ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В. А. СТЕКЛОВА РАН
МОСКОВСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ ПРИ АДМИНИСТРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЩЕСТВО «МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА»
ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВОРОНЕЖСКАЯ ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-VI»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

(20—26 апреля 1995 г.)

ВОРОНЕЖ — 1995

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В.А.СТЕКЛОВА РАН
МОСКОВСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ ПРИ АДМИНИСТРАЦИИ ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЩЕСТВО "МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА" ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВОРОНЕЖСКАЯ ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА "ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-VI"

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

(20-26 апреля 1995г.)

Воронеж - 1995

УДК 517.94 (92; 054; 97)

"Понтрягинские чтения-VI": Тезисы докладов школы. - Воронеж, ВГУ, 1995. - 84 с.

В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, состоявшихся на очередной Воронежской весенней математической школе, проводимой совместно с Математическим институтом АН им. В.А. Стеклова, Московским университетом.

Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем теории оптимального управления, теории классических и нестандартных краевых задач, анализа, геометрии, аналитического и численного моделирования сложных систем.

ОРГКОМИТЕТ :

Оргкомитет благодарит Российский фонд фундаментальных исследований и Комитет по науке и высшей школе при Администрации Воронежской области за финансовую поддержку.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В СМЫСЛЕ ОТРАЖАЮЩИХ МАТРИЦ ЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Альсевич Л. А.

Беларусь, 220080, Минск, просп. Ф.Скорины, 4, Белорусский государственный университет, факультет прикладной математики и информатики, телефон (0172) р. 68-70-21, д. 72-15-07

В [1] было выделено множество линейных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t\in R, \quad x\in R^n, \tag{1}$$

отображающая матрица [2] которых совпадает с отражающей матрицей некоторой линейной стационарной системы. В этом случае говорим, что система [1] эквивалентна этой стационарной системе. Оказывается, что всегда в качестве этой стационарной системы следует брать систему

$$\frac{dx}{dt} = P(0)x, \quad x\in R^n$$

Для таких систем (1) при условии $P(t+2\omega) = P(t)$ матрица монодромии подобна матрице $\exp(2\omega P(0))$. Это обстоятельство позволяет найти мультипликаторы и исследовать систему на устойчивость, а также найти начальные данные периодических решений рассматриваемой системы (1).

Среди систем эквивалентных стационарным имеются системы вида

$$\dot{y} = (A+S(t))y, \tag{2}$$

A-постоянная, а S(t)-нечетная матрицы, коммутирующие друг с другом.

В докладе обсуждается вопрос: когда система (1) может быть сведена к системе вида (2) с помощью некоторой замены переменных $y=M(t)x$? При такой замене матрицу $M(t)$ можно выбрать такой, что $M(0)=E$, E – единичная матрица. Подробно обсуждается вопрос о сведениии системы вида $\dot{x}=y$, $\dot{y}=p(t)x$ к системе вида (2).

Литература

1. Альсевич Л.А. О начальных данных периодических решений линейных систем диференциальных уравнений //Вестн. Белорус. ун-та, сер.1. -1982. -N 3, -с. 50-51.
2. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск: Изд. "Университетское", 1986. -76с.

Астахов А.Т. / г. Воронеж /

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В обзоре [1,с.494] поставлен следующий вопрос. При каких α существует гармоническая в R^3 функция, равная нулю на конусе $\Gamma_\alpha^3(O)$? В настоящей работе рассматривается вопрос: при каких α существует гармоническая в R^n функция, равная нулю на конусе $\Gamma_\alpha^n(O)$? Где $\Gamma_\alpha^n(x_o)=\{(x_1,x')\in R^n;|x'-x_o|=\alpha x_1\}$ - конус в R^n с вершиной в (O,x_o) и раствором α.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для того, чтобы существовала ненулевая гармоническая в R^n функция f, обращающаяся в ноль на конусе $\Gamma_\alpha^n(O)$ необходимо и достаточно чтобы $\cos\frac{\alpha}{2}$ равнялся одному из корней многочлена Гигенбауэра $L_{k-\ell}^{\beta+\ell}$: $\beta=\frac{n-3}{2}$; $\ell=0,1,...K$; $k=0,1,...$

Известно, что гармоническую в R^n функцию можно представить в виде $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}P_i(x)$ где $P_i\in\mathcal{P}_i$ множество всех однородных гармонических многочленов степени i, определённых на R^n. Обозначим пересечение единичной сферы Σ_{n-1} с конусом $\Gamma_\alpha^n(O)$ через S_α. Теорема является очевидным следствием следующих двух лемм.

Лемма 1. Для того чтобы существовала ненулевая гармоническая в R^n функция, обращающаяся в ноль на конусе $\Gamma_\alpha^n(O)$ необходимо и достаточно чтобы на S_α существовал ненулевой однородный гармонический полином какой-то степени k, обращающийся в ноль на S_α.

Лемма2. Для того чтобы сферическая гармоника Y_k обращалась в ноль на S_α необходимо и достаточно чтобы $\cos\frac{\alpha}{2}$ было нулём многочлена Гегенбауэра $L_{k-\ell}^{\beta+\ell}$ $\beta=\frac{n-3}{2}$; $\ell=0,1,...k$; $k=0,1,...$

Автор благодарен профессору Мешкову В.З. за внимание к работе.

Литература

1. Barth K.F., Brannan D.A. and Hayman W.K. Research problems in complex analisis // Bull. Lond. Math. Soc. 1984. -V.16, N5 - p.490-516.

Асмыкович И.К., Янович В.И. (Минск)

О ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

В последние десятилетия в научной литературе по качественной теории управления резко увеличилось число публикаций, посвященных объектам, описываемым системами дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной. Такие системы называются либо вырожденными, либо обобщенными линейными системами, либо сингулярными, либо, наиболее часто, дескрипторными. Они возникают при описании объектов управления в физически реальных переменных, если в объекте имеются как дифференциальные, так и алгебраические связи. Такая ситуация регулярно возникает при описании электрических цепей, экономических моделей и т.п. В пространстве состояний дескрипторные системы записываются в форме

$$S\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t) = x \in M$$

(Здесь $x(t) \in R, u(t) \in R, M \subset R, S, A, B$ - постоянные матрицы соответствующих размеров, $det\, S = 0$).

В докладе рассмотрен вопрос о возможности изменения качественных свойств системы (1) с помощью линейных регуляторов двух типов. Точнее, присоединим к системе (1) линейную обратную связь вида

$$u(t) = Fx(t) + Qv(t), det\, Q \neq 0$$

либо регулятор с обратной связью по производной

$$u(t) = F_1\dot{x}(t) + F_2x(t) + Qv(t), \qquad det\, Q \neq 0$$

Доказано, что если система (1) полностью управляема, т.е. выполняются условия

$$rank[\lambda S - A|B] = n \qquad \forall\lambda \in C, \qquad rank[S|B] = n$$

то замкнутая система (1),(2) либо (1),(3) может иметь произвольный, наперед заданный набор инвариантных полиномов, что соответствует известной теореме Розенброка для обыкновенных систем.

В заключении доклада рассмотрена задача реконструкции для дескрипторной системы с чистым запаздыванием вида

$$S\dot{x}(t) = Ax(t-h) + Bu(t), \qquad det\, S = 0.$$

УДК 519.68

Аржеухов Л.Б. (Воронеж)

МОДЕЛИ СВЕРХПЛОТНОЙ И СВЕРХНАДЕЖНОЙ ЗАПИСИ ИНФОРМАЦИИ В МАГНИТНЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ ЗАПОМИНАЮЩИЕ СРЕДЫ

Предложен подход к моделированию процессов записи сверхплотно и сверхнадежно упакованной информации в системах памяти (СП) с магнитными и оптическими запоминающими средами (ЗС) как процессов интеллектуально-адаптивного управления, основанного на методе интеллектуального кодирования информации и носителя [1]. Введено подразделение всех возможных в рассматриваемой области объектов управления на 2 класса: с использованием аналогового и импульсного носителей информации. Для каждого класса объектов управления синтезирована обобщенная модель управления состоянием запоминающей среды в реальном времени. Методология и принципы организации интеллектуально-адаптивного управления объектами обоих классов едины: снятие априорной неопределенности о характеристиках конкретной СП, как объекта управления, настройку и оперативную корректировку модели управления осуществляют при помощи специальных правил, процедур и алгоритмов обучения, адаптации и самонастройки.

Настройку исходной модели управления на определенный тип СП осуществляют при помощи специальных исследовательских и обучающих процедур с использованием базы знаний, содержащей модели информационных процессов, пользовательской среды и ЗС, наборы решающих правил, специальные логико-вычислительные и кодирующие процедуры. База знаний содержит также структурные и алгоритмические средства адаптации, обеспечивающие разной степени нейтрализацию нелинейностей, неопределенности, стохастичности и нестационарности изменений индивидуальных характеристик СП и пользовательской среды.

Окончательную корректировку моделей управления состоянием ЗС осуществляют путем автоматической перенастройки ее параметров на основе текущих данных о характеристиках запоминающей среды, информационных массивов и требований пользовательской среды.

Литература

1. Аржеухов Л.Б. Метод интеллектуального кодирования информации и ее носителя // Тез. докл. школы "Современные методы в теории краевых задач". - Воронеж, 1992. - С.6.

Артемов М.А., Ивлев Д.Д. (Воронеж, Чебоксары)

К ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНО ЗАТВЕРДЕВАЮЩИХ СРЕД

Рассматриваются модели идеально затвердевающей среды для сжимаемого и несжимаемого материалов для случая плоской задачи. Предполагается, что состояние затвердевания наступает при достижении максимальной скоростью сдвига определенного предельного значения.

Для плоской задачи можно установить соответствие между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций: σ_x — ε_y, σ_y — ε_x, τ_{xy} — $(-\varepsilon_{xy})$ при $\omega=0$ и σ — ω, τ_{xy} — ε_y, σ^d_x — ε_{xy} при $\varepsilon=0$, где ε_{ij} - компоненты тензора скорости деформации, ω - составляющая вращения элемента тела как жесткого целого, $2\sigma=\sigma_x+\sigma_y$, $\varepsilon=\varepsilon_x+\varepsilon_y$ В работе [1] условие затвердевания принято в виде $(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+4\varepsilon^2_{xy}=4\chi^2$, χ - const. Предполагая несжимаемость материала, это условие может быть удовлетворено заменой переменных $\varepsilon_x=-\varepsilon_y=\chi\cos 2\theta$, $\varepsilon_{xy}=\chi\sin 2\theta$. Относительно переменных ω,θ получаем систему уравнений гиперболического типа. Ее характеристики совпадают с линиями главных скоростей деформаций. Вдоль ортогональных характеристик имеют место соотношения вполне аналогичные соотношениям Генки в теории идеальной пластичности [2]. Для определения напряженного состояния следует использовать уравнения равновесия и условия изотропии. Для несжимаемого материала любая сетка Генки может быть использована в теории идеально затвердевающих сред. В случае сжимаемого материала компоненты скорости деформации могут быть получены из решения задачи теории идеальной пластичности при замене компонент напряжений на компоненты скорости деформации. При этом имеет место соответствие между условием пластичности и условием затвердевания.

Рассмотрена задача о предельном осесимметричном состоянии трубы Для несжимаемого материала условие затвердевания может быть выполнено только на внутренней границе. Материал трубы не затвердевает. Для сжимаемого материала затвердевание распространяется на всю область. При этом величина скорости перемещения внутренней границы может быть произвольной, затвердевание происходит при сохранении предельного значения скорости сдвига. В рассматриваемых примерах скорости деформации можно трактовать как компоненты деформации. Величина внешнего и внутреннего давления при достижении предельного состояния затвердевания может быть произвольной.

1. Ивлев Д.Д. К теории идеально затвердевающих сред. // ДАН СССР. Т. 130. № 4. 1960. С. 742-745. 2. Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: Иностранная литература. 1956. 398 с.

Бахтин И.А. (Воронеж)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В F -ПРОСТРАНСТВАХ.

В вещественном F-пространстве с конусом приводятся признаки существования положительных собственных векторов линейных положительных операторов.

Теорема I. Пусть

I) в F-пространстве X с конусом K линейный положительный оператор A преобразует каждый конусной отрезок $\langle u, v\rangle$ в ограниченное по метрике множество $A\langle u, v\rangle$;

2) оператор A вполне непрерывен и u-ограничен сверху ;

3) существует элемент $v>0$ и числа $p\in N$, $c>0$, такие, что $A^p v \geqslant c^p v$.

Тогда существует элемент $x>0$ и число $\lambda\geqslant c$, такие, что $Ax=\lambda x$.

Теорема 2. Пусть

I) в F-пространстве X конус $K\subset X$ нормален;

2) оператор A линеен и существует элемент $u>0$ и число $\rho\geqslant 1$, такие, что $Au\neq 0$ и $AK\subset K_{u,\rho}$, где $K_{u,\rho}$ – конус Красносельского.

Тогда существует элемент $x_0>0$ и число $\lambda_0>0$, такие, что $Ax_0=\lambda_0 x_0$.

Теорема 3. Пусть

I) в F-пространстве X конус K нормален и миниэдрален;

2) линейный оператор A u-положителен и монотонно компактен;

3) при некотором $m_0\in N$ из $(x_n)\subset K$, $\rho(x_n,0)\to 0$ следует $\|A^{m_0}x_n\|_u\to 0$, где $\|A^{m_0}x_n\|_u$ – u-норма элемента $A^{m_0}x_n$.

Тогда существует элемент $x_*>0$ и число $\lambda_*>0$, такие, что $Ax_*=\lambda_* x_*$.

Теорема 4. В конечномерном F-пространстве X с конусом K каждый линейный положительный оператор A имеет в конусе K собственный вектор.

УДК 517.956

ABOUT HYPERBOLIC PROBLEMS WITH UNKOWN BOUNDARY.

Beregova G.I., Kyrylych V.M. (Lvov)

Problems of oscillation of the string with mobil mass on it were solved in work [1-2]. These problems belong to the class of problems with the free (mobil) boundary. This kind of problems is also called as Stephan hyperbolic problems [3].

With the help of method of the work [3] we propose the solution of problems for follows equation as:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\gamma u_t + h^2 u = 0,$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u^1(x,t), & -\infty < x < l(t), \quad t > 0 \\ u^2(x,t), & l(t) \leq x < +\infty, \end{cases}$$

$$\left[T(u_x^2 - u_x^1) - \rho\dot{l}(t)(u_t^2 - u_t^1) \right] \Big|_{x=l(t)} = P,$$

with definite start and complementary conditions on the behavior of unknown function $l(t)$ [1]. That gives possibility to investigate correct solvability of problems with less hard conditions then in [1]. Method of the work [3] can be trancfered on more general problems for hyperbolic equations of high degree with several kind of nonclassic (nonlocal, inseparrable, integral) conditions.

LITERATURE.

1. Andrianov V.L. About appliance of the Laplas transformation to the solving of the one boarder problem with the condition on mobil boundary. - Differential and integral equations. Between Univefsity collection. 1987, Gorkiy.
2. Malanov S.B., Utkin G.A. Solution of the problem about central blow by point at infinite string on elastic ground. Between University collection. 1987, Gorkiy.
3. Kyrylych V.M., Mishkis A.D. Generalized half linear hyperbolic Stephan problem on the staidht line. Differential equations, vol. 27, 3, p.499-503.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ МАЛЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Ф.С.Березовская
Центр экологии и продуктивности лесов РАН, Москва
email: ber@spepl.msk.su

Рассмотрим стохастическую систему дифференциальных уравнений

$$dz = (z(\alpha_1 + i\omega) + \alpha_2|z|^2 + L|z|^4))dt + dW \qquad (1)$$

($z = x + iy$, коэффициенты $\omega > 0$ и $L < 0$, W – одномерный Винеровский случайный процесс интенсивности S). В ее "детерминированной части" ($S = 0$) при $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$ происходит смена устойчивости равновесия 0 с рождением или исчезновением предельных циклов (бифуркация коразмерности 2 – "нейтральное равновесие с нулем первой ляпуновской величины"[1]).

Система (I) задает марковский процесс ζ [2].

ТЕОРЕМА. Процесс ζ имеет стационарную плотность вероятности:

$$p(r) = C\exp(2/S\,F(r)),\quad F(r) = \int_0^r R(\rho)d\rho, \qquad (2)$$

$$1/C = 2\pi\int_0^\infty \exp(2/S\,F(r))r\,dr,$$

где $R(r) = r(\alpha_1 + \alpha_2 r^2 + Lr^4)$, а (r,ϕ) – полярные координаты : $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$.

Доказательство. Функция (2) удовлетворяет стационарному уравнению ФПК, в полярных координатах принимающему вид [3]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rRp) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(r\Phi p) = \frac{S}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\phi^2}\right)$$

(Здесь $\Phi(\phi) \equiv \omega$). **

Максимумы функции p отвечают устойчивым предельным циклам системы (I), минимумы – неустойчивым (точка 0 – "цикл нулевого радиуса"). Следовательно, стохастическое возмущение указанного типа сохраняет структурно устойчивые периодические режимы, свойственные детерминированной системе.

Литература

I. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М: Наука, 1978, 304 С.

2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 С.

3. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, вып.3, 1933, с.165–180.

УДК 519.4 Бекларян Л.А. (Москва)

Инвариантные меры групп гомеоморфизмов прямой

Многие задачи анализа, алгебры, геометрии, теории функционально-дифференциальных уравнений приводят к необходимости исследования структуры групп преобразований локально-компактного топологического пространства и, в частности, групп гомеоморфизмов прямой. Для таких групп преобразований важнейшей характеристикой является существование инвариантной меры. В решении проблемы существования инвариантной меры, условно, можно выделить два подхода "топологический" и "комбинаторный". При первом подходе, формулируемые условия существования инвариантной меры касаются топологических свойств самих преобразований и орбит точек исследуемого топологического пространства. При втором подходе, формулируемые условия существования инвариантной меры касаются степени роста группы, либо степени роста орбиты точек исследуемого локально-компактного топологического пространства.

В докладе для групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, будут сформулированы необходимые и достаточные условия существования инвариантной меры, в виде условия непустоты множества неподвижных точек группы гомеоморфизмов.

Рассмотрены "топологические" и "комбинаторные" типы условий существования инвариантной меры и связь между ними.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований N 94-01-01513-а.

1. Бекларян Л.А. Инвариантные и проективно-инвариантные меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Докл. РАН, 1993, т.332, N6. с.679-681.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Биркин А. Д. (Новосибирск).

В последнее время для численного расчета стационарных газодинамических течений с успехом используется метод установления. При этом стационарное решение ищется, как предел при $t \to \infty$ решения нестационарной задачи. Поэтому с точки зрения обоснования метода установления возникает необходимость исследования нестационарной задачи на исходном, дифференциальном уровне.

На сегодня известен ряд результатов о существовании локально по времени классических решений нестационарных газодинамических задач с краевыми условиями на ударной волне и твердой стенке и о исследовании устойчивости предельного стационарного решения в линейной постановке. Оказывается, что в ряде случаев подобные результаты можно перенести на квазилинейный уровень.

Рассмотрены два газодинамических примера (в одномерном случае): задача о плоском поршне и задача об обтекании кругового конуса сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки и получен такой результат: находясь в условиях локальной теоремы существования классического решения указанных задач можно продолжить решение гладким образом на весь бесконечный интервал времени; показано, также, что при $t \to \infty$ решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим течения газа.

Бирюкова Л.В., Жуковский В.И. (Москва)

ГАРАНТИРУЮЩИЕ РАВНОВЕСИЯ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Рассматривается линейно-квадратичная дифференциальная игра двух лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1,2\},\ \Sigma,\ \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2},\ \mathcal{Z},\ \{J_i(U,Z,t_*,x_*)\}_{i=1,2} \rangle,$$

где

Σ ÷ $\dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + z$, $x(t_*) = x_*$; $x, u_i, z \in \mathbb{R}^n$;
$A(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$, $\vartheta = \mathrm{const} > 0$, $(t_*, x_*) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$;
множества стратегий i-го игрока:

$$\mathcal{U}_i = \{U_i \div u_i(t,x) \mid u_i(t,x) = Q_i(t)x,\ Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\},$$

множество неопределенностей

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z(t,x) \mid z(t,x) = P(t)x,\ P(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\},$$

функция выигрыша i-го игрока $(i=1,2)$

$$J_i(U,Z,t_*,x_*) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_*}^{\vartheta} \Big(\sum_{j=1}^{2} u_j'[t] D_{ij} u_j[t] + z'[t] L_i z[t] \Big) dt,$$

где $n\times n$ матрицы C_i, D_{ij}, L_i постоянны и симметричны. Далее $J = (J_1, J_2)$, $J^{(1)} > J^{(2)} \Leftrightarrow J_i^{(1)} > J_i^{(2)}$ $(i=1,2)$, $J^{(1)} \not> J^{(2)} \Leftrightarrow \neg J_i^{(1)} > J_i^{(2)}$.

