L(M)$ — конус неотрицательных L-гармонических на M функций. В работе получены следующие оценки.

Теорема 1. Пусть M — многообразие с квазимодельными концами, имеющее $l \geqslant 1$ концов слабо L-гиперболического типа, m концов строго L-параболического типа и не имеющее концов других типов. Предположим также, что функции $c_i(r)g^2_{ij}(r)$, $j = 1, ..., k$, $i = 1, 2, ..., m + l$ ограничены на $[r_0, +\infty)$. Тогда

$$\dim \mathrm{HB}_L(M) = l; \quad \dim \mathrm{H}^+_L(M) = \dim \mathrm{H}'_L(M) = m + l.$$

Теорема 2. Пусть M — многообразие с квазимодельными концами, которое имеет $m \geqslant 1$ концов строго L-параболического типа и не имеет концов других типов. Предположим также, что функции $c_i(r)g^2_{ij}(r)$, $j = 1, ..., k$, $i = 1, 2, ..., m$ ограничены на $[r_0, +\infty)$. Тогда

$$\dim \mathrm{H}'_L(M) \leqslant m.$$

БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ СЛАБО НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ

Костин Д.В. (Воронеж)

dvkostin@rambler.ru

Доклад посвящен схеме анализа бифуркаций равновесных конфигураций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании, в условиях двухмодового вырождения. Решение аналогичной задачи в случае однородной балки ранее было дано Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым [1]. Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в исследовательской схеме Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 второго дифференциала (в нуле) функционала энергии. В случае неоднородной балки это условие нарушается и, более того, оно не допускает прямого обобщения. В предлагаемой схеме условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких векторных полей $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала в нуле. Наличие такой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций балки.

В построении требуемой пары векторных полей ведущую роль сыграла взятая из монографии В.П. Маслова [2] формула ортогонального проектора (на линейную оболочку $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$).

Литература

[1] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. *Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений* // Современная математика и ее приложения. – Тбилиси. 2003. Т.7. – С.72-86.

[2] Маслов В.П. *Асимптотические методы и теория возмущений.* – М.: Наука. 1988. – 312 с.

О РОЖДЕНИИ ПЕРЕОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

Костина Т.И. (Воронеж)

tata_ sti@rambler.ru)

Известно, что колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты описываются уравнением Белецкого :

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu, \tag{1}$$

где e – эксцентриситет орбиты, μ – параметр, характеризующий распределение массы спутника, δ – угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника, ν – угловая (полярная) координата центра масс спутника.

Если уравнение (1) умножить на $(1 + e\cos\nu)$, то полученное уравнение является уравнением Эйлера–Лагранжа, соответствующего функционала действия

$$V(q) = \int\limits_0^{2\pi} L(\dot{q}, q)dt,$$

а значит является вариационным.

Это позволяет применить к уравнению Белецкого метод Ляпунова-Шмидта и основанные на нем новые вычислительные технологии.

Рассмотрим ритцевскую аппроксимацию W_R функционала действия по первым двум модам $e_1 = \sqrt{2}sin(t),\ e_2 = \sqrt{2}cos(t)$. Тогда имеем следующее асимптотическое представление:

$$W(\xi) = W_R(\xi) + o(||\xi||^4) = o(\xi^2),$$

где $W_R(\xi) := W(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2)$.

Несложные вычисления приводят к следующему выражению:

$$W_R(\xi) = (\delta + \alpha\varepsilon^2)\xi_1^2 + (\delta + \beta\varepsilon^2)\xi_2^2 + \gamma(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 2\sqrt{2}\pi\varepsilon\xi_2 + const.$$

Литература

[1] Козлов В.В. Симметрии топология и резонансы в гамильтоновой механике.–М.: Наука, 1995. 432с.

[2] Белецкий В.В Движение искуственного спутника вокруг центра масс.–М.: Наука, 1965.–416с.

[3] Борзаков А.В. О приближенных методах в нелокальном анализе вариационных задач на основе конечномерной редукции//Математическме модели и операторные уравнения. Том 3. Воронеж: ВорГУ, 2005. 13–26с.

ЗАДАЧА КОШИ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Костыгин С.С. (Кировоград)

E-mail: 1Cnick@rambler.ru

Цель данной работы состоит в построении равномерной асимптотики решения неоднородной задачи с двумя точками поворота вида:

$$\begin{array}{c} L_\varepsilon U \equiv \varepsilon^4 U''(x,\varepsilon) - (x^2-1)p^2(x)U(x,\varepsilon) = h(x) \\ U(0,\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\alpha + \varepsilon^{-1}\beta + A,\ U'(0,\varepsilon) = \varepsilon^{-3}\gamma_1 + \varepsilon^{-2}\gamma_2 + B \end{array} \qquad (1)$$

при $\varepsilon \to +0$.

Здесь $p(x)$ и $h(x)$ – достаточно гладкие функции, заданные на отрезке $I = [-1,1]$, $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ – определенным образом выбранные постоянные, A и B - произвольно заданные постоянные.

Для построения асимптотики решения используются функции параболического цилиндра. Построена равномерная асимптотика решения расширенного уравнения в виде

$$\begin{gathered}\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=\textstyle\sum_{r=0}^{4}\varepsilon_r U_r(x,t)\\ U_r(x,t)=\textstyle\sum_{k=1}^{2}[V_{ir}(x)W_i(t,a)+Q_{ir}(x){W_i}'(t,a)+\\ +f_{ir}(x)\Psi_i(t,a)+g_{ir}(x){\Psi_i}'(t,a)]+w_r(x),\end{gathered} \qquad (2)$$

где $V_{ir}(x), Q_{ir}(x), f_{ir}(x), g_{ir}(x), w_r(x) \in C^\infty[I]$, $W_i(t,a), i = 1,2$ – два линейно независимых уравнения Эйри-Дородницина, которые удобно взять в виде

$W_1(t,a) \equiv D(t,a)$, $W_2(t,a) = \pi^{-1}\Gamma(\frac{1}{2})\{\sin\pi a D(t,a) - D(-t,a)\}$,

$$\Psi_i(t,a)=W_2(t,a)\int\limits_{\infty}^{t}(\tau-\varepsilon^{-1})W_1(\tau,a)d\tau-W_1(\tau,a)\int\limits_{\infty}^{t}(\tau-\varepsilon^{-1})W_2(\tau,a)d\tau,$$

$$\Psi_i'(t,a)=W_2'(t,a)\int\limits_{\infty}^{t}(\tau-\varepsilon^{-1})W_1(\tau,a)d\tau-W_1'(\tau,a)\int\limits_{\infty}^{t}(\tau-\varepsilon^{-1})W_2(\tau,a)d\tau.$$

Литература

1. Бобочко В.М., Перестюк М.О. *Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту.* – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.

2. Бобочко В.Н. Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота. // Изв. Вузов. Математика. – 2006. – № 5. С. 8–18.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

Кузьминова М.В. (Ростов-на-Дону)

kuzminovy@aaanet.ru

Введено понятие динамического периодического графа. Допустимым считается путь, все дуги которого активны в момент их прохождения. Предложен алгоритм построения вспомогательного графа, на котором присутствуют лишь допустимые для исходного графа пути. Сформулирована теорема, устанавливающая связь между исходным и вспомогательным графами.

Рассмотрены задачи о нахождении максимального динамического потока с заданным начальным моментом времени и к определенному моменту времени в периодической динамической сети.

Приведены модифицированные алгоритмы Форда-Фалкерсона, решающие поставленные задачи на исходном графе (с учетом ограничений на достижимость) и алгоритмы поиска максимальных динамических потоков на вспомогательном графе.

Определена суммарная величина динамического потока. Установлено, что эта величина постоянна для периодического участка и предложен алгоритм ее поиска.

Рассмотрена задача о случайных блужданиях частицы по вершинам периодического динамического графа. После построения вспомогательного графа процесс такого блуждания становится марковским. При этом возникает необходимость пересчета вероятностей перехода.

Рассмотрена задача о нахождении кратчайшего пути с заданным начальным моментом времени, а также задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами в заданные моменты времени. Приведены алгоритмы их поиска.

Литература

1. Замбицкий Д.К., Лозовану Д.Д. Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях. – Кишинев: Штиинца, 1983. -171с.

2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. -432с.

3. Ерусалимский Я.М., Логвинов С.Ю. Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996, №2, -с.14-17.

ОГРАНИЧЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ ДОСТИЖИМОСТИ НА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Кузьминова М.В., Кузьминов Р.Н. (Ростов-на-Дону)
kuzminovy@aaanet.ru

Расширяется понятие магнитной достижимости на орграфах, введенное Я.М.Ерусалимским и В.А.Скороходовым. Рассматриваются магнитная достижимость с параметром n_0 на начальном и конечном отрезках пути, на отрезке $[n_1, n_2]$, а также магнитная достижимость после n_0 шагов.

Так как на определенных отрезках действуют магнитные ограничения, не все пути на таких графах являются допустимыми. Предлагается алгоритм построения вспомогательных графов, на котором присутствуют только допустимые пути. Для упрощения вспомогательного графа используется транзитивное замыкание.

Сформулированы теоремы о соответствии между путями на исходных и вспомогательных графах.

Формулируется и решается задача о нахождении кратчайшего пути на графе с описанными видами достижимости.

В силу вводимых ограничений, известные алгоритмы поиска кратчайшего пути не могут применяться непосредственно. Описываются модифицированные алгоритмы: кратчайшие пути сначала ноходятся на вспомогательном графе, а затем восстанавливаются для исходного графа.

Литература

1. Басангова Е.О., Ерусалимский Я.М. Различные виды смешанной достижимости.// в сб. Алгебра и дискретная математика. Элиста, КГУ. 1985. – с.70-75.

2. Ерусалимский Я.М., Логвинов С.Ю. Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями.// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996, №2, -с.14-17.

3. Скороходов В.А. Случайные блуждания и потоки в сетях с магнитной достижимостью.//в сб. Модели и дискретные структуры. Элиста, 2002. - с. 93-100.

4. Скороходов В.А. Графы с магнитной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях.//Деп в ВИНИТИ, 2003, №410-В2003.

О ПОСТРОЕНИИ АДАПТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ В СФЕРЕ ТУРИЗМА

Курбыко И.Ф., Левизов А.С. (Владимир)

sl@vpti.vladimir.ru

Целью настоящей работы является прогнозирование динамики развития факторов $\{X_j,\ j = 1, ..., 5\}$ туристской инфраструктуры, оказывающих значимое влияние на результативный показатель Y — объемов туристского обслуживания (тыс.туродней). Здесь X_1 — число мест в гостиницах и аналогичных средствах размещения; X_2 — число мест в специализированных средствах размещения; X_3 — число туристских фирм; X_4 — объем музейных фондов (тыс. экз.); X_5 — протяженность автомобильных дорог (км). Исходные данные сформированы на основе данных Владимирского областного комитета государственной статистики. Значения факторных переменных взяты за 1998 - 2006 гг.

В основе исследования лежит следующая теоретиковероятностная схема: $X(t) = F(t) + E(t)$, $M[E(t)] = 0$, $D[E(t)] = \sigma^2$. Здесь $X(t)$ — временной ряд, $F(t)$ — детерминированная составляющая ряда, $E(t)$ — случайные отклонения от тренда. Аппроксимация тенденции временного ряда осуществляется с помощью полиномов Брауна [1, гл.2] с адаптивными коэффициентами. В качестве гипотезы тренда принимается полином второй степени, а прогноз на p шагов вперед от текущего времени T выражается формулой: $X(T + p) = a0 + a1p + 0,5a_3p^2$. Расчет коэффициентов полинома производится с помощью применения трехкратного оператора экспоненциального сглаживания исходного ряда: $S_t(X) = cX(t) + (1 - c)X(t - 1)$, где c — константа сглаживания, $0 < c \leqslant 1$. Выбору постоянной сглаживания мы уделяем особое внимание. Коэффициенты предсказывающего полинома вычисляются через экспоненциальные средние по формулам [1, с.67]: $a_0 = 3S^1_T - 3S^2_T + S^3_T$; $a_1 = (c/2(1 - c)^2)((6 - 5c)S^1_T - 2(5 - 4c)S^2_T + (4 - 3c)S^3_T)$; $a_2 = (c^2/(1 - c)^2)(S^1_T - 2S^2_T + S^3_T)$. Результатом исследования является построение следующих адаптивных моделей, дающих точечный прогноз факторов туристской инфраструктуры на ближайшие годы: $X_1(T + p) = 4358,6 + 343,9p + 20,15p^2$; $X_2(T+p) = 6433,1+10,31p+0,27p^2$; $X_3(T+p) = 51,32+1,61p-0,01p^2$; $X_4(T+p) = 630,55+11,10p+0,40p^2$; $X_5(T+p) = 51,32+1,61p+0,01p^2$; $Y(T + p) = 1209,9 + 77,42p + 18,94p^2$.

Литература

[1] Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. - М: Финансы и статистика, 2003.

ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ИНВОЛЮЦИЕЙ РАЗНОЙ СТРУКТУРЫ[1]

Курдюмов В.П., Хромов А.П. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим на $[0,1]$ следующий функционально–

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

дифференциальный оператор:

$$\ell[y] = \begin{cases} \alpha y'(x) + y'(d-x) + p_1(x)y(x) + \\ +p_2(x)y(d-x), \quad x \in [0,d], \\ y'(x) + p_3(x)y(x), \quad x \in [d,1], \\ y(d-0) = y(d+0), \quad 0 < d < 1, \end{cases} \tag{1}$$

с граничным условием:

$$\int\limits_0^1 y(x)\, d\sigma(x) = 0. \tag{2}$$

Здесь α — вещественное и $\alpha^2 < 1$, $p_i(x) \in C^1[0,1]$ $(i = 1,2)$, $\sigma(x)$ — функция ограниченной вариации.

Теорема. *Если*

$$\sigma(d+0) + \sigma(d-0) - 2\sigma(d) + \beta(\sigma(+0) - \sigma(0)) \neq 0,$$

$$\beta(\sigma(d+0) - \sigma(d)) + \sigma(+0) - \sigma(0) \neq 0,$$

где $\beta = i\sqrt{1-\alpha^2} + \alpha d$, *то система собственных и присоединенных функций оператора (1)–(2) образует базис Рисса со скобками в* $L_2[0,1]$.

ФОРМАЛИЗМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТОЧКАМИ[1]

Курина Г.А., Смирнова Е.В. (Воронеж)

При помощи прямой схемы, которая впервые использовалась для сингулярно возмущенных задач М. Г. Дмитриевым и С. В. Белокопытовым, строится асимптотика решения следующей возмущенной задачи

$$P_\varepsilon : J(u,y) = \frac{1}{2} < y(T) - z_{N+1}, F_{N+1}(y(T) - z_{N+1}) > +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{N} < y(t_j) - z_j, F_j(y(t_j) - z_j) > + \int\limits_0^T \Bigg(\frac{1}{2} < y, Wy > + < y, Su > +$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 06–01–00296)

$$+\frac{1}{2} < Ru, u > + < d(t), y(t) > + < g(t), u(t) > \Big) dt \to \min_u, \quad (1)$$

$$\frac{d(Ex(t))}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad (2)$$

$$Ex(0) = z^0, y(t) = C(t)x(t), \quad (3)$$

где $t \in [0, T]$; $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N < t_{N+1} = T$, t_j фиксированы; $\varepsilon > 0$- малый параметр; $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$, $u(t) \in U$; X, Y, U, Z — действительные гильбертовы пространства; $E, A(t) \in L(X, Z)$, $B(t) \in L(U, Z)$, $C(t) \in L(X, Y)$, F_j, $W(t) \in L(Y)$, $S(t) \in L(U, Y)$, $R(t) \in L(U)$, $d(t) \in Y$, $f(t) \in Z$, $g(t) \in U$; элементы $z^0 \in ImE$ и $z_j \in ImC$ заданы; $F_j = F_j^* \geqslant 0$, $W(t) = W^*(t)$, $R(t) = R^*(t) > 0$, $\begin{pmatrix} W & S \\ S^* & R \end{pmatrix} \geqslant 0$ $(j = \overline{1, N+1})$.

Решение ищется в виде рядов $x = \sum\limits_{j \geqslant 0} \varepsilon^j x_j$, $u = \sum\limits_{j \geqslant 0} \varepsilon^j u_j$, $y = \sum\limits_{j \geqslant 0} \varepsilon^j y_j$, которые подставляются в задачу (1)–(3), затем в уравнениях (2), (3) производится приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε, а минимизируемый функционал (1) записывается в виде

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j J_j. \quad (4)$$

Теорема. *Коэффициент J_{2k+1} в разложении (4) известен после решения задач P_j $(0 \leqslant j \leqslant k)$, из которых находятся x_j, u_j, y_j. Преобразованный коэффициент J_{2k} в разложении (4) является критерием качества в задаче P_k.*

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ[1]

Кутерин Ф.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

xredor@yandex.ru msumin@sinn.ru

Данная работа посвящена применению регуляризованного двойственного алгоритма [1] с целью решения обратной задачи финального наблюдения для абстрактного параболического уравнения.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460).

Пусть H — гильбертово пространство, $U_1 \subset L^2(0,T;H)$, $U_2 \subset H$ — выпуклые замкнутые множества, $\mathcal{D} \equiv U_1 \times U_2$ — множество допустимых управлений. Обратная задача состоит в нахождении нормального элемента $\pi = (u, v) \in \mathcal{D}$ по приближенно известному в финальный момент времени наблюдению $y(T) \in H$ для абстрактной задачи Коши

$$y'(t) + Ay(t) = u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad y(0) = v, \tag{1}$$

где $A \in L(V \to V^*)$ — энергетическое расширение линейного неограниченного симметричного положительно определенного оператора с областью определения, плотной в H, V — гильбертово пространство и имеют место плотные и непрерывные вложения $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$. Решение задачи (1) понимается в обобщенном смысле (см., например, [2]).

Обсуждается проблема согласования ошибки финального наблюдения и параметра регуляризации двойственного алгоритма [1] для обеспечения сходимости приближенного решения к точному решению исходной задачи. Исследуется вопрос итеративной регуляризации двойственного алгоритма, проблема его останова при заданной фиксированной конечной ошибке финального наблюдения. Обсуждается программная реализация двойственного алгоритма. Численные эксперименты подтверждают возможность его применения для решения конкретных обратных задач теплопроводности.

Литература

1. Сумин М.И. *Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44. №11. - С. 2011-2019.

2. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. *Основы метода динамической регуляризации.* М: Изд-во Московского университета, 1999.

ТЕОРЕМА ГАНТМАХЕРА–КРЕЙНА ДЛЯ 2-НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Кушель О.Ю. (Минск)

kushel@mail.ru

Пусть вполне непрерывный оператор A действует в правильном идеальном пространстве $X(\Omega)$. В этом случае определены операторы $A \otimes A$ и $A \wedge A$, т.е. тензорный и внешний квадрат A, действующие, соответственно, в пространствах со смешанной нормой $X_{21}(\Omega \times \Omega)$ и $X_{21}^a(\Omega \times \Omega)$ (это подпространство антисимметричных функций из $X_{21}(\Omega \times \Omega)$). Пространство $X_{21}^a(\Omega \times \Omega)$ изоморфно пространству $(X_{12} \cap X_{21})(W)$, где W — некоторое подмножество $\Omega \times \Omega$. Спектр оператора $A \otimes A$ состоит из всевозможных произведений вида $\{\lambda_i \lambda_j\}$, где $\{\lambda_i\}$ — набор всех ненулевых собственных значений A (и, конечно, нуля). Спектр оператора $A \wedge A$ (кроме, быть может, нуля), состоит из всевозможных произведений вида $\{\lambda_i \lambda_j\}$, где $i < j$.

Теорема. *Пусть вполне непрерывный оператор $A : X \to X$ оставляет инвариантным почти воспроизводящий конус K в правильном идеальном пространстве X, причем $\rho(A) > 0$ и на спектральной окружности $\lambda = \rho(A)$ расположено всего одно собственное значение. Пусть оператор $A \wedge A : X_{12} \cap X_{21} \to X_{12} \cap X_{21}$ оставляет инвариантным почти воспроизводящий конус $\tilde{K}$ в $X_{12} \cap X_{21}$, причем $\rho(A \wedge A) > 0$. Тогда у оператора A существует второе положительное собственное значение $\lambda_2 < \lambda_1$.*

Полученные результаты обобщаются на случай k-вполне неотрицательных операторов ($k > 2$).

Литература

1. Забрейко П. П., Кушель О. Ю. // Доклады НАН Беларуси, 2006. Т. 50, № 3, С. 9-15.

О КРИТЕРИИ ГЕРМЕЙЕРА

Лабскер Л.Г. (Москва)
llabsker@mail.ru, mmep@mail.ru

Рассмотрим игру с природой [1], в которой A — статистик; $S_A^C = \{A_i : i = 1, \ldots, m\}$, $m \geqslant 2$, и $S_A = \{P = (p_1, \ldots, p_m) : p_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m, p_1 + \ldots + p_m = 1\}$ — множества соответственно чистых и смешанных стратегий; $S \subset S_A$ — непустое замкнутое множество; $\Pi_j, j = 1, \ldots, n, n \geqslant 2$, - состояния природы с вероятностями $q_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, $q_1 + \ldots + q_n = 1; (a_{ij})_{i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}}$ — матрица выигрышей статистика; $H(P; \Pi_j) = p_1 a_{1j} + \ldots + p_m a_{mj}$ — выигрыш при стратегии P и состоянии природы Π_j; $G(P; \Pi_j) = q_j H(P; \Pi_j)$ — *элемент Гермейера выигрыша* $H(P; \Pi_j)$. Числа $G(P) = \min\{G(P; \Pi_j) : j = 1, \ldots, n\}$ и $G_S = \max\{G(P) : P \in S\}$ назовем соответственно *G-показателем эффективности стратегии* P и *G-ценой игры в стратегиях множества* S. *Критерием Гермейера* [2] или G-

критерием называют критерий, по которому оптимальной в S является стратегия $P \in S$, для которой $G(P) = G_S$. Пусть $I_k \equiv \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$. Состояние Π_j назовем (I_kG)-*состоянием*, если $G(A_i; \Pi_j) = G(A_i)$, $i \in I_k$. Получены следующие результаты: Равенство $G(P) = p_1G(A_1) + \ldots + p_mG(A_m)$ для $\forall$ стратегии P со спектром $(\operatorname{supp} P) \subset I_k$ эквивалентно существованию (I_kG)-состояния. Если существует (I_kG)-состояние, то $G(P) \leqslant G_{S_A^C}$ для $\forall$ стратегии P со спектром $(\operatorname{supp} P) \subset I_k$. Равенство $G(P) = G_{S_A^C}$ для $\forall$ стратегии P со спектром $(\operatorname{supp} P) \subset I_k$ эквивалентно существованию (I_kG)-состояния и равенству $G(A_i) = G_{S_A^C}$, $i \in I_k$. Пусть S_A^O - множество стратегий, оптимальных в S_A по G-критерию. В $\forall$ игре $S_A^O \neq \varnothing$. Если существует (I_mG)-состояние, то $G_{S_A} = G_{S_A^C}$. Если существует (I_mG)-состояние и множество I_k такое, что $G(A_i) = G_{S_A^C}$, $i \in I_k$, то $P \in S_A^O$, если $(\operatorname{supp} P) = I_k$. $(P \in S_A^O) \Leftrightarrow G(P; \Pi_j) \geqslant G_{S_A}$, $j = 1, \ldots, n$. Множество S_A^O - выпуклый многогранник.

