ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА (АВСТРИЯ)
УНИВЕРСИТЕТ г. ДУБЛИНА (ИРЛАНДИЯ)
КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОБЩЕСТВО «МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА»
ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВЕСЕННЯЯ
ВОРОНЕЖСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-IV"

Посвящается 85-летию со дня рождения
Л. С. Понтрягина

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
(3—8 мая 1993 г.)

ВОРОНЕЖ — 1993

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН им. В.А. СТЕКЛОВА
МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА (АВСТРИЯ)
УНИВЕРСИТЕТ г. ДУБЛИНА (ИРЛАНДИЯ)
КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОБЩЕСТВО "МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА" ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВЕСЕННЯЯ ВОРОНЕЖСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА "ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-IУ"

Посвящается 85-летию со дня рождения
Л.С. Понтрягина

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
(3-8 мая 1993 г.)

Воронеж 1993

УДК 517.94 (92; 054; 97)

"Понтрягинские чтения-IУ" : Тезисы докладов школы - Воронеж: ВГУ, 1993 г. - 220 с.

В сборнике представлены тезисы докладов и перечень лекций, состоявшихся на очередной Воронежской весенней математической школе, проводимой совместно с Математическим институтом АН им. В.А. Стеклова, Московским университетом, Международным институтом прикладного системного анализа (Австрия), университетом г. Дублина (Ирландия), Кемеровским госуниверситетом.

Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем теории оптимального управления, теории классических и нестандартных краевых задач, анализа, геометрии, вопросы аналитического и численного моделирования сложных систем.

ОРГКОМИТЕТ

Председатель - Ильин В.А., академик; сопредседатель - Осипов Ю.С., академик; Сопредседатель - Мищенко Е.Ф., академик; зам.председателя - Гусев В.В., профессор; зам.председателя - Покорный Ю.В., профессор; Куржанский А.Б., академик; Пшеничный В.И., академик; Никольский С.М., академик; Благодатских В.И., профессор; Борисович Ю.Г., профессор; Григоренко П.Л., профессор; Кряжимский А.В., профессор; Козик Н.И., профессор; Мищенко А.С., профессор; Маккенна П., профессор; Макконмара М., профессор; Мальцев А.А., профессор; Мешков В.З., профессор; Никольский М.С., профессор; Перов А.Н., профессор; Розов Н.Х., профессор; Рогачев С.А., председатель комитета по образованию Воронежской области; Перов В.А., доцент; Мартыненко Г.В., ученый секретарь; Провоторов В.В., ст. науч. сотр.

Оргкомитет благодарит НПК "Гермес и К^{О}" за финансовую поддержку.

УДК 517.9 Абдрахманов В.Г. / Уфа /, Смолин Ю.Н. / Магнитогорск /

МАТРИЦА КОШИ УРАВНЕНИЯ С ВНЕШНЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассматривается уравнение

$$(DUx)(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \qquad (1)$$

где $D: AC \subset C \to L$ – оператор дифференцирования, $U: C \to C$ – линейный ограниченный вольтерров оператор. Под решением понимается n -мерная вектор-функция, удовлетворяющая (1) почти всюду на $[a,b]$. Уравнение (1) включает в себя широкий класс функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов.

Воспользовавшись общим видом оператора U, запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d}{dt}\int_a^t d_\tau Q(t,\tau)x(\tau) = f(t), \quad t \in [a,b].$$

Введем уравнения

$$\int_\xi^t d_\tau C(t,\tau)\,Q(\tau,\xi) = E, \quad t \in\,]a,b], \qquad (2)$$

$$\int_\xi^t d_\tau Q(t,\tau)\,C(\tau,\xi) = E, \quad t \in\,]a,b]. \qquad (3)$$

Интегралы в (2) и (3) понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса, E – единичная матрица n -го порядка.

ТЕОРЕМА. Для существования матрицы Коши $C(t,s)$ уравнения (1), имеющей на $[a,b]$ ограниченную вариацию по второму аргументу при всех $t \in [a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы при почти всех $\xi \in\,]a,t[$ она удовлетворяла уравнению (2) как функция второго аргумента и уравнению (3) – как функция первого.

УДК 517.937 А.Х. Абдулазизов (Минск БГУ)

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В докладе рассматривается система

$$x_i' = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t)x_j + \varepsilon b_i(t, x_1, x_2, \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

линейная часть которой является непрерывной оператор-функцией в пространстве $L(X)$ действующих в некотором идеальном пространстве последовательностей X, а нелинейная часть определяет на $\mathbb{R}$ ограниченную и непрерывную функцию

$$B_0(t) = (b_1(t,0,0,\ldots), \ldots, b_i(t,0,\ldots), \ldots) \qquad (2)$$

со значениями в пространстве X и для компонент которой выполнены условия Липшица

$$|b_i(t,u_1,\ldots,u_j,\ldots) - b_i(t,v_1,\ldots,v_j,\ldots)| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}(t)|u_j - v_j| \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad (3)$$

где $k_{ij}(t)$ $(i,j = 1,2,\ldots)$ – заданные на $\mathbb{R}$ функции, определяющие ограниченную оператор-функцию $K(t)$ со значениями в $L(X)$.

Предположим, что существуют равномерные по $t \in \mathbb{R}$ пределы

$$a_{ij} = \lim_{T \to \infty} T^{-1} \int_t^{t+T} a_{ij}(s)ds \quad (i,j = 1, 2, \ldots). \qquad (4)$$

Теорема. *Пусть все собственные значения оператора* A, *определяемого ограниченной в идеальном пространстве* X *матрицей* (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, \ldots)$ *имеют ненулевые вещественные части. Тогда при достаточно малых* ε *система* (1) *имеет единственное ограниченное и непрерывное на всей оси* $\mathbb{R}$ *решение, равномерно стремящееся к нулю при* $\varepsilon \to 0$.

Сформулированная теорема является обобщением на бесконечные системы второй основной теоремы Н.Н. Боголюбова, существенно более сильное, чем предлагаемое в [1] .

Литература

1. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. - Алма Ата, Наука, 1974.

2. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, Наукова Думка, 1971.

УДК 517. 927. 2. Алероев Т.С. (Нальчик)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ, ИМЕЮЩИХ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЙ СПЕКТР

Для краевой задачи

$$u'' - \mathcal{D}_{0x}^{\alpha} u + \lambda u = 0, \quad (0 \le x \le 1) \qquad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \qquad (2)$$

где $\mathcal{D}_{0x}^{\alpha}$ - оператор дробного (в смысле Римана - Лиувеля) порядка $\alpha < 1$, строится функция Грина $G(x,t)$ и доказаны следующие теоремы.

Теорема I. Все собственные значения задачи (I), (2) положительны и простые.

Теорема 2. Основной тон задачи (I), (2) не имеет узлов, n-й обертон имеет ровно n узлов.

Интересно отметить, что ядро $G(x,t)$ оператора

$$(Gu)(x) = \int_0^1 G(x,t) u(t)\, dt$$

не является ядром Келлога (по терминологии Ю.В.Покорного).

УДК 517.9 Аль-Хйасоат Халед (Одесса)

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМИНАЛЬНЫХ БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Рассматривается бескоалиционная игра N лиц, в которой изменение позиции игроков описывается системой

$$\dot{x} = \varepsilon\,[f(t,x) + \sum_{i=1}^{N} A_i(x)\varphi_i(t,u_i)],\quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

а функция выигрыша i-го игрока задается функционалом

$$I_i(u_1,u_2,\dots,u_N) = -_i(T,x(T)), \tag{2}$$

где $x\in R^n$, $A - n_i\times m_i$ - матрица, $f(t,x)$, $\varphi_i(t,u_i)$ - 2π-периодические по t функции, $u\in U_i\subset comp(R^{k_i})$ - вектор управления i-игрока, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $0 \le t \le L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$ - постоянная, $i = 1, 2, \dots, N$.

Задаче (1), (2) поставим в соответствие следующую усредненную задачу

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \bar{f}(\xi) + \sum_{i=1}^{N} A_i(\xi)v_i,\quad \xi(0) = x_0, \tag{3}$$

$$\bar{I}_i(v_1,v_2,\dots,v_N) = F_i(L,\xi(L)), \tag{4}$$

где

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t,x)dt$$

$$v_i\in V_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_i(t,U_i)dt. \tag{5}$$

Интеграл в (5) понимается в смысле Аумана, а сходимость, в смысле метрики Хаусдорфа.

Доказываются теоремы, в которых устанавливаются условия, при выполнении которых, решение задачи (3), (4) является δ-равновесным решением исходной задачи.

Приведены результаты решения некоторых модельных задач на ЭВМ, которые иллюстрируют эффективность предложенного численно-асимптотического метода.

УДК 517.9 Антоневич А.Б., Турло А.В. (Минск)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Уже для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \qquad (1)$$

теряет смысл известная формула общего решения, если коэффициент $A(t)$ и $F(t)$ являются обобщенными функциями. Из-за отсутствия операции умножения для распределений некорректным становится даже само определение решения. Однако в последние годы был построен ряд пространств новых обобщенных функций [2] ,или , как их предложено называть [1], мнемофункций, допускающих умножение.

В работе на примере уравнения (1) прослежены некоторые особенности, возникающие в связи с тем, что коэффициенты являются обобщенными функциями. Введено пространство $G(\mathbb{R})$ как некоторая модификация известной конструкции Коломбо. Получено условие, обеспечивающее существование решения однородной задачи Коши для уравнения (1), приведены примеры, показывающие неединственность решения, а также приведено более сильное условие, обеспечивающее существование и единственность решения задачи Коши для общего случая уравнения (1) в $G(\mathbb{R})$. Ранее теорема о существовании и единственности решения задачи Коши была получена при более жестких условиях [3]. Для простейших коэффициентов типа δ, δ', $\pm\frac{1}{x}$ прослежено поведение решений при переходе через особую точку коэффициента.

Литература

1. Antonevich A.B., Radyno L.V. On the mnemofunctions spaces. // Тезі міжнародної математичної конфіренції присвяченої 100-річчю народження Х Банаха. Львів, 1992, с.3.

2. Егоров Ю.В. К теории обобщенных функций.// УМН, 1990, т.45, вып.5(275), с.3-40.

3. Радыно Я.В.,Нгуен Хой Нгия. Задача Коши в пространстве обобщенных функций Ж.Коломбо.// ДАНБССР,1990, т.34, 6, с.489-492

УДК 517.9 Антоневич А.Б., Фурсенко Н.В. (Минск)

МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С δ-ОБРАЗНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ.

Построение теории уравнений с частными производными, содержащих в качестве производных обобщенные функции, уже на первом этапе определения понятия решения наталкивается на известные трудности, связанные с невозможностью умножения обобщенных функций. Один из способов преодоления этих трудностей основан на построении новых объектов, образующих алгебры, содержащие пространства распределений. Обзор таких построений смотрите в [2].

В работе рассмотрено модельное уравнение вида

$$(-\Delta + 1 + a\delta)u = f \qquad (1),$$

содержащее среди коэффициентов δ-функцию Дирака.

Введена алгебра новых обобщенных функций, построенная на основе пространств Соболева, которая более удобна при исследовании уравнений с частными производными, чем построенные ранее. В некоторых подпространствах строится решение модельного уравнения. Выясняются особенности у решения, возникающие из-за δ-функции в коэффициенте.

Литература

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций. // ДАНСССР, 1991, т.318, с.276-280.

2. Егоров Ю.В. К теории обобщенных функций. // УМН, 1990, т.45, вып.5(275), с.3-40.

3. Радыно Я.В., Нгуен Хой Нгия. Задача Коши в пространстве обобщенных функций Ж.Коломбо. // ДАНБССР, 1990, т.34,N6,с.489-49

УДК 62-50 Асмыкович И.К. (Минск)

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ *

При описании реальных систем управления математическая модель обычно получается в виде системы дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной. Если матрица, стоящая при производной является вырожденной, то такая система называется дескрипторной. В докладе рассматриваются дискретные дескрипторные системы вида

$$(1)\qquad Sx(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad \det S = 0,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad t = t_0, t_0+1, \ldots .$$

где $x(t)$ - n - вектор, $u(t)$ - r - вектор, A, B, S - матрицы соответствующих размеров, x_0 принадлежит множеству допустимых начальных условий.

Присоединим к системе (1) регулятор

$$(2)\qquad u(t) = Kx(t+1) + Qx(t).$$

Для замкнутой системы (1), (2) в докладе исследуется разрешимость задачи модального управления и задачи апериодического управления, т.е. выясняется возможность путем выбора матриц K и Q обеспечения произвольного возможного спектра замкнутой системы и зануления состояния $x(t)$ после момента N .

Обобщением системы (1) является дискретная дескрипторная система с запаздыванием

$$(3)\qquad Sx(t+1) = Ax(t) + A_1 x(t-k) + Bu(t),$$

где k - некоторое натуральное число.
К этой системе присоединим регулятор

$$(4)\qquad u(t) = Kx(t+1) + \sum_{j=0}^{\rho} Q_j x(t-jh).$$

В докладе изучено влияние параметров линейной обратной связи (4) на спектр замкнутой системы (3), (4) в случае системы с чистым запаздыванием ($A_1=0$), а также в общем случае. Для системы (3) рассмотрена также задача об апериодическом управлении изучен вопрос о минимальном времени регулирования.

---

*Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь

УДК 517.982 Асташкин С.В. (Самара)

О мультипликаторах относительно тензорного произведения

На парах измеримых на $I=[0,1]$ функций x и y определим тензорное произведение:

$$x\otimes y(s,t)=x(s)y(t) \quad (s,t\in I).$$

Оно играет важную роль в различных вопросах теории операторов и геометрии банаховых пространств. Мультипликатором симметричного пространства (с.п.) E на I назовём множество $M(E)$ всех измеримых функций $x=x(t)$, для которых

$$\|x\|_{M(E)}=\sup\{\|x\otimes y\|_{E(I\times I)},\ \|y\|_{E(I)}\le 1\}<\infty$$

(все определения см. в [1]).

Теорема 1 (оценка сверху). Для любого с.п. E $M(E)\subset L_{1/\alpha_E}$, где α_E - нижний индекс Бойда пространства E.

Приведём одно следствие для важной в теории интерполяции операторов шкалы пространств $L_{p,q}$: $M(L_{p,q})=L_p$ $(p\le q\le\infty)$. В случае $q=\infty$ результат был доказан в [2]. Там же показано, что при $1\le q\le p$ $M(L_{p,q})=L_{p,q}$.

Теорема 2 (оценка снизу). Для любого с.п. E $M(E)\supset\Lambda_\psi$, где Λ_ψ - пространство Лоренца, построенное по функции

$$\psi(t)=\|\sigma_t\|_{E\to E},\quad \sigma_t x(s)=\begin{cases}x(s/t), & s/t\le 1\\ 0, & s/t>1\end{cases}\quad (s\in I).$$

[1] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
[2] Асташкин С.В. О билинейном мультипликативном операторе.- В сб. "Исслед. по теории функций мн. вещ. перем."- Ярославль. 1982. С.3 - 15.

УДК 517.925.54 Асташова И.В.

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА - ФАУЛЕРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''' = by' + p(x,y,y',y'')\cdot|y|^k \operatorname{sign} y, \qquad (\mathrm{I})$$

где $b>0$, $k>1$, $p(x,y_0,y_1,y_2)$ - положительная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по переменным y_0,y_1,y_2 и условиям

$$0 < m \le p(x,y_0,y_1,y_2) \le M < +\infty.$$

Исследуется асимптотическое поведение положительных решений $y(x)$ этого уравнения, определенных на интервале (x_0,x^*), $x^* \le +\infty$ и не продолжаемых за x^*.

Теорема I. Для любого положительного решения $y(x)$ уравнения (I) либо $x^* < +\infty$ и $y^{(i)}(x) \to +\infty$ при $x \to x^*-0$, $i=0,1,2$, либо $x^*=+\infty$ и $y^{(i)}(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, причем $(-1)^i y^{(i)}(x)>0$, $i=0,1,2$.

Теорема 2. Пусть $x^*<+\infty$ и существует $\lim\limits_{\substack{x\to x^*-0\\ y_i\to+\infty,\ i=0,1,2}} p(x,y_0,y_1,y_2)=p_0>0.$

Тогда

$$y(x) = C(x^*-x)^{-\alpha}(1+o(1)),\quad \alpha=\frac{3}{k-1},\quad C=\left(\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}},\quad x\to x^*-0.$$

Теорема 3. Для любого $a>0$ существует единственное решение уравнения (I) вида

$$y(x) = a\,e^{-x\sqrt{b}}(1+o(1)),\quad x\to+\infty, \qquad (2)$$

и любое положительное решение уравнения (I), допускающее оценку $y(x)=O(e^{-\varepsilon x})$ при $x\to+\infty$ для некоторого $\varepsilon>0$, имеет вид (2) при некотором $a>0$.

Литература.

I. И.Т.Кигурадзе, Т.А.Чантурия. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

УДК 517.9

Астровский А.И. (Минск)

АППРОКСИМАТИВНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим линейное эволюционное уравнение

$$x(t+1) = Ax(t),\ t\in T=\{0,1,\dots,N\},\ x_0=x(0)\in\mathcal{D}(A). \qquad (1)$$

Здесь линейный оператор A определен на линейном многообразии $\mathcal{D}(A)$ банахова пространства $\mathfrak{X}$, $A\mathcal{D}(A)=\mathcal{R}(A)\subseteq\mathcal{D}(A)$. Предположим, что в системе (1) реализовалось некоторое нам неизвестное начальное состояние $x_0\in\mathcal{D}(A)$, которое породило функцию $y(t)$, $t\in T_u=\{t_1,t_2,\dots,t_\alpha\}\subseteq T$, $y(t)\in\mathcal{Y}$ ($\mathcal{Y}$ – банахово пространство), связанную с состоянием $x(t)$, $t\in T$, системы (1) соотношением

$$y(t,x_0) = Cx(t,x_0),\ t\in T_u, \qquad (2)$$

где C – линейный оператор $C:\ \mathfrak{X}\to\mathcal{Y}$.

Обозначим $y_B(x_0) = (y(t,x_0),\ t\in T_u)$, $y_B(x_0)\in\mathcal{Y}^\alpha=\mathcal{Y}\times\dots\times\mathcal{Y}$.

Система (1),(2) наблюдаема (слабо наблюдаема), если из условия $y_B(x_0^1)\neq y_B(x_0^2)$, $x_0^1,x_0^2\in\mathcal{D}(A)$, следует, что $x_0^1\neq x_0^2$.

Система (1),(2) корректно наблюдаема, если существует такое число $\alpha>0$, что $\|x_0\|_{\mathfrak{X}}\leq\alpha\|y_B(x_0)\|_{\mathcal{Y}^\alpha}$ для любого $x_0\in\mathcal{D}(A)$ и α не зависит от x_0.

Пусть $\mathcal{F}\subset\mathfrak{X}^*$ и $\mathcal{R}\subset\mathcal{Y}^{\alpha*}$. Функционал $f\in\mathcal{F}$ $\mathcal{R}$ наблюдаем по системе (1),(2),если существует такой функционал $r\in\mathcal{R}$, что $f(x_0)=r(y_B(x_0))$ для любых начальных состояний $x_0\in\mathcal{D}(A)$.

Система (1),(2) $\mathcal{FR}$-функционально наблюдаема, если любой функционал $f\in\mathcal{F}$ $\mathcal{R}$-наблюдаем по системе (1), (2).

Функционал $f\in\mathfrak{X}^*$ аппроксимативно-наблюдаем, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой функционал $f_\varepsilon\in\mathfrak{X}^*$, что $\|f-f_\varepsilon\|_{\mathfrak{X}^*}\leq\varepsilon$ и функционал f_ε наблюдаем по системе (1), (2).

Система (1), (2) аппроксимативно-функционально наблюдаема, если любой функционал $f\in\mathfrak{X}^*$ аппроксимативно-функционально наблюдаем по системе (1), (2).

В докладе исследуются взаимосвязи наблюдаемости, корректной наблюдаемости, функциональной наблюдаемости и аппроксимативно-функциональной наблюдаемости. Приводятся примеры линейных систем наблюдения в конкретных банаховых пространствах, которые иллюстрируют существенность полученных условий.

УДК 514.7, 514.82

С.Н. Астраков (г. Кемерово)

ГРУППА ДВИЖЕНИЙ И ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА ОДНОРОДНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ M_4 IV С ИЗОТРОПНЫМ КОММУТАНТОМ.

Рассматривается односвязная группа Ли M, алгебра Ли которой задается коммутационными соотношениями

$$[e_4, e_1] = e_1, \quad [e_4, e_2] = e_1 + e_2.$$

В работе [1] была приведена классификация всех левоинвариантных лоренцевых метрик на M в терминах идеалов V_3 (с базисом e_1, e_2, e_3), V_2 (с базисом e_1, e_2), V_1 (с базисом e_1) по отношению к световому конусу

$$C = \{ a \in L : a^2 \equiv \langle a, a \rangle = 0 \}$$

в алгебре Ли $L = L(M)$, отождествляемой с касательным к M пространством в 1.

Из всех случаев указанной классификации мы рассматриваем те четыре, для которых коммутант $\{e_1, e_2\}$ изотропен.

В работе получены следующие результаты.

1. Представлена реализация группы Ли M в R^4 с соответствующей групповой операцией, приведены матрица дифференциала левого сдвига в 1 и матрица внутреннего автоморфизма.
2. Составлены уравнения проходящих через 1 геодезических и проведены исследования геодезической полноты.
3. Подсчитаны тензоры Риччи и Эйнштейна, а также значение скалярной кривизны.
4. Приведены четыре основных вектора Киллинга и найдены все дополнительные векторы для каждого из четырех случаев, т.е. дано полное описание групп движений.

1. Астраков С.Н., Левичев А.В. Канонический вид левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырехмерной группе Ли// Сиб. мат. ж., 1987, т. 28, № 5, с. 216.

УДК 51:621.031

Атяшев А.С., Берёенюк И.Н., Муйземнек А.Ю., Крук Л.А.

ОБ ИЗМЕНЕННОМ ПОДХОДЕ К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПОВРЕЖДЕНИЯ

Современные методы расчета прочности осесимметричных тел основываются на решении осесимметричной задачи о нагружении внутренним давлением и осевой силой и поэтому не могут быть применены для расчета прочности участков, имеющих повреждения. Целью настоящих исследований является разработка методики расчета напряженно-деформированного состояния поврежденных и восстановленных участков осесимметричного тела, которая позволила бы оценить влияние повреждения и технологии восстановления на характеристики конструктивной прочности, а также возможность восстановления данным способом.

Критерием достижения предельного состояния по пределу упругого сопротивления является выражение

$$F(P) = \mathcal{E}_i^P - 0{,}002 = \mathcal{E}_i - \frac{\sigma_i}{3G} - 0{,}002 = 0,$$

где $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i^P$, G – интенсивность деформаций в наиболее нагруженной точке, интенсивность пластических деформаций, модуль сдвига, соответственно.

В общем случае, новой характеристикой конструктивной прочности поврежденных и восстановленных тел может выступить давление приспосабливаемости $P_П$, которое представляет собой максимальное давление, при котором при повторных нагружениях, после некоторого числа циклов нагружения, напряжения и деформации на поврежденном участке начинают повторяться. Эта характеристика может определяться по теории Койтера-Мелана. Для этого необходимо совместное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{E}_i^P = \psi_1(P, \tau_2, \tau_3) \\ P = \alpha(\mathcal{E}_i^P)\,\sigma_{пц}\,\psi_2(\tau_2, \tau_3) \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (I) может быть сведена к одному выражению вида

$$F_3(P) = \alpha(\psi_1(P, \tau_2, \tau_3))\,\sigma_{пц}\,\psi_2(\tau_2, \tau_3) = 0 \quad (2)$$

где ψ_1, ψ_2 – некоторые функции, связывающие интенсивность пластических деформаций и предел пропорциональности материала с внутренним давлением P, комплексом геометрических размеров τ_2 и комплексом характеристик механических свойств τ_3; α – число Мазинга.

Решение уравнения (2) относительно внутреннего давления P позволяет определить давление приспосабливаемости $P_П$.

УДК 517.911 Ахметов М.У. (Киев)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ БЛИЗКИХ К ПРОИЗВОЛЬНЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ

Пусть $\Omega_x \times \Omega_\mu$ - область из $R^n \times R^1$, имеющая компактное замыкание, Ω_μ - окрестность нуля. На множестве

$$\Omega = \{(x, \mu, t, i) | (x, \mu) \in \Omega_x \times \Omega_\mu, t \in R, i \in Z\}$$

рассматривается система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющая вид

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu g(t,x,\mu), \quad t \neq T_i(x) + \mu \tau_i(x,\mu), \\ &\Delta x \big|_{t = T_i(x) + \mu \tau_i(x,\mu)} = I_i(x) + \mu W_i(x,\mu) \end{aligned} \qquad (1)$$

в которой функции f, g, I, W, T, τ имеют непрерывные частные производные второго порядка по x_j, $j = \overline{1,n}$, μ и непрерывные по t. Предполагается, что порождающая для уравнения (1) система ω - периодическая и допускает единственное периода ω решение $\varphi(t)$.

Теорема 1. Пусть система (1) ω - периодическая. Мультипликаторы системы уравнений в вариациях относительно $\varphi(t)$ не равны единице. Тогда при достаточно малом $|\mu|$ уравнение (1) допускает решение периода ω, которое при $\mu \to 0$ стремится к решению $\varphi(t)$. Если к тому же все мультипликаторы расположены внутри единичного круга, то периодическое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Пусть функция g почти периодическая (п.п.) в смысле Бора, а последовательность W_i п.п. по i равномерно в Ω, последовательности τ_i^j, где $\tau_i^j = \tau_{i+j} - \tau_i$, $j \in Z$ равностепенно п.п. по i равномерно в Ω.

Теорема 2. Пусть мультипликаторы системы уравнений в вариациях относительно $\varphi(t)$ не лежат на единичной окружности. Тогда при достаточно малом $|\mu|$ система (1) допускает единственное разрывное п.п. решение, которое при $\mu \to 0$ стремится к ω - периодическому решению $\varphi(t)$ порождающей системы.

Доказанные теоремы являются обобщениями известных результатов И.Г. Малкина для обыкновенных дифференциальных уравнений.

УДК 514.763.8 Банару Г.А. /Смоленск/

ПРОСТРАНСТВО ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ С КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК ОБРАЗУЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.

В геометрии дифференциальных уравнений хорошо известен тот факт, что со всяким заданным на плоскости обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка инвариантно относительно точечных замен координат связано $(n+4)$ -мерное /в общем случае/ расслоенное пространство со связностью. В частности, каждому уравнению 5-го порядка

$$y^{(5)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(4)})$$

соответствует 9-мерное /в общем случае/ расслоенное пространство со связностью.

Автор решила задачу нахождения класса обыкновенных дифференциальных уравнений 5-го порядка, для которых связность указанного расслоения была бы проективной. Установлено следующее:

1. Искомый класс образуют уравнения вида:

$$y^{(5)} = \left(\frac{5y^{(3)}}{y''+A} + B\right)\cdot y^{(4)} + C$$

где $A = A(x,y,y')$; $B = B(x,y,y',y'')$; $C = C(x,y,y',y'',y^{(3)})$.

2. Уравнения структуры соответствующего расслоения имеют вид:

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \Theta^i_j \quad ; \quad i,j, = 0,1,2$$

Здесь Θ^i_j - формы кручения-кривизны.

3. Главными формами интегральной кривой приведенных структурных уравнений являются

$$\theta^1_0 \; ; \; \theta^1_2 + \theta^2_0 \; ; \; 2\theta^2_2 - \theta^0_0 - \theta^1_1 \; ; \; \theta^2_1 + \theta^0_2 \; ; \; \theta^0_1$$

4. Перечисленные формы служат одновременно главными формами многообразия кривых второго порядка. По этой причине в качестве образующих элементов построенного пространства проективной связности естественно рассматривать кривые второго порядка.

5. Плоскому случаю / $\Theta^i_j = 0$; $i,j = 0,1,2$ / соответствует дифференциальное уравнение

$$y^{(5)} = \frac{5y^{(3)}y^{(4)}}{y''} - \frac{40(y^{(3)})^3}{9(y'')^2} ,$$

для которого кривые второго порядка общего вида являются интегральными кривыми.

УДК 514.763.8

Банару М.Б. /Смоленск/

О МИНИМАЛЬНОСТИ 6-МЕРНЫХ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ.

В своей известной работе А.Грей и Л.М.Хервелла выявили 16 классов почти эрмитовых структур на многообразиях размерности $n \geqslant 6$.

Исследуя почти эрмитовы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли, автор получил характеризацию вышеназванных классов в терминах конфигурационного тензора /или тензора эйлеровой кривизны/. Установлено, что лишь 8 собственных представителей классов Грея-Хервеллы могут иметь место на рассматриваемых многообразиях, а именно:

$$K,\ NK,\ AK,\ QK,\ SK \wedge H,\ G1 \wedge SK,\ G2 \wedge SK,\ SK.$$

Опираясь на полученные условия для классов Грея-Хервеллы в терминах конфигурационного тензора, автор показал, что справедлива

Теорема. Произвольное почти эрмитово 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли является минимальным тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу $G2 \wedge SK$.

В качестве немедленного следствия этой теоремы получены такие предложения:

Предложение 1. Эрмитовы 6-мерные подмногообразия алгебры Кэли являются минимальными.

Предложение 2. Почти келеровы 6-мерные подмногообразия алгебры Кэли являются минимальными.

Предложение 3. Келеровы 6-мерные подмногообразия алгебры Кэли являются минимальными.

Отметим, что последнее утверждение доказано ранее В.Ф.Кириченко, изучавшим келеровы 6-мерные подмногообразия алгебры октав. Таким образом, приведенная теорема является обобщением указанного результата В.Ф.Кириченко.

УДК 517.988.8 Барашков А. С. (Москва)

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Обратим внимание на тот нередкий случай, когда теоремы единственности доказаны для одномерных задач, а для аналогичных многомерных не установлены.

Предлагается итерационно-асимптотический метод решения задач, который позволяет в определенной степени "дотянуть" одномерные результаты до многомерных.

Рассмотрим операторное уравнение

$$K_\varepsilon(u(\xi,y)) = \varphi(\eta,\lambda,\varepsilon) \tag{1}$$

где $\xi\in R^n$, $\eta\in R^n$, $y\in[0;1]$, $\lambda\in\Lambda\subset C$, $0\le\varepsilon<\tilde{\varepsilon}<\infty$

Предположим, что оператор K_ε в некотором смысле близок к одномерному оператору $K^{(0)}$:

$$K^{(0)}(\sigma(y)) = \psi(\lambda) \tag{2}$$

Пусть для одномерной задачи (2) справедлива теорема единственности: $K^{(0)}(\sigma_1) = K^{(0)}(\sigma_2) \Rightarrow \sigma_1=\sigma_2$

Одномерную задачу для (2) будем решать методом квазирешений. Соответствующий оператор квазиобращения обозначим через Φ: $\Phi(K^{(0)}(\sigma(y))) \Rightarrow \sigma_1=\sigma_2$

Построим последовательность $\{u_n\}$: $u_0=\Phi(\varphi(\xi,\lambda,\varepsilon))$, $u_{n+1}=\Phi(\varphi-K_\varepsilon(u_n)+K^{(0)}(u_n))$, $n=0,1,\ldots$

Доказано, что при некоторых предположениях о $K_\varepsilon, K^{(0)}$ последовательность $\{u_n\}$ сходится к решению обратной задачи для уравнения (1): $u_n-u=O(\varepsilon^{n+1})$

Полученная оценка точности приближенного решения не опирается на теорему единственности решения обратной задачи для уравнения (1) и в каком-то смысле заменяет эту теорему.

УДК 517.958 Барашков А.С., Кленина Л.И. (Москва(

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрим квазистационарную систему уравнений Максвелла в R^3: $\operatorname{rot} E = i\omega\mu H, \ \operatorname{rot} H = \sigma E$

где
$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & z < 0 \\ \sigma_1(x,y,z) & 0 < z < b(x) \\ \sigma_2(x,y,z) & b < z < a(x) \\ \infty & z > a(x) \end{cases}$$

причем $\sup \sigma_2 \ll \inf \sigma_1$ (среда с плохопроводящим слоем), а поля возбуждаются плоской волной, нормально падающей на полупространство $z > 0$.

Экспериментально обнаружено - при интерпретации данных электромагнитных зондирований Земли - что даже при очень плавном изменении коэффициента σ вдоль переменных x, y одномерные решения не аппроксимируют решения сформулированной задачи. Численное же решение трехмерной задачи трудно осуществимо.

Предлагается характеризовать плавность изменения коэффициента σ и малость функции σ_2 одним параметром ε:
$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & z < 0 \\ \varkappa_1(\varepsilon x, \varepsilon y, z) & 0 < z < l(\varepsilon x) \\ \varepsilon^2 \varkappa_2(\varepsilon x, \varepsilon y, z) & l < z < L(\varepsilon x) \\ \infty & z > L \end{cases}$$

Для такой задачи получены и обоснованы асимптотические разложения решения по параметру ε.

При этом определение каждого члена ряда сводится к решению одного двумерного уравнения и одномерных уравнений, зависящих от переменных x, y, как от параметров.

УДК 519.816.2. Бардин А.Е. (Орехово-Зуево)

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛОГ ПРИНЦИПА МИНИМАКСНОГО СОЖАЛЕНИЯ

Предлагается новый подход к задаче, рассмотренной в [1].

1. Для статической многокритериальной задачи при неопределенности вводится векторная функция риска и с ее помощью определяются два решения: T-гарантирующее и T-минимаксное. Устанавливается существование, компактность, внешняя и внутренняя устойчивость T-минимаксных решений ряд других свойств [2].

2. Для динамической позиционной многокритериальной задачи при неопределенности определяется решение: T-гарантирующая стратегия; приводится геометрическая интерпретация и "игровой" смысл T-гарантирующей стратегии; выявляются свойства наследования и динамической устойчивости. Для "одноточечных" стратегий в случае разделенной (по стратегии и неопределенности) динамики установлено существование T-гарантирующей стратегии и выявлена структура такого решения.

В заключении рассматривается пример из экономической динамики, на котором выявляются преимущества предлагаемого подхода по сравнению с принципом векторного максимина из [1].

Литература.

1. Zhukovskii V. I., Salukvadze M. E. Vector-Valued Maxmin. N.Y.: Academic Press, 1993.
2. Бардин А.Е., Салуквадзе М.Е. Векторный риск в многокритериальных задачах. Препринт. Тбилиси: ИСУ АН Грузии, 1992.