<u>Определение.</u> Ситуацию $U^s = (U_1^s, U_2^s) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ назовем *слейтеровским равновесием угроз и контругроз игры* Γ с начальной позицией (t_*, x_*), если существует такая неопределенность $Z_s \in \mathcal{Z}$, что

- $J(U^s, Z_s, t_*, x_*) \not> J(U^s, Z, t_*, x_*)$, $\forall Z \in \mathcal{Z}$;
- $J(U, Z_s, t_*, x_*) \not> J(U^s, Z_s, t_*, x_*)$, $\forall U \in \mathcal{U}$;
- в ответ на каждую угрозу на (U^s, Z_s) любого игрока у оставшегося имеется контругроза.

1^0. Вектор $J(U^s, Z_s, t_*, x_*)$ является векторной гарантией (определенной в [1]).

2^0. При фиксированной неопределенности Z_s множество $\mathcal{U}^s$ ситуаций U^s внутренне устойчиво и "неулучшаемо".

3^0. Пара (U^s, Z_s) динамически устойчива.

На основе метода динамического программирования устанавливаются коэффициентные критерии существования (U^s, Z_s) и найден их явный вид.

Литература

1. Zhukovskiy V.I., and Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. New York: Academic Press, Inc.,1994. 404p.

УДК 517.927

ОБ УСЛОВИЯХ ТИПА КАЛАФАТИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ЗНАКОРЕГУЛЯРНОСТЬ РАЗРЫВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Боровских А.В. (Воронеж)

Пусть L– дифференциальный оператор на $[a,b]$

$$Lx = x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x \qquad (1)$$

рассматриваемый всюду, кроме конечного набора точек ($t\neq\xi_i$, $a<\xi_1<\ldots<\xi_r<b$). Если обозначать $\Omega=(a,b)\setminus\{\xi_i\}=\bigcup_{i=0}^{r}(\xi_i,\xi_{i+1})$, $[\Omega]=\bigcup_{i=0}^{r}[\xi_i+0,\xi_{i+1}-0]$ – его "покомпонентное" замыкание, в котором точки ξ_i+0 и ξ_i-0 различаются; $C[\Omega]$ – пространство кусочно-непрерывных функций с разрывами первого рода в точках ξ_i, $C^n[\Omega]$ – пространство функций из $C[\Omega]$, имеющих непрерывные производные до порядка n в каждом $[\xi_i+0,\xi_{i+1}-0]$, то L действует из $C^n[\Omega]$ в $C[\Omega]$.

В каждой из точек ξ_i зададим n условий согласования (склейки) функций, которые мы будем записывать в форме

$$l_k(x) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n-1}\alpha^-_{jk}x^{(j)}(\xi_i-0) - \sum_{j=1}^{n-1}\alpha^+_{jk}(-1)^j x^{(j)}(\xi_i+0)=0 \qquad (2)$$

(здесь k – номер условия, $i=i_k$ – номер точки, в которой задано это условие, j – индекс суммирования). Набор собственно краевых (в точках a и b) условий мы также можем записывать в виде (2), полагая $\xi_0=a$, $\xi_{r+1}=b$ и считая нулевыми коэффициенты α^-_{jk} в первом или α^+_{jk} во втором случае. Обозначим через A^+_i и A^-_i матрицы, состоящие из коэффициентов $\alpha^\pm_{jk}$ условий в точке ξ_i ($j=0,\ldots,n-1$; k пробегает номера тех условий (2), которые заданы в точке ξ_i). Для $1\leq i\leq r$ обозначим через A_i $n\times 2n$ – матрицу, образованную столбцами A^-_i, идущими в обратном порядке, а затем столбцами A^+_i, идущими в прямом порядке.

Напомним, что матрица $m\times k$ ($m<k$) называется знакосогласованной, если ее ранг равен m и все ее ненулевые миноры порядка m имеют одинаковый знак.

Задача

$$\begin{cases} Lx=f, & f\in C[\Omega] \\ l_k(x)=0 \end{cases} \qquad (3)$$

называется знакорегулярной, если для любой $f(t)$ и соответствующего решения $x(t)$ выполнено $S(x)\leq S(f)$ где $S(u)$–число перемен знака функции $u(\cdot)$ на $[a,b]$.

Т е о р е м а. Пусть задача (3) невырождена и каждая из матриц A_i ($i=1,\ldots,r$), A^+_0 и A^-_{r+1} знакосогласованы. Тогда задача (3) знакорегулярна.

УДК 519.175, 517.518.1

Боровских А.В., Колмыков В.А. (Воронеж)

СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ МЕР НА ГРАФАХ

При изучении поведения сложных систем типа сетей на основе дискретной модели - алгебраического графа возникает необходимость в аналогах классических конструкций математического анализа (производная, мера, интеграл и др.). Ниже приведен ряд результатов о структуре и свойствах пространства реберных мер на графе (определение дискретной меры на графе см. в [1]).

Напомним [1], что мера называется регулярной, если "криволинейный" интеграл не зависит от пути интегрирования, а только от его начала и конца.

Теорема 1. Множество регулярных мер Reg(G) является подпространством в пространстве всех мер M(G) на графе G.

Определение. Атомарной мерой $\varepsilon_v \in M(G)$ (v-вершина G) называется мера, определяемая на ребрах графа следующим образом:

$\varepsilon_v(\vec{l})=+1$, если v-конец l, -1, если v- начало l и 0, если v не инцидентно l.

Теорема 2. $Reg(G)=Lin\{\varepsilon_v\}_v$.

Как известно, любая мера на отрезке порождается некоторой функцией ограниченной вариации. Аналогичный результат имеет место и для графов.

Пусть f- вещественная функция, определяемая на множестве вершин графа G (множество всех таких функций обозначается через $\mathbb{R}^G$).

Определение. Дифференциалом Df функции f назовем меру, определяемую следующим образом:

$$Df(\vec{l})=Df(\vec{uv}) \overset{def}{=} f(v)-f(u)$$

Лемма. $Df=0 \Leftrightarrow f=const$.

Теорема 3. $D(\mathbb{R}^G)=Reg(G)$.

Теорема 4. $\dim Reg(G)=m^*(G)$ ($m^*(G)$- цикломатическое число графа G - см. [2]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Боровских А.В., Колмыков В.А. Интегрирование по дискретным мерам на графах // Тез.докл.школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы математики и механики". Воронеж, 1995. С. 49.

2. Харари Ф. Теория графов. М., Мир. 1972.

Булгаков А.И., Беляева О.П. (Тамбов)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕВЫПУКЛОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Пусть R^n - пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $L_1^n[a,b]$ пространство функций $x:[a,b]\to R^n$ с суммируемыми по Лебегу компонентами и нормой $\|x\|_{L_1}=\int_a^b|x(s)|ds$; $D^n[a,b]$ - пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_D=|x(a)|+\int_a^b|\dot{x}(s)|ds$; $C^n[a,b]$ - пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_C=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$.

Будем говорить, что множество $\Phi\subset L_1^n[a,b]$ выпукло по переключению (разложимо), если для любых измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\subset[a,b]$, таких, что $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\emptyset$, $\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2=[a,b]$ и любых $x,y\in\Phi$ справедливо включение $\chi(\mathcal{U}_1)x+\chi(\mathcal{U}_2)y\in\Phi$, где χ - характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим через $\Pi[L_1^n[a,b]]$ множество всех непустых замкнутых ограниченных и выпуклых по переключению подмножеств из $L_1^n[a,b]$.

Доклад посвящен следующей краевой задаче

$$\mathcal{L}x\in\Phi(x),\ \ell x=\varphi(x). \qquad (1)$$

Здесь непрерывный по Хаусдорфу многозначный оператор $\Phi:C^n[a,b]\to\Pi[L_1^n[a,b]]$. Непрерывный вектор-функционал $\varphi:C^n[a,b]\to R^n$; $\ell:D^n[a,b]\to R^n$ и $\mathcal{L}:D^n[a,b]\to L_1^n[a,b]$ - линейные непрерывные отображения.

Решением задачи (1) называется абсолютно непрерывная функция $x:[a,b]\to R^n$, удовлетворяющая включению и равенству в (1).

В докладе рассматриваются вопросы существования решения и вопрос о "бэнг-бэнг" принципе задачи (1).

Буробин А. В. /Обнинск/

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ ПРИ УЧЕТЕ ДИФФУЗИИ

Рассматривается кинетическое уравнение коагуляции /см. [1]/

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(v f) - \operatorname{div}(\mathcal{D}\nabla f) = St_{\Phi}(f, f), \qquad /1/$$

где:

$$St_{\Phi}(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\int_0^x \Phi(x-y,y)\varphi(x-y)\psi(y)\,dy - \varphi(x)\int_0^\infty \Phi(x,y)\psi(y)\,dy.$$

Задача Коши для уравнения /1/ изучалась в работе [2]. В данном докладе обсуждается постановка начально-краевых задач для этого уравнения, приводятся условия их разрешимости в обобщенном смысле.

Литература

1. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах.- Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

2. Буробин А. В. О задаче Коши для пространственно неоднородного уравнения коагуляции при учете диффузии.- Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 10, с. 1806-1808.

Бут Н.Л., Ризун В.И., Сухинин В.А. (Алчевск)

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ)

Известно, что одним из эффективных подходов решения некоторых классов краевых задач являются методы, основанные на теории ортогональных рядов и ортогональных систем функций [1,2]. Но детальное изучение ортогональных рядов показало, что они (в том числе и ряды Фурье) обладают медленной скоростью сходимости [3]. Более того, дальнейшие исследования обнаружили, что даже для непрерывных функций соответствующие тригонометрические (Лузин Н.Н.) и общие ортогональные ряды (Орлич В.) [3] могут оказаться расходящимися почти всюду с коэффициентами $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обнаруженные такие плохие свойства ортогональных рядов (в том числе рядов Фурье) позволяют сделать вывод, что применение методов, основанных на ортогональных рядах и ортонормированных системах функций, к решению задач в неклассических ситуациях встречает, как правило большие трудности, а порой во многих задачах и в принципе их применять нельзя.

Существуют и другие подходы к решению отмеченных выше задач и их недостатки.

В настоящей работе излагается новый подход к решению краевых задач, основанный на ММВФ. Этот подход позволяет решать такие краевые задачи, которые либо существующими методами не решались либо применение их встречало большие (вычислительные и др.) трудности.

1. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных подвижных обьектов. - Киев: ИСИО, 1994. - 409 с.
2. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991. - 332 с.
3. Ульянов П.Л. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов.- УМН, т.19, вып.1 (115), 1964. - 3-69 с.

Вайсман К.С. (Орехово-Зуево)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГАРАНТИРУЮЩИХ РАВНОВЕСИЙ ПО БЕРЖУ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ.

Рассматривается бескоалиционная линейно-квадратичная дифференциальная игра трех лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1,2,3\},\ \Sigma^{\varepsilon},\ \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3},\ \mathcal{Z},\ \{J_i(U,Z,t_*,x_*)\}_{i=1,2,3} \rangle$$

где

$$\Sigma^{\varepsilon} \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3 + \varepsilon z,\ x(t_*)=x_*;\quad x,u_i,z \in \mathbb{R}^n;$$

$A(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$, $\vartheta = \mathrm{const} > 0$, $(t_*,x_*) \in [0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$; малый параметр $\varepsilon > 0$; множества стратегий i-го игрока:

$$\mathcal{U}_i = \{U_i \div u_i(t,x) \mid u_i(t,x) = Q_i(t)x,\ Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\};$$

множество неопределенностей:

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z(t,x) \mid z(t,x) = P(t)x,\ P(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\};$$

функция выигрыше i-го игрока $(i=1,2,3)$

$$J_i(U,Z,t_*,x_*) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_*}^{\vartheta}\Big(\sum_{j=1}^{3} u_j'[t]D_{ij}u_j[t] + z'[t]L_i z[t]\Big)dt,$$

где $n\times n$ матрицы C_i, D_{ij}, L_i постоянны и симметричны.

Используя подход, предложенный в [1] (аналог седловой точки антагонистической игры), решение игры Γ определяется как пара (U^B, Z_K), $(K = S,P,G)$ где

- U^B – ситуация равновесия по Бержу для игры

$$\langle \{1,2,3\},\ \Sigma^{\varepsilon},\ \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3},\ \{J_i(U,Z_K,t_*,x_*)\}_{i=1,2,3} \rangle;$$

- Z_K $(K = S,P,G)$ – минимальная по Слейтеру, по Парето или по Джоффриону неопределенность в задаче

$$\langle \mathcal{Z},\ \{J_i(U^B,Z,t_*,x_*)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

<u>Утверждение.</u> Пусть $D_{ii} = D_0 \geqslant 0$, $D_{ij} = -D_1 < 0$, $C_i = C \leqslant 0$, $L_i = L > 0$ $(i,j = 1,2,3,\ i \neq j)$.

Тогда при достаточно малых ε в игре Γ существуют гарантирующие равновесия Бержа.

Литература

1. Zhukovskiy V.I., and Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. New York: Academic Press, Inc.,1994. 404p.

Валеев К.Г., Арутина О.Л. (Киев)

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Исследуется система управления вида

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\varsigma(t))X(t) + B(\varsigma(t))U(t), \tag{1}$$

где $\varsigma(t)$ - полумарковский случайный процесс, принимающий конечное число значений $\theta_1,\dots,\theta_n$ с интенсивностями $q_{ks}(t)$ перехода из состояния θ_s в состояние θ_k. Ищется оптимальное управление $U(t)$, минимизирующее функционал

$$\upsilon = \int_0^\infty \left\langle X^*(t)Q(\varsigma(t))X(t) + U^*(t)L(\varsigma(t))U(t)\right\rangle dt. \tag{2}$$

Пусть $\varsigma(t)$ имеет скачки в последовательные моменты времени t_j $(j = 0,1,2,\dots)$, $t_0 = 0$. Показано, что при $t_j \le t < t_{j+1}$, $\varsigma(t) = \theta_k$ оптимальное управление имеет вид

$$U(t) = -L_k^{-1}B_k^*R_k(t - t_j)X(t), \quad L_k \equiv L(\theta_k), \quad B_k \equiv B(\theta_k),$$

где симметрические матрицы $R_k(t)$ удовлетворяют матричной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dR_k(t)}{dt} = -Q_k - A_k^*R_k(t) - R_k(t)A_k + R_k(t)B_kL_k^{-1}B_k^*R_k(t) -$$

$$-\frac{\dot\psi_k(t)}{\psi_k(t)}R_k(t) - \sum_{l=1}^{n}\frac{q_{lk}(t)}{\psi_k(t)}R_l(t), \quad \psi_k(t) \equiv \int_t^\infty \sum_{s=1}^{n} q_{sk}(t)dt. \tag{3}$$

Если $\varsigma(t)$ - марковский случайный процесс, то система уравнений (3) имеет постоянные коэффициенты и имеет стационарное решение R_k $(k = 1,\dots,n)$.

Васильев В.Б./ Новгород /

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУГРАННОМ УГЛЕ

Под двугранным углом в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ понимается множество вида
$E_+^m = \mathbb{R}^{m-2} \times C_+^2$, $\quad C_+^2 = \{(\xi_{m-1}, \xi_m) \in \mathbb{R}^2 : \xi_m > |\xi_{m-1}|\}$,
на котором рассматривается псевдодифференциальное уравнение
(*) $PAu = 0$ / правая часть выбрана нулевой для простоты записи /, где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$,

$$c_1 \le |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \le c_2,$$

который допускает специальное представление

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)\, A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ обладают рядом свойств /так, $A_{\neq}(\xi)$ должен допускать аналитическое продолжение в радиальную трубчатую область $T(C_+^2) = \mathbb{R}^2 + iC_+^2$ по переменным ξ_{m-1}, ξ_m при фиксированном $(\xi_1, \ldots, \xi_{m-2}) \equiv \xi''$ с оценкой

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi'', \xi_{m-1} + i\tau_{m-1}, \xi_m + i\tau_m)| \le c(1+|\xi|+|\tau|)^{\pm æ}, \quad \tau = (\tau_{m-1}, \tau_m) \in C_+^2,$$

P – оператор сужения на E_+^m, решение u ищется в пространстве $H^s(E_+^m)$ Соболева – Слободецкого.

Теорема. Пусть $æ - s = n + \delta$, $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\delta| < 1/2$. Любое решение уравнения (*) в образах Фурье имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\big(\tilde{c}_k(\xi'', \xi_{m-1} - \xi_m)(\xi_{m-1} + \xi_m)^k + \tilde{d}_k(\xi'', \xi_{m-1} + \xi_m)(\xi_{m-1} - \xi_m)^k\big)\Big),$$

где c_k, d_k – произвольные функции из $H^{s_k}(\mathbb{R}_-^{m-1})$, $H^{s_k}(\mathbb{R}_+^{m-1})$ соответственно, $\mathbb{R}_\pm^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^{m-1} : \pm x_{m-1} > 0\}$, $s_k = s - æ + k + 1/2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Имеет место априорная оценка

$$\|u\|_s \le c\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\big([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k}\big)\Big),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ обозначает норму в $H^{s_k}(\mathbb{R}^{m-1})$.

Если $n = 0$, то уравнение (*) имеет в пространстве $H^s(E_+^m)$ только тривиальное решение $u = 0$.

В случае $n < 0$ решение уравнения (*) тоже существует, но, вообще говоря, не принадлежит пространству $H^s(E_+^m)$.

Вельмисов П.А., Решетников Ю.А. (Ульяновск)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОУПРУГОСТИ.

Исследуется квазистатическая и статическая устойчивость, а также единственность, решений одного класса задач о движении трансзвукового потока газа между деформируемыми упругими пластинами. Приведем в качестве примера математическую постановку квазистатической задачи, сформулированную в рамках теории малых возмущений

$$2\phi_{xt}+(\gamma+1)\phi_x\phi_{xx}=a_0\phi_{yy},\quad x\in(0,x_0),\quad y\in(0,y_0) \tag{1}$$

$$L_1(w_1)=\rho_0 a_0\phi_x(x,0,t),\quad x\in(0,x_0) \tag{2}$$

$$L_2(w_2)=-\rho_0 a_0\phi_x(x,y_0,t),\quad x\in(0,x_0) \tag{3}$$

$$\phi_y(x,0,t)=a_0\dot{w}_1(x,t),\quad \phi_y(x,y_0,t)=a_0\dot{w}_2(x,t),\quad x\in(0,x_0) \tag{4}$$

$$L_k(w_k)=(D_k(x)w_k'')''+(N_k(x)w_k')'+\beta_k(x)w_k+g_k(w_k,w_k',w_k''),\quad k=1,2$$

Здесь x,y – декартовы координаты, t – время; искомыми функциями являются потенциал скоростей $\phi(x,y,t)$ и прогибы пластин $w_k(x,t)$; γ,a_0,ρ_0 – заданные постоянные; g_k,D_k,N_k,β_k – заданные функции; индексы снизу обозначают частные производные, штрих – производную по переменной x. Уравнения и условия (1)-(4) следует дополнить граничными условиями при $x=0$, $x=x_0$ и начальными условиями при $t=0$ для ϕ и w_k, они определяются в процессе решения задачи.

Исследование устойчивости и единственности решений задачи (1)-(4) проводится на основе "смешанных" функционалов, зависящих от ϕ и w_k. В качестве примера приведем один из них

$$J(t)=\iint_s\phi_x^2\,ds+\frac{a_0}{2\rho_0}\sum_{k=1}^{2}\int_0^t\int_0^{x_0}\left[-D_k'w_k''^2+N_k'w_k'^2-\beta_k'w_k^2+2g_k(w_k,w_k',w_k'')w_k'\right]dx\,dt,$$

где $s=\{(x,y):0<x<x_0,\ 0<y<y_0\}$.

В статическом случае ($\phi_t=0$, $w_{kt}=0$), когда уравнение (1) имеет смешанный тип, исследуется бифуркация решений задачи (1)-(4).

Виноградова Т.К. (Санкт-Петербург)

О ПОСТРОЕНИИ СИНТЕЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ

Рассматривается класс экстремальных задач с негладкой целевой функцией. К этому классу можно отнести минимаксные задачи, задачи на минимум выпуклых функций и т.д. Развитие теории минимаксных задач обусловлено развитием достаточно общей теории экстремальных задач,например,(1). В рамках общей теории минимаксные задачи приобрели относительную самостоятельность. Одно из сравнительно новых направлений исследований-задачи оптимального управления с негладким критерием оптимальности.

Рассматриваются задачи нахождения оптимальных управлений объектами, состояние которых может быть описано системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, осложненных, в частности, наличием постоянного или переменного запаздывания (2). Правая часть системы содержит, кроме управляющей функции, параметр, принимающий значения из некоторого заданного множества и характеризующий внешнее воздействие на объект. Требуется построить синтезирующее управление, доставляющее минимум негладкому функционалу.

Исследование таких задач можно проводить в разных направлениях, в частности, предлагаются различной силы необходимые условия и построенные на их основе численные методы решения (2),(3).

Литература.

1.Дубовицкий А.Я.,Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Журнал выч.мат. и мат. физики 1965, т.5, №3, с.395-453.

2.Виноградова Т.К. Негладкая задача с отклоняющимся аргументом, Известия ГЭТУ, вып.472, С-Петербург, 1994, с.29-33.

3.Виноградова Т.К. О необходимых условиях в минимаксных задачах управления. Известия Санкт-Петербургского электротехнического института, сборник научных трудов, вып. 449,1992,с.39-44.

Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. (Самара)

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Для уравнения

$$\int\limits_z^x \int\limits_s^x \varphi(t,s)(x-t)^{-\alpha}(t-s)^{-\beta}\,dt\,ds = g(x,z), \qquad (\mathrm{I})$$

$0<\alpha,\ \beta<1$, в области $K=\{(x;z)\mid z<x\}$ обоснованы существование и единственность решения, а также получена формула обращения.

Пусть $K_0=\{(x;z)\mid a\le x\le b,\ z<x\}$, $a,b\in R$, $a<b$.

Т е о р е м а. Если функция $g(x,z)\in C(\bar K)$, $g''_{zx}(x,z)\in C(K)\cap L(\bar K)$, при этом $g(x,x)=0$, $g''_{z\eta}(\eta,s)=\dfrac{g_0(\eta,s)}{(x-\eta)^{p_1}(x-s)^{p_2}}$, $g_0(\eta,s)\in C(\bar K_0)$, $0<p_1,\ p_2,\ p_1+p_2<\alpha+\beta$, то единственное решение уравнения (I) в области K функция $\varphi(x,z)$, абсолютно интегрируемая в области $\bar K_0$, определяется формулой

$$\varphi(x,z) = -\frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}(x-z)^{\alpha+\beta-1}g'_z(z,z) -$$

$$-\frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}(x-z)^{\beta}\int\limits_z^x (x-\eta)^{\alpha-1}g''_{z\eta}(\eta,z)\,d\eta. \qquad (2)$$

Формула (2) применяется при решении краевых задач для некоторых дифференциальных уравнений третьего порядка в трехмерном евклидовом пространстве.

Вульман С.А., Семыкина Т.Д. (Воронеж)

Использование предельных теорем для оптимизации расчета несущей способности пластин произвольной формы.

Линейное программирование является эффективным аппаратом расчета несущей способности пластин. Однако, применение его затруднено из-за необходимости вводить большое количество элементов, что приводит к трудоемкому процессу формирования матрицы линейного программирования. Предлагается автоматизировать этот процесс , а так же учет граничных условий.

Кроме того, введение прямоугольной сетки для пластин произвольной формы дает аппроксимацию области, которая влияет на коэффициент запаса, так как часть точек пластины может оказаться вне рассчитываемой области; с другой стороны , в нее войдут точки, не принадлежащие пластине. Поэтому предлагается две прямоугольные сетки разбиения срединной плоскости пластины: первая - целиком лежащая внутри границы пластины; вторая - первая и дополняющая ее элементами , включающими границу.

Как следует из теоремы предельного равновесия [1] , действительный коэффициент запаса находится между коэффициентами запаса вписанной и описанной областей. Для каждой, из вышеуказанных прямоугольных сеток, решается задача линейного программирования. Причем, формирование входных данных этих задач отличается только вводом некоторых топологических матриц.

1. Проценко А.М. Теория упруго-идеальнопластических систем - М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1992 - 288 с.

Гадецкая С.В. /Харьков/

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НАГРУЗКАМИ НА ОТРЕЗКАХ И В ТОЧКАХ.

Рассмотрена задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) + \sum\limits_{k=0}^{N} R_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x_k,t) + \sum\limits_{k=0}^{N} S_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x_k,t_k), & (1) \\ \sum\limits_{k=0}^{N} A_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t_k) = u_0(x) & (2) \end{cases}$$

в полосе $\mathbb{R} \times [0,T]$. Здесь $P(s), R_k(s), S_k(s), A_k(s), k=\overline{0,N}$ — произвольные полиномы, $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T<+\infty$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{0,N}$.

Соответствующая задача без нагрузок исследована в [1], в [2] изучена аналогичная задача с нагрузками на прямых.

Получены следующие результаты.

1. Найдены классы единственности решения задачи (1)-(2), при этом выявлен "новый" по сравнению с соответствующей задачей без нагрузок класс функций $f(x)$ таких, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)|x|^{-1}=0$.
2. Найдены условия корректной разрешимости задачи (1)-(2) в пространствах функций степенного роста и убывания /определение см. в [1] /, а также в пространствах функций экспоненциального роста.
3. Для указанного выше "нового" класса единственности изучен вопрос разрешимости задачи (1)-(2).
4. Рассмотрены различные частные случаи задачи (1)-(2). Так, например, показано, что задача Коши для уравнения (1) с нагрузками только на отрезках всегда корректна в классах корректности задачи Коши для соответствующего уравнения без нагрузок, содержащих ограниченные функции.

Интересно отметить, что значения полиномов $S_k(is)$, $R_k(is)$, $k=\overline{0,N}$, /кроме $s=0$ / и значения чисел x_k, $k=\overline{0,N}$, не оказывают влияния на единственность и корректность задачи (1)-(2); при этом существенна арифметическая природа чисел t_k /при k таких, что $A_k(is)\not\equiv 0$ /.

1. Борок В.М., Евдокимова С.В.// Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1989. Вып. 51. С.31-37.
2. Гадецкая С.В.// Тезисы докладов школы "Современные методы в теории краевых задач". Воронеж. 1993. С.11.

ГАЛЛАМОВ М.М. (Таганрог)

H - фредгольмовы операторы в абстрактных пространствах Винера (АПВ).

Пусть (H_n, B_n) - АПВ [1, с. 57], $\|\cdot\|_n$ - B_n-норма, $|\cdot|_n$ - H_n-норма; $I_n \in \mathcal{L}(H_n, H_n)$, $I_n x_n = x_n$, $n = 1, 2$.

Оператор $A: H_1(\subset B_1) \to H_2(\subset B_2)$ называется H-фредгольмовым, если найдется такой $J \in \mathcal{L}(H_2; H_1)$, что $JA = I_1 + K_1$, $AJ = I_2 + K_2$, где $K_n \in \mathcal{L}(H_n, H_n)$ и полунормы $|K_n(\cdot)|_n$ измеримы на H_n [1, с. 55]. В силу последнего K_n компактен [1, с. 63]. Следовательно $A: H_1 \to H_2$ фредгольмов и имеет место: $H_2 = A(H_1) \oplus N_A$, $H_2 = \ker J \oplus M_1$ [2, с. 84].

Пусть $M = A(H_1) \cap M_1$, тогда $J_M: M \to J(M)$ представляет собой изоморфизм.

Теорема. Если $A: H_1(\subset B_1) \to H_2(\subset B_2)$ H-фредгольмов и

$$\sup_{x \in M \setminus 0} \frac{|J_M x|_1}{\|x\|_2 + |K_2 x|_2} < \infty, \quad \sup_{x \in J(M) \setminus 0} \frac{|J_M^{-1} x|_2}{\|x\|_1 + |K_1 x|_1} < \infty,$$

то существует такой носитель S_1 меры Винера p_1 на B_1, что A допускает непрерывное расширение $A_1: S_1 \to B_2$, представляющее собой оператор Фредгольма.

1. Го Х.- С. Гауссовские меры в банаховых пространствах.- М.; Мир - 1979.

2. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. - М.: Наука - 1979.

Гарбуз Е.В., Гончарова Г.А., Паксютова Е.В. (Саратов)

ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК И АГРЕССИВНЫХ СРЕД

Рассматривается задача оптимального проектирования составных оболочечных конструкций, находящихся в условиях совместного воздействия механических нагрузок и физически активных сред. Оптимальное проектирование осуществляется с целью предельного понижения концентрации напряжений в зонах соединения оболочек. Управление осуществляется формой области, занимаемой конструкцией.

В качестве критерия оптимальности выбирается функционал, определяющий меру возмущения напряженно-деформированногосостояния оболочки с учетом воздействия агрессивной среды. Этот функционал может быть записан через перемещения с использованием уравнений состояния и геометрических соотношений.

Проектирование рассматриваемой оболочечной конструкции выполняется в предположении, что часть ее поверхности является заданной, а другая часть варьируется в некоторых задаваемых пределах.

Методика решения рассматриваемой задачи строится на основе принципа пошаговой параметрической оптимизации с использованием численных методов. Из заданного начального приближения меридиан искомой поверхности исследуемой оболочки аппроксимируется интерполяционным сплайном. После чего область занимаемая оболочкой, представляется совокупностью кольцевых конечных элементов. При этом используется послойная аппроксимация оболочки по толщине. В результате проведенной дискретизации задачу оптимального проектирования оболочки можно рассматривать как задачу нелинейного математического программирования относительно вектора управления, компоненты которого параметризируют исследуемую поверхность.

Алгоритм решения полученной задачи нелинейного программирования основан на малых вариациях вектора управления и многократном решении задачи расчета напряженно-деформированного состояния оболочки. Для этого на каждом шаге итерационного процесса используется метод конечных элементов. Критерием окончания процесса является выполнение условия малости шага варьирования компонент вектора управления.

УДК 624.074

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Гарбуз Е.В., Пахолтова Е.В.

Исследуется поведение цилиндрических конструкций при совместном воздействии механических нагрузок, температурного поля и коррозионной среды, вызывающей коррозионный износ поверхностей конструкций.

При построении математических моделей воздействия среды на конструктивные элементы важным является определение основных факторов, приводящих к разрушению конструкции. Рассматривается несколько моделей, описывающих кинетику коррозионного износа и исследуются эффекты, к которым приводит учет совместного действия нагрузки, температуры и коррозионной среды. Для описания кинетики коррозионного износа независимо от вида напряженного состояния в одной из рассматриваемых моделей предлагается использовать для характеристики влияния напряженного состояния удельную энергию деформирования разрушаемого объема конструкции.

Как показывает анализ, это позволяет использовать экспериментальные данные при одном виде напряженного состояния для идентификации моделей, описывающих кинетику коррозионного износа для других видов напряженного состояния. В других моделях для этого используется интенсивность напряжений и среднее напряжение.

При сопоставлении моделей они использовались для определения напряженно-деформированного состояния толстостенной цилиндрической оболочки. В уравнения моделей вошли физические соотношения, уравнение неразрывности деформаций и уравнение равновесия, к которым добавлено уравнение, описывающее распределение температуры по толщине оболочки.

Проведенные численные исследования показали, что наиболее широкую область применения имеет энергетическая модель, обеспечивающая достаточно хорошее описание кинетики коррозионного износа независимо от уровня и вида напряженного состояния. Анализ расчетов показал, что при математическом моделировании следует учитывать неравномерность температурного поля, так как в противном случае характер распределения напряжений оказывается качественно другим. Анализ расчетов показывает, что разработанная математическая модель является эффективной и позволяет производить оценку напряженно-деформированного состояния и долговечности толстостенных оболочечных конструкций.

Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург)

НЕВЫЧИСЛИМОЕ НА ЭЦВМ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УСТОЙЧИВОЕ В ЦЕЛОМ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении краевой задачи сведением её к задаче Коши с целью предварительного анализа часто применяют численные методы на ЭЦВМ. Известно, что уменьшение модуля накопленной ошибки численного метода (по определению сходимости метода) теоретически возможно до нуля, а практически на ЭЦВМ такое уменьшение возможно до модуля накопленной ошибки округлённого представления вычисляемых вещественных чисел. Иногда решение задачи Коши невычислимо на ЭЦВМ в том смысле, что невозможно добиться желаемой абсолютной точности вычисленного решения задачи Коши применяемым численным методом.

Например, экспоненциально устойчивое в целом периодическое решение следующей краевой задачи

$$dx/dt = -ax + by + \sin(t+u), \quad dy/dt = -bx - ay + \cos(t+u),$$
$$x(0) = x(2\pi), \quad y(0) = y(2\pi),$$

где $t, x, y \in R^1$, $a = (1-\cos(u))/u$, $b = \sin(u)/u$, $u = 2^{-m/3-1}$, m – число двоичных разрядов в мантиссе вещественного числа ЭЦВМ, не может быть вычислено с точностью до π методом ломаных Эйлера с переменным шагом интегрирования h_k потому, что для любого попадающего в π-окрестность искомого периодического решения этим способом найденного приближённого решения x_k, y_k, $k = 0, 1, \ldots$, начиная со значения k, при котором s_k, равное $h_1 + h_2 + \ldots + h_k$, достигает 2π, или модуль накопленной ошибки метода превышает s_k, или модуль накопленной ошибки округления превышает s_k. Рассматриваемый пример краевой задачи построен на основе применения работы [1] и вычислительного экспериментирования на ЭЦВМ ЕС 1045 с простой и удвоенной точностью представления чисел.

Литература

1. Гурьянов А. Е. Качественный анализ численного метода решения задачи Коши / Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". Саранск, декабрь 1994 г. Изд-во Мордовского университета, С. 55.

Гусев Е.Л. (г.Якутск)

О ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫХ С ОПТИМАЛЬНЫМ СИНТЕЗОМ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР ПРИ ВОЛНОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассматривается проблема применения НУО, связанных с нелокальными вариациями управляющих параметров, для разработки эффективных методов решения задач оптимального управления, связанных с синтезом неоднородных структур. При достаточно общих предположениях о характере взаимодействия волнового процесса с неоднородной средой задачи синтеза неоднородных структур при волновых воздействиях различной физической природы (электромагнитных, акустических, температурных, упругих) могут быть сформулированы в единообразной форме в виде задач оптимального управления составными системами специального вида. Исследованы различные аспекты применения НУО в задачах синтеза слоистых структур. На основе НУО разработаны вычислительные процедуры оптимизации, позволяющие осуществлять одновременное варьирование всех параметров, определяющих структуру неоднородной среды. Установлены качественные закономерности оптимальных структур. Разработан качественно новый путь сжатия множества допустимых вариантов неоднородных структур, состоящий в исследовании возможности предварительного выделения узкого компактного множества, содержащего совокупность всех вариантов, реализующих предельные возможности. Для достаточно широкого круга волновых задач синтеза показано, что структуры, реализующие предельные возможности, обладают внутренней симметрией, что позволило впервые полностью решить проблему синтеза для этих задач.

В результате показано, что наиболее полное и всестороннее исследование НУО позволяет создавать эффективные методы исследования предельных возможностей для достаточно сложных многоэкстремальных задач оптимизации с дискретно-непрерывной областью управления для управляющих параметров.

Гуц А.К. (Омск)

ОБ ОДНОРОДНОСТИ ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Пусть $P = \{P_x : x \in Л^n\}$ — порядок, инвариантный относительно действия просто транзитивной подгруппы T изометрий n-мерного пространства Лобачевского $Л^n$, $n \geqslant 3$. Предполагаем, что T изоморфна основной аффинной группе Ли (ее алгебра Ли изоморфна алгебре Ли полупрямого произведения группы параллельных переносов в R^{n-1} и подобий). Рассматриваемый порядок удовлетворяет условиям:

1) существует окрестность U точки e такая, что $U \cap \bar{P}_e \cap \bar{P}_e^- = \{e\}$, где $P_x^- = \{y : x \in P_y\}$;

2) квазиконтингенция $qc(\bar{P}_e, e) \neq L \times K$, где L, K -квазиконусы и $int(qc(P_e, e)) \neq \emptyset$. (см. [1]).

Пусть $Aut(P)$ группа непрерывных порядковых автоморфизмов. Порядок P называется внешне однородным (соотв.: гранично или внутренне однородным), если стабилизатор $Aut(P)_e$ действует транзитивно на $Л^n \setminus (P_e \cup P_e^-)$ (соотв.: на $Fr(P_e) \setminus \{e\}$ или на $int(P_e)$).

ТЕОРЕМА. Если порядок P в $Л^n$, $n \geqslant 3$, удовлетворяет условиям 1) и 2), то он не может быть ни внешне, ни гранично, ни внутренне однородным.

Данный результат согласуется с аналогичными для разрешимых трехмерных групп Ли [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Сиб.мат.ж.-1986.-Т.27, Т 3.- С.51-67.

2. Шаламова Н.Л. Однородные аффинные левоинвариантные порядки на разрешимых группах Ли. - 1991. - Деп. в ВИНИТИ. N 1925 - В91.

УДК 517.53

В.И.Данченко

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НА КРИВЫХ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

Через Ω обозначим класс простых спрямляемых кривых Γ на $\mathbb{C}$ с конечной плотностью $\omega(\Gamma)=\sup\{mes_1(\Gamma\cap\Delta)/diam\,\Delta\}$, где $\sup$ берется по всем открытым кругам Δ. Пусть G – некоторая область на $\overline{\mathbb{C}}$ и R – рациональная функция (р.ф.), полюсы которой не лежат на ∂G. Через R_G обозначим сумму главных частей лорановских разложений р.ф. R относительно всех ее полюсов, лежащих в G, а в случае $\infty\in G$ и главной части разложения относительно ∞, под которой будем понимать многочлен P с $\lim\limits_{z\to\infty}(P(z)-R(z))=0$. В случае жордановой области, очевидно, $R=R_G+R_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}}$. Для спрямляемой кривой Γ и измеримой на Γ функции f положим $\|f\|_{p,\Gamma}=\left(\int_\Gamma|f(z)|^p|dz|\right)^{1/p}$, $1<p<\infty$, $\|f\|_{\infty,\Gamma}=\sup vrai\{|f(z)|:z\in\Gamma\}$. Далее, пусть G – некоторая область и f – аналитическая в G функция. При $\alpha>0$, $\lambda>0$ введем квазинорму Харди-Литтлвуда $\|f\|_{\alpha,\lambda,G}=\left(\int_0^{\rho_0}\rho^{\alpha\lambda-1}\|f\|^\lambda_{\lambda,\partial G_\rho}d\rho\right)^{1/\lambda}$, где G_ρ $(0<\rho<\rho_0)$ – некоторое убывающее семейство областей, являющихся компонентами связности множеств $\{z\in G:\rho(z,\partial G)>\rho\}$.

Теорема 1. Пусть G – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ с границей $\Gamma=\partial G\in\Omega$, R – р.ф., полюсы которой не лежат на Γ, $n=\deg R_G$, $1<p\le\infty$, $\mu=1,2,\dots$, $1/s=\mu+1/p$. Тогда
$$\|R_G^{(\mu)}\|_{s,\Gamma}\le C(p,\mu)\,\omega^{\mu+3}(\Gamma)\,n^\mu\,\|R\|_{p,\Gamma}.$$
Оценка точна по порядку величины n. Условие $\Gamma\in\Omega$ ослабить нельзя.

Далее, при $0<s_1<1$, $s_2=1-s_1/p$ и при всех $z\in\mathbb{C}$ имеем равномерную оценку
$$\left(\int_\Gamma|R_G(\xi)|^{s_1}|\xi-z|^{-s_2}|d\xi|\right)^{1/s_1}\le C(s_1,p,\mu,\Gamma)\,n^{1/s_1-1/p}\,\|R\|_{p,\Gamma}.$$

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 область G является жордановой, $G'=\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}$. Тогда при $s<\lambda<1$, $\alpha=1/s-1/\lambda$ имеем
$$\|R_G^{(\mu)}\|_{\alpha,\lambda,G'}\le C(p,\mu,\Gamma)\,n^{1/\lambda-1/p}\,\|R\|_{p,\Gamma}.$$
Оценка точна по порядку величины n. Если $\lambda\ge1$, $\alpha=1/s-1/\lambda$, то
$$\|R_G^{(\mu)}\|_{\alpha,\lambda,G'}\le C(p,\mu,\Gamma)\,n^{1/\lambda(1-1/p)}\,\|R\|_{p,\Gamma}.$$

Денисов В.С. (Витебск)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \psi(y) + f(x) \qquad \dot{y} = g(x). \tag{I}$$

При $\psi(y) \equiv y$ имеем систему нелинейных колебаний, исследованию существования предельных циклов которой посвящены многие работы. В настоящем докладе методы исследования существования предельных циклов системы нелинейных колебаний распространяются на систему (I). Найдены достаточные условия существования по крайней мере двух предельных циклов системы (I). Сформулируем некоторые результаты.

Теорема I. Если выполнены условия:

A: функции $f(x)$, $g(x)$, $\psi(y)$ – нечетные, $\psi(y) \to +\infty$ при $y \to +\infty$ и монотонно возрастает;

B: $f(x) < 0$ на $(0; x_1)$; $f(x) > 0$ на (x_1, x_3) ; $g(x) < 0$ на $(0; \infty)$;

C: $\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in (x_1, x_3)$ такие, что выполняются неравенства:

$$\Psi(x_2) \geq 2\Psi(x_1)/(1-\gamma), \; G(x_3) - G(x_2) > F(\psi^{-1}(\gamma M)) + 2M\psi^{-1}(\gamma M),$$ где

$$\Psi(x) = \int_0^x -g(s)f(s)\,ds, \; G(x) = \int_0^x -g(s)\,ds, \; F(y) = \int_0^y \psi(s)\,ds, \; M = \max_{[0, x_3]} |f(x)|,$$

то тогда система (I) в полосе $-x_3 \leq x \leq x_3$ имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы I и следующие:

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} (-f(x) + G(x)) = \infty, \; \underline{\lim_{x \to +\infty}} (-f(x)) > 0, \; \lim_{x \to +\infty} G(x) = \infty,$$

то система (I), где

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} y^{2i-1}, \; a_{2i-1} \in R, \; a_{2n-1} > 0$$

имеет по крайней мере два предельных цикла.

Найдены также достаточные условия единственности устойчивого предельного цикла.