Литература

1. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом.- М.:ДЕЛО, 2001.

2. *Лабскер Л.Г., Штохова И.Н.* Анализ задачи страхования космических рисков с применением комбинированного критерия Гермейера-Гурвица // Вестник Финансовой академии, 2005, №4, с.43-57.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ

Лашин Д.А. (Москва)

dalashin@gmail.com

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}, \ (x,t) \in Q_T = (0,l) \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \ u_x(l,t) = \psi(t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{3}$$

где $\varphi(t) \in W_2^1(0,T)$, $\psi(t) \in W_2^1(0,T)$.

Обозначим через $V_2^{1,0}(Q_T)$ банахово пространство, состоящее из элементов $W_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$|u|_{Q_T} = \operatorname{vrai} \max_{0<t<T} \|u(x,t)\|_{2,(0,l)} + \|u_x\|_{2,Q_T},$$

и имеющих непрерывно меняющиеся с $t \in [0, T]$ следы из $L_2(0, l)$ на сечениях $(0, l)$ ([1], с.179).

Будем рассматривать обобщенное решение задачи (1) – (3) из энергетического класса, то есть функцию $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0, t) = \varphi(t)$ и интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (u_x \eta_x - u \eta_t)\, dxdt = \int\limits_0^T \psi(t) \eta(l, t) dt \tag{4}$$

для любой функции $\eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, такой что $\eta(x, T) = 0$, $\eta(0, t) = 0$.

Пусть $T > 0$, $z(t) \in L_2(0, T)$. Обозначим через U множество управлений

$$U = \{\varphi \in W_2^1(0, T),\ \|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M,\ \varphi_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi_2\},$$

где $M > 0$, а φ_1, φ_2 – некоторые постоянные.

Для произвольного $c \in (0, l]$ определим функционал

$$J[\varphi] = \int\limits_0^T (u(c, t) - z(t))^2 dt.$$

Рассмотрим задачу минимизации данного функционала. Отметим, что подобные задачи расматривались в [2] (с.28).

Теорема. *Существует единственная функция $\varphi_0(t) \in U$ такая, что $J[\varphi_0] = \inf\limits_{\varphi \in U} J[\varphi]$.*

Замечание. Теорема о существовании управляющей функции приводится в [3].

Литература

[1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.

[2] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972.

[3] Лашин Д.А. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Изд. Владимирского государственного университета, Суздаль, 2006, с. 141-142.

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Ле Суан Тхань (Воронеж)
thanhlex@gmail.com

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu\Delta_1 + \frac{\partial u_5}{\partial x_1} = f_1 e^{i\varkappa t}; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu\Delta_2 + \frac{\partial u_5}{\partial x_2} = f_2 e^{i\varkappa t}; \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - \nu\Delta_3 + \frac{\partial u_5}{\partial x_3} + gu_4 = f_3 e^{i\varkappa t}; \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} - \omega^2 u_3 = 0; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0; \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Дополним систему уравнений (1) начальными условиями

$$u_k(s,t)|_{t=0} = 0; \; k = 1,2,3,4. \tag{2}$$

Условие 1: Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют неравенству $\sqrt{g}\omega < \varkappa$.

Условие 2: Вектор - функция $\overline{f}(x) = (f_1(x); f_2(x); f_3(x))^T$ из правой части системы (1) соленоидальна: $div\overline{f}(x) = 0$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2 и компоненты $f_j(x)$ вектор - функции $\overline{f}(x)$ из системы (1) принадлежат пространству С. Л. Соболева $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^3)$ при некотором $k \in (0;1]$. Тогда существует предел

$$\lim_{t \longrightarrow 0} ||u_m(.,t)||_0 = 0, \; m = \overline{1,4}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1 и 2 и компоненты $f_j(x)$ вектор - функции $\overline{f}(x)$ из системы (1) принадлежат пространству С. Л. Соболева $\mathbb{H}_{k+1}(\mathbb{R}^3)$. Пусть также $\rho > 1$. Тогда существуют компоненты $u_k(x,t)$, $k = \overline{1,5}$ решения задачи (1), (2): $u_k(x,t) \in \mathbb{H}_{k,\rho}(\mathbb{R}^4_+)$, $k = \overline{1,3}$; $u_k(x,t) \in \mathbb{H}_{k+2,\rho}(\mathbb{R}^4_+)$, $\frac{\partial u_5}{\partial x_l} \in \mathbb{H}_{k+2,\rho}(\mathbb{R}^4_+)$, $l = \overline{1,3}$, причем справедлива оценка

$$\sum_{m=1}^{3} |||u_m|||_{\rho,k} + |||u_4|||_{\rho,k+2} + \sum_{m=1}^{3} |||\frac{\partial u_5}{\partial x_l}|||_{\rho,k+2} \leqslant C \sum_{j=1}^{3} ||\hat{f}_j(s)||_{k+1}.$$

($||.||_k$ - норма в $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^3)$, $|||.|||_{k,\rho}$ - норма с весом $(1+t)^{-\rho}$ в $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^4_+)$).

Теорема 3. Пусть $V(x,t)$ - решение задачи (1), (2) при $\bar{f}(x)\equiv 0$ удовлетворяющее условиям теоремы 2. Пусть выполнено условие 1. Тогда $u_1=u_2=u_3=u_4=\frac{\partial u_5}{\partial x_1}=\frac{\partial u_5}{\partial x_2}=\frac{\partial u_5}{\partial x_3}$ при почти всех $x\in\mathbb{R}^3$, $t>0$.

О СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА-ДАРБУ[1]

Лисаченко И.В., Сумин В.И. (Нижний Новгород)
v_sumin@mail.ru

Рассматривается краевая задача Гурса-Дарбу

$$\begin{aligned} &x''_{t_1t_2}(t)=g(t,x(t),x'_{t_1}(t),x'_{t_2}(t)),t\in\Pi\equiv[0,1]^2,\\ &x(t_1,0)=\varphi_1(t_1),t_1\in[0,1];x(0,t_2)=\varphi_2(t_2),t_2\in[0,1], \end{aligned}\tag{1}$$

где $g(t,l):\Pi\times R^{3k}\to R^k$ вместе с $g'_l(t,l)$ измерима по t $\forall l$ и непрерывна по l для п.в. t, $\varphi_i(t_i):[0,1]\to R^k$ абсолютно непрерывны, $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$. Обсуждаются условия сохранения глобальной разрешимости (1) при возмущении g,φ_1,φ_2 в случае, когда решение (1) естественно искать в классе W функций с первыми производными по t_1 и t_2 из пространств со смешанными нормами $L^k_{p,\infty}\equiv L^k_{p,\infty}(\Pi)$ и $L^k_{\infty,p}$, соответственно, и со смешанной производной из L^k_p, $p\in(1,\infty)$. Пусть: $\varphi'_1,\varphi'_2\in L^k_p[0,1]$; $M\equiv L^k_\infty\times L^k_{p,\infty}\times L^k_{\infty,p}$, $f(t,l)\equiv g(t,l_1+\varphi_1(t_1)+\varphi_2(t_2),l_2+\varphi'_1(t_1),l_3+\varphi'_2(t_2))$, $\mathbf{A}[z]\equiv\{A_1[z],A_2[z],A_3[z]\}$, $A_1[z](t)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}z(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2$, $A_2[z](t)=\int_0^{t_2}z(t_1,\xi)d\xi$, $A_3[z](t)=\int_0^{t_1}z(\xi,t_2)d\xi$; задано $N(\cdot):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$; Ψ — класс таких троек $\psi\equiv\{g,\varphi_1,\varphi_2\}$, что $\left\|f'_l(\cdot,\mathbf{y}(\cdot))\right\|_{L_p^{k\times k}\times L_{\infty,p}^{k\times k}\times L_{p,\infty}^{k\times k}}\leqslant N(K)$ при $\|\mathbf{y}\|_M\leqslant K$ и формула $F[\mathbf{y}](t)\equiv f(t,\mathbf{y}(t))$ задает оператор $F[\cdot]:M\to L^k_p$. Пусть Ψ_0 — та часть Ψ, каждому элементу которой отвечает (заведомо единственное) глобальное решение (1) класса W. Для $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}$ из Ψ и $\psi_0=\{g_0,\varphi_{01},\varphi_{02}\}$ из Ψ_0 положим $\Delta(\psi,\psi_0)(x_0)=g(t,x_0+\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2,\ x'_{0t_1}+\Delta\varphi'_1,\ x'_{0t2}+\Delta\varphi'_2)-g_0(t,x_0,x'_{0t_1},x'_{0t2})$, где $\Delta\varphi_1\equiv\varphi_1(t_1)-\varphi_{01}(t_1)$, $\Delta\varphi_2\equiv\varphi_2(t_2)-\varphi_{02}(t_2)$, $x_0\in W$ — решение, отвечающее ψ_0. Пусть $r(\psi,\psi_0)\equiv\|\mathbf{A}[\Delta(\psi,\psi_0)]\|_M$. Следующая теорема развивает и обоб-

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект 07-01-00495).

щает результат [1], где рассматривались решения (1) с ограниченной смешанной производной.

Теорема.$\forall\ \psi_0 \in \Psi_0\ \exists\ \delta > 0,\ C > 0:\ \ \psi \in \Psi,\ r(\psi, \psi_0) < \delta \Rightarrow \psi \in \Psi_0,\ \|(x - x_0)\|_C + \|(x - x_0)'_{t_1}\|_{L^k_{p,\infty}} + \|(x - x_0)'_{t_2}\|_{L^k_{\infty,p}} \leqslant Cr(\psi, \psi_0)$, где x — решение (1), отвечающее ψ.

Литература

1. Сумин В.И. // Укр. матем. журн. 1991. Т.43. №4. С.555-561.

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

Лисаченко М.И., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

lismisha@yandex.ru

Обсуждается алгоритм двойственной регуляризации [1], являющийся регуляризованным аналогом классического алгоритма Удзавы, для решения задачи оптимального управления с поточечным фазовым ограничением и с выпуклым целевым функционалом

$$I_0(u) \to \min,\ g(t, x[u](t)) \leqslant 0,\ t \in [0, T],\ u \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

где $g(t, \cdot) :\ R^n \to R^1$ – выпуклая при всех $t \in [0, T]$ функция,

$$I_0(u) \equiv \int\limits_0^T F(t, x[u](t), u(t))\, dt + G(x[u](T)),$$

$\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0, T)\ :\ u(t) \in U$ п.в. на $(0, T)\}$, $U \subset R^m$ – выпуклый компакт, $x[u](t)$, $t \in [0, T]$ – решение линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ x \in R^n.$$

Показывается, что алгоритм двойственной регуляризации при согласованном стремлении к нулю параметра регуляризации α и ошибки задания исходных данных δ приводит к сильной сходимости в метрике $L_2(0, T)$ регуляризованных решений к решению исходной (невозмущенной) задачи (1) вне зависимости от того разрешима или нет двойственная к (1) задача. Рассматривается вопрос итеративной

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460).

регуляризации обсуждаемого двойственного алгоритма, а также вопрос останова итерационного процесса в случае конечной фиксированной ошибки исходных данных δ.

Показывается также, что регуляризованный алгоритм приводит к сильной сходимости регуляризованных решений и в том случае, когда седловая точка соответствующего функционала Лагранжа задачи (1) отсутствует, а классический алгоритм Удзавы, как известно, теряет свою силу. Приводится соответствующий иллюстративный пример.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т.47. № 4. С.602-625.

СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ШАРЕ РАДИУСА R

Ломакин Д.Е. (Орел)
denislomakin@rambler.ru

Пусть $H(R)$ — пространство функций многих комплексных переменных, аналитических в шаре радиуса $R > 0$, в стандартной топологии равномерной сходимости на компактах.

Рассмотрим пространство $H_{\mathbb{C}^n}(\{|s| < R\} \times S^{2n-1})$ функций вида $u(s, w) = |s|^{2n-2} H(s\bar{w})$, где $(s, w) \in \{|s| < R\} \times S^{2n-1}$, $H(z) \in H(R)$, с естественной топологией равномерной сходимости на компактах.

Зададим опрератор $\mathcal{R}_0 : H(R) \to H_{\mathbb{C}^n}(\{|s| < R\} \times S^{2n-1})$ формулой

$$[\mathcal{R}_0 F](s, w) = c_n \int\limits_0^s (s-t)^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + jI \right) F \right) (t\bar{w}) dt,$$

где c_n — константа, зависящая от размерности n, I — тождественный оператор.

Следующие теоремы являются обобщением результатов, полученных в [2], для пространств целых функций многих комплексных переменных.

Теорема 1. Для любой функции F из $H(R)$ функция $\mathcal{R}_0 F$ задает ее преобразование Радона как обобщенной функции.

(Понятие преобразования Радона обобщенной функции см., например, в [1].)

Теорема 2. Оператор $\mathcal{R}_0$ устанавливает топологический изоморфизм пространств $H(R)$ и $H_{\mathbb{C}^n}(\{|s| < R\} \times S^{2n-1})$.

Литература

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: Физматгиз, 1962. 656 с., ил.

2. Ломакин Д. Е. Преобразование Радона аналитических функций./ Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Орел. 2006.

АЛГОРИТМ ШУРА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ[1]

Лопушанская Е.В. (Воронеж)

kate_ lopushanskaya@yahoo.com

Функция C называется *обобщенной функцией Каратеодори*, если она мероморфна в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ и ядро $K_C = \frac{C(z)+\overline{C(w)}}{1-z\bar{w}}$ имеет конечное число отрицательных квадратов.

В работе (см. [1]) было определено преобразование Шура для обобщенной функции Неванлинна N в точке $z_1 \in \mathbb{C}_+$.

$$\widetilde{N}(z) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\nu_0^*(z-z_1^*)-\nu_0(z-z_1)}{z_1-z_1^*}N(z)-|\nu_0|^2}{N(z)-\frac{\nu_0(z-z_1^*)-\nu_0^*(z-z_1)}{z_1-z_1^*}}, & if\ Im\nu_0 \neq 0, \\ \dfrac{(\nu_0-\frac{(z-z_1^*)^k(z-z_1)^k}{p(z)})N(z)-\nu_0^2}{N(z)-(\nu_0+\frac{(z-z_1^*)^k(z-z_1)^k}{p(z)})}, & if\ Im\nu_0 = 0, \end{cases}$$

где $\nu_0 = N(z_1)$.

Обобщенная функция Каратеодори связана с обобщенной функцией Неванлинны с помощью дробно-линейного преобразования аргумента. Мы определяем преобразование Шура для обобщенной функции Каратеодори в точке $z_1 \in \mathbb{D}$.

Литература

1.D.Alpay, A.Dijksma, and H.Langer, J_l- *unitary factorization and the Schur algorithm for Nevanlinna functions in an indefinite setting*, to appear in Lin. Algebra Appl.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

ОДНО ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА У РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

Лылов Е.В., Прядиев В.Л. (Воронеж)
zhenya86@mail.ru, pryad@mail.ru

Рассматривается характеристическая задача:

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = F \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0, 0 \leqslant y \leqslant y_0), \tag{1}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y) \quad (0 \leqslant y \leqslant y_0), \quad u(x,0) = \varphi_2(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0), \tag{2}$$

где a, b, c, F – функции переменных x, y.

В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1)–(2) a, b, c, F *обладают непрерывными (по совокупности переменных) производными, как по* x *, так и по* y, *а* φ_1 *и* φ_2 *– дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда решение задачи* (1)–(2) *существует, и все его вторые частные производные существуют и непрерывны в прямоугольнике* $[0; x_0] \times [0; y_0]$.

Нами доказана следующая теорема для решения задачи (1)–(2) в случае непрерывного коэффициента $a(x, y)$ специального вида.

Теорема 2. *Если в задаче* (1)–(2) *функция* $a(x, y)$ *имеет вид* $\widetilde{a}(x + y)$ *или* $\widetilde{a}(x - y)$, *то для выполнения утверждения теоремы 1 достаточно потребовать от* $\widetilde{a}$ *только непрерывность (оставляя остальные требования к коэффициентам неизменными).*

Отметим, что вариант теоремы 1 для случая непрерывного коэффициента $c(x, y)$, имеющего вид $\widetilde{c}(x + y)$ или $\widetilde{c}(x - y)$, доказан в [1] (см. также [2]).

Литература

[1] Гаршин С. В. Свойства гиперболических уравнений на сетях: Дисс. ... физ.-мат. наук. - Воронеж, 2005.

[2] Гаршин С. В., Прядиев В. Л. Неулучшаемые условия существования и непрерывности производных второго порядка у решения характеристической задачи для гиперболического уравнения с

[1] Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00397.

двумя независимыми переменными. // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". - 2005. - №1(1). - С. 83-98.

ИДЕМПОТЕНТНЫЙ АНАЛИЗ И МНОГОЭТАПНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ РАБОТЫ СЕРВЕРОВ В КОНКУРЕНТНОЙ СРЕДЕ

Малафеев О.А., Радченко А.Ю

malafeyevoa@mail.ru, alsturm@mail.ru

В данной работе рассматривается многопериодная задача синхронизации системы массового обслуживания [1]. На каждом этапе $p \in P$ множество клиентов $N, k = 1, \ldots, N$ должно пройти обработку множеством серверов $M, i = 1, \ldots, M$. В начале каждого периода клиенты одновременно попадают в буфер, ассоциированный с первым сервером, и каждый ожидает своей очереди на обслуживание l_k. Будем обозначать $k[l_k]$ клиента, который занимает в очереди место $[l_k]$. Сервера обрабатывают клиентов последовательно, то есть если сервер $i \in M$, уже закончил обслуживание клиента $k[l_k] \in N$, а $i+1$ все еще занят с клиентом $k[l_k - 1]$, то i не может начать работу с клиентом $k[l_k + 1]$ и должен ждать. Время перехода от сервера к серверу полагается нулевым. Дано время $\tau_i^p(k[l_k])$ обслуживания и издержки $h_i^p(k)$ за такт времени обслуживания сервером i клиента $k[l_k]$ в период p, а также издержки $h_0^p(k)$ во время ожидания в буфере.

Издержки каждого клиента принимаются за функционалы, для которых могут быть найдены компромиссная точка, вектор Шепли и т.д. [1].

На каждом этапе параметры модели в силу различных условий изменяются, и с помощью метода динамического программирования находятся оптимальные издержки каждого клиента за все периоды в силу указанных критериев оптимальности.

Литература

1. *Малафеев О.А.*, Управляемые конфликтные системы: Учеб. пособие. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2000. — 280 с.;

2. *Маслов В.П., Колокольцов В.Н.*, Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: ФИМЛ, 1994. — 142 с.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОДНОСТОРОННЕ-ЛИПШИЦЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ТЕРМИНАХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Мигунов А.А. (Самара)
andrey_mv@mail.ru

Пусть $I = [0,1]$, $X = R^n$, $Kv(X)$ — множество всех непустых, выпуклых компактных подмножеств X, $F : I \times X \to Kv(X)$, K_0 — непустое компактное подмножество X. Сформулируем задачу Коши:

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x(0) \in K_0. \tag{1}$$

Наложим на правую часть (1) следующие базовые условия: **A1.** $F(\cdot,x)$ измерима для каждого x и $F(t,\cdot)$ полунепрерывна сверху для всех t. **A2.** Существует интегрируемая функция $\lambda : I \to R_+$ такая что $\|F(t,x)\| \leqslant \lambda(t)(1+\|x\|), \forall x \in X$ и п.в. $t \in I$. **A3.** $\forall x, y \in X$ и $\forall v \in F(t,x), \exists w \in F(t,y)$ такой что $\langle x-y, v-w\rangle \leqslant L(t)(x-y)^2$.

Задачу (1) можно аппроксимировать с помощью метода Эйлера. Оценка погрешности для такой схемы, при выполнении A1-A3 была получена в [1]. Построим теперь интегральный метод Эйлера, см.[2].

Пусть $h = \frac{1}{N}, I = \cup_{i=0}^{N-1}(t_i, t_{i+1}]$, тогда для п.в. $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$\dot{x} \in F(t, x(t_i)), \quad x(0) \in K_0. \tag{2}$$

Введем $\chi(F,A,t,h) = \sup\{haus(F(t,x),F(t,y)) \| \|y-x\| \leqslant h, x,y \in A\}$ — модуль непрерывности, $\chi(F,A,h)_p = \left(\int_0^1 \chi(F,A,t,h)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$, где $1 \leqslant p < \infty$, R_1, R_2 множества решений (1) и (2), A_1, B_1 множества в которых содержатся, соответственно, все решения и производные (1) и (2). Была доказан следующая теорема:

Теорема. Пусть выполняются условия A1, A2, A3 и $F(t,\cdot)$ является непрерывной, тогда $haus(R_1,R_2) \leqslant c_0(\chi(F,A_1,t)_1 + h)$, где $c_0 = max\{e^{m_+(1)}max(2,\|B_1\|), \|B_1\|\}$ и $m_+(t) = \int_0^1 max\{L(s),0\}\,ds$.

Если $F(t,x)$ имеет равномерно ограниченную p-вариацию по t, Гельдерова по x степени α и $\alpha > \frac{1}{p}$, тогда данная теорема увеличивает порядок аппроксимации в сравнении с [1].

Литература

[1] *T. Donchev, E. Farkhi* Stability and Euler approximation of one-

sided Lipschitz differential inclusions. – SIAM J. Control Optim., Vol. 36, №. 2, pp. 780-796, 1998. [2] *О. П. Филатов* Интегральный метод Эйлера с возмущениями и принцип усреднения для дифференциальных включений. – Вестник СамГУ, 2005, №. 5(39).

МЕТАФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБОСНОВАНИЯ И ПРОБЛЕМА ПЕРЕУСЛОЖНЕННОСТИ МАТЕМАТИКИ

Михайлова Н.В. (Минск)
erovenko@bsu.by

Определение "истины"в математике, вообще говоря, не должно зависеть ни от каких метафизических допущений. Если математик и вынужден принять такое допущение, то он скорее предпочтет формальные теории, пусть и ориентированные на платонизм, но зато находящиеся в большем согласии с конструктивной математической практикой. В формализациях математики, ориентированных на интуиционизм, подобно тому, как это происходит в современных физических теориях, важен действительный смысл произведенных операций.

Непротиворечивость классической арифметики удается доказать интуиционистскими методами, тогда как строго финитное доказательство этой непротиворечивости противоречило бы теореме Геделя о неполноте. Один из возможных выводов, следующих из содержательного анализа "финитной части"доказательства Геделя, может состоять в том, что оно финитное потому, что оно полностью не формализовано. Но тогда, опираясь на бесспорные содержательные рассуждения, можно даже пренебречь "трансфинитным элементом"в обосновании непротиворечивости арифметики.

Кроме того, понятие "интуитивно верного доказательства"не может быть охвачено никакой единой формализацией, поэтому теорема Геделя свидетельствует о том, что с интуиционистской точки зрения математическое доказательство является примером "становящегося"понятия, подобно бесконечным множествам. Интуиционизм имеет два аспекта — метафизический и конструктивный, поэтому, если с тезисов интуиционистов снять их "метафизический налет то они могут оказаться приемлемыми и для формализма.