УДК 517.9 Баркова Е.А. (Минск)

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В семействе банаховых пространств $X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, непрерывно вложенных в заданное локально-выпуклое пространство X, рассматривается задача Коши вида

$$x'' = A(t)x\ ,\quad x(\tau) = \xi\ ,\quad x'(\tau) = \eta. \tag{1}$$

Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях решение задачи Коши (1) можно представить в виде суммы

$$x(t) = c(t,\tau)\,\xi + s(t,\tau)\,\eta, \tag{2}$$

где $s(t,\tau) = (t-\tau)\,I +$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta n(\tau,t)} (t-t_1)\ldots(t_{n-1}-t_n)\,(t_n-\tau)\,A(t_1)\ldots A(t_n)\,dt_n\ldots dt_1;$$

$$c(t,\tau) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta n(\tau,t)} (t-t_1)\ldots(t_{n-1}-t_n)\,A(t_1)\ldots A(t_n)\,dt_n\ldots dt_1;$$

здесь интеграл берется по множеству $\Delta_n(\tau,t)$ всех точек $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\tau \le \xi_1 \le \ldots \le \xi_n \le t$, для $\tau \le t$, $\tau \ge \xi_1 \ge \ldots \ge \xi_n \ge t$, для $\tau \ge t$. Пусть W - множество пар (ω',ω''), для которых $A(t)$ является непрерывной оператор-функцией, определенной на $[0,T]$ и принимающей значения в пространстве $\mathcal{L}(X(\omega'),X(\omega''))$, и для которых справедливо вложение $X(\omega') \subset X(\omega'')$. Пусть для любого $n \in N$ множество W_n цепочек $\omega = (\omega_0,\ldots,\omega_n)$ с $\omega_0 = \omega'$, $\omega_n = \omega''$, $(\omega_{j-1},\omega_j) \in W$, $(j = 1,\ldots,n)$ непусто,

$$a(\omega',\omega'') = \sup_{0\le t\le T} \|A(t)\|\ \mathcal{L}(X(\omega'),X(\omega''))$$

и, далее, $a_n(\omega',\omega'') = \inf \prod_{j=1}^{n} a(\omega_{j-1},\omega_j)$ $(n = 1,2,\ldots)$ и $\inf$ берется по всем цепочкам из W_n.

Теорема. *Пусть выполняется неравенство*

$$T\ e\ \lim_{n\to\infty} (a_n^{1/(2n-1)}(\omega',\omega''))/(2n-1) < 1,$$

тогда при любых $\xi,\ \eta \in X(\omega')$ *задача Коши* (1) *имеет решение* $x(t) \in C([0,T],X(\omega'))$, *и оно представимо в виде* (2). *И, кроме того, если для некоторого* T *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T^{2n-1}}{(2n-1)!}\, a_n(\omega',\omega'') = 0,$$

тогда при любых $\xi,\ \eta \in X(\omega')$ *это решение единственно.*

Барсуков А.И.

СТРУКТУРА ЖОРДАНОВЫХ ЦЕПОЧЕК ИНДЕФИНИТНО ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Настоящее исследование было проведено после знакомства с рукописью работы [I], где рассматривались самосопряженные операторы. Если результаты работы [I] могли быть предсказаны (см. [2], p. 33), то в нашем случае мы не имели такой отправной точки.

Пусть E^n – невырожденное индефинитное пространство с индефинитным скалярным произведением $[x,y]$.

Оператор $A:E^n\to E^n$ назовем $[.,.]$-диссипативным, если $Im[Ax,x]\geq 0$ для любого $x\in E^n$.

Для $[.,.]$-диссипативного оператора A, спектр которого состоит из $\lambda=0$, через $\mathcal{L}_l(A)$ обозначим линейную оболочку максимальных жордановых цепочек длины l, входящих в некоторый фиксированный A-жорданов базис пространства E^n. Пусть l принимает значения $K_1>K_2>\dots>K_s$ и пусть J -произвольное подмножество множества $\{1,2,\dots,s\}$. Через $\mathcal{L}_J(A)$ обозначим прямую сумму подпространств $\mathcal{L}_{K_j}(A)$ $(j\in J)$.

Если же $[.,.]$ - диссипативный оператор A имеет вещественные собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ $(m\leq n)$ и $\lambda_i\neq\lambda_j$, если $i\neq j$, то символом $\mathcal{L}_{\lambda_i,J}(A)$ обозначим $\mathcal{L}_J(A-\lambda_i I)$.

Основные результаты:

1. Подпространство $\mathcal{L}_0=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{L}_{\lambda_i,J}(A)$ $[.,.]$- невырождено.
2. По любому $[.,.]$-диссипативному оператору A можно построить в E^n такой A-жорданов базис, в котором линейная оболочка каждой максимальной жордановой цепочки $[.,.]$- невырожденное подпространство.

[1] T. Ja. Azizov, P. Binding, J. Bognar, B. Najman : Nondegenerate subspaces of Jordan chains of self-adjoint operators in indefinite spaces. (в печати)

[2] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman : Matrices and Indefinite Scalar Products. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.

УДК 517. 927

Баталова З.С., Ежевская Н.А.(Нижний Новгород)

О СТРУКТУРЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ОСЦИЛЛЯТОРА МАЯТНИКОВОГО ТИПА С СИЛОВЫМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

В докладе представлены результаты исследования структуры фазового пространства уравнения движения спутника с магнитным демпфером относительно центра масс в плоскости эллиптической орбиты

$$(1+e\cos t)\ddot{x}-2e\sin t\,\dot{x}+n^2\sin x+\frac{\lambda}{1+e\cos t}\left[\dot{x}-\frac{4}{1+3\sin^2 t}\right]=4e\sin t$$

Построение параметрического и фазового портретов проводилось качественно-численными методами, основанными на методе точечных отображений.

В ограниченной части пространства параметров построены области существования ряда периодических решений колебательного типа периода внешнего воздействия и кратного ему. Изучены явления, сопровождающие потерю их устойчивости. Выделены две области X_1 и X_2 неустойчивости периодического решения основного периода. Установлено, что в первой области существуют хаотические движения, в области X_2 имеет место синхронизация движений спутника. Определены границы области существования хаотических движений. Оказалось, что переход к хаосу возможен тремя различными способами: а) в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода, б) путем слияния устойчивого периодического решения основного периода с седловым периодическим решением удвоенного периода, в)в результате слияния и последующего исчезновения устойчивого и седлового периодических решений основного периода. В результате численного эксперимента получен хаотический аттрактор с ограниченной областью притяжения. Разрушение аттрактора, сопровождающееся потерей его устойчивости, происходит при негрубом возникновении гетеро- и гомоклинических траекторий.

УДК 539.4

Батаронов И.Л., Рощупкин А.М. (Воронеж)

ЭНЕРГИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО РЕЛЬЕФА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В результате деформации поверхности проводника в электрическом поле на ней образуются микронеровности, вызывающие локальное искажение силовых и эквипотенциальных линий и соответствующее увеличение энергии поля ΔU, дающее вклад в работу образования поверхностного рельефа. Поскольку изменение энергии в данном случае обусловлено изменением геометрии системы при условии поддержания на проводнике постоянного потенциала φ, то величину ΔU можно рассматривать как результат изменения ΔC емкости системы: $\Delta U = \frac{\varepsilon}{2}\Delta C\varphi^2$, где величина ΔC рассчитывается без учета диэлектрической постоянной ε среды. Рассмотрим плоский конденсатор, трансляционно инвариантный в некотором направлении, с расстоянием между обкладками равным d. В таком случае электростатическое поле внутри конденсатора будет плоским и может быть описано с помощью конформного отображения $z = z(w)$ единичной полосы $0 < \mathrm{Im}(w) < 1$ на криволинейную полосу в плоскости z конденсатора:

$$z = \frac{\pi}{d}\int_1^{e^{\pi w}} f(s)\,\frac{ds}{s}\,, \qquad (1)$$

причем для недеформированного конденсатора $f(s) = 1$. Энергия ΔU выражается через разность площадей образов полосы с микрорельефом и без него в полосе на плоскости w. Тогда, рассматривая асимптотическое разложение интеграла (1), получим общую формулу:

$$\Delta C = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\left[f(-s) - 1\right]\frac{ds}{s}\,. \qquad (2)$$

Пусть рельеф образован смещением части поверхности длиной l на величину h с образованием двух ступенек с углами наклона к исходной поверхности $\alpha\pi$ и $\beta\pi$. Тогда расчет по формуле (2) с учетом только главных асимптотических членов при $h/d \to 0$ дает:

$$\Delta C \cong \frac{hl}{4\pi d^2} + \frac{h^2}{2\pi^2 d^2}\ln\left[\sqrt{\alpha\beta}\,\frac{d}{h}\left[1 - e^{-\pi l/d}\right]\right].$$

Здесь первый член описывает изменение емкости при указанном смещении участка поверхности, а второй обусловлен индуцированием на ступеньках зарядов с линейной плотностью $\propto h/d$, характеризующихся логарифмическими потенциалами с нижним радиусом обрезания порядка высоты ступеньки и верхним радиусом обрезания порядка расстояния между обкладками (при $l \gg d$, когда локальные электростатические поля ступенек не перекрываются), или расстояния между ступеньками (при $l \ll d$).

Бахтин И.А. (Воронеж)

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА

Для одной многоточечной краевой задачи, зависящей от параметра, приводятся признаки существования связных ограниченно компактных ветвей положительных решений и заполнения ее позитивным спектром некоторого промежутка. Приведем один из них. Рассоотрим многоточечную краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$Lx = F(t, \mu^m x, \mu^{m-1} x', \dots, \mu x^{(m-1)}, x^{(m)}), \qquad (1)$$

$$x^{(l_j)}(t_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \qquad (2)$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ - вектор-функция, определенная на отрезке $[0,1]$, со значениями в R^n, L - линейный дифференциальный оператор

$$Lx = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) x^{(i)}(t)$$

с i раз непрерывно-дифференцируемыми на отрезке $[0,1]$ матрицами $a_i(t)$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ и $\det a_m \neq 0$; $F(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ - непрерывная вектор-функция, определенная на $[0,1] \times R^{(m+1)n}$ со значениями в R^n. В краевых условиях (2) $l_i \leq m-1$ $(i = 1, \dots, m)$ и $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m = 1$, причем, если $t_i = t_{i+1}$, то $l_i < l_{i+1}$. Пусть $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$, $\|\cdot\|$ - норма в R^n, $E_1 = C^m([0,1], R^n)$ - пространство m раз непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ вектор-функций со значениями в R^n и с нормой $\|x\| = \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [0,1]} \|x^{(i)}(t)\|$, $K_1 \subset E_1$ - конус неотрицательных вектор-функций. Пусть задача $Lx = z \in E_1$ с граничными условиями (2) имеет в $C^m([0,1], R^n)$ единственное решение $x = Az$.

Теорема. Пусть неотрицательная вектор-функция $F(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ $(F(t, 0, \dots, 0) = 0)$ удовлетворяет условиям:

1) $F(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) \geq a|\xi_0| - b$, где a - фиксированное положительное число, а $b \in R^n_+$ - фиксированный элемент в конусе R^n_+ элементов с неотрицательными координатами;

2) $\|F(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)\| \leq A(\|\xi_0\|, \|\xi_1\|, \dots, \|\xi_{k_0}\|) + B(\|\xi_0\|, \|\xi_1\|, \dots, \|\xi_{k_0}\|) \sum_{i=k_0+1}^{m-1} \|\xi_i\|^{p_i} + k\|\xi_m\|$,

где $A(t_0, \dots, t_{k_0})$, $B(t_0, \dots, t_{k_0})$ - возрастающие по каждой переменной функции, заданные на $R_+^{k_0+1}$, а показатели p_i удовлетворяют неравенствам $p_i < \frac{m-k_0}{i-k_0}$ $(i = k_0+1, \dots, m-1)$ и число $k \in (0, \frac{1}{\|A\|})$;

3) существует число $l \in (0, \frac{1}{\|A\|})$, такое, что $\|F(\cdot, \xi_m') - F(\cdot, \xi_m'')\| \leq l\|\xi_m' - \xi_m''\|$.

Тогда положительные решения x $(x \in K = AK_1)$ образуют в пространстве E связную ветвь бесконечной длины.

Бачурина Л.А. (Воронеж)

О знакорегулярности одного класса спектральных задач

Ряд краевых задач со спектральным параметром в краевых условиях сводится к уравнению вида

$$\begin{cases} y(x) = \lambda \left[\int_0^\ell G(x,s)\, y(s)\, ds + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, y_i \right] \\ y_j = \lambda \left[\int_0^\ell \varphi_j(s)\, y(s)\, ds + \sum_{i=1}^{n} k_{ji}\, y_i \right], \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{I}$$

с непрерывными $G(x,s)$, $g_i(x)$, $\varphi_j(s)$.

Нас интересует свойство знакорегулярности оператора (I), играющего ключевую роль в исследовании осцилляционных свойств спектра краевых задач (простота, вещественность, положительность собственных значений, чебышевские свойства системы собственных функций и т.п.). Основную трудность при проверке свойства знакорегулярности (неповышения числа перемен знака оператора) представляет синтез функциональных и матричных методов, необходимый для работы с функционально-векторной переменной $(y(x), y_1, y_2, \dots, y_n)$.

В докладе установлена знакорегулярность для оператора, обращающего краевую задачу

$$\begin{cases} -y'' = f \\ y'(\ell) - k(y_1 - y(\ell)) = 0 \\ y(0) = 0 \\ -y'(\ell) = F \end{cases},$$

соответствующую спектральной задаче

$$\begin{cases} -y'' = \lambda \rho y \\ y'(\ell) - k(y_1 - y(\ell)) = 0 \\ y(0) = 0 \\ -y'(\ell) = \lambda m y_1 \end{cases}$$

УДК 517.988

Бегизардова В.Н. (Воронеж)

О ФОРМУЛЕ МЕРМИНА И ГОЛО В ЗАДАЧЕ О ВИХРЯХ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ^{3}He.

Работа посвящена исследованию геометрических состояний сверхтекучего гелия ^{3}He в А-фазе.

Данный вопрос изучался рядом исследователей, в частности, Н.Д. Мерминым [1] и В.Л. Голо [2].

Мерминым была анонсирована формула зависимости сверхтекучей компоненты $\overline{V}_s$ скорости движения жидкости от изменения векторов $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_2$ (физических параметров):

$$\left(\overline{V}_s\right)_i = \frac{\hbar}{2M}\,\overline{\Delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Delta}_2 \qquad (1)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, М – масса атома ^{3}He.

С другой стороны, В.Л. Голо было приведено (также без доказательства) иное выражение для $\overline{V}_s$:

$$(V_s)_i = \frac{\hbar}{2M}\left(\overline{\Delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Delta}_2 - \overline{\Delta}_2 \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Delta}_1\right) \qquad (2)$$

Таким образом, возникло расхождение без обоснования с обеих сторон. Наши вычисления подтвердили результат В.Л.Голо. С учетом этого факта нами выведена формула для $\operatorname{rot} V_s$:

$$(\operatorname{rot} v_s)^z = \frac{\hbar}{2M}\varepsilon_{zij}\,\overline{\ell}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\ell} \times \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\ell}\right) \qquad (3)$$

где $\overline{\ell} = \overline{\Delta}_1 \times \overline{\Delta}_2$, ε_{zij} – тензор Леви-Чивита.

Затем с помощью теоремы Гаусса-Бонне установлена зависимость между $\overline{V}_s$ и гауссовой кривизной К:

$$\overline{\ell}\operatorname{rot}\overline{V}_s = \frac{\hbar}{2M}K \qquad (4)$$

Нами получена формула, связывающая циркуляцию сверхтекучей компоненты скорости с эйлеровой характеристикой поверхности Е :

$$\oint_{\delta} \overline{V}_s\, d\overline{R} = \frac{\pi E}{M} - \frac{1}{2M}\int_{\partial D} k_g\, d\ell \qquad (5)$$

Представляется вероятным, что окончательный результат Мермина, установленный путем вычисления циркуляции и описывающий зависимость возникновения сингулярностей от топологии сосуда с жидкостью, также требует корректировки.

1. Н.Д.Мермин "Поверхностные сингулярности и сверхтекучий поток в ^{3}He-A", сб."Квантовые жидкости и кристаллы", М.,"Мир",1979 г.

2. В.Л.Голо "Геометрические идеи в теории сверхтекучего ^{3}He", сб. "Топологические и геометрические методы в математической физике", В., ВГУ, 1983 г. – с. 9–30

УДК 517.98 Бейдер С.А. (Одесса)

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДУЛЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ГИПЕРПЛОСКОСТИ И ОПЕРАТОРАМИ УМНОЖЕНИЯ НА КЛИФФОРДОВЫ ЧИСЛА И КЛИФФОРДОВЫХ АНАЛОГАХ ЗАДАЧИ РИМАНА.

В докладе расмотрены алгебраические модули, порожденные оператором сингулярного интегрирования по гиперплоскости и операторами умножения на клиффордовы числа.

Дано описание указанных модулей в виде алгебры всех непрерывных на $[-1;1]^k$ оператор-функций от операторов Рисса

$$R_\beta f = \frac{2}{S_k} \int_{\pi_\delta} \frac{(y_\beta - x_\beta)\, f(y)}{||y-x||^k}\, d\hat{y}_\delta\,,$$ где $S_k = kV_k$ – площадь k-мерной сферы в $\mathbb{R}^k$.

При этом был использован предложенных автором метод "выделения координат" с помощью умножения на клиффордовы числа, возможный в определенных классах клиффордовых алгебр.

А именно, при $p+q=n$ четном $\exists C_\alpha, D_\alpha \in C_{p,q} : \sum_{\alpha \in T_n} C_\alpha \times D_\alpha = x_0 e_0$,

где $x = \sum_{\alpha \in T_n} e_\alpha x_\alpha$.

Рассмотрены аналоги задачи Римана в алгебрах Клиффорда, получены некоторые условия нетеровости и разрешимости (в одном случае постоянных коэффициентов).

Литература:

1. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. Clifford analysis. Pitnam Publ.Inc.,Boston-London-Melbourne, 1982,302 p.
2. Н.Л. Василевский, М.В. Шапиро. Кватернионные ψ – моногенные функции, сингулярные операторы с кватернионным ядром Коши и аналоги задачи Римана. Одесский госуниверситет им. И.И. Мечникова. 1986 г.
3. М.П. Бурлаков, В.П. Показеев, Л.Е. Фрейдензон Клиффордов анализ II, Интегральные представления функций со значениями в алгебрах Клиффорда Грозный, 1988 (Издание ВИНИТИ, 52 с.)

УДК 517.977.56 Белов С.А., Еремеев А.В. (Нижний Новгород)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ФОРМЫ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

Задано семейство звездных $C^{2,\alpha}$ гладких областей T, таких что

$$D_1 \subset \Omega \subset D_2, \qquad \forall \Omega \in T$$

Необходимо минимизировать функционал

$$y_0(\Omega) = \int_\Omega g_0(x, u(x))dx, \qquad \Omega \in T$$

при ограничениях

$$y_k(\Omega) = \int_\Omega g_k(x, u(x)) \le 0, \qquad K = 1,\ l,$$

$$y_k(\Omega) = \int_\Omega g_k(x, u(x)) = 0, \qquad K = l+1,\ K,$$

где u - решение краевой задачи

$$a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u = f(x, u(x)), \qquad x \in \Omega$$

$$u = \psi, \qquad x \in D\Omega$$

Предполагаются выполнеными условия, обеспечивающие однозначную разрешимость краевой задачи в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Выводятся необходимые условия оптимальности первого и второго порядка, рассматриваются вопросы о расширении класса допустимых областей.

В плоском случае с использованием необходимых условий оптимальности предлагается алгоритм численного поиска оптимальной области, исследуются вопросы, связанные с его сходимостью.

УДК 517.925

Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. (Гродно)

О КЛАССИФИКАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$Au_{xxx}+Bu_{xxt}+Cu_{xtt}+Du_{ttt}=F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}), \qquad (I)$$

где F – полином по $u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}$, коэффициенты которого вместе с A, B, C, D являются аналитическими по x, t функциями в некоторой области.

Ставится задача: выделить уравнения (I) типа Пенлеве, т.е. уравнения, общее решение которых представляется рядом

$$u=\varphi^{-s}\sum_{k=0}^{\infty}u_k\varphi^k, \qquad (2)$$

где $u_k=u_k(t)$, $\varphi=\varphi(x,t)$, $\varphi_x=1$, s – целое положительное число, причем два, так называемые резонансные коэффициенты вместе с функцией φ являются произвольными.

Предварительно выделив канонические формы уравнения (I), задачу нахождения этих уравнений типа Пенлеве решаем по схеме:

I^{0}. Рассматриваем упрощенные для канонических уравнения, инвариантные при замене переменных $u=\varepsilon^{-s}v$, $x=x_0+\varepsilon\xi$, $t=t_0+\varepsilon\zeta$, где ε –параметр, (x_0,t_0) – точка голоморфности коэффициентов функции F. Подставляя в эти уравнения ряды $u=u_0\varphi^{-s}\sum_{k=z}^{\infty}u_k\varphi^k$, находим, что u_0 удовлетворяет уравнению $S(u_0,\varphi_t)=0$, а числа z – резонансному уравнению, корни которого для всех u_0 должны быть целыми и различными.

2^{0}. Находим условия на коэффициенты правых частей упрощенных уравнений, при которых функция φ_t и резонансные коэффициенты u_z будут произвольными функциями переменной t.

3^{0}. К правым частям полученных упрощенных уравнений дописываем дополнительные слагаемые.

Подставляя ряды (2) в полученные уравнения, и требуя, чтобы функции φ_t и резонансные члены u_z оставались произвольными, находим ограничения на коэффициенты дописанных дополнительных членов.

4^{0}. С учетом полученных в п.3^{0} ограничений, находим II классов уравнений типа Пенлеве и исследуем другие свойства их решений. Среди этих классов находятся уравнения Кортевега-де Фриза, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза и другие.

УДК 517.949 Бигун Я.И. (Черновцы)

УСРЕДНЕНИЕ В НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Математическими моделями в некоторых прикладных задачах, в частности задачах оптимального управления с малыми по величине управляющими воздействиями, являются краевые задачи для дифференциально-функциональных уравнений на асимптотически большом интервале времени. Для их исследования и построения приближенного решения применяется метод усреднения.

Пусть $x \in D$, D -ограниченная область R^n, $\varphi \in R^m$, $\mu > 0$ -малый параметр, $T = \mu^{-1}$, величины $\sigma(t) \leq t$ и $\Delta = const > 0$ характеризуют запаздывание, $x_\sigma(t) = x(\sigma(t))$, $\varphi_\Delta(t) = \varphi(t - \Delta)$. Рассматривается краевая задача вида

$$\dot{x} = \mu X(x, x_\sigma, \varphi, \varphi_\Delta)$$
$$\dot{\varphi} = \omega(x) + \mu \Phi(x, x_\sigma, \varphi, \varphi_\Delta); \ t \in [0, T];$$
$$Ax(s, \mu) + Bx(T, \mu) = a(s, \mu), \ s \leq 0,$$
$$\varphi(s, \mu) = b(s, \mu), \ s \in [-\Delta, 0],$$

где A, B -матрицы $n \times n$, $a(s,\mu)$ и $b(s,\mu)$ -заданные функции.

Усреднение в системе производится вдоль решения невозмущенной системы ($\mu = 0$). В случае многочастотной системы усредненная задача получается усреднением по быстрым переменным и имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \mu X_0(\bar{x})$$
$$\dot{\bar{\varphi}} = \omega(\bar{x}) + \mu \Phi_0(\bar{x}),$$
$$A\bar{x}(0, \mu) + B\bar{x}(T, \mu) = a_0, \ \bar{\varphi}(0, \mu) = b_0.$$

Рассмотрены случаи $m = 1$ и $m \geq 2$. Доказана теорема о существовании решения исходной системы в предположении существования решения усредненной задачи. Показано, что при $0 \leq t \leq T$

$|x(t,\mu) - \bar{x}(t,\mu)| \to 0$ и $|\varphi(t,\mu) - \bar{\varphi}(t,\mu)| \to 0$, если $\mu \to 0$.

УДК 517.2

Блатов И.А. (Воронеж)

О РАЗЛОЖЕНИЯХ В РЯДЫ ФУРЬЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами

$$Lu = -u^{(n)} + p_1(t)u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)u' + p_n(t)u \qquad (1)$$

и периодические краевые условия

$$u^{(k)}(0) = u^{(k)}(2\pi),\ k=0,1,\ldots,n-1 \qquad (2)$$

Пусть $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_k(x), \ldots$ – собственные функции оператора (1)-(2), занумерованные в порядке возрастания собственных чисел. Рассмотрим разложения Фурье

$$u_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k,m} e^{ikx},\ m=0,1,\ldots \qquad (3)$$

Теорема. Пусть функции $p_\ell(t)$ $(\ell=1,2,\ldots,n)$ разлагаются в ряды Фурье

$$p_\ell(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{k,\ell} e^{ikx},$$

причем для некоторых $C>0$ и натурального $q\geq 2$:

$$|d_{k,\ell}| \leq C(1+|k|)^{-q}.$$

Тогда найдется такое C_1, зависящее лишь от C, q и не зависящее от m, что для коэффициентов Фурье (3) справедливы оценки

$$|c_{k,m}| \leq C_1(1+|k-m|)^{-q}.$$

УДК 517.9+62.50 БЛЮМИН С.Л. ЛИПЕЦК

ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ТЕОРИЕЙ ДИСКРЕТНО-АРГУМЕНТНЫХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

Теория дискретно-аргументных систем объединяет с позиции единого подхода и сравнительного анализа различные классы дискретных распределенных систем, типичными представителями которых являются многоразмерностные, клеточные, конечно-аргументные системы, возникающие как при дискретизации непрерывных распределенных систем, описываемых краевыми задачами для дифференциальных уравнений с частными производными, так и непосредственно, в связи с задачами цифровой обработки информации и управления, проектирования вычислительных устройств, систем и сетей, другими задачами теоретической и технической кибернетики и прикладной математики. Основными методами теории дискретно-аргументных систем являются: метод базисной модели, позволяющий классифицировать разнообразные исследуемые в литературе модели дискретно-аргументных систем, в частности, многоразмерностных, - все они подходящими преобразованиями приводятся к базисной модели, что создает единую основу для разработки теории дискретно-аргументных систем, включения в нее теории различных частных классов систем, развивающихся до сих пор разрозненно, без учета взаимосвязей, в действительности имеющих место; метод ассоциированной модели, сводящий анализ дискретно-аргументных систем к анализу дискретно-временных систем с переменными, но конечными размерами векторов и матриц и позволяющий распространить в теорию дискретно-аргументных систем классические методы исследования структурных свойств, синтеза алгоритмов оптимального управления, наблюдения и идентификации; прямой метод синтеза алгоритмов управления движением систем по назначенным траекториям, анализа условий осуществимости назначаемых траекторий с использованием псевдообращения, приводящего к ортогональным каноническим формам дискретно-аргументных систем. Эффект от применения методов теории краевых задач в теории систем хорошо известен. Доклад посвящен результатам применения указанных методов теории дискретно-аргументных систем в теории краевых задач.

УДК 517.9

Бобочко В. Н., Крамар В. М. (Кировоград)

МЕТОД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение (с.в.д.у.) Лиувилля

$$L_\varepsilon U(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 U''(x,\varepsilon) + [p(x) + \varepsilon^\alpha q(x)]U(x,\varepsilon) = 0 \quad (1)$$

при $\varepsilon \to +0$.

Точка $\varepsilon = 0$ является особой точкой для с.в.д.у. (1). Известно, что она порождает в решении этого уравнения некоторые существенно особые многообразия. Одной из основных проблем при построении асимптотики решения с.в.д.у. является правильное выделение, описание и сохранение как единых целых существенно особых многообразий (с.о.м.), возникающих в решении возмущенного уравнения. Существенно особые многообразия, входящие в фундаментальную систему решений, будем называть фундаментальными многообразиями.

В настоящем докладе описан общий метод выделения и описания фундаментальных многообразий, содержащихся в решении уравнения (1). В зависимости от свойств функции p(x), т.е. при $p(x) > 0$, $p(x) < 0$, $p(x) = xp(x)$ и в зависимости от показателя степени $\alpha \geq 3$, получены, ранее известные, фундаментальные многообразия для уравнения (1).

Если же $\alpha < 3$ и $p(x) = xp(x)$, то точка $x = 0$ будет сильной точкой поворота для уравнения (1). Описанным методом построены фундаментальные многообразия и для этого случая, который до этого времени не был изучен в теории сингулярных возмущений.

Разработанная методика пригодная для построения фундаментальных многообразий для с.в.д.у. с дифференциальной точкой поворота, уравнения типа Орра-Зоммерфельда и других с.в.д.у.

УДК 517.972 Борисенко О.Ф., Минченко Л.И., Теслюк В.Н. (Минск)

О ЗАВИСИМОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Пусть X и Y нормированные пространства, G – многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ множество $G(x) \subset Y$. В точке (x, y), где $y \in G(x)$ определим нижнюю и верхнюю производные Дини многозначного отображения G по направлению $\bar{x} \in X$

$$\hat{D}_H G(x, y; \bar{x}) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}[G(x + \varepsilon\bar{x}) - y],$$

$$\hat{D}_B G(x, y; \bar{x}) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}[G(x + \varepsilon\bar{x}) - y].$$

Будем говорить, что отображение G в точке (x, y) дифференцируемо по направлению $\bar{x}$, если $\hat{D}_H G(x, y; \bar{x}) = \hat{D}_B(x, y; \bar{x})$. При этом общее значение верхней и нижней производных обозначим через $\hat{D} G(x, y; \bar{x})$.

Рассмотрим гладкую управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \Delta), u(t)), \qquad \text{(I)}$$

где $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 - t_0 > \Delta > 0$, $x \in R^n$, $u(t)$ – измеримые r-векторные функции со значениями в компактном множестве $U \subset R^r$. Обозначим через $\mathcal{R}(c(\cdot))$ множество всех решений системы (I) с начальным условием $x(t) = c(t) \in L^n_\infty[t_0 - \Delta, t_0]$ при $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$. Таким образом, $\mathcal{R}(\cdot)$ является многозначным отображением из $L^n_\infty[t_0 - \Delta, t_0]$ в $W^n_{1,1}[t_0, t_1]$.

Пусть $x(\cdot)$ решение системы (I), отвечающее некоторому допустимому управлению $u(t)$ и начальному условию $x(t) = c(t)$ при $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$.

<u>Теорема.</u> Многозначное отображение $\mathcal{R}(\cdot)$ дифференцируемо в точке $(c(\cdot), x(\cdot))$ по любому направлению $h(\cdot) \in L^n_\infty[t_0 - \Delta, t_0]$, причем его производная $\hat{D}\mathcal{R}(c(\cdot), x(\cdot); h(\cdot))$ совпадает с множеством решений $\delta x(\cdot)$ дифференциального включения

$$\delta\dot{x}(t) \in \nabla_x f(t)\delta x(t) + \nabla_y f(t)\delta x(t - \Delta) + K_t \quad t \in [t_0, t_1]$$

при начальном условии $\delta x(t) = h(t)$ $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$,

где $\nabla_x f(t) = \nabla_x f(t, x(t), x(t - \Delta), u(t))$, $\nabla_y f(t) = \nabla_y f(t, x(t), x(t-\Delta), u(t))$,

$K_t = \mathrm{con}(f(t, x(t), x(t - \Delta), U) - \dot{x}(t))$.

УДК 517.5 + 517.9 . Борисович А.Ю. (Воронеж)

ПРИВЕДЕНИЕ РЕСУРГЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ СИМВОЛОВ ТИПА ЭЙРИ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Доклад посвящён проблеме получения точных квазиклассических асимптотик по малому параметру h решений h^{-1} -дифференциальных уравнений, см.,например, [1 - 2]

$$H\left(q , -ih\frac{\partial}{\partial q} \right) (q,h) = 0 \qquad . \qquad (1)$$

В отличие от метода ВКБ и метода канонического оператора Маслова точные квазиклассические разложения имеют вид

$$u(q,h) \cong \sum_{j=1}^{N} e^{\frac{i}{h}\omega_j(q)} \psi_j(q,h) \quad , \quad \psi_j(q,h) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{jk}(q) h^k , \quad (2)$$

где $q \in \mathbb{C}^n$, функции $\omega_1(q)$,..., $\omega_N(q)$ называемые фазовыми есть значения некоторой многозначной аналитической функции $\omega(q)$ соответствующие различным листам её римановой поверхности, суммирование в общем случае расходящихся рядов производится с помощью интегрального преобразования Бореля (см. [3]).

В результате суммирования по Борелю амплитуды ψ_j оказываются многозначными аналитическими функциями имеющими тоже ветвление, что и функция ω . Однозначность решения u обеспечивается выполнением ресургентных соотношений,связывающих амплитуды ψ_j , их скачки при прохождении линий Стокса и определяемых геометрией римановой поверхности.Общий метод получения ресургентных уравнений предложен в [4] . В случае уравнения Эйри получаем:

$$\omega(q) = \frac{2}{3} q^{3/2} \quad , \quad \begin{cases} \psi_1^1 = m^2 \psi_2^2 - \Delta(m\, \psi_1^3) \\ \psi_2^2 = m^2 \psi_1^3 - \Delta(m\, \psi_1^1) \\ \psi_1^3 = m^2 \psi_1^1 - \Delta(m\, \psi_2^2) \end{cases} \qquad (3)$$

1.Мищенко А.С.,Стернин Б.Ю.,Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора Маслова. - 1976.

2.Кандельпершер Б.,Космас К.,Фам Ф. Первые шаги в ресургентном исчислении.Препринт.- Ница: университ.в Нице, 1991.

3.Экаль Дж. Ресургентные функции 3 тома . - Париж,1981.

4.Борисович А.Ю.,Стернин Б.Ю.,Шаталов В.Е. Об общем методе получения ресург.уравнений в параметрических задачах.-Дифф.ур.,1993

УДК 517.988

Борисович Ю.Г. (Воронеж)

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИИ, ОПТИМИЗАЦИИ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Известно, что нелинейные проблемы часто требуют для адекватного описания привлечения геометро-топологического языка. Соответствующие топологические инварианты в простейших случаях возникли уже давно, например индекс Кронекера, число Лефшеца, степень Лере и Шаудера, вращение М.А.Красносельского. К настоящему времени топологический арсенал значительно расширился, интересные исследования ведутся во всем мире, и в частности, в Воронеже. В докладе излагаются новые результаты, полученные в нашем коллективе.

Классическая задача о неподвижных точках $x=f(x)$ непрерывного отображения в конечномерном многообразии в настоящее время формулируется в наиболее общей форме как задача об "алгебраическом числе" точек пересечения графиков многозначных отображений $F, G: X \to Y$ банаховых многообразий. Для различных классов отображений F, G и пространств X, Y автором предложена наиболее общая конструкция топологической характеристики – как "индекса пересечения" $\gamma(F,G,\partial X)$, – аналога "алгебраического числа" точек совпадения $f(x)=g(x)$ двух отображений. Индекс пересечения обобщен автором и О.В.Кунаковской для задачи на собственные векторы $F(x)=\lambda G(x), x\in\partial\Omega$, в гильбертовом пространстве H, где $F=I+k_1$, $G=-I+k_2$ - гладкие отображения с компактными $k_1, k_2: \bar{\Omega}\to H$; конструкция базируется на введенной В.И. Арнольдом понятии индекса краевой особенности. Показано, например, что этот индекс пересечения может естественно быть использован в задаче об оценке числа продольных нормалей плоской монохроматической упругой волны в кристаллической среде [1]: независимо от класса симметрии кристаллической среды имеется не менее 3-х направлений для продольных нормалей. Если функция энергии кристалла морсовская, то удается классифицировать всю совокупность кристалов по количествам ν_k критических точек морсовского индекса k. В частных случаях индекс γ применяется для формулировки условий разрешимости нелинейного уравнения Монжа-Ампера (В.Г.Звягин), в задаче выбора управляющей функции в нелинейной динамической системе с нелинейным функционалом связи (автор), в задаче оптимального управления распределением тепла в стержне (автор, В.В.Обуховский), бифуркаций критических точек в вариационных задачах механики (Е.И.Сапронов).