И.А.Дободейч

О КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВКИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

1. При рассмотрении некоторых задач, относящихся к теории газовой смазки, движения плоских предметов на воздушной прослойке и др. ряд исследователей используют в качестве исходных упрощенные уравнения Стокса для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости (в.н.ж.) при отсутствии объемных сил.
$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi} \qquad (1)$$
$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial P}{\partial r} \qquad (2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \qquad (3)$$

Причем анализ конкретной задачи проводится при дополнительных упрощающих условиях [1,2] об изотермичности течения в.н.ж. и
$$\partial P / \partial r = 0 \, . \qquad (4)$$

Здесь r и φ – радиальная и угловая координаты, u и v – скорости по направлениям отсчета r и φ, P и μ – давление и динамическая вязкость.

2. При (4) согласно (2) имеет место $\frac{\partial u}{\partial r} = f_1(\varphi)$. Следовательно, в силу (3) $v = f_2(r) - r\int f_1(\varphi)d\varphi$. Отсюда с учетом (1) и (4)
$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \mu C_2 \, , \qquad C_i = Const \, , \qquad \frac{df_2}{dr} = C_2 \ln r + C_3 \, .$$
Физическому смыслу соответствуют только функции, удовлетворяющие условиям
$$P_{(\varphi)} = P_{(\varphi+2\pi)} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=0} < \infty \, , \quad \text{т.е.} \quad C_2 = 0 \, .$$
Это означает, что за допущением (4) скрывается фактически более жесткое допущение
$$P = Const \, . \qquad (5)$$

3. Согласно (1) ... (3) последнему соответствует
$$u = r f_1(\varphi) + f_3(\varphi) \quad \text{и} \quad v = C_1 - r\int f_1(\varphi)d\varphi \, , \qquad (6)$$
где $C_1 - Const$, $f_1(\varphi)$ и $f_3(\varphi)$ – произвольные.
Однако при использованных ограничениях (постоянство температуры, плотности, μ, P и стационарности течения) соответствуют ли для $f_1(\varphi) \neq 0$ и $f_3(\varphi) \neq Const$ выражения (6) физическому смыслу?

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с. (с.469) и Наука, 1987. – 840 с. (с.437).
2. Константинеску В.Н. Газовая смазка. – М.: Машиностроение, 1968. – 680 с.

Многогранники Ньютона и устойчивость по Ляпунову

Зачепа В.Р. (Воронеж)

Рассматривается система дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbf{R}^n$:

(1) $$\dot{x}_i = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$P_i(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Будем предполагать, что правые части $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются полуквазиоднородными функциями степени один с показателями $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$.

Рассмотрим $P_i(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) = a_i\, x_i^{m_i} + o(x_i^{m_i})$, где

$$m_i = \frac{1}{\alpha_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема. *Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:*

1. $a_i < 0$, *при* $i = 1, 2, \ldots, n$;

2. m_i *– нечетные натуральные числа, при* $i = 1, 2, \ldots, n$;

3. существует s $(1 \le s \le n)$ *такое, что*

$$\frac{\alpha_{si}}{\alpha_{sk}} > \frac{\alpha_{ki}}{\alpha_{kk}}, \quad \text{при} \quad i \ne k,\ k \ne s.$$

Тогда состояние равновесия системы (1) абсолютно устойчиво по Ляпунову.

Если рассмотреть многогранники Ньютона правых частей системы (1), то условие 3. имеет наглядный геометрический смысл.

УДК 513.7 Зубков А.Н. /г.Таганрог/

О СИСТЕМЕ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ОСНАЩЕНИЯ ПОЛОСЫ НА ПОДМНОГООБРАЗИИ F^m В $V^n(K)$, $n>m$, СВЯЗАННЫХ С ЕЕ КРУЧЕНИЯМИ.

Подмногообразие F^m, класса C^k, $k \geq m+1$, в пространстве $V^n(K)$, $n>m$, постоянной кривизны $K=e\,r^{-2}$, где $e=\pm 1$, $r>0$, интерпретируется в виде гиперсферы радиуса R, где $R^2=e\,r^2$, в плоском пространстве R^{n+1}. Как известно, F^m является базой своего касательного $T(F^m)$ и нормального $N(F^m)$ векторного расслоения, слоями которых являются соответственно касательное T_xF^m и нормальное $N_x(F^m)$ векторные пространства, где $x \in F^m$, а T_xF^m, $N_xF^m \subset T_xV^n \subset R^{n+1}$. Кривая $\mathcal{L} \subset F^m$ вместе с N_xF^m, $x \in \mathcal{L}$, называется поверхностной полосой на F^m. Она определяет однопараметрическое семейство реперов в сумме Уитни $P(F^m) \oplus P^{\perp}(F^m)$, где $P(F^m)$ и $P^{\perp}(F^m)$ - расслоение реперов в T_xF^m и N_xF^m, $x \in F^m$, соответственно. В $P(F^m)$ и $P^{\perp}(F^m)$ определяются связности ∇ и $\nabla^{\perp}$. Деривационные уравнения такого репера, связанного с $\mathcal{L} \subset F^m$, называются формулами Френе поверхностной полосы на F^m и записываются в виде: $\bar{R}'_s \equiv \bar{x}'_s = \bar{t}_1$, $\bar{t}'_{1s} = -\underset{(1)g}{k}\bar{t}_2 + k_1^{\alpha}\bar{e}_{\alpha} - \bar{x}\,e\,r^{-2}$, $\bar{t}'_{is} = -\underset{(i-1)g}{k}\bar{t}_{i-1} + \underset{(i)g}{k}\bar{t}_i + k_i^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$, $i=\overline{2,m-1}$, $\bar{t}'_{ms} = -\underset{(m-1)g}{k}\bar{t}_{m-1} + k_m^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$, $\bar{e}'_{bs} = -\sum_{i=1}^{m} k_i^{\alpha}\bar{t}_i + \tilde{\omega}_i^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$, $\alpha, b = \overline{m+1,n}$,

где s - натуральный параметр вдоль $\mathcal{L}$, $\bar{x}^2 = e\,r^2$, $\bar{t}_i$ - вектор i-ой единичной нормали кривой $\mathcal{L}$ в связности ∇ на F^m; $\underset{(i)g}{k}$ - геодезическая кривизна полосы, k_i^{α} - нормальная кривизна, а $\tilde{\omega}_b^{\alpha}$ - форма кручения полосы относительно ее данной единичной нормали $\bar{e}_{\alpha} \in N_xF^m$, $x \in \mathcal{L}$, и $(\bar{e}_{\alpha}, \bar{e}_b)=0$, $\alpha \neq b$. При этом $\underset{(i)g}{k}$, $i=\overline{1,m}$, являются инвариантами оснащения полосы, т.к. они не зависят от выбора базиса из векторов $\bar{e}_{\alpha}$, $\alpha=\overline{m+1,n}$, в N_xF^m, $x \in \mathcal{L}$. Справедлива

<u>ТЕОРЕМА.</u> Если векторы $\bar{k}_i = k_i^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$ и $\overset{(p)}{\bar{\nu}}_i = \overset{(p)}{\nabla}{}^{\perp}_s k_i^{\alpha}\,\bar{e}_{\alpha}$, $i=\overline{1,m}$, $p=\overline{1,n-m+1}$, линейно независимы в пространстве N_xF^m, $x \in \mathcal{L}$, то система величин $k_{ij} = (\bar{k}_i, \bar{k}_j)$, $\overset{(p)}{\nu}_{ij} = (\overset{(p)}{\bar{\nu}}_i, \overset{(p)}{\bar{\nu}}_j)$, $\overset{(0,p)}{\varepsilon}_{ij} = (\bar{k}_i, \overset{(p)}{\bar{\nu}}_j)$, $\overset{(k,q)}{\varepsilon}_{ij} = (\overset{(k)}{\bar{\nu}}_i, \overset{(q)}{\bar{\nu}}_j)$, $j=\overline{1,m}$, $k<q$, $q=\overline{2,p}$, $k=\overline{1,p-1}$, является полной системой инвариантов оснащения полосы на подмногообразии $F^m \subset V^n(K)$, $n>m$, относительно конечного набора величин k_i^{α}, $\overset{(p)}{\nabla}{}^{\perp}_s k_i^{\alpha} = \nabla^{\perp}_s(\overset{(p-1)}{\nabla}{}^{\perp}_s k_i^{\alpha})$. При этом, если $m \leq n-m$, то эта система содержит ровно $\ell = [(p+1)^2-p]\frac{m(m+1)}{2}$ функционально независимых величин, а если $m > n-m$, то это число равно $[(p+1)^2-p]\left(\frac{m(m+1)}{2} - C^2_{2m-n+1}\right)$.

Зубко Ю.И., Тюрин В.М. (Липецк)

О КОЭРЦИТИВНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В докладе приняты стандартные обозначения: $C=C(\mathbb{R}^n,X)$ - пространство непрерывных ограниченных функций $u:\mathbb{R}^n\to X$, $M^p=M^p(\mathbb{R}^n,X)$ - пространство Степанова, $L^p=L^p(\mathbb{R}^n,X)$ -пространство Лебега($n\in\mathbb{N}$, $p\geq 1$, X - банахово пространство). Пусть F одно из пространств C, M^p, L^p. Обозначим через $W^m(F)$ нормированное пространство функций $u\in F$, у которых производные $D^\alpha u\in F$ $(m\in\mathbb{N},\ |\alpha|\leq m)$, при этом,

$$\|u\|_{W^m(F)}=\sum\|D^\alpha_u\|_F\quad(|\alpha|\leq m).$$

Далее, положим

$$<u>^F_{m+1}=\sum\|D^\alpha_u\|_F\ \ (|\alpha|\leq m+1,\ u\in W^{m+1}(F)).$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$P=\sum A_\alpha(x)D^\alpha\quad(|\alpha|\leq m)$$

с непрерывными и ограниченными коэффициентами $A_\alpha:\mathbb{R}^n\to Hom(X,X)$.

Оператор $P:W^m(F)\to F$ назовем коэрцитивным оператором относительно полунормы $<u>^F_{m+1}$, если выполняется неравенство

$$\|u\|_{W^m(F)}\leq K(<u>^F_{m+1}+\|Pu\|_F)\ \ (u\in W^{m+1}(F))$$

с некоторой постоянной $K>0$.

Теорема I. Оператор $P:W^m(L^p)\to L^p$ коэрцитивен относительно полунормы $<u>^{L^p}_{m+1}$ тогда и только тогда, когда оператор $P:W^m(M^p)\to M^p$ коэрцитивен относительно полунормы $<u>^{M^p}_{m+1}$.

Теорема 2. Для коэрцитивности оператора $P:C^m\to C$ $(C^m=W^m(C))$ относительно полунормы $<u>^C_{m+1}$ достаточно, а при постоянных коэффициентах A_α оператора P и необходимо, чтобы оператор $P:W^m(M^p)\to M^p$ был коэрцитивен относительно полунормы $<u>^{M^p}_{m+1}$.

Иванов Г.Е. (Москва)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С СИЛЬНО ВЫПУКЛЫМИ ШТРАФАМИ.

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0$$

с функционалом качества

$$J = \gamma(x(T)) + \int_0^T \Big(\zeta\big(t, x(t), u(t), v(t)\big) + \alpha\big(u(t)\big) - \beta\big(v(t)\big)\Big)dt,$$

где $u(t) \in R^p$ — управление игрока, минимизирующего функционал J, $v(t) \in R^q$ — управление игрока, максимизирующего функционал J; ограничения на управления u и v учитываются неявно с помощью штрафных функций α и β, которые могут принимать значение $+\infty$.

Предполагается, что функции f, γ, ζ измеримы по t и имеют липшицевые производные по x, u, v; функции α и β — сильно выпуклы, причем их константы сильной выпуклости ограничены снизу определенными выражениями, зависящими от констант гладкости функций f, γ, ζ и отрезка времени $[0, T]$.

Основные результаты состоят в следующем:

(1) существует седловая точка в классе программных стратегий игроков:

$$\min_{u(\cdot)\in U} \max_{v(\cdot)\in V} J = \max_{v(\cdot)\in V} \min_{u(\cdot)\in U} J,$$

где U, V — множества измеримых функций $u : [0, T] \to R^p$, $v : [0, T] \to R^q$.

(2) функция цены игры гладкая

(3) принцип максимума Л.С. Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности

(4) оптимальное управление липшицевым образом зависит от времени

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00771a).

Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. (Алчевск)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ (С ИМПУЛЬСАМИ) МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ)

Известно [1-4], что в теории оптимального управления приходится встречаться с проблемой корректного определения произведения разрывных функций на обобщенные [1,2], а также решения соответствующих краевых задач [3,4].

В настоящей работе решаются эти проблемы при помощи методов, изложенных в монографиях [1,3,4]. Применяя схему А.Н.Сесекина [1, гл.5] от исходного дифференциального уравнения переходим к соответствующему аппроксимированному дифференциальному уравнению с соответствующими краевыми условиями.

Затем полученную аппроксимационную краевую задачу решаем ММВФ [3,4]. Следует при этом заметить, что введенная вспомогательная система функций и вспомогательные параметры позволяют получить решение аппроксимирующей краевой задачи с ускоренной скоростью сходимости. Кроме этого, выбор вспомогательных параметров позволяет успешно решать задачи управляемости и наблюдаемости систем управления, используя методы, изложенные в [1-5].

1. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. - М.: Наука, 1991. - 256 с.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. - М.: Мир, 1971. - 310 с.
3. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных подвижных объектов. - Киев: ИСИО, 1994. - 409 с.
4. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991. - 331 с.
5. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. - Л.: Машиностроение, 1974.- 335 с.

Ф.Э.Кадиров (г.Ташкент)

ЗАДАЧА ТИПА СТЕФАНА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $S(t)$, $0 \le t \le T$, $S(0)=c$, $0<c<\ell$, $0<\dot S(t)<1$ и решения $u(x,t)$, $\vartheta(x,t)$ уравнений

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t),\; 0<x<S(t),\; 0<t<T, \quad (I)$$

$$\vartheta_{tt}(x,t)=\vartheta_{xx}(x,t),\; S(t)<x<t+\ell,\; 0<t<T, \quad (2)$$

удовлетворяющие условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\; 0\le x\le c, \quad (3)$$

$$\vartheta(x,0)=\varphi_2(x),\; \vartheta_t(x,0)=\varphi_3(x),\; c\le x\le \ell, \quad (4)$$

$$u_x(0,t)=\psi_1(u(0,t),t),\; 0\le t\le T, \quad (5)$$

$$\vartheta_x(t+\ell,t)=\psi_2(\vartheta(t+\ell,t),t),\; 0\le t\le T, \quad (6)$$

$$u_x(S(t),t)=\vartheta_x(S(t),t)=0, \quad (7)$$

$$\dot S(t)=\alpha(t)\,u(S(t),t)+\beta(t)\vartheta(S(t),t)+\gamma(t),\; 0\le t\le T. \quad (8)$$

Здесь $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,3}$, $\psi_j(\cdot)$, $j=1,2$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – заданные функции. Сначала изучается поведение неизвестной границы.

Т Е О Р Е М А I. Пусть выполнены условия $\varphi_1(x)>0$, $\varphi_1'(x)\le 0$, $\varphi_1''(x)>0$, $\psi_1(\cdot)\le 0$, $\psi_{1u}(\cdot)\ge 0$, $\psi_{1t}(\cdot)\le 0$, $\varphi_2'(x)+\varphi_3(x)\ge 0$, $\varphi_3(\ell)-\varphi_2'(\ell)\ge 0$, $\psi_2(\cdot)\ge 0$, $\varphi_2(c)\ge 0$, $0<\alpha(t),\beta(t)<1$, $0\le\gamma(t)<1$. Тогда $0<\dot S(t)<1$.

Затем доказана теорема единственности решения.

Т Е О Р Е М А 2. Пусть выполнены условия теоремы I и $\varphi_2''(x)+\varphi_3'(x)>0$, $\psi_{2\vartheta}(\cdot)<0$, $\psi_{2t}(\cdot)<0$. Тогда решение задачи (I)-(8) единственно.

Существование решения доказывается сведением задачи к системе нелинейных интегральных уравнений и применением к ней принципа Шаудера.

УДК 517.956.2

Киприянова Н.И. (Воронеж)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ТИПА Р.САЙВИНА, СВЯЗАННАЯ С ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ

Пусть $\omega_\gamma(x)$ – непрерывная функция, четная и периодическая периода $2\gamma>0$ такая, что её ряд Фурье по нормированным функциям Бесселя

$$\omega_\gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^\gamma \, j_p\left(\frac{\alpha_{p,k}}{\gamma} x\right),$$

$$c_k^\gamma = \frac{1}{\gamma^{2(p+1)}[j'(\alpha_{p,k})]^2} \int_0^\gamma j_p\left(\frac{\alpha_{p,k}}{\gamma} x\right) \omega_\gamma(x)\, x^{2p+1}\, dx$$

сходится абсолютно.

Здесь $j_p(x) = C(p)\, J_p(x)/x^p$, $\alpha_{p,k}$ – корни уравнения $J_p(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

Пусть четная функция $f(x)$ и её обратное преобразование Фурье-Бесселя $\tilde{f}(x)$ принадлежат весовому функциональному пространству $L_{1,2p+1}(0,\infty)$. Тогда для преобразования Фурье-Бесселя произведения $\omega_\gamma \tilde{f}$ имеет место представление

$$F_B[\omega_\gamma \tilde{f}] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^\gamma \, T_x^{\frac{\alpha_{p,k}}{\gamma}} f(x),$$

где обобщенный сдвиг T_x^y определяется формулой

$$T_x^y f(x) = C(p) \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right) \sin^{2p}\alpha\, d\alpha.$$

Эта формула является аналогом известной интерполяционной формулы Р.Сайвина [I] для преобразования Фурье-Бесселя.

Литература

I. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Л.А.Козленко, Г.В.Мартыненко
(Воронеж)

О необходимых и достаточных условиях ε-стабилизируемости гиперболической системы при граничном управлении.

Пусть Ω – область в R^n, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega=\Gamma$, $Q=[0,T]\times\Omega$, $\Sigma=[0,T]\times\Gamma$. Пусть состояние системы в каждый момент времени $t\in[0,T]$ определяется функцией $v(t,x)$, $x\in\Omega\subset R^n$, удовлетворяющей гиперболическому уравнению (см.[2]),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+Av=0 \qquad (1),$$

начальным и краевым условиям

$$v(0,x)=v_0(x)\in H^1 \qquad (2),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v(0,x)=v_1(x)\in L_2 \qquad (3),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Sigma} = u(t,s) \qquad (4),$$

здесь $u(t,s)\in U=\{u(t,s) : u(t,s)=(t)u_0(s), \varphi(t)\in L_2[0,T], u_0(s)\in L_2(\Gamma), s\in\Gamma\}$,
$\|u\|_U^2=\int\limits_{\Sigma}u^2(t,s)dtds$, кроме того, $u(s)=0$ при $s\in\Gamma/\Gamma_1$.

Задача (1)-(4) корректна и ее решение $v(t,x)\in L_2([0,T],H^1)$, $\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)\in L_2(Q)$.

Определение. Система (1)-(4) слабо ε-стабилизируема, если для любых $v_0(x)\in H^1, v_1(x)\in L_2$ найдется такое T>0 и последовательность управлений $u_n(t,s)$, что для соответствующей последовательности решений задачи (1)-(4) $v_n(t,x)$ выполнены соотношения $v_n(t,x)\xrightarrow[n\to\infty]{H^1}0$, $\frac{\partial}{\partial t}v_n(t,x)\xrightarrow[n\to\infty]{L^2}0$.

В [1] было показано, что существует T>0, пригодное для всех возможных пар начальных условий $v_0(x), v_1(x)$ [1]; такая система (1)-(4) называлась ε-стабилизируемой .

При некоторых дополнительных условиях на асимптотику последовательности $\int\limits_{\Gamma_1}u_0(s)\psi_k(s)ds$ при $k\to\infty$, где $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - собственные функции оператора A, верна следующая

Теорема. Для того, чтобы система (1)-(4) была ε-стабилизируемой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения :

$$\int\limits_{\Gamma_1}u_0(s)\psi_k(s)ds\neq 0,\ k=1,2,\dots .$$

1. М.А. Вышегородских, Л.А. Козленко, Е.А. Курина, Г.В. Мартыненко "О необходимых условиях ε-стабилизируемости гиперболической системы при граничном управлении", Тезисы докладов конференции "Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики", Воронеж, 1995.
2. Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес " Неоднородные граничные задачи и их приложения ".

УДК 519.172 Колмыков В.А. (Воронеж)

КОНСТРУКТОРЫ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ И НЕУСТОЙЧИВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

1. Граф называется устойчивым, если его матрица смежности невырождена. Если $\mathcal{G}$ – некоторое множество графов, то оно разбивается на два подмножества $\mathcal{G}=\mathcal{G}_* \cup \mathcal{G}_0$ – устойчивых и неустойчивых графов.

Пример. Звезда Z_n – это граф на $n+1$ вершинах: n вершин степени 1 и одна вершина степени n. Положим $\mathcal{Y}=\{Z_0,Z_1,Z_2,Z_3\}$. Тогда $\mathcal{Y}_*=\{Z_1\}$, $\mathcal{Y}_0=\{Z_0,Z_2,Z_3\}$.