Именно формализация математики привела к более ясному осознанию природы самой математики, способствуя тем самым ее применению к нечисловым и непространственным объектам, например, к естественным и искуственным языкам и программам для вычислительных машин. Целесообразно использовать различные дополнительные виды формализации, которые, отличаясь друг от друга в отношении содержательной интерпретации, могут рассматриваться одновременно.

Структура некоторых математических доказательств конца прошлого века привела к кризису в математике, который Брайан Дэвис назвал "проблемой переусложненности". Суть ее состоит в том, что некоторые доказательства стали настолько сложными и необозримыми, что редко кто берет на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность. Этот кризис оказался столь же неожиданным, как в свое время и появление теорем Геделя.

Метафизические трудности обоснования математики, проявляющиеся в частности и в проблеме переусложненности, пытаются очертить пределы возможностей совокупного математического интеллекта. Однако это не сдерживает развития содержательных программ обоснования математики.

ФОРМУЛИРОВКА И АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Морозов Ю.Г., Минаева Н.В. (Воронеж)

morozov-off11@yandex.ru

Пусть внешнее воздействие на изучаемый объект характеризуется функцией $p(t)$, а поведение этого объекта, т.е. изучаемый процесс, характеризуется функцией $x(t)$.

Поскольку малость $\dot{x}(t)$ может быть обеспечена за счет малости $\dot{p}(t)$, вообще то, и необходимо при любых значениях $p(t)$, то примем следующее определение.

Определение. Будем говорить, что при $p \in D$ возможно квазистатическое осуществление рассматриваемого процесса, если для любого $\varepsilon > 0$, любых $p(0) = p^0 \in D$, $p^1 \in D$ и любых $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ найдутся такие $\delta > 0$ и t_0 , что $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$ лишь только $\dot{p}(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$; $\|\dot{p}(t)\| < \delta$ при $t \geqslant t_0$ $\lim_{t\to\infty} p(t) = p^1$.

Ограничимся рассмотрением таких объектов и внешних воздействий на них, для которых поведение объекта при фиксированном внешнем воздействии, т.е. при $p(t) \equiv p^0$ и начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ будет стабилизироваться с течением времени около некоторого состояния $x(t) \equiv \eta^j(p^0)$, если $(x_0, \dot{x}_0) \in V_j$ - (V_j – область притяжения, $j = 1, 2, ...s$). Например, для механических систем это ограничение сводится к условию, что диссипация энергии в системе должна превышать приток энергии извне.

В результате проведения экспериментов при фиксированных значениях величин внешних воздействий должны быть получены несколько непрерывных (не следует две функции объединять в одну разрывную) функций $x \equiv \eta^{(j)}(p)$ $(j = 1, 2, ...s)$ со своими областями определения.

Исходя из приведенного выше определения, исследование существования квазистатического процесса сводится к нахождению этих областей определения.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

Наимов А.Н. (Вологда)
nan67@rambler.ru

Рассматривается вопрос о разрешимости задачи

$$z'' = \overline{(z' - B_1(z))(z' - B_2(z))} + f(t, z, z'), \quad 0 < t < \omega, \tag{1}$$

$$z(0) = z(\omega), \quad z'(0) = z'(\omega), \tag{2}$$

где $z = x + iy \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ - комплексная плоскость, верхняя черта означает комплексное сопряжение, $(B_1, B_2) \in \boldsymbol{M}_\omega$, $f \in \boldsymbol{R}_{\omega,2}$. Здесь $\boldsymbol{M}_\omega$ - множество всех пар (A_1, A_2) непрерывных отображений A_1, A_2, удовлетворяющих условиям: 1) положительно однородные первого порядка $A_j(\lambda z) \equiv \lambda A_j(z)$ $\forall \lambda > 0, j = 1, 2$; 2) при любом $z \in \mathbf{C}$ $Im(A_1(z) - A_2(z))^3 \neq 0$, если $A_1(z) \neq A_2(z)$; 3) для любого непрерывного положительно однородного (первого порядка) отображения $A : \mathbf{C} \mapsto A_1(\mathbf{C}) \cup A_2(\mathbf{C})$ система $w' = A(w)$ не имеет ненулевых ω-периодических решений. Через $\boldsymbol{R}_{\omega,2}$ обозначено множество всех отображений $g(t, z_1, z_2)$, непрерывно действующих из $\mathbf{R} \times \mathbf{C}^2$ в $\mathbf{C}$, ω-периодических по t и удовлетворяющих условию

$$(|z_1| + |z_2|)^{-2} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |g(t, z_1, z_2)| \to 0 \quad \text{при} \quad |z_1| + |z_2| \to \infty.$$

В работе [1] доказано, что если $(B_1, B_2) \in \boldsymbol{M}_\omega$ и $\gamma(B_1) + \gamma(B_2) \neq 0$, где $\gamma(B_j)$ - вращение векторного поля $B_j : \mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}$ на единичной окружности $S = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, то задача (1)-(2) разрешима при любых $f \in \boldsymbol{R}_{\omega,2}$. В настоящей работе изучается один из случаев, когда условие $\gamma(B_1)+\gamma(B_2)\neq 0$ и необходимо для разрешимости задачи (1)-(2).

Пары $(A_1^1, A_2^1), (A_1^2, A_2^2) \in \boldsymbol{M}_\omega$ назовем гомотопными, если их можно соединять семейством $(A_1(\cdot,\lambda), A_2(\cdot,\lambda)) \in \boldsymbol{M}_\omega$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, непрерывно зависящим от λ.

Теорема. *Пусть пара* $(B_1, B_2) \in \mathbf{M}_\omega$, *для которой* $\gamma(B_1)+\gamma(B_2)=0$, *гомотопна паре* $(z^k|z|^{1-k}, \overline{z}^k|z|^{1-k}) \in \mathbf{M}_\omega$, *где* $k=\gamma(B_1)\geqslant 0$. *Тогда задача (1)-(2) ни при любых* $f \in \mathbf{R}_{\omega,2}$ *разрешима.*

Литература

1. Наимов А.Н. // Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягиновские чтения - XVII". - Воронеж, 2006, с. 119.

ОБ АССОЦИИАРОВАННЫХ ПРОСТЫХ МУЛЬТИГРАДЦИРОВАННЫХ МОДУЛЕЙ

Нонг Куок Тьинь, Фам Туан Кыонг (Воронеж)

nongquocchinh2002@hn.vnn.vn

В этой задачи мы доказываем, что если $\wp$ - соответствующий простой идеал мультиградцированного модуля M над Нётеровым мультиградцированным кольцом R, то $\wp$ - мультиоднородный. Мы также показываем, что для любого мультиоднородного идеала $\wp$ из R $\wp$-простой тогда и только тогда, когда $ab \in \wp$ влечёт либо $a \in \wp$, либо $b \in \wp$ для любых мультиоднородных элементов $a, b \in R$. Эти результаты являются обощённем соответствующих фактов уже известных для R - градцированного случая.

Теорема 1. Пусть $R = \bigoplus\limits_{(n_1,\ldots,n_t)\in\mathbb{N}^t} R_{(n_1,\ldots,n_t)}$ - Нётерово мультиградцированное кольцо и $M = \bigoplus\limits_{(n_1,\ldots,n_t)\in\mathbb{N}^t} M_{(n_1,\ldots,n_t)}$ - конечно порожденный мультиградцированный $R-$ модуль. Пусть $\wp \in \operatorname{Ass} M$. Тогда $\wp$ - мультиоднородный идеал R. Более того, существует мультиоднородный элемент $y \in M$ такой что $\wp = \operatorname{Ann}(y)$.

Теорема 2. Пусть R - $\mathbb{N}^t-$ градцированное кольцо и $\wp \neq R$ - $\mathbb{N}^t-$ однородный идеал из R. Предположим, что $ab \in \wp$ влечёт $a \in \wp$ или $b \in \wp$ для всех $\mathbb{N}^t-$ однородных элементов $a, b \in R$. Тогда $\wp$ простой идеал.

РЕЗОНАНС В ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Огарков В.Б., Бугаков В.М. (Воронеж)

Рассматривается гармоническое колебание материальной точки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h\sin pt \tag{1}$$

В случае резонанса $k = p$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = h\sin pt \tag{2}$$

Решение уравнения (2) ищем в виде:

$$x(t) = -\frac{h}{2p}t\cos pt + C_1\cos pt + C_2\sin pt \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{h}{2p}\cos pt + \frac{ht}{2}\sin pt - C_1p\ \sin pt + C_2p\ \cos pt \tag{4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{h}{2}\sin pt + \frac{h}{2}\sin pt + \frac{hp}{2}t\cos pt - C_1p^2\cos pt - C_2p^2\sin pt \tag{5}$$

Подставим соотношения (3)–(5) в уравнение (2):

$$h\sin pt + \frac{hp}{2}t\ \cos pt - C_1p^2\cos pt - C_2p^2\sin pt + p^2\times$$
$$\times\left\{-\frac{h}{2p}t\cos t + C_1\cos pt + C_2\sin pt\right\} = h\sin pt \tag{6}$$

Уравнение (2) автоматически удовлетворяется. Таким образом, в случае резонанса основное решение должно иметь вид (3).

В учебной литературе решение уравнение (1) в случае резонанса представлено в следующем виде:

$$x(t) = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{h}{(k^2 - p^2)}\sin pt \tag{7}$$

Однако, из формулы (7) следует, что в случае резонанса при $k = p$ происходит очень резкое увеличение значения функции. Это маловероятно, поскольку для тела большей массы достичь бесконечного значения функции практически невозможно (например — подводная лодка). Поэтому, решение (3) в этом случае предпочтительнее.

Литература

[1]. С.А. Пономарев, В.Д. Бидерман, К.К. Лихарев и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз, 1952.

О ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Огарков В.Б., Мильцин А.Н. (Воронеж)

Рассмотрим задачу кручения двухсвязанного упругого эллиптического вала с внутренним эллиптическим вырезом. Уравнения внутреннего и внешнего контуров имеют вид:

$$\frac{x^2}{d_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1;\quad \frac{x^2}{d_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1 \tag{1}$$

Здесь d_1 и b_1 — полуоси внутреннего эллипса; d_2 и b_2 — полуоси внешнего эллипса.

Уравнение для определения функции напряжений для однородного вала имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-2 \tag{2}$$

Функция $\varphi(x,y)$ должна быть равна нулю на внешней поверхности вала и равна константе на внутренней поверхности вала [1].

Решение уравнения (1) можно искать в таком виде:

$$\varphi(x,y)=A_1+A_2\left(\frac{x^2}{d_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}-1\right)+A_3\left(\frac{x^2}{d_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}-1\right) \tag{3}$$

Подставим соотношение (3) в уравнение (2):

$$\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{b_1^2}\right)A_2+\left(\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{b_2^2}\right)A_3=-1 \tag{4}$$

Воспользуемся граничными условиями:

$$A_1+A_2\left(\frac{d_2^2}{d_1^2}+\frac{b_2^2}{b_1^2}-1\right)=0 \tag{5}$$

$$A_1 + A_3\left(\frac{d_2^2}{d_1^2} + \frac{b_2^2}{b_1^2} - 1\right) = D \tag{6}$$

Константа D находится из соотношения [1]:

$$M = 2G\Theta \int\int \varphi(x,y)d\lambda + 2G\Theta D\lambda \tag{7}$$

Константы A_1, A_2, A_3 имеют такой вид:

$$A_1 = -\beta_3 A_2; A_2 = \frac{-[1 + \frac{\beta_2}{\beta_4} D]}{[\beta_1 + \frac{\beta_2 \cdot \beta_3}{\beta_4}]}; A_3 = \frac{D}{\beta_4} + \frac{\beta_3}{\beta_4} A_2 \tag{8}$$

Литература

[1]. Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян Кручение упругих тел. "Наука", 1969, 686 с.

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Ордян М.Г. (Воронеж)
omg84@mail.ru

В данной работе проанализированы методы решения двумерных задач теории упругости для тел с внутренними границами, т.е. для тел с трещинами-разрезами и/или с включениями. Более подробно рассмотрена классическая задача о равновесии бесконечной пластинки с круговым упругим включением из другого материала. Задача является базовой задачей для более сложной проблемы определения напряженно-деформированного состояния в материале с круговыми включениями, которая служит математической моделью композитного материала. Такую задачу предполагается исследовать в дальнейшем. Итак, рассмотрим однородную изотропную плоскость (называют матрицей) бесконечных размеров с круговым отверстием, заполненным материалом с другими упругими константами (включение). На поверхности раздела матрица-включение выполняются условия полного сцепления. На бесконечности к плоскости приложена одноосная растягивающая нагрузка. Решение задачи проведено в линейно-упругой постановке, в этом случае напряжения и перемещения выражаются через две кусочно-аналитические функции, известные как комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили.

Задача сводится к краевой задаче для определения двух кусочно-аналитических функций. Она решается аналитически, одним из методов ее решения — это разложение комплексных потенциалов в ряды Лорана. Удовлетворяя затем граничным условиям на бесконечности и на границе соединения материалов, приходим к линейной системе алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения. Получены аналитические выражения для напряжений и деформаций во всей плоскости. Следует отметить, что можно легко получить решение и для других граничных условий на контуре соединения материалов, что и было сделано. Проанализированы значения напряжений вблизи границы соединения материалов, определены зоны максимальных растягивающих радиальных напряжений и сжимающих. Максимальные растягивающие напряжения могут вызвать отслоение включения, т.е. образование трещины на границе раздела материалов. Исследовано влияние условий сцепления на напряженно-деформированное состояние в пластинке с включением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФАКТОРНОГО И ВРЕМЕННОГО ЗАКОНОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ RD

Орлик Л.К., Новикова Г.В. (Москва)
novikg@rambler.ru

Социальные трансформации – результат фактических преобразований пост советской России, где угроза применения технологий управления вялотекущими конфликтами актуализирует прогностические исследования в рамках интегрированной теории политического насилия.

В [1] получен факторный закон воздействия RD, позволяющий прогнозировать вероятность проявления эффектов массового насилия не ниже заданного уровня, индуцированных относительной депривацией RD (Relative Deprivation). В аналитическом представлении этого закона $P = 0.5\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\ln L}}\ln\frac{L}{L_{50}}\right)\right]$ содержатся два параметра: L_{50} – медианное значение уровня интенсивности RD, вызывающего у объекта заданный отклик, и $\sigma_{\ln L}$ – среднее квадратическое отклонение натурального логарифма этой случайной величины.

Определим эти параметры, приравнивая теоретические и выборочные моменты логнормального распределения случайной величины L: $L_{50} e^{\frac{\sigma^2_{\ln L}}{2}} = \bar{L}$; $L^2_{50}\left(e^{2\sigma^2_{\ln L}} - e^{\sigma^2_{\ln L}}\right) = s^2$. Получаем $L_{50} = \bar{L} e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2}{\bar{L}}+1\right)}$; $\sigma^2_{\ln L} = \ln\left(\frac{s^2}{\bar{L}}+1\right)$. Аналогично определяются параметры временного закона "RD-эффекта"[2].

Литература

1. Новикова Г.В., Орлик Л.К. Математическое моделирование процессов проявления массового насилия в обществе/ Глобализация: настоящее и будущее России: Материалы VI Международного социального конгресса, ноябрь 2006. - М.: Издательство РГСУ, 2006.т.1. - 329 - 330с.

2. Орлик Л.К. Временная характеристика "RD-эффекта"в интегрированной теории политического насилия/Современные методы теории функций и смежные проблемы: матем. конференция, ВГУ, 2007, 172 - 173с.

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

Павленко В.Н. (Челябинск)

pavlenko@csu.ru

Рассматривается задача Дирихле

$$Lu(x) - \lambda_1 u + g(x, u(x)) = 0,\ x \in \Omega \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2, где $L = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\partial_i + a(x)$ — равномерно эллиптический дифференциальный оператор в Ω с достаточно гладкими коэффициентами, причем $a(x) \geqslant 0$ на Ω, λ_1 — наименьшее собственное значение оператора L с граничным условием (2). Функция g предполагается борелевой (mod 0) и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет разрывы только первого рода и $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$, $g_-(x,u) = \liminf\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \limsup\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$. Обозначим через $v(x)$ положительную соб-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект р_урал_а №07-01-96000

ственную функцию оператора L^* формально сопряженного с L с краевым условием (2).

Теорема. Предположим, что
1) для почти всех $x \in \Omega$

$$|g(x,u)| \leqslant k|u|^{\mu} + r(x) \quad \forall u \in R, \tag{3}$$

где $k > 0$, $0 < \mu < 1$ и $r \in L^q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$;
2) $\int_{\Omega} G(x)(v(x))^{\mu} dx > 0$, где $G(x) = \liminf\limits_{u \to +\infty} \frac{g(x,u)}{u^{\mu}}$.

Тогда найдется $u \in W_q^2(\Omega)$ с нулевым следом на $\partial\Omega$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Lu(x) + \lambda_1 u \in [g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))].$$

Доказательство теоремы сводится к проверке условий общей теоремы из [1]. В отличие от аналогичного результата в [1] в сформулированной теореме нелинейность $g(x,u)$ может быть неограниченной по u.

Литература

[1] Павленко В.Н., Винокур ВВ. Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами // Укр. мат. журн. – 2002. – т.54, №3. – с.349-363.

О РАЗРЕШИМОСТИ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТТИ

Палин В.В. (Москва)
grey_stranger84@mail.ru

Рассматривается матричное уравнение Рикатти

$$XAX + BX + XC + Q = 0, \tag{1}$$

возникающее при исследовании проекции Чепмена-Энскога задачи Коши и смешанной задачи для моментных аппроксимаций кинетических уравнений. Здесь матрица X — комплекснозначная матрица порядка $(n-m) \times m$, A, B, C, Q — известные комплекснозначные матрицы соответствующего размера. Структура матричного уравнения (1), порожденная реальными физическими задачами, позволила сформулировать необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1) в терминах свойств собственных и присоединенных векторов матрицы $\Lambda = \begin{pmatrix} C & A \\ -Q & -B \end{pmatrix}$. С точки зрения проекции Чепмена-Энскога, наиболее интересен случай вырожденности старшей матрицы A, когда $rank(A) < min\{n-m, m\}$. В докладе формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия существования решения уравнения (1), а также обсуждается вопрос о числе его решений.

Литература

1. *В. А. Палин, Е. В. Радкевич*, Приближение Навье-Стокса и проблемы проекции Чепмена-Энскога для кинетических уравнений// Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 25. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. С. 184-225

2. *С.И. Гельфанд*, О числе решений квадратного уравнения //В сб.: ГЛОБУС. Общематематический семинар, вып.1, МЦНМО, М., 2004. С. 124-133.

3. *В. В. Козлов* Ограничения квадратичных форм на лагранжевы плоскости, квадратные матричные уравнения и гироскопическая стабилизация// Функциональный анализ и его приложения, т. 39(2005), стр 1-14

4. *В. В. Палин* О разрешимости квадратных матричных уравнений//Вестник МГУ(в печати), 10 стр.

5. *В. В. Палин* О разрешимости матричных уравнений Риккати //Труды семинара И.Г.Петровского, т. 28(в печати), 19 стр.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОТОКА В СЕТИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСИЛЕНИЯМИ

Парфенов А.П. (Санкт-Петербург)

parf@bk.ru

Рассматриваются задачи максимизации потока и нахождения потока минимальной стоимости в сети с нелинейными усилениями. Эти задачи обобщает аналогичные задачи для сети с линейными усилениями, которые, в свою очередь, обобщают классические задачи о потоках в сетях. Формально сеть с нелинейными функциями усиления и стоимости — это мультиграф (L, M) с выделенной вершиной, называемой *стоком*, в каждой дуге $(a, b)_i$ которого задана неотрицательная пропускная способность $c_i(a, b) \in \mathbb{R}_+$, кусочно-гладкая функция усиления $g_i(a, b)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и кусочно-гладкая функция стоимости $p_i(a, b)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Все вершины, кроме стока, рассматриваются как источники, в них задан допустимый дефицит $v(x)$. *Потоком* в такой сети называется функция f, заданная на дугах, удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant f_i(a,b) \leqslant c_i(a,b)$ и условию сохранения потока $V(x) = \sum_{y,j|(x,y)_j \in M}) g_j(y,x) f_j(y,x) - \sum_{yi|(x,y)_i \in M} f_i(x,y) = v(x)$. *Псевдопотоком* называется функция, удовлетворяющая неравенству $V(x) \leqslant v(x)$.

Рассматриваются задачи оптимизации потока и псевдопотока: максимизации излишка в стоке $-V_f(s)$ и минимизации стоимости $p(f)$. Доказана теорема о композиции, позволяющая сливать вместе (агрегировать) параллельные дуги между двумя вершинами или, напротив, разделять дугу на множество параллельных, переходя к эквивалентным задачам. При этом усиление или стоимость в агрегированной дуге — это решение вспомогательной оптимизационной задачи на исходных дугах. С помощью этой теоремы построен полупереборный алгоритм максимизации потока в сети с кусочно-линейными функциями усиления и стоимости. Показано, что эффективность алгоритма нельзя существенно улучшить.

Построен алгоритм нахождения локального оптимума в задаче с кусочно-гладкими усилениями, использующий касательные сети и производные потока по направлению. На основе этого алгоритма и полупереборного алгоритма для кусочно-линейных усилений построен метод ветвей и границ, позволяющий находить глобальный оптимум.

Литература

1. Radzik T. Faster algorithms for the generalized network flow problem. - Mathematics of Operations Research, 23:69–100, 1998.

ОБ ОДНОЙ ПСЕВДОГЛАДКОЙ УПРУГОЙ ЗАДАЧЕ[1]

Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И. (Воронеж)

Разорванное в точке $x = \xi$ отрезка $[0, \ell]$ уравнение

$$(pu'')'' = \lambda M' u \tag{1}$$

$$(0 < x < \ell, x \neq \xi)$$

возникает при моделировании собственных колебаний цепочки двух шарнирно-сочлененных в точке $x = \xi$ стержней. Здесь $M(x)$ — монотонная функция, определяющая распределения масс. Пусть $M(x)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07–01–00397)

непрерывна в точке $x = \xi$, что означает отсутствие в ней сосредоточенной массы. Пусть концы цепочки как-либо закреплены. Предположение о непрерывности цепочки означает, что $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$.

Условия шарнира $u''(\xi - 0) = u''(\xi + 0) = 0$ в точке $x = \xi$ обычно объясняются физическими соображениями.

Оказывается, и третья производная $(pu'')'(x)$ функции $u(x)$ следом за второй должна быть непрерывной.

Эта странная гладкость второй и третьей производных $u(x)$, несмотря на заведомый разрыв $u'(x)$ в этой точке, ставит вопрос о природе такого "заглаживания" особенности решения в точке $x = \xi$.