Литература.

1. Борисович Ю.Г., Ларинский Б.М., Кунаковская О.В./ТМФ-т.94, №1, 1993.

УДК 517. 956

Борок В.М., Фардигола Л.В. /Харьков/

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ И ПОЛОСЕ

Изучена следующая краевая задача в слое $\Pi(T) = \mathbb{R}^n \times [0,T]$:

$$\partial u(x,t)/\partial t = P(-iD_x, t)u(x,t) + f(x,t); \; (x,t) \in \Pi(T); \quad (1)$$

$$A(-iD_x)u(x,0) + B(-iD_x)u(x,T) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}^n; \quad (2)$$

где $P(\sigma, t)$ – полином по σ с непрерывными по t коэффициентами, $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ – полиномы с постоянными коэффициентами, $T > 0$.

Теорема 1. Задача (1)-(2) является корректной в классе функций степенного роста (определение корректности дается аналогично [1]) тогда и только тогда, когда выполнены четыре условия:

$$\Delta(\sigma) \equiv A(\sigma) + B(\sigma)\exp\{\mathcal{P}_0(\sigma,T)\} \neq 0, \; \forall \sigma \in \mathbb{R}^n; \quad (3)$$

$$\inf\{\operatorname{Re}\mathcal{P}_T(\sigma,t) : (\sigma,t) \in \Pi(T) \wedge A(\sigma)=0\} > -\infty; \quad (4)$$

$$\sup\{\operatorname{Re}\mathcal{P}_0(\sigma,t) : (\sigma,t) \in \Pi(T) \wedge B(\sigma)=0\} < +\infty; \quad (5)$$

$$\exists C \geq 0 \;\; \forall (\sigma,t) \in \Pi(T) \setminus \{N[A] \cup N[B]\}$$

$$[\operatorname{Re}\mathcal{P}_0(\sigma,t) \leq C \vee \operatorname{Re}\mathcal{P}_T(\sigma,t) \geq -C]; \quad (6)$$

здесь $\mathcal{P}_0(\sigma,t) \equiv \int_0^t P(\sigma,t)\,dt$, $\mathcal{P}_T(\sigma,t) \equiv \int_t^T P(\sigma,t)\,dt$, $N[H]$ – множество вещественных нулей полинома $H(\sigma)$.

В случае уравнения с постоянными коэффициентами $(P(\sigma,t) \equiv P(\sigma))$:

$$\partial u(x,t)/\partial t = P(-iD_x)u(x,t), \; (x,t) \in \Pi(T), \quad (1')$$

критерий корректности рассматриваемой задачи получен в [1]. В этом случае условие (6) заведомо выполнено.

Отметим, что условие (6) для уравнения (1) с переменными коэффициентами выполняется не всегда. Например, при $P(\sigma,t) \equiv \equiv 2(t-1)\sigma^2$, $T = 3/2$, $A \equiv i$, $B \equiv 1$ условие (6) не выполняется, при этом условия (3)-(5) выполнены.

Определение. Задача (1')-(2) называется асимптотически корректной при $T \to 0$ (при $T \to \infty$) или АК$_0$-задачей (АК$_\infty$-задачей), если существует $T_0 > 0$ такое, что задача (1')-(2) корректна при любом значении $T \in]0,T_0[$ $(T \in]T_0,+\infty[)$.

Найдены критерии АК$_0$- и АК$_\infty$-задач (1')-(2) для случая $n=1$, $A(\sigma) \equiv A$, $B(\sigma) \equiv B$. Например, имеет место

Теорема 2. Пусть $\deg P(\sigma) > 0$, $A + B \neq 0$, $|A| = |B|$. Задача (1')-(2) является АК$_0$-задачей тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} P(\sigma) \not\equiv 0$, и АК$_\infty$-задачей тогда и только тогда, когда $N[\operatorname{Re} P(\cdot)] = N[P(\cdot)]$.

1. Фардигола Л.В.//Укр.мат.журнал, т. 44, № 8, с. 1083-1090.

Бригадин И. И. (Воронеж)

ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ ПРИ ПОМОЩИ ФРЕЙМОВ

Рассматривается автоматизированная система учёта и контроля материалов на предприятиях с разветвлённой структурой производства и постоянно обновляющейся номенклатурой используемых средств. Система фреймовых описаний используется для хранения обобщённой информации об объекте и технологии управления им. Структурированность и связность информации достигается путём указания имён одних фреймов при спецификации или при заполнении слотов других фреймов.

В качестве базового фрейма выбран набор фреймов-сценариев, задающих последовательность действий, которые описывают постоянно встречающиеся ситуации: "Приём материалов", "Отпуск материалов", "Подготовка справок о материалах", "Выбор режима работы". Фрейм-сценарии через имена слотов позволяют классифицировать материалы по номенклатуре: "Топливо", "Тара", "Стройматериалы", "Оборудование", "Запасные части", "Специи", "Вспомогательные материалы", "Малоценный инвентарь" и другие. Форма представления на данном уровне определяется фреймом-описанием в виде таблиц. В таблице задаётся заголовок; столбцы отображают свойство фрейма, а информация о каждом материале записывается в одной из строк.

Фрейм-сценарий "Выбор режима работы" является активизированным фреймом для всех уровней, что позволяет просматривать информацию об отдельных материалах по разным аспектам, задавать образцы поиска, создавать новые группы материалов через незаполненные слоты.

На экране монитора фрейм представляется или в закрытом виде - только заголовком, или в открытом виде - через дисплейное окно и перекрывающимися фреймами. Каждый фрейм в системе отображается в отдельный файл ОС.

Данная фреймовая система стимулирует работу "сверху вниз", позволяет легко создавать иерархические модели и документы требуемого вида, быстро и объективно представлять информацию по запросам пользователя о движении материальных потоков.

УДК 517.977 Булатов В.И. (Минск)

ПРИНЦИП СИММЕТРИИ В ПРИБЛИЖЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим стационарную систему

$$A_0 \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \qquad (I)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \in [0; +\infty[$; A_0 , A и B – матрицы соответствующих размеров.

Начальное условие системы (I)

$$x(0) = x_0, \qquad (2)$$

где x_0 – постоянный n-вектор, считаем приближенно управляемым, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдутся достаточно гладкие вектор-функции $x(t)$ и $u(t)$, $t \in [0; +\infty[$, удовлетворяющие (I)-(2), для которых при некотором $t_0 > 0$ имеем

$$\|x(t)\| \le \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

где $\| \cdot \|$ – означает евклидову норму вектора в $\mathbb{R}^n$.
Будем говорить, что система (I) приближенно управляема, если любое её начальное условие (2) приближенно управляемо.

На основании [I] устанавливается, что система (I) приближенно управляема тогда и только тогда, когда приближенно управляема так называемая симметричная ей система [2] .

$$A \frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + Bu(t).$$

Этот результат применяется в дальнейшем для получения параметрических критериев приближенной управляемости регулярных систем (I).

I. В.И.Булатов. Приближенная управляемость систем с отклоняющимся аргументом, не разрешенных относительно производной.//Конференция математиков Беларуси. Тез.докл., ч.4. Гродно, 1992, с.117.

2. В.И.Булатов. Об одном свойстве управляемых линейных систем, не разрешенных относительно производной.// Вестн.Белорус. ун-та. Сер.I: Физ.Мат.Мех. 1989, № I, с.63-64.

УДК 5I7.9 Булгаков А.И. (Тамбов)

БЭНГ-БЭНГ ПРИНЦИП ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Вопрос о плотности множеств решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью во множестве решений включений с овыпукленной правой частью занимает важное место в теории дифференциальных включений (см.,например,[I]) и привлекал внимание многих исследователей. Однако до сих пор этот вопрос рассматривался только для задачи Коши, за исключением работы [2] , в которой эта задача рассматривалась для множества периодических решений дифференциальных включений. В связи с этим естественно возникает вопрос о распространении этих утверждений на более общие краевые условия. Доклад посвящен этому вопросу для квазилинейных включений. Предложенный в докладе результат утверждает, что, если линейная однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то малые возмущения линейной задачи, вызванные многозначным отображением с невыпуклыми образами и краевыми условиями сохраняет плотность в пространстве непрерывных функций множеств решений возмущенной краевой задачи функционально-дифференциальных включений с невыпуклыми и овыпукленными образами.

Литература

I. Pianigiani G. On the fundamential theory of multivalued differential equations//J.Differ. Equat. 1977. V. 25. N 1 .P.30-38.

2. Ирисов А.Е.,Тонков Е.Л. О замыкании множества периодических решений дифференциального включения//В сб."Дифференциальные и интегральные уравнения". Горький:Издвво ГГУ, 1983. С. 32-38.

УДК 517.955 Буробин А.В. (Обнинск)

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ

Рассматривается кинетическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[v(x,z)f\right]=\frac{1}{2}\int_0^x \Phi(x-y,y)f(x-y,z)f(y,z)dy - -f(x,z)\int_0^\infty \Phi(x,y)f(y,z)dy, \qquad (1)$$

описывающее стационарные процессы коагуляции в пространственно неоднородных дисперсных системах (см.[1]). Здесь $f(x,z)$ - функция распределения частиц по размерам (массам) x и координатам z, $v(x,z)$ - скорость вертикального переноса частиц, $\Phi(x,y)$ - коэффициент коагуляции частиц с массами x и y. По своему физическому смыслу функции f и Φ неотрицательны, а скорость

$$v(x,z) = v_0(z) - W(x),$$

где $v_0(z)$ - скорость восходящих потоков, $W(x)$ - скорость седиментации частиц.

Для уравнения (1) ставится краевая задача. При этом на границе $z = 0$ задается распределение частиц

$$f(x,0) = f_1(x), \qquad (2)$$

имеющих положительную скорость v.

Устанавливаются условия разрешимости краевой задачи (1),(2). Исследуется поведение ее решений при больших значениях z.

Литература

1. Волощук В.М., Седунов Ю.С. Процессы коагуляции в дисперсных системах.- Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

УДК 517.977; 517.91/93 Бутенина Н.Н. (Нижний Новгород)

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ УДС 2-ГО ПОРЯДКА.

Рассматривается УДС вида $\dot{x}=A(x)+u(t)B(x)$, где x, $A(x)$, $B(x)$ – вектор-функции размерности 2, $x\in\Omega$, $A(x)$, $B(x)\in C^1$, $u(t)$ – кусочно-непрерывная ограниченная функция, $m\le u(t)\le n$.

Решается задача построения множества управляемости в т.K области Ω (U_k) за конечное время. С этой целью вводятся в рассмотрение вспомогательные автономные системы: m- и n-системы, отвечающие граничным значениям управляющего параметра, и сшитые mn- (nm-) системы, для которых $u(t)=m$, если $F=\det\|A(x)B(x)\|>0$ (<0), $u(t)=n$, если $F<0$ (>0). К особым (орбитно-неустойчивым) траекториям таких систем относятся: состояния равновесия m- и n-систем, сепаратрисы сшитых состояний равновесия, сшитые предельные циклы, γ-точки (точки контактной кривой $F=0$, в которых траектории m- и n-систем касаются этой кривой и при этом имеют противоположные направления), особые точки контактной кривой, полутраектории сшитых систем, выходящие из γ-точки или особой точки кривой $F=0$. На контактной кривой выделяются интервалы смешанного типа, в точках которых траектории m- и n-систем пересекают контактную кривую в противоположных направлениях.

ЛЕММА 1. Если в каждой точке интервала смешанного типа "l" $\operatorname{grad} F\ne 0$ и какая-либо точка этого интервала принадлежит множеству U_k, то "l"$\in U_k$.

Теорема 1. Если т.K – внутренняя точка множества U_k и $\bar{U}_k\in\Omega$, то в границу множества U_k могут входить только ω – орбитно-неустойчивые полутраектории вспомогательных автономных систем (при этом U_k является областью).

ЛЕММА 2. Если при $x\in\Omega$ $|A(x)|+|B(x)|\ne 0$, то для любой т.K, $K\in\Omega$, множество U_k содержит хотя бы одну из полутраекторий $L_k^-(m)$; $L_k^-(n)$.

Теорема 2. Пусть 1. т.K не принадлежит интервалу смешанного типа; 2. $|A(K)|+|B(K)|\ne 0$, 3. α – предельным множеством полутраектории $L_k^-(mn)$ $[L_k^-(nm)]$ является точка интервала смешанного типа l_o; 4. на l_o $\operatorname{grad}F\ne 0$. Тогда $l_o\in U_k$.

УДК 517.977; 517.91/93 Бутенина Н.Н., Павлючонок Э.Г.
(Нижний Новгород)

ОСОБАЯ ТОЧКА СЕДЛО-УЗЕЛ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассматривается нелинейная управляемая система вида $\dot{x}_i = P_i(x_1,x_2,\mu) + u(t)Q_i(x_1,x_2,\mu)$, $i=1,2$, где $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_k)$, $x\in\Omega\subset R^2$, $P_i,Q_i\in C^1$, $u(t)$ – ограниченное кусочно-непрерывное скалярное управление, $m\le u(t)\le n$. Будем считать, что контактная кривая не имеет особых точек и $\sum\limits_{i=1}^{2}(P_i^2+Q_i^2)\ne 0$. В качестве конечной выбирается некоторая т. $K(X_0,y_0)$ интервала смешанного типа контактной кривой. Каждому набору $\pi(m,n,\mu)$ параметров УДС соответствует некоторая область управляемости U_π. Предполагается, что при $\pi=\pi_0$ ∂U_{π_0} содержит т. M_0, являющуюся состоянием равновесия типа седло-узел кратности 2 $m_0(n_0)$-системы, причем: 1) траектория $n_0(m_0)$- системы в т. M_0 не касается контактной кривой; 2) δU_{π_0} не содержит других негрубых траекторий вспомогательных систем.

Теорема 1. Пусть при $\pi=\pi_0$ в ∂U_{π_0} наряду с M_0 входит некоторая положительная полутраектория хотя бы одной его собственной ω-сепаратрисы. То..а т. π_0 при $\sigma_0=P'_{1x_1}(M_0,\pi_0)+Q'_{2x_2}(M_0,\pi_0)>0$ имеет место непрерывная зависимость области $U\pi$ от параметров УДС, а при $\sigma_0<0$ – разрывная. Если в последнем случае ($\sigma_0<0$) изменение параметров приводит к распадению M_0 на 2 состояния равновесия, U_π меняется непрерывно, если к исчезновению состояния равновесия, U_π расширяется скачком.

Теорема 2. Пусть при $\pi=\pi_0$ в ∂U_{π_0} наряду с M_0 входит некоторая положительная полутраектория несобственной ω-сепаратрисы сшитого состояния равновесия, порожденного седло-узлом M_0. Тогда в т. π_0 имеет место разрывная зависимость области U_π от параметров УДС. Если при этом изменение параметров приводит к распадению M_0 на 2 состояния равновесия, U_π меняется непрерывно; если к исчезновению состояния равновесия, U_π расширяется скачком.

УДК 517.946 Валиахметов А.Т. /г.Стерлитамак/

ДВЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для уравнения

$$(z+y-x)u_{xyz}+\alpha u_{xy}=0, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \qquad (1)$$

в пространственной области

$$W=\{(x,y,z)\,|\,x=-a\ (a>0),\ y=b\ (b>0),\ z=0\ (z<0),\ z+y-x=0\ (z>x-y)\}$$

обоснована единственность и существование решения характеристической задачи Гурса, которое имеет вид

$$u(x,y,z)=\int\limits_y^b\int\limits_z^0 R(-a,t,s;M_0)\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}f_1(t,s)+\frac{\alpha}{s+t+a}\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,s)\right]dt\,ds-$$

$$-\int\limits_{-a}^{x}\int\limits_z^0 R(t,b,s;M_0)\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}f_2(t,s)+\frac{\alpha}{s+b-t}\frac{\partial}{\partial t}f_2(t,s)\right]dt\,ds-$$

$$-\int\limits_{-a}^{x}\int\limits_y^b R(t,s,0;M_0)\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}f_3(t,s)\,dt\,ds, \qquad (2)$$

где $f_i(\xi,\eta)\ (i=1,2,3)$ - краевые данные, $R(\xi,\eta,\theta;M_0)$ - функция Римана уравнения (1).

Исходя из решения задачи Гурса (2) с данными на характеристических плоскостях обоснована корректность постановки видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) при $\alpha<1$ с данными

$$\lim_{x\to z+y}u(x,y,z)=\tau(y,z),$$

$$\lim_{y\to x-z}u_x(x,y,z)=h(x,z),$$

$$\lim_{z\to x-y}(z+y-x)^{\alpha}u_{xy}(x,y,z)=\nu(x,y),$$

решение которой выписано в явном виде

$$u(x,y,z)=\tau(y,z)-\int\limits_x^{y+z}h(t,z)\,dt-\int\limits_x^{y+z}\int\limits_{t-z}^{y}\nu(t,s)(z+s-t)^{-\alpha}\,dt\,ds.$$

УДК 517.9 Вельмисов П.А., Решетников Ю.А. (Ульяновск)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕНОК РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается задача о колебаниях вязкоупругих стенок резервуара, который заполнен жидкостью, имеющей свободную поверхность:

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0\,,\quad (x,y)\in H=\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<x_0\,,\ 0<y<y_0\}$$

$$\varphi_y(x,0,t)=V_*(t),\quad -\rho\,\varphi_t(x,y_0,t)=P_*(t),\quad x\in(0,x_0)$$

$$\varphi_x(0,y,t)=\dot w_1(y,t),\quad \varphi_x(x_0,y,t)=\dot w_2(y,t),\quad y\in(0,y_0)$$

$$L(w_1)=\rho g(y-y_0)+\rho\,\varphi_t(0,y,t),\quad y\in(0,y_0)$$

$$L(w_2)=-\rho g(y-y_0)-\rho\,\varphi_t(x_0,y,t),\quad y\in(0,y_0)$$

$$L(w)\equiv M\ddot w+D\Big(w''''-\int_0^t Q_{1\tau}(t,\tau)\,w''''(y,\tau)\,d\tau\Big)+N w''+$$

$$+\beta_0\Big(w-\int_0^t Q_{2\tau}(t,\tau)\,w(y,\tau)\,d\tau\Big)+\beta_1\dot w+\beta_2\dot w''''+\beta_3\ddot w''$$

Здесь $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скоростей несжимаемой жидкости, $w_i(y,t)$ – прогибы стенок; точка и штрих обозначают производные по времени t и координате y.

Для некоторых типов закрепления стенок (на концах $y=0$, $y=y_0$) получены следующие достаточные условия устойчивости их движения: для всех t, τ, n

$$\theta\geq 0,\ \theta_t\leq 0,\ \theta=\frac{D}{\gamma_n}Q_\tau(t,\tau);\quad Q_\tau=Q_{1\tau}+\frac{\beta_0}{D\lambda_n^4}Q_{2\tau}$$

$$\psi>0,\ \psi_t\leq 0,\ \psi=\frac{D}{\gamma_n}\Big[1+Q(t,0)-\frac{N}{D\lambda_n^2}+\frac{\beta_0}{D\lambda_n^4}\Big]$$

$$\xi\leq 0,\ \xi_t\geq 0,\ \xi=\frac{D}{\gamma_n}Q(t,t);\quad \frac{1}{\gamma_n}(\beta_1+\lambda_n^4\beta_2)\geq 0$$

где $\lambda_n=\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{y_0}$, а γ_n зависит от M, β_3, ρ, x_0, λ_n. Условия налагают ограничения на $N(t)$, $N'(t)$ и $Q(t,\tau)$ (N – сжимающее усилие, Q – "эквивалентное" ядро релаксации).

УДК 517.98

Виноградова Г.А. (Воронеж)

Об изоморфизме весовых пространств

Пусть V – некоторая область в R^n. Если $x \in R^n$, то через r, ω обозначим полярные координаты $r = |x|$, $\omega = x/r$.

Пусть λ – вещественное число, k – неотрицательное целое число и $1 \le p < \infty$. Обозначим через $W^k_{p,\lambda}(V)$ весовое соболевское пространство, состоящее из функций $u \in L^{loc}_p(R^n \backslash 0)$ таких, что их обобщенные производные $D^\alpha u \in L^{loc}_p(R^n \backslash 0)$, если $|\alpha| \le k$, причем

$$\|u\|^k_{p,\lambda} = \Big(\int_V \sum_{|\alpha| \le k} \big| r^{|\alpha| - \lambda} D^\alpha u \big|^p \frac{dr}{r} d\omega \Big)^{1/p} < \infty .$$

Пусть $Q(D)$ – однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами порядка m.

Через $\Lambda(Q)$ обозначим множество, которое в случае $m \ge n$ состоит из всех целых чисел, а в случае $m < n$ состоит из целых чисел, лежащих на интервалах $(-\infty, m-n]$ и $[0, \infty)$.

Справедливо следующее утверждение.

<u>Теорема.</u> Пусть $\lambda \notin \Lambda(Q)$, $1 < p < \infty$, $m \le k$. Тогда $Q(D)$ является топологическим изоморфизмом пространства $W^k_{p,\lambda}(R^n)$ на $W^{k-m}_{p,\lambda-m}(R^n)$.

УДК.517.9 Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. (Самара)

Построение функции Римана для одного дифференциального уравнения с вырождением на гиперболе и ее применение.

Для уравнения

$$(1-xy)u_{xy}-\beta x u_x-\alpha y u_y-\alpha\beta u=0\,,\quad \alpha,\beta\in R$$

построена функция Римана в виде:

$$R(x,y;x_0,y_0)=(1-xy)^{\alpha+\beta}(1-x_0y)^{-\alpha}(1-xy_0)^{-\beta}\,F(\alpha,\beta;1;\sigma);$$

где $\quad \sigma=\dfrac{(x_0-x)(y_0-y)}{(1-x_0y)(1-xy_0)}$

При $\beta=\alpha$ исходя из этой функции Римана построены функции Римана-Адамара задач Коши-Гурса и Дарбу в виде:

$$V(x,y;x_0,y_0)=\begin{cases} v_1(x,y;x_0,y_0)\,, & y<\dfrac{1}{x_0}\,,\\ v_2(x,y;x_0,y_0)\,, & y>\dfrac{1}{x_0}\,,\end{cases}$$

$$W(x,y;x_0,y_0)=\begin{cases} y\,v_1(x,y;x_0,y_0)\,, & y<\dfrac{1}{x_0}\,,\\ v_3(x,y;x_0,y_0)\,, & y>\dfrac{1}{x_0}\,,\end{cases}$$

$$v_1(x,y;x_0,y_0)=\left(\frac{1-xy}{1-x_0y_0}\right)^{\alpha}F(\alpha,1-\alpha;1;s)\,,\quad s=\frac{\sigma}{\sigma-1}\,,$$

$$v_2(x,y;x_0,y_0)=k_1(1-xy)^{2\alpha}(x_0-x)^{-\alpha}(y_0-y)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha;2\alpha;\frac{1}{s}\right),$$

$$v_3(x,y;x_0,y_0)=k_2(1-xy)(1-x_0y_0)^{1-2\alpha}(x_0-x)^{\alpha-1}(y-y_0)^{\alpha-1}F\left(1-\alpha,1-\alpha;2-2\alpha;\frac{1}{s}\right),$$

$$k_1=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2\alpha)}\,,\qquad k_2=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\;)\Gamma(2-2\alpha)}\,.$$

УДК 517.958 Гадецкая С.В. (Харьков)

СИЛЬНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НАГРУЗКАМИ.

Рассмотрена задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) + \sum\limits_{k=0}^{N} Q_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t_k), \\ \sum\limits_{k=0}^{N} A_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t_k) = u_0(x) \end{cases}$$

в полосе $\mathbb{R} \times [0,T]$. Здесь $P(s)$, $Q_k(s)$, $A_k(s)$, $k = \overline{0,N}$, - произвольные полиномы, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T < +\infty$.

Задача Коши (с начальным условием при $t = 0$) для уравнения (1) исследована в работах [1],[2].

Изучен вопрос сильной корректности задачи (1)-(2), т.е. корректности (определение см., например, в [2]), при которой решение является бесконечно гладкой функцией независимо от гладкости начальной функции.

По задаче (1)-(2) построена целая функция $\Delta(s)$ ("определитель" задачи). Получены следующие результаты.

1. При выполнении условий: а) существует область $G(\mu,M) = \{ s = \sigma+i\tau \in \mathbb{C}: |\tau| \le M\cdot(1+|\sigma|)^{\mu},\ \mu \le 0,\ M > 0\}$ такая, что $\forall s \in G(\mu,M)$: $\Delta(s)\ne0$; б) $|\operatorname{Re} P(i\sigma)| \ge A_1|\sigma|^{h} + A_2$, $A_1 > 0$, $A_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $h>0$; в) $A_0(s)\cdot A_N(s)\ne0$; г) $Q_0(s)\equiv0$, $Q_N(s)\equiv0$ имеет место корректная разрешимость задачи (1)-(2) в пространствах функций экспоненциального роста. Аналогичный результат справедлив при выполнении условий в)' $A_0(s)\ne0$ и г)' $Q_0(s)\equiv0$ (вместо в) и г)) в случае параболичности уравнения (1), а также при выполнении условий в)'' $A_N(s)\ne0$ и г)'' $Q_N(s)\equiv0$ (вместо в) и г)) в случае антипараболичности уравнения (1). Во всех указанных случаях решение является бесконечно гладкой функцией (по x).

2. Для задачи Коши (с начальным условием при $t = T$) для параболического уравнения вида (1) и задачи Коши (при $t = 0$) для антипараболического уравнения получены теоремы, обеспечивающие их корректную разрешимость в пространствах функций экспоненциального роста, однако в этом случае гладкость решения (по x) не повышается по сравнению с гладкостью начальной фунции.

3. Изучены аналогичные вопросы для пространств функций степенного роста.

1. Борок В.М., Житомирский Я.И. || Изв. вузов. Математика. 1981. №9. С.5-12.

2. Гадецкая С.В. || Вестник Харьк. ун-та. 1992. №361. С.71-80.

УДК 517.9 Галунова К.В. (Санкт-Петербург)

ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

Для линейных нестационарных систем дифференциальных уравнений строится стабилизирующее управление по неполной обратной информации такое, что оператор замкнутой системы имеет вид произведения.

Опр. 1: Γ -окрестностью скалярной функции $f(t)$ будем называть множество функций $g(t)$ таких, что для $\forall g(t) \exists \gamma = const > 0$ $|g(t) - f(t)| \le Ce^{-\gamma t}$, где $C = const$.

Опр. 2: Будем говорить, что $g(t)$ удовлетворяет ε -условию, если для нее существует функция $\varepsilon(t)$: $0 < \underline{\varepsilon} \le \varepsilon(t) \le \overline{\varepsilon}$ и постоянная M такие, что

$$\left| \int_0^t (g(\tau) - \varepsilon(\tau))\, d\tau \right| < M \quad \forall t$$

Теорема 1: Для того, чтобы для линейного обыкновенного дифференциального оператора

$$\mathcal{L}x = x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + u$$

существовало стабилизирующее управление вида

$$u = \sum_{i=0}^{\mu-1} c_i(t) x^{(i)} + \sum_{i=\mu+1}^{n-1} c_i(t) x^{(i)}$$

($\mu \ne n-1$) достаточно, чтобы в Γ -окрестности функции $a_\mu(t)$ существовала функция $g(t)$, удовлетворяющая ε -условию.

Теорема 2: Для того, чтобы для линейного дифференциального оператора запаздывающего типа

$$\mathcal{L}x = x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}(t) x^{(i)}(t - h_j) + u$$

существовало стабилизирующее управление вида

$$u = \sum_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} c_{ij}(t) x^{(i)}(t-h_j) + \sum_{j=0}^{l-1} c_{kj}(t) x^{(i)}(t-h_j) + \sum_{j=l+1}^{m} c_{kj}(t) x^{(i)}(t-h_j)$$

достаточно, чтобы в Γ -окрестности функции $a_{kl}(t)$ существовала функция $g(t)$ такая, что $g(t)$ удовлетворяет ε -условию при $l=0$ и $g(t)$ или $-g(t)$ удовлетворяет ε -условию при $l \in [1, m]$.

УДК 5I7.97+5I2.8I Гараев К.Г. /Казань/

НЕЛИЕВСКИЕ СИММЕТРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Рассматривается оптимальная задача

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u,t)\,dt \longrightarrow \min$$

$$\dot{x}^i = f^i(x,u,t),\quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \quad (i=\overline{1,n})$$

$$x^i(t_0) = x_0^i,\quad x^j(t_1) = x_1^j \quad (j \in I).$$

Здесь $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ - вектор фазовых координат; $u=(u^1, u^2, \ldots, u^m)$ - вектор управления; через I обозначено подмножество из $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Введено понятие L^* - инвариантности оптимального процесса $(x(t), u(t))$ относительно однопараметрической группы лиевых преобразований, содержащее в себе как частные случаи понятия лиевской, дивергентной и конформной инвариантности; получены необходимые и достаточные условия L^* - инвариантности на языке операторов Ли:

$$\tilde{X}\left(\frac{\partial^{p-1} L_0^*}{\partial \varepsilon^{p-1}}\right) + \frac{\partial^{p-1} L_0^*}{\partial \varepsilon^{p-1}}\left(D_t \xi_t\right) = \frac{\partial^p L_0^*}{\partial \varepsilon^p} \quad (p=\overline{1,\infty}).$$

Здесь $\tilde{X}$ - продолженный оператор; $L = H - p_i \dot{x}^i$ - функция Лагранжа, H - функция Гамильтона; p_i - переменные Понтрягина; индекс $*$ отвечает преобразованному лагранжиану, индекс 0 - нулевому значению группового параметра ε.

В качестве следствий установлена обобщенная теорема Нётер и для функционалов получен аналог формулы Ньютона-Лейбница; кроме того, показана возможность получения точных решений уравнения Беллмана в задаче синтеза оптимального управления.

Доказано существование нового первого интеграла для классической в динамике космического полета задаче оптимизации режима движения ракеты в пустоте.

УДК 623.21 Гарбуз Е.В., Гончарова Г.А. (Саратов)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для описания поведения строительных конструкций может быть применен аппарат теории случайных процессов, рассматривающий надежность как временную категорию. Если считать возможным применение теории марковских процессов для описания поведения системы, то надежность конструкции может быть найдена путем решения системы дифференциальных уравнений А.Н.Колмогорова /I/. Система дифференциальных уравнений при разрушении по одной траектории состояний имеет простое замкнутое решение. Система уравнений А.Н.Колмогорова в этом случае имеет вид:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_1 P_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) - \lambda_k P_k(t), \quad (k=\overline{2,n}), \qquad (2)$$

$$\frac{dP_{n+1}(t)}{dt} = \lambda_n P_n(t), \qquad (3)$$

где $P_1(t), \ldots, P_{n+1}(t)$ - вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_k $(k=\overline{1,n+1})$,

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - интенсивность отказов при переходе системы из состояния S_1 в состояние S_2, ..., из состояния S_{n-1} в S_n.

Состояние S_{n+1} соответствует выходу из строя системы, следовательно надежность системы $P_c(t)$ будет равна сумме всех состояний, при которых она работоспособна, т.е.

$$P_c(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t). \qquad (4)$$

Величины $P_i(t)$ удовлетворяют начальным условиям $P_1(0)=1$, $P_k(0)=0$ / при к=2,3, ... , n /.

Так как интенсивность отказов связана с вероятностью перехода из одного состояния в другое, то ее можно отождествить со средним числом выбросов случайного процесса /2/:

$$\lambda(t) = V(V_*, t). \qquad (5)$$

Уравнения (I) - (3) разрешаются в замкнутом виде, а для вероятности конечного состояния системы на основе разложения экспоненты в ряд получается формула: $P_{n+1}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i t^n}{n!}$. (6)

Литература

I. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, I972
2. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории сооружений в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, I97I.

УДК 518.9 Голоколосова Т.В. (Кемерово)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОПРОДУКТОВОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

Пусть экономика описывается интенсивностью валовой продукции x, интенсивностью потребления u, коэффициентом производственных затрат a и приростной фондоемкостью b. Рассмотрим задачу оптимального управления с двумя критериями качества на промежутке времени $[0,T]$

$$\dot{x}(t) = \frac{1-a}{b}x(t) - \frac{1}{b}u(t),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$x(t) \geq 0,\quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$0 < C_{min} \leq u(t) \leq C_{max},\quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$J^1_{x_0}(u) = \int_0^T e^{-\delta t}u(t)\,dt, \tag{5}$$

$$J^2_{x_0}(x(T)) = x(T). \tag{6}$$

Здесь x_0 – начальное состояние экономики, C_{min}, C_{max} – уровни минимального и максимального потребления, δ – коэффициент дисконтирования. Критерий (5) предусматривает рост потребления на $[0,T]$, а критерий (6) – наращивание валового выпуска к конечному времени T.

Для решения задачи (1) –(6) предлагается подход, основанный на понятии динамической устойчивости, применяемой в теории кооперативных дифференциальных игр [1] .

Для произвольного понятия решения (для произвольного принципа оптимальности) задачи (1)-(6) вводится определение его динамической устойчивости, которое предполагает инвариантность во времени движения по выбранной траектории.

В работе найдена структура множества Парето-оптимальных векторных оценок и доказана его динамическая устойчивость.

1. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. - Томск, изд-во ТГУ, 1985.

УДК 518.9

Голышев С.В. (Кемерово)

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ Δ-ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В КООПЕРАТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Рассматривается дифференциальная игра n лиц с предписанной продолжительностью $T-t_0$:

$$\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_n),\ x \in \mathbb{R}^m,\ x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, T] \qquad (1)$$

$$\mathcal{J}_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{T} h_i(x(t))\,dt,\ i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

В предположении о трансферабельности выигрышей (2), при помощи характеристической функции строится кооперативная дифференциальная игра, в которой обычным образом определяются понятия дележей и решения.

Определение. Дележ $\xi^0 \in W_v(t_0, x_0)$ называется динамически Δ-устойчивым, если существует стратегия распределения β^Δ такая, что

$$\xi^0 \in \bigcap_{k=1}^{p(\Delta)} [\,\omega(t_k^\Delta, \Delta, \beta^\Delta) + W_v(t_k^\Delta, \bar{x}(t_k^\Delta))\,] \qquad (3)$$

Решение $W_v(t_0, x_0)$ называется динамически Δ-устойчивым, если динамически Δ-устойчивы все дележи из $W_v(t_0, x_0)$. В этом случае траектория $\bar{x}(\cdot)$ называется Δ-оптимальной траекторией, а β^Δ – Δ-оптимальной стратегией распределения. Здесь $W_v(t_0, x_0)$ решение кооперативной дифференциальной игры в смысле векторного принципа оптимальности W_v, $\Delta = \{t_0 = t_0^\Delta < t_1^\Delta < \ldots < t_{p(\Delta)}^\Delta = T\}$, $\omega(t_k^\Delta, \Delta, \beta^\Delta)$ – специальным образом построенный вектор платежей к моменту t_k^Δ, $\beta^\Delta : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ –гиперплоскость: $\mathfrak{X}_1 + \ldots + \mathfrak{X}_n = 1$) – стратегия распределения, $W_v(t_k^\Delta, \bar{x}(t_k^\Delta))$ – решение текущей игры, определенной в позиции $(t_k^\Delta, \bar{x}(t_k^\Delta))$.