2. Пусть $\mathcal{M}$ – множество, $\mathcal{P}$ – его подмножество, $\mathcal{R}$ – набор операций, позволяющих из элементов $\mathcal{P}$ строить какие-то элементы $\mathcal{M}$, а из этих последних – другие и т.д. Если в результате такого конструирования из $\mathcal{P}$ посредством $\mathcal{R}$ получается все $\mathcal{M}$, то пару $(\mathcal{P},\mathcal{R})$ называют конструктором множества $\mathcal{M}$; обозначается $\mathcal{M}=\langle\mathcal{P},\mathcal{R}\rangle$.

Пример. Пусть $G*H$ – граф, получающийся из G и H наведением моста, т.е. добавлением ребра, как-то соединяющего G и H; $G\circ H$ обозначает склеивание G и H по вершине. Для множества $\mathcal{T}$ всех деревьев имеем $\mathcal{T}=\langle Z_1\,|\circ\rangle=\langle Z_0\,|*\rangle$, тем более, $\mathcal{T}=\langle \mathcal{Y}_*|\circ\rangle=\langle \mathcal{Y}_0|*\rangle$.

3. ТЕОРЕМА. (1) $\mathcal{T}_*=\langle \mathcal{Y}_*|*\rangle$ (2) $\mathcal{T}_0=\langle \mathcal{Y}_0|\circ\rangle$.

Доказательство. Известно, что дерево нечетного порядка неустойчиво. Для характеристических многочленов графов имеем:

$H*G(\lambda)=H(\lambda)G(\lambda)-H'(\lambda)G'(\lambda)$; $H\circ G(\lambda)=H(\lambda)G'(\lambda)+H'(\lambda)G(\lambda)-\lambda H'(\lambda)G'(\lambda)$,

где штрих означает удаления из графа вершины (всегда ясно – какой). Отсюда легко доказывается $\supset$ в (1) и (2). Докажем обратные включения. (1) (в соавторстве с В.Ф.Субботиным): пусть $H\in\mathcal{T}_*$; в H найдется предконцевая (т.е. инцидентная концевой и не более, чем одной неконцевой) вершина степени 2 (иначе нашлись бы две концевые вершины, инцидентные третьей вершине, откуда $H\in\mathcal{T}_0$). Поэтому $H=F*Z_1$, $H(0)=-F(0)$, $F\in\mathcal{T}_*$ (2) $H\in\mathcal{T}_0$, (α – предконцевая; удалим все концевые, инцидентные α, получим дерево F).

а) $F'\in\mathcal{T}_0 \Rightarrow H=F'\circ Z_2^n\circ Z_3^m$ $(2n+3m=\deg\alpha)$;

б) $F'\in\mathcal{T}_* \Rightarrow \deg\alpha\geq 3$ (иначе бы $H=F'*Z_1$, т.е. $H\in\mathcal{T}_*$). $F'\in\mathcal{T}_*\Rightarrow$

$F\in\mathcal{T}_0$, $H=F\circ Z_2^n\circ Z_3^m$ $(2n+3m=\deg\alpha-1)$.■

УДК 512.86 Колмыков В.А., Субботин В.Ф.
(Воронеж)

О ЖОРДАНОВОМ БАЗИСЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОКСТЕРА

Жорданова форма и жорданов базис преобразования Кокстера в общем случае неизвестны. Однако, для некоторых классов графов Кокстера (например, деревьев) удается (и довольно далеко) продвинуться [I]. Настоящая заметка является непосредственным продолжением [I] и мы используем принятые там обозначения.

I. Упорядочим множество $\{\varphi_i\} \cup \{1, 0\}$ следующим образом: $\varphi_{max} = \varphi_1 > \varphi_2 \geq \dots \geq \varphi_s > 1 > \varphi_{s+1} \geq \dots \geq \varphi_{s+t} > 0$.
Построим жорданов базис Б_H для C_Δ как в [I], но отправляясь от ортонормированных базисов для $\mathcal{D}\mathcal{D}^T$, $\mathcal{D}^T\mathcal{D}$. Разобьем векторы из Б_H на четыре упорядоченных попарноортогональных семейств: I) отвечающие $\lambda_{max} = \lambda_1^{\varphi_1}, \dots, \lambda_1^{\varphi_s}$, $\lambda_{min} = \lambda_2^{\varphi_1}, \dots, \lambda_2^{\varphi_s}$;
2) отвечающие $\lambda_1^{\varphi_{s+1}}, \dots, \lambda_1^{\varphi_{s+t}}$, $\lambda_2^{\varphi_{s+1}}, \dots, \lambda_2^{\varphi_{s+t}}$;
3) отвечающие ± 1, если $\pm 1 \in \operatorname{Sp} C$; 4) присоединенные, если таковые есть.

Матрицей Грамма для Б_H относительно стандартного $\langle\ ,\ \rangle$ в $\mathbb{C}^m$ будет
$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 2I \\ 2I & \Lambda_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2I & \Lambda_3 \\ \Lambda_4 & 2I \end{pmatrix} \oplus I \oplus \frac{1}{8} I .$$
Здесь Λ_i – диагональные матрицы с соответствующими $1 + 1/\lambda$ на диагонали числами.

Простое строение матрицы Грамма позволяет найти выражения для координат вектора V в базисе Б_H. Собственные векторы из Б_H, отвечающие λ_{max}, λ_{min}, обозначим ξ_{max}, ξ_{min}. Пусть $V = V_{max}\,\xi_{max} + V_{min}\,\xi_{min} + \dots$.
Положим $\hat{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \xi_\alpha$, $\alpha \in \{max, min\}$.

ЛЕММА $V_\alpha = (\lambda_\alpha - 1)(4\varphi_{max} - 4)^{-1} \langle \hat{\xi}_\alpha, V \rangle$, $\alpha \in \{max, min\}$.

ТЕОРЕМА. Всякий ненулевой вектор из $\operatorname{lin}(\text{Б}_H \setminus \{\xi_{max}, \xi_{min}\}) \cap \mathbb{R}^m$ имеет как положительные, так и отрицательные координаты.

Доказательство. $V_{max} = V_{min} = 0 \Leftrightarrow \langle -x^{\varphi_1}, V' \rangle = \langle 2(\lambda_{max}+1)^{-1} \mathcal{D}^T x^{\varphi_1}, V'' \rangle = \langle 2(\lambda_{min}+1)^{-1} \mathcal{D}^T x^{\varphi_1}, V'' \rangle \Leftrightarrow \langle x^{\varphi_1}, V' \rangle = \langle \mathcal{D}^T x^{\varphi_1}, V'' \rangle = 0$.

Литература

I. Субботин В.Ф., Стекольщик Р.Б. // ФАН, т.I2, вып.I, 1978, С.84 – 85.

УДК 539.3

Коломоец А.А. (Саратов)

ОТКЛИК ГИБКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Рассматривается колебание замкнутой цилиндрической оболочки конечной длины шарнирно опертой по торцам под действием случайного пространственно-временного поля нагрузки, приложенного к части поверхности оболочки.

Поведение оболочки описывается уравнениями движения теории пологих оболочек при конечных прогибах в смешанной форме [I].

$$\frac{D}{h}\nabla^4(W-W_0)=L(W,\Phi)+\nabla_K^2\Phi+\frac{q}{h}-\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-2\rho\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}$$
$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi=-\frac{1}{2}[L(W,W)-L(W_0,W_0)]-\nabla_K^2(W-W_0). \qquad (I)$$

Граничные условия

$$W=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0,\ \Phi=0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0 \qquad \text{при } x=0,L \qquad (2)$$

Начальные условия

$$W=0,\ \frac{\partial W}{\partial t}=0 \qquad \text{при } t=0. \qquad (3)$$

Нагрузка $q(x,y,t)$ является нормальной однородной функцией пространственных координат и стационарной функцией времени с заданными математическим ожиданием и спектральной плотностью.

Статистические характеристики колебательного движения оболочки находятся методом статистических испытаний Монте-Карло. Применяется метод моделирования основанный на разложении случайного поля в пространственно-временной ряд Фурье. Реализации получаем решая задачу (I)-(3). Задача (I)-(3) решается с применением метода И.Г.Бубнова в высших приближениях по пространственным координатам и метода Рунге-Кутта по временной координате. Статистические характеристики искомых функций получаются осреднением по ансамблю реализаций.

Литература

I. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: "Наука", 1972. – 432 с.

Константинов А.Ю. /Киев/

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мы рассматриваем систему

$$-\frac{d}{dx_i}\left(p_i(x_i)\frac{dy_i(x_i)}{dx_i}\right)+(\lambda_1 b_{i1}(x_i)+\lambda_2 b_{i2}(x_i)+ \qquad /\mathrm{I}/$$

$$+q_i(x_i))y_i(x_i)=0 \qquad (x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2)$$

где p_i – гладкие, а q_i и b_{ij} – непрерывные T_i – периодические функции $(T_i>0)$. $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$ – спектральный параметр. Мы доказываем теорему о разложении по обобщенным собственным функциям, а также изучаем структуру спектра и спектральной меры задачи / I / при условии, что

$$p_i(x_i)>0,\ q_i(x_i)>0 \qquad (x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2)$$

$$b_{12}(x_1)\,b_{22}(x_2)<0 \qquad ((x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2)$$

и, кроме того, функция $\delta_0(x_1,x_2)=b_{11}(x_1)\,b_{22}(x_2)-$ $-b_{12}(x_1)b_{21}(x_2)$ почти везде /относительно меры Лебега/ отлична от нуля.

Отметим, что ранее подобные результаты были известны только в случае знакоопределенной функции δ_0 /см. [I] /.

I. Гусейнов Г.Ш. Спектральный анализ многопараметрических дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. – 1991.– 5, вып. 4. – С. 98 – 121.

Кокурин М.Ю. (Йошкар-Ола)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Рассматривается задача оптимального управления

$$\min\{\mathcal{J}(u): u\in U\},\ \mathcal{J}(u)=f(u)+\ell(z(u)), \tag{1}$$

в которой состояние системы $z=z(u)\in X$ связано с управлением $u\in U\subset W$ операторным уравнением

$$A(u,z)=y. \tag{2}$$

Здесь X, W – вещественные гильбертовы пространства, U – выпуклое замкнутое множество из W, оператор $A(\cdot,z): W\to X^*$ усиленно непрерывный $\forall z\in X$; $A(u,\cdot): X\to X^*$ – монотонный деминепрерывный $\forall u\in U$. Функционал f ограничен снизу, слабо полунепрерывен снизу, обладает H-свойством [1] и в случае неограниченного множества U коэрцитивен; функционал ℓ является сильно выпуклым. Вместо точного элемента $y\in X^*$ предполагается доступным его приближение y^δ, $\|y-y^\delta\|_* \le \delta$.

Пусть семейство операторов $\{R_\delta(u,\cdot)\}$, сопоставляющих приближению y^δ элемент из X, описывает регуляризующий алгоритм (РА) для решения уравнения (2), так, что

$$(u_\alpha \rightharpoonup u_0,\ R_\delta(u_\alpha,y^\delta)\rightharpoonup z_0;\ \alpha,\delta\to 0)\Rightarrow(A(u_0,z_0)=y);\ (R_\delta(u,y^\delta)\to z,\ \delta\to 0;\ A(u,z)=y)\ \&$$
$$(\ell(z)=\min\{\ell(\xi): A(u,\xi)=y\})\ \forall u\in U. \tag{3}$$

Рассмотрим аппроксимирующую (1)-(2) задачу об отыскании такого элемента $u_{\varepsilon\delta}\in U$, что

$$\inf\{\mathcal{J}_\delta(u): u\in U\}\equiv\mathcal{J}_\delta^*\le\mathcal{J}_\delta(u_{\varepsilon\delta})\le\mathcal{J}_\delta^*+\varepsilon,\ \mathcal{J}_\delta(u)=f(u)+\ell(z_\delta(u)),\ z_\delta(u)=R_\delta(u,y^\delta).$$

Обозначим через $U_{\varepsilon\delta}^*$ множество решений этой задачи.

Теорема. Пусть множество $\{(u,z)\in U\times X: A(u,z)=y\}\ne\emptyset$, тогда при любом выборе $u_{\varepsilon\delta}\in U_{\varepsilon\delta}^*$ сеть $\{u_{\varepsilon\delta}\}$; $\varepsilon,\delta\to 0$ имеет предельные точки и все они являются решениями задачи (1)-(2).

Рассматриваются примеры РА, удовлетворяющих условию (3). Показывается, что при отсутствии свойства (3) сходимость $\{u_{\varepsilon\delta}\}$ к решению (1)-(2) может отсутствовать (ср. с [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант NMW000).

Литература

1. Лисковец О.А. Дискретная регуляризация задач оптимального управления на некорректных монотонных вариационных неравенствах// Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1990. Т.54. N5. С.975-989.

Король В.Г. (Воронеж)

СЛАБО СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ВЯЗКО-УПРУГИХ СРЕД

Рассматривается уравнение движения одномассовой системы для случая вынужденных колебаний под действием синусоидальной силы F, действующей с частотой ω:

$$\ddot{x} + \omega_\infty^2 \left[1 - \nu_E R^c(\omega)\right] x + \omega_\infty^2 \nu_E \omega^{-1} R^s(\omega) \dot{x} = \frac{F}{m} \sin \omega t .$$

Здесь x – координата, $\nu_E = (E_\infty - E_0)/E_\infty$, ω_∞, ω_0 – собственные частоты колебаний, соответствующие нерелаксированному E_∞ и релаксированному E_0 значениям упругого модуля, $R^s(\omega)$ и $R^c(\omega)$ – синус- и косинус-трансформанты ядра релаксации $R(t)$.

Решение уравнения для стационарного случая имеет вид:

$$x_0 = \frac{F}{m} \left\{ \left[\omega_\infty^2 - \omega^2 - \nu_E R^c(\omega)\right]^2 + \left[\nu_E R^s(\omega)\right]^2 \right\}^{-1/2} .$$

В качестве ядра последействия выбрано асимметричное ядро А.Р. Ржаницына $K(t)$, резольвента которого – ядро релаксации – представляет собой дробно-экспоненциальную функцию $\mathfrak{Э}_\gamma$:

$$K(t) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau_\varepsilon^\gamma \Gamma(\gamma)} e^{-t/\tau_\varepsilon} \; (0<\gamma<1), \; R(t) = \tau_\varepsilon^{-\gamma} e^{-t/\tau_\varepsilon} \mathfrak{Э}_\gamma\left(-\nu_E, \tau_\varepsilon, t\right), \; \mathfrak{Э}_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\nu_E}{\tau_\varepsilon^\gamma}\right) \frac{t^{\gamma(n+1)-1}}{\Gamma[\gamma(n+1)]}.$$

Полученные для $R^c(\omega)$ и $R^s(\omega)$ выражения

$$R^c(\omega) = (1+\omega^2\tau_\varepsilon^2) \cos(\gamma \operatorname{arctg} \omega\tau_\varepsilon); \; R^s(\omega) = (1+\omega^2\tau_\varepsilon^2) \sin(\gamma \operatorname{arctg} \omega\tau_\varepsilon)$$

на частоте $\omega_*^2 = \dfrac{\omega_0^2 + \omega_\infty^2}{2}$ приводят к следующему решению:

$$x_0^* = \frac{F}{m} \left(1 + 2æ_*^{-\gamma} - 2æ_*^{-\gamma/2} \cos \psi_*\right)^{-1/2},$$

где

$$æ_* = 1 + \omega_*^2 \tau_\varepsilon^2, \quad \psi_* = \gamma \operatorname{arctg} \omega_* \tau_\varepsilon$$

Зависимость $x_0^*(\ln \tau_\varepsilon)$ имеет асимметричный максимум, положение которого на оси $\ln \tau_\varepsilon$ определяется параметром сингулярности γ, являющимся в то же время мерой уширения функций распределения, получаемых при интегральном представлении слабо сингулярных ядер наследственности.

Кузютин Д.В., Бравая Г.Ю., Столяров В.В. (С-Петербург)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ.

Обсуждается проблема устойчивого оптимального поведения в конечных позиционных играх n лиц Γ с неполной информацией. Основное внимание уделяется свойствам динамической и сильной динамической устойчивости решений [1], а также i-устойчивости [2]. Приводятся результаты исследования устойчивости основных некооперативных принципов оптимальности в классе смешанных стратегий [3].

Отдельно выделим свойства ε-равновесия [4] и равновесия по Бержу [5].

Теорема. Множество всех ситуаций ε-равновесия $U\varepsilon(\Gamma)$ в смешанных стратегиях в игре Γ является сильно динамически устойчивым.

С другой стороны, приводится пример, показывающий, что множество $U\varepsilon(\Gamma)$ в общем случае не удовлетворяет условию динамической устойчивости при использовании участниками смешанных стратегий. Отмеченным исключительным свойством обладает только указанный принцип оптимальности.

Пусть U_i – множество смешанных стратегий u_i игрока i, $i = 1, \ldots, n$,

$$(\overline{u}_i, u_{N\setminus i}) = (u_1, \ldots, u_{i-1}, \overline{u}_i, u_{i+1}, \ldots, u_n), \quad U_{N\setminus i} = U_1 \times \ldots \times U_{i-1} \times U_{i+1} \times \ldots \times U_n.$$

Ситуацию $\overline{u} \in U$ будем называть ситуацией равновесия по Бержу в игре Γ, если

$$H_i(\overline{u}) \geq H_i(\overline{u}_i, u_{N\setminus i}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \forall u_{N\setminus i} \in U_{N\setminus i}, \tag{1}$$

$$H_i(\overline{u}) \geq \max_{u_i \in U_i} \min_{u_{N\setminus i} \in U_{N\setminus i}} H_i(u_i, u_{N\setminus i}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

В [2] доказана совершенная динамическая устойчивость равновесия по Бержу в смешанных стратегиях, определяемого только условием (1), для конечных позиционных игр n лиц с неполной информацией. К сожалению, использование в определении равновесия по Бержу условия индивидуальной рациональности (2) в общем случае приводит к динамической неустойчивости указанного принципа оптимальности. В качестве примера приводится двухшаговая игра, полученная из известной "дилеммы заключенного". Потеря динамической устойчивости вызвана тем обстоятельством, что гарантированный выигрыш участника в подыграх может строго превосходить его гарантированный выигрыш в Γ.

Литература

[1] Петросян Л.А.// Вестн. ЛГУ. 1977. N 19.
[2] Кузютин Д.В.// Вестн. СПбГУ. 1995. Сер.1.
[3] Кузютин Д.В.// Технич. кибернетика, 1994. N 5.
[4] Петросян Л.А.,Кузютин Д.В.// Вестн. СПбГУ. 1995. Сер.1.
[5] Zhukovskiy V., Salukvadze M., Vaisman K. The Berge Equilibrium. Tbilisi, 1994.

Индексы краевых особенностей в задаче об оценке числа продольных нормалей

Кунаковская О.В. (Воронеж)

Для уравнения Кристоффеля распространения плоских упругих волн в кристаллической среде с плотностью ρ и тензором модулей упругости C_{ijlm}

$$\lambda_{ijlm} n_j n_l u_m = v^2 u_i \quad (i, j, l = 1, 2, 3) \tag{1}$$

(волна описывается следующей зависимостью вектора смещения среды $\bar{u}$ от радиуса-вектора $\bar{r}$ точки среды и времени t :

$$\bar{u}(\bar{r}) = \bar{u}_0 e^{i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)},$$

где $\overline{u_0}$ - векторная амплитуда волны, $\bar{k}$ - ее волновой вектор, ω - частота) в [1] поставлена задача оценки числа продольных нормалей. В уравнении (1) $\lambda_{ijlm} = C_{ijlm}/\rho$ - приведенный тензор модулей упругости, $\bar{n} = \bar{k}/k$ - волновая нормаль, $v = \omega/k$ - фазовая скорость. Поскольку продольная нормаль характеризуется условием $\bar{n} \parallel \bar{u}$, уравнение (1) после соответствующей нормировки приобретает вид

$$\lambda_{ijlm} n_j n_l n_m = \lambda n_i, \quad \lambda = v^2, \quad n_i^2 = 1 \tag{2}$$

Теорема 1.[2] *Независимо от класса симметрии рассматриваемой кристаллической среды уравнение (2) имеет по крайней мере шесть решений, соответствующих трем направлениям продольных нормалей.*

В докладе будут изложены доказательства теоремы 1, приведенные в [2], в частности, доказательство, опирающееся на основные формулы (см.[3]) о связи краевых $I_+(\bar{v})$, $J_+(\bar{v})$ и внутреннего $I(\bar{v})$ глобальных индексов векторного поля $\bar{v}$ на многообразии M с краем ∂M с эйлеровыми характеристиками $\chi(M), \chi(M/\partial M)$:

$$I_+(v) + I(v) = \chi(M), \quad J_+(v) + I(v) = \chi(M/\partial M).$$

Литература:

[1] Федоров И. Теория упругих волн в кристаллах.- М.:Наука,1965.

[2] Борисович Ю.Г., Даринский Б.М., Кунаковская О.В.//Теор. и матем. физика.- Т.94,N 1, 1993.- С.146-152.

[3] Кунаковская О.В.//Деп. в ВИНИТИ 29.08.86,N 6317-В86.