Ответ следующий. Уравнение (1) можно считать условием минимума потенциальной энергии исходной цепочки. И тогда оно оказывается следствием аналога интегро-дифференциального уравнения Эйлера

$$(pu'')(x) = \lambda \int\limits_{\xi}^{x} (\int\limits_{0}^{\tau} u dM)\, d\tau.$$

Для уравнений последнего типа развита качественная теория, вполне аналогичная качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, объясняющая осцилляционные спектральные свойства.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ[1]

Покорный Ю.В., Зверева М.Б. (Воронеж)

pokorny@kma.vsu.ru

При моделировании стильтьесовской струны с сингулярными параметрами речь идет о минимали функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_0^l \frac{pu'^2}{2} dx + \int\limits_0^l \frac{u^2}{2} dQ - \int\limits_0^l u dF, \qquad (1)$$

определяемого на пространстве абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций с производными из $BV[0, l]$. Функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ в (1) предполагаются взятыми из $BV[0, l]$, что определяет наиболее

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07–01–00397)

общий класс физически допустимых параметров. Интегралы в (1) понимаются по Стильтьесу.

Аналогом классического уравнения Эйлера для функционала (1) является интегродифференциальное уравнение

$$-pu'(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0). \tag{2}$$

При этом, если какой-нибудь конец (например $x = l$) исходной вариационной задачи закреплен, т.е. $u(l) = 0$, то уравнение (2) выполняется при всех $x < l$. Если же этот конец не закреплен, то единственно возможное условие в нем, дополняющее уравнение (2), имеет вид

$$p(l-0)u'(l-0) + u(l)\Delta Q(l) = \Delta F(l). \tag{3}$$

Это условие вполне аналогично традиционным условиям типа Штурма-Лиувилля, характерным для литературы по теории краевых задач. Существо нашего приведенного факта заключается в том, что подобные условия, обычно берущиеся как бы произвольно в дополнение к уравнению, превращая это уравнение в краевую задачу, на самом деле не могут браться как попало. Они жестко согласованы с параметрами исходной физической задачи. Более того, фактически условие (3) есть не что иное, как реализация уравнения Эйлера в концевой точке.

О МЕТОДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ СТИЛЬТЬЕСА В ЗАДАЧАХ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ[1]

Покорный Ю.В. (Воронеж), Ищенко А.С., Рябцева Н.Н. (Белгород)

pokorny@math.vsu.ru, science@bupk.ru

Пусть Γ — геометрический граф в R^n (терминологию мы употребляем согласно [1]). Мы вводим понятие функции ограниченной вариации на Γ, определяя для заданной на Γ функции $u : \Gamma \to R$, равенством

$$Var_\Gamma u = \sum Var_\gamma u + \sum Var_{a \subset I(\Gamma)} u(a).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержкегранта РФФИ № 07-01-00397.

Здесь первая сумма берется по всем ребрам γ из Γ, а вторая сумма — по всем внутренним вершинам Γ. Через $Var u(a)$ мы обозначаем "вариацию"u в точке a, а именно сумму предельных колебаний $u(x)$ при подходе x к a вдоль разных примыкающих к a ребер. Через $BV(\Gamma)$ мы обозначаем любую функцию, определенную на объединении Γ с конечной вариацией на Γ. Очевидно, что $BV(\Gamma)$ состоит из тех и только тех функций, каждая из которых имеет ограниченную вариацию на каждом ребре γ из Γ.

Пусть $u(x)$ - некоторая функция из $BV(\Gamma)$. Мы называем дифференциалом Стильтьеса от g и обозначаем через dg линейный ограниченный функционал $l(\varphi)$ из $C^*[\Gamma]$, определяемый равенством

$$l(\varphi) = \int\limits_{\Gamma} \varphi \, dg,$$

где интеграл понимается по Стильтьесу. Через $C^*[\Gamma]$ мы обозначаем пространство, сопряженное к множеству $C[\Gamma]$ непрерывных на замыкании графа функций.

На дифференциалы Стильтьеса переносятся многие привычные свойства обычных дифференциалов. В частности, если g дифференцируема на каждом ребре Γ и непрерывна во внутренних ребрах Γ, причем Γ — ориентирован, то dg адекватен $g'(x)dx$.

Предполагая Γ ориентированным, рассмотрим на Γ множество функций $E = \{u(x)\}$, каждая из которых абсолютно непрерывна на Γ и производная $u'(x)$ каждой из них имеет ограниченную вариацию на Γ. Оказывается, запись

$$-d(pu') + u(x)dQ = \omega^2 u dM \tag{1}$$

корректно описывает уравнение для собственных частот и собственных функций упругой сетки из струн, нагруженной массами с распределением M и при опоре на "упругую подушку"с коэффициентом локальной упругости dQ. Здесь, естественно, Q и M — функции из $BV(\Gamma)$, определяемые физическими обстоятельствами. При таком подходе уравнение (1) "поглащает"традиционные для подобных задач условия трансмиссии. Уравнение (1) аналогично рассматривавшимся в [1] уравнениям Штурма-Лиувилля на графе, распространяя их на случай сильных особенностей.

При условиях, аналогичных классической задаче Дирихле

$$u \mid_{d\Gamma} = 0,$$

собственная функция, соответствующая главной собственной частоте, не имеет нулей внутри Г, а совокупность всех таких функций одномерна.

Литература

1. Покорный Ю.В.и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

О ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ОДНОЙ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ[1]

Покорный Ю.В., Перловская Т.В. (Воронеж)

Изучается функция влияния упругой системы, составленной из двух одномерных континуумов, расположенных в вертикальной плоскости один над другим. Между ними имеется конечное число вертикальных упругих перемычек. Верхний континуум и перемычки — упругие тросы (струны). Нижний горизонтальный континуум — цепочка шарнирно-сочлененённых стержней. Нижние концы вертикальных перемычек прикреплены к шарнирам, где стыкуются соседние стержни нижней цепочки. Все четыре конца системы закреплены, причем нижние закреплены шарнирно.

Граф, геометрически изображающий конфигурацию нашей системы, обозначим через Г. Нас интересуют малые упругие деформации описанной системы. Предположим, что каждая точка системы отклоняется по вертикали. Таким образом, через $u(x)$ мы можем обозначить деформацию всей системы, как скалярнозначную функцию,определенную на Г. Обозначим $u_1(x)$, $u_2(x)$,..., $u_n(x)$ — сужения $u(x)$ на последовательно перенумерованные звенья верхнего континуума, через $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_{n-1}(x)$ — сужения $u(x)$ на вертикальные перемычки, через $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ — сужение $u(x)$ на нижние звенья.

Теорема. *Функция влияния* $H(x,s)$, *определенная на* $\Gamma \times \Gamma$, *непрерывна на* $\Gamma \times \Gamma$ *и строго положительна внутри* $\Gamma \times \Gamma$.

ВЕРНУТЬ СМЫСЛ

Покорный Ю.В., Покорная И.Ю., Давыдова М.Б. (Воронеж)

Можно ли преподавать математику людям, путающимся в дро-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07–01–00397)

бях и в процентах? На этот странный для квалифицированного математика вопрос жизнь последние годы дает однозначный ответ. Не владея дробями, путается с процентами значительная часть студентов, уже завершивших свое математическое образование в ВУЗе.

В настоящее время жизнь повышает требования к математической культуре специалистов. Программы по высшей математике внедряются практически даже на всех гуманитарных специальностях. Абитуриенты таких профилей, вдобавок к слабым математическим знаниям, выносят из школы и крайнюю нелюбовь (неприязнь) к математике. После прохождения математической подготовки в ВУЗе у них как раз образуется тот самый математический "пирог", где отдельные фрагменты знаний высшей математики (и даже некоторых навыков решения дифференциальных уравнений) сочетаются с полной неграмотностью в дробях и процентах.

Причина такого карикатурного математического образования довольно простая. Это — формальное предположение, что ученики (студенты) хорошо владеют тем, что им положено владеть по программе. Стандартно-магическое заклинание — "в школе вы изучили, что..." — после которого преподаватель искренне считает, что он вправе пользоваться сформулированной предпосылкой. Однако преподаватели ВУЗа не знают, что даже и учителя школы не понимают, как разумно объяснить понятие суммы. Дальше высказываний "сумма есть результат сложения" и "сложить, значит найти сумму" дело не идет. А сумма дробей определяется алгоритмом, смысл которого для учеников просто непостижим — какое отношение имеет общий знаменатель к результату сложения. Даже смысл понятия числа не оформлен, хотя бы на понятийном уровне. Школьно-методические "умники" пишут так: "число — есть понятие первичное и потому определению не подлежит". Использование алгоритмов и процедур для описания понятий — довольно стандартный элемент математических методик, особенно, если эти понятия связаны процедурой предельного перехода, — самый надежный метод отторжения формы понятия от коренного смысла.

Начинающим студентам крайне необходимо вернуть смысл фундаментальным студентам крайне необходимо вернуть смысл фундаментальных математических понятий, опираясь, в первую очередь, на сенсорно-моторный интеллект. Число — то, что отвечает на вопрос "сколько?" Сумма отвечает на вопрос "сколько всего"? Дробь — мера части, выраженная в количестве каких-то долей. С этой точки зрения, сумма дробей отвечает на вопрос “каков размер объединения двух частей, когда общий знаменатель является названием обще меры обеих частей”? Число в общем плане — результат измерения одной величины с помощью другой. Интеграл — объединение площадей (площадей отрезков), когда отрезок ассоциируется с прямоугольником бесконечно малой ширины. На интуитивном уровне бесконечно малая ширина — это толщина точки, толщина атома, из которых составлен отрезок — взгляд, удовлетворяющих ученых Демокрита и до Даламбера, определившего бесконечно малую величину, как “исчезающую малую”.

Отход от формальной строгости при подобном взгляде на основы не ослабляет силы математических методов. На таких взглядах были воспитаны натурфилософы 18 и 19 веков, обеспечивших взрыв в естествознании. В то же время, эти взгляды позволят вернуть молодым людям доверие к осмысленности основ математических знаний.

КАК ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ИЗБЕЖАТЬ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1]

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

anpokr@petrodvorets.spb.ru

Пусть $x \in D \subset R^n$, $t \in R_+$, L – линейный дифференциальный оператор, и краевая задача

$$L\varphi(x,t) = f(x,t);\ \varphi|_{x\in\Omega} = 0;\ \varphi(x,0) = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение $\varphi(x,t)$. Если решение (1) измерено в N точках $x_i \in D,\ i = \overline{1,N}$, то-есть известны $\varphi(x_i,t)$, обратная задача состоит в восстановлении функции $f(x,t)$. Если точки x_i составляют достаточно плотную сетку в D, стандартный подход состоит в замене частных производных в L конечными разностями и в вычислении $f(x_i,t)$ на части этой сетки. С увеличением N точность такой оценки увеличивается, однако при малых N обратная задача не решается.

Есть другой путь решения обратной задачи, пригодный при малых N. Очевидно, по N известным функциям $\varphi(x_i,t)$ можно оценить не более чем N неизвестных функций $f(\widetilde{x}_i,t)$, $\widetilde{x}_i \in D$. Положим $f(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(x-\widetilde{x}_i)\, f(\widetilde{x}_i,t)$ и применим к (1) резольвенту с ядром

[1] Работа поддержана РФФИ 04-01-00048-а.

$K(x,t)$. Получим

$$\varphi(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t}K(\widetilde{x}_i-x,t-\tau)f(\widetilde{x}_i,\tau)d\tau. \qquad (2)$$

Полагая в (2) $x=x_k$, $k=\overline{1,N}$, получим систему N линейных интегральных уравнений для неизвестной вектор-функции $f(t)=\{f(\widetilde{x}_i,t)\}_1^N$:

$$\varphi(x_k,t)=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t}K(\widetilde{x}_i-x_k,t-\tau)f(\widetilde{x}_i,\tau)d\tau, \qquad (3)$$

которую можно записать в виде $\varphi(t)=\mathbf{K}f(t)$. Решение системы (3) имеет вид $f(t)=\mathbf{R}\varphi(t)$, где $\mathbf{R}$ обозначает матричный интегро-дифференциальный оператор, действующий на переменную t. Дифференцирование и регуляризация по t сохраняются, но численное дифференцирование по переменной x исключается.

Рассмотрены примеры с вычислением явной формы ядра матричного оператора $\mathbf{R}$.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ПУЧКЕ[1]

Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. (Воронеж)

wwprov@math.vsu.ru

Рассматривается модельный случай, когда сеть представляет собой пучок, состоящий из трех физически одинаковых одномерных континуумов (трех ребер с одним узлом). К таким задачам приходят, например, при так называемом неразрушающем контроле процесса, не допускающем контролирующие компоненты датчика внедрять в тело исследуемого континуума (их ставят в место смычки континуумов), при моделировании колебательных процессов упругой мачты с поддерживающими упругими растяжками.

Пусть $\gamma_k=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $k=1,2,3$, $\gamma_3=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Обозначим $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^{3}\gamma_k$; очевидно $\bar{\Gamma}=\bigcup\limits_{k=1}^{3}\bar{\gamma}_k$. Множество $\bar{\Gamma}$ представляет собой граф-пучок с узлом $\frac{\pi}{2}$. На графе $\bar{\Gamma}$ рассмотрим множество $\Im$ функций

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07–01–00397)

$y(x) \in C(\bar{\Gamma}) \cap C^2(\Gamma)$ (непрерывность в узле $\frac{\pi}{2}$ означает выполнение соотношений $y(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_1} = \quad y(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_2} = y(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_3}$), производные которых в точках $\frac{\pi}{2} \in \bar{\gamma}_k \ \ (k = 1, 2, 3)$ (т.е. в узле $\frac{\pi}{2}$) удовлетворяют условиям согласования (условия трансмиссии):

$$\sum_{k=1}^{2} y'(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_k} = y'(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_2}. \qquad (1)$$

На функциях $y(x) \in \Im$ рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$\ell(y) \equiv -y'' + q(x)\,y = \lambda y, \qquad (2)$$

$$U_k(y) \equiv (y'(x) - hy(x))_{x=0\in\bar{\gamma}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \qquad (3)$$

$$V(y) \equiv (y'(x) + Hy(x))_{x=\pi\in\bar{\gamma}_m} = 0, \qquad (4)$$

здесь λ — спектральный параметр; $q(x)$, h, $H > 0$ — вещественные; $q(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $q(x)_{\bar{\gamma}_1} = q(x)_{\bar{\gamma}_2} = q(\pi - x)_{\bar{\gamma}_3}$.

Для краевой задачи (1)–(3) получено множество собственных значений и ему соответствующее множество собственных функций; собственные значения простые (при $H = h$ краевая задача имеет кратные собственные значения). Доказана теорема о разложимости функции в обобщенный ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи (1)–(3), при этом используется метод контурного интегрирования — для истокообразно представимой функции в комплексной λ-плоскости определяются вычеты по расширяющимся контурам, т.е. определяются коэффициенты ряда.

ОБ АНАЛОГЕ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ БЕЗ ГРАНИЧНЫХ ВЕРШИН[1]

Прядиев В.Л. (Воронеж), Фадеева Л.Г. (Борисоглебск)
pryad@mail.ru

Рассматривается следующая начальная задача для волнового

[1]Исследования поддержаны РФФИ, проект 07-01-00397.

уравнения на неограниченном геометрическом графе $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad (x \in R(\Gamma),\ t > 0) \\ \sum\limits_{h \in T(x)} u_h^+(x,t) = 0 \qquad (x \in \mathcal{J}(\Gamma),\ t \geqslant 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \lim\limits_{t \to 0+} u_t(x,t) = 0 \qquad (x \in \Gamma) \end{array} \right. , \tag{1}$$

в которой производная по x понимается в соответствии с [1], $R(\Gamma)$ – объединение всех рёбер Γ, $\mathcal{J}(\Gamma)$ – множество вершин Γ, $T(x) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1 \text{ и } (x + \varepsilon h) \in \Gamma \text{ для достаточно малых } \varepsilon > 0\}$, $u_h^+(x,t)$ – правая производная функции $u(\,\cdot\,,t)$ в точке x по вектору h, $\varphi(x)$ – заданная функция. Решение $u(x,t)$ задачи (1) ищется в классе непрерывных на $\Gamma \times [0,+\infty)$ функций, удовлетворяющих всем равенствам из (1). Предполагается, что множество $\mathcal{J}(\Gamma)$ дискретно.

Задача, подобная (1), но на ограниченном Γ, рассматривалась в [2] (при краевых условиях Дирихле) и в [3] (при краевых условиях Неймана). Нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть, кроме условий на φ, определяемых понятием решения задачи (1), выполнены также условия:*

1) $\forall(x \in \mathcal{J}(\Gamma))\forall(h \in T(x)) \left[\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varphi''(x + \varepsilon h) = \left(\varphi_h^+\right)_h^+(x) \right]$,

2) $\forall(x \in \mathcal{J}(\Gamma))\forall(h, \eta \in T(x)) \left[\left(\varphi_h^+\right)_h^+(x) = \left(\varphi_\eta^+\right)_\eta^+(x) \right]$.

Тогда при $t > 0$ решение задачи (1) представимо в виде:

$$u(x,t) = \sum_{p \in P(x,t)} \beta_p \varphi(e_p),$$

где $P(x,t)$ – множество ломаных, содержащихся в Γ, с началом в точке x и длины t, причём подчинённых ограничениям: всякая неначальная и неконцевая вершина ломаной лежит в $\mathcal{J}(\Gamma)$, а всякая точка из $\mathcal{J}(\Gamma)$, лежащая в ломаной, является её вершиной; e_p – концевая (последняя) вершина p; $\beta_p = \dfrac{1}{2} \prod\limits_{i=0}^{k(p)-1} \beta_i(p)$, где $k(p)$ – количество звеньев у p, $\beta_0(p) = 2/|T(x)|$, $\beta_i(p) = 2/|T(a_i)|$, если $i = \overline{1, k(p)-1}$ и $[a_{i-1}; a_i] \cap [a_i; a_{i+1}] = \{a_i\}$ (здесь $a_0 = x$, a_1, a_2, … , $a_{k(p)-1}$, $a_{k(p)} = e_p$ есть последовательность вершин p), и $\beta_i(p) = (2/|T(a_i)|) - 1$ – в остальных случаях.

Доказательство теоремы осуществлено непосредственной проверкой.

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

2. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети// Докл. РАН. 2003. Т. 388, N 1. С. 16–18.

3. Прядиев В. Л., Копытин А. В., Боровских А. В. К вопросу о периодичности колебаний упругих сеток// "Понтрягинские чтения - X". Тез. докл. - Воронеж: ВГУ, 1999. С. 198.

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ГОЛОМОРФНОЙ В ОБЛАСТИ ФУНКЦИИ

Радзиевская Е.И.

radz@imath.kiev.ua

Пусть f — голоморфная в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция. Через $U(\alpha; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ обозначим открытый круг с центром в точке α и радиусом $r > 0$, а через $\arg z$ — аргумент отличного от нуля комплексного числа z и $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ Пусть точки z_0 и z_1 принадлежат области D.

Запишем формулу Тейлора для функции f

$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z_1 - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + Q(z_0; z_1; f) \qquad (1)$$

В работе изучен вопрос: когда остаточный член $Q_n(z_0; z_1; f)$ представим в форме Лагранжа

$$Q_n(z_0; z_1; f) = \frac{(z_1 - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \qquad (2)$$

и где расположено ξ? Справедлива

Теорема. Пусть f — голоморфная в области D функция. Тогда для любого $z_0 \in D$ и каждого $\theta \in (0; \frac{\pi}{2}]$ найдется такое положительное $r := r(f, n, z_0, \theta)$, что круг $U(z_0, r)$ лежит в D и если $|z_1 - z_0| < r$, $z_1 \neq z_0$, то в секторе

$$u\left(\frac{z_0 + z_1}{2}; \frac{|z_1 - z_2|}{2}\right) \cap \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq z_0, \left|\arg \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < \theta\right\} \qquad (3)$$

Найдется по крайней мере одно ξ, для которого справедлива формула (2). Если кроме того, f не является полиномом степени, меньшей или равной n, то найдется такое положительное $\theta_0 := \theta_0(f; n; z_0) \leqslant \frac{\pi}{2}$, что при $\theta \in (0; \theta_0]$ справедливо предыдущее утверждение, но указанное в нем ξ из (3) уже единственно.

Отметим, что в общем случае запись остатка в форме (2) невозможна. В этом легко убедиться, если рассмотреть функцию $f(z) = e^{iz}$, $z_1 = z_0 + 2\pi$ и записать для нее формулы (1),(2) при $n = 1$. Из сформулированной теоремы при $n = 1$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ вытекают результаты работ[2,3].

Приведем вещественную версию второго утверждения теоремы.

Следствие. Пусть a и b вещественны, $a < b$ а f - голоморфная в окрестности отрезка $[a; b]$ функция, не являющаяся полиномом степени, меньшей или равной n, причем значения $f(x)$ вещественны, когда $x \in [a; b]$. Тогда для любого $z_0 \in [a; b]$ найдется такое положительное $r := r(f, n, z_0)$, что отрезок $[z_0 - r; z_0 + r]$ лежит в области голоморфности (т.е. области определения) функции f и для любого вещественного $z_1 \in [z_0 - r; z_0 + r]$ и $z_1 \neq z_0$ найдется лишь одно вещественное ξ , принадлежащее интервалу вещественной оси, расположенному между точками z_0 и z_1 , для которого справедлива формула (2).

Следствие в случае голоморфной функции дополняет классическую теорему Лагранжа, поскольку гарантирует единственность ξ в формуле (2) для достаточно близких к z_0 вещественных z_1. Отметим, что такой единственности в теореме Лагранжа нет, даже при условии бесконечной дифференцируемости функции.

Литература

1. Радзиевская Е.И., Радзиевский Г.В. Для голоморфной в области функции остаточный член в формуле Тейлора допускает запись в форме Лагранжа // Сибирский математический журнал 2003. Т.44, N2. С.402-414.

2. Robertson J.M. A local mean value theorem for the complex plane // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1969. V.16, N 4. P. 329-331.

3. Samuelsson A. A local mean value theorem for analytic functions // Amer. Math. Mounthly. 1973. V.80, N1. P.45-46.

УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ СНИЗУ СПЕКТРА ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Ратыни А.К. (Иваново)
ratyni@isuct.ru

Классическая разрешимость задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u + \lambda u = f(x) \quad (x \in D), \quad (1)$$

$$u(x) - \beta(x)u(\sigma x) + (Au)(x) = \psi(x) \quad (x \in S) \quad (2)$$

изучается при следующих предположениях. Все величины вещественны.

Условия (L): D — ограниченная область R^n, $\partial D = S \in C^2$; a_{ij}, b_i, $c \in C_\alpha(D)$; матрица (a_{ij}) положительно определена в $\bar{D} = D \cup S$; λ — числовой параметр.

Условия (B): $\beta \in C(S)$; $\beta(x) \geqslant 0$, $x \in S$; σ — однозначное непрерывное отображение $\bar{D}$ в $\bar{D}$.

Обозначим: $\Omega = \{x \in S : \sigma^k x \in S,\ k = 1, 2, ...\}$; $\Omega_0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma^m \Omega$; F — оператор, определенный на функциях $\eta(x) \in C(\Omega_0)$ равенством $(F\eta)(x) = \beta(x)\eta(\sigma x)$ $(x \in \Omega_0)$; $r(F)$ — спектральный радиус F.

Здесь используются пространства Гельдера, определенные в монографии А. Фридмана "Уравнения с частными производными параболического типа с тем лишь уточнением, что $C_{2+\alpha}(D)$ считается непрерывно вложенным в $C(\bar{D})$.