Для конкретных понятий решения $W_v(t_0, x_0)$ (множество дележей, С-ядро) доказаны теоремы об их динамической устойчивости, построен метод вычисления Δ-оптимальных стратегий распределения β^Δ, рассмотрен пример игры трех лиц.

УДК 539.3; 539.4

Гончарова Г.А., Гарбуз Е.В.

О ВЫБОРЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

В настоящее время большое количество прикладных задач при математическом моделировании может быть приведено к следующему операторному уравнению:

$$\nabla_D^4 W = g(x, y, z, t) + R_1 + R_2 + P_1 + P_2 + P_3$$

где W - искомая функция, g - некоторая произвольно заданная функция, P_1, P_2, P_3, R_1, R_2 - некоторые интегро-дифференциальные операторы, ∇^4 - дифференциальный оператор, вообще говоря, изменяющийся в процессе решения задачи в зависимости от функции D. Параметры, от которых зависят операторы, стоящие в правой части уравнения, определяются из решений соответствующих дифференциальных уравнений, связанных между собой через коэффициенты.

Наличие переменных коэффициентов в левой части операторного уравнения не позволяет в нестоящее время получить точное аналитическое решение задачи. Поэтому исследовался вопрос о выборе наиболее выгодных сочетаний аналитических и численных методов решения подобных задач, в зависимости от граничных условий.

Численные эксперименты показали, что при решении задач из рассматриваемого класса хорошие результаты получаются при совместном использовании аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и метода последовательных возмущений параметров, метода конечных разностей, для аппроксимации левой части операторного уравнения, метода факторизации, для решения получе..ной системы.

Критериями при выборе методов служили два основных параметра: наилучшее соответствие экспериментальным данным и наименьшее время, затрачиваемое на решение задачи с помощью ЭВМ.

Разработана оригинальная методика, позволяющая в зависимости от конкретного вида операторов в правой части уравнения и краевых условий использовать на различных этапах решения задачи сочетание других аналитических и численных методов так, чтобы полученные результаты полностью соответствовали предъявляемым требованиям.

УДК 517.9 Горбузов В.Н. (Гродно)

ОБ ИНТЕГРАЛАХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА

Система уравнений Пфаффа

$$l_j(x,dx) = 0, \ j = \overline{1,m}, \qquad (Pf)$$

рассматривается в предположении, что линейные дифференциальные формы

$$l_j(x,dx) = a^j(x)dx, \ j = \overline{1,m},$$

определяемые векторными функциями векторного аргумента

$$a^j(x) = \big(a_{1j}(x), \ \ldots, \ a_{nj}(x)\big), \ j = \overline{1,m},$$

которые составлены на основе голоморфных по x в области $V \subset \mathbb{C}$, $n \le m$, скалярных функций векторного аргумента $a\colon V \to \mathbb{C}$, являются линейно несвязанными в области V.

КРИТЕРИЙ. *Скалярная функция векторного аргумента* $w\colon V \to \mathbb{C}$ *является частным интегралом системы уравнений Пфаффа* (Pf), *если и только, если совместна система тождеств*

$$\mathfrak{E}_j \ w(x) \equiv U_j(w;x,y), \ j = \overline{m+1,n},$$

где голоморфные по x *в области* $V \subset \mathbb{C}^n$ *функции* $U_j\colon V \to \mathbb{C}$ *такие, что* $U_j(0;x) \equiv 0$, $j = \overline{m+1,n}$.

Здесь линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{E}_j = \sum_{l=1}^{n} b_{li}(x)D_{x_l}, \ i = \overline{1,n},$$

образованы с помощью голоморфных в области V скалярных функций $b_{li}\colon V \to \mathbb{C}$, связанных с функциями $a_{ij}\colon V \to \mathbb{C}$ тем, что скалярное произведение

$$a^i(x)b^l(x) = \delta_{li}, \quad i = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,n},$$

где вектор-функции $b^l(x) = \big(b_{1l}(x), \ \ldots, \ b_{nl}(x)\big)$, $l = \overline{1,n}$, δ_{li} - символ Кронекера.

Используя критерий и ему аналогичный на случай первых интегралов в качестве базовых, рассматриваются методы построения первых интегралов системы уравнений Пфаффа (Pf) по известным частным интегралам и инфинитезимальным операторам, допускаемым этой системой уравнений Пфаффа (Pf).

УДК 517.9 Горелова Е.Я. (Самара)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

В данной работе обсуждаются особенности задачи оптимальной фильтрации для одного класса систем с сингулярными возмущениями. Такие задачи возникают, например, при построении фильтра Калмана для гироскопических систем, находящихся под воздействием случайных сил, при наличии малых шумов в канале наблюдения.

Рассматривается задача построения оптимального фильтра для оценки состояния плоского гироскопического маятника [1]. Предполагается, что устройство для радиальной коррекции находится под воздействием гауссовского случайного процесса типа белого шума с нулевым средним. В работе [1] построение фильтра Калмана выполнено на основе прецессионных уравнений.

Возможность использования прецессионных уравнений в качестве основы для уравнений фильтра Калмана обсуждалась в [2]. Переход от полных уравнений системы к прецессионным является традиционным в механике. Однако, существует большое количество примеров, когда замена полных уравнений прецессионными приводит к неточным, а иногда и к качественно неверным результатам. В [2] возможность такого перехода в задаче оптимальной фильтрации изучена с привлечением метода интегральных многообразий. Показано, что размерность медленного интегрального многообразия уравнений для ковариационной матрицы ошибок выше размерности уравнений для этой матрицы, полученных на основе уравнений прецессионной теории. Поэтому использование прецессионных уравнений как основы для уравнений фильтра Калмана может привести к недопустимой погрешности при определении ковариационной матрицы ошибок.

Этот вывод подтверждается численным анализом задачи оптимальной фильтрации для плоского гироскопического маятника. Выполняется сравнение решений уравнений фильтра Калмана для ковариационной матрицы ошибок в углах, полученных в [1] на основе прецессионных уравнений, и уравнений, соответствующих полной исходной модели. Показано, что результаты для ковариационной матрицы ошибок в углах получаются различными в членах первого порядка по малому параметру.

1. Ройтенберг Н.Я. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.-552с.
2. Соболев В.А., Горелова Е.Я. Оптимальное оценивание в гироскопических системах.-ТВиП, №4, 1992, с.483.

Григоривкер И.М. (Рязань)

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + f(t, x) = 0 \tag{1}$$

где f – непрерывное и ограниченное отображение из $R \times H$ в H, периодическое по t с периодом ω и строго монотонное по x:

$$(f(t, x) - f(t, y), x - y) > 0 \quad \text{при } x \neq y.$$

Для уравнения (1) разрешима задача Коши [1], каждое решение неограниченно продолжимо вправо, существует не более одного периодического решения, причем ω является периодом периодического решения.

Теорема. Пусть при некотором $\alpha > 0$

$$(f(t, x) - f(t, y), x - y) \geq \alpha \| f(t, x) - f(t, y) \| \, \| x - y \|. \tag{2}$$

Тогда равносильны следующие утверждения:

1) уравнение (1) имеет периодическое решение $\varphi(t)$;

2) $\left(x, \int\limits_0^{\omega} f(t, x)\, dt \right) \geq 0$ при достаточно больших $\|x\|$;

3) уравнение $\int\limits_0^{\omega} f(t, x)\, dt = 0$ имеет решение $x \in H$.

При этом для любого периодического решения $\varphi(t)$ имеет место оценка

$$\| \varphi(t) - x_0 \| \leq \frac{M\omega}{\alpha}, \quad \text{где} \quad M = \max_t \| f(t, x) \|.$$

Равносильность утверждений 1) - 3) сохранится, если условие (2) заменить более слабым: для любого компакта K в H при $\|x\| \to \infty$

$$\frac{1}{\| f(t, x) - f(t, y) \|} (f(t, x) - f(t, y), x - y) \to \infty$$

равномерно по $y \in K$.

Литература.

1. М.М. Вайнберг. Вариационный метод и метод монотонных операторов. Наука, М., 1972.

Гудович И.С. (Воронеж)

О КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ВЕКТОРОВ

Оператором типа оператора Г.К. Мойсила и Н. Теодореско назовем матричный, дифференциальный оператор порядка $(n \times n)$ $\mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x})$ $(\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_m})$, обладающий свойством

$$\mathcal{D}(\tfrac{\partial}{\partial x})\, \mathcal{D}'(\tfrac{\partial}{\partial x}) = \Delta E_n \qquad (1)$$

где E_n - единичная матрица порядка n, а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

Простейшим оператором типа Майсиля-Теодореско является дифференциальный оператор системы Коши-Римана. Один из двух обширных классов таких операторов может быть построен по наборам операторов внешнего дифференцирования $d_{k,m}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$; k - степень формы) и, по существу введен Г.К. Мойсилом и Н. Теодореско. Другой класс операторов порождается аналогичной цепочкой операторов $\bar{\partial}_{k,m}$. Пристальное внимание специалистов к операторам такого вида на протяжении последних шестидесяти лет объясняется свойствами ядра такого оператора. Эти свойства аналогичны свойствам двумерного вектора (f_1, f_2), у которого компоненты являются вещественной и мнимой соответственно частями аналитической функции. А именно, каждая компонента векторов из ядра этого оператора, определенного в области с границей, обладающей достаточно хорошими свойствами, будет гармоничес.ой функцией, справедлива теорема, аналогичная интегральной теореме Коши, выполняется равенство, дающее аналог интегральной формулы Коши. Кроме того, для векторов класса $C^{(0,0)}$ справедливо утверждение, обратное к интегральной теореме Коши (теорема Морера), а также может быть построен аналог интеграла типа Коши и исследован круг вопросов, связанных с разрешимостью систем сингулярных интегральных уравнений с ядрами, содержащими операторы такого типа.

УДК 517.9 Гулецкая О.И. (Минск)

О СПЕКТРЕ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА.

Пусть A -алгебра линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве X, $G(A)$ - алгебра последовательностей, элементами которой являются последовательности операторов из A. Аналогично тому, как это сделано в [1], введем в рассмотрение подалгебру $GM(A)$ в $G(A)$ и идеал $N(A)$ в $GM(A)$. Алгебру $G(A)=GM(A)/N(A)$ называют алгеброй обобщенных операторов.

Определение 1. Обобщенный оператор $\tilde{A} \in G(A)$ будем называть обратимым, если существует такой представитель (A_n) оператора $\tilde{A}$, что для всех A_n, за исключением, быть может, конечного числа, существуют ограниченные обратные операторы.

Определение 2. Обобщенное комплексное число $\tilde{\lambda}=[(\lambda_n)]\in C$, будем называть регулярной точкой обобщенного оператора $\tilde{A}$, если оператор $\tilde{\lambda}I-\tilde{A}$ обратим. Множество регулярных точек $\rho(\tilde{A})$ обобщенного оператора $\tilde{A}$ - резольвентное множество $\tilde{A}$. Множество обобщенных чисел $\tilde{\lambda}$, не являющихся регулярными, назовем спектром $\sigma(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$.

Теорема 1. Во множестве обобщенных комплексных чисел C, спектр всякого обобщенного оператора непуст.

Пусть последовательность операторов (A_n) сходится по норме к оператору A, $A_n, A \in \mathcal{L}(X)$. Рассмотрим $\tilde{A}=[(A_n)]$. Оказывается, справедливы следующие вложения: $\rho(\tilde{A})\cap C \supseteq \rho(A)$ и, следовательно, $\sigma(\tilde{A})\cap C \subseteq \sigma(A)$. В частности, если $(A_n-A) \in N(A)$, то $\sigma(\tilde{A})\cap C=\sigma(A)$.

В общем случае справедлива следующая

Теорема 2. Спектр $\sigma(A)$ оператора A содержит множество тех $\lambda\in C$, для которых найдется последовательность (λ_n), сходящаяся к λ и являющаяся представителем некоторого спектрального значения $\tilde{\lambda}$ обобщенного оператора $\tilde{A}$, то есть

$\sigma(A)\supseteq \{ \lambda \in C: \exists\ (\lambda_n) \in \tilde{\lambda} \in \sigma(\tilde{A})$, такая, что $\lim\lambda_n=\lambda\}$.

Теорема 3. Если A_n, A - самосопряженные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве H, $A_n\to A$ по норме, то $\sigma(A)= \{ \lambda \in C: \exists\ (\lambda_n) \in \tilde{\lambda} \in \sigma(\tilde{A})$, такая, что $\lambda= \lim \lambda_n\}$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Докл. АН СССР, т.318, № 2, стр.267-270

УДК 517.9 Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург)

ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ВЕКТОРА ЗАДАЧИ КОШИ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С МНОГОЧАСТОТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

При математическом моделировании электромеханических систем рассматривается линейная стационарная краевая задача

$$\frac{d}{dt}\binom{x}{y} = A\binom{x}{y} + f(t) \qquad (1)$$

с распадающимися граничными условиями

$$x(0) = p, \qquad y(1) = q \qquad (2)$$

и многочастотной периодической неоднородностью

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \left(a_j \cos(2\pi\omega_j t) + b_j \sin(2\pi\omega_j t)\right), \qquad (3)$$

где $t \in [0,1]$, $p, x \in R^k$, $q, y \in R^m$, $a_j, b_j \in R^n$, $n = k+m$, ω_j, k, j, m, n, s – натуральные, A – $n \times n$-матрица.

Теорема 1. Если мнимое число $2\pi\omega_j i$ при $j = 1, 2, \ldots, s$, не является собственным числом матрицы A, то решение краевой задачи (1), (2) с неоднородностью (3) совпадает с тем решением уравнения (1), которое удовлетворяет следующим начальным условиям задачи Коши

$$x(0) = p,$$

$$y(0) = v + (\exp(A)[k+1:n, k+1:n])^{-1}(q - v - (\exp(A)[k+1:n, 1:k])(p-u)), \qquad (4)$$

где

$$\binom{u}{v} = -\sum_{j=1}^{s} (A^2 + (2\pi\omega_j)^2 E)^{-1}(2\pi\omega_j b_j + A a_j), \qquad (5)$$

$u \in R^k$, $v \in R^m$, E – единичная $n \times n$ -матрица.

Вырезки из экспоненциальной матрицы в формуле (4) вычисляются точными численными методами решения некоторых задач Коши с однородным уравнением (1).

Теорема 2. Если матрица A не имеет кратных $2\pi i$ мнимых собственных чисел, то существует единственное удовлетворяющее граничным условиям $x(0) = x(1)$, $y(0) = y(1)$ решение уравнения (1). Начальное значение этого периодического решения при $t = 0$ определяется формулой (5).

УДК 517.95

Гусейнов Р.В.
(Баку)

О решениях квазиэллиптических уравнений в слое удовлетворяющих условию Неймана на некомпактной части границы.

Рассматривается в $K\setminus\Pi_1$, $K=\{x: x\in R^n;\ 0<x_n<1\}$, $\Pi_h=\{x: |x_i|<h^{\rho_i^{-1}},\ i=1,\dots,n-1,\ 0<x_n<1\}$, $\rho_i\geq 1$ целые, $h\geq 1$, уравнение

$$\sum_{(\alpha,\lambda)=1,(\beta,\lambda)=1} \mathcal{D}^\alpha a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^\beta u=0,\quad \lambda=(\rho_1^{-1},\dots,\rho_n^{-1}) \qquad (\mathrm{I})$$

где $\mu_2\sum_{\alpha\in\eta}|\xi_\alpha|^2\leq\sum_{(\alpha,\lambda)=1,(\beta,\lambda)=1} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\leq\mu_1\sum_{\alpha\in\eta}|\xi_\alpha|^2$.

η – некоторое множество мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ таких, что $(\alpha,\lambda)=1$ и содержит все векторы вида $(0,\dots,0,\rho_i,0,\dots,0)$.

Доказывается, что если $u(x)$ является решением (I), удовлетворяющим однородному условию Неймана на $\partial K\setminus\Pi_1$, то

$$\int_{K\setminus\Pi_h}\sum_{(\alpha,\lambda)=1,(\beta,\lambda)=1} a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^\beta u\,\mathcal{D}^\alpha u\,dx\leq c\,h^{-\gamma},$$

где $\gamma=const>0$, C от u_0 и h не зависит. При этом используется одно обобщение неравенства Пуанкаре на случай анизотропных пространств.

УДК 517.988.68

Данилин А.Р. (Екатеринбург)

О РЕГУЛИРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ОГРАНИЧЕНИЙ.

Для нахождения приближенного решение задачи оптимального управления.

$\min J(u(\cdot))$

$$J(u(\cdot)):=g(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt + \max_{t_0\leq t\leq t_1}\gamma(x(t))$$

$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u)$, $t\in[t_0,t_1]\subset T$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$

$u(t)\in\Omega(t,x(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$ (1)

$x(t_0)\in X_0(t_0)$, $x(t_1)\in X_1(t_1)$

$h_1(x(t))\geq 0,\dots,h_r(x(t))\geq 0$ при $t\in[t_0,t_1]$,

с возмущенными ограничениями $X_{0,\delta}(\cdot)$, $X_{1,\delta}(\cdot)$, $h_{1,\delta}(\cdot),\dots,h_{r,\delta}(\cdot)$, такими что $\max_{t\in T} d(X_k(t),X_{k,\delta}(t))\leq\delta$, $\max_x\|h_j(x)-h_{j,\delta}(x)\|\leq\delta$, $k=0,1$, $j=1,\dots,r$, ($d(\cdot,\cdot)$ - метрика Хаусдорфа), рассматривается задача оптимального управления, отличающаяся от (1) лишь ограничениями на траекторию: $x(t_k)\in X_{k,\delta}(t_k)+\delta\cdot S$, $h_{j,\delta}(x(t))+\delta\geq 0$ $k=1,2$ $j=1,2,\dots r$, S - шар с центром в нуле и радиусом 1.

При известных условиях [1] показано, что новая задача регуляризирует задачу (1) по функционалу.

Рассмотрены вопросы оптимальности данного метода регуляризации.

Литература.

1. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления - М.:Наука,1972.-576 с.

УДК 518.9 Данилов Н.Н. (Кемерово)

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ε - β -ЯДРА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРЕ НА БЫСТРОДЕЙСТВИЕ

Рассматривается динамическая система со многими управлениями на отрезке времени

$$\Sigma = ([t_0, T], X, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n, \varkappa) \qquad (1)$$

множество состояний которой X являются метрическим пространством, $\mathcal{D}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ - множества допустимых управлений, $\varkappa: [t_0,T] \times \times [t_0,T] \times X \times \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n \to X$ - функция состояния.

В пространстве позиций $[t_0,T] \times X$ заданы замкнутые целевые множества $M_1,\ldots,M_n$. Каждой траектории $x(\cdot)$ системы (1) поставлены в соответствие числа

$$\tau_{M_i}(x(\cdot)) = \min \{t \in [t_0,T] \mid (t, x(t)) \in M_i\} \cup \{T\},$$
$$i=1,\ldots,n.$$

Совокупность элементов

$$\langle \Sigma, \{\mathcal{D}_R^{SE}\}_{R \subseteq N}, \{H^i_{t_0,x_0}\}_{i \in N} \rangle \qquad (2)$$

называется динамической игрой на быстродействие в классе E-суперстратегий $\mathcal{D}_R^{SE}$, в которой выигрыши игроков имеют вид:

$$H^i_{t_0,x_0}(x(\cdot)) = \tau_{M_i}(x(\cdot)), \quad i=1,\ldots,n.$$

Вводится понятие ε - β -ядра игры (2), определяемого на основе угроз в классе E-суперстратегий. Предлагаемое решение игры отражает устойчивость ситуации против коллективного отклонения от нее.

Найдено достаточное условие существования ε - β -ядра.

УДК 517.968 Дербенёв В.А., Цалюк З.Б. (Краснодар)

СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Предлагается новый метод исследования допустимости пар пространств для дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

В качестве примера рассмтрим интегральное и интегро-дифференциальное уравнения Вольтерра вида

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)\,x(s)\,ds + f(t), \tag{I}$$

$$x'(t) = A\,x(t) + \int_0^t B(t-s)\,x(s)\,ds + f(t), \tag{2}$$

где функции $K(t)$, $B(t)$, $f(t)$ определены и непрерывны при $t \geq 0$, $A = const$.

Обозначим через $r(t)$ и $R(t)$ резольвенты уравнений (I) и (2) соответственно. Пусть уравнения $\hat{K}(z) = 1$ и $A + \hat{B}(z) = z$ ($\hat{K}(z)$ - преобразование Лапласа функции $K(t)$) в области $Re\, z \geq 0$ имеют конечное число корней λ_i кратности n_i соответственно. Тогда, если $t^{m+p} K \in L_1$, $m \geq 0$ - целое, $p = \max\limits_{Re\,\lambda_i = 0} \{n_i\}$, то $r(t) = P(t) + W(t) + (P * Q)(t)$,

где $t^m P \in L_1$, $W(t) = \sum\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n_i} c_{ij}\, t^{j-1} e^{\lambda_i t}$,

$$Q(t) = \sum_{i,\, Re\,\lambda_i = 0} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\, t^{j-1} e^{\lambda_i t}.$$

Аналогично, если $t^{m+p} B \in L_1$, то $R(t) = (P * Q)(t) + W(t)$.

УДК 517.956

Т.Д.Джураев, Ж.О.Тахиров (Ташкент)

ДВУХФАЗНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Распространение фронта фазового перехода в среде, обладающей релаксационным свойством, описывается задачей Стефана для гиперболического уравнения. Требуется найти функции $u_i(x,t)$ $v_i(x,t)$, $i=1,2$, $s(t)$ такие, что непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена при $t \geqslant 0$, $s(0)=s_0$ $|\dot{s}(t)| < \min\left\{\inf\limits_{-\infty<x,y<\infty}[a_1(x,t),a_2(y,t)]\right\}$, функции u_i, v_i – удовлетворяют следующим системам уравнений и условиям

$$\left.\begin{aligned} u_{1t}+a_1(x,t)v_{1x}+b_1(x,t)u_1=0\\ v_{1t}+a_1(x,t)u_{1x}+b_1(x,t)v_1=0\end{aligned}\right\},\ -\infty<x<s(t),\ t>0,$$

$$u_1(x,0)=\varphi_1(x),\ v_1(x,0)=\varphi_2(x),\ -\infty<x\leq s_0,$$

$$v_1(s(t),t)=\psi(t),\ t\geqslant 0,$$

$$\left.\begin{aligned} u_{2t}+a_2(x,t)v_{2x}+b_2(x,t)u_2=0\\ v_{2t}+a_2(x,t)u_{2x}+b_2(x,t)v_2=0\end{aligned}\right\},\ s(t)<x<\infty,\ t>0,$$

$$u_2(x,0)=\varphi_3(x),\ v_2(x,0)=\varphi_4(x),\ s_0\leq x<\infty,$$

$$v_2(s(t),t)=\psi(t),\ t\geqslant 0,$$

$$\alpha(t)\dot{s}(t)=u_1(s(t),t)-u_2(s(t),t),\ t\geqslant 0.$$

Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи. Изучено поведение неизвестной границы при ограниченных значениях t. Исследованы задачи и в ограниченных областях.

УДК 517.9 Дмитриев М.Г., Ни Минь Кань (Переславль)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ, БЛИЗКОЙ К ВЫРОЖДЕННОЙ И КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Рассматривается вопрос построения асимптотики решения следующей вариационной задачи

$$I_\varepsilon(u) = \int_0^T [a(x,t) + B'(x,t)u + \frac{\varepsilon^2}{2} u'u]dt \to \min_u$$

$$\dot{x} = u, \quad x \in R^n, \; u \in R^n,$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \quad x(T,\varepsilon) = x^T$$

где $\varepsilon > 0$ -малый параметр.

Необходимые условия минимума содержат сингулярно возмущенную краевую задачу для уравнений Эйлера

$$\varepsilon^2 \ddot{x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \quad x(T,\varepsilon) = x^T,$$

где $P(x,t) = -a(x,t) + \varphi_t$, $\varphi_x = B$ (здесь используются для удобства записи функции из формализма В.Ф.Кротова).

Анализ на фазовой плоскости показывает возможность сосуществования в траекториях следующих структур:
1) решение без внутренних переходных слоев;
2) решение с внутренними переходными слоями с седла на седло по "мосту" в виде сепаратрисы (точки максимума функции $P(x,t)$ являются точками покоя типа седла в соответствующих присоединенных системах, вследствие выполнения усиленного условия Лежандра);
3) решение с внутренними слоями типа всплеска, порождающееся петлей сепаратрисы.

Доказывается, что первое решение связано с единственной точкой глобального максимума функции $P(x,t)$ (предполагаем непрерывность по t точки максимума). Второе решение - связано с глобальным максимумом функции $P(x,t)$ по x, причем точек глобального максимума должно быть не менее двух. Решение третьего типа порождается точками локального максимума функции.

Качественный анализ структуры траекторий позволяет постулировать форму асимптотического разложения метода пограничных функций, который затем применяется для построения асимптотики решения исходной вариационной задачи на основе прямой схемы - разложении условий вариационной задачи в постулируемый ряд и последовательном решении вариационных задач каждого приближения.

И.А. Дободейч (Воронеж)

ОБ ИНТЕГРАЛЕ БЕРНУЛЛИ И ЗАМЫКАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1. Если градиент объемной силы, действующей на невязкую сжимаемую жидкость (н.с.ж.) равен

$$F_x = -g\frac{\partial(\rho H)}{\partial X} \quad (1)$$

то одномерное течение н.с.ж. писывается следующими уравнениями [1, 2]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

$$\rho\frac{\partial W}{\partial t} + \rho W\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial(P+\rho g H)}{\partial X} = 0 \quad (3)$$

где ρ, P, W, g - плотность, давление, скорость, ускорение свободного падения; H, X - координаты положения относительно горизонта и вдоль линии тока н.с.ж.

Уравнение (3) с учетом (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \frac{\partial(P+\rho W^2+\rho g H)}{\partial X} = 0 \quad (4)$$

Т.е. при стационарном по расходу течении н.с.ж. неизменен вдоль X следующий трехчлен

$$P + \rho W^2 + \rho g H = C_1 \;, C_1 = Const \quad (5)$$

а при отсутствии сжимаемости жидкости имеет место дополнительно

$$\rho W^2 = Const$$

2. Для замыкания системы (2) и (3) нельзя использовать уравнение состояния н.с.ж. (например, для газа с показателем адиабаты - К), т.к. в противном случае получим из (3) для стационарного течения невязкого газа при $F_x = 0$ выражение

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \left(\frac{k-1}{k+1}\right)\frac{C_1}{P_0}\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{k}} = Const$$

противоречащее равенству (5).

Таким образом, функция давления в интеграле Бернулли [1,2] для н.с.ж. зависит от скорости движения н.с.ж. и некорректными являются выражения газодинамических функций типа [2]

$$P/P_0 = \left(1 - \frac{k-1}{2k\cdot P_0}\rho_0 W^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1988,
2. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика.-М.:Наука,1991,ч.1.

УДК 517.929 Долгий Ю.Ф. (Екатеринбург)

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается линейное периодическое дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, x(t-\tau(t)), \tag{1}$$

где A и B - вещественные $n\times n$ - матрицы, периодические с периодом ω ($\omega>0$); элементы матрицы A суммируемы на отрезке $[0,\omega]$, а элементы матрицы матрицы B суммируемы с квадратом на этом отрезке; запаздывание τ - положительная ω - периодическая функция, абсолютно непрерывная на отрезке $[0,\omega]$, на этом отрезке производная функции τ ограниченна в существенном и удовлетворяет условию $\operatorname{vrai\,sup}\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} \dot{\tau}(t) < 1$.

Если число вращения гомеоморфизма, порождаемого функцией $h(t) = t-\tau(t)$, $t\in R$, рационально соизмеримо с периодом, то существуют натуральные числа q и m, а также такое число t_0, $0\leqslant t_0<\omega$, что $h^{(q)}(t_0+m\omega) = t_0$. Здесь последовательные итерации функции h определяются формулами: $h^{(j)}(t) = h(h^{(j-1)}(t))$, $j\geqslant 1$, $h^{(0)}(t)=t$, $t\in R$.

При построении оператора монодромии U в качестве начального момента выберем число t_0. Тогда не нулевые собственные числа ρ степени U^m оператора монодромии определяются из краевой задачи

$$\dot{x}_j(\theta) = A(h^{(j-1)}(\theta))\, x_j(\theta) + B(h^{(j-1)}(\theta))\, x_{j+1}(\theta),$$
$$x_j(h(t_0)) = x_{j+1}(t_0), \qquad 1\leqslant j<q, \tag{2}$$

$$\dot{x}_q(\theta) = A(h^{(q-1)}(\theta))\, x_q(\theta) + \rho^{-1} B(h^{(q-1)}(\theta))\, x_1(h^{(q)}(m\omega+\theta)),$$
$$x_q(h(t_0)) = \rho^{-1} x_1(t_0), \tag{3}$$

для системы функционально-дифференциальных уравнений.

Изучение краевой задачи (2-3) позволило получить достаточные условия асимптотической устойчивости.

УДК 517.9 Дубровский Б.В., Печенцов А.С. (Москва)

СЛЕДЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В сепарабельном гильбертовом пространстве H действует дискретный полуограниченный снизу оператор T. Пусть $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ - спектр оператора T, занумерованный в порядке возрастания величин собственных значений с учетом кратности, а $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ - последовательность собственных ортонормированных векторов оператора T, при этом $Tv_n = \lambda_n v_n$. Пусть P - ограниченный оператор в H, $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ - последовательность с. з. оператора $T + P$, занумерованная в порядке возрастания их действительных частей, с учетом алгебраической кратности. Предполагаем, что с. з. λ_n, $n = 1,2,\ldots$ имеют следующую асимптотику: $\lambda_n = C_0 n^{\alpha} + o(n^{\beta})$, где $1 < \beta \le \alpha < \beta + 1$ и постоянная $C_0 > 0$. Справедлива *теорема:* $\forall\, l \in \mathbb{N}$ $\exists$ подпоследовательность $(n_m)_{m=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что при $l > \frac{1}{\alpha-1}\max(\alpha l + \beta - \alpha,\ \alpha l - \beta + \alpha - 1 + \frac{\beta}{l})$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n_m}(\mu_i^l-\lambda_i^l-((T + P)^l-T^l)v_i,v_i)) -\alpha_2^l(n_m)-\ldots-\alpha_{l-1}^l(n_m)\Big) = 0,$$

где $\alpha_s^l(n_m)$ - s-ая поправка теории возмущений.

Следствие. При $l = 2$, $\alpha > (\beta + 3)/2$ и $\beta > 3$ имеем равенство:

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n_m}(\mu_i^2-\lambda_i^2-((T + P)^2-T^2)v_i,v_i)) -\alpha_2^2(n_m)\Big) = 0.$$

Пример. Пусть T - гладкий равномерно эллиптический самосопряженный оператор T порядка m, P - оператор умножения на гладкую функцию заданные в гладком n-мерном многообразии M. Для таких операторов при $m > n$ и $l > \frac{1}{m-n}\max(ml - 1,\ ml - n + 1 + \frac{m-1}{l})$ имеет место доказанная теорема.

УДК 519.853 Дудов С.И.(Саратов)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ

Функция расстояния (ФР) от точки до множества

$$\rho(x)=\min_{y\in\Omega} n(x-y),$$

где Ω – замкнутое множество из R^p, а $n(\cdot)$ – функция, удовлетворяющая аксиомам нормы, являясь геометрически наглядным объектом, служит инструментом исследований в различных областях математики. Доклад будет посвящен следующим вопросам: оценки нижней и верхней производной Дини по направлениям; необходимые и достаточные условия дифференцируемости по направлениям, субдифференцируемости, супердифференцируемости ФР (в терминологии /I/); восстановление ФР, обладающей заданной дифференциальной характеристикой в точке; критерии для функции, являющейся верхней выпуклой или нижней вогнутой аппроксимацией для ФР (/2/). Приведем два факта, не требующих объемных обозначений.

Т е о р е м а I. Для того, чтобы ФР была субдифференцируема в точке $x\in\Omega$ необходимо и достаточно, чтобы множество Ω, норма $n(\cdot)$ и некоторый выпуклый компакт $\partial\rho(x)$ удовлетворяли соотношениям

$$\partial\rho(x)=K(\partial\rho(x))\cap\partial n(0),\quad \Gamma(x,\Omega)=K(x,\Omega)=-K^{+}(\partial\rho(x)).$$

Здесь $\partial f(x)$ – субдифференциал функции $f(\cdot)$ в точке x, $\Gamma(x,\Omega)$ – конус Булигана, а $K(x,\Omega)$ – конус касательных направлений множества Ω в точке x, $K(A)=\{v=\lambda a/\forall\lambda\geq 0, a\in A\}$.

Т е о р е м а 2. Пусть $K(x,\Omega)=\Gamma(x,\Omega)=\bigcup_{t\in T}K_t$, где T – некоторый компакт из R^p и для каждого t множество K_t является выпуклым замкнутым конусом. Для того, чтобы функция $h(x,g)=\max_{v\in\partial\rho(x)}(v,g)$ была верхней выпуклой аппроксимацией ФР в точке $x\in\Omega$, а выпуклый компакт $\partial\rho(x)$ ее субдифференциалом необходимо и достаточно, чтобы для любого селектора $a(t)$ многозначного отображения $A(t)=\partial n(0)\cap -K_t^{+}$ выполнялось соотношение

$$\partial\rho(x)\cap\overline{\mathrm{co}}\{a(t)/t\in T\}\neq\emptyset.$$

Литература

I. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.; Наука, I990. – 43I с.

2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, I980. – 320 с.

УДК 517.977 Дымков М.П. (Минск)

ЛИНЕЙНЫЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Пусть E, V - унитарные конечномерные пространства, W_E - пространство целых функций экспоненциального типа конечной степени со значениями в E таких, что $\int_R \|f(s)\|^2 ds < \infty$. Аналогично определяется пространство W_V.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \sum_{t\in Z_+} \int_R \Big[(Rx(t,s), \overline{x(t,s)})_E + (Nu(t,s), \overline{u(t,s)})_V\Big] ds \quad (1)$$

на решениях системы уравнений

$$x(t+1,s) = Ax(t,s) + D\partial x(t,s)/\partial s + Bu(t,s), \; x(0,s)=\varphi(s), \quad (2)$$
$$s\in R, \; t\in Z_+.$$

Здесь A, D, R - линейные операторы из E в E, B - из V в E, N - из V в V, причем оператор R (оператор N) эрмитов и неотрицательно (положительно) определенный, $\|A\| + \|D\| < 1$, Z_+ - множество неотрицательных целых чисел. Допустимыми управлениями в (1) будем считать функции из $\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ - выпуклое замкнутое множество из $l^2(W_E)$. Здесь $l^2(W_E)$ обозначает гильбертово пространство суммируемых с квадратом последовательностей элементов из W_E. Решением системы уравнений (2) при заданных начальном условии и допустимом управлении назовем любую функцию из $l^2(W_E)$, удовлетворяющую равенству (2) при всех $(t,s) \in Z_+\times R$.