УДК 541.24:532.25

Листров Е.А. (г.Воронеж)

Устойчивость стационарных решений электрогидродинамических уравнений реоэлектрического двигателя в случае воздействия постоянного силового момента на его ротор.

Исследуются условия существования стационарных решений системы уравнений

$$J\frac{d\omega}{dt}=L_э+L_ж+M;\ L_ж=\gamma_1\omega+\gamma_2\psi;\ \frac{d\psi}{dt}+f^*\psi=g^*\frac{d\omega}{dt} \tag{1}$$
$$\tau_2\omega\frac{d^2L_э}{dt^2}+\frac{dL_э}{dt}\left[2\tau_2\omega-\tau_2^2\frac{d\omega}{dt}\right]+L_э\left[\omega+\tau_1^2\omega^3-\tau_2\frac{d\omega}{dt}\right]=aV_0^2,$$

где $\omega(t)$-угловая скорость вращения ротора, $L_э(t)$-момент электрических сил, $L_ж(t)$-момент сил сопротивления со стороны жидкости, $\psi(t)$-характеристика эффекта инерции жидкости, J-момент инерции ротора, $\gamma_1, \gamma_2, \tau_1, \tau_2, \Lambda, f^*, g^*$-постоянные параметры двигателя, M-постоянный силовой момент, приложенный к ротору.

Количество стационарных решений и их устойчивость при фиксированном M зависят от трех параметров

$$N=\varepsilon_2 k_1-\left(k_2+\frac{k_s\lambda}{a_2}\beta^*\right)\varepsilon_1;\ V_1=V_0-V_{0к};\ V_2=V_0-V_{02},$$

где $\varepsilon_1, k_1, \varepsilon_2, k_2$-диэлектрические проницаемости и объемные электропроводности жидкости и ротора, k_s-поверхностная проводимость ротора, λ-параметр, характеризующий число электродов, β^*-относительная толщина оболочки ротора, V_0-модуль электрического потенциала электродов, $V_{0к}$-критическое значение потенциала, не зависящее от M. Параметр V_{02}-дополнительное критическое значение потенциала, зависящее от M.

При $M>0$ в отсутствии электрического поля ($V_0=0$) имеется одно устойчивое стационарное решение $\omega_0>0$. При $M>0, N\leqslant 0$ для любого $V_0\neq 0$ существует одно устойчивое положительное решение $\omega_1<\omega$. При $M>0, N<0, V_1>0$ возможны три случая: если $V_2<0$, то существует одно устойчивое положительное решение $\omega_1>\omega_0$; если $V_2=0$- два решения $\omega_1>\omega_0$ и $\omega_2^*<0$, но ω_2^*-неустойчиво; если $V_2>0$ - три решения $\omega_1>\omega_0$; $\omega_2^*<0$ и $\omega_3<0$, но ω_2^*-неустойчиво. При $M>0, N<0, V_1\leqslant 0$ существует одно устойчивое решение $\omega_1>\omega_0$. В отличие от обычных электродвигателей при $M\neq 0$ стационарное решение $\omega_0=0$ не существует.

Особый интерес представляет указанное выше решение $\omega_3<0$ при $M>0$. Оно описывает режим работы двигателя лебедки, поднимающей груз с постоянной скоростью.

УДК 541.24:532.25.

Листров Е.А.(г.Воронеж)

Устойчивость по Ляпунову состояния покоя ротора реоэлектрического двигателя с упругим торсионом.

Методом Ляпунова исследуется устойчивость нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, которая описывает нестационарные вращательные колебания ротора реоэлектрического двигателя цилиндрической конструкции [1].

Линейная часть системы эквивалентна дифференциальному уравнению

$$J\frac{d^4\theta}{dt^4}+\Phi_1(J,\Gamma,\mu,g,\tau)\frac{d^3\theta}{dt^3}+\Phi_2(k,J,\Gamma,\mu,g,\tau)\frac{d^2\theta}{dt^2}+ \qquad (1)$$

$$+\Phi_3(k,J,\Gamma,\mu,g,\tau)\frac{d\theta}{dt}+\Phi_4(k,J,\Gamma,\mu,g,\tau)\cdot\theta=0$$

где J – момент инерции ротора относительно его оси, Γ – геометрические и электрофизические параметры двигателя, μ – динамическая вязкость рабочей жидкости, g – параметр, характеризующий эффект инерции жидкости, τ – параметр, описывающий „инерцию" электрического поля в двигателе при нестационарных процессах, k – коэффициент упругости торсиона, $\theta(t)$ – угол поворота ротора.

При отсутствии торсиона ($k=0$) уравнение (1) эквивалентно уравнению, описывающему в линейном приближении нестационарные вращения свободного ротора. Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения уравнения (1) как для $k\neq0$, так и в случае $k=0$.

Показано, что ротор с упругим торсионом самовозбуждается в состоянии покоя при большем значении электрического потенциала на электродах, чем свободный ротор. Исследование влияния нелинейных членов исходной системы дифференциальных уравнений на характер движения ротора с торсионом при потере устойчивости его состояния покоя проведено в случае малости эффектов инерции жидкости и электрического поля. Установлено, что ротор выходит на режим автоколебаний, описываемый уравнением

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left[a_1-\frac{a_2}{1+\tau_1^2(d\theta/dt)^2}\right]\frac{d\theta}{dt}+k\theta=0 \qquad ,(2)$$

где a_1, a_2, τ_1 – определенные комплексы параметров двигателя.

Литература.

1.Шульман З.П.,Носов В.М. Вращение непроводящих тел в электрореологических жидкостях. Препринт. Минск: ИТМО АН БССР, 1985. – с.32-35.

Листрова Ю.П., Потапов В.Н., Цуканова Л.П. (Воронеж)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИНЫ

Рассматривается задача оптимального проектирования трехслойной кольцевой пластины, толщина заполнителя которой считается постоянной, а толщины двух несущих слоев переменными. Пластина нагружена равномерным давлением, внутренний край пластины защемлен и допускает смещение в направлении оси симметрии, наружный край шарнирно оперт. Материал несущих слоев пластины полагается жестко-пластическим, подчиняющимся условию пластичности Мизеса и соответствующему ассоциированному закону течения.

Определяется закон изменения толщин h несущих слоев пластины, при котором удовлетворяются уравнение равновесия, условие пластичности и реализуется условие минимума веса пластины, сводящееся к требованию минимума функционала

$$J=\int_a^R h r\,dr$$

где r, a, R – соответственно, текущий, внутренний и наружный радиусы пластины. При этом используется принцип максимума Л.С.Понтрягина, а в качестве фазовой координаты и управления назначены радиальный и окружной изгибающие моменты.

Определяющая система двух дифференциальных уравнений первого порядка численно реализуется на ЭВМ методом сплайн-функций, интервал изменения текущего радиуса пластины разбит на пять частей. Результаты расчета отражены на графике изменения толщины несущего слоя в зависимости от текущего радиуса пластины.

УДК 517.518.23

Ляхов Л.Н. Воронеж

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В-ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ВИДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ АДАМАРА РАСХОДЯЩИХСЯ ИНТЕГРАЛОВ

Регуляризация гиперсингулярных интегралов посредством конечных разностей может быть с успехом заменена регуляризацией Адамара это показано С.Г.Самко в I , которая в некоторых случаях имеет более сильные стороны. К В-гиперсингулярным интегралам может быть применена подобная схема.

Обозначения : $\mathrm{p.f.}\int f(x)\,dx$ – регуляризация Адамара расходящегося интеграла; $S_1^+ = \{|x|=|\sigma|=1, x_1>0,\ldots, x_n>0\}$, $E_n^+ = \{x=(x_1,\ldots,x_n), x_1>0,\ldots,x_n>0\}$, T_x^y – операция обобщенного сдвига, определяемая формулой

$$T_x^y f(x) = C(\gamma)\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi} f\left(\ldots,\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i},\ldots\right)\prod_{j=1}^{n}\sin^{\gamma_j-1}\alpha_j\,d\alpha_j;$$

$\mathbb{D}_{\alpha,\Omega}^{\gamma}$ – В-гиперсингулярный интеграл, отвечающий характеристике $\Omega(x/|x|)=\Omega(\sigma)$ (см.[2]) ; $B=(B_1,\ldots,B_n)$, $B_j=\partial^2/\partial x_j^2 + k/x_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}$, γ_j – фиксированные положительные числа.

ТЕОРЕМА. Пусть $\Omega(\sigma)\in L_1^{\gamma}(S_1^+)$, $f(x)\in C_{rem}^{\ell}(E_n^+)$ и $\ell>2[\alpha/2]$. При $\ne 2,4,$Б,... справедлива формула

$$(\mathbb{D}_{\alpha,\Omega}^{\gamma} f)(x) = \frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\beta_{n,\gamma}(\alpha)}\ \mathrm{p.f.}\int_{E_n^+}\frac{\Omega(\sigma)\,t^{\gamma}}{|t|^{n+|\gamma|+\alpha}}\,T_x f(x)\,dt$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\beta_{n,\gamma}(\alpha)}\left(\mathrm{p.f.}\frac{\Omega(\sigma)}{t^{n+|\gamma|+\alpha}} * f\right)_{\gamma}.$$

Литература

I. Самко С.Г. Труды математич. института АН СССР, 1980, т. 156, с. 157-121.

2. Ляхов Л.Н. ДАН, 1991, т.321, № 3.

Макаричев А.В., Евдокимов А.В. /Харьков/

О РАССМОТРЕНИИ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА $M/G/\infty$.

Широко известна и всесторонне изучена задача нахождения функции распределения периода занятости для однолинейной системы с пуассоновским входящим потоком и произвольным распределением времени обслуживания, см., например, [1].

Рассматривается задача нахождения функции распределения периода занятости для системы с пуассоновским входящим потоком, произвольным распределением времени обслуживания при условии, что требование, поступающее в систему, немедленно поступает на обслуживание /неограниченное количество каналов обслуживания/.

Пусть случайная величина ξ - длина периода занятости, $B(x)$ - функция распределения времени обслуживания. Система начинает работу в момент времени $t=0$, когда на обслуживание поступает первое требование. Распределение периода занятости получено в следующем виде:

$$P(\xi>t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}P_n(t)$$

где $P_n(t)$ - вероятность, что длительность периода занятости превосходит t, и за время t поступает на обслуживание ровно n требований /без учета требования, поступающего на обслуживание в момент времени $t=0$ /, при этом не учитывается порядок прихода требований.

$$P_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{0<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n<t}\!\!\!\ldots\int P_{k-1}(x_k)(1-B(t-x_k))B(t-x_{k+1})\ldots$$

$$\ldots B(t-x_n)\,dx_k\,dx_{k+1}\ldots dx_n+\int\limits_{0<x_1<x_2<\ldots<x_n<t}\!\!\!\ldots\int(1-B(t))B(t-x_1)B(t-x_2)\ldots$$

$\ldots B(t-x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - моменты прихода требований на интервале $(0,t)$.

I. Саати Т.Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, "Сов. радио", М., 1965.

Маркуш И.И. (Ужгород), Ризун В.И. (Алчевск)

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ)

В настоящее время существует ряд методов качественного исследования решений дифференциальных уравнений [1-3]. Известно также их эффективность и недостатки [1-5]. Обратим внимание на один общий недостаток всех существующих методов качественного исследования решения дифференциальных уравнений. Он заключается в том, что во всех методах не учитываются все зависимости решения дифференциального уравнения от его коэффициентов, т.е. одни методы учитывают эту зависимость в большей мере, другие в меньшей.

В настоящей работе предлагается новый подход качественного исследования решения дифференциальных уравнений. Этот подход основан на ММВФ [4,5]. Сущность этого подхода заключается в том, что он позволяет представить решение заданного дифференциального уравнения в виде ряда по новой системе функций, которые явно содержат коэффициенты исходного дифференциального уравнения. А это даёт возможность заведомо более полно исследовать качественное поведение решения данного дифференциального уравнения.

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем - М.: Мир, 1971. - 310 с.
3. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства - М.: Мир, 1970.- 456 с.
4. Иркличевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных подвижных объектов. - Киев: ИСИО, 1994. - 409 с.
5. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991. - 331 с.

Марченко В.М, Борковская И.М. (Минск)

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ: СТАБИЛИЗАЦИЯ, МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, РЕКОНСТРУКЦИЯ

Первая часть доклада посвящена проблеме стабилизации линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом. Для решения проблемы предлагается несколько классов линейной обратной связи с запаздыванием, один из которых - класс разностных регуляторов. Получены достаточные условия стабилизации при воздействии регуляторов этого класса. В случае, когда построение разностного регулятора затруднено, рассматривается интегральная обратная связь. Построение интегральной обратной связи основано на теореме Винера-Пэли для целых функций экспоненциального типа. Методы иллюстрируются примерами.

Во второй части доклада рассматривается проблема модального управления для различных видов систем с запаздыванием как при воздействии разностных, так и интегральных регуляторов. Представлен также случай систем с распределенным запаздыванием. Для систем с запаздывающим аргументом рассматривается проблема модального управления при воздействии такого нового типа линейной обратной связи, как линейные разностные регуляторы с запаздыванием по состоянию и управлению.

Для решения проблемы *в*-модальной управляемости дифференциально-разностных систем в случае неполной информации строится динамический регулятор с запаздываниями по состоянию и управлению, представляющий собой аналог известного регулятора Пирсона для систем без запаздывания. Представлены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

В заключение рассматривается проблема реконструкции при воздействии разностных регуляторов.

Минюк С.А., Бойко В.К. (Гродно)

ТЕОРЕМА РАЗДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу оптимального управления

$$(Lx)(t) \overset{def}{=} (Qx)(t) + A(t)x(t_0) + B(t)u + v(t), \quad t \in [t_0, t_1] = T, \tag{1}$$

$$lx \overset{def}{=} Gx(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(s)\dot{x}(s)ds = \alpha, \tag{2}$$

где главная часть Q оператора L имеет вид

$$(Qy)(t) = y(t) - \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} Q(t,s)y(s)ds, \tag{3}$$

оператор Q, n*n-матрица $A(t)$ удовлетворяют условиям работы [1], $v(t)$-центрированный n-вектор белых шумов с заданной матрицей интенсивностей [2, с. 176], компоненты n-вектор-функции $x(t)$ являются абсолютно - непрерывными функциями, производная которых суммируема на T, а компоненты n*r-матрицы $B(t)$ и r-вектора управления $u(t)$ суммируемы с квадратом на T, G-постоянная m*n матрица, α - постоянный m-вектор, элементы m*n матрицы F(s)- измеримы и ограничены в существенном на отрезке T.

Задача. Пусть краевая задача (1),(2) имеет решение при некоторых $u(t)$ и $x(t_0)=\alpha \in R^n$. Требуется определить $u^0(t) \in T$, и $\alpha^0 \in R^n$ из условия минимума функционала

$$I(u) = E[x'(t_1)N_1x(t_1) + 2h_1'x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}[x'(t)N_2(t)x(t) + u'(t)N_3(t)u(t) +$$
$$+2h_2'(t)x(t) + 2h_3'(t)u(t)]dt], \tag{4}$$

где E-символ математического ожидания, $N_1 \ge 0, N_2(t) \ge 0, N_3(t) > 0$, а элементы матриц $N_2(t)$, $N_3(t)$ и векторов $h_2(t) \in R^n$, $h_3(t) \in R^r$ -заданные измеримые ограниченные функции.

Для решения задачи строится некоторая детерминированная граничная задача типа (1),(2) и доказывается так называемая теорема разделения, указывающая каким образом исходная задача связанна с построенной детерминированной задачей.

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П. //Дифференц. уравнения, 1982. Т.18, N 12. С. 2027-2050.

2. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроупругость. М., 1980.

Никольский М.С. (Москва)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТРЕКИНГА.

В современной теории управления важное место занимают различные задачи трекинга. Трекинг означает отслеживание.

В теории управления нередко возникают задачи, в которых сама управляемая система или ее выход должны осуществить предписанное заранее движение (эталонное движение). Такого рода задачам и посвящается доклад.

В рассматриваемых в докладе задачах динамика управляемой системы и её выход имеют линейный вид, причём учитывается наличие возмущающих факторов и помех. Информация о поведении управляемой системы носит позиционный характер.

При постановке и решении рассматриваемых задач используются понятия и результаты теории позиционных дифференциальных игр, развитой в трудах Н.Н.Красовского, Ю.С.Осипова, А.И.Субботина и их учеников. При построении соответствующих u - стабильных множеств приходится исследовать системы линейных интегральных уравнений I-го рода типа Вольтерра в свёртках. При этом оказываются полезными операторное (свёрточное) исчисление Я.Микусинского и важный результат Р.В.Гамкрелидзе и Г.Л.Харатишвили о приведении целой операторной матрицы к канонической форме, которую естественно назвать формой Смита.

Последний раздел доклада посвящен новому понятию гибкой системы.

Рассмотрены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

В заключение отметим, что ряд интересных и важных результатов по проблеме трекинга был получен Е.А.Барбашиным, В.Г.Болтянским, У.М.Уонэмом и др.

Павленко В.Н. (Челябинск)

Секвенциальное замыкание квазипотенциального оператора и субдифференциал Кларка его квазипотенциала.

Пусть E – вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* – сопряженное с E пространство. Оператор $T : E \to E^*$ называется квазипотенциальным [1], если существует функционал $f : E \to R$ такой, что для любых $x, h \in E$

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (T(x + th), h)\, dt,$$

где (y, x) значение функционала $y \in E^*$ на элементе $x \in E$. При этом f называется квазипотенциалом оператора T. Если в точке $x \in E$ у квазипотенциального оператора T нарушено условие радиальной непрерывности, то в этой точке квазипотенциал f оператора T не дифференцируем по Гато. Для квазипотенциального оператора T из локальной ограниченности на E следует, что его квазипотенциал f – локально липшицевая функция на E. Ф.Кларк для локально липшицевых функций ввел понятие субдифференциала. В [2] было дано определение секвенциального замыкания для локально ограниченного оператора (вообще говоря, разрывного). В докладе рассматривается соотношение между субдифференциалом Кларка ∂f квазипотенциала f локально ограниченного оператора T и секвенциальным замыканием ST оператора T. Установлено, что $\partial f(x) \subset STx$ для каждого $x \in E$, и если дополнительно $Tx \in \partial f(x)$ для всех $x \in E$, то $\partial f(x) = STx$. Остается открытым вопрос, имеет ли субдифференциал Кларка $\partial f(x)$ локально липшицевой на E функции f квазипотенциальный селектор?

[1] Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.
- М.: Наука, 1972.

[2] Павленко В.Н. О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной монотонной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. - 1991. - т.27, N 3. - с. 520 - 526

Петров Н.Н.(Ижевск)

К ПРИМЕРУ Л.С.ПОНТРЯГИНА СО МНОГИМИ УБЕГАЮЩИМИ

В пространстве R^k $(k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \cdots + a_l x_i = u_i, \ u_i \in V,$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид:

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + \cdots + a_l y_j = v_j, \ v_j \in V,$$

Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in R^k$, $a_1, \ldots, a_l \in R^1$, V -выпуклый компакт R^k. При $t = 0$ заданы начальные условия:

$$x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i\alpha}^0, \ y_j^{(\alpha)}(0) = y_{j\alpha}^0, \ \alpha = 0, \ldots, l-1$$

причем $x_{i0}^0 - y_{j0}^0 \notin M_{ij}$ для всех i, j, где M_{ij}- выпуклые компакты R^k. Дополнительно предполагается,что убегающие E_j не покидают пределы выпуклого множества

$$D = \{y : y \in R^k, (p_s, y) \leq \mu_s, \ s = 1, \ldots, r\}$$

Предположение 1. Функция $\varphi(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$w^{(l)} + a_1 w^{(l-1)} + \cdots + a_l w = 0$$

$$w^s(0) = 0, \ s = 0, \ldots, l-1, \quad w^{(l-1)}(0) = 1$$

неотрицательна для всех $t \geq 0$.

Цель группы преследователей - "поймать" не менее q убегающих. $(1 \leq q \leq m)$

В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия поимки.

Петросян Л.А. (С-Петербург)

ЭВОЛЮЦИОННО УСТОЙЧИВЫЕ СТРАТЕГИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ.

Эволюционные игры возникли в связи с биологическими приложениями и впервые были рассмотрены в работе [1]. В отечественной математической литературе им не уделялось достаточного внимания. Основным понятием здесь является ESS или эволюционно устойчивая стратегия. Если в статическом случае, в симметричной биматричной игре определение ESS является вполне содержательным, то уже для повторяющихся игр (а тем более динамических или дифференциальных) соответствующее определение оказывается неудачным [2]. Мы предложим новое определение ESS, которое применимо для динамических игр. Пусть Γ повторяющаяся симметричная биматричная игра, а (Γ, T) ее симметрия (см. [3]).