Условия(A): A — линейный ограниченный оператор из $C_{2+\alpha}(D)$ в $C(S)$; для любого числа $M > 0$ существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $a \in (0,1)$ и область Q, замыкание которой лежит в D, что для всякой функции $z(x) \in C_{2+\alpha}(D)$, удовлетворяющей неравенствам $\|z\|_{C(\bar{D})} \leqslant M$, $\|z\|_{C_{2+\alpha}(Q)} \leqslant \varepsilon$, имеет место неравенство $\|Az\|_{C(S)} \leqslant a$.

Теорема. *Пусть выполнены условия (L),(B),(A), а кроме того, либо $\Omega_0 = \varnothing$, либо $\Omega_0 \neq \varnothing$ и $r(F) < 1$. Тогда существует такое число c_0, не зависящее от f и ψ, что задача (1),(2) с $\lambda \leqslant c_0$ однозначно разрешима в $C_{2+\alpha}(D)$ для любых $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in C(S)$.*

РАВНОВЕСИЕ ПО ДЖОФФРИОНУ С РИСКОМ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Родюков А.В. (Борисоглебск)
2409555@mail.ru

В работе формализовано понятие гарантирующего равновесия с риском в статической иерархической игре двух лиц в условиях неопределенности с централизованным управлением. Стратегии игроков определяются по Джоффриону, а неопределенность учитывается с помощью функций риска игроков. Риск возникает в процессе принятия решения из-за наличия неопределенности, о которой известны лишь область возможных значений, а какие-либо статистические данные отсутствуют. Игра двух лиц в условиях неопределенности задается набором $\langle N=\{1,2\}, Y, f(x,y)\rangle$. Здесь $N=\{1,2\}$ номера игроков, $x=(x_1,x_2)$ – ситуация игры, образованная стратегией $x_1 \in R^{n_1}$ игрока верхнего уровня и стратегией $x_2 \in R^{n_2}$ игрока нижнего уровня, $Y \in R^m$ – множество неопределенностей, $y \in Y$ – неопределенность, функция выигрыша i-го игрока задана скалярной функцией $f_i(x,y)$, $f=(f_2,f_1)$. Цель i-го игрока – выбор такой стратегии, чтобы в ситуации x его выигрыш $f_i(x,y)$ принял возможно большее значение. При этом каждый игрок при выборе своей стратегии ориентируется на возможность реализации наименее благоприятных для него значений неопределенности $y \in Y$.

Определение. Пару (x^G, y^*), где $x^G=((x_1^*), x_2^*(x_1^*))$, назовем G-равновесием с риском, если $\exists\, y^* \in Y$, что выполняются условия: 1) $\forall (x_1,x_2) \in R^{n_1} \times R^{n_2}$ несовместна система неравенств $f_i(x^G,y^*) \leqslant f_i(x_1,x_2,y^*)$, $i \in N$, из которых по крайней мере одно строгое; 2) $\exists \gamma > 0$, что для некоторого $i \in N$, при котором выполняется неравенство $f_i(x_1,x_2^*(x_1),y^*) > f_i(x^G,y^*)$, и $j \neq i$, $j \in N$, при котором выполняется неравенство $f_j(x_1,x_2^*(x_1),y^*) < f_j(x^G,y^*)$, справедливо неравенство $\varphi_i(x_1)/\varphi_j(x_2) \leqslant \gamma$, где $\varphi_i(x_1) = f_i(x_1,x_2(x_1),y^*) - f_i(x^G,y^*)$, $\varphi_j(x_2) = f_j(x^G,y^*) - f_j(x_1,x_2(x_1),y^*)$; 3) $\forall y \in Y$ несовместна система неравенств $F_i(x^G,y^*) < F_i(x^G,y)$, $i \in N$, где $F_i(x,y) = \sup\limits_{x_i} f_i(x_i,x_j,y) - f_i(x,y)$ $(i \neq j)$ – функция риска i-го игрока. Установлены неулучшаемость и внутренняя устойчивость предлагаемого равновесия. Для линейно-квадратичных функций выигрыша сформулирован алгоритм решения игры и приведен пример.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, ВОЗМУЩЕННОГО ОДНИМ КЛАССОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рождественская Е.Ю. (Москва)
rozhdestve@pochta.ru

Мы доказываем формулы регуляризованных следов классического вида и просуммированных по Абелю для некоторого класса возмущений одномерного гармонического осциллятора. В нашей работе рассматриваются возмушения интегральными операторами специального вида: композиция оператора умножения на функцию и оператора свертки. Так как спектр гармонического осциллятора не содержит лакун неограниченно возрастающей длины, то, вообще говоря, нельзя рассчитывать на возможность получения формул следов в случае некомпактного возмущения. Это подтверждается и используемой нами теоремой В. А. Садовничего и В. Е. Подольского о следах абстрактных операторов [1].

Теорема. *Для возмущения гармонического осциллятора* $-y'' + x^2 y = \lambda y$, *действующего в* $\mathbf{L}_2(-\infty;+\infty)$, *оператором вида* $\mathcal{K}y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)q(x-t)y(t)\,dt$, *где* $p(x)$, $xp(x)$, $q(x)$, $q'(x)$, $xq(x) \in \mathbf{L}_2(-\infty;+\infty)$ *верна формула первого регуляризованного следа*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mu_k - 2k - 1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)q(x-t)\varphi_k(x)\varphi_k(t)\,dx\,dt\right) = 0.$$

Так же этот след суммируется по Абелю и верна формула

$$\lim_{\omega\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n - 2n - 1)\cdot\omega^n = q(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx.$$

Литература

1. *В. А. Садовничий, В. Е. Подольский.* Следы операторов с относительно компактным возмущением. Мат. сб., 2002, т. 193, №2, с. 129 – 152.

О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)
RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$:

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y,$$

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda x) :=$$
$$\big(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1,2,$$

где $p_j, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbf{C}$. Пусть ω_1, ω_2 есть корни характеристичского уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$. Предположим, что эти корни лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что $\omega_2 < 0 < \omega_1$. Обозначим $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$. Считаем для определенности $\alpha_{\nu 1} \neq 0, \beta_{\nu 1} \neq 0$. Обозначим $v_{\nu j} := U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} := \exp(-\lambda\omega_j) U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$, $\nu, j = 1,2$, и $V_j := (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j := (w_{1j}, w_{2j})^T$, $j = 1,2$. Пусть $\tau := |\omega_2|/\omega_1$, $a_{sk} := \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} := \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} := \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} := \det(V_s, V_k)$, $b_0 := a_{1\bar{1}}/a_{\overline{12}}$, $c_0 := -a_{\overline{12}}/a_{1\bar{2}}$, $d_0 := \ln_0 c_0$ (здесь $\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbf{C} : \lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_1,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $Y := \{y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)),\ \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, $\Lambda\backslash\{0\}$ есть множество всех ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$, а множество $Y\backslash\{y(x,0)\}$ есть множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям.

При основных предположениях

$$a_{\overline{12}} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0, \quad W_2 = 0, \quad a_{1\bar{1}} \neq 0$$

справедлива следующая теорема

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003).

Теорема. *Если $\sigma = \frac{1}{1+\tau}$, то система Y двукратно полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ с возможным дефектом, не превосходящим 1. При $\sigma > \frac{1}{1+\tau}$ система Y двукратно неполна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ и имеет в этом пространстве бесконечный дефект.*

ТЕРМИЧЕСКИЙ НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ ПРИ ПОРШНЕВОМ ДВИЖЕНИИ СРЕДЫ

Ряжских А.В., Богер А.А., Рябов С.В. (Воронеж)

wwprov@math.vsu.ru

Показано, что математическая формулировка физической задачи приводит к необходимости решения гиперболического уравнения

$$\mathrm{Pe}\frac{\partial T}{\partial Z} - \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}; \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$T(X,0) = 1, \quad \frac{\partial T(X,0)}{\partial Z} = -\frac{2}{\mathrm{Pe}}, \tag{2}$$

$$T(1,Z) = \frac{\partial T(0,Z)}{\partial Z} = 0, \tag{3}$$

где X, Z – поперечная и продольная безразмерная координата, Pe – число Пекле.

Решение (1)–(3)

$$T(X,Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[4 + \mathrm{Pe} + \left(\mathrm{Pe} + \sqrt{\mathrm{Pe}^2 + 4\mu_n^2}\right)\right]\cos(\mu_n X)}{\mathrm{Pe}\sqrt{\mathrm{Pe}^2 + 4\mu_n^2}\mu_n \sin(\mu_n)} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\mu_n^2}}{2} Z\right], \tag{4}$$

где $\mu_n = \frac{\pi(2n+1)}{2}$.

Используя понятие “регулярного” режима, получено аналитическое выражение для длины термического участка

$$Z_0 = \frac{2}{\mathrm{Pe} - \sqrt{\mathrm{Pe}^2 + \pi^2}} \ln\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\mathrm{Pe}\sqrt{\mathrm{Pe}^2 + \pi^2}}{4 + \mathrm{Pe}\left(\mathrm{Pe} + \sqrt{\mathrm{Pe}^2 + \pi^2}\right)}\varepsilon\right], \tag{5}$$

где ε — точность (обычно $\varepsilon \approx 0{,}02$).

Показано, что продольная теплопроводность оказывает существенное влияние при $Pe \leqslant 5$, что согласуется с известными теоретическими оценками. При этом безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Нуссельта) составляет $Nu = 2,467$.

КОНДУКТИВНЫЙ РЕЖИМ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ОГРАНИЧЕННОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО РОДА

Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Богер А.А., Соболева Е.А.
(Воронеж)
wwprov@math.vsu.ru

Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial R} + \xi^2 \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}, \tag{1}$$

$$T(R, Z, 0) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T(R, 0, Fo)}{\partial Z} = -\mathrm{Ki}_{\text{в}}, \quad \frac{\partial T(R, 1, Fo)}{\partial Z} = -\mathrm{Ki}_{\text{н}}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(0, Z, Fo)}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial T(1, Z, Fo)}{\partial R} = -\xi \mathrm{Ki}_{\text{б}}, \tag{4}$$

где $Fo = a\tau/r_0^2$; $R = r/r_0$; $Z = z/h$; $\xi = r_0/h$; $\mathrm{Ki}_{\text{в}} = q_{\text{в}}h/(\lambda t_0)$; $\mathrm{Ki}_{\text{н}} = q_{\text{н}}h/(\lambda t_0)$; $\mathrm{Ki}_{\text{б}} = q_{\text{б}}h/(\lambda t_0)$; $T(R, Z, Fo) = [t(r, z, \tau) - t_0]/t_0$, r, z — цилиндрические координаты с началом в центре одного из оснований цилиндра, названного верхним; τ — текущее время; r_0, h — радиус и высота цилиндрического тела; $q_{\text{в}}$, $q_{\text{н}}$, $q_{\text{б}}$ — плотности тепловых потоков соответственно через верхнее и нижнее основания и боковую поверхность; t, t_0 — текущая и начальная температуры; λ, a — коэффициент теплопроводности и температуропроводность тела. Решение задачи (1)–(4):

$$T(R, Z, Fo) = \left[Fo\xi^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(Z-1)^2\right]\mathrm{Ki}_{\text{в}} -$$

$$\left(Fo\xi^2 - \frac{1}{6} + \frac{Z^2}{2}\right)\mathrm{Ki}_{\text{н}} - 2\xi \mathrm{Ki}_{\text{б}} Fo +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{Ki}_{\text{в}}-\mathrm{Ki}_{\text{н}}}{\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}cos(\pi nZ)\exp(-\xi^2\pi^2n^2Fo)-$$

$$-2\xi\mathrm{Ki}_{\text{б}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(p_mR)}{p_m^2J_0(p_m)}\left[1-\exp(-p_m^2Fo)\right].$$

Полученное решение дополняет известный спектр аналитических решений двумерного нестационарного осесимметричного уравнения теплопроводности и может быть использовано при анализе свободно-конвективного течения.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА РАВНОБЕДРЕННОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Седов А.И., Закирова Г.А. (Магнитогорск)

sedov@masu.ru

Пусть $D=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant x\leqslant\pi\}$. В пространстве $L_2(D)$ рассмотрим дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор T_0, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta u=\lambda u,\quad u|_{\partial D}=0.$$

Введем оператор $T=\int_0^\infty\lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta>2$, $\lambda^\beta>0$. Упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_{m,n}$ оператора T будем нумеровать одним нижним натуральным индексом и одним верхним, отвечающим за кратность ν_t собственного числа λ_t, т.е. $\lambda_t=\lambda_t^j$, $j=\overline{1,\nu_t}$.

Положим $r_t=\dfrac{1}{2}\min\{\lambda_{t+1}-\lambda_t;\lambda_t-\lambda_{t-1}\}$; $r_0=\inf\limits_t r_t$,

$v_+=2^k(m+n), v_-=2^k(m-n)$; $w_m=2^{k+1}m, w_n=2^{k+1}n$;

$$s=\sum_{m>n>0}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{2^{2k-1}}r_{v_+,v_-}\max_{\lambda\in\gamma_{v_+,v_-}}\|R_0(\lambda)\|_2^2+$$

$$+\frac{1}{2^{2k}}r_{w_m,w_n}\max_{\lambda\in\gamma_{w_m,w_n}}\|R_0(\lambda)\|_2^2\Bigg),$$

$R_0(\lambda)=(T-\lambda E)^{-1}$; $\quad\varphi_{m,n}=\frac{2}{\pi}(\cos mx\cos ny+\cos nx\cos my)$.

Теорема. *Пусть* $\beta > 2,\ 0 < r < \min\{r_0, \frac{1}{2s}\},\ \omega = 2sr$. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_{m,n}\}$ *выполняется неравенство:*

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m>n>0}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k}(\xi_{v_+,v_-}-\lambda_{v_+,v_-})-\frac{1}{2^{k+1}}(\xi_{w_m,w_n}-\lambda_{w_m,w_n})\Big| < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

то существует функция $p \in L_\infty(D)$ *такая, что для любого* $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m^2+n^2=\lambda_t}\xi_{m,n} = \sum_{m^2+n^2=\lambda_t}\mu_{m,n},$$

где $\sigma(T+P) = \{\mu_t^k\}$, P*– оператор умножения на функцию*

$$p = \sum_{m>n>0}(p,\varphi_{2m,2n})\varphi_{2m,2n}.$$

РАСШИРЕННАЯ МОДЕЛЬ КАНА–ХИЛЛАРДА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Селиванова Н.Ю., Шамолин М.В. (Москва)
shamolin@imec.msu.ru

Проводится нелинейный асимптотический анализ некоторой математической модели, содержащей малый параметр, описывающий процесс затвердевания сплава, состоящего из двух компонент.

Подобно работам Е. Радкевича в данной работе выводится сингулярно предельная задача (расширенная задача Стефана) в том случае, когда время релаксации процессов в зоне фазового перехода является быстрым. С любой точностью изучено существующее асимптотическое решение на временном интервале существования классического решения сингулярно предельной задачи.

В процессе изучения предполагается, что двухкомпонентный сплав заполняет некоторую область, разделенную на три части: области, заполненные разными фазами, и так называемой межфазной зоной. Различные фазы имеют некоторую симметрию преобладающего вещества [1].

Эволюция распределения концентрации вещества описывается уравнением диффузии, содержащим расширенный диффузионный поток определенного вида.

Несимметрия тензора задачи, отвечающего за поверхностное натяжение, как и в работах предыдущих авторов, приводит к зависимости уже предельных значений от самой геометрии фронта фазового перехода, который однозначно определяется первыми приближениями.

Литература

1. Dreyer W. and Muller W. H., *A study of the coarseing in tin/lead solders*, Inter. J. of Solids and Structures, **37** (2000), p. 3841–3871.

ОБ ОСТОВАХ СВЕРХПОЛУПРОСТЫХ $\mathbb{C}$-СИСТЕМ

Семенов Ю.М., Семячкова М.А., Степанова Н.Д.
(Чебоксары)
SemJuM@chuvsu.ru

Рассматривается линейная управляемая система $C = (V, \alpha, \Omega)$ вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \quad\;\; -x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 \quad\;\; + u^2, \\ \dot{x}^3 = \quad\;\; -x^4 + u^3, \\ \dot{x}^4 = -x^3 \quad\;\; + u^4, \end{cases}$$

с ограничивающим конусом Ω с образующими $u_1 = e_1, u_2 = e_3, u_3 = pe_1 + qe_2 + re_3 + se_4$. Положим, $u_1(t) = e^{\alpha t}u_1,\ u_2(t) = e^{\alpha t}u_2,\ u_3(t) = e^{\alpha t}u_3,\ \ \dot{u}_1 = \alpha u_1,\ \dot{u}_2 = \alpha u_2,\ \dot{u}_3 = \alpha u_3$.

Известно, что управляемая система C вполне достижима. Для нее решена задача определения строения линейного остова в зависимости от параметров p, q, r, s. В частности, найдены методы нахождения момента времени $T(C)$ полной стабилизации остова и опорного вектора к конусу достижимости $K(C, T(C))$.

Пусть W_1, W_2, W_3 — α-инвариантные линейные подпространства размерности 2, содержащие соответственно векторы u_1, u_2, u_3. Если плоскость W_3 не совпадает ни с одной из плоскостей W_1, W_2, то проверяется, что опорная гиперплоскость к конусу $K(C, T(C))$ совпадает с одной из следующих семи:

$V_0 = Lin(u_1,\, u_2,\, u_3),\ \ n_0 = (0, s, 0, -q),\ \ T(C) = \pi.$

$V_1 = Lin(u_1,\, \dot{u}_1,\, u_2),\ \ n_1 = (0, 0, 0, 1),\ \ T(C) = arctan(-s/r);$

$V_2 = Lin(u_1,\, \dot{u}_1,\, u_3),\ \ n_2 = (0, 0, s, -r).\ \ T(C) = arctan(s/r);$

$V_3 = Lin(u_1,\, u_2,\, \dot{u}_2),\ \ n_3 = (0, 1, 0, 0).\ \ T(C) = arctan(-q/p);$

$V_4 = Lin(u_1,\, u_3,\, \dot{u}_3)$, $n_4 = (0, r^2+s^2, ps-qr, -pr-qs))$. $T(C) = arctan((ps-qr)/(pr+qs))$;

$V_5 = Lin(u_2,\, \dot{u}_2,\, u_3)$, $n_5 = (q, -p, 0, 0)$. $T(C) = arctan(q/p)$;

$V_6 = Lin(u_2,\, u_3,\, \dot{u}_3)$, $n_6 = (-ps+qr, -pr-qs, 0, p^2+q^2)$. $T(C) = arctan(-(ps-qr)/(pr+qs))$;

Если плоскость W_3 совпадает с одной из плоскостей W_1, W_2, то задача описания остова системы C редуцируется к существенно более простой задаче описания остова системы второго порядка.

Литература

1. Семенов Ю.М. Введение в теорию достижимости линейных систем. — Чебоксары.: Изд-во Чув. гос. ун-та, 2006. — 252 с.

УСЛОВИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ[1]

Семенова Т.Ю. (Москва)

station@list.ru

Рассмотрим следующую задачу $\left\{ \begin{array}{l} \triangle v = F(x, v, \nabla v), \\ v|_{\partial\Omega} = \tau, \end{array} \right.$ где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, функция F класса $c_1 Lip1$ по v и класса $c_2 Lip1$ по ∇v. Исследуется возможность совпадения двух решений задачи из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$ при совпадении значений функционалов $P^1, ..., P^N$, определенных на решениях. Подобные вопросы для различных видов уравнений рассматривались в работах Ладыженской О.А., Titi E.S., Jones D.A., Чуешова И.Д., Царькова И.Г. (см. обзор [1]).

Функция $u = v_1 - v_2$, являющаяся разностью двух решений задачи, принадлежит множеству

$$\mathcal{U}_C = \{u \in W_2^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0,\ \|\nabla u\|_2^2 \leqslant C \cdot \|u\|_2^2\}.$$

Постоянная C в этом случае есть $C = C(c_1, c_2)$. Поэтому задачу можно свести к более общей задаче нахождения условий для $P^1, ..., P^N$ таких, чтобы из равенств $P^1(u) = ... = P^N(u) = 0$ следовало, что $u = 0$ п.в. в Ω.

Если $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...$ – собственные значения задачи Штурма-Лиувилля $(*)$ $\{\triangle u = -\lambda \cdot u,\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ и $C < \lambda_1$, то $\mathcal{U}_C$ содержит только функцию, равную нулю п.в. в Ω. Рассмотрим случай

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00160-а.

$\lambda_1 \leqslant C < \lambda_2$. Пусть имеется один функционал P, определенный следующим образом: $P(u) = \int_\Omega p(x)u(x)dx$, $p \in L_2(\Omega)$.

Теорема. *Для $u \in \mathcal{U}_C$ выполнено $P(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ п.в. в Ω тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2}{\lambda_k - C} < 0,$$

где p_k – коэффициенты Фурье $p(x)$ по системе собственных функций задачи $(*)$. Если $C = \lambda_1$ необходимым и достаточным условием будет условие $p_1 \neq 0$.

Литература

1. Чуешов И.Д. Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // Успехи мат. наук. 53:4 (1998), 77-124.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕДАХ

Сидоренко А.С. (Воронеж)

teormech@vgta.vrn.ru

Основу модели составляет уравнение установившегося конвективного теплопереноса для неньтоновской жидкости Оствальда-де-Вилля в цилиндрическом канале с учетом диссипации механической энергии и допущения о независимости теплофизических параметров от температуры. При этом в качестве параметров в это уравнение входили четыре критерия подобия: числа Рейнольдса, Прандтля, Эккерта и Эйлера.

Задача рассматривалась с граничными условиями первого рода для температуры.

Подобные постановки задач рассматривались в [1].

Решение уравнения конвективного теплопереноса искали методом разделения переменных в виде

$$T'(r', z') = f(r') + \sum_{j=1}^{\infty} R_j(\varepsilon_j, r') \cdot Z_j(\varepsilon_j, r'),$$

где $f(r'), R_j(\varepsilon_j, r'), Z_j(\varepsilon_j, r')$ — неизвестные пока функции, ε_j — корни соответствующего характеристического уравнения

$$J_0(\varepsilon) = 0,$$

здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

В ходе решения краевой задачи были получены выражения для искомых функций $f(r'), R_j(\varepsilon_j, r')$ и $Z_j(\varepsilon_j, r')$.

Предложенная математическая модель позволяет прогнозировать температурные поля с учетом диссипации механической энергии при течении неньютоновских жидкостей через цилиндрические каналы, а также анализировать влияние различных входных параметров на температуру.

Литература

1. Фройштетер, Г.Б. Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах [Текст]/ Г.Б. Фройштетер, С.Ю. Данилевич, Н.В. Радионова — Киев: Наукова думка, 1990. — 216 с.

О ВЛОЖЕНИИ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Функция $\psi(t)$ называется $\varphi-$ функцией, если $\psi(t)$ – непрерывная, неубывающая, вогнутая на отрезке $[0,1]$ функция, равная нулю в точке $t=0$ и имеющая в каждой точке интервала $(0,1)$ производную $\psi'(t)$. "Нижним"и "верхним"индексами $\varphi-$ функции $\psi(t)$ называются числа $\alpha_\psi = \underline{\lim}_{t\to+0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)}, \beta_\psi = \overline{\lim}_{t\to+0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)}$. Квазинормированное пространство Лоренца $\Lambda_{\psi,q}$ определяется как класс всех 1-периодических измеримых функций $f(x)$, для каждой из которых конечна квазинорма $\| f \|_{\psi,q}= \left\{ \int\limits_0^1 \left[\psi(t) \frac{1}{t} \int\limits_0^t f^*(x)dx \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}}$, где $f^*(x)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x)$.