Имеет место следующее утверждение. Для того, чтобы допустимое управление $u^0(t,z)$, $t\in Z_+$, $z\in O$, было оптимальным в (1),(2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$Re\Big[\sum_{t\in Z_+} \int_R (B^* y^0(t,s) + (Nu^0(t,s), \overline{v(t,s)})_E \, ds\Big] \le$$

$$Re\Big[\sum_{t\in Z_+} \int_R (B^* y^0(t,s) + (Nu^0(t,s), \overline{u^0(t,s)})_E \, ds\Big] \text{ для всех } v\in\mathcal{U}.$$

Здесь $y^0(t,s)$ - решение сопряженной системы уравнений

$$y(t,s) = A^* y(t+1,s) - D^* \partial y(t+1,s)/\partial s + Rx^0(t,s), \; t\in Z_+, \; s\in R,$$

где $x^0(t,s)$-решение системы (2),соответствующее управлению $u^0(t,s)$.

УДК 519.833.2 Жуковский В.И., Молоствов В.С. (Москва)

БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В докладе рассматривается развитие исследований [1 - 3].

Бескоалиционной игрой при неопределенности будем называть систему $\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$, где $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ – множество игроков, стратегии i-го игрока $x_i \in X_i \in \mathrm{comp}\, \mathbb{R}^{n_i}$; о неопределенностях (помехах, возмущениях, ошибках измерений и т.п.) известны лишь границы изменений: $y \in Y \in \mathrm{comp}\, \mathbb{R}^m$; (максимизируемая) функция выигрыша i-го игрока $f_i(x,y)$ непрерывна на $X \times Y$, где ситуации $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Обозначения: для векторов $f' = (f_1', \ldots, f_N')$, $f'' = (f_1'', \ldots, f_N'')$
$f' > f'' \Leftrightarrow (f_i' > f_i'',\ i \in \mathbb{N})$, $f' \not> f'' \Leftrightarrow \neg(f' > f'')$;
$\bar{x}_i \| x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Набор $(x^*, y^*) \in X \times Y$ назовем ES-решением игры Γ (решением Нэша-Слейтера), если

$$f(x^*, y^*) \not> f(x^*, y),\ \forall y \in Y,$$
$$f_i(x_i \| x^*, y^*) \le f_i(x^*, y^*),\ \forall x_i \in X_i,\ i \in \mathbb{N}.$$

Множество ES-решений обозначим через Z. Установлена непустота и компактность Z для смешанного расширения игры Γ, неединственность и улучшаемость ES-решений, отсутствие для них внешней и внутренней устойчивости. Получены достаточные условия для ES-решений (модификация леммы Никайдо-Исодо).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор $(x^\circ, y^\circ) \in Z$ назовем неулучшаемым ES-решением игры Γ, если $f(x^*, y^*) \not> f(x^\circ, y^\circ)$, $\forall (x^*, y^*) \in Z$.

Доказано существование неулучшаемого ES решения для смешанного расширения игры Γ, компактность множества неулучшаемых ES решений и его инвариантность относительно аффинных преобразований. Дан алгоритм построения неулучшаемых ES-решений при $f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$.

Обсуждается возможность перенесения результатов на позиционные дифференциальные игры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vaissbord E.M., Zhukovskii V.I. Introduction to Multi-Player Differential Games and their Applications. - New-York: Gordon and Preach Science Publishers. 1988.
2. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. Vecor-Valued Maxmin. N.Y: Academic Press, 1993.
3. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности. М.: МНИИПУ, 1988.

Завгородний М. Г. (Воронеж)

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА КРАТНОСТИ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

В тезисах доклада [1] приведена верхняя оценка геометрической кратности собственного значения краевой задачи

$$(pu')' + qu = \lambda u, \qquad u|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{1}$$

заданной (см. [2]) на конечном связном геометрическом графе Γ, для случая, когда задача (1) моделирует собственные колебания растянутой сетки струн. Приведу еще одну верхнюю оценку, любезно сообщенную Ю. В. Покорным и О. М. Пенкиным: геометрическая кратность не превосходит суммы числа граничных вершин и удвоенного числа простых циклов графа Γ. Последняя оценка верна для произвольного графа Γ, однако в ряде случаев допускает уточнение.

В настоящем докладе обсуждается верхняя оценка геометрической кратности k собственного значения краевой задачи (1) точная в том смысле, что для любого графа Γ можно указать такое уравнение (1) (т. е. функции p и q), что упомянутая оценка достигается.

Пусть Γ - произвольный конечный связный геометрический граф (см. [2]); пусть m, j и n - число всех его ребер, внутренних и граничных вершин соответственно. Исключим из Γ все внутренние вершины, не лежащие ни на одном циклическом маршруте. Каждой полученной компоненте связности $\Gamma_s (s=\overline{1,l})$ поставим в соответствие число i_s: $i_s = 0$, если Γ_s имеет две и более граничные вершины; $i_s = 1$, если Γ_s имеет ровно одну граничную вершину, и $i_s = 2$, если у Γ_s граничных вершин нет. Положим $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_l$.

Теорема. *Геометрическая кратность k не превосходит числа $m - j + i$.*

Число простых циклов N равно $m - j - n + 1$. Таким образом, приведенная выше оценка $k \le n + 2N$ уточняется на величину $Q = N - i + 1$. Заметим, что $Q = 0$ лишь тогда, когда граф состоит из одного циклического маршрута. Во всех остальных случаях $Q > 0$ и может быть как угодно велико.

Проведенные исследования являются естественным развитием результатов Ю. В. Покорного и О. М. Пенкина.

Литература.

1. Завгородний М. Г.; Пенкин О. М. /Тез. докл. школы "Современные методы в теории краевых задач" //Воронеж, 1992. - С. 46.

2. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. // Дифференц. ур-я, 1989. - Т. 25, N 7. - С. 1141-1150.

УДК 517.98 Задорожний В.Г. (Воронеж)

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Обратная задача вариационного исчисления: Дано дифференциальное выражение φ. Найти функционал $\mathcal{J}$, для которого $\varphi=0$ является уравнением Эйлера.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy})$ трижды непрерывно дифференцируема, тогда для разрешимости обратной задачи вариационного исчисления необходимо и достаточно, чтобы φ было дифференциальным выражением Монжа-Ампера

$$\varphi = A(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) + B z_{xx} + C z_{xy} + \mathcal{D} z_{yy} + E$$

и функции $A, B, C, \mathcal{D}, E$ переменных x, y, z, z_x, z_y удовлетворяли условиям

$$B_{z_y} - A_y - A_z z_y - 0{,}5 C_{z_x} = 0, \quad \mathcal{D}_{z_x} - A_x - A_z z_x - 0{,}5 C_{z_y} = 0,$$

$$E_{z_x} - B_x - B_z z_x - 0{,}5 C_y - 0{,}5 C_z z_y = 0, \quad E_{z_y} - \mathcal{D}_y - \mathcal{D}_z z_y - 0{,}5 C_x - 0{,}5 C_z z_x = 0.$$

Если $A=0$, то функционал $\mathcal{J}$ имеет вид $\mathcal{J}(z) = \iint\limits_G F(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy$, где

$$F = \frac{1}{2}\iint\left(\int C_z\,dz - C\right)dz_x\,dz_y + \frac{1}{2}\iiint\left(-\int C_{z_x z}\,dz + C_{z_x}\right)dz_y\,dz_x\,dz_x +$$

$$+\frac{1}{2}\iiint\left(C_{z_y} - \int C_{z_y z}\,dz\right)dz_x\,dz_y\,dz_y + \iint\left(\int B_z\,dz - B\right)dz_x\,dz_x +$$

$$+\frac{1}{2}\iiint C_{x z_x}\,dz\,dz_y\,dz_x + \frac{1}{2}\iiint C_{z_y y}\,dz\,dz_x\,dz_y + \frac{1}{2} z_x \iiint C_{z_x z}\,dz_y\,dz_x\,dz +$$

$$+\frac{1}{2} z_y \iiint C_{z z_y}\,dz_x\,dz_y\,dz + \iint\left(\int \mathcal{D}_z\,dz - \mathcal{D}\right)dz_y\,dz_y + \iint \mathcal{D}_z z_y\,dz_y\,dz -$$

$$- z_y \iint \mathcal{D}_z\,dz_y\,dz + \iint B_z z_x\,dz_x\,dz - z_x \iint B_z\,dz_x\,dz +$$

$$+\int\left(E - \int E_{z_y}\,dz_y - \int E_{z_x}\,dz_x\right)dz.$$

В. С. Зарубин (Воронеж)

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОЦЕНКИ КОМПЕТЕНТНОСТИ ЭКСПЕРТОВ ВНЕВЕДОМСТВЕННОЙ ОХРАНЫ

В целях реализации концепции развития вневедомственной охраны МВД России ВВШ МВД РФ осуществляет разработку моделей специалистов этой отрасли, используя метод экспертных оценок. Эксперты должны однозначно понимать цели и задачи экспертизы и отвечать определенным требованиям. В работах отечественных и зарубежных авторов качество эксперта определяется компетентностью, заинтересованностью, деловитостью и объективностью. В качестве экспертов целесообразно привлечь наиболее опытных сотрудников подразделений вневедомственной охраны МВД России. Оценку качества экспертов решено определять документальным методом анкетных данных по пяти показателям: 1. стаж службы во вневедомственной охране; 2. занимаемая в настоящее время должность; 3. стаж работы в этой должности; 4. участие в совещаниях по линии ГУВО МВД РФ (количество раз); 5. участие в совещаниях областных УВО МВД РФ. При обработке анкет после вычисления обобщенного ранга анкетных вопросов производится нормировка ответов. Обобщенный ранг анкетных вопросов вычисляется следующим образом:

$$v_i = R_i / \sum_{i=1}^{n} R_i ,$$

где $$R_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}$$

Здесь в числителе - сумма рангов, проставленная i-му показателю всеми m экспертами, а в знаменателе - общая сумма рангов, проставленная m экспертами всем n показателям (r_{ij} - ранг, проставленный j-м экспертом i-му показателю). Нормировка ответов достигается следующим образом. Сначала производится округление ряда величин, например: стажа работы - до 5 лет, количества участий в совещаниях - до 10 раз. Нормировка стажа службы во вневедомственной охране производится путем деления стажа каждого эксперта на общий стаж всей группы. Аналогично нормируются ответы на 3, 4, 5 вопросы анкеты. При нормировке ответов на 2 вопрос составляется дробь вида: 1/количество одинаковых должностей в группе экспертов. Коэффициент анкетных данных эксперта вычисляется по формуле:

$$K_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_{ij} v_i ,$$

где $\bar{A}_{ij}$ - нормированный ответ j-го эксперта на i-й вопрос.

В. С. Зарубин, А. В. Сошин (Воронеж)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЭВМ В ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ В ВВШ МВД РФ

Многообразие направлений в служебной, технической, финансово-хозяйственной деятельности, специфика работы сотрудников в ночных условиях, рост числа корыстных преступлений требуют подготовки личного состава для работы в экстремальных ситуациях, совершенствования профессионального мастерства сотрудников вневедомственной охраны.

Воронежской высшей школой МВД РФ было проведено обследование качества подготовки выпускников школы путем анкетирования их руководителей в подразделениях вневедомственной охраны.

Анализу качества подготовки молодых специалистов подвергались два выпуска дневного и два выпуска заочного отделений из 87 регионов. Результаты анкетирования (467 анкеты) были обработаны на ПЭВМ с помощью электронных таблиц Supercalc и отображены в виде 92 гистограмм по основным направлениям подготовки: юридической, технической, организации службы охраны. Отображены были также некоторые личностные характеристики выпускников, распределение специалистов по занимаемым должностям и причинам увольнения (пример: рис. 1) Каждое направление профессиональной подготовки специалистов изучалось с помощью вопросов, раскрывающих глубину знаний, умений и навыков. Полученный аналитический материал позволил сформировать обратную связь на характеристики учебного процесса и заложил основу работ по созданию моделей специалистов вневедомственной охраны. При построении моделей специалистов охраны используется метод экспертных оценок, где в качестве экспертов привлечены наиболее опытные специалисты вневедомственной охраны МВД России. Для обработки результатов анкетирования экспертов применяется П Э В М IBM PC AT-286 с пакетом программ обработки статистических данных STATGRAPHICS.

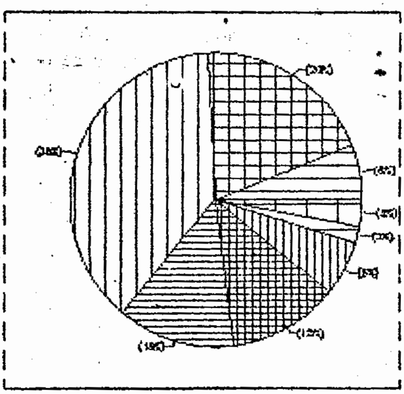


рис. 1

УДК 517.946

Засорин Ю.В.

О ПРИНЦИПЕ НЬЮТОНА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Суть классического принципа Ньютона состоит в том,что потенциал гра витационного поля,порождаемого однородным шаром ведет себя вне самого шара в точности так,как если бы вся масса шара была локализована в его центре. Автором показано,что принцип Ньютона может быть распространен и на случай волнового уравнения (вообще говоря,даже с анизотропным источником).

Теорема. Пусть $R^{n+1}=\{\vec{x}=(x;t): x\in R^n, t\in R\}$. Пусть,далее $U(\vec{x})$-решение следующей задачи:

(1) $\Box U(\vec{x}) \equiv (D_t^2-\Delta_x)U(\vec{x})=f(\vec{x}),\ x\in R^n; t>0;$

(2) $U/_{t=0} = U_t/_{t=0} = 0$;

причем $supp(f)\subset\{\vec{x}: |x|\leq 1, t\geq 0\}$.

Тогда существует аналитический функционал $F\in Z'(R^{n+1})$ с носителем на прямой $\{\vec{x} : x=0\}$ такой,что задача

(3) $\Box w(\vec{x})= F(\vec{x}),\quad \vec{x}\in R^{n+1}$;

(4) $w(\vec{x}) = o(1),\quad |x|\to+\infty$;

корректно разрешима в классе $Z'(R^{n+1})$,причем:

(5) $w(\vec{x})\equiv U(\vec{x}),\quad |x|>1,\ t>0$.

Получены также явные формулы,позволяющие строить по источнику f сингулярный источник F .Также показано,что если,на самом деле, $f=f_0(|x|,t)$,то сингулярный источник F имеет весьма простой вид:

(6) $$F(\vec{x})=g(t)\otimes\delta(x),$$

где функция $g(\cdot)$ строится в явном виде по функции (распределению) $f_0(\cdot,\cdot)$.

УДК 517.94 Захаров В.Н. (Самара)

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ РИМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА В n-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В настоящей работе получено обобщение одной функции Римана для одного уравнения n-го порядка в n-мерном евклидовом пространстве [I]. Для уравнения

$$u_{x_1 \dots x_n} + \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)\, u_{x_1 \dots x_k} = 0, \quad n > k \geq 0$$

получена функция Римана в следующем виде:

$$R(x_1, \dots x_n; x_{10}, \dots x_{n0}) = {}_0F_{n-k-1}(1, \dots 1; \sigma), \quad \sigma = -\prod_{i=1}^{k} f_i(x_i) \prod_{i=k+1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i0}} f_i(t)\,dt$$

Заметим, что при $k = n-1$ получена более общая формула. Для уравнения

$$u_{x_1 \dots x_n} + a(x_1, \dots x_n)\, u_{x_1 \dots x_{n-1}} = 0$$

функция Римана имеет вид:

$$R(x_1, \dots x_n; x_{10}, \dots x_{n0}) = \exp\left[-\int_{x_n}^{x_{n0}} a(x_1, \dots x_{n-1}, t)\,dt\right]$$

При $n = 4$, $k = 2$ обоснованы существование и единственность решения задачи Гурса с заданием искомого решения на четырех характеристических плоскостях, являющихся гранями четырехмерного параллелепипеда.

I. Быстрова О.К. Построение функции Римана для одного уравнения n-го порядка// Тезисы докладов Международной конференции. Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции. Самара. 24-31 мая 1992 г. Самара. С. 44.

УДК 517.948

Звягин В.Г. (Воронеж)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

В докладе излагается метод исследования разрешимости указанных в названии тезисов задач, основанный на теории f-уплотняющих возмущений фредгольмовых отображений (см. [I]).

Итак, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,D_x u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) - a(x,t,u,D_x u) = \int_0^t \psi(t,s)\, b(x,s,u(x,s),D_x u(x,s),D_x^2 u(x,s),\frac{\partial u}{\partial t}(x,s))\,ds\,,\quad (x,t)\in Q_T \qquad (I)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\,,\ x\in\Omega\,,\quad u(x,t) = \Phi(x,t)\,,\quad x\in\partial\Omega,\ t\in[0,1]\,. \qquad (2)$$

Предполагается выполненными условие равномерной параболичности / условие I / и условие липшицивости функции $b(x,t,u,p_x,p_{xx},p_t)$ по переменным p_{xx} и p_t / условие 2 /. Задача (I)-(2) исследуется в пространстве $W_p^{2,1}(Q_T)$, $p>n+1$.

Задача (I)-(2) эквивалентна операторному уравнению

$$f(u) - g(u) = 0\,,\quad u\in W_p^{2,1}(Q_T)\,,$$

где

$$f(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\cdot,\cdot,u,D_x u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - a(\cdot,\cdot,u,D_x u),\ u|_{t=0},\ u|_{S_T}\right),$$

$$g(u) = \left(\int_0^t \psi(t,s)\, b(\cdot,\cdot,u,D_x u,D_x^2 u,\frac{\partial u}{\partial t})\,ds,\ \varphi(\cdot),\ \Phi(\cdot,\cdot)\right).$$

В основе подхода лежит следующее утверждение

Теорема. Пусть D -ограниченная замкнутая область пространства $W_p^{2,1}(Q_T)$, $p>n+1$. Предположим, что выполнены условия I и 2. Тогда отображение g является f-уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского.

I. Звягин В.Г. К теории обобщенно уплотняющих возмущений непрерывных отображений // Топологические и геометрические методы в математической физике: Новое в глобальном анализе.- Воронеж, 1983. - с.42-62.

УДК 517.977

Зеликин М.И. /Москва/

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП ЛИ

Для построения синтеза оптимальных траекторий в пространствах высокой размерности для задач, обладающих групповой симметрией, предлагается метод понижения размерности, использующий технику теории представлений групп и алгебр Ли. Линейные по управлению задачи допускают сведение к следующей форме

$$\int\limits_{x(\cdot)} \omega \to \min$$

при условиях $\dot{x}(t) \in K(x(t))$ п.в. $t \in [0,1]$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = b.$$

Здесь фазовое пространство X – гладкое n-мерное многообразие; ω – дифференциальная форма первого порядка на X; $K(x)$ конус, заданный в каждой точке $x \in X$ и лежащий в касательной плоскости многообразия X. Предполагается, что группа Ли G действует на X, сохраняя форму ω и поле конусов $K(x)$. Введено понятие вполне экстремального многообразия, синтез оптимальных траекторий которого порождает /при действии группы G/ оптимальный синтез на всем X. Приведены достаточные условия и методы построения вполне экстремальных многообразий. Найдены вполне экстремальные многообразия для задач, сводящихся к стандартным представлениям ортогональной, унитарной и симплектической группы, а также к присоединенному представлению полупростой группы Ли.

УДК 517.911.5 + 977. Зеликина Л.Ф. /Москва/

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

С момента создания принципа максимума Понтрягина теория оптимального управления и математическая экономика тесно переплелись между собой, взаимно дополняя и обогощая друг друга. Принцип максимума Понтрягина открыл принципиально новые пути и методы исследования задач экономической динамики, математическая же экономика является источникс новых задач и постановок в теории оптимального управления. Именно математическая экономика дала богатый класс нелинейных задач оптимального управления, для которых удалось с помощью принципа максимума Понтрягина полностью построить синтез оптимальных траекторий в фазовом пространстве высокой размерности, содержащий такие нетривиальные объекты как стратифицированные универсальные многообразия особых траекторий /являющиеся в терминах математической экономики "магистральными многообразиями"/, области стагнации, деградации и другие объекты, имеющие естественную экономическую интерпретацию. Перечисленные объекты возникают, в частности, в следующих задачах математической экономики.

I. Задача оптимального распределения ресурсов.

$$T \to \inf,$$
$$\dot{x} = u\,Q(x), \quad x \in S \subset R^n_+, \quad x(T) \in B \subset S, \tag{I}$$
$$u \in U = \{u : u_i \geq 0, \ \textstyle\sum_1^n u_i = 1\},$$

где x – фазовые переменные, u – управляющий параметр, S – открытое связное подмножество R^n, $Q(x)$ – производственная функция

2. Задача оптимального распределения ресу сов в моделях, учитывающих уровень технологических достижений в различных отраслях, а также амортизационные отчисления налоги и дотации.

В этом случае уравнения модели имеют вид

$$\dot{x}_i = u_i Q_i(x) - f_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Все остальные ограничения такие же как в задаче (I).

Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = dt = \sum_1^n R_i dx_i$, в которой $R_i = [Q_i(1 - \sum_1^n f_k/Q_k)]^{-1}$. Пусть форма ω вполне интегрируема. /Для задачи (I) форма ω всегда вполне интегрируема/.

В этом случае для задачи (2) построен синтез оптимальных траекторий. Приводится экономическая интерпретация полученных математических результатов.

УДК 539.3

А.И.Землянухин, Л.И.Могилевич
(Саратов)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Исследуется процесс распространения нелинейных продольных волн в цилиндрической оболочке. Используются уравнения геометрически нелинейной теории пологих оболочек типа Тимошенко. Эти уравнения содержат два малых параметра, один из которых характеризует нелинейность волнового процесса, а второй-движения, нормальные к срединной поверхности оболочки, то есть дисперсию. Предполагается, что эффекты нелинейности и дисперсии компенсируют друг друга.

Задача решается методом многих масштабов, путем введения новых независимых переменных, а так же разложения зависимых переменных по степеням малого параметра. Считается, что возмущение распространяется с постоянной скоростью вдоль образующей, медленно эволюционирует в окружном направлении и медленно меняет свои параметры во времени.

В работе показано, что компонента продольной деформации U_ξ удовлетворяет уравнению Кадомцева-Петвиашвили:

$$(U_{\xi\tau} + \alpha U_\xi U_{\xi\xi} + \beta U_{\xi\xi\xi\xi})_\xi = \gamma U_{\xi\eta\eta} .$$

В пространственно-одномерном случае для деформации U_ξ получено уравнение Кортевега де Вриза:

$$U_{\xi\tau} + \alpha U_\xi U_{\xi\xi} + \beta U_{\xi\xi\xi\xi} = 0 ,$$

где коэффициенты α, β, γ зависят от физико-геометрических параметров оболочки. Таким образом, показано, что в цилиндрических оболочках существуют как одномерные, так и двумерные солитоны.

УДК 519.21 + 517 Зорин В.А., Морозов С.Ф. (Н.Новгород)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается метод построения вероятностного представления решений линейных дифференциальных уравнений, основанный на использовании интегральных функционалов от неоднородных пуассоновских процессов. Решение уравнений строится в виде математического ожидания функций от названных выше функционалов с использованием правил дифференцирования рассматриваемого математического ожидания. Рассматриваемый метод является развитием результатов М.Каца, Д.Кисинского.

Метод иллюстрируется примерами телеграфного уравнения с переменными коэффициентами и линейного дифференциального уравнения второго порядка в обыкновенных производных с переменными коэффициентами. Полученное представление решений уравнений позволяет получать асимптотические приближения, строить алгоритмы численного решения уравнений методом Монте-Карло.

УДК 517.983 Зубов В.М. (Новополоцк)

ПРОБЛЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА

Пусть известны элементы x_0 , f_0 из векторных пространств со слабыми топологиями. Поставим задачу описания совокупности операторов a , таких, что $a x_0 = f_0$. Представляет интерес и восстановление операторов a с заданными свойствами. Эта задача, названная задачей восстановления оператора, рассматривалась, например, в [1,2] . Исходным утверждением в построении теории такой задачи является лемма, где через a^+ обозначен обобщённый обратный оператор [3] для a , $R(a)$ - область значений a .

ЛЕММА. Пусть $x_0 \in X$, $f_0 \in F$, X , F - векторные пространства, линейный оператор $a_0 : X \to F$ удовлетворяет условию $a_0 x_0 = f_0$. Если проекторы определены равенствами $P_{R(a_0)} = a_0 a_0^+$, $P_{R(a_0^+)} = a_0^+ a_0$, то условия $P_{R(a_0)} a = a_0 \dot{C}$, $\dot{C} x_0 = P_{R(a_0^+)} x_0$ необходимы, чтобы $a x_0 = f_0$ и достаточны для $P_{R(a_0)} a x_0 = f_0$, $C : X \to X$ - некоторый оператор.

Оператор $C' : X \to X$, для которого $C x_0 = P_{R(a_0^+)} x_0$, назовём оператором неоднозначности элемента x_0 . Сформулированная задача сводится к решению операторного уравнения $k z - z C' = \theta$, где k , C' - операторы неоднозначности элементов f_0 , x_0 . Если операторы k , C выбрать удовлетворяющими некоторым заданным свойствам, то решение указанного уравнения, т.е. восстановленный оператор, удовлетворяет некоторым требуемым условиям. Восстанавливать операторы с заданными свойствами можно на основании леммы. Например, в нормированном пространстве можно восстановить оператор $a_0 C_0$ с минимальной нормой за счёт выбора оператора C : $\|a_0 C_0\| = \inf \{ \|a_0 C\| : C x_0 = P_{R(a_0^+)} x_0 \}$. В некоторых случаях эта задача сводится к L -проблеме моментов Маркова.

1. Зубов В.М. Известия АН БССР. Сер.ф.-м.н. 1991,№6.С.32-36.
2. Зубов В.М. Известия АН БССР. Сер.ф.-м.н. 1989,№3.С.39-43.
3. Зубов В.М. Изв.вузов.Математика. 1983. №12. С.67-69.

УДК 517.925

Зубова С.П. (Воронеж)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача

$$\varepsilon C(t)\frac{dx}{dt} = [A - \varepsilon B(t)]x(t,\varepsilon), \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \qquad (1)$$

где E_1, E_2 - банаховы пространства; A, B, C - замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2; A - фредгольмовский, $\overline{\mathcal{D}(A)} = E_1$, $\dim \ker A = \dim \operatorname{coker} A = 1$; $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(C) = E_1$, $t \in [0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Для уравнения (1) выписывается уравнение ветвления

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} d_{ij}(t)\varepsilon^j \lambda^i = 0\,; \qquad (2)$$

для нахождения функций $d_{ij}(t)$ даются рекуррентная и непосредственная формулы.

Теорема. Для того, чтобы решение уравнения (1) имело вид

$$x(t,\varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda(s,\varepsilon)\,ds\right)\cdot u(t,\varepsilon) \qquad (3)$$

с $|\lambda(t,\varepsilon)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(t,\varepsilon)$ являлось решением уравнения (2).

При этом $u(t,\varepsilon)$ является линейной комбинацией элементов обобщенной цепочки Жордана некоторого оператора.

Поскольку оператор $C(t)$ может быть необратимым, задача Коши может быть неразрешимой во всем пространстве E_1, может быть неоднозначно разрешимой.

При условии $d_{ij} \neq 0$ или $d_{ij} \equiv 0$, $t \in [0,\infty)$ строится линейное многообразие в E_1 (при $B(t) = B$, $C(t) = C$; $B, C \in L(E_1, E_2)$ это подпространство), в котором задача Коши однозначно разрешима. Находится решение.

Теорема. Неединственность решения задачи Коши наблюдается в том и только том случае, когда оператор $A + \varepsilon(B + C\frac{d}{dt}) + \lambda C$ не имеет обратного ни при каких достаточно малых значениях ε, μ, не обращающихся в 0 одновременно.

Строится линейное многообразие (подпространство), в котором задача Коши имеет неединственное решение. Находятся эти решения.

Полученные решения легко разлагаются в ряды по степеням ε.

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

О ЗАМЫКАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Получены новые достаточные условия замыкаемости некоторых классов линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с индефинитной G-метрикой [1]

$$[x,y]=(Gx,y), \quad x,y\in\mathfrak{H},$$

порождаемой ограниченным самосопряжённым оператором G. Напомним, что линейный оператор A с областью определения $\mathfrak{D}(A)$ и множеством значений $\mathfrak{R}(A)$ называется G-эрмитовым, если

$$[Ax,y]=[x,Ay] \quad \forall x,y\in\mathfrak{D}(A),$$

в частности, обычный эрмитов оператор характеризуется равенством:

$$(Ax,y)=(x,Ay) \quad \forall x,y\in\mathfrak{D}(A).$$

Символ $\mathfrak{L}^{[\perp]}$, где $\mathfrak{L}$ - линеал в пространстве $\mathfrak{H}$, обозначает G-ортогональное дополнение линеала $\mathfrak{L}$, а символ $\mathfrak{K}_0$ обозначает совокупность всех G-нейтральных векторов пространства $\mathfrak{H}$ [1].

Теорема 1. Пусть A - G-эрмитов оператор, удовлетворяющий двум условиям:

$$\overline{\mathfrak{R}(A)}\subset\mathfrak{D}(A) \quad \text{и} \quad \overline{\mathfrak{R}(A)}\cap\mathfrak{K}_0=\{0\}.$$

Тогда оператор A допускает замыкание.

Теорема 2. Пусть A - G-эрмитов оператор, для которого

$$\overline{\mathfrak{R}(A)}\cap\mathfrak{D}(A)^{[\perp]}=\{0\}.$$

Тогда оператор A также допускает замыкание.

Следствие. Если эрмитов оператор A обладает свойством

$$\overline{\mathfrak{R}(A)}\cap\mathfrak{D}(A)^{\perp}=\{0\},$$

то он допускает замыкание.

Замечание. Последний результат обобщает тот хорошо известный факт, что всякий симметрический (т.е. плотно заданный эрмитов) оператор допускает замыкание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. - М.: Наука, 1986. - 352с.

УДК 519.6 Ишмухаметов А.З. (Москва)

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

При разработке численных методов решения задач оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, которые могут иметь регулярные или сингулярные возмущения, приближаться с помощью конечных сумм или конечно-разностных аппроксимаций, важно иметь методику определения условий сходимости по функционалу и по управлению. Эти вопросы рассматриваются в общей постановке, которая охватывает возмущения и аппроксимации как одной природы (приближения с помощью конечных сумм), так и разной (конечно-разностные аппроксимации). Получены следующие результаты.

Дается развитие математического аппарата, позволяющего использовать понятия "дискретной" слабой, сильной поточечной и операторной сходимости элементов пространств разной природы (дискретного и исходного).

Используя аппроксимацию градиента функционала и сопряженных операторов получены условия сходимости по функционалу снизу, сверху, слабой и сильной сходимости по управлению, а так же выведены соответствующие оценки скорости сходимости.

Получено доказательство устойчивости для новых классов задач оптимального управления, а именно: для задач с нормально разрешимыми операторами: управление → состояние системы; для задач с равномерно выпуклыми множествами допустимых управлений; для задач с функционалами равномерно выпуклыми по состоянию системы.

Вышеуказанные результаты вместе с развитием метода моментов и его обобщением на квадратичные задачи применяются к системам с распределенными параметрами, в частности, к задачам для гиперболических систем с регулярными, сингулярными и конечно-разностными аппроксимациями.

УДК 517.9 Калинин А.В., Морозов С.Ф. (Ниж.Новгород)

ПОЛУГРУППЫ ИЗОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Изучаются общие свойства полугрупп изотонных операторов, действующих в условно полных функциональных решетках. Полученные результаты применяются к нелинейным начально-краевым задачам математической физики. В частности, доказываются результаты о стабилизации решений начально-краевых задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений теории переноса излучения. Устанавливаются теоремы о существовании, единственности и экспоненциальной устойчивости в целом решений в соответствующих функциональных пространствах.

УДК 517.9 Калитвина А.С. /Липецк/

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЧДУ БАРБАШИНА

Краевая задача для ЧДУ Барбашина

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_{-1}^{1} k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma + f(t,s), \tag{I}$$

$$x(a_1,s) = \varphi_1(s) \quad (0 < s \leq 1), \quad x(a_2,s) = \varphi_2(s) \quad (-1 \leq s < 0) \tag{2}$$

при естественных условиях на заданные функции c, k, f, φ_1, φ_2 сводится к системе линейных интегральных уравнений

$$u_i(t,s) = \sum_{j=1}^{2} \int_{a_i}^{t} \int_{0}^{1} a_{ij}(t,\tau,s,\sigma)u_j(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau + g_i(t,s), \tag{3}$$

в которых $a_1 \leq t, \tau \leq a_2$, $0 \leq s, \sigma \leq 1$, $i=1,2$, $u_i(t,s) = x(t,(-1)^{i-1}s)$,

$$a_{ij}(t,\tau,s,\sigma) = \exp\left(\int_{\tau}^{t} c(t',(-1)^{i-1}s)\,dt'\right) k(\tau,(-1)^{i-1}s,(-1)^{j-1}\sigma),$$

$$g_i(t,s) = \exp\left(\int_{a_i}^{t} c(\tau,(-1)^{i-1}s)\,d\tau\right)\varphi_i((-1)^{i-1}s) + \int_{a_i}^{t} f(\tau,(-1)^{i-1}s)\exp\left(\int_{\tau}^{t} c(t',(-1)^{i-1}s)\,dt'\right)d\tau.$$

Поэтому обобщённым решением задачи (I) - (2) назовём решение системы (3). Пусть $L_p = L_p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$ и

$$\left\| \int_{0}^{1} a_{ij}(t,\tau,s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma \right\|_{L_p} \leq c_{ij} \|x\|_{L_p}. \tag{4}$$

Методом неподвижной точки в К-метрическом пространстве доказывается

Теорема. Пусть операторы

$$A_{ij}u(t,s) = \int_{a_i}^{t} \int_{0}^{1} a_{ij}(t,\tau,s,\sigma)u(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma$$

действуют в $Y = C(L_p[0,1])$ или в $Y = L_p([a_1,a_2]\times[0,1])$ $(1 \leq p < \infty)$. Если выполнены неравенства (4) и одно из условий:

а/ $D = (c_{11}+c_{22})^2 - 4c_{12}c_{21} > 0$, $\sqrt{D}\,\ln^{-1}\dfrac{c_{11}+c_{22}+\sqrt{D}}{c_{11}+c_{22}-\sqrt{D}} < 1$;

б/ $(c_{11}+c_{22})^2 = 4c_{12}c_{21} < 1$;

в/ $D = (c_{11}+c_{22})^2 - 4c_{12}c_{21} < 0$, $\sqrt{-D}\left(2\,\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{-D}}{c_{11}+c_{22}}\right)^{-1} < 1$,

то для любых функций $g_i \in Y$ система (3) имеет единственное решение в $Y \times Y$ и оно может быть получено методом последовательных приближений.