Определение. Стратегия $\bar{b}$ является ESS в (Γ, T), если $\bar{b}$ является стратегией поведения игрока 1, удовлетворяющей

$$E_1(\bar{b}, \bar{b}^T) = \max_b E_1(b, \bar{b}^T), \tag{1}$$

и если для некоторой стратегии b' такой, что

$$\mu(b', \bar{b}^T) \neq \mu(\bar{b}, \bar{b}^T), \tag{2}$$

(μ – мера на дереве игры, порожденная ситуацией в стратегиях поведения) $E_1(b', \bar{b}^T) = E_1(\bar{b}, \bar{b}^T)$, тогда

$$E_1(b', b'^T) < E_1(\bar{b}, b'^T). \tag{3}$$

Заметим, что в определении, приведенном в работах [2, 3], отсутствует условие (2), что и приводит к потере содержательности.

Литература

[1] Maynard Smith, J., G.R.Price [1973]. The logic of animal conflict. Nature, Lond., 246, 15-18.

[2] Van Damme, E.E.C. [1991]. Stability and perfection of Nash equilibria. Springer-Verlag, Berlin.

[3] Selten, R. [1983]. Evolutionary stability in extensive 2-person games. Math. Social Sciences, 5, 269-363.

Плаксина В.П. (г.Пермь)

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ КЕЛЛОГА В ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Пусть W^2- пространство функций, производная которых абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$, и пусть функции p, h и f суммируемы на этом отрезке, причем $h(t)\leq t$. Пусть, далее, краевая задача

$$\ddot{x}(t) - p(t)\, x[h(t)] = f(t) \qquad (1)$$

$$x(a)=0 \qquad x(b)=0 \qquad (2)$$

однозначно разрешима в пространстве W^2 и $G(t,s)$ - ее функция Грина [1]. Построим ассоциированные ядра

$$K\begin{bmatrix} t_0,\dots,t_n \\ s_0,\dots,s_n \end{bmatrix} \overset{def}{=} \det \| G(t_i,s_j) \|_{i,j=0}^{n}$$

Если уравнение (1) является обыкновенным дифференциальным уравнением, т.е. $h(t) = t$, то справедливость неравенств

$$K\begin{bmatrix} t_0,\dots,t_n \\ s_0,\dots,s_n \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{и} \quad K\begin{bmatrix} t_0,\dots,t_n \\ t_0,\dots,t_n \end{bmatrix} > 0 \qquad (3)$$

при $a<t_0<\dots<t_n<b$, $a<s_0<\dots<s_n<b$ является [2] достаточным условием для того, чтобы спектр соответствующей задачи на собственные значения состоял из последовательности вещественных положительных простых (в смысле геометрической кратности) собственных значений $\lambda_0>\lambda_1>\dots\to 0$, а система соответствующих собственных функций $\varphi_i(t)$, $i= 0,1,\dots$, образовывала интерполирующий ряд (цепь Маркова) на интервале $]a,b[$, т.е. при каждом $n\geq 0$ система $\varphi_0(t),\dots,\varphi_n(t)$ являлась системой Чебышева порядка n.

Свойство (3) является эффективным, оно поддается проверке и на нем базируется всякая реализация концепции Келлога исследования спектра краевых задач.

Если уравнение (1) является функционально-дифференциальным уравнением, т.е. $h(t) \neq t$, то неравенства (3) не выполняются ни при каких условиях на функции p и h уже для третьего ассоциированного ядра

$$K\begin{bmatrix} t_0,t_1,t_2 \\ s_0,s_1,s_2 \end{bmatrix}$$

Следовательно, концепция Келлога не может быть реализована традиционным образом для функционально-дифференциальных уравнений.

Литература. 1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 278 с.

2. Kellog O.D. //Amer.J.Math. 1918. N40. P220-234.

3. Боровских А.В., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. //ДАН. 1994. Т.336. N4. С.409-412.

О СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ И ИХ СВОЙСТВАХ

Половинкин Е.С.(*Долгопрудный*)

Доклад посвящен изучению свойств сильно выпуклых множеств, т.е. таких множеств, каждое из которых представимо в виде пересечения шаров одного радиуса. Сильно выпуклые множества изучались в работах A. Plis', Jr. Lojasiewicz, H. Frankowska и C. Olech при исследовании выпуклости множеств достижимости нелинейных управляемых систем. В монографии М. А. Красносельского и А. В. Покровского "Системы с гистерезисом" показано, что сильно выпуклые множества обеспечивают хорошие свойства систем с гистерезисом. В работе Г. Е. Иванова и Е. С. Половинкина (см. *Доклады РАН*, т.340, *N* 2, 1995) получен второй порядок сходимости альтернированных сумм Понтрягина к альтернированному интегралу при сильно выпуклом терминальном множестве.

В докладе говорится о полученных автором новых качественных свойствах сильно выпуклых множеств, связанных с линейными операциями и пределами сильно выпуклых множеств, для которых показано, что они не выводят из класса сильно выпуклых множеств. Введено понятие сильно выпуклой R-оболочки, исследованы ее свойства. Получены оценки расстояния по Хаусдорфу между сильно выпуклыми оболочками с различными радиусами для одного и того же множества. Получен аналог теоремы Каратеодори, в котором утверждается о совпадении сильно выпуклой R-оболочки компактного множества из R^n с совокупностью всех сильно выпуклых R-оболочек не более чем $n+1$ точек данного компактного множества. Для компактного множества введено понятие сильно крайней точки радиуса R, принадлежащей множеству крайних точек этого множества. Получено обобщение теоремы Крейна-Мильмана о совпадении сильно выпуклого множества радиуса R, отличного от шара радиуса R, с сильно выпуклой R-оболочкой замыкания сильно выпуклых крайних точек радиуса R данного множества. Исследованы вопросы теории приближения выпуклых компактов многогранными и сильно выпуклыми аппроксимациями как внешними, так и внутренними (для телесных компактов) с указанием оценок погрешности предложенных аппроксимаций в зависимости от мелкости разбиения сетки.

Основные результаты доклада изложены в работах [1-3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00771а).

Список литературы

1. Половинкин Е. С. О свойствах сильно выпуклых множеств. В сб. Моделирование процессов управления и обработки информации. Изд. МФТИ, М., с.182–189, 1994. 2. Половинкин Е. С. О выпуклых и сильно выпуклых аппроксимациях множеств. *Доклады РАН*, 1995 (в печати). 3. Polovinkin E. S. On strongly convex sets, Phystech-journal, *N* 2, 1995.

Покровский А.Н. /Санкт-Петербург/

АСИМПТОТИЧЕСКИ СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром $\mu > 0$:

$$\mu \dot{z} = F(z,y,t,\mu)\,;\ \dot{y} = f(z,y,t,\mu)\,; \tag{1}$$

$$z(0,\mu) = z^0\,;\ y(0,\mu) = y^0\,;\ z,F \in R^M\,;\ y,f \in R^m,$$

где F, f – достаточно гладкие функции при $(z,y,t) \in G$, $0 < \mu \le \mu_0$. На решениях (I) зададим функцию $r(t,\mu) = |z(t,\mu)| = \sqrt{(z,z)}$. Условия $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} < 0$ выделяют в G многообразие Γ_μ. Предполагаем, что решение (I) достигает Γ_μ в момент $t = \tau = \tau(z^0, y^0, \mu)$. Рассмотрим интеграл

$$S(\mu,\varepsilon) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} r(t,\mu)\,dt. \tag{2}$$

<u>Определение.</u> Решение (I), достигающее Γ_μ, называется асимптотически сингулярным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{\mu}(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < \mu < \bar{\mu}(\varepsilon)$ $S(\mu,\varepsilon) \ge S_0 > 0$.

<u>Утверждение</u>. Существуют системы вида (I), имеющие асимптотически сингулярные решения.

Справедливость утверждения подтверждается примерами I,2, 3. Асимптотические разложения асимптотически сингулярного участка решений в этих примерах различны; поэтому не существует универсальной асимптотики сингулярного участка, аналогичной асимптотике Л.С.Понтрягина для участка срыва в уравнениях вида (I). Классификация асимптотически сингулярных участков решений (I) – сложная задача.

Пример I. $F = a(t)\,y\,\varphi(z/\mu, \mu)\,;\ f = -b(t)\,z\,;$
$\varphi(x,\mu) = \mu + (1-\mu)/(1+\exp(-x))$.

Пример 2. $F = y - x^3/3 + x\,;\ f = -b(t)z\,;\ x = z\varphi(z/\mu,\mu)$.

Пример 3. $F = a(t)(z+1)y\,;\ f = -b(t)z$.

Во всех примерах $M=1$, $m=1$, $z^0=0$, $y^0>0$, $a(t)>0$, $b(t)>0$.

Провоторов В.В. (Воронеж)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА НА СЕТИ-ПУЧКЕ

Рассматривается сеть-пучок S, состоящий из m ветвей γ_i $(i = \overline{1,m})$ и одного узла ξ. Пусть на каждой из ветвей γ_i задано дифференциальное уравнение n -го порядка

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 . \qquad (1)$$

Под дифференциальным уравнением

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

на сети S понимается уравнение (1) на каждой ветви γ_i $(i = \overline{1,m})$ и n соотношений, связывающих неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ в точках $\xi \in \gamma_i$ $(i = \overline{1,m})$. Исследуется начальная задача для такого уравнения.

Пупышев Ю.А. (Санкт-Петербург)

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Большинство систем дифференциальных уравнений, описывающих движение управляемой механической системы, может быть представлено в виде системы уравнений, правые части которых есть полиномы некоторых новых переменных и управлений. Используя принцип максимума Понтрягина, приходим к краевой задаче. Для её решения применим метод бесконечных систем (1,2). Тогда вместо нелинейной задачи будем иметь счетную систему линейных дифференциальных уравнений При надлежащем выборе малого параметра в механической задаче матрица коэффициентов полученной линейной системы будет верхнетреугольной и система легко интегрируется. Краевая задача сводится к решению системы алгебраических уравнений, порядок которой будет зависеть от выбора малого параметра. Однообразие выкладок позволяет реализовать указанный алгоритм построения линейной системы и её интегрирование с помощью системы буквенных операций на ЭВМ.

Литература.

1.Бабаджанянц Л.К. Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики. Труды ИТА АН СССР, вып. 17, с.3-45.

2.Бабаджанянц Л.К.,Пупышев Ю.А. Алгоритмизация задачи управляемого вращательного движения твердого тела. Сб. Вопросы механики и процессов управления, вып. 9, 1988, Ленинград.

Репин О.А. /Самара/.

О ЗАДАЧАХ ДАРБУ И ГУРСА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

В области Ω, ограниченной характеристиками $AC:\ (x-\xi)(m+2)=2(-y)^{\frac{m+2}{2}}$, $BC:\ (\eta-x)(m+2)=2(-y)^{\frac{m+2}{2}}$ уравнения

$$u_{yy}-(-y)^m u_{xx}+\mu I_{0+}^{a,b,c}u(x,0)=f(x,y) \qquad /I/$$

и отрезком $AB:\ 0\le x\le 1$ прямой $y=0$, $m>0$, $\mu=\mathrm{const}$, $I_{0+}^{a,b,c}\varphi(x)$ – обобщенный оператор в смысле М.Сайго, исследованы задачи Дарбу и Гурса.

Задача Дарбу. Определить регулярное в области Ω решение уравнения /I/ из класса $C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega\cup J)$, $J=(0,1)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=\nu(x),\ x\in J,\quad u\big|_{AC}=\varphi(\xi),\ \xi\in\bar J,$$

где $\nu(x)$ и $\varphi(\xi)$ – заданные функции.

Показано, что если $m>0$, $a>0$, $b\le\frac{2-m}{2+m}$, $c<1-a$ или $0<m<2$, $-1<a\le 0$, $b<c<\frac{2-m}{2+m}$, то задача Дарбу всегда разрешима и притом единственным образом.

Задача Гурса. Найти регулярное в области Ω решение $u\in C(\bar\Omega)$ уравнения /I/, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{AC}=\varphi_1(x),\quad u\big|_{BC}=\varphi_2(x),\quad \varphi_1\left(\tfrac12\right)=\varphi_2\left(\tfrac12\right).$$

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции.

Доказано, что если $b>0,\ c>b$ или $c<0,\ b>c$ при

$$a>\begin{cases}\dfrac{m}{m+2}, & m\le 4,\\[2ex] \dfrac{m+4}{2m+4}, & m<4\end{cases}$$

, то задача Гурса всегда разрешима и притом единственным образом.

УДК 512.5:66.011(075.8)

Ряжских В.И.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

(Воронежская Государственная технологическая Академия)

Математическая модель кристаллизации и осаждения примесей из криогенной жидкости при её движении по охлаждаемому трубопроводу может быть представлена в виде:

$$\partial F(X,L,\theta)/\partial\theta = -A\partial F(X,L,\theta)/\partial L - \partial F(X,L,\theta)/\partial X - K(L)F(X,L,\theta), \quad (1)$$

$$F(X,L,0)=0, \quad (2)$$

$$F(0,L,\theta)=0, \quad (3)$$

$$\partial F(X,L_s,\theta)/\partial L = 1, \quad (4)$$

где $L=\ell/\ell^*$, $X=x/H$, $F(X,L,\theta)=\mathcal{F}(x,\ell,\tau)\cdot\lambda\pi r^2/I$, $\theta=\tau u/H$, $K(L)=2\pi r\,\kappa(\ell)IH/(\lambda u)$, $A=\lambda H/(u\ell^*)$; ℓ,ℓ^* – текущий и нормирующий размеры кристаллов; x,τ – координата и время; H,r – длина и радиус трубопровода; $u,\lambda,\kappa(\ell)$ – скорости движения криогенной жидкости, роста кристаллов примесей и их осаждения на стенки трубопровода; I – скорость зародышеобразования кристаллов размера $L_s=\ell_s/\ell$; $\mathcal{F}(x,\ell,\tau)$ – функция распределения числа кристаллов по размерам.

Задача (1)–(4) решена с помощью последовательного применения интегрального преобразования Лапласа по переменным θ и X:

$$F(X,L,\theta)=\mathbf{1}[\theta-A^{-1}(L-L_s)]\cdot T[X-A^{-1}(L-L_s)]\cdot \exp\left[-A^{-1}\int_{L_s}^{L}K(L)dL\right],$$

где $\mathbf{1}(\theta)$ – функция Хевисайда,

$$T[X-A^{-1}(L-L_s)]=\begin{cases}X-A^{-1}(L-L_s), & X>A^{-1}(L-L_s)\\ 0, & X\le A^{-1}(L-L_s).\end{cases}$$

Степанов Г.Д. (Ярославль)

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНЫХ КРИТЕРИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА

Известно [1,2], что осцилляционность функции Грина $G(t,s)$ краевой задачи

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \ldots + p_n(t)x = \lambda x \quad (p_k(t) \in C[a,b]),$$

$$U_i(x) \equiv x^{(k_i)}(a) + \sum_{k<k_i} \gamma_{ik} x^{(k)}(a) = 0, \; U_j(x) \equiv x^{(k_j)}(b) + \sum_{k<k_j} \gamma_{jk} x^{(k)}(b) = 0,$$

$(i=\overline{1,m},\ j=\overline{m+1,n},\ 0<m<n,\ n-1\geq k_1>\ldots>k_m\geq 0,\ n-1\geq k_{m+1}>\ldots>k_n\geq 0)$ даже в несамосопряженном случае обеспечивает вещественность всех собственных значений, их простоту и целый комплекс других важных спектральных свойств.

Под алгоритмически эффективными условиями понимаются условия, допускающие непосредственную проверку с помощью численных методов. Само определение осцилляционности ядра такой проверки не допускает, так как включает ограничения на бесконечное число миноров. При $n=2$ алгоритмически эффективный критерий осцилляционности $G(t,s)$ получен Ф.Р.Гантмахером и М.Г.Крейном [1], а при произвольном n и краевых условиях вида $x(a)=\ldots=x^{(m-1)}(a)=x(b)=\ldots=x^{(n-m-1)}(b)=0$ дан М.Г.Крейном [3]. В общем случае эффективные необходимые и достаточные условия осцилляционности приведены в [4]. Проведенные эксперименты с пакетом программ, созданным на основе этого критерия для $Lx\equiv x^{(n)}$, показали многочисленность случаев, в которых имеет место осцилляционность, не обнаруживаемая непосредственным применением ранее известных достаточных признаков.

Условия осцилляционности в [4] формулируются в виде требования положительности $m(n-m)-1$ вронскианов, составленных из решений $v_1,\ldots,v_n$ уравнения $Lx=0$, определяемых краевыми условиями
$U_i(v_j)=\delta_{ij}(-1)^{n-1-k_i},\ j=\overline{1,m},\ U_i(v_j)=\delta_{ij}(-1)^{j-m},\ j=\overline{m+1,n}\ \ (i=\overline{1,n})$. Однако, как показывает следующее утверждение, количество используемых вронскианов из этих решений, в ряде случаев может быть уменьшено.

Теорема. *Для осцилляционности ядра* $(-1)^{n-m}G(t,s)$ *при* $k_{m+1}=n-m-1$ *необходимы и достаточны условия* $(-1)^{i(n-m)}[v_1,\ldots,v_i](t)>0$ $(i=\overline{1,n})$ *в* (a,b). *Аналогично, для осцилляционности* $(-1)^{n-m}G(t,s)$ *при* $k_1=m-1$ *необходимы и достаточны условия* $(-1)^{j(n-m)}[v_{m+1},\ldots,v_{m+j}](t)>0$ $(j=\overline{1,n-m})$, $(-1)^{(i+1)(n-m)}[v_1,\ldots,v_i,v_{m+1},\ldots,v_n](t)>0$ $(i=\overline{1,m})$ *в* (a,b).

Отметим, что теорема включает уже упоминавшийся результат М.Г.Крейна из [3], охватывающий лишь случаи одновременного выполнения равенств $k_1=m-1$, $k_{m+1}=n-m-1$.

ЛИТЕРАТУРА. 1. *Гантмахер Ф.Р., М.Г.Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 2. *Левин А.Ю., Степанов Г.Д.* // Сиб.Матем.Журн. 1976. Т.17.№3. С.606–626; Т.17.№4. С.813–830. 3. *Крейн М.Г.* // ДАН СССР. 1939. Т.25.№8. С.643–646. 4. *Степанов Г.Д.* // ДАН СССР. 1977. Т.234.№4. С.765–767.

Степанов С.Е. (г. Владимир)

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть заданы m и n -мерные римановы многообразия (M,g) и (N,g') со связностями Леви-Чивита ∇ и ∇' соответственно и гладкое отображение $f: M \to N$. Его дифференциал f_* является сечением расслоения $T^*M \otimes f^{-1}(TN)$, а квадратичный дифференциал $\bar\nabla f_*$ – сечением расслоения $S^2M \otimes f^{-1}(TN)$, где $\bar\nabla = \nabla \oplus \nabla'$ и $S^2M = Sim(T^*M \otimes T^*M)$. Благодаря поточечно $O(m)$-неприводимому разложению $S^2M = S^2_0M \oplus \mathbb{R}g$, где $S^2_0M = \ker(Tr: S^2M \to \mathbb{R})$, выделяются изученные в [1] и [2] три класса отображений – омбилические, когда $\bar\nabla f_* \in \mathbb{R}g \otimes f^{-1}(TN)$, гармонические, когда $\bar\nabla f_* \in S^2_0M \otimes f^{-1}(TN)$, и аффинные, когда $\bar\nabla f_* = 0$. Благодаря поточечно $O(m)$-неприводимому разложению

$$T^*M \otimes S^2_0M = S^3_0M \oplus \mathbb{R}g \otimes T^*M \oplus (\ker Tr) \cap (\ker Sim)$$

выделяются семь классов гармонических отображений. Доказывается, что для компактного многообразия M четыре из них, когда $\bar\nabla^2 f_* \in S^3_0M \otimes f^{-1}(TN)$, $\bar\nabla^2 f_* \in (\ker Tr) \otimes f^{-1}(TN)$, $\bar\nabla^2 f_* \in (\ker Tr) \cap (\ker Sim) \otimes f^{-1}(TN)$ или $\bar\nabla^2 f_* = 0$, исчерпывается аффинными отображениями.

Рассмотрены определяемые условием $\Delta\Delta f = 0$ для $\Delta = Tr\,\bar\nabla^2$ бигармонические отображения. Доказывается, что каждое бигармоническое отображение $f: M \to N$ является гармоническим для компактного многообразия M и что не существует бигармонических отображений $f: M \to \mathbb{R}$ для полного многообразия M с $Ric_M > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 94-01-01595.

Литература

1. Yano K., Ishihara Sh. Harmonic and relatively affine mappings. J. Diff. Geometry, 10 (1975), 501-509.
2. Степанов С.Е. К теории отображений римановых многообразий в целом. Известия вузов. Математика, 7 (1994), 81-88.

Ю. И. Трофимцев, А. И. Леонов, И. В. Озопин, В. Ю. Шадрин (Якутск)

ОДНА НЕАНТОГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается иерархическая неантагонистическая игра $(n + 1)$-го лица в нормальной форме :

$$\Gamma = < I + 1,\ U_0,\ \{ V_i \}_{i \in I},\ K_0,\ \{ K_i \}_{i \in I} >,$$

где $I = \overline{1,n}$, U_0 - множество стратегий игрока A_0, V_i - множество стратегий игрока B_i, K_0 - функция выигрыша игрока A_0, K_i -функция выигрыша игрока B_i :

$$K_0\ (X,\ Y,\ W) = \sum_{i=1}^{n} W_i [\ D_i x_i y_i - Q_i (\ y_i)\ ],$$

$$K_i\ (x_i, y_i, W_i, R_i, L_i) = A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} - W_i [C_i (\ x_i\ ) - D_i x_i y_i\ ],$$

если $q_i (t_j) < m$;

$$K_0\ (X,\ Y,\ W,\ \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (\ W_i [\ D_i x_i y_i - Q_i (\ y_i)\ ] + \lambda x_i q_i\ ),$$

$$K_i (x_i, y_i, \lambda_i, W_i, R_i, L_i) = A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} - W_i [C_i (x_i) - D_i x_i y_i] - \lambda_i x_i q_i$$

при $q_i (t_j) > m$.