Утверждение 1. Пусть даны числа q_1 и q_2 такие, что $0 < q_2 < q_1 < \infty$ и $\varphi-$ функции $\psi(t)$ и $\psi(t)$, причем $1 < \alpha_{\psi_2} \leqslant \beta_{\psi_2} < 2$ и $\int\limits_1^\infty (\frac{\psi_2(\frac{1}{x})}{\psi_1(\frac{1}{x})})^{\frac{q_1 q_2}{q_1-q_2}} \frac{dx}{x} = \infty$. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Тогда

$$H^\omega_{\psi_1,q_1} \subset \Lambda_{\psi_2,q_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^\infty \left(\int\limits_1^t \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{x})}{\psi_1(\frac{1}{x})} \right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1-q_2}} \frac{dx}{x} \right)^{-\frac{q_2}{q_1}} \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{t})}{\psi_1(\frac{1}{t})} \right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1-q_2}} \omega^{q_2}(\frac{1}{t}) \frac{dt}{t} < \infty.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268).

Утверждение 2. Пусть даны числа q_1 и q_2 такие, что $0 < q_2 < q_1 < \infty$ и φ- функции $\psi(t)$ и $\psi(t)$, причем $1 < \alpha_{\psi_2} \leqslant \beta_{\psi_2} < 2$ и $\int\limits_1^\infty (\frac{\psi_2(\frac{1}{x})}{\psi_1(\frac{1}{x})})^{\frac{q_1 q_2}{q_1-q_2}} \frac{dx}{x} = \infty$. Пусть $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ – модули непрерывности. Тогда $(k > 1)$

$$H^{\omega_1}_{\psi_1,q_1} \subset H^{\omega_2}_{\psi_2,q_2} \Leftrightarrow \left(\int\limits_1^k \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{2^t})}{\psi_1(\frac{1}{2^t})}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1-q_2}} \omega_1^{q_2}(\frac{1}{2^t})dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_k^\infty \left(\int\limits_1^t \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{2^x})}{\psi_1(\frac{1}{2^x})}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1-q_2}} dx\right)^{-\frac{q_2}{q_1}} \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{2^t})}{\psi_1(\frac{1}{2^t})}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1-q_2}} \omega^{q_2}(\frac{1}{2^t})dt\right)^{\frac{1}{q_2}} =$$

$$= O\{\omega_2(\frac{1}{2^k})\}.$$

О ВЛОЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

Симонов Б.В. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Через $H^\omega_{\psi,q}$ (класс Никольского) обозначается множество всех тех функций $f(x) \in \Lambda_{\psi,q}$, для которых $\omega_{\psi,q}(f,\delta) = O\{\omega(\delta)\}(\delta \to 0)$, где $\omega_{\psi,q}(f,\delta) = \sup\limits_{0 \leqslant h \leqslant t} \parallel f(x+h) - f(x) \parallel_{\psi,q}$.

Утверждение 1. Пусть даны числа q_1 и q_2 такие, что $0 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$ и $\varphi-$ функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, причем $1 < \alpha_{\psi_2} \leqslant \beta_{\psi_2} < 2$ и $\sup\limits_{t\in[0,1]} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = +\infty$, $\frac{\psi_2(\frac{1}{2^t})}{\psi_1(\frac{1}{2^t})}$ возрастает на $[1, +\infty)$. Пусть $\omega(\delta)-$ модуль непрерывности. Тогда

$$H^\omega_{\psi_1,q_1} \subset \Lambda_{\psi_2,q_2} \Leftrightarrow \int\limits_1^\infty \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{2^x})}{\psi_1(\frac{1}{2^x})}\right)^{q_2-1} \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{2^x})}{\psi_1(\frac{1}{2^x})}\right)' \omega^{q_2}(\frac{1}{2^x})dx < \infty.$$

Утверждение 2. Пусть даны числа q_1 и q_2 такие, что $0 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$ и $\varphi-$ функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, причем $1 < \alpha_{\psi_2} \leqslant \beta_{\psi_2} < 2$ и $\sup\limits_{t\in[0,1]} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = +\infty$, $\frac{\psi_2(\frac{1}{2^t})}{\psi_1(\frac{1}{2^t})}$ возрастает на $[1, +\infty)$. Пусть $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$- модули непрерывности. Тогда $(k > 1)$

$$H^{\omega_1}_{\psi_1,q_1} \subset H^{\omega_2}_{\psi_2,q_2} \Leftrightarrow \frac{\psi_2(\frac{1}{2^k})}{\psi_1(\frac{1}{2^k})}\omega_1(\frac{1}{2^k})+$$
$$+\left(\int\limits_k^\infty \left(\frac{\psi_2(\frac{1}{2^x})}{\psi_1(\frac{1}{2^x})}\right)^{q_2-1}\left(\frac{\psi_2(\frac{1}{2^x})}{\psi_1(\frac{1}{2^x})}\right)' \omega_1^{q_2}(\frac{1}{2^x})dx\right)^{\frac{1}{q_2}} = O\{\omega_2(\frac{1}{2^k})\}.$$

Утверждение 3. Пусть даны числа q_1 и q_2 такие, что $0 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$ и $\varphi-$ функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, причем $1 < \alpha_{\psi_2} \leqslant \beta_{\psi_2} < 2$ и $\sup\limits_{t\in[0,1]} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = +\infty$, $k \in N, T_k = \{x : \frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})} = 2^k\}, x_k = \min\limits_{x\in T_k} x$. Пусть $x_1 \in [M_1, M_1 + 1)$, где $M_1 \in N$. Тогда положим $r_1 = k$ $(k = 0, 1, ...)$, где k такое, что $x_{1+k} \in [M_1, M_1 + 1)$, но $x_{2+k} \geqslant M_1 + 1$. Пусть $x_{2+r_1} \in [M_2, M_2 + 1)$, где $M_2 \in N$. Тогда положим $r_2 = k$ $(k = 0, 1, ...)$, где k такое, что $x_{2+r_1+k} \in [M_2, M_2 + 1)$, но $x_{3+r_1+k} \geqslant M_2 + 1$. Аналогично выбираются $r_3, r_4, ...$ Пусть $\omega(\delta)-$ модуль непрерывности. Тогда

$$H^\omega_{\psi_1,q_1} \subset \Lambda_{\psi_2,q_2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty \left(2^{k+\sum_{i=1}^k r_i}\omega\left(2^{-x_{k+\sum_{i=1}^k r_i}}\right)\right)^{q_2} < \infty.$$

О ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА-ЛОРЕНЦА[1]

Симонов Б.В., Симонова И.Э. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Пространством Орлича-Лоренца $\Lambda(\varphi, w)$ называется множество измеримых функций $f(x_1, x_2)$ 2π- периодических по каждой переменной, для которых $\| f \|_{\varphi,w} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w(t_1, t_2)\varphi(f^*(t_1, t_2))dt_1dt_2 < +\infty$, где $f^*(t_1, t_2) = R_{21}f(t_1, t_2)$ $(R_{21}f = R_1(R_2f)$, где $R_2f(x_1, t_2)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 такая, что $R_2f(x_1, t_2)$ и $| f(x_1, x_2) |$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных x_1. Аналогичным образом переставляется $R_2f(x_1, t_2)$ по переменной x_1.) Пусть
$\Delta_{s_1}a_{n_1,n_2} = a_{n_1,n_2} - a_{n_1+s_1,n_2}, \Delta^{s_2}a_{n_1,n_2} = a_{n_1,n_2} - a_{n_1,n_2+s_2}$,
$\Delta^{s_2}_{s_1}a_{n_1,n_2} = \Delta_{s_1}(\Delta^{s_2}a_{n_1,n_2}), [a]$-целая часть числа a $g_{ij}(x_1, x_2)-$ сумма ряда $\sum\limits_{n_2=0}^\infty\sum\limits_{n_1=0}^\infty a_{n_1,n_2}f_i(n_1x_1)f_j(n_2x_2)$, где $i = 1, 2; j = 1, 2;$
$f_1(y) = \sin y, f_2(y) = \cos y$.

Утверждение. Пусть $k_1, k_2 \in N; a_{n_1,n_2} \to 0$ при $n_1 \to \infty$ и лю-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268).

бом фиксированном n_2 и при $n_2 \to \infty$ и любом фиксированном n_1; $\Delta_{k_1}^{k_2} a_{n_1,n_2} \geqslant 0$ для всех n_1, n_2; $\varphi \in \Phi$; $w \in W$.

1). Пусть $\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2} w_{k_1,k_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2 \leqslant c_1 \int\limits_{\frac{\delta_1}{2}}^{\delta_1}\int\limits_{\frac{\delta_2}{2}}^{\delta_2} w_{k_1,k_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2$ для любых $\delta_i \in (0, \frac{2\pi}{k_i})(i = 1,2)$, где $w_{k_1,k_2}(t_1,t_2) = \sum\limits_{m_2=0}^{k_2-1}\sum\limits_{m_1=0}^{k_1-1} w(t_1 + m_1\frac{2\pi}{k_1}, t_2 + m_2\frac{2\pi}{k_2})$, а c_1 не зависит от δ_1, δ_2. Тогда $\| g_{ij} \|_{\varphi,w} \leqslant c_2((i-1)(j-1)\int\limits_{\pi/r}^{2\pi/r} w_{k_1,k_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2 + \sum\limits_{n_2=0}^{\infty}\sum\limits_{n_1=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{2\pi}{(n_2+2)k_2}}^{\frac{2\pi}{(n_2+1)k_2}}\int\limits_{\frac{2\pi}{(n_1+2)k_1}}^{\frac{2\pi}{(n_1+1)k_1}} w_{k_1,k_2}(t_1,t_2)$ $dt_1dt_2 \sum\limits_{m_2=1}^{k_2}\sum\limits_{m_1=1}^{k_1} \varphi(a_{m_1+n_1k_1, m_2+n_2k_2}(n_1+1)(n_2+1))) = c_2B(i,j)$.

2). Пусть $w(t_1,t_2) = 0$ при почти всех $(t_1,t_2) \in [\pi 2^{-12-2k_1}, 2\pi] \times [\pi 2^{-12-2k_2}, 2\pi]$, или $\int\limits_0^{\pi 2^{-12-2k_2}}\int\limits_0^{\pi 2^{-12-2k_1}} w(t_1,t_2)dt_1dt_2 > 0$. Тогда

$\| g_{11} \|_{\varphi,w} \geqslant c_3B(1,1)$. где c_2, c_3 не зависят от $\{a_{n_2,n_2}\}$.

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ОБОБЩЁННОЙ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИЙ

Синегубов С.В. (Воронеж)

В работах [1–3] было введено понятие обобщённой выпуклости функций относительно пары произвольных средних величин. В докладе это определение рассмотрено для некоторых частных случаев.

Теорема 1.

1) функция является AA – выпуклой тогда и только тогда, когда она является выпуклой (в обычном смысле).

2) функция является AG – выпуклой тогда и только тогда, когда функция $\ln f$ является выпуклой.

3) функция является AH – выпуклой тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{f}$ является вогнутой.

4) функция является HA – выпуклой тогда и только тогда, когда функция $f(\frac{1}{x})$ является выпуклой.

5) функция является HA – выпуклой тогда и только тогда, когда функция $f(\frac{1}{x})$ является выпуклой.

6) функция является HG – выпуклой тогда и только тогда, когда функция $\ln(f(\frac{1}{x}))$ является выпуклой.

Таким образом можно сделать вывод, что понятие обобщённой выпуклости охватывает многие важные случаи обычной выпуклости или вогнутости функций.

Литература

1. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши – Буняковского методом средних значений и их приложения// Чернозёмный альманах научных исследований. Серия «Фундаментальная математика», 2005. № 1(1). С. 3–42.

2. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши – Буняковского// Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. «Физико-математические науки», 2000. № 9. С. 37–45.

3. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши – Буняковского// Вестник Самарской государственной экономической академии, 2002. № 1(8). С. 302–313.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

Ситник С.М. (Воронеж)
mathsms@yandex.ru

Определение 1. Назовем неотрицательную функцию MN - выпуклой относительно пары произвольных средних (M, N), если для всех $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, выполнено неравенство

$$f(M(x,y)) \leqslant N(f(x), f(y)). \tag{1}$$

В частности, обычные выпуклые функции по данному определению есть AA - выпуклые, а логарифмически выпуклые функции есть AG - выпуклые, где A – арифметическое, G – геометрическое средние. При противоположном выборе знака в (1) получаем обобщение определения вогнутой функции. Данное определение также можно в свою очередь далее обобщать, используя более чем два абстрактных средних.

Получено описание разделяющих функций, для которых в определении (1) достигается равенство. Построен аналог второй производной, с помощью которого можно охарактеризовать достаточно гладкие обобщённо - выпуклые и вогнутые функции. Сумма этих величин по каждой переменной является аналогом оператора Лапласа, можно также определить обобщённые гармонические, суб - и супергармонические функции. Для указанной новой ситуации рассмотрены некоторые классические вопросы выпуклого анализа: условия существования интегрального представления MN - выпуклой функции, аналоги преобразования Лежандра и теоремы Хермандера.

Введенное понятие обобщённой выпуклости может быть использовано для уточнения классических результатов о выпуклости некоторых специальных функций или связанных с ними величин (например, их корней).

Данное определение MN - выпуклых функций позволяет обобщить определения классов и пространств Орлича в указанном направлении.

Определение 2. Пусть дана абсолютно непрерывная неотрицательная MN - выпуклая функция $r(x)$, заданная на отрезке $[0, 1]$, монотонно возрастающая и удовлетворяющая условию $r(0) = 0$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит соответствующему классу Орлича $L(M, N, r(x), [0, 1])$, если конечен интеграл $\int_0^1 r(f(x))\,dx < \infty$.

О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Солдатенков А.О. (Москва)
a_ sold@mail.ru

Рассмотрим в области $Q = (0, l) \times (0, T)$ одномерное гиперболическое уравнение

$$u_{tt} = (a(x)u_x)_x,$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u^0(x),\ u_t(x, 0) = u^1(x),$$

где $u^0(x) \in L_2(0, l)$, $u^1(x) \in H^{-1}(0, l)$ (определение пространства $H^{-1}(0, l)$ см., например в [1]).

Рассмотрим задачу нахождения по заданным $u^0(x)$ и $u^1(x)$ граничных условий $u(0, t) = \nu(t) \in L_2(0, T)$, $u(l, t) = \mu(t) \in L_2(0, T)$, обеспечивающих выполнение соотношений

$$u(x, T) = 0,\ u_t(x, T) = 0. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $a(x) \in C^1[0,l]$, $a(x) \geqslant a_0 > 0$ для всех $x \in [0,l]$, и что существуют $x_0 \in (0,l)$ и $\gamma \in (0,1]$, такие что $(x - x_0)a'(x) \leqslant (1-\gamma)a(x)$ при всех $x \in [0,l]$. Обозначим $M = \max(x_0, l - x_0)$ и $T_0 = \frac{2M}{\gamma\sqrt{a_0}}$. Известно (см. [2]), что при достаточно больших T для любых $u^0(x)$ и $u^1(x)$ из указанных выше пространств существует единственная пара функций $\nu(t) = \nu^*(t)$ и $\mu(t) = \mu^*(t)$, обеспечивающих выполнение условий (1) и минимизирующих интеграл

$$\int\limits_0^T \left(\nu^2(t) + \mu^2(t)\right) dt. \tag{2}$$

Теорема. *При выполнении перечисленных выше условий для всех $T > T_0$ существует единственная пара функций $\nu(t) = \nu^*(t)$ и $\mu(t) = \mu^*(t)$, обеспечивающих выполнение (1) и минимизирующих интеграл (2). При этом существуют положительные константы T_1, C_1, C_2, зависящие от $a(x)$, γ, M, такие, что при $T > T_0$ справедливы неравенства*

$$C_1 \tfrac{(T-T_0)}{(T+T_1)^2} \left\|(u^0, u^1)\right\|^2 \leqslant \int_0^T \left((\nu^*(t))^2 + (\mu^*(t))^2\right) dt \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \tfrac{(T+T_1)}{(T-T_0)^2} \left\|(u^0, u^1)\right\|^2,$$

где $\left\|(u^0, u^1)\right\|^2 = \left\|u^0\right\|^2_{L_2(0,T)} + \left\|u^1\right\|^2_{H^{-1}(0,T)}$.

Литература

[1] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[2] Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. // SIAM Rev., 1988, V. 30, N. 1, P. 1-68.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С УЧЕТОМ РИСКОВ

Сорокин К.С. (Москва)

Constantine.Sorokin@gmail.com

Рассматривается следующая многокритериальная динамическая задача при неопределённости:

$$\Gamma = \langle \Sigma, \zeta, \mathfrak{U}_z, \mathrm{Z}, \{J_i(U, z, t_0, x_0)\}_{i=1..n} \rangle.$$

Здесь $\Sigma \div \dot{x} = A_1(t)x + B(t)u + C(t)y + a_1(t),\ x(t_0) = x_0,\ \zeta \div \dot{y} = A_2(t)y + a_2(t)\ , y(t_0) = z,\ x \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^l$; время — $t \in [t_0, T]$; множество стратегий ЛПР: $\mathfrak{U}_z = \{U \div u(t,x,y) \mid u(t,x,y) = P(t)x + Q(t)y + p(t), \forall P(\cdot), Q(\cdot), p(\cdot) \in \mathrm{C}^1[t_0,T]\}$; множество неопределённостей: $Z \div \mathbb{R}^k$; критерии ($n \geqslant 2$):

$$J_i(U,z,t_0,x_0) = x'(T)C_i x(T) + c_i' x(T) + \int_{t_0}^{T}\{u' D_i u + d_i' u + y' L_i y + l_i' y + x' G_i x + g_i' x + x' M_i y + x' K_i u + u' N_i y\}\, dt;\quad i = 1..n,$$

здесь x и y — решения соответственно Σ и ζ, u — реализация позиционной стратегии $u(t,x,y)$; $A_1(t), a_1(t), A_2(t), a_2(t), B(t), C(t) \in \mathrm{C}[t_0,T]$, постоянные матрицы $D_i, L_i, G_i,\ M_i, K_i, N_i$ и векторы c_i, l_i, g_i — соответствующих размерностей.

Следуя [1], для каждого критерия вводится функция риска:

$$\Phi_i(U,z,t_0,x_0) = \max_{U \in \mathfrak{U}_z} J_i(U,z,t_0,x_0) - J_i(U,z,t_0,x_0) \quad (i = 1..n),$$

и задаче Γ ставится в соответствие $2n$-критериальная задача:

$$\overline{\Gamma} = \langle \Sigma, \zeta, \mathfrak{U}_z, \mathrm{Z}, \{J_i(U,z,t_0,x_0), -\Phi_i(U,z,t_0,x_0)\}_{i=1..n}\rangle.$$

В работе на основе подходящего варианта метода динамического программирования строятся функции риска каждого критерия; формализуется и находится явный вид гарантированного по исходам и рискам решения Γ, основанного на понятии седловой точки по Парето из [1] в задаче $\overline{\Gamma}$; указывается вариант метода динамического программирования для отыскания векторной гарантии по исходам и рискам.

Литература

[1] В. И. Жуковский, М. Е. Салуквадзе. Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. Москва–Тбилиси: Интелекти, 2004.
[2] В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МОДУЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ В СРЕДНИХ СПЕЦИАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ

Стацинская Л.В. (Тамбов)

Модульная система обучения представляет собой разделение образовательного стандарта на отдельные учебные модули. Под модулем понимается логически завершенная часть учебного материала, определенный блок знаний, которому присуще целостность, относительная независимость, логическая завершенность. Модуль – это набор информации или действий, достаточный для формирования тех или иных профессиональных знаний и навыков будущего специалиста.

Структура модуля предполагает определение целей изучения, определение схемы модуля, его содержания и библиографии. Должны быть определены связи с другими модулями. Схема модуля определяется спецификой содержащихся в нем дисциплин и описывает наиболее важные моменты теоретического и практического усвоения данного модуля. Содержание модуля может быть достаточно глубоким и включать обязательную и факультативную части. Изучение модуля предполагает проведение лекционных, практических и лабораторных занятий, а также самостоятельную работу студентов под контролем преподавателя.

При модульной системе обучения студент получает возможность самостоятельно работать над усвоением учебной программы и более полно реализовывать свои способности и наклонности. Используя модульную структуру образовательных программ, студент может сам выбирать ту или иную образовательную траекторию.

Введение модульной системы позволяет значительно улучшить качество обучения за счет оптимизации и структурирования содержания курсов, индивидуализации образовательных программ, улучшения контроля успеваемости. При модульной системе обучения возможно введение дифференциации оценивания степени усвоения учебного материала по сложности.

Введение модульной системы обучения, использование ее в учебном процессе открывает новые возможности для реализации потребности студента в развитии творческого потенциала, увеличивает объем его самостоятельной работы, устанавливает единые уровни компетентности и максимально снижает субъективность оценки.

О ВЫВОДЕ И ОБОСНОВАНИИ НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЙ ИСЧИСЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Степин С.А., Фирсов К.М. (Москва)
shrthealm@mail.ru

Формальное логарифмирование обеих частей равенства $\exp D = 1 + \Delta$ приводит к формуле Грегори $D = \Delta - \Delta^2/2 + \Delta^3/3 - \ldots$, представляющей оператор дифференцирования D в виде ряда по степеням разностного оператора Δ: $f(z) \mapsto f(z+1) - f(z)$. Она верна для многочленов (см. [1]) и распространяется на степенные ряды с достаточно быстро убывающими коэффициентами. Это условие, по существу, является ограничением на рост функции, представленной таким рядом. Точную границу экспоненциального типа роста целых функций, для которых справедлива формула Грегори, дает

Теорема 1. *Для целых функций f экспоненциального типа $\sigma = \limsup\limits_{|z|\to\infty} |z|^{-1} \ln |f(z)| < \ln 2$ имеет место соотношение*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n f(z).$$

Доказательство использует интегральное представление целых функций с помощью преобразования Бореля в виде разложения по экспонентам. Этот подход применим также для обоснования формулы Эйлера-Маклорена, которая получается из равенства $\exp D - 1 = \Delta$ формальным обращением обеих его частей.

Теорема 2. *В классе целых функций экспоненциального типа равенство*

$$\int\limits_z^{z+1} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2}\big[f(z) + f(z+1)\big] + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\big[D^{k-1} f(z) - D^{k-1} f(z+1)\big],$$

где B_k – числа Бернулли, – справедливо, если $\sigma < 2\pi$, причем эта граница типа роста f неулучшаема.

Теоремы 1 и 2 могут быть дополнены оценками соответствующих остаточных членов (ср. [2]), что представляет интерес для численных методов анализа. Формальные символьные вычисления с рядами и полученными с их помощью функциями от операторов D и Δ дают систематический способ выписывания некоторых других (в том числе и новых) формул теории квадратур и интерполяции, что имеет важное учебно-методическое значение. Предложенный подход иллюстрирует и проясняет взаимосвязь между различными соотношениями классического анализа и допускает развитие приме- нительно к теории полугрупп.