УДК 517.983+517.986 Калюжный Д.С. (Одесса)

ОПЕРАТОРЫ ДВУСТОРОННЕЙ СВЁРТКИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА И АЛГЕБРА, ИМИ ПОРОЖДЁННАЯ

Пусть $\mathbb{H}_n$ - группа Гейзенберга (например, см. [1]). Рассмотрим действующие в пространстве $L^2(\mathbb{H}_n)=L^2(\mathbb{R}^{2n+1})$ операторы двусторонней свёртки с ядрами $k\in L^1(\mathbb{H}_n\times\mathbb{H}_n)=L^1(\mathbb{R}^{4n+2})$:

$$(Ku)(h)=(2\pi)^{-2n-1}\int\limits_{\mathbb{H}_n\times\mathbb{H}_n}k(g_1;g_2)u(g_2^{-1}hg_1)\,dg_1\,dg_2. \qquad (1)$$

Операторы (1) являются ограниченными псевдодифференциальными (ПДО), вейлевские символы ω_k которых вычислены в [2].

Теорема 1. ПДО (1) допускают следующее представление:

$$K=(\mathcal{F}^{-1}_{\lambda\to t}\otimes I)(I\otimes K(\lambda))(\mathcal{F}_{\tau\to\lambda}\otimes I),$$

где $\mathcal{F}_{\tau\to\lambda}$ и $\mathcal{F}^{-1}_{\lambda\to t}$ - прямое и обратное преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{R})$, при каждом $\lambda\in\mathbb{R}$ $K(\lambda)$ - ограниченный в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ ПДО с вейлевским символом $\omega_{K(\lambda)}$, который получается из ω_k замораживанием λ. При этом оператор-функция (ОФ) $K(\cdot)$ непрерывна в точках $\lambda\neq 0$, сильно непрерывна в точке $\lambda=0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|K(\lambda)\|=0$ и $\|K\|=\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}}\|K(\lambda)\|$.

Следствие. C^*-алгебра $\mathcal{A}$, порождённая операторами (1) и I, изоморфна C^*-алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$, порождённой ОФ из теоремы 1 и тождественно единичной ОФ.

При помощи локального принципа Симоненко [3], применённого для точек $\lambda\in\dot{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (включая нуль!), C^*-алгебра $\tilde{\mathcal{A}}$ расслаивается на т.н. локальные алгебры, имеющие простую структуру, благодаря чему получаем описание неприводимых представлений и спектра $\mathcal{A}$.

Теорема 2. Все ненулевые неприводимые представления C^*-алгебры $\mathcal{A}$ (с точностью до унитарной эквивалентности), определённые на порождающих элементах (1) и I, описываются формулами:

$$\Psi_\lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{2n})),\ K\mapsto K(\lambda),\ I\mapsto I \qquad (\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\});$$

$$\Psi_\infty:\mathcal{A}\to\mathbb{C},\ K\mapsto 0,\ I\mapsto 1;$$

$$\Psi_z:\mathcal{A}\to\mathbb{C},\ K\mapsto\hat{k}(0,q;0,s),\ I\mapsto 1 \qquad (z=(q,s)\in\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^{4n}).$$

Здесь $\hat{k}$ - образ Фурье ядра k.

Теорема 3. Спектр $\hat{\mathcal{A}}$ C^*-алгебры $\mathcal{A}$ параметризуется множеством $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\mathbb{R}^{4n}\cup\{\infty\}$. Базой топологии Джекобсона на $\hat{\mathcal{A}}$ является совокупность Γ множеств $\emptyset$; $\hat{\mathcal{A}}$, интервалов $(\lambda_1,\lambda_2)\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и множеств $(\mu_1,0)\cup(0,\mu_2)\cup B_\varepsilon(z)$, где $\mu_1<0<\mu_2$, $B_\varepsilon(z)$ - открытый шар в $\mathbb{R}^{4n}$ с центром z и радиусом ε.

ЛИТЕРАТУРА: 1. Taylor M.E. Noncommutative harmonic analysis, Providence : AMS, 1986. 2. Wasilevski N.L., Trujillo R. - Preprint 17, seria B, Inst. mat. PAN, Warszawa, 1988. 3. Симоненко И.Б. - Изв. АН СССР, сер. мат., 1965, т.29, № 3/4, с. 567-586, 757-782.

УДК 517.98 Карлович Ю.И., Мозель В.А. (Одесса)

ОБ АЛГЕБРАХ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СДВИГАМИ

Пусть $\mathcal{D}$ – односвязная ограниченная область $\mathbb{C}$ с ляпуновской границей. В пространстве $L_2(\mathbb{C})$ рассмотрим следующие операторы: двумерные сингулярные интегральные операторы Михлина, Кальдерона-Зигмунда

$$S_D\varphi = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\zeta)\,dD_\zeta}{(\zeta-z)^2}, \quad S_D^*\varphi = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\zeta)\,dD_\zeta}{(\bar\zeta-\bar z)^2}; \quad (1)$$

керноператор с ядром Бергмана

$$K_D\varphi = \iint_D K_D(z,\bar\zeta)\varphi(\zeta)\,dD_\zeta = I - S_D S_D^* + L. \quad (2)$$

Доказывается полная непрерывность оператора в представлении керноператора (2). В работах [1] и [3] изучены, соответственно, $\mathbb{C}^*$-алгебра $\mathfrak{A}$, порождённая операторами умножения на непрерывные в $\overline{D}$ функции и операторами вида (1), и её $\mathbb{C}^*$-подалгебра $\mathcal{B}$, порождённая операторами умножения на непрерывные в $\overline{D}$ функции, керноператорами (2) и вполне непрерывными операторами. В настоящей работе на основе локально-траекторного метода [2] изучены $\mathbb{C}^*$-алгебры $\mathcal{R}_1 = \mathbb{C}^*(\mathfrak{A}; W_g : g\in G)$ и $\mathcal{R}_2 = \mathbb{C}^*(\mathcal{B}; W_g : g\in G)$, представляющие собой расширения алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{B}$ операторами сдвига (подстановки) $W_g\varphi = \varphi\circ g$, где g пробегает некоторую дискретную аменабельную группу G H-гладких диффеоморфизмов области $\overline{D}$ в себя, действующую на $\overline{D}$ топологически свободно. Построена алгебра символов, в терминах обратимости символов даны критерии нётеровости операторов из этих алгебр. Приведён пример (алгебра керноператоров в единичном круге, расширенная конечной циклической группой поворотов).

Литература:

1. Василевский Н.Л. Многомерные сингулярные интегральные операторы с разрывными классическими символами. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. 1985.
2. Карлович Ю.И. Локально-траекторный метод изучения обратимости в $\mathbb{C}^*$-алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов. // ДАН СССР.-1988.-Т.299, №3.-С.546-550.
3. Мозель В.А. Об алгебре, порождённой поликерноператорами и кусочно-непрерывными коэффициентами. // Материалы XXVIII Всесоюзной научной студенческой конференции: Математика.-Новосибирский университет. Новосибирск.-1990.-С.42-47.

УДК 519.61 Кармазин В.Н. (Краснодар)

УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ L- МИНИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается проблема устойчивого решения систем линейных алгебраических уравнений вида:

$$\bar{A}\, z = \bar{u}\ , \quad z \in E^n, \quad \bar{u} \in E^m. \qquad (1)$$

Существует единственное минимальное по норме решение экстремальной задачи (1): найти

$$\min_{z \in Z} \| Lz \|\ , \quad Z = \{\, z \mid \|\bar{A}\, z - \bar{u}\| = \min \,\}\ , \qquad (2)$$

где L-заданная матрица, $\| \ \|$-евклидова норма. Решение задачи (2) назовем L-минимальным решением (псевдорешением) системы(1) и обозначим его $\bar{z}$. Таким образом, однозначно определен линейный оператор $\bar{z} = \bar{A}^+\ \bar{u}$, где матрица $\bar{A}^+$ есть L-взвешенная псевдообратная для $\bar{A}$.

Предполагается, что вместо точных данных $(\bar{A}, \bar{u})$ имеются их приближения (A_h, u_δ), где

$$\|\bar{A} - A_h\| \le h, \quad \|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta.$$

Пусть U-замкнутый выпуклый конус в евклидовом пространстве матриц, при этом $\bar{A} \in U$. Введем множество эквивалентных по точности матриц $U_h = \{\, A \in U \mid \|A - A_h\| \le h \,\}$ и рассмотрим экстремальную задачу: найти матрицу $\hat{A}_h^+$ такую, что

$$\| \hat{A}_h^+ \| = \min \{\|A^+\| \mid A \in U_h\}. \qquad (3)$$

Определим элемент $\hat{z} = \hat{A}_h^+\ u_\delta$. Основной результат состоит в том, что показано $\|\hat{z} - \bar{z}\| = O(\delta + h)$, т.е. $\hat{z}$ является оптимальным по порядку точности устойчивым приближением к элементу $\bar{z}$.

Рассматриваются численные алгоритмы решения задачи (3), основанные на сингулярном разложении матриц A_h и L.

Литература

1. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.:Изд-во Моск. ун-та, 1987.

У.Д.К. 519.3 Квитко А.Н. (С.Петербург)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим уравнение вида

$$a_{11}x_{tt}+a_{22}x_{\alpha\alpha}+a_{10}x_t+a_{01}x_\alpha+a_{00}^1x+a_{00}^2x=u(\alpha,t) \quad (1)$$

где

$$t\in[0,1];\ \alpha\in[\alpha_0,\alpha_1];\ a_{11}(t)\in C[0,1];\ a_{10}(t)\in C[0,1];\ a_{00}^1(t)\in C[0,1]$$

$$a_{22}(\alpha)\in C[\alpha_0,\alpha_1];\ a_{01}(\alpha)\in C[\alpha_0,\alpha_1];\ a_{00}^2\in C[\alpha_0,\alpha_1] \quad (2)$$

$$u(\alpha,t)=\varphi_1(\alpha)\psi_1(t)+\varphi_2(\alpha)\psi_2(t);\ \varphi_i\psi_i\in C([0,1]\times[\alpha_0,\alpha_1]),\ |\psi_i|,|\varphi_i|\le 1,\ i=1,2 \quad (3)$$

Пусть заданы граничные условия

$$x(0,\alpha)=A(\alpha);\ x(\alpha_0,t)=0;\ x(\alpha_1,t)=0;\ x_t(0,\alpha)=0;\ x(1,\alpha)=0 \quad (4)$$

где $A(\alpha)\in C^2[\alpha_0,\alpha_1]$ – известная функция, такая, что

$$A(\alpha_1)=A(\alpha_0)=0$$

Постановка задачи

Найти функцию $u(\alpha,t)$ так, чтобы решение уравнения (1) $x(\alpha,t)$ удовлетворяло условиям (5). Указанную пару $u(\alpha,t)$, $x(\alpha,t)$ будем называть решением задачи (1), (4). Будем искать $u(\alpha,t)$, $x(\alpha,t)$ в виде

$$u(\alpha,t)=A(\alpha)\psi_1(t)+W(\alpha)T(t);\ x(\alpha,t)=A(\alpha)T(t) \quad (5)$$

где

$$T(t)=\sum_{i=2}^{N}a_it^i+1;\quad \sum_{i=2}^{N}a_i=1;\quad t\in[0,1] \quad (6)$$

Теорема. Пусть для некоторых значений λ, $a_2,\dots,a_N$ удовлетворяющих условиям (6) и известной начальной функции $A(\alpha)$ имеют место неравенства

$$\max_{[0,1]}|a_{11}(t)T''+a_{10}(t)T'+(a_{00}^1-\lambda)T|\le 1$$

$$\max_{[\alpha_0,\alpha_1]}|a_{22}(\alpha)A''+a_{01}(\alpha)A'+(a_{00}^2-\lambda)A|\le 1$$

$$\max_{[\alpha_0,\alpha_1]}|A(\alpha)|\le 1$$

Тогда существует решение задачи (1), (4). Причем искомая функция $u(\alpha,t)$ и соответствующее ему решение определяются выражениями

$$a_{11}T''+a_{10}T'+(a_{00}^1-\lambda)T=\psi_1(t)$$

$$a_{22}A''+a_{01}A'+(a_{00}^2-\lambda)A=W(\alpha)$$

и формулами (5), (6).

УДК.514.75./758

Ким В.Б. (Кемерово)

СЕМЕЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩИЕ НОСИТЕЛЬ

Рассматривается многообразие $(n, n, n)^k$ – n-мерное семейство алгебраических элементов k – го порядка в n-мерном проективном пространстве P_n, причём совокупность гиперплоскостей алгебраических элементов семейства является также n – параметрической [1]. Последовательное продолжение системы дифференциальных уравнений, задающих многообразие $(n, n, n)^k$, приводит к объекту $\{\Gamma\}$, который определяет в P_n инвариантную гиперповерхность k-го порядка S. Будем говорить, что многообразие $(n, n, n)^k$ имеет носитель, если все его локальные элементы лежат на неподвижной алгебраической поверхности k – го порядка. (При $k = 2$ такие многообразия названы конквадричными, при $n = k = 3$ – конкубичными). Показано, что если многообразие $(n, n, n)^k$ имеет носитель, то этим носителем является гиперповерхность S. Для таких многообразий ассоциированное $\dashv$-фокальное многообразие [1] является неопределённым. Найдено необходимое и достаточное условие того, что многообразие $(n, n, n)^k$ имеет носитель. Построено инвариантное оснащение многообразия $(n, n, n)^k$ и рассмотрена связность, определяемая этим оснащением.

1. В.С.Малаховский. "Многообразия алгебраических элементов в n-мерном пространстве. Труды ТГУ, 168, 1963, 28–42.

УДК 517.956

Киприянов И.А., Засорин Ю.В

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ НУЛЕВЫХ РАДИУСОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Идея замены распределенного источника источником сингулярным в некоторых потенциалах, описывающих гравитационные, электромагнитные или квантовомеханические процессы с тем, чтобы соответсвующие потенциалы совпадали в некоторых областях, восходит еще к Ньютону и носит название "метода потенциалов нулевых радиусов". Традиционно считалось, что этот метод применим лишь к процессам, описываемым уравнениями, содержащими классический оператор Лапласа. В настоящей работе показано, что этот метод может быть расширен и на случай некоторых сингулярных уравнений.

Пусть $R_+^{n+1} = \{(x,t)=(x_1;..;x_n;t): x_j \in R_+, t\in R\}$.

Пусть, далее:

$$\Box_B \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$

где $\gamma_1,..,\gamma_n$ -некоторые неотрицательные константы

ТЕОРЕМА. Пусть $u \in S_+'(\overline{R_+^{n+1}})$ -произвольное распределение, такое, что:

$$supp(\Box_B u) \subset \{(x;t)\in \overline{R_+^{n+1}}: |x|\le 1\}$$

Тогда существует единственный аналитический функционал, такой $w \in Z_+'(\overline{R_+^{n+1}})$ такой, что:

$$w \equiv u, \ (|x|>1,\ t\ge 0)$$

и

$$supp(\Box_B w) \subset \{(x,t)\in \overline{R_+^{n+1}}: x=0\}.$$

Приводится также явная схема, позволяющая строить $\Box_B w$ по распределению $\Box_B u$. Функционал $\Box_B w$ строится в виде псевдо-дифференциального оператора бесконечного порядка, а соответствующий функционал $w \in Z_+'(\overline{R_+^{n+1}})$ -в виде формального ряда, частичные суммы которого являются распределениями класса $S_+'(\overline{R_+^{n+1}})$.

УДК 517.9

И.А.Киприянов, О.Ю.Любомудрова /Воронеж/

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

В работе получено обобщение классической теоремы единственности для функций комплексной переменной на случай эллиптических уравнений.

Пусть $P(x, D)$ обозначает линейный эллиптический оператор в области G на плоскости R^2. Мы будем говорить, что для $P(x, D)$ выполняется сильное условие единственности, если ненулевые решения уравнения $P(x, D)u = 0$ в области G не могут иметь нуля бесконечного порядка. То-есть из условия $u(x) = O(|x - x_0|^n)$ при $x \to x_0$ для $\forall n$ $(x \in G)$ вытекает, что $u \equiv 0$ в G. Кроме того мы будем говорить, что u имеет в точке x_0 нуль порядка k, если $u(x) = O(|x - x_0|^k)$ при $x \to x_0$.

Теорема. Пусть $P(x, D)$ – линейный эллиптический оператор порядка m с C^∞ – гладкими коэффициентами в области $G \subset R^2$ для которого выполняется сильное условие единственности. Пусть, кроме того, имеется последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $x_n \to G$ $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$ и $x_0 \in G$. Тогда, если решение u уравнения $P(x, D)u = 0$ в области G имеет в каждой точке x_n нуль порядка m, то $u \equiv 0$ в области G.

Замечание. Если требование на порядок нуля снизить и потребовать только, чтобы u имело в точках x_n нуль порядка $m-1$ то заключение теоремы перестает быть верным.

УДК 517.956.2

Киприянова Н.И. (Воронеж)

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В работе [1] установлена формула среднего значения для сингулярного дифференциального оператора второго порядка, содержащего по одной из переменных оператор Бесселя. Указанная формула может быть обобщена следующим образом.

Пусть четная по переменным $x_1, \ldots, x_p$ функция $u(x)$ является решением дифференциального уравнения $\Delta_B u + \lambda u = 0$ где

$$\Delta_B = \sum_{j=1}^{p} B_j + \sum_{j=p+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad B_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{k_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

k_j – фиксированные положительные числа.

Тогда для u справедлива следующая формула среднего значения

$$\int_{\omega_1^+} T_{y'}^{t'} u(y', y''+t'') \prod_{j=1}^{p} \theta_j^{k_j} d\omega_1 =$$

$$= \pi^{\frac{n-p}{2}} \prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{k_j+1}{2}\right) u(y', y'') \left(\frac{R\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{-\frac{n+|k|-2}{2}} \times J_{\frac{n+|k|-2}{2}}(R\sqrt{\lambda}),$$

где $t = R\theta$, $\theta = \frac{t}{|t|}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_p$, ω_1^+ – часть сферы единичного радиуса с центром в начале координат, определенная неравенствами $\theta_1 > 0, \ldots, \theta_p > 0$; J_ν – функция Бесселя порядка ν; здесь T_x^y – оператор обобщенного сдвига, действующий по первым p переменным.

1. Киприянова Н.И. Дифференц. уравнения, т. XXI, № 11, 1985.

УДК 517.956

Кирилич В.М., Береговая Г.И.

ОБРАТНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА

Пусть G-полуплоскость при $t>0$, $G_t\subset G$-область, ограниченная некоторыми заранее неизвестными кривыми $\gamma_s: x=a_s(t)$, $a_s(0)=0$, $s=1,2$, $a_1(t)<a_2(t)$, $a_s(t)\in C^1(\mathbb{R}_+)$, для всех $t>0$. Задача состоит в том, чтобы определить эти кривые вместе с функциями u_i и f_i из условий:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial t}=F_i(x,t;u)f_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad (x,t)\in G_t, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\lambda_i(a_1(t),t)-a_1'(t)>0,\quad i=\overline{1,p+q},\\ \lambda_i(a_2(t),t)-a_2'(t)<0,\quad i=\overline{p+1,n},\end{gathered} \tag{2}$$

$$0\le p,q\le n,\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

$$u_i(a_1(t),t)=h_i^1(t),\ i=\overline{1,p+q},\quad u_i(a_2(t),t)=h_i^2(t),\ i=\overline{p+1,n}, \tag{3}$$

$$u_i(0,t)=\omega_i(t),\quad i=\overline{1,n},\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{4}$$

$$a_k'(t)=H_k(t;u),\quad k=1,2 \tag{5}$$

Здесь под u понимаем набор функций u_i. Правые части (5) представляют собой функционалы типа Вольтерра, все остальные в (1)-(4)-обычные функции.

С помощью метода характеристик доказана теорема о локальном по t (в G_t) существовании и единственности обобщенного решения u_i. Под обобщенным решением понимается липшицевое решение, соответствующей системы интегро-функциональных уравнений, получающейся из исходной, интегрированием вдоль характеристик. Для определения f_i и a_i, с помощью условий (4)-(5), тоже получаем вольтерровские уравнения.

УДК 519.6 Киселёв Ю.Н. (Москва)

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Задача построения эллипсоидальных оценок для выпуклых компактов представляет значительный интерес для теории оптимального управления и дифференциальных игр. В качестве примеров аппроксимируемых множеств можно указать множество достижимости линейной управляемой системы, альтернированный интеграл Понтрягина. С точки зрения приложений желательно иметь эффективные вычислительные алгоритмы для построения аппроксимирующего эллипсоида. Принципиальным вопросом при решении рассматриваемой проблемы является выбор меры отклонения эллипсоида от компакта. Применение метрики Хаусдорфа не позволяет описать параметры эллипсоида наилучшего приближения в конечном виде. Поэтому предлагается использовать специальную меру отклонения, основанную на среднеквадратичных конструкциях. Пусть W – выпуклый компакт в E^n с опорной функцией $c(W,\psi)$, а аппроксимирующий эллипсоид $Э(w,B)$ определяется опорной функцией $c(Э,\psi)=(w,\psi)+\sqrt{(\psi^* B\psi)}$, $\psi\in E^n$, где $w\in E^n$ – векторный параметр (центр) эллипсоида $Э$, $B=B^*\geq 0$ – его матричный параметр. Меру отклонения эллипсоида $Э$ от компакта W определим, полагая

$$\rho(Э,W)=\sqrt{\int \{\psi^* B\psi-[c(W,\psi)-(w,\psi)]^2\}^2\, dS},$$

где интегрирование производится по единичной сфере S. При заданном центре $w\in W$ существует единственный эллипсоид наилучшего приближения $elba(w,W)=Э(w,B^{\sim})$, матричный параметр которого определяется явным образом:

$B^{\sim}=(0.5/v_n)*[\ (n+2)*M-(tr\ M)*I\ ]$, где $M=M(w,W)=\int [c(W,\psi)-(w,\psi)]^2 dS$ – матрица моментов, v_n – объем единичного шара. Для неодноточечных выпуклых компактов W оптимальный центр $w^{\wedge}$ приближающего эллипсоида определяется однозначно. В центрально-симметричном случае центр $w^{\wedge}$ совпадает с центром Штейнера $(1/v_n)*\int c(W,\psi)\ \psi\ dS$ компакта W. Описанная аппроксимация выпуклого компакта позволяет построить вписанный и описанный эллипсоиды для выпуклого тела W в классе эллипсоидов, подобных оптимальному. Отметим, что указанные эллипсоиды наилучшего приближения использовались в разработанном на кафедре оптимального управления ВМиК МГУ графическом пакете "Регулятор".

УДК 517.986 Кисиль В.В. (Одесса)

ДВА ПОДХОДА К ОПИСАНИЮ СВЕРТОЧНЫХ АЛГЕБР.

Описание представлений алгебры сверток на некоторой группе Ли G может быть получено двумя различными способами: исходя из некоммутативного преобразования Фурье для группы G или на основе локального принципа. Доказана теорема о совпадении этих способов.

1°. Некоммутативное преобразование Фурье. Пусть $\hat{G}$ - множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G. Тогда, для произвольного $\pi\in\hat{G}$ определен оператор

$$\pi(k)=\int_G k(g)\pi(g)\,dg, \tag{1}$$

Равенство (1) задает унитарное представление сверточной алгебры:

$$\pi:(\text{свертка с ядром } k\in L^1(G)) \mapsto \pi(k). \tag{2}$$

Отметим так же, что если G - унимодулярная типа 1 группа (в частности, любая нильпотентная группа Ли), то на $\hat{G}$ существует мера Планшереля $d\mu$ такая, что выполняется тождество Планшереля:

$$\|k\|^2_{L^2(G)} = \int_{\hat{G}} \|\pi(k)\|^2_{HS}\,d\mu(\pi) \tag{3}$$

2°. Локальный принцип. Пусть семейство замкнутых двусторонних идеалов $\mathcal{J}_t$ в сверточной C^*-алгебре обладает свойством

$$\bigcap_t \mathcal{J}_t = 0. \tag{4}$$

(например все идеалы, порожденные идеалами какой-либо центральной подалгебры алгебры сверток). В этом случае факторотображение

$$\pi_t:(\text{свертка с ядром } k)\mapsto (\text{свертка с ядром } k)/\mathcal{J}_t. \tag{5}$$

по любому из идеалов образует представление алгебры сверток. Условие (4) обеспечивает то, что представления (5) содержат все неприводимые унитарные представления алгебры сверток.

3° ТЕОРЕМА. Пусть G - унимодулярная типа 1 группа, $\tilde{G}$ - носитель меры Планшереля в $\hat{G}$, тогда система двусторонних идеалов

$$\mathcal{J}_\pi=\{K \mid K\text{- свертка с ядром } k \text{ такая, что } \pi(k)=0,\ \pi\in\tilde{G}\}$$

обладает свойством (4).

Из теоремы следует, что к системе идеалов $\mathcal{J}_\pi$ можно применить локальный принцип. В силу определения системы идеалов $\mathcal{J}_\pi$ видно, что правила (2) и (5) определяют изоморфные представления. Поэтому, результат от применения локального принципа в этом случае по-существу совпадает с результатом применения преобразования Фурье.

УДК 517.95 Кленина Л.И. (Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Рассматривается дифференциальное уравнение бесконечного порядка в ограниченной области $(G \subset R^n)$ с достаточно гладкой границей

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}^m A_m(x, u, \mathcal{L}u, \dots, \mathcal{L}^m u) = h(x) \tag{I}$$

где функции $A_m(x, \sigma_0, \dots, \sigma_m)$ $m = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию

$$|A_m(x, \sigma_0, \dots, \sigma_m)| \le C a_m |\sigma_m|^{p_m - 1} + \delta_m$$

для любых $x \in G$ и $\sigma_0, \dots, \sigma_m$, причем последовательности $\{a_m\}, \{p_m\}, \{\delta_m\}$ таковы, что $a_m \ge 0, p_m \ge 1, \delta_m > 0$ и ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\delta_m}{a_m^{1/p_m}}\right)^{p'_m} < \infty$, $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|=2k} b_\alpha D^\alpha$, $b_\alpha \in R^1$ эллиптический оператор порядка $2k$.

Показано, что уравнение (I) разрешимо в пространстве Соболева бесконечного порядка

$$\overset{\circ}{W}{}^{\infty} = \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_m, p_m, \mathcal{L}^m\} = \{u \in C_0^\infty(G) ;$$
$$\rho(u) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} a_m \|\mathcal{L}^m u\|_{p_m}^{p_m} < \infty\}$$

для любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}$ где

$$W^{-\infty} \equiv W^{-\infty}\{a_m, p'_m ; \mathcal{L}^m\} = \{h(x) ;$$

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \mathcal{L}^m h_m, \quad h_m \in L_{p'_m}(G),$$

$$m = 0, 1, \dots ; \quad \rho'(h) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \|h_m(x)\|_{p'_m}^{p'_m} < \infty\}$$

УДК 519.53 Климкин В.М.(Самара)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЬЕДОННЕ-ГРОТЕНДИКА НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть (X,τ)-произвольное топологическое пространство; Σ-алгебра подмножеств множества X, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть M-класс всех замкнутых множеств и $F \subset M$. Говорят, что класс множеств F-τ -отделим от класса M, если для любых непересекающихся множеств $A \in F$ и $B \in M$ существуют непересекающиеся открытые множества U и V, такие, что $A \subset U$, $B \subset V$. Будем говорить, что функция множества φ слабо регулярная на классе F, если для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое множество $C \in F$, что $c \subset E$ и $||\varphi(E - c)|| < \varepsilon$.

<u>Теорема</u>. Пусть (X,τ)-топологическое пространство; пусть Σ - алгебра подмножеств множества X, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть F- класс замкнутых множеств; τ-отделенный от класса M всех замкнутых множеств; пусть, далее, $\Phi=\{\varphi\}$ семейство векторных счетноаддитивных мер, заданных на на алгебре Σ и со значениями в B-пространстве. Если меры семейства Φ слабо регулярные относительно класса F, то следующие условия равносильные

1. для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ с пустым пересечением

$$\lim \varphi(E_n) = 0 \quad \text{равномерно относительно} \quad \varphi \in \Phi, \qquad (1)$$

2. для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ сходящейся к пустому множеству справедливо (1).

<u>Замечание</u>. Если пространство (X,τ) хаусдорфово и F-класс компактов, то утверждения теоремы 1 равносильны следующему: для любой дизъюнктной последовательности открытых множеств $\{E_n\} \subset \tau$ справедливо (1).

Литература.

1. Diedonne J. Sur la convergence des suites de mtasure de Radon// An,Acad. Brasil.Ci-1951,-v.23,-p.277-282.
2. Grothendik A. Sur les applications lineaires faiblement compactec d'expaces du tupe C(K).//Canudian J.Math.-1953,-v.51,-p129-173.
3. Stein J.D.Uniform ubsolute continuity in spaces of set functions//Procendings of the Amer.Math.Soc.-1975,-v.51,-N1,-p.137-140.

УДК 5I7.9 Климов В.С., Семко Е.Р., Сенчакова Н.В. (Ярославль)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dv}{dt} = \operatorname{div} s - \nabla p + F, \qquad (I)$$

$$s \in Ae, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v_{|\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Здесь Ω – ограниченная область в E_n $(n=2,3)$, $v=(v_1, \ldots, v_n)$ – поле скоростей в переменных Эйлера $(x_1, \ldots, x_n, t)$, $\frac{dv}{dt}$ – индивидуальная производная скорости по времени, e – девиатор скоростей деформаций, $s-p(\delta_{ij})$ – тензор напряжений, F – вектор массовых сил, A – оператор, связывающий динамические и кинематические характеристики движения. Задача (I)-(2) возникает при изучении предложенной П.П.Мосоловым и В.П.Мясниковым модели вязкопластической среды. Её характерной особенностью является неоднозначность оператора A, поэтому основу математического исследования задачи (I)-(2) составляют идеи и методы теории дифференциальных включений.

В докладе предполагается обсудить следующие вопросы: I) существование стационарных, ограниченных, периодических и почти периодических решений задачи (I)-(2); 2) структура интегральной воронки, в частности, достаточные условия корректности задачи (I)-(2); 3) свойства оператора сдвига по траекториям включения (I); 4) наличие аттрактора у динамической системы, порождаемой задачей (I)-(2); 5) аналоги первой и второй теорем Боголюбова об усреднений.

Задача (I)-(2) изучается при ряде предположений относительно оператора A, главным из которых являются условие монотонности (постулат Друкера) и требование роста

$$s \cdot e \geq c_1 |e|^k - c_2 \qquad (s \in Ae, \ c_i > 0)$$

(условие сильной диссипации). Показатель роста k зависит от размерности n области Ω.

УДК 517.946

Ковалёва Е.Н. (Воронеж)

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается оператор V_L типа Вольтерра

$$V_L[f] = f(x) + \int_0^x K(x,t) f(t) t^{2\nu+1} dt$$

Оператор V_L определён на множестве чётных функций, принадлежащих пространству

$$L^2_{2\nu+1}(0,x) = \left\{ |f(x)| \, x^{\frac{2\nu+1}{2}} \subset L^2(0,x) \right\}$$

Оператор V_L имеет обратный оператор V_L^{-1}, определенный на том же множестве функций.

Доказывается сходимость в метрике $L^2_{2\nu+1}(0,x)$ ряда

$$K_1(x,t) - K_2(x,t) + \ldots + (-1)^{m+1} K_m(x,t) + \ldots ,$$

где

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,u) K_1(u,t) u^{2\nu+1} du$$

. . . .

. . . .

$$K_m(x,t) = \int_t^x K(x,u) K_{m-1}(u,t) u^{2\nu+1} du$$

. . . .

к некоторой функции $H(x,t)$.

Оператор V_L^{-1} определяется равенством

$$V_L^{-1}[f] = f(x) - \int_0^x H(x,t) f(t) t^{2\nu+1} dt$$

Оператор V_L^{-1} является обратным оператору V_L.

УДК 512; 519.46

Колмыков В.А., Купцов В.С., Субботин В.Ф. (Воронеж)

О НУЛЕВОМ КОНУСЕ КАРТАНА-ТИТЦА

1. Пусть G – связный конечный граф. В пространстве $\mathcal{E}_G$ вершинных взвешиваний определяется форма Картана-Титца

$$B_G(x) = \sum_u x_u^2 - \sum_e x_{u(e)} x_{v(e)}$$

/ x_u – вес в вершине u ; первая сумма – по всем вершинам, вторая – по всем ребрам, $u(e)$, $v(e)$ – концы ребра e / [1] .

2. Введем меру отклонения нулевого конуса B_G^0 от диагонали d пространства $\mathcal{E}_G$:

$$\omega(G) = (\operatorname{sign} B_G(d)) \cdot \sup\{\alpha \mid (\forall u \quad 1 \le x_u \le \alpha) \Rightarrow B_G(x) \ge 0\}.$$

3. Нетрудно показать, что $\omega(G) > 1 \Leftrightarrow G$ – дерево; $\omega(G) = \infty \Leftrightarrow G \in \{A_n, \mathcal{D}_n, E_6 - E_8\}$, $A, \mathcal{D}, E$ – схемы Дынкина /с однократными связями/ простых алгебр Ли. Более интересно, однако, появление этих схем в описании максимального участка дискретности множества $\Omega(T)$ отклонений деревьев:

ТЕОРЕМА. 1/ 2 – одна из точек сгущения $\Omega(T)$;
2/ $\Omega(T)$ дискретно на $(2, \infty]$ (в частности, $\Omega(T) \cap (2, \infty) = \emptyset$);
3/ $2 < \omega(G) \le \infty \Leftrightarrow G \in \{A_n, \mathcal{D}_n, E_6 - E_8, A_n^*, \mathcal{D}_n^*, E_6^* - E_8^*\}$.
Операция $*$ сопоставляет трехлучевой звезде $Z_{p,q,r}$ (три луча длин $p, q, r \ge 0$) звезду $Z_{p+1, q+1, r+1}$.

Литература.

1. Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. – УМН, т.28, вып. 2 (170), 1973. – с. 19–33.

2. Колмыков В.А., Купцов В.С., Субботин В.Ф. Вычисление отклонений деревьев. Направлена на депонирование в ВИНИТИ

УДК 519.3:62-50

Комлева Т.А., Плотников А.В. (Одесса)

ДВА УСЛОВИЯ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Пусть M – гладкое многообразие, f, g – гладкие полные векторные поля на M и заданы подмногообразия $N \subset M$ и точка $x_0 \in M$.

Задача преследования определяется дифференциальным уравнением на M :

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x, u, v) = x \circ (f + g_t(u,v)), \quad x(0) = x_0, \tag{I}$$

где $x \in M$, $u(t) \in U \in Conv(R^m)$, $v(t) \in V \in Conv(R^k)$.