Здесь D_i, α_i, A_i, m - действительные числа, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $W = (W_1, W_2, \ldots, W_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

$$0 < x_i < 1\ ,\quad 0 < \lambda_i < \lambda_i^0\ ,\quad 0 < W_i < 1\ ,\quad \sum_{i=1}^{n} W_i = 1\ ,$$

$$0 < y_i < p_i A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}\ ,\quad 0 < p_i < 1\ ,\quad y_i = 0 \text{ при } x_i = 0\ ,$$

и $y_i = p_i A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}$ при $x_i = 1$, $Q_i(y_i) - y_i > 0$ при $y_i > \overline{y}_i$, $0 < \overline{y}_i < p_i A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}$, $C_i(0) = 0$, $C_i(x_i) - x_i > 0\ \forall\ x_i \in [0,1]$, функции $C_i(x_i)$ выпуклы вниз, q_i - решение краевой задачи для уравнения диффузии

$$\partial q_i / \partial t + V \operatorname{div} q_i + \mu \Delta q_i = f_i\ ,$$

взятое в момент t_j.

Векторы Y, W, λ-управления игрока A_0. Каждый из игроков B_i, зная выбор A_0, выбирает управления x_i, R_i, L_i, q_i. Целью игроков является максимизация своей функции выигрыша. Доказывается необходимое и достаточное условие существования оптимального решения. Задача конкретизируется как задача назначения налогов и штрафов за использование природных ресурсов в золотодобывающей отрасли.

УДК 519.837

Ухоботов В.И. (Челябинск)

ОДНОТИПНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ПОЛОМКОЙ

Модели задач управления с нарушениями в динамике управляемой системы были рассмотрены М.С.Никольским. В работе [I] рассматривается такая задача о выводе управляемой точки на заданное множество с учетом возможного появления одного нарушения в работе двигателя.

В докладе рассматривается дифференциальная игра, уравнения движения которой имеют вид

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v; \; z, u, v \in E, \; |u| \le 1, \; |v| \le 1 \quad (I)$$

Здесь E – линейное нормированное пространство с нормой $|\cdot|$. Задан момент времени p. Цель игрока u заключается в том, чтобы минимизировать величину $|z(p)|$. Цель игрока v – противоположна.

Считается, что возможно появление одного момента $\tau < p$, во время которого происходит нарушение в динамике системы (I). Это означает, что динамика системы (I) задается с помощью следующих функций:

$$a(t) = a_1(t), \; b(t) = b_1(t), \; t \le \tau$$
$$a(t) = a_2(t), \; b(t) = b_2(t), \; \tau < t \le p$$

Эти функции a_i, b_i известны. Первому игроку не известно когда наступит момент поломки τ. Поэтому первый строит свое поведение исходя из худшего для себя варианта.

Эта задача решается с помощью результатов из работы [2]. В явном виде вычисляется плата игры. Строятся в явном виде оптимальные управления игроков.

Рассматривается ряд примеров. В частности, рассматривается с одной поломкой известная игра " мальчик и крокодил ", платой в которой является расстояние между игроками в заданный момент времени.

Литература

I. Никольский М.С. Задача о переправе с возможной остановкой двигателя // Дифференциальные уравнения. - 1993.- Т.29,№ II. - С. 1937 - 1940

2. Ухоботов В.И. Область безразличия в однотипных дифференциальных играх удержания на ограниченном промежутке времени. - 1994.- Т. 58, Вып. 6 - С. 55 - 60.

УДК 517.956

Л.В.Фардигола (Харьков)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛОЕ С ИНТЕГРАЛОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Изучена следующая краевая задача в слое $\Pi(T)=\mathbb{R}^n \times [0,T]$:

$$\partial u(x,t)/\partial t = P(-iD_x)u(x,t)+f(x,t), (x,t)\in\Pi(T); \quad (1)$$

$$\int_0^T Q(-iD_x)u(x,t)\,dt = u_0(x),\ x\in\mathbb{R}^n; \quad (2)$$

где $P(\sigma)$, $Q(\sigma)$ - произвольные матрицы $(m\times m)$, элементами которых являются полиномы с комплексными коэффициентами, $\sigma\in\mathbb{R}^n$; u_0, f - заданные, а u - искомая функции.

Пусть $\lambda_j(\sigma)(j=\overline{1,m})$ - собственные значения матрицы $P(\sigma)$.

Т е о р е м а 1. Задача (1),(2) корректна (определение см. в [1]) в классах функций полиномиального роста тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

$$(\exp\{T\lambda_j(\sigma)\}-1)/\lambda_j(\sigma)\neq 0\ (\forall\sigma\in\mathbb{R}^n,\ \forall j=\overline{1,m}); \quad (3)$$

$$\det Q(\sigma)\neq 0\ (\forall\sigma\in\mathbb{R}^n). \quad (4)$$

Исследован вопрос о сглаживании по x при каждом фиксированном $t\in(0,T)$ решения задачи (1),(2) по сравнению с краевой функцией u_0 и свободным членом f. Такое свойство сглаживания было названо сильной корректностью и в случае скалярного уравнения (1)$(m=1)$ было исследовано в [2].

Т е о р е м а 2. Задача (1),(2) сильно корректна в классах функций полиномиального роста тогда и только тогда, когда выполнены условия (3), (4) и условие

$$\Lambda(\sigma)\geqslant C|\sigma|^h+q\ (\forall\sigma\in\mathbb{R}^n),$$

где $\Lambda(\sigma)\equiv\min\{|\mathrm{Re}\,\lambda_j(\sigma)| : j=\overline{1,m}\}$; здесь $C,h>0, q\in\mathbb{R}$.

Таким образом, если задача сильно корректна в классах функций полиномиального роста, то она корректна в этих же классах. Обратное, вообще говоря, не верно.

Исследована также зависимость свойства корректности задачи (1),(2) от толщины T рассматриваемого слоя.

В доказательствах основных утверждений работы использован метод преобразования Фурье. Значительную роль в доказательствах многих утверждений играет использование свойств вещественных полуалгебраических множеств, в особенности теорема Тарского-Зайденберга и ее следствия.

1. Фардигола Л.В.//Укр.мат.журн.1990.Т.42.№ 11.С.1546-1551.
2. Фардигола Л.В.//Мат.заметки.1993.Т.53.№ 6.С.122-129.

УДК 517.978.4: 519.218.3

Хрусталев М.М., Дроздов В.А. (Москва)

РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ИГРОКОВ О СОСТОЯНИИ

Исследуется бескоалиционная неантагонистическая дифференциальная игра многих лиц, осуществляющих совместное управление стохастическим диффузионным процессом.

$$dx = \left[A(t)x + \sum_{s=1}^{m} B_s(t)u_s(t,x)\right]dt + C(t)dw,$$

$$x \in R^n,\ t \in [t_0,t_1],\ u_s \in R^{m_s},\ s = 1,\dots,K,\ w \in R^q.$$

Каждый из K игроков стремится выбрать свою стратегию $u_s(t,x)$ так, чтобы минимизировать функционал

$$J_s = \Omega\left\{1/2\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T D_s(t)x + u_s^T E_s(t)u_s\right]dt + 1/2\ x^T(t_1)Q_s x(t_1)\right\}$$

Матрицы $D,\ Q \ge 0,\ E > 0$, Ω - оператор матожидания. Должны быть выполнены информационные ограничения: каждая компонента стратегии $u_s(t,x)$ любого из игроков может зависеть лишь от заранее оговоренного набора компонент вектора состояния.

Показано, что поиск ситуации равновесия по Нэшу сводится к краевой задаче: $dG/dt+G[trA_u+1/2\cdot tr(CC^TH)]=0$; $dH/dt+HA_u+A_u^TH+HCC^TH=0$; $d\gamma_s/dt+1/2\cdot tr(CC^TM_s)=0$; $dM_s/dt+M_sA_u+A_u^TM_s+P_s^TEP_s+D_s=0$; $G(t_0)=G_0$, $H(t_0)=H_0$, $\gamma_s(t_1)=0$, $M_s(t_1)=Q_s$, $s = 1,\dots,K$. Здесь H, M_s - матрицы размеров $n \times n$; G, γ_s - скаляры; $A_u = A - \sum_{s=1}^{m} B_sP_s$ - матрица замкнутой системы, величины G_0 и H_0 - заданы.

Стратегия s-го игрока, удовлетворяющая информационным ограничениям, определяется равенством: $u_s = -P_sx$, где $P_s = E_s^{-1}\cdot(B_s^TM_s - K_sH)$, а ненулевые элементы матрицы $K_s = \Lambda_sK_s^*$ находятся из системы линейных уравнений: $\Lambda_s(E_s^{-1}(B_s^TM_s - (\Lambda_sK_s^*)H) = 0$. Плотность распределения состояния x процесса гауссова: $p(t,x) = G\cdot\exp(-1/2x^TH\ x)$ Здесь Λ_s - оператор структуры управления, он переводит матрицу K размеров $m_s\times n$ с элементами K_{ij} в матрицу R тех же размеров с элементами $R_{ij} = K_{ij}$, если компонента u_{si} стратегии s-го игрока u_s не должна зависеть от компоненты x_j вектора x и $R_{ij} = 0$ в противном случае.

В случае полной информированности всех игроков о состоянии краевая задача распадается на две задачи Коши.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ). Грант N 94-01-01265.

И.В.Чернявский (Москва)

ЛИНЕЙНО - КВАДРАТИЧНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Рассматривается дифференциальная позиционная линейно-квадратичная игра

$$< \{1,2\}, \Sigma, \{\mathcal{U}\}, \{\mathcal{V}\}, \{J_i(U,V)\}_{i=1,2} >, \quad (1)$$

где управляемая система Σ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \end{cases} \qquad x,y,u,v \in \mathbb{R}^2,$$

позиционные стратегии $U \div u(t,x)$, $V \div v(t,x)$.

Векторный критерий качества имеет вид

$$J_1(U,V) = \|x(T) - y(T)\|^2,$$

$$J_2(U,V) = \int_0^T (\alpha\|u\|^2 - \beta\|v\|^2)dt,$$

где $\|a\|$ -евклидова норма в $\mathbb{R}^2$, $T = const$ - момент окончания игры. При этом критерий $J_1(U,V)$ характеризует игру сближения-уклонения, а второй критерий обеспечивает ограничения на управления игроков.

Утверждение. В игре (1) существует седловая точка по Парето вида

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha})(t-T)+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}(x_1-y_1) \\ \frac{1}{\alpha}(x_2-y_2) \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha})(t-T)+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}(x_1-y_1) \\ \frac{1}{\beta}(x_2-y_2) \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maxmin New York: Academic Press, 1993. 404p.

Шалимова Н.Л. (Омск)

ГРАНИЧНО ОДНОРОДНЫЕ НЕСВЯЗНЫЕ ПОРЯДКИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $P = \{P_x : x \in A^n\}$ – несвязный порядок, инвариантный относительно параллельных переносов в n-мерном аффинном пространстве A^n, $n \geqslant 2$. То, что порядок несвязный означает следующее: замыкание множества $Q_x = P_x \setminus \{x\}$ не содержит точки x. Внешний конус

$$C_x = \overline{\bigcup_{y \in Q_x} l_{xy}} ,$$

где l_{xy} – луч с началом x, проходящий через y. Пусть выполнены условия:

1) $Q_x = \overline{\operatorname{Int} Q_x}$;

2) C_x – эллиптический конус;

3) ∂Q_x – гладкая поверхность класса C^1;

4) $\partial Q_x \cap \partial Q_z$, где $z \in A^n \setminus (P_x \cap P_x^-)$, $P_x^- = \{ y : P_y \ni P_x\}$, трансверсально.

Пусть $\operatorname{Aut}(P)$ группа непрерывных порядковых автоморфизмов. Порядок P называется внешне однородным (соотв.: гранично однородным), если стабилизатор $\operatorname{Aut}(P)_a$ действует транзитивно на $A^n \setminus (P_a \cup P_a^-)$ (соотв.: на $Fr(P_a)\setminus\{a\}$).

ТЕОРЕМА. Пусть $P = \{P_x : x \in A^n\}$ –несвязный гранично однородный порядок, удовлетворяющий условиям 1) – 4).

Тогда порядок P не будет внешне однородным и любой порядковый автоморфизм будет аффинным преобразованием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. Изотонные отображения несвязно упорядоченного евклидова пространства // Сиб.мат.ж. 1980. Т.21, т 3. С.80-88.

Шарай Н.В., Самкова Г.Е. (Одесса).

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПОВЕДЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЯВНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО ПУЧКА МАТРИЦ

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} A(z)w' + B(z)w = F(z,w), \\ w(z) \to 0 \text{ при } z \to 0, \end{cases} \tag{I}$$

где однозначные матрицы $A, B: \mathcal{D} \to G_1 \times G_2$ аналитичны в $\mathcal{D}$, области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $G_1 \times G_2 \subset \mathbb{C}^{m \times n}$, $(z=0) \in \mathcal{D}$, $(w, w') = (0,0) \in \partial(G_1 \times G_2)$, однозначная вектор-функция $F: G_2 \to G_1$ -аналитична в $\mathcal{D} \times G_2$.

Предполагается, что пучок матриц $A(0) + \lambda B(0)$ является сингулярным.

С учетом теоремы о нулях аналитической функции в окрестности точки $(0,0,0)$ система в задаче Коши (I) приводится либо к полуявной системе относительно части компонент вектора w с условиями совместности $(n<m)$, либо к полуявной системе, зависящей от параметров $(m<n)$, либо к полуявной системе стандартного вида $(n=m)$.

Каждая из полученных задач Коши исследуется при помощи методов кривых и поверхностей без контакта и аналитического продолжения решений.

Получены достаточные условия существования аналитических решений задачи Коши (I), когда z изменяется либо в полной окрестности точки $z=0$, либо в односвязной области с точкой $z=0$ на границе. Структура области G_2 или некоторых ее подобластей позволяет дать более точную оценку аналитических решений (I) при $z \to 0$.

Исследованы вопросы о числе таких решений.

Щепакина Е.А. (Самара)

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ МОДЕЛЬ САМОВОСПЛАМЕНЕНИЯ

Исследование математической модели самовоспламенения газа показывает, что характер решений системы дифференциальных уравнений резко меняется в некотором, чрезвычайно узком промежутке изменения параметра, характеризующем начальное состояние системы. Промежуток, в котором происходит резкий, скачкообразный переход от медленного протекания реакции к быстрому, взрывному, обычно называют пределом самовоспламенения. Задача определения предела самовоспламенения и соответствующей перестройки решений является одной из основных математических задач теории горения.

В настоящей работе исследуется математическая модель самовоспламенения газовой смеси в инертной пористой среде в случае реакции первого порядка. Для задач теории горения является характерным быстрое тепловыделение и сравнительно медленное расходование реагирующего вещества. Благодаря разномасштабности скоростей изменения переменных модель представляет собой сингулярно возмущенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\gamma\dot{\Theta} = \eta\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right) - \alpha(\Theta-\Theta_c),\quad \gamma_c\dot{\Theta}_c = \alpha(\Theta-\Theta_c),$$

$$\dot{\eta} = -\eta\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right),\quad \eta(0)=1, \Theta(0)=\Theta_c(0)=0.$$

Здесь Θ, Θ_c – безразмерная температура газа и инертной среды соответственно; η – концентрация; γ – малый параметр. Параметр α отражает начальное состояние системы.

Изучается структура предела самовоспламенения. Исследуется последовательная перестройка режима реакции при изменении значения параметра α.

Моделирование критического режима осуществляется методом интегральных многообразий и аппаратом траекторий-уток.

Построены асимптотические разложения критических значений параметра α

$$\alpha_1^* = (1-\beta)e - \omega_0\gamma^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2(1-\gamma_c^{-1})^2 e}\left(1+\beta(1+\frac{4}{3(\gamma_c-1)})\right)+$$

$$+\frac{4}{9}\gamma\ln\gamma^{-1}e(1-\gamma_c^{-1})+\ldots,\quad \omega_0 = 2,338107,$$

$$\alpha_2^* = (\gamma_c - \gamma(2+\gamma_c^{-1}+\beta(4-2\gamma_c^{-2})))\exp\left(\frac{\gamma_c}{1+\beta\gamma_c}\right)+\ldots.$$

В зависимости от значения параметра $B = (\gamma+\gamma_c)^{-1}$ существуют два случая перехода через критические условия по α.

1. При $B < 1+2\beta, \alpha_1^* < \alpha \leq \alpha_2^*$ происходит медленное выгорание газовой смеси вплоть до завершения процесса при $\Theta = B$.

2. $B > 1+2\beta$. При $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$ процесс протекает в две стадии: медленное реагирование и переход в взрывную стадию. При $\alpha > \alpha_2^*$ реакция протекает так же, как в первом случае.

3. При $\alpha < \alpha_1^*$ наблюдается типичный взрыв.

УДК 517,513

В.М.Щербин

ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ К-ПРОСТРАНСТВ

В данном сообщении формулируется теорема Тейлора, где дифференцирование отображений рассматриваются в смысле (u , v) -производных. Подробнее по поводу (u, v)- производных см.[2]. Относительно терминологии К-пространств см. [I.]

<u>Теорема Тейлора.</u> Пусть $y=f(x);\ f:A\to Y;\ A\subset X$ множества типа $-\ M(a,\varepsilon u)\overset{d}{=}\{x\in X:|x-a|\le\varepsilon u\}$ $-X$ и Y, - K- пространства. Если функция f определённая на множестве $A\subset X$ пространства X со значением в пространстве Y имеет (u, w_i) -производные до порядка p , то для этой функции при $|h|\le\varepsilon u$ имеет место формула Тейлора.

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)(h,h)+\dots+\frac{1}{p!}f^{(p)}(a)(h,\dots,h)+R_p,$$

$$R_p\le\sup_{0<t<1}|f^{(p)}(a+th)-f^{(p)}(a)||h\dots h|\cdot\frac{1}{p!}\ -$$

- При доказательстве теоремы Тейлора мы использовали следующее утверждение. Для отображений $f:[0,1]\to Y$, где Y K- пространство интеграл Римана как предел интегральных сумм и доказана теорема: если $f:[0,1]\to Y$ -равномерно ограничено на [0,I], то интеграл Римана $\int_0^1 f(t)dt$ существует. См. [3].

Замечание. Если $f^{(p)}(x)$ - τ - непрерывно в точке $x\in M$ то $|R_p(x,h)|=o(\varepsilon^p)$ при всех $x\in M$. Это следует из оценки R_p

Литература

I. Вулих Б.З.Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М.,1961.

2. Соболев В.И.,Щербин В.М. О дифференцируемости отображений K-пространств, ДАН СССР, 1975,Т.225, №5, 1020-1022.

3. Щербин В.М. Интегрирование по Риману отображений полуупорядоченных колец.

Статья депонирована в ВИНИТИ №2838-85,23 стр.

УДК 517.98

Фомин В.И. (Тамбов)

О КОНСТАНТАХ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть $p \in [1, \infty)$; ℓ_p – линейное пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty , \qquad (I)$$

с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$; ℓ_∞ – линейное пространство всех ограниченных последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{1 \le i < \infty} |x_i|$; $\ell_{\nu(p)}$, $\ell_{\mu(p)}$ – линейные пространства всех числовых последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию (I), снабженные соответственно нормами

$$\|x\|_{\nu(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j(p)\, |x_{i_j}| ; \quad \|x\|_{\mu(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(p)\, |x_{i_j}| ,$$

где для любого $1 \le j < \infty$ $\nu_j(p) = \alpha^{j-1}$, $\alpha = 2^{\frac{1}{p}} - 1$, $\mu_j(p) = \alpha^{j-1}(1-\alpha^q)^{\frac{1}{q}}$, $q = \frac{p}{p-1}$; $\{i_j\}_{j=1}^{\infty}$ – такая последовательность индексов, что

$$|x_{i_1}| \ge |x_{i_2}| \ge \ldots \ge |x_{i_j}| \ge |x_{i_{j+1}}| \ge \ldots$$

Показано, что при $p \ge 2$ справедливы вложения

$$\ell_1 \overset{\mathrm{I}}{\subseteq} \ell_{\nu(p)} \overset{\mathrm{II}}{\subseteq} \ell_p \overset{\mathrm{III}}{\subseteq} \ell_{\mu(p)} \overset{\mathrm{IV}}{\subseteq} \ell_\infty ,$$

при этом, константы вложений I , II , III равны единице; константа вложения IV выражается формулой

$$C_{\infty,\mu(p)} = \frac{1}{(1-\alpha^q)^{\frac{1}{q}}}$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