Литература

1. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Элементы функционального ана-лиза, М.:Наука, 1965.

2. А.О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей, М.: КомКнига, 2006.

О РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ[1]

Сумин М.И., Трушина Е.В. (Нижний Новгород)

m.sumin@mm.unn.ru

Рассматривается задача оптимального управления

$$I_0(u) \to \inf,\ I_j(u) \leqslant 0,\ j = 1, \dots, k,\ I_j(u) = 0,\ j = k+1, \dots, l, \quad (P)$$

где $u \in D \equiv \{u \in L_\infty^m(0,T) : u(t) \in U \text{ п.в. на } (0,T)\}$, $U \subset R^m$ — компакт, $x[u](t)$, $t \in [0,T]$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ x(0) = x_0, \quad x \in R^n,$$

а функционалы I_j, $j = 0, \dots, l$, являются обычными функционалами типа Больца. Исходные данные задачи (P) удовлетворяют традиционным для теории оптимального управления условиям и считаются известными приближенно. Ошибка задания исходных данных характеризуется величиной $\delta \geqslant 0$.

В условиях приближенно известных данных классического понятия оптимального элемента не достаточно для развития адекватной содержательной теории необходимых и достаточных условий [1]. В докладе в качестве "базового" понятия теории предлагается рассматривать не классическое понятие оптимального элемента, а понятие

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460).

минимизирующей последовательности (м.п.) допустимых управлений в смысле Дж. Варги, т.е. последовательности $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$I_0(u^i) \leqslant \beta + \gamma^i,\ u^i \in \mathcal{D}^{\alpha^i},\ \gamma^i, \alpha^i > 0,\ \gamma^i,\ \alpha^i \to 0,\ i \to \infty,$$

$$\mathcal{D}^\alpha \equiv \{u \in \mathcal{D} : I_j(u) \leqslant \alpha,\ j = 1, \ldots, k,\ |I_j(u)| \leqslant \alpha,\ j = k+1, \ldots, l\},$$

β – значение задачи (P), отвечающее указанному понятию м.п.

В докладе обсуждаются: 1) необходимые и достаточные условия для м.п.; 2) регуляризирующие свойства м.п. и принципа максимума Понтрягина при условии согласованного стремления к нулю ошибки δ и параметра α, на который естественно смотреть как на параметр регуляризации; 3) иллюстративные примеры.

Литература

1. Сумин М.И., Трушина Е.В. Параметрическая задача оптимизации систем с приближенно известными исходными данными // Вестник Нижегородского университета. Серия Математика. 2006. №1(4). С.114-128.

О КОМПЛЕКСНЫХ СЛЕДАХ ГИПЕРБОЛЫ

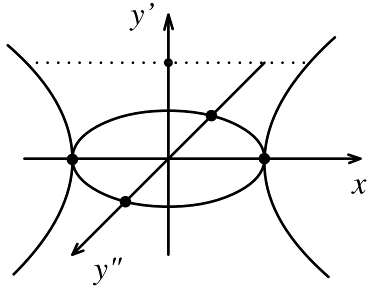
Телкова С.А. (Воронеж)

В работе рассматривается возможность расширения гиперболы из R^2 в $R \otimes C$. Пусть K — некоторое поле, а $f_1, ..., f_s$ множество полиномов в $K[x_1, ..., x_n]$. Аффинным многообразием, индуцированным корнями полиномов f_i называется

$$V(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n : f_i(a_1, ..., a_n) = 0 \quad \forall \quad 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Классические методы проективной геометрии реализуют гиперболу как $V = U \cap W$, однако наличие точек зацепления не позволяет параметризовать полученное отображение, и как следствие представить его в виде пересечения аффинных многообразий.

На рисунке показана простейшая гипербола, полученная вытягиванием следа канонической кривой при изменении параметра x. Особенностью данного случая является то, что кривая расширенного пространства является сопряженной с исходной гиперболой — эллипсом. Заметим, что аналогичное моделирование поведения эллипса приведет к появлению в расширенном пространстве сопряженной ему гиперболы.



ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ[1]

Теляковский Д.С. (Москва)
dtelyakov@mail.ru

Пусть функция $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки x^0. Если найдутся такое множество E, у которого x^0 является точкой плотности (относительно n-мерной меры Лебега), такая линейная форма $du(x^0, x)$ и такая квадратичная форма $d^2u(x^0, x)$, для которых

$$u(x) = u(x^0) + du(x^0, x) + d^2u(x^0, x) + o(\|x - x^0\|^2),\ x \to x^0,\, x \in E,$$

то квадратичная форма $d^2u(x^0, x)$ называется вторым асимптотическим дифференциалом $u(x)$ в точке x^0. Ясно, что если в некоторой точке функция $u(x)$ имеет второй дифференциал в обычном смысле, то в этой точке $u(x)$ имеет и асимптотический второй дифференциал и эти дифференциалы совпадают.

Пусть функция $u(x)$ имеет в точке x^0 второй дифференциал d^2u. Так как значение оператора Лапласа Δu в x^0 равно следу матрицы квадратичной формы d^2u, то выполнение уравнения Лапласа в x^0 для $u(x)$ означает равенство следа матрицы d^2u нулю. Если след матрицы квадратичной формы второго асимптотического дифференциала функции $u(x)$ в точке x^0 равен нулю, то $u(x)$ называется асимптотически гармонической в x^0.

Теорема. *Если асимптотически гармоническая в каждой точ-*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00962).

ке области функция $u(x)$ суммируема, то $u(x)$ является гармонической.

Эта теорема является аналогом теорем о голоморфности асимптотически моногенных функций [1–3].

Литература

1. Д. Е. Меньшов. *Об асимптотической моногенности.* Матем. сборник, 1936, т. 1(43), с. 189–210.

2. Д. С. Теляковский. *Об асимптотически моногенных функциях.* Труды МИ РАН, 1992, т. 198, с. 186–193.

3. Е. П. Долженко. *Работы Д.Е. Меньшова по теории аналитических функций и современное состояние теории моногенности.* УМН, 1992, т. 47, вып. 5(287), с. 67–96.

ДВУМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАСТАХ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Толпаев В.А., Палиев В.В. (Ставрополь)

pm@ncstu.ru

В естественных условиях продуктивные пористые пласты, содержащие воду, нефть или газ (кратко - флюиды) имеют искривленную форму и переменную толщину. Поскольку подошва и кровля продуктивных пластов чаще всего непроницаемы, то и движения флюидов в них с достаточной точностью можно моделировать как двумерные. Для этого за поверхности тока во всём пласте принимаются координатные поверхности $\zeta = const$ ортогональной расчетной системы координат ξ, η, ζ выбираемой так, чтобы поверхности подошвы и кровли совпадали с зафиксированными координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = const$ и $\zeta = \zeta_2 = const$. При таком подходе для расчета приведенного давления $P(\xi, \eta, t)$ в рассматриваемом пласте с проницаемостью $K = k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)$ (где k_0 — постоянный размерный коэффициент, а $k(\xi, \eta, \zeta)$ — положительная непрерывная безразмерная функция) авторами выведено уравнение

$$\frac{k_0}{\mu} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[T_1(\xi, \eta) \cdot \rho(P) \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T_2(\xi, \eta) \cdot \rho(P) \cdot \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} = \\ = T_3(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{ [\rho(P) + g(P)] \cdot m(P) \},$$

в котором μ — коэффициент динамической вязкости флюида, а через T_1, T_2 и T_3 обозначены переменные коэффициенты, определяемые через параметры Ламе криволинейной системы координат по формулам $T_1(\xi,\eta) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{H_2(\xi,\eta,\zeta)\cdot H_3(\xi,\eta,\zeta)}{H_1(\xi,\eta,\zeta)} \cdot k(\xi,\eta,\zeta)\cdot d\zeta,$

$$T_2(\xi,\eta) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{H_1(\xi,\eta,\zeta)\cdot H_3(\xi,\eta,\zeta)}{H_2(\xi,\eta,\zeta)} \cdot k(\xi,\eta,\zeta)\cdot d\zeta,$$

$$T_3(\xi,\eta) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_1(\xi,\eta,\zeta)\cdot H_2(\xi,\eta,\zeta)\cdot H_3(\xi,\eta,\zeta)\cdot d\zeta.$$

Для получения конкретной математической модели, описывающей изотермические фильтрационные течения, остается дополнительно задать функции $\rho=\rho(P)$, $k=k(\xi,\eta,\zeta)$, $m=m(P)$ и $g=g(P)$, определяющие физические свойства флюида и пористой среды.

ПОСТРОЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕКОМПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Ухоботов В.И., Зайцева О.В. (Челябинск)

ukh @ csu.ru

В работе рассматривается декомпозиционная задача управления

$$\dot{z} = -C(t)u - f_1(t,\theta,u), \dot{\theta} = f_2(t,\theta,v), z \in R^n, \theta \in R^m, t \leqslant p. \qquad (1)$$

Непрерывная матрица $C(t)$ является невырожденной. Выбор управления стеснен геометрическим ограничением $u \in A(\alpha(t))$. Здесь многогранник $A(y) = \{z \in R^n : < x_j, z > \leqslant y_j, j = 1, ..., l\}$ определяется заданными векторами $x_j \in R^n$. Существует конус $K \subset R^l$ такой, что многогранник $A(y) \neq \varnothing \Longleftrightarrow y \in K$. Функция $\alpha(t) \in K$ и на каждом конечном отрезке $[q,p]$ имеет ограниченную вариацию. Значение помехи в каждый момент времени t находится в известном множестве $V(t)$. Задана функция $F(\theta) \in K$. Требуется построить такое управление $u(t,z,\theta) \in A(\alpha(t))$, чтобы при любой помехе $v(t,z,\theta) \in V(t)$ выполнялись включения

$$z(p) \in A(F(\theta(p))), F(\theta(p)) \in K. \qquad (2)$$

Считается, что многогранник удовлетворяет условию аддитивности: $y \in K, y_* \in K \Rightarrow A(y + y_*) = A(y) + A(y_*)$. Построена функция $g(t,\theta) \in K$ такая, что $g(p,\theta) = F(\theta)$ и семейство множеств

$A(g(t,\theta))$ является стабильным мостом [1]. Приведен алгоритм построения управления $u(t,z,\theta) \in U(t)$, которое обеспечивает выполнение включений (2). Рассмотрены конкретные примеры. В частности, к рассмотренному классу задач (1) сводится игровая задача о встрече на плоскости (x,y) в заданный момент времени p управляемой материальной точки, движущейся под действием управляемой силы и силы, линейно зависящей от скорости и координат, с автомобилем [2].

Литература

1. Красовский Н.Н.,Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Фам Туан Кыонг (Воронеж)

tuancuonghd@yahoo.com

Задача на интервале $[a,b]$

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x) \\ \qquad\qquad u(a) = 0, u'(b) + \delta u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем $p, p', q \in C[a,b]$

$$0 < p_0 \leqslant p(x) \leqslant p_1(x), q_0 \leqslant q(x) \leqslant q_1(x), 0 \leqslant \delta. \tag{2}$$

Теорема *Пусть u^* — обобщение решение краевой задачи, u_n^* — приближенное решение, найденное методом Ритца. Тогда удовлетворяет оценка: $||u^* - u_n^*|| \leqslant ch^2||f||$.*

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ВЗВЕШЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ[1]

Филиновский А.В. (Москва)
flnv@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$ — неограниченная область с гладкой границей. При изучении первой смешанной задачи для волнового уравнения в неоднородной среде

$$u_{tt} - \frac{1}{\rho(x)} \Delta u = 0,$$

где $\rho(x) \in C(\overline{\Omega})$ — положительная функция (плотность среды), возникает задача о спектральных свойствах оператора $l = -\frac{1}{\rho(x)}\Delta$.

Обозначим через $L_{2,\rho}(\Omega)$ гильбертово пространство комплекснозначных функций $v(x)$ с нормой

$$\|v\|_{L_{2,\rho}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^2 \rho(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Пусть L_0 — оператор в $L_{2,\rho}(\Omega)$, определяемый дифференциальным выражением l на множестве $\overset{0}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ (функции из $C^\infty(\Omega)$, носитель которых компактен в Ω). Оператор L_0 — симметричный неотрицательный оператор в $L_{2,\rho}(\Omega)$. Пусть L_1 — замыкание L_0 в пространстве $L_{2,\rho}(\Omega)$, а L — его самосопряженное расширение по Фридрихсу. Для оператора L известны условия на функцию ρ и область Ω, обеспечивающие дискретность спектра оператора L ([1], [2]). В случае $\Omega = R^n$ известны также достаточные условия непрерывности спектра оператора L ([3]).

В данной работе для случая $\rho(x) = r^{-\beta}$, $r = |x|$, в областях Ω с границами, звездными относительно начала координат, устанавливаются оценки резольвенты оператора L и ее производной по спектральному параметру. Существует критическое значение параметра

[1]Работа выполнена при поддержке грантов НШ-1464.2003.1 и РФФИ-04-01-00618.

β, при котором спектр оператора L становится дискретным. С использованием полученных оценок изучается поведение резольвенты при переходе от непрерывного спектра к дискретному.

Литература

[1] Lewis R.T. //Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 271. P. 653–666.

[2] Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 64. М.: Изд-во ВИНИТИ. 1989.

[3] Eidus D.M. // Journal of Funct. Anal. 1991. V. 100. P. 400–410.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ И РЯДАХ С КОМПЛЕКСНЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Фомин В.И. (Тамбов)

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $C_{L(E)} = \{Z = X + \Im Y \mid X, Y \in L(E)\}$ — банахово пространство комплексных операторов с нормой $\|Z\| = \sqrt{\|X\|^2 + \|Y\|^2}$ (здесь $\Im = \sqrt{-I}$ — мнимая операторная единица; определение $C_{L(E)}$ см. в [1]). Рассмотрим последовательность $Z_n = X_n + \Im Y_n$, $n \in N$, элементов из $C_{L(E)}$. Пусть $Z_0 = X_0 + \Im Y_0 \in C_{L(E)}$. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} Z_n = Z_0 \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{n\to\infty} X_n = X_0\right) \wedge \left(\exists \lim_{n\to\infty} Y_n = Y_0\right)$$

(везде сходимость по норме соответствующего пространства), т.е. вопрос о сходимости последовательности элементов из $C_{L(E)}$ сводится к вопросу о сходимости двух последовательностей элементов из $L(E)$.

Рассмотрим ряд с членами $Z_n = X_n + \Im Y_n$, $n \in N$ из $C_{L(E)}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ сходится к $S = S^{(1)} + \Im S^{(2)} \Leftrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ сходится к $S^{(1)}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ сходится к $S^{(2)}$, т.е. вопрос о сходимости ряда с членами из $C_{L(E)}$ сводится к вопросу о сходимости двух рядов с членами из $L(E)$.

Литература

1. Фомин В.И. // Сб. матер. шк. "Современные методы теории функций и смежные проблемы 27 января - 2 февраля 2007 г. Воронеж, 2007. С. 232-233.

ОБ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЯХ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПЕРЕМЕННОГО (ТФКОП)

Фомин В.И. (Тамбов)

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $C_{L(E)} = \{Z = X + \Im Y \,|X, Y \in L\,(E)\}$ — банахово пространство комплексных операторов с нормой $\|Z\| = \sqrt{\|X\|^2 + \|Y\|^2}$ (здесь $\Im = \sqrt{-I}$ — мнимая операторная единица). Рассмотрим функцию

$$W = F\,(Z) = U\,(X, Y) + \Im V\,(X, Y)\,,$$

где $F : D\,(F) \subseteq C_{L(E)} \to C_{L(E)}$. Пусть $Z_0 = X_0 + \Im Y_0$ — предельная точка множества $D(F)$, $W_0 = U_0 + \Im V_0 \in C_{L(E)}$. Тогда

$$\exists \lim_{Z \to Z_0} F\,(Z) = W_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{X \to X_0 \\ Y \to Y_0}} U\,(X, Y) = U_0,\ \exists \lim_{\substack{X \to X_0 \\ Y \to Y_0}} V\,(X, Y) = V_0,$$

т.е. вопрос о существовании предела комплексно-операторной функции комплексного операторного аргумента сводится к вопросу о существовании пределов двух действительных операторных функций двух действительных операторных аргументов (действительные операторы — это, по определению, операторы из $L(E)$). Следовательно, вопрос о непрерывности комплексно-операторной функции комплексного операторного аргумента сводится к вопросу о непрерывности двух действительных операторных функций двух действителных операторных аргументов. Пусть $D(F)$ — открытое множество. Функция $W = F(Z)$ называется дифференцируемой в точке $Z_0 \in D(F)$, если $\exists\, \Psi \in C_{L(E)}, \exists\, O_\delta\,(Z_0)\ |\,\forall\, H \in D\,(F) :\ Z_0 + H \in O_\delta\,(Z_0)$ выполняется: $F\,(Z_0 + H) - F\,(Z_0) = \Psi H + \omega\,(H)$, где $\|\omega\,(H)\| = o\,(\|H\|)$ при $H \to 0$, при этом, Ψ называется производной функции $F(Z)$ в точке $Z_0 :\ F'\,(Z_0) = \Psi$ (определение произведения комплексных операторов см. в [1]). Как и в ТФКП, под аналитичностью функции $F(Z)$ в точке $Z_0 \in D(F)$ понимается ее дифференцируемость в некоторой окрестности этой точки; под аналитичностью на открытом множестве $D \subseteq D\,(F)$ — ее аналитичность в каждой точке этого множества.

Литература

1. Фомин В.И. // Сб. матер. шк. "Современные методы теории

функций и смежные проблемы 27 января - 2 февраля 2007 г. Воронеж, 2007. С. 232-233.

О ВТОРОМ СЛУЧАЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Фомин В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} A_i u^{(n-i)} = f\left(t\right), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

где $A_0 = I, A_i \in L\left(E\right), 1 \leqslant i \leqslant n; f\left(t\right) \in C\left(\left[0, \infty\right); E\right)$, и характеристическое операторное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \Lambda^{n-i} = O \tag{2}$$

для соответствующего однородного уравнения. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f\left(t\right) = e^{At}[\left(\cos Bt\right) S_m\left(t\right) + \left(\sin Bt\right) W_l\left(t\right)] \tag{3}$$

где $A, B \in L\left(E\right)$; $S_m\left(t\right) = \sum\limits_{i=0}^{m} s_i t^{m-i}$, $s_i \in E$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $s_0 \neq \Theta$; $W_l\left(t\right) = \sum\limits_{i=0}^{l} w_i t^{l-i}$, $w_i \in E$, $0 \leqslant i \leqslant l$, $w_0 \neq \Theta$; $\cos Bt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-1\right)^k \frac{\left(Bt\right)^{2k}}{\left(2k\right)!}$, $\sin Bt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-1\right)^k \frac{\left(Bt\right)^{2k+1}}{\left(2k+1\right)!}$. Тогда, если комплексный оператор $A + \Im B$ не является корнем уравнения (2), то при выполнении некоторых условий существует частное решение уравнения (1) вида

$$u_* = e^{At}[\left(\cos Bt\right) U_N\left(t\right) + \left(\sin Bt\right) V_N\left(t\right)], \tag{4}$$

где $N = \max\left\{m, l\right\}; U_N(t), V_N(t)$ — многочлены степени N действительной переменной t с векторными коэффициентами из E. Если $A + \Im B$ является корнем кратности r уравнения (2), то в правой части формулы (4) нужно записать дополнительный множитель t^r. Случай $f(t) = e^{At} S_m(t)$ рассмотрен в [1].

Литература

1. Фомин В.И. Сб. матер. шк. “Понтрягинские чтения- XVII”, 3 - 9 мая 2006 г. Воронеж, 2006. С. 213 - 214.

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОПЕРАТОРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОЛУПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ

Фролова Е.В. (Липецк)
lsn@lipetsk.ru

Различные задачи механики сплошных сред и теории упругих оболочек приводятся к уравнению с частными интегралами вида $x = Kx + f$. Условия разрешимости такого уравнения зависят от спектральных свойств определяющего его оператора и пространства функций, в котором исследуется уравнение. В заметке приводится достаточное условие фредгольмовости уравнения $x = Kx + f$ и соответственно оператора $I - K$, где K — оператор с частными интегралами вида

$$(Kx)(t,s) = \int_a^{+\infty} l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma +$$

$$+ \int_a^{+\infty}\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

в пространстве $C(D) = C([a,+\infty) \times [c,d])$ — непрерывных и ограниченных на D функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_D |x(t,s)|$. Здесь $t,\tau \in [a,+\infty)$, $s,\sigma \in [c,d]$, l,m,n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема. *Пусть* $l(t,s,\tau) = \sum_{i=1}^p l_i(t,s)a_i(\tau)$, $m(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^q m_j(t,s)b_j(\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{k=1}^r n_k(t,s)c_k(\tau,\sigma)$, *где* l_i $(i = 1,\ldots,p)$, m_j $(j = 1,\ldots,q)$, n_k $(k = 1,\ldots,r)$ *— непрерывные функции, удовлетворяющие условиям* $l_i(t,s) < e^{-\lambda t} \cdot P_i(t)$, $m_j(t,s) < e^{-\lambda t} \cdot Q_j(t)$, $nk(t,s) < e^{-\lambda t} \cdot R_k(t)$, $\lambda > 0$, $P_i(t)$, $Q_j(t)$, $R_k(t)$ *— некоторые многочлены;* $\int_a^{+\infty} |a_i(\tau)|d\tau <$

$A < \infty$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\int_c^d |b_j(\sigma)| d\sigma < B < \infty$ $(j = 1, \ldots, q)$, $\int_a^{+\infty} \int_c^d |c_k(\tau, \sigma)| d\sigma d\tau < C < \infty$ $(k = 1, \ldots, r)$; системы функций $\{a_i \mid i = 1, \ldots, p\}$, $\{b_j \mid j = 1, \ldots, q\}$ ортонормированы. Тогда оператор K действует в пространстве $C(D)$. Пусть дополнительно $|D_1(s)| = \big||\delta_{ik} - \mu_{ik}(s)|\big| > \alpha > 0$, $|D_2(t)| = \big||\delta_{jl} - \nu_{jl}(t)|\big| > \beta > 0$, где $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\mu_{ik}(s) = \int_a^{+\infty} a_i(\tau) l_k(\tau, s)\, d\tau$ $(i, k = 1, \ldots, p)$, $\delta_{jl} = 1$ при $j = l$, $\delta_{jl} = 0$ при $j \neq l$, $\nu_{jl}(t) = \int_c^d b_j(\sigma) m_l(t, \sigma) d\sigma$ $(j, l = 1, \ldots, q)$. Тогда оператор $I - K$ и уравнение $x = Kx + f$ фредгольмовы.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ВЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ

Хващевская Л.Ф. (Иркутск)

Рассматривается управляемый процесс, описываемый задачей

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x^4}\, d\tau = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_0(t), \qquad u(1,t) = \nu_0(t), \tag{3}$$

$$u_{xx}(0,t) = \mu_2(t), \qquad u_{xx}(1,t) = \nu_2(t), \tag{4}$$

в которой функции $\mu_i(t)$ и $\nu_i(t)$, $i = 0, 2$ являются управляющими функциями. Предполагается, что существует классическое или обобщенное решение задачи (1)-(4). Требуется определить момент времени $T > 0$ и соответствующие ему управляющие функции $\mu_i(t)$ и $\nu_i(t)$, $i = 0, 2$, такие, чтобы определяемое ими решение $u(x,t)$ задачи (1)-(4) удовлетворяло условиям

$$u(x,T) = u_t(x,T) \equiv 0, \quad 0 < x < 1.$$

Показано, что в рассмариваемой задаче управления колебаниями вязкоупругой балки с помощью граничных управляющих воздействий начальные возмущения можно погасить за конечное время $T = \frac{a}{\pi}$, полагая $\mu_0(t) = \nu_0(t) \equiv 0$, $\mu_2(t) = \mu_2^0(t)$, $\nu_2(t) = \nu_2^0(t)$. Для определения функций $\mu_2^0(t)$ и $\nu_2^0(t)$ получены соотвествующие формулы.