Будем говорить, что в игре преследования можно завершить (завершится) за время $T > 0$ из начального состояния $x_0 \in M$, если для произвольного (всех) допустимых управлений убегающего $v(\cdot)$, существует допустимое управление преследователя $u(\cdot)$ такое, что решение (I) удовлетворяет условию

Теорема. Если существует момент $T > 0$ и существует $\xi_t \in e^{t\,ad f} R_t$, где $R_t = g_t(U,V)$ такие, что $x_0 \circ \overrightarrow{exp} \int_0^T \xi_t \, dt \, e^{T\,ad f} \in N$.

Тогда преследование можно завершить за время T.

Теорема. Если существует момент $T > 0$ и существует $Y_t \in e^{t\,ad f} L_t$, где $L_t = \{g_t(u(t),V) \mid u(t) \in U\}$ такие, что $x_0 \circ \overrightarrow{exp} \int_0^T Y_t \, dt \, e^{T\,ad f} \subset N$.

Тогда преследование завершится за время T.

УДК:517.927 Коняев Ю.А.

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Предлагается новый метод решения спектральных задач для линейных дифференциальных операторов с периодическим потенциалом.

В отличие от известного [1] этот метод, являясь развитием идей работ [2,3], позволяет более просто решать указанные задачи.

Например, для уравнения Матье

$$\ddot{x} + (\delta + \alpha\cos t)x = 0 \qquad (1)$$

можно построить асимптотику собственных значений $\delta = \delta(n, \alpha)$ и собственных функций $\varphi_n(t, \alpha)$ при $|\delta| \to +\infty$ и выполнении условий периодичности $x^{(k)}(0) = x^{(k)}(T)$ $(k=0,1; T=2\pi,4\pi)$. Далее, полагая $\delta = \varepsilon^{-2}(1-\nu(\varepsilon))$, перейдем от уравнения (1) к сингулярно возмущенной задаче

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = (A_0 + \varepsilon^2 A_2(t,\varepsilon))z = A(t,\varepsilon)z; \quad z(0) = z(T),$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = (\nu(\varepsilon) - \alpha\cos t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad z = (x, \varepsilon\dot{x})^T,$$

решение которой удобно искать в виде [2,3]:

$$z = S_0 H(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon)c; \quad (c \neq 0),$$

где $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$; $H(t,\varepsilon) = E + \sum_1^{\infty} H_k(t)\varepsilon^k$;

$$\Phi(t,\varepsilon) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda(x,\varepsilon)dx\right\}; \quad \Lambda(t,\varepsilon) = \sum_0^{\infty}\Lambda_k(t)\varepsilon^k,$$

причем матрицы $\Lambda(t,\varepsilon)$ и $H(t,\varepsilon)$ удовлетворяют уравнению

$$\varepsilon\frac{dH}{dt} = (\Lambda_0 + \varepsilon^2 S_0^{-1}A(t,\varepsilon)S_0)H - H\Lambda(t,\varepsilon).$$

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М., Наука, 1988, 432 с.
2. Коняев Ю.А. Исследование некоторых классов регулярных и сингулярных краевых задач. "Математические заметки", 1992, т.51, вып. 2.
3. Коняев Ю.А. Об одном методе исследования многоточечных краевых задач. "Сибирский математический журнал", 1992, т.33, № 6.

УДК 517.919 Копейкина Т. Б. (Минск)

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПОГРАНФУНКЦИЙ А. Б. ВАСИЛЬЕВОЙ

Для исследования управляемости и наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем (СВС)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 y(t) + B_1 u(t), & x(0,\mu)=x_0, \\ \mu \dot{y}(t) = A_3 x(t) + A_4 y(t) + B_2 u(t), & y(0,\mu)=y_0, \end{cases} \tag{1}$$

$$w(t) = D_1 x(t) + D_2 y(t), \tag{2}$$

где $t \in T=[0,t_1]$, $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$, $w \in R^{n_3}$, $n_3 \leq n_1 + n_2$, $u \in R^r$, $\mu \in (0,\mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $\operatorname{Re} A_4 < 0$, предлагается использовать метод погранфункций А. Б. Васильевой и искать решение $z(t,\mu) \equiv (x(t,\mu), y(t,\mu))$ (1) в виде суммы регулярного и пограничного асимптотических рядов по малому параметру μ : $z(t,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i z_{i\bullet}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i z_{if}(\tau)$, $\tau = \frac{t}{\mu}$, а управление, обеспечивающее решение различных задач управляемости, в виде $u(t)=u_{\bullet}(t) + u_f(\tau)$. Тогда исследование управляемости СВС (1) можно свести к исследованию управляемости систем k-приближения – систем дифференциальных уравнений относительно частичных сумм k-го порядка ($k=0,1,2,\ldots$) регулярного $\bar{z}_{k\bullet}(t,\mu) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i z_{i\bullet}(t)$ и пограничного $\check{z}_{kf}(\tau,\mu) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i z_{if}(\tau)$ рядов. Сначала формулируется ряд необходимых и достаточных условий управляемости систем k-приближения ($k = 0,1,2\ldots$) в терминах решений определяющих уравнений этих систем, затем доказывается, что полученные условия являются достаточными условиями управляемости СВС (1). Они имеют алгебраический характер и выражены через параметры СВС (1) в терминах решений ее определяющих уравнений, правило построения которых для СВС обосновывается.

Для СВС наблюдения (1),(2) получены представления подсистем k-приближения и выходов k-приближения. Доказаны достаточные условия наблюдаемости (1),(2), связанные с условиями наблюдаемости подсистем к-приближения.

Данный подход применяется к исследованию управляемости и наблюдаемости СВС с запаздыванием. Приведены примеры.

УДК 517.9 Кордюков Ю.А. (Уфа)

О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА МНОГООБРАЗИИ СО СЛОЕНИЕМ

В работе изучается квазиклассическая асимптотика спектра эллиптического дифференциального оператора $A(h)$ порядка m на компактном многообразии (без края) в случае, когда малый параметр h^m стоит в главном символе только при производных по некоторым выделенным переменным. Точнее, рассматривается гладкое замкнутое многообразие M, на котором задано слоение $\mathcal{F}$, и дифференциальный оператор $A(h)$ на M, зависящий от параметра $h > 0$, вида

$$A(h) = A + h^m B$$

Предполагается, что:

а) Оператор A является касательно эллиптическим оператором порядка m, т.е. таким дифференциальным оператором на M, который можно ограничить на слои слоения $\mathcal{F}$, причем ограничение является эллиптическим оператором на слое, и, кроме того, главный символ оператора A неотрицателен.

б) Оператор B является эллиптическим дифференциальным оператором порядка m с неотрицательным главным символом (или, более обще, дифференциальным оператором порядка m с неотрицательным трансверсальным главным символом).

в) Операторы A и B формально самосопряжены в $L^2(M,\mu)$, где μ - голономно инвариантная гладкая плотность на M.

Доказана асимптотическая формула для функции распределения $N_h(\lambda)$ оператора $A(h)$ при $h \to +0$ при условии, что трансверсальный главный символ оператора B голономно инвариантен.

УДК 517.977 Корнев В.В. (Саратов)

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Объектом исследований является следующий класс задач оптимального управления

$$I(u)=\int_0^1 f(t,x,u)\,dt \to \min \;; \qquad (1)$$

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+c(t),\; x(0)=x_0,\; x(1)=x_1\;; \qquad (2)$$

$$u(t)\in U,\; U \text{ - выпуклый компакт из } R^m,\; x\in R^n. \qquad (3)$$

Предполагается, что компоненты матриц $A(t)$, $B(t)$ и вектора $c(t)$ суммируемы; $f(t,x,u)$ измерима по t, непрерывна по (x,u), выпукла по u. Допустимыми управлениями являются всевозможные измеримые вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющие условию (3).

Назовем задачу (1) - (3) устойчивой по функционалу (относительно правого концевого условия), если $\lim_{y\to x_1} I(u(t,y))=I(u(t,x_1))$, где $u(t,z)$ - оптимальное управление задачи (1) - (3) с условием $x(1)=z$, а предел ищется по тем y, которые принадлежат множеству достижимости системы (2). В случае равномерной сходимости оптимальных траекторий $x(t,y)\rightrightarrows x(t,x_1)$ задача (1) - (3) называется устойчивой по траектории.

Теорема 1. Если задача (1) - (3) имеет единственное решение, то из устойчивости по функционалу следует устойчивост по траектории.

Теорема 2. Предположим, что в задаче (1) - (3) множество U есть образ l-мерного параллелепипеда $V=\{v\in R^l / a_i\le v_i\le b_i\}$ при линейном отображении $T: R^l\to R^m$. В этом случае задача (1) - (3) будет устойчивой по функционалу.

Для произвольного выпуклого компакта U теорема 2 не верна и задача (1) - (3) может быть неустойчивой по функционалу.

Теорема 3. Если задача (1) - (3) имеет единственное решение, устойчива по функционалу, а $f(t,x,u)$ непрерывна и строго выпукла по u на множестве U, то задача (1) - (3) будет устойчивой и по управлению в метрике пространства $L_2^m[0,1]$.

Теоремы 1 и 3 остаются справедливыми и для нелинейных систем вида $\dot{x}=A(t,x)+B(t,x)u$.

УДК.519.833.2 Кочорга С.В., Матвеев В.А. (Псков)

БЕСКОАЛИЦИОННАЯ ИГРА В СЛУЧАЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается бескоалиционная дифференциальная игра двух
$\langle\{\Xi^{(1)},\Xi^{(2)}\},\ \{\mathcal{U},\mathcal{V}\},\ \{\rho_1(\vartheta),\ \rho_2(\vartheta)\}\rangle.$ (I)

Здесь управляемая система описывается двумя начально-краевыми задачами параболического типа

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y^{(k)}}{\partial t}=A^{(k)}y+b_1^{(k)}u_1+c_1^{(k)}v_1+f_1 && \text{в } (t_0,\vartheta)\times\Omega^{(k)},\\
&y^{(k)}\Big|_{t=t_0}=y_0^{(k)} && \text{в } \Omega,\\
&\sigma_1^{(k)}\frac{\partial y^{(k)}}{\partial A^{(k)}}+\sigma_2^{(k)}y=b_2^{(k)}u_2+c_2^{(k)}v_2+f_2 && \text{в } (t_0,\vartheta)\times\Gamma^{(k)},
\end{aligned}\right\}$$

$k=1,2.$ (2)

Ограничения на область $\Omega^{(k)}$, ее границу $\Gamma^{(k)}$, параметры системы (2) и множества позиционных стратегий первого ($\mathcal{U}$) и второго ($\mathcal{V}$) игрока определены в [I]. Функция выигрыша первого (второго) игрока задана непрерывным функционалом $\rho_1(\vartheta)$ ($\rho_2(\vartheta)$) в $L_2(\Omega)$.

Пусть $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\varepsilon_k>0$ ($k=1,2$). Ситуация $(U^0,V^0)\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ называется ε-равновесной для игры (I), если $\exists\delta(\varepsilon)>0$ такая, что $\forall y_\Delta^{(1)}[\vartheta;t_0,y_0^{(1)},V^{(0)}]$, $\forall y_\Delta^{(2)}[\vartheta;t_0,y_0^{(2)},U^{(0)}]$, с $\delta(\Delta)\leqslant\delta(\varepsilon)$ будет

$$\rho_1(y_\Delta^{(1)}[\vartheta;t_0,y_0^{(1)},V^{(0)}])-\varepsilon_1\leqslant\lim_{\delta\to0}\ \rho_1(y_\Delta^{(1)}[\vartheta;t_0,y_0^{(1)},U^{(0)},V^{(0)}]),$$

$$\rho_2(y_\Delta^{(2)}[\vartheta;t_0,y_0^{(2)},U^{(0)}])-\varepsilon_2\leqslant\lim_{\delta\to0}\ \rho_2(y_\Delta^{(2)}[\vartheta;t_0,y_0^{(2)},U^{(0)},V^{(0)}]).$$

Установлено существование ε-равновесной ситуации для игры (I) с помощью модификации леммы Никайдо-Исодо и наличия ε-седловой точки антагонистической игры (описанной параболической системой).

[I]. Осипов Ю.С., Позиционное управление в параболических системах// ПММ, -1977.- Т.4I, вып.2.-С.195-201.

УДК 517.958 Крупенников Н.А. (Москва)

АНЗАЦ БЕТЕ НА СФЕРЕ. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ.

Нет необходимости доказывать важность распространения метода анзаца Бете на двумерный случай. Однако в настоящее время, насколько известно автору, какие-либо результаты здесь отсутствуют.

Успех метода Бете в одномерном случае объясняется тем, что при рассеянии на прямой вид волновой функции сохраняется, происходит лишь сдвиг фаз и сдвиг спектра. Для сохранения этих особенностей и обнаружения сдвига (дискретного) спектра при включении взаимодействия необходимо рассмотреть компактную поверхность постоянной кривизны т.е. сферу. Рассмотрим две Бозе частицы с дельтаобразным взаимодействием на сфере. Тогда для волновой функции $\Psi(\omega_1,\omega_2)$ будет справедливо

$$\left(L_1^2+L_2^2-2\nu(\nu+1)\right)\Psi(\omega_1,\omega_2)=c\,\delta(\omega_1,\omega_2)\,\Psi(\omega_1,\omega_2), \qquad (1)$$

где ω_i - координаты частицы на сфере, L_i^2 - оператор квадрата углового момента, $\delta(\omega_1,\omega_2)$ - дельта-функция, c - интенсивность взаимодействия. Рассмотрим частный случай нулевого суммарного момента. Будем искать решение в виде

$$\Psi(\omega_1,\omega_2)=\sum_\ell A_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\omega_1)\,Y_{\ell m}(\omega_2)$$

и воспользуемся стандартным разложением дельта-функции в базисе сферических функций $Y_{\ell m}$, тогда (1) принимает вид

$$\left(L_1^2+L_2^2-2\nu(\nu+1)\right)\sum_\ell A_\ell \sum_m Y^*_{\ell m}(\omega_1)\,Y_{\ell m}(\omega_2)=\Psi_0\sum_{\ell,m} Y^*_{\ell m}(\omega_1)\,Y_{\ell m}(\omega_2)$$

Ψ_0 - значение (конечное) функции $\Psi(\omega_1,\omega_2)$ при совпадении аргументов. Если перейти в базис когерентных состояний

$$Y_{\ell m}(\omega_1)\Leftrightarrow z_1^{\ell+m}z_2^{\ell-m}\Big/\sqrt{(\ell+m)!\,(\ell-m)!}\,,\quad Y_{\ell m}(\omega_2)\Leftrightarrow w_1^{\ell+m}w_2^{\ell-m}\Big/\sqrt{(\ell+m)!\,(\ell-m)!}\,.$$

то уравнения (1) легко решается и $A_\ell=\Psi_0\,\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\,\frac{1}{\ell(\ell+1)-\nu(\nu+1)}$

Возвращаясь в базис сферических функций и воспользовавшись формулой Дугалла получим

$$\Psi(\omega_1,\omega_2)=\Psi_0\frac{1}{2\nu+1}\cdot\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\sum_\ell\left[\frac{1}{\ell-\nu}-\frac{1}{\ell+\nu+1}\right]\sum_m Y^*_{\ell m}(\omega_1)\,Y_{\ell m}(\omega_2)=\frac{\Psi_0}{2\nu+1}\sum_m Y^*_{\nu m}(\omega_1)\,Y_{\nu m}(\omega_2),$$

Сдвиг спектра находится из "граничного" условия, состоящего в том, что поток градиента функции $\Psi(\omega_1,\omega_2)$ в особой точке приравнивается

$$\frac{\sin\pi\nu}{2\nu+1}=c\,.$$

Таким образом решение факторизуется, в чем и состоит аналогия с одномерным случаем. Применение изложенного метода (переход в пространство когерентных состояний) к многочастичному случаю будет дано в другом сообщении.

УДК 5I4.7+5I4.8+53I.I

Крутов А.В. (Воронеж)

АНАЛОГ НАТУРАЛЬНЫХ И АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ КООРДИНАТНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БАЗОВЫХ КРИВЫХ ОДНОГО КЛАССА ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ КРИВОЙ

Для неизменной в базисе $\vec{e}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ кривой рассматривается последовательность $\{\vec{\varepsilon}_n\}$ базисов $\vec{\varepsilon}_n$, задаваемых соотношениями

$$\vec{\varepsilon}_n=A_n^{-1}\vec{\varepsilon}_{n-1},\ A_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \sin\alpha_{n-1} & \cos\alpha_{n-1}\\ 0 & -\cos\alpha_{n-1} & \sin\alpha_{n-1}\end{pmatrix},(n=3,5,7,\ldots),\quad A_n=\begin{pmatrix}\sin\alpha_{n-1} & 0 & \cos\alpha_{n-1}\\ 0 & 1 & 0\\ -\cos\alpha_{n-1} & 0 & \sin\alpha_{n-1}\end{pmatrix},(n=2,4,6,\ldots),$$

$$\alpha_n=2\,\mathrm{arcctg}\frac{(\vec{\varepsilon}_{n+1\,3}\vec{\varepsilon}_{n1}\vec{\varepsilon}_{n3})}{1+(\vec{\varepsilon}_{n+1\,3}\vec{\varepsilon}_{n\nu})},\ \vec{\varepsilon}_{n+1\,3}=\frac{\vec{b}_n}{b_n},\ \vec{b}_n=\vec{b}_{n-1}-(-1)^{\nu}\dot{\alpha}_{n-1}\vec{\varepsilon}_{n\nu},\ \vec{b}_1=b_1(\cos\alpha_1\vec{\varepsilon}_{11}+\sin\alpha_1\vec{\varepsilon}_{13}),\ \nu=2^{\frac{1+(-1)^n}{2}}.$$

Система построенных таким образом базисов позволяет классифицировать кривые, указав базис, в котором аналог натуральных и параметрические уравнения имеют наиболее простой вид, найти эти уравнения. Для ортов каждого такого базиса имеет место система дифференциальных уравнений типа формул Френе с простого вида кососимметрической матрицей B_n, элементы которой b_{ij}^n являются компонентами в базисе $\vec{\varepsilon}_n$ вектора $\vec{b}_n=(b_{23}^n,b_{31}^n,b_{12}^n)$,

$$\dot{\vec{\varepsilon}}_n=B_n\vec{\varepsilon}_n,\ B_n=\dot{A}_n^{-1}A_n+A_n^{-1}B_{n-1}A_n,(n=2,3,\ldots),\ B_1=b_1\begin{pmatrix}0 & \sin\alpha_1 & 0\\ -\sin\alpha_1 & 0 & \cos\alpha_1\\ 0 & \cos\alpha_1 & 0\end{pmatrix},\ \dot{\vec{\varepsilon}}_{n+1\,3}=-\dot{\alpha}_n\vec{\varepsilon}_{n+1\,\nu}.$$

Пусть при некотором $n=k$ $\dot{\alpha}_n=0$. Тогда орт $\vec{\varepsilon}_{n+1\,3}$ базиса $\vec{\varepsilon}_{n+1}$ имеет в $\vec{e}$ постоянное направление и для соответствующей кривой, которую будем называть кривой ранга k, в качестве базиса $\vec{e}$ можно взять фиксированное при некотором значении дуги $s=s_0$ положение $\vec{\varepsilon}^{\,0}_{n+1}$ базиса $\vec{\varepsilon}_{n+1}$, а функцию $b_k(s)$, $\alpha_k=const$ и некоторые другие константы последующего интегрирования рассматривать в качестве аналога натуральных уравнений кривой этого ранга. Параметрические уравнения в базисе $\vec{\varepsilon}^{\,0}_{n+1}$ кривых k-го ранга и кривых, близких к ним, определяются рядом последовательных квадратур с помощью рекурентных соотношений

$$\varphi=\int_{s_0}^{s}b_k(s)ds,\ A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \vec{\varepsilon}_{n+1}=A^{-1}\vec{\varepsilon}^{\,0}_{n+1};\ \alpha_n=\int_{s_0}^{s}b_{\nu 3}^{n+1}ds,\ b_{12}^{n}=b_{12}^{n+1}\sin\alpha_n,$$

$$b_{m3}^{n}=(-1)^{n-1}b_{12}^{n}\,\mathrm{ctg}\,\alpha_n,\ (m=2^{\frac{1-(-1)^n}{2}}),\ \alpha_{n-1}=\int_{s_0}^{s}b_{m3}^{n}ds,\ \vec{\varepsilon}_n=A_{n+1}\vec{\varepsilon}_{n+1},\ldots,\vec{\varepsilon}_1=(\vec{\varepsilon}_{11},\vec{\varepsilon}_{12},\vec{\varepsilon}_{13});$$

$$\vec{r}=\vec{r}(s)=\int_{s_0}^{s}\vec{\varepsilon}_{11}\,ds.$$

К кривым первого ранга относятся плоские кривые и линии откоса, одной из кривых 2-го ранга является кривая, кривизна и кручение которой есть гармонические с фазой $\frac{\pi}{2}$ функции дуги, а ее главная нормаль образует постоянный угол с направлением $\vec{\varepsilon}_{33}$

УДК 517.977.56 Кузенков О. А. (Нижний Новгород)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ СОХРАНЕНИИ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ТЕМПЕРАТУР.

Рассматривается управляемый процесс распространения тепла в твердом теле Ω

$$u_t + Lu = f(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t\in(0,T),$$

при отсутствии потоков тепла через границу $\partial\Omega$

$$u_x|\partial\Omega=0$$

и заданном начальном распределении температур

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \|\varphi\|^2_{2,\Omega} \equiv \int_\Omega \varphi^2 d\Omega = 1.$$

Здесь $L(x)$ - равномерно эллиптический симметричный оператор, не зависящий от t, $u(x,t) \in L_2((0,T), H^1(\Omega))$, $\varphi(x) \in H^1(\Omega)$, $f(x,t) \in L_2((0,T), L_2(\Omega))$, граница тела $\partial\Omega$ достаточно гладкая. Управляющим воздействием является плотность источников тепла $f(x,t)$, на которую накладывается ограничение $\|f\|^2_{2,\Omega} \le c^2$ для почти всех $t\in(0,T)$. Требуется за минимальное время достичь с заданной среднеквадратичной точностью ε распределения температуры, совпадающего с одной из собственных функций v_k оператора L, при сохранении постоянной нормы температуры, т.е.

$$T\to inf, \quad \|u(x,T)-v_k(x)\|_{2,\Omega} \le \varepsilon,$$

$$\|u(x,t)\|_{2,\Omega} = 1 \quad \text{для почти всех } t\in(0,T). \qquad (1)$$

Основное отличие поставленной задачи от аналогичных, например, исследованных А. Г. Бутковским, А. И. Егоровым, В. И. Плотниковым, Ф. П. Васильевым и др, состоит в наличии условия (1), которое можно рассматривать как обобщенное фазовое ограничение.

Найдено явное выражение для оптимального управления в виде обратной связи от распределения температур в любой момент времени

$$f^*=[u_k u-v_k](2\mu)^{-1}+u\|u\|^2_{2,1}, \quad \text{где } \mu=\frac{1}{2}(1-u_k^2)^{1/2}(c-\|u\|^2_{2,1})^{-1/2},$$

$$\|u\|^2_{2,1}=\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i u_i^2, \qquad u_i = \int_\Omega u v_i d\Omega,$$

v_i, λ_i - система собственных функций и соответствующих собственных значений оператора L.

УДК 517.982.22 Кунаковская О.В. /Воронеж /

О ПРИЗНАКАХ C^r-ГЛАДКОСТИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть U – открытое подмножество вещественного банахова пространства E.

Определение 1. C^r -гладкую вещественную функцию $(r \geq 2)$ $g: U \to \mathbb{R}$ будем называть SC^r -функцией, если она C^∞ -гладко зависит от конечного кортежа фредгольмовых гладких функционалов / определение фредгольмова функционала введено С.И.Похожаевым в [1] /.

Определение 2. Банахово пространство E будем называть SC^r -гладким, если на E существует нетривиальная SC^r функция $g: E \to \mathbb{R}$, $r \geq 2$.

Определение 3. Банахово пространство E будем называть ΦC^r -ограниченным, если существует фредгольмов C^r-гладкий функционал $f: E \to \mathbb{R}, r \geq 2$, такой что $f^{-1}([a,b])$ – ограниченное непустое множество в E для некоторого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$.

Теорема 1. Каждое ΦC^r-ограниченное банахово пространство является SC^r -гладким / следовательно, и C^r-гладким/.

Обозначим через $SC^r(E)$ алгебру SC^r -функций на E для некоторого фиксированного $r \geq 2$. Справедлив следующий аналог одной теоремы Р.Бонича и Дж.Фрэмптона /[2], prop. 2/.

Теорема 2. Банахово пространство E, такое что для некоторого $r \geq 2$ $SC^r(E) \neq \emptyset$, является SC^r -гладким тогда и только тогда, когда топология в E, порожденная нормой, совпадает с топологией, индуцированной в E SC^r-функциями.

В докладе будут изложены и другие результаты исследования функтора SC^r / см. [3] /.

ЛИТЕРАТУРА

1. Похожаев С.И. О множестве критических значений функционалов // Матем. сб. – 1968, т.75, № 1.– С.106–111.
2. Bonic R., Frampton J. Smooth functions on Banach manifolds // J. of Math. and Mech.– Vol. 15, №5(1966).– P.877-898.
3. Kunakovskaya O.V. On the properties of the compositions of Fredholm functionals // Тезисы IX международной конференции по топологии и ее приложениям / 12 –16 окт.1992/ – Киев, 1992. – С.92.

УДК 517.977 Курдюмов В.П. (Саратов)

ТЕОРЕМА СХОДИМОСТИ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ МАЙЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t)=c\,\dot{x}(t-\sigma)+x(t)+y(t)+u(t);\ x(t)=0,\ t\in[-\sigma,0];\ t\in[0,1],$$

$1=N\sigma+\delta$, N – целое положительное число, $\delta\in[0,\sigma)$,

$$\beta(\dot{y}(t)-a\dot{y}(t-\sigma))=-by(t)+x(t)+u(t);\ y(t)=0,\ t\in[-\sigma,0];\ |u|\le 1,$$

$$g(x(1),y(1))\to \min.$$

Здесь $g(x,y)$ – непрерывная функция своих аргументов, $b,\beta>0$; a, c – скаляры. Допустимыми управлениями считаются функции $u(t)\in L_2[0,1]$, удовлетворяющие неравенству $|u|\le 1$.

Пусть $(\hat{x}_\beta(t),\ \hat{y}_\beta(t),\ \hat{u}_\beta(t))$ – решение при фиксированном β сформулированной задачи. Требуется найти

$$\lim_{\beta\to 0} g(\hat{x}_\beta(1),\hat{y}_\beta(1)). \qquad (1)$$

Для обычных линейных систем задача нахождения предела (1) изучалась, например, Дончевым А.Л. в[1]. В настоящей работе для систем нейтрального типа получены результаты, аналогичные описанным в[1].

Теорема (основная). Обозначим $K_0=\{(x,z):\ x=x(1),\ \dot{x}(t)=a\dot{x}(t-\sigma)+(1+\frac{1}{b})x(t)+(1+\frac{1}{b})u(t);\ x(t)=0,\ t\in[-\sigma,0];\ |u|\le 1;\ |bz-x|\le 1\}$.

Тогда $$\lim_{\beta\to 0} g(\hat{x}_\beta(1),\hat{y}_\beta(1))=\min_{(x,z)\in K_0} g(x,z).$$

Литература.

1. Дончев А.Л. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. – М.: Мир, 1987.–158 с.

УДК 517.956.3

Куржанский М.А. "О возможности точного восстановления начального состояния струны по граничным наблюдениям с помехами."

Рассматривается задача наблюдения неизвестного заранее начального условия $\Phi|_{t=T} = \Phi_0$, $\Phi_t|_{t=T} = \Phi_1$ уравнения колебаний струны

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} = 0, \ (x;t) \in Q = \{0 < x < l, \ 0 < t < T\} \qquad (1)$$

при однородных нулевых граничных условиях

$$\Phi|_{x=0} = \Phi|_{x=l} = 0.$$

Предполагается, что функции Φ_0, Φ_1 априорно не заданы, а известна лишь функция

$$\tilde{g}(t) = g(t) + \xi(t), \ 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$\text{где } g(t) = \Phi_x|_{x=0}, \ 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

называемая наблюдаемым сигналом. Неизвестные значения помехи $\xi(t)$ считаются априорно ограниченными: $\xi(t) \in \Xi$, где Ξ – заданное ограниченное множество. Требуется оценить и, по возможности, точно восстановить величину $\langle d, \varphi \rangle$, $\varphi = (\Phi_0, \Phi_1)$ представляющую собой проекцию неизвестных начальных условий на заданное направление d в соответствующем функциональном пространстве.

Показывается, что при определенных ограничениях на помехи, учитывая периодичность решения краевой задачи (1), возможно точное восстановление сигнала (3), а вместе с ним – и величины проекции $\langle d, \varphi \rangle$.

УДК 517.9

Курина Г.А. (Воронеж)

О ПОВЕДЕНИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ МАТРИЧНО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Рассматривается матрично сингулярно возмущенная система

$$(A+\varepsilon B)\frac{dx}{dt} = C(t)x + \mathcal{D}(t)u, \quad x(0)=x^0, \tag{1}$$

где $x(t)\in X$, $u(t)\in\Omega\subset U$, X, U – действительные конечномерные евклидовы пространства, $t\in[0,T]$, $\varepsilon>0$, допустимые управления $u=u(t)$ являются измеримыми функциями, Ω – компактное выпуклое множество, A, B, $C(t)\in L(X)$, $\mathcal{D}(t)\in L(U,X)$, оператор $C(t)$ непрерывно дифференцируем, $\mathcal{D}(t)$ непрерывен по t, A вырожден, $A+\varepsilon B$ обратим при достаточно малых $\varepsilon\neq 0$, причем все B – жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину p.

При условии устойчивости оператора

$$G(t) = (-1)^{p-1}A_p^{-1}QC(t)P : Ker\,A \to Ker\,A$$

доказано, что при $\varepsilon\to 0$ множества достижимости при $t=T$ системы (1) стремятся в метрике Хаусдорфа к множеству

$$K_0 = \{x\in X \mid (I-P)x\in M, \quad Px\in R(x)\}.$$

Здесь P – ортогональный проектор X на $Ker\,A$, Q – ортогональный проектор X на $Ker\,A'$, соответствующие разложениям $X = Ker\,A \oplus Im\,A' = Ker\,A' \oplus Im\,A$, $A_p = QBH^{p-1}P$, $H = A_+(I-Q)B$, A_+ – обратный оператор к $(I-Q)A(I-P) : Im\,A' \to Im\,A$, штрих означает сопряженный оператор, I – единичный оператор, M – множество достижимости при $t=T$ системы для $(I-P)\bar{x}(t)$, где $\bar{x}(t)$ – решение системы (1) при $\varepsilon=0$,

$$R(x) = -\tilde{C}^{-1}(T)QC(T)(I-P)x + \int_0^{+\infty} exp(G(T)s)(-1)^{p-1}A_p^{-1}Q\mathcal{D}(T)\Omega\, ds,$$

$\tilde{C}^{-1}(t)$ – обратный оператор к $QC(t)P : Ker\,A \to Ker\,A'$.

При $A+\varepsilon B = diag(I, \varepsilon I)$ последнее утверждение установлено в [1].

Литература

1. Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.

УДК 517.9 Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П. (Минск)

ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $\bar{R} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ x_n \in \mathbb{R}\}$
$N = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ x_n \in \mathbb{R} : \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ x_n = 0\}$, $\widetilde{\mathbb{R}} = \bar{\mathbb{R}}/N$
$\bar{g}(R, \Omega) = \{(f_n) \mid f_n : N \times R \times \Omega \to R,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in N\ f_n(t, \omega)$ - случайная величина на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\forall k = 0; 1, 2; \ldots\ \frac{d^k}{dt^k} f_n(t, \omega) \in C(\mathbb{R})$ для почти всех $\omega \in \Omega, \forall n \in N\}$.

$N(R, \Omega) = \{(f_n) \in \bar{g}(R, \Omega)$: для $\forall K \subset\subset R\ \exists n_0(K) : \forall n > n_0(K)$ $f_n(t, \omega) = 0$ для $\forall t \in K$ и почти всех $\omega \in \Omega\}$, $g(R, \Omega) = \bar{g}(R, \Omega)/N(R, \Omega)$

Продолжим элементы $g(R, \Omega)$ на $\widetilde{R} \times \Omega$ по следующему правилу: для $\forall x \in \widetilde{R}$ и для $\forall F = \{(f_n)\} \in g(R, \Omega)$ $F(x) = \{(f_n(x_n))\}$. Элементы $g(\widetilde{R}, \Omega)$ назовем обобщенными случайными процессами.

Пусть $H = \{h \in \widetilde{R} : h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots), \lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0\}$
$S = \{h \in H : \exists c > 0, n_0 \in N, \forall n > n_0\ |h_n| \leq \frac{c}{n^{1+\alpha}}, \forall \alpha > 0\}$
$I = \{h \in H : \exists c > 0, n_0 \in N, \forall n > n_0\ |h_n| \geq \frac{c}{n^{1-\alpha}}, \forall \alpha > 0\}$
Для $\forall F \in g(\widetilde{R}, \Omega)$ рассмотрим $d_h F(x) = \{(f_n(x_n + h_n) - f_n(x_n))\}$

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс $F = \{(f_n)\} \in g(\widetilde{R}, \Omega)$ ассоциирует элемент g из топологического пространства, если для $\forall x \in R$ $f_n(x)$ сходится к $g(x)$ при $n \to \infty$ в топологии данного пространства для почти всех $\omega \in \Omega$.

Утверждение. Пусть обобщенная функция $F = \{(f_n)\}$ ассоциирует $f(t) \in C^2(R)$, а обобщенный случайный процесс $B = \{(B_n)\}$ ассоциирует процесс броуновского движения $B(t)$. Тогда для $h \in S$ $d_h(B)$ ассоциирует формулу дифференцирования сложной функции Стратоновича, а для $h \in I$ $d_h(B)$ ассоциирует формулу дифференцирования сложной функции Ито.

Литманович О.Ю. (Воронеж)

О ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ЗАДАЧЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Структура вычетов для полюса функции Грина обычно описывается (следуя известного результата Келдыша) с помощью соответствующих корневых цепочек исходной и сопряженной краевых задач. С этой целью ниже описывается краевая задача, сопряженная к переопределенной задаче Валле-Пуссена. На множестве функций $x(\cdot)\in C^n[a,b]$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = f(t) \qquad (1)$$

с достаточно гладкими на $[a,b]$ коэффициентами $p_i(t)$. Для точек $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m < \xi_{m+1} = b$ рассматриваются обобщенные условия Валле-Пуссена

$$x(\xi_i) = x'(\xi_i) = \ldots = x^{(\nu_i-1)}(\xi_i) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots m+1). \qquad (2)$$

Согласно (2) любое решение задачи (1),(2) имеет в точках ξ_i нуль кратности не менее ν_i, т.е. $\tau(x,\xi_i) \geq \nu_i$. При $|\nu| = \nu_0 + \ldots + \nu_{m+1} > n$ задача (1),(2) является неклассической, т.е. неразрешимой в $C^n[a,b]$.