Литература

1. Мальцев Л.Е. Приближенное решение некоторых динамических задач вязкоупругости // Механика полимеров. – 1978. – № 2. – с. 210-218.

2. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. – М.: Физматлит., 2004.

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Хубиев К.У. (Нальчик)

niipma@mail333.com

Рассмотрим нагруженное ([1]) уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + au_x + cu + \mathbf{M}_0 u = f_0(x,y), & (x,y) \in \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \mathbf{M}_k u = f_k(x,y), & (x,y) \in \Omega_k,\ k = 1,2, \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \left(\bigcup\limits_{k=0}^{2} \Omega_k\right) \cup I_1 \cup I_2$, где Ω_0 — область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0, x = r, y = h > 0$ соответственно, Ω_1 — область, ограниченная отрезком AE оси x и характеристиками уравнения (1) $AC_1:\ x + y = 0$, $EC_1:\ x - y = r_1$, Ω_2 — область, ограниченная отрезком EB оси x и характеристиками $EC_2:\ x + y = r_1$, $BC_2:\ x - y = r$, I_0 — интервал $0 < x < r$, I_1 — интервал $0 < x < r_1$, I_2 — интервал $r_1 < x < r$.

Здесь $\mathbf{M}_k : C(\bar{I}_k) \to C(\bar{\Omega}_k)$, $(k = 0,1,2)$ — заданные линейные ограниченные операторы, функции $f_k(x,y) \in C(\bar{\Omega}_k)$, $a,\ c$ — const.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(r,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{2}$$

$$u_{|_{EC_1}} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r_1, \tag{3}$$

$$u_{|_{BC_2}} = \psi_2(x), \quad r_1 \leqslant x \leqslant r, \tag{4}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные непрерывные функции, причем $\psi_2(r) = \varphi_2(0)$.

Доказана следующая

Теорема. *Если функции* $\psi_k(x) \in C(\bar{I}_k) \cap C^2(I_k),\ k = 1,2;$ *и выполняется неравенство*

$$\max_{k\in\{1,2\}} \left\{ r_k\gamma_k \left(\|\mathbf{M}_0\| + \frac{r_k}{4}\|\mathbf{M}_k\| \right) \right\} < 1,$$

где $\gamma_k = \dfrac{th(\mu r_k/2)}{2\mu}$, $\mu = \dfrac{\sqrt{(a+1)^2 - 4c}}{2}$, $r_2 = r - r_1$, *то задача (1) - (4) имеет, и притом единственное решение.*

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

ГИЛЬБЕРТОВОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Царева А.С. (Санкт-Петербург)

lean@yandex.ru

Теорема. Пусть $\{g_n\}$ — система собственных функций (определение см. в работе [1]) дифференциального оператора

$$Lu = u'' + q(x)u \qquad (*)$$

на интервале G. Пусть из $\{g_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_n\}$ такую, что:

1. Мнимые части соответствующих спектральных параметров (определение см. в работе [1])

$$|\mathrm{Im}\mu_n| \geqslant \mu_0 \quad (n = 1, 2, ...),$$

где μ_0 – достаточно большое, положительное число.

2. Для любой $u_n \in \{u_n\}$ существует точка $z_n \in G$, что

$$u_n(z_n) = C_n u_n'(z_n)(\mu_n)^{-1} \quad (n = 1, 2, ...),$$

где $C_n \ \ (n = 1, 2, ...)$ – комплекснозначные константы, по модулю не превосходящие некоторого числа $\bar{C} > 0$.

3. Ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Im}\mu_n|^{-1} |\mu_n|^{-2}$ – сходится.

Тогда из гильбертовости системы:

$$\left\{ \frac{\cos[\mu_n(x-z_n)] + C_n \sin[\mu_n(x-z_n)]}{\|\cos[\mu_n(x-z_n)] + C_n \sin[\mu_n(x-z_n)]\|_{L_2(G)}} \right\},$$

следует гильбертовость $\{u_n \|u_n\|^{-1}\}$ и $\{g_n \|g_n\|^{-1}\}$.

Данную теорему удалось распространить и на случай систем корневых функций (см. определение в работе [1]) оператора (*).

Получение настоящих результатов стимулировали работы [1-3].

Литература

1. Ильин В.А. // Дифферен уравнения. 1980. Т.16. №5. С.771-794.

2. Ассонова Н.В., Будаев В.Д. // Дифферен уравнения. 2000. Т.36. №2. С.147-151.

3. Тихомиров В.В. //Докл. АН СССР. 1983. Т.273. №4. С.807-810.

О ПОТОЧЕЧНОМ ОЦЕНИВАНИИ РАЗНОСТИ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

v_sumin@mm.unn.ru

Рассмотрим уравнение (ср. [1])

$$y(t) = w(t) + A\left[g\Big(.,y(.),u(.)\Big)\right](t), \quad t \in \Pi, \quad y(.) \in L_q^l(\Pi), \tag{1}$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое по Лебегу ограниченное множество; функция $w(.) \in L_q^l(\Pi)$ задана; $u(.) \in L_r^s(\Pi)$ – управление, $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^l(\Pi)$ – линейный ограниченный оператор, обладающий мажорантой $B : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$, у которой $\forall \delta > 0$ $\exists$ вольтерровская δ-цепочка; числа $n,m,l,s \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant p < q < +\infty$ заданы; функция $g(t,x,w) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbf{R}^l$ для п.в. $t \in \Pi$, $\forall w \in \mathbf{R}^s$ и вместе с производной $g'_x(t,x,w) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^{m\times l}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{x,w\} \in \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s$ для п.в. $t \in \Pi$; $\forall u(.) \in L_r^s(\Pi)$, $y(.) \in L_q^l(\Pi)$ $g\Big(.,y(.),u(.)\Big) \in L_p^m(\Pi)$, $g'_x\Big(.,y(.),u(.)\Big) \in L_\sigma^{m\times l}(\Pi)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{p}$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04-01-00460.

Теорема. *Пусть* $V(.) \in L_r(\Pi)$, $v(.) \in L_r^s(\Pi)$ *- некоторые фиксированные функции, причем для* $u = v$ *существует решение* $y = y_v$ *уравнения (1);* $\mathcal{V} = \{u(.) \in L_r^s(\Pi)$*:* $|u(t)| \leqslant V(t)$ *для п.в.* $t \in \Pi\}$*. Тогда найдутся* $\varepsilon > 0$ *и ограниченный оператор* $S^{-1} : U_\varepsilon(0) \to L_q^+(\Pi)$*, определенный на шаре* $U_\varepsilon(0) \subset L_q^+(\Pi)$*, такие, что справедливо следующее утверждение. Для любого решения уравнения (1)* $y = y_u$*, отвечающего некоторому* $u \in \mathcal{V}$ *такому, что* $\Big\|B[|\Delta_u g(y_v)|]\Big\| < \varepsilon$*, где* $\Delta_u g(y_v) = g\Big(., y_v(.), u(.)\Big) - g\Big(., y_v(.), v(.)\Big)$*, имеет место поточечная оценка*

$$|\Delta y(t)| = |y_u(t) - y_v(t)| \leqslant S^{-1}B\Big[|\Delta_u g(y_v)|\Big] \quad \text{п.в. } t \in \Pi.$$

Литература

1. В.И. Сумин, А.В. Чернов. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. Сер. Мат. моделир. и оптим. упр. Вып. 1(26).-2003.-С. 39-49.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ ДВУХ РЕШЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Чиж Е.А. (Челябинск)
ekaterina@csu.ru

Изучается асимптотика решения задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t), \quad x'(t_0) = x'(t_1) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр в случае, когда предельное уравнение

$$f(x(t),t) \equiv 0. \tag{2}$$

имеет два решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, графики которых пересекаются. При естественных дополнительных предположениях строится равномерное асимптотическое разложение решения с точностью до любой

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-96002 р-урал-а).

степени ε. Эта задача давно и достаточно хорошо изучена в том случае, когда существует одно устойчивое решение предельного уравнения (2) (подробная библиография имеется в [1]).

Будем предполагать выполненными следующие условия.

1) $f(x,t) \in C^\infty(D)$, где множество $D = \{x, t : t_0 \leqslant t \leqslant t_1, |x| \leqslant B\}$.

2) $|\varphi_j(t)| < B$, $j = \overline{1,2}$, $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ при $t_0 < t < 0$, $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ при $0 < t < t_1$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

3) При $t < 0$ решение $\varphi_1(t)$ устойчиво, а $\varphi_2(t)$ неустойчиво (т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t) > 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t), t) < 0$). При $t > 0$ будем считать, что решение $\varphi_2(t)$ устойчиво, а $\varphi_1(t)$ неустойчиво.

4) Начальное значение $x(t_0) = A$ находится в области влияния решения $\varphi_1(t)$, то есть $|A| < B$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t_0) > 0$ для всех значений между A и $\varphi_1(t_0)$.

5) $\varphi_1'(0) = -1$, $\varphi_2'(0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$.

Основной результат. Пусть $x(t,\varepsilon)$ является решением начальной задачи (1) и выполнены условия 1)-5). Пусть $0 < \alpha < 2/3$. Тогда ряд

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} x_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\frac{t-t_0}{\varepsilon})$$

является равномерным асимптотическим рядом для $x(t,\varepsilon)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant -\varepsilon^\alpha$, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \tilde{x}_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(\frac{t-t_1}{\varepsilon})$$

является равномерным асимптотическим рядом для $x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon^\alpha \leqslant t \leqslant t_1$, а ряд

$$\varepsilon^{2/3} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j/3} y_j(\tau)$$

является равномерным асимптотическим рядом для $x(t,\varepsilon)$ при $|t| \leqslant \varepsilon^\alpha$, где v_k и $\tilde{v}_k$ – функции пограничного слоя, $x_0(t) = \varphi_1(t)$, $x_k(t) = t^{2-3k}\sigma_k(t)$ при $t \to -0$, $\tilde{x}_0(t) = \varphi_2(t)$, $\tilde{x}_k(t) = t^{2-3k}\tilde{\sigma}_k(t)$ при $t \to +0$ (посредством $\sigma_k(t)$ и $\tilde{\sigma}_k(t)$ обозначены бесконечно дифференцируемые в окрестности нуля функции), $\tau = \varepsilon^{-2/3}t$, $y_0(\tau) \sim |\tau|$, $y_j(\tau) = \tau^{j+1}\hat{\sigma}_j(\tau^{-3})$ при $\tau \to \pm\infty$ ($\hat{\sigma}_j(t)$ – бесконечно дифференцируемые в окрестности нуля функции).

Аналогичный результат в случае дифференциального уравнения первого порядка был получен в [2], где также было построено равномерное асимптотическое разложение решения с точностью до любой степени малого параметра.

Литература

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.:Высш. шк., 1990.

2. *Долбеева С.Ф., Ильин А.М.* Доклады Академии наук//2006, Т.407 № 5.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Чмелева Г.А. (Ставрополь)

polet65@mail.ru

Рассматривается сложная система, моделируемая в виде сетеподобно организованного объекта, составленного из одномерных упругих континуумов по типу простейшего канатного моста, где упругие элементы подобны тросам и стержням (балкам), которые описываются дифференциальными уравнениями разных порядков, а все сложности анализа порождаются нетривиальными (с математической точки зрения) взаимодействиями этих элементов.

Отклонение точек системы от положения равновесия определяется силой натяжения струн, жесткостью стержней на изгиб и плотностью внешних сил. Мы изучаем малые отклонения системы. При этом предполагаем, что деформация стержней определяется только лишь чистым изгибом в главной изгибающей плоскости, т.е. считаем, что сдвигом, кручением и растяжением можно пренебречь.

Пусть $f : \Gamma \to R$ — плотность распределения внешней нагрузки, действующей на систему и пусть функция $p(x)$ определяет жесткость стержней в точках $x \in \gamma_1, \gamma_2$, а $q(x)$ — силы натяжения струн в точках $x \in \varepsilon$, k_1, k_2. Удобно считать, что функции $p(x), q(x)$ заданы на всем графе так, что $q(x) \equiv 0$ при $x \in \gamma_1, \gamma_2$ и $\inf\{q(x)\} > 0, q(x) \in \widetilde{C}^1$ при $x \in \varepsilon$, k_1, k_2, а $p(x) \equiv 0$ при $x \in \varepsilon, k_1, k_2$ и $\inf\{p(x)\} > 0, p(x) \in \widetilde{C}^2$ при $x \in \gamma_1, \gamma_2$.

Будем рассматривать дифференциальную систему вида

$$Lz = f, \tag{1}$$

полагая

$$Lz = \begin{cases} (pz'')''(x) \text{ при } x \in \gamma_1, \gamma_2, \\ -(qz')'(x) \text{ при } x \in \varepsilon, k_1, k_2. \end{cases}$$

Уравнение (1) будем рассматривать в классе функций, удовлетворяющих условиям непрерывности во всех внутренних вершинах Γ, закрепления концов верхнего континуума

$$v(0) = v(l) = 0, \tag{2}$$

шарнирного закрепления нижних стержней

$$u(0) = u(l) = 0,\ u''(0) = u''(l) = 0, \tag{3}$$

а также условиям трансмиссии в точках a и b

$$\left(p_{\gamma_1} z''_{\gamma_1}\right)'(a+0) + \left(p_{\gamma_2} z''_{\gamma_2}\right)'(a+0) - (q_\varepsilon z'_\varepsilon)(a+0) = 0, \tag{4}$$

$$(q_{k_1} z'_{k_1})(b+0) + (q_{k_2} z'_{k_2})(b+0) + (q_\varepsilon z'_\varepsilon)(b+0) = 0, \tag{5}$$

и условиям шарнирного соединения

$$\left(p_{\gamma_1} z''_{\gamma_1}\right)(a+0) = 0,\ \left(p_{\gamma_2} z''_{\gamma_2}\right)(a+0) = 0.$$

Теорема 1. Задача (1)–(6) однозначно разрешима при любых правых частях.

Теорема 2. Задача (1)–(6) корректна, т. е. однозначно разрешима при любых правых частях и решение мало меняется при малом изменении правых частей.

Теорема 3. Пусть $z_0(x)$ — решение нашей задачи для уравнения $Lz = 1$. Тогда для каждого s существуют числа $\alpha(s) > 0$ и $\beta(s) < \infty$ такие, что равномерно по x справедливы неравенства

$$z_0(x)\alpha(s) \leqslant G(x,s) \leqslant z_0(x)\beta(s),$$

причем $\alpha(s), \beta(s)$ суммируемы на Γ.

Этот результат оказывается опорой для применения методов теории конусов и доказательстве следующей теоремы.

Рассмотрим спектральную задачу

$$Lz = \lambda m(x) z,\ z\big|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{7}$$

где $m(x)$ — плотность распределения масс на нашей физической системе, т. е. на Γ.

Теорема 4. Пусть функция $m(x)$ суммируема и неотрицательна ($m(x) \neq 0$). Тогда для задачи (7) справедливы следующие свойства:
а) существует позитивное собственное значение λ_0;
б) это собственное значение является вещественным, строго положительным и простым,
т. е. корневое пространство, соответствующее λ_0, одномерно;
в) λ_0 строго меньше модулей остальных точек спектра;
г) соответствующая λ_0 собственная функция $z_0(x)$ не имеет нулей в Γ;
д) для любой знакопостоянной на Γ собственной функции задачи (7) соответствующее собственное значение совпадает с λ_0, а сама собственная функция должна быть коллинеарна $z_0(x)$.

Литература

1. Покорный Ю.В. О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнений четвертого порядка / Ю.В. Покорный, Р. Мустафокулов // Дифференциальные уравнения. - 1997. - Т. 33, № 10. - С. 1358-1365.

2. Покорный Ю.В. Об одном классе разнопорядковых обыкновенных дифференциальных уравнений на графе / Ю.В. Покорный, Т.В. Белоглазова, К.П. Лазарев // Мат. заметки. – 2003. – Т. 73, № 3. – С. 469-470.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ[1]

Шевченко Г.В. (Новосибирск)

E-mail:shevch@lmath.nsc.ru

В настоящей работе рассматриваются нелинейные системы со стационарной правой частью, т.е. независящей явно от времени. Для задач оптимального быстродействия с такими системами предлагается итерационный метод решения. Он основан на построении конечных последовательностей смежных симплексов с вершинами на границах областей достижимости. При предположении об управляемости системы доказано, что за конечное число итераций минимизирующая последовательность сходится к ε-оптимальному решению. Следуя [1], пару $\{T, u(\cdot)\}$ назовём *ε-оптимальным решением*, где $T \leqslant T_{opt}$, T_{opt} — время оптимального по быстродействию перевода

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00776).

системы из начального состояния в ε-окрестность начала координат, u — допустимое управление, под действием которого система переходит в ε-окрестность начала координат за время T.

Предлагаемый метод численного решения состоит из двух этапов. На *первом* этапе строятся монотонно возрастающая последовательность времён $\{T_k\}$ и последовательность симплексов $\{\sigma^k\}$ с вершинами на границе области достижимости $\mathfrak{R}(T_k)$. Построение заканчивается, когда очередной построенный симплекс поглотит начало координат. Следует отметить, что построение ведётся так, что если $T_k = T_{k+1}$, то симплексы σ^k и σ^{k+1} являются смежными и $\rho(\sigma^k) \geqslant \rho(\sigma^{k+1})$, где $\rho(\sigma)$ — расстояние от начала координат до симплекса $\sigma = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$, т.е. $\rho(\sigma) = \min\limits_{\sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i = 1,\ \zeta_i \geqslant 0} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i z^i \right\|^2$.

На *втором* этапе уточняется оптимальное времени.

Литература

1. *Шевченко Г.В.* Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 8. С. 1184–1196.

2. *Шевченко Г.В.* Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида // Автометрия. Т. 42, № 2. С. 49–67.

О КЛАССИФИКАЦИИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ШЕСТИМЕРНЫХ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ С ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРОМ КРИВИЗНЫ

Шестакова М.А. (Тверь)

shest margo@mail.ru

Теория тканей еще сравнительно молодой раздел математики, поэтому одной из основных проблем в этой области является проблема классификации. В большинстве работ, посвященных геометрическим и алгебраическим аспектам теории тканей, рассматриваются три-ткани, которые характеризуются специальным строением тензоров кривизны и кручения. Пример таких тканей – шестиугольные ткани с постулируемой заранее частичной симметрией тензора кривизны связности Черна (ткани H_s). G-структура ткани (H_s) является замкнутой структурой третьего порядка. Тензор кривизны таких тканей характеризуется следующими условиями:

$$b^i_{(jk\ell)} = 0, \quad b^i_{j[k\ell]} = 0,$$

а тензор кручения удовлетворяет тождеству Якоби. Это позволило связать классификацию рассматриваемых три-тканей с классификацией вещественных трехмерных алгебр Ли.

Справедлива следующая теорема: 1) негрупповых три-тканей H_s, соответствующих неразрешимой алгебре Ли, не существует, 2) с точностью до изотопии существует всего две нетривиальные ткани H_s (H_s^1 и H_s^2), реализуемые на однородном пространстве, каждая из которых определяется некоторой разрешимой трехмерной алгеброй Ли с ненулевым коммутантом, 3) в некоторых локальных координатах конечные уравнения тканей H_s^1 и H_s^2 имеют вид (1) и (2) (соответственно)

$$\begin{aligned} z^1 &= u^1 + v^1 + (u^2+v^2)(u^3v^2 - u^2v^3), \\ z^2 &= u^2 + v^2, \quad z^3 = u^3 + v^3, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} z^1 = {} & u^1 e^{-v^3} + v^1 e^{u^3} - 2ae^{u^3}u^2v^2 - 2be^{u^3}(u^2+v^2) + \\ & + 2be^{-v^3+u^3}u^2 + 2bv^2, \\ z^2 = {} & u^2 + v^2 e^{-u^3}, \quad z^3 = u^3 + v^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Литература

1. Джекобсон Н. *Алгебры Ли* // М.: Мир, 1964.

О ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЯХ, УМЕНИЯХ И НАВЫКАХ

Шунина Г.А. (Минск)
SHUNINAGALINA@mail.ru

Большинство ученых полагает, что по сути процесс обучения той или иной профессиональной деятельности и, в частности, военной происходит по схеме [*знания*] $\rightarrow$ [*умения*] $\rightarrow$ [*навыки*].

Профессиональные математические знания (ПМЗ) это совокупность познаний отдельных областей математики, которые необходимы для выполнения соответствующей профессиональной деятельности при данном уровне развития этой деятельности.

ПМЗ являются базой для ПМУ.

Профессиональные математические умения (ПМУ) это совокупность познаний отдельных областей математики, необходимость которых подтверждается выполнением соответствующей профессиональной деятельности.

В определенный момент ПМУ перерастают в ПМН.

Профессиональные математические навыки (ПМН) это совокупность познаний отдельных областей математики, необходимость которых не только подтверждена выполнением соответствующей профессиональной деятельности, но и выполнение которых доведено до автоматизма в этой деятельности.

Сложные (обобщенные) ПМЗ, ПМУ и ПМН состоят из простых (специальных) ПМЗ, ПМУ и ПМН. При этом, на основе ПМУ могут возникать новые ПМЗ, переходящие в последующем в ПМН. В свою очередь, не исключаются укороченные переходы [*ПМЗ*] $\rightarrow$ [*ПМН*] и [*ПМН*] $\rightarrow$ [*ПМУ*]. Все основные и эти и другие взаимные переходы *типа обратной связи* [*ПМЗ*] $\leftrightarrow$ [*ПМУ*] $\leftrightarrow$ [*ПМН*] $\leftrightarrow$ [*новые ПМЗ*] $\leftrightarrow$ [...] осуществляются скачкообразно по диалектическим закону взаимного перехода количественных и качественных изменений и закону отрицания отрицания. Постоянно происходит взаимное обогащение ПМЗ, ПМУ и ПМН, на определенном этапе их слияние и превращение в единое целое – *профессиональное мастерство*.

Если ПМЗ формируются в основном во время учебы в учебных заведениях, то ПМУ и ПМН – как правило только в результате выполнения соответствующей профессиональной деятельности. Во время профессиональной деятельности ПМЗ, ПМУ и ПМН постоянно изменяются и могут улучшаться, повышаться и совершенствоваться путем самообразования, повышения квалификации и т.д.

Именной указатель

Верстка и подготовка оригинал-макета:

Шабров С.А.

Издательство Воронежского государственного университета,
394053, г. Воронеж, Университетская пл., 1.
Тир. 250 экз. Подписано к печати 12.04.2007