Пусть функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема n раз в некоторой выколотой окрестности точки $\xi \in (a,b)$. Назовем число $\gamma (= \gamma(x,\xi))$ дефектом гладкости функции $x(t)$ в точке ξ, если производные $x^{(i)}(t)$ непрерывны в точке ξ при $i = 0, 1, \ldots n-\gamma-1$, в то время как следующая производная $x^{(n-\gamma)}(t)$ разрывна. Для набора $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots \gamma_m\}$ положим $|\Gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$.

Пусть $\gamma_i < n - \nu_i$ при всех $i = 1, \ldots m$. Обозначим через $E(\xi, \Gamma)$ множество функций, n раз непрерывно дифференцируемых во всех точках, отличных от ξ_i ($i = \overline{1,m}$) и таких, что

$$\gamma(x, \xi_i) \leq \gamma_i \qquad (i = \overline{1,m}). \qquad (3)$$

Пусть L не осциллирует на $[a,b]$. Пусть $|\nu| = n + |\Gamma|$.

ТЕОРЕМА 1. Для обобщенных решений из $E(\xi,\Gamma)$ задачи (1),(2) неравенства (3) экстремальны и все превращаются в равенства при $f \geq 0$ ($\not\equiv 0$). Неравенства (3) превращаются в равенства в том числе и для обобщенного решения задачи (1),(2) при $f(t) = \delta(t-s)$, т.е. для функции Грина $G(t,s)$ задачи (1),(2).

ТЕОРЕМА 2. Сопряженное к функции Грина $G(t,s)$ задачи (1),(2) ядро $K(t,s) = G(s,t)$ является функцией Грина обобщенной задачи Валле-Пуссена вида (1),(2), если в (1) заменить L на L^*, в (2),(3) заменить ν_i на γ_i, а ν_0 и ν_{m+1} – соответственно на $n-\nu_0$, $n-\nu_{m+1}$.

УДК 517.95 Ломов С.А.(Москва)

КАЧЕСТВЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ.

В различных приложениях(например, в физике плазмы, в радиотехнике) возникают задачи вида

$$(\varepsilon+t)\dot{y}-A(t)y=h(t),\ y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in(0,T) \quad (I)$$

где значение $t=-\varepsilon$ является подвижной регулярной особой точкой (задачу необходимо изучить при $\varepsilon\to 0$). Хотя структура разрешающего оператора для соответствующего уравнения известна:

$$Y(t,\varepsilon)=U(t+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{\Lambda(\varepsilon)},\ \Lambda(\varepsilon)=\mathrm{diag}\{\lambda_1(-\varepsilon),\ldots,\lambda_n(-\varepsilon)\},$$

где операторная функция U аналитична по своему аргументу (при аналитическом операторе $A(t)$ в области, содержащей отрезок $[-T,T]$, $\lambda_i(-\varepsilon)$ - спектр оператора $A(-\varepsilon)$, однако поведение решения неоднородной задачи (I) при $\varepsilon\to 0$ далеко не очевидно.

Впервые такие задачи были изучены для скалярных уравнений в начале шестидесятых годов. Было установлено, что в подобных задачах пограничный слой имеет степенной характер убывания при $\varepsilon\to +0$. При попытке решения задач вида (I) в банаховых пространсвах встретились принципиальные трудности, связанные, по-видимому, с отсутствием теорем существования для вырождающихся уравнений.

Здесь будет изучена задача (I) в конечномерном банаховом пространстве, установлены необходимые и достаточные условия на структуру правой части $h(t)$ для аналитичности суммы по ε основного ряда по степеням ε . Ранее была доказана асимптотическая сходимость этой суммы к предельному решению. Кроме того будет изучена структура степенного пограничного слоя. Полученные результаты могут быть обобщены на бесконечномерные пространства, когда точки спектра оператора $A(-\varepsilon)$ могут иметь тождественную бесконечную кратность и оператор $A(t)$ имеет простую структуру. Отдельные вопросы предистории обсуждаемых результатов можно найти в [1 - 4].

1. Далецкий Ю.Л., Коробкова И.К., ДАН УРСР, 1968 г., т.I ,
2. Крейн С.Г., Товбис А.И., Алгебра и анализ, 1990, т.2,в.5, с.1-32.
3. Ломов С.А., ИАН СССР, сер.матем.,1966,т.30,№3,с.525-572.
4. Зюкин П.Н., Линейные операторы в функциональных пространствах, Воронеж,1981, с.46-51.

УДК 517.9 Лысенко Ю.В. (Минск, БГУ)

НОВЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В докладе для решения нелинейного уравнения вида

$$F(x,x) = 0, \tag{1}$$

где $F(x,y)$ – нелинейный непрерывный оператор из $X \times X$ в Y, имеющий частную производную по первому аргументу в $B(x_0,R) \times B(x_0,R)$, которая обратима в точке (x_0,x_0), а X, Y – банаховы пространства, рассматриваются приближения типа Ньютона-Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - [F'_x(x_n,x_n)]^{-1}F(x_n,x_n) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{2}$$

Пусть справедливы следующие неравенства

$$\|F'_x(x,x) - F'_x(y,x)\| \le \eta(r)\|x - y\|^{\theta}, \quad x,y \in B(x_0,r), \tag{3}$$

$$\|F(x,x) - F(x,y)\| \le k(r)\|x - y\|, \quad x,y \in B(x_0,r), \tag{4}$$

$$\|F'_x(x,x) - F'_x(x,y)\| \le \beta(r)\|x - y\|^{\tau}, \quad x,y \in B(x_0,r), \tag{5}$$

где $\eta(r)$, $\beta(r)$ и $k(r)$ – неубывающие на $[0,R]$ функции, а θ и τ принадлежат отрезку $[0,1]$ и известны константы

$$a = \|F'_x(x_0,x_0)^{-1}F(x_0,x_0)\|, \quad b = \|F'_x(x_0,x_0)^{-1}\|. \tag{6}$$

Определим скалярную функцию на $[0,R] \times [0,R]$

$$\varphi(r_1,r_2) = a + b\int_0^{r_1}[2^{1-\theta}\eta(t)t^{\theta} + \beta(t)t^{\tau}]dt + b\int_0^{r_2}k(t)\,dt. \tag{7}$$

Пусть r_* – наименьший нуль на $[0,R]$ уравнения

$$r - \varphi(R,r) = 0 \tag{8}$$

и задана числовая последовательность

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \frac{\varphi(\rho_n,\rho_n) - \rho_n}{1 - b(\eta(\rho_n)\rho_n^{\theta} + \beta(\rho_n)\rho_n^{\tau})}. \tag{9}$$

Теорема. *Пусть уравнение* (8) *имеет единственный нуль на* $[0,R]$ *и* $\varphi(R,R) \le R$. *Тогда уравнение* (1) *имеет в шаре* $B(x_0,r_*)$ *решение* x_*, *единственное в шаре* $B(x_0,R)$, *а последовательные приближения* (2) *определены при всех* n, *лежат в* $B(x_0,r_*)$ *и сходятся к этому решению, причем верны оценки*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \rho_{n+1} - \rho_n, \quad \|x_* - x_n\| \le r_* - \rho_n \quad (n = 0,1,\ldots).$$

УДК 517.9

О.Ю.Любомудрова /Воронеж/

ТЕОРЕМЫ ТИПА КАРЛСОНА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть символ $Q(D)$ обозначает однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами в R^n, $Q(D)=\sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$. Мы будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения $Q(D)u=0$ имеет конечный экспоненциальный тип A, если для любого положительного числа ε и всех $x\in R^n$ выполняется неравенство $|u(x)|\le C\exp(A+\varepsilon)|x|$. Здесь C - положительная постоянная, а $|x|=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$. Пусть далее E^k обозначает линейное подпространство в R^n, $E^k=\{x\in R^n: x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0\}$, а Z^k - соответствующую целочисленную решетку в E^k.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема I. Пусть $u(x)$ - решение полигармонического уравнения $\Delta^m u=0$ в R^n, имеющее экспоненциальный тип меньший, чем π. Тогда, если $u(x)=0$ для $\forall x\in Z^k$, то $u(x)=0$ для $\forall x\in E^k$.

Теорема 2. Пусть $u(x)$ - решение уравнения $Q(D)u=0$ в R^n, имеющее нулевой экспоненциальный тип. Тогда, если $|u(x)|\le C(1+|x|^p)$ для $\forall x\in Z^k$, то $u(x)$ является многочленом степени не выше $[p]$ на подпространстве E^k.

Теорема 3. Пусть $u(x)$ - решение уравнения $Q(D)u=0$ в R^n, имеющее нулевой экспоненциальный тип. Тогда, если

$$\left|\frac{\partial^q u}{\partial x_n^q}(x)\right|\le C(1+|x|^p);\quad q=0,1,\ldots,m-1,$$

для $\forall x\in Z^{n-1}$, то $u(x)$ является многочленом степени не выше чем $[p]+m-1$ на R^n.

Майорова С. П. (Воронеж)

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИНГУЛЯРНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ

В работах [1,2] для неосциллирующего на конечном отрезке $[a,b]$ дифференциального оператора $Lx = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x$ с суммируемыми коэффициентами $p(\cdot)$ изучалась спектральная краевая задача с сильным вырождением $Lx = \lambda q(t)(t-a)^{-n}(b-t)^{-n}x$ ($a<t<b$) при двухточечных краевых условиях Валле-Пуссена. Предполагается, что $q(t)$ сохраняет знак внутри (a,b) и $|q(t)| \leq C(t-a)^{\gamma}(b-t)^{\sigma}$ при некоторых положительных γ и σ. Установлено (см. [1,2]), что указанная краевая задача имеет осцилляционный спектр.

В настоящем докладе обсуждаются аналогичные результаты для сингулярной многоточечной краевой задачи.

На конечном интервале (a,b) рассмотрим сингулярную задачу

$$Lx = \lambda \frac{q(t)}{(t-a)^n (b-t)^n u(t)} x \tag{1}$$

при многоточечных краевых условиях

$$x(a_i) = x'(a_i) = \ldots = x^{(\nu_i-1)}(a_i) = 0 \quad (i=\overline{1,m};\ m\geq 2) \tag{2}$$

где $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = n$, $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b$. Здесь $u(t) = (t-a_2)^{\nu_2}(t-a_3)^{\nu_3}\ldots(t-a_{m-1})^{\nu_{m-1}}$, и функция $q(\cdot)$ непрерывна на $[a,b]$, $q(a) = q(b) = 0$ и $(-1)^{\nu_m} q(t) > 0$ внутри (a,b).

Теорема. *Пусть $\gamma > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что $|q(t)| \leq C(t-a)^{\gamma}(b-t)^{\sigma}$. Тогда краевая задача (1),(2) имеет осцилляционный спектр.*

Для доказательства осцилляционности спектра многоточечной задачи применяются те же методы, что и для двухточечной (см. [1,2]). Отметим, что при этом существенно использовались оценки функции Грина многоточечной задачи, установленные Ю. В. Покорным, и результат А. В. Боровских об осцилляционности спектра интерального оператора с непрерывным ядром на некомпактном множестве.

Литература.

1. Майорова С. П. // Воронеж. ун-т. Воронеж, 1992. - 20 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ 30.11.92, N 3394 - В92.

2. Майорова С. П. //Тез. докл. школы "Теория функций. Дифференц. уравнения в математическом моделировании"/ Воронеж, 1993. - С. 83.

УДК 517.9 Макаров А.А. (Харьков)

ОБЩИЙ ВИД КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ПДУ

Для краевой задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \qquad x \in R^n,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$\int_0^T dM(t)\, B\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $B\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - квадратные матрицы, элементами которых являются ПДО с символами из пространства $H^0_{-\infty} = \bigcup_s H_s$ $\left(H_s = (1+x^2)^{-s/2} L_\infty\right)$, автором были получены ранее критерии корректности в различных пространствах функций.

Оказывается, что любая корректная краевая задача указанного вида эквивалентна некоторой нелокальной двухточечной задаче.

<u>Теорема</u>. Если задача (1) - (2) корректно разрешима из пространства $\mathcal{H} = \bigcap_s H^s$ в пространство $C^1([0;T];\mathcal{H})$, то существуют такие матрицы $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ с элементами из $H^0_{-\infty}$, что разрешающий оператор задачи (1) - (2) совпадает с разрешающим оператором следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t); \tag{1}$$

$$C_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) + C_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(x). \tag{2'}$$

Множество корректных краевых задач вида (1) - (2') в пространстве $\mathcal{H}$ не пусто, чего нельзя сказать о корректности в пространствах экспоненциально растущих функций.

Указанная выше теорема не имеет места для нестационарных систем.

Из корректности задачи (1) - (2') будет следовать корректность краевой задачи для неоднородной системы с теми же краевыми условиями.

УДК 517.929 Малыгина В.В. /Пермь/

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Рассматривается скалярное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = a x(t) - \sum_{k=1}^{n} b_k x(t - \tau_k(t)), \quad t \in R_+, \qquad /1/$$

где $a \in R$, $b_k \in R_+$; $\tau_k: R_+ \to R_+$ – измеримые функции. Изучается равномерная и экспоненциальная устойчивость решений уравнения /1/. Введем обозначения:

$$b = \sum_{k=1}^{n} b_k; \quad \omega_0 = \max_k \overline{\lim_{t\to\infty}} \tau_k(t) > 0; \quad \omega_1 = \max_k \sup_t \tau_k(t);$$

$$\varphi(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\exp\left(\frac{1}{\beta}\exp\alpha\right), & \text{если } \alpha \neq 0; \\ \frac{1}{2} - \beta, \text{ если } \alpha = 0 & (\beta \in R_+). \end{cases}$$

Пусть α_0 – корень уравнения $\varphi(\alpha, e^{\alpha}) = -1$ / $\alpha_0 \approx 0,3$ /.

Т е о р е м а 1. Если $a\omega_0 \le \alpha_0$, $\varphi(a\omega_0, b\omega_0) > -1$, $a < b$, то уравнение /1/ экспоненциально устойчиво.

Т е о р е м а 2. Если $a\omega_1 \le \alpha_0$, $\varphi(a\omega_1, b\omega_1) \ge -1$, $a \le b$, то уравнение /1/ равномерно устойчиво.

С л е д с т в и е. Пусть в уравнении /1/ $a = 0$. Тогда:

/а/ если $0 < b\omega_0 < \frac{3}{2}$, то уравнение /1/ экспоненциально устойчиво;

/б/ если $0 \le b\omega_1 \le \frac{3}{2}$, то уравнение /1/ равномерно устойчиво.

Т е о р е м а 3. Если $0 < b\omega_0 \le 1$, $a < b$, то уравнение /1/ экспоненциально устойчиво.

Отметим, что теоремы 1 - 3 дополняют и обобщают результаты работ [1], [2].

1. Yoneyama T. // Tôhoku Math. J., 1989, 41, №2, p.217-236.
2. Amemiya T. // J. Math. Anal. and Appl., 1989, 142, №1, p.13-25.

УДК 517.977

Манита Л.А. (Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРОМ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Рассматривается задача об оптимальном параметрическом управлении осциллятором с переменной жесткостью:

$$t_1 \to \inf,$$

$$\ddot{x} + (1 - \epsilon u)x = 0,$$

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0, \quad x^2(t_1) + \dot{x}^2(t_1) = r^2,$$

$$0 \le u \le 1,\ 0 < \epsilon < 1,$$

где u — управление, ϵ — параметр.

Аналогичная задача при $r = 1$ была рассмотрена в качестве примера в [1]. Однако не был построен полный фазовый портрет, а найдена лишь часть кривой переключений, соответствующая последнему переключению.

В данной работе найдена в явном виде вся кривая переключений, построен фазовый портрет на плоскости (x, y). Изучена асимптотика кривых переключений при $r \to 0$. Доказано, что не существует кривой, предельной для последовательности кривых переключений при $r \to 0$.

[1] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука. 1974.

Г.В. Мартыненко (Воронеж)

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАННОМ ДИАПАЗОНЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Изучается система, состояние которой определяется как решение задачи

$$W_{tt} + AW = 0 \quad в \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \nu_A} = u \quad на \quad \partial\Omega \tag{2}$$

$$W(x,0) = W_0(x), \; W_t(x,0) = W_1(x) \tag{3}$$

Здесь A - коэрцитивный оператор второго порядка, Ω - компактная область с гладкой границей.

Вопрос о стабилизации системы (1)-(3) изучался многими авторами (см., например, [1]). Однако, проблема построения стабилизирующего воздействия u для каждой пары начальных данных $W_0(x)$, $W_1(x)$ остается весьма актуальной и в настоящее время.

Весьма полезными в приложениях оказываются методы, позволяющие построить управляющее воздействие, в результате которого за некоторое время стабилизации T система приводится к состоянию $W(x,T)$, $W_t(x,T)$, удовлетворяющему условиям

$$\int_\Omega W(x,T)\,\psi_k(x)\,dx, \quad 1 \le k \le m \tag{4}$$

$$\int_\Omega W_t(x,T)\,\psi_k(x)\,dx, \quad 1 \le k \le m \tag{5}$$

где $\psi_k(x)$ - некоторый набор собственных функций оператора A.

В настоящей работе изучаются методы приближенного решения сформулированной задачи в случае, когда функции $\psi_k(x)$ задаются приближенно.

Литература

1. Ж.-Л. Лионс. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - МИР, Москва, 1972.

УДК 517.944.1 Марченко В.М. (Минск)

УПРАВЛЕНИЕ ПО ТИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ *

Основное внимание в докладе концентрируется на таких основных проблемах качественной теории управления системами с запаздывающим аргументом, как задача стабилизации и задача модального управления. На примере этих задач проводится анализ эффективности использования при исследовании систем управления с последействием различных классов линейных регуляторов по типу обратной связи.

Исторически первым классом таких регуляторов служит линейная интегральная обратная связь вида

(1) $u(t)=\int_{-h}^{0} dQ(s)\,x(t+s),\ t>0,\ Q(s)\in R^{m\times n},$

введенная Н.Н.Красовским и Ю.С.Осиповым в 1963 г. для эффективного решения задачи стабилизации системы

(2) $\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t),\ t>0,\ (A, A_1\in R^{n\times n},\ h>0).$

Для решения проблемы модального управления обратная связь (1) оказывается уже недостаточной и в общем случае длину промежутка последействия приходится увеличивать, т.е.

(3) $u(t)=\int_{-\theta}^{0} dQ(s)\,x(t+s),\ t>0,\ Q(s)\in R^{m\times n},\ \exists\theta>h.$

Пусть далее мера Стилтьеса в (3) является дискретной и сосредоточена в точках $s=-jh$ $(j=0,1,\dots,N)$. Тогда получаем:

(4) $u(t)=\sum_{j=0}^{N} Q_j x(t-jh),\ t>0,\ Q_j\in R^{m\times n},\ j=0,1,\dots,N.$

Особый интерес представляет частный случай

(5) $u(t)=Q_0x(t)+Q_1x(t-h)$

регулятора (4), инвариантный по отношению к виду системы управления (2) при действии обратной связи.

Регуляторы (5), (4) удобны с точки зрения практической реализации, однако условия их существования представляются весьма стеснительными. Поэтому во многих случаях оказывается эффективным введение в регуляторе (4) запаздываний по управлению.

В заключение предлагается эффективный подход к построению интегральных регуляторов, основанный на известной из теории целых функций теореме Винера-Пэли.

---

* Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь

УДК 536.42

Матвеев М.Г., Сысоев В.В. (Воронеж)

АНАЛИЗ СПОСОБОВ ОЦЕНОК НАСТРОЕЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассматриваются разностные модели объекта регулирования типа "вход-выход":

$$A(z^{-1})\cdot y(i) = B(z^{-1})\cdot z^{-d}\cdot u(i), \qquad (1)$$

где $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}$; $B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M\cdot z^{-M}$

d - целое число тактов квантования, характеризующее время чистого запаздывания; z^{-1} - оператор временного запаздывания на 1 такт.

Цифровой регулятор описывается следующим выражением:

$$P(z^{-1})u(i) = Q(z^{-1})\cdot e(i) \qquad (2)$$

где $e(i) = y^{з}(i) - y(i)$; $P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \ldots + p_K z^{-K}$,

$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_L z^{-L}$.

Передаточная функция замкнутой системы регулирования имеет вид

$$W(z^{-1}) = \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})\cdot Q(z^{-1})\cdot z^{-d}}{A(z^{-1})\cdot P(z^{-1}) + B(z^{-1})\cdot Q(z^{-1})\cdot z^{-d}}. \qquad (3)$$

Полюса функции $W(z^{-1})$ определяются коэффициентами характеристического уравнения:

$$A^*(z^{-1}) = 0 \qquad (4)$$

где $A^*(z^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1\cdot z^{-1} + \ldots + \alpha_z\cdot z^{-z}$.

Коэффициенты α_i, $i=\overline{0,z}$ определяют качество работы регулятора (2).

В докладе анализируются способы определения настроечных параметров $Q(z^{-1})$ из следующего уравнения

$$A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})\cdot Q(z^{-1})\cdot z^{-d} = A^*(z^{-1}), \qquad (5)$$

при различных значениях порядков полиномов M, N, K, L и запаздывания d.

УДК 519.312 Меликян А.А. (Москва)

СВОЙСТВА ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Пусть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка задается равенством вида:

$$H(x,\ u(x),\ p) = \min\ \{H_0(x,\ u(x),\ p),\ H_1(x,\ u(x),\ p)\} = 0 \qquad (1)$$

$$p = p(x) = u_x(x), \quad x \in R^n, \quad H_i \in C^2$$

Рассматривается его классическое решение $u(x) \in C^1(D)$, определенное в окрестности $D \subset R^n$ точки x^*. Предполагается, что равенство

$$H_0(x,\ u(x),\ u_x(x)) = H_1(x,\ u(x),\ u_x(x)) \qquad (2)$$

определяет гладкую гиперповерхность $\Gamma \subset D$ без особых точек, $x^* \in \Gamma$, разбивающую область D на две подобласти: $D = D_0 + \Gamma + D_1$, в которых уравнение (1) принимает вид:

$$H(x,\ u,\ p) = \min\ \{H_0,\ H_1\} = H_i = 0, \quad x \in D_i, \quad i = 0,\ 1 \qquad (3)$$

Пусть на поверхности Γ выполнены неравенства

$$\langle n(x),\ H_{0p}\rangle > 0, \quad \langle n(x),\ H_{1p}\rangle < 0, \quad x \in \Gamma \qquad (4)$$

где $n(x)$ - нормаль к Γ в точке x, направленная в D_1. Пусть $u_i(x)$ - ограничения решения $u(x)$ на область D_i, $i = 0,\ 1$.

Теорема. Пусть H_i, u_i - достаточно гладкие функции; максимальный порядок непрерывных на Γ производных решения $u(x)$ равен $m \geq 1$. Тогда m - четное число, $m = 2d$, $d \geq 1$, функция $u(x)$ представима в виде: $u(x) = \max\ \{u_0(x),\ u_1(x)\}$, $x \in D$. В точках поверхности Γ справедливы условия:

$$(d = 1) \quad \{H_0H_1\} = 0, \quad \{\{H_0H_1\}H_0\} \leq 0, \quad \{\{H_1H_0\}H_1\} \leq 0 \qquad (5)$$

$$(d \geq 2) \quad \{H_0H_1\} = 0, \quad \{\ldots\{\{H_0H_1\}H_{j_3}\}\ldots H_{j_k}\} = 0,$$

$$(-1)^s\{\ldots\{\{H_0H_1\}H_{j_3}\}\ldots H_{j_r}\} \leq 0, \quad r = 2d+1, \quad k = 3,\ \ldots,2d$$

Здесь s - число нулевых компонент целочисленного вектора $j = (0,\ 1,\ j_3,\ \ldots,\ j_r)$.

Доказано, что соотношения (5) дают инвариантную запись и обобщение условий типа Келли и Коппа-Мойера в теории особых управлений.

УДК 517.983

Мельникова И.В., Альшанский М.А. /Екатеринбург/

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Для исследования вырожденной задачи Коши

/1/ $\qquad Bu'(t) = Au(t), \; t \geq 0, \; u(0) = x \in \mathcal{D}, \quad \ker B \neq \{0\}$

с замкнутым оператором $A: X \to Y$ и $B \in L(X,Y)$, где X, Y - банаховы пространства, применены полугрупповые и C-полугрупповые методы. Выделено естественное для данной задачи максимальное множество корректности $\mathcal{D}_1 \triangleq \{x \in \mathcal{D}(A): Ax \in \operatorname{Range} B\} \supset \mathcal{D}$ и в терминах условий на операторную функцию $(\lambda B - A)^{-1}B$, являющуюся обобщением резольвенты оператора A в случае $B = I$, получены необходимые и достаточные условия корректности задачи на этом множестве. Введено понятие вырожденной полугруппы, связанной с задачей /1/, и получены необходимые и достаточные условия ее существования.

Т е о р е м а 1. Пусть задача /1/ равномерно корректна на $\mathcal{D}_1$, тогда существуют $M>0$, $\omega \in \mathbb{R}$, такие, что

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \; \operatorname{Re}\lambda > \omega \quad \exists \; (\lambda B - A)^{-1}$;
2. $\forall n \quad \|(\lambda B - A)^{-1}B\|_{X_1} \leq M/(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \quad X_1 \triangleq \overline{\mathcal{D}}_1$.

Если выполнены условия 1, 2 на X, то задача /1/ равномерно корректна на $\mathcal{D}_1$. При этом существует сильно непрерывная по t полугруппа линейных ограниченных операторов $S(t)$, $t \geq 0$, действующих в X_1, такая, что для любого $x \in \mathcal{D}_1$ $U(t)x$ является решением задачи /1/.

Использованный в работе подход к постановке задачи и ее исследованию позволил, с одной стороны, рассмотреть принципиально иной класс задач по сравнению с изученными ранее, с другой стороны, получить результаты, отражающие специфику задачи $\ker B \neq \{0\}$ наилучшим образом за счет выбора максимального класса корректности.

Для задач, с операторами B, $-A$, удовлетворяющими условиям 1, 2, изучена краевая задача

/2/ $\qquad Bu'(t) = Au(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) + \varepsilon u(T) = x,$

и показано, что решение этой задачи дает регуляризующий алгоритм, полученный методом вспомогательных граничных условий для некорректной задачи /1/.

УДК 517.983

Мельникова И.В., Филинков А.И. /Екатеринбург/

ОБОБЩЕННАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ С ГЕНЕРАТОРОМ С-ПОЛУГРУППЫ

Из результатов, полученных Н.Танакой и Н.Оказавой /1990/ следует, что корректность задачи Коши в пространстве абстрактных распределений $\mathcal{D}'(X) \triangleq L(\mathcal{D}, X)$:

/1/ $$\left[\frac{dU_t}{dt}(\varphi)\right]x - A\left[U_t(\varphi)\right]x = \delta(\varphi)x, \quad x \in X, \quad \varphi - \varphi(t) \in \mathcal{D}$$

эквивалентна тому, что оператор A порождает локально интегрированную полугруппу. При этом доказано, что спектр оператора A расположен вне области $\{\lambda = \xi + i\eta : \xi > \alpha \log^+|\eta| + \beta, \operatorname{Re}\xi > \omega\}$, содержащей полуось $[\tilde{\omega}, \infty)$ при некотором $\tilde{\omega} > \omega$. Таким образом, обобщенная корректность задачи Коши с оператором A, порождающим С-полугруппу /например, задачи Коши для уравнения типа обратной теплопроводности/ в общем случае не может быть исследована с помощью абстрактных распределений. Для этой цели могут быть использованы новые обобщенные функции, введенные В.К.Ивановым и И.В.Мельниковой /1991/.

Построение пространств новых обобщенных функций основано на развитии идей Л.Шварца и А.Земаняна: в качестве оператора, применяемого к основным функциям, вместо дифференцирования берется неограниченный оператор P, дающий решение некорректной задачи, или оператор $P = C^{-1}$.

Т е о р е м а 1. Пусть самосопряженный оператор A, порождающий в гильбертовом пространстве базис из собственных функций $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, является генератором С-полугруппы $S(t)$. Тогда для любого $x \in \mathcal{T}_{-k}$, $k = 0, 1$, решение задачи Коши с оператором A существует, единственно и устойчиво в пространстве $\mathcal{T}_{-k-1}$:

/2/ $$\left\langle \frac{dU_t x}{dt}, \varphi \right\rangle = \langle AU_t x, \varphi\rangle, \ t \geq 0, \quad \langle U_0 x, \varphi\rangle = \langle x, \varphi\rangle, \ \varphi \in \mathcal{T}_{k+1}.$$

В пространстве $\mathcal{T}_{-\infty}$ задача /2/ является корректной по Адамару. ∎

Здесь

$$\mathcal{T}_k = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \exp(2k\lambda_n T) < \infty, \ \|x\|_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \exp(2k\lambda_n T)\right)^{1/2}, \ \mathcal{T}_{-k} = (\mathcal{T}_k)'.$$

При этом неограниченные операторы $U_t = C^{-1}S(t)$, дающие обобщенное решение задачи Коши /2/, удовлетворяют соотношениям

$$\forall \varphi \in \mathcal{T}_k, \ k \geq 1 \qquad \langle U_{t+s}x, \varphi\rangle = \langle U_t U_s x, \varphi\rangle,$$
$$\langle U_0 x, \varphi\rangle = \langle x, \varphi\rangle,$$

т.е. образуют полугруппу в пространстве новых обобщенных функций.

УДК 5I8.9

С.П.Меркурьев, О.А.Малафеев, В.Э. Попов (Санкт-Петербург)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Рассматриваются оптимизационные и игровые задачи, связанные с охраной окружающей среды от распространяющейся в атмосфере тяжелой полидисперсной смеси частиц, скорости падения которых определяются их размерами. Перенос частиц в воздухе описывается уравнением турбулентной диффузии. Для стационарных и мгновенных точечных источников приводятся аналитические решения уравнений, дающие концентрацию частиц на подстилающей поверхности и потоки частиц на эту поверхность.

Даны постановки некоторых оптимизационных и игровых задач. Минимизируемым функционалом является суммарное количество осадков, выпавших в пределах данной экологически важной зоны. Рассмотрена задача об оптимальном размещении источников и выборе в пределах данного района области X, в которой загрязнение будет минимальным. Рассматривается также антагонистическая игра , в которой I игрок за счет выбора положений и мощностей источников при заданном ветре стремится минимизировать количество осадков в области X, а II игрок за счет изменения положения X стремится минимизировать эту величину. Такая модель позволяет найти максимальный ущерб, который достигается действием наименее благоприятных природных факторов. Приводятся результаты численного решения этих задач для областей различной конфигурации.

УДК 517.551

Минин Л.А. (Воронеж)

АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕЗАРО

Преобразованием Чезаро порядка m ряда S с частичными суммами $S_0, S_1, S_2, \ldots$ называется величина (см., напр., [1])

$$\gamma_n^{(m)}[S] = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{n+m-k-1}^{m-1} S_k\right) / C_{n+m}^{m} .$$

Обозначим через $S_n = S_n(x, x_0)$ частичные суммы ряда Тейлора с центром в точке x_0 функции $f(x)$.

Теорема 1. Справедливо равенство

$$\gamma_n^{(m)}[f(x)] = \frac{m!(x-x_0)^{n+m+1}}{(n+m)!} \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{f(t)}{(x-t)^{m+1}}\right]_{t=x_0}.$$

В частности, при $m=0$

$$f(x) - S_n(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right]_{t=x_0}.$$

Обозначим через $[f(x)]^{[n/m]}$ аппроксимацию Паде функции $f(x)$ порядка $[n/m]$ (см., напр., [2]). Обобщением теоремы 2.3 из [3] является

Теорема 2. Справедливы равенства

$$[e^x]^{[n/m]} = \gamma_n^{(m)}[e^x] / \gamma_m^{(n)}[e^{-x}] ,$$

$$[tg\,\tfrac{x}{2}]^{[n/n]} = \gamma_n^{(n)}[\sin x] / \gamma_n^{(n)}[\cos x] ,$$

$$[(1-x)^{\alpha}]^{[n/m]} = \frac{(1-x)^n \gamma_n^{(m)}[(1+t)^{n-\alpha}]_{t=\frac{x}{1-x}}}{\gamma_m^{(n)}[(1-x)^{n-\alpha}]} .$$

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. - М.: Наука, 1969.

2. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. - М.: Наука, 1986.

3. Минин Л.А., Ситник С.М. Аппроксимация Паде элементарных и специальных функций. Препринт. - Владивосток, ИАПУ ДВО РАН, 1991, 22 с.

УДК 517.544 Миронова С.Р. / Казань /

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА РАЗОМКНУТОЙ ЖОРДАНОВОЙ КРИВОЙ

Пусть Γ - разомкнутая ориентированная жорданова кривая с началом a_1 и концом a_2, вообще говоря, неспрямляемая.

Определим сингулярный интеграл формулой

$$S_\Gamma \varphi(t) = \Phi^+(t) + \Phi^-(t), \tag{1}$$

где $\Phi^{+(-)}(t)$ есть предельное граничное значение регулярной в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ функции $\Phi(z)$ при подходе слева / справа / к кривой Γ и

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t),\ t \in \Gamma\setminus\{a_1, a_2\},\ \Phi(\infty) = 0; \tag{2}$$

$$\Phi(a_i) = O(|z - a_i|^{-\gamma}),\ \gamma = \gamma(\Phi) < 1.$$

Для гладких кривых определение (1) совпадает с классическим определением сингулярного интеграла $V.p.\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$.

Пусть $d(\Gamma)$ - верхняя метрическая размерность кривой Γ; $d_H(\Gamma)$ - размерность Хаусдорфа кривой Γ; $K_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-a_1}{z-a_2}$ - решение задачи (2) с единичным скачком $\varphi(t) \equiv 1$, ветвь логарифма выделяется посредством разреза по кривой Γ и условия $K_\Gamma(\infty) = 0$. Обозначим через $A_\Gamma(z) = \operatorname{Re} K_\Gamma(z)$. Будем предполагать, что существуют конечные пределы

$$\delta_j = \lim_{z\to a_j} \frac{A_\Gamma(z)}{\ln|z - a_j|};\ |\delta_j| < \infty,\ j = 1,2. \tag{3}$$

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$a(t)\varphi(t) + b(t) S_\Gamma \varphi(t) = f(t),\ t \in \Gamma, \tag{4}$$

где $a(t), b(t), f(t) \in H_\nu(\Gamma), \nu > 1 - \frac{1}{4}(2 - d(\Gamma))^2(2 - d_H(\Gamma))$, $a^2(t) - b^2(t) = 1$. Справедлива

Теорема. Пусть Γ - разомкнутая жорданова кривая, удовлетворяющая условию (3). Если выполняется неравенство

$$1 - \frac{1}{2}(2 - d(\Gamma))(2 - d_H(\Gamma)) < \lambda < 1 - 2(1-\nu)(2 - d_H(\Gamma))^{-1},$$

то сингулярное интегральное уравнение (4) имеет классическую картину разрешимости в пространстве $H_\lambda(\Gamma)$.

УДК 658.065:678.762.3

Мовшин А. О., Маркова Л. А. (Воронеж)

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ КОНТАКТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДМД

Изопреновые каучуки являются наиболее полными аналогами натурального каучука. Получение изопрена в результате контактного разложения диметилдиоксана (ДМД) является наиболее рентабельным по сравнению с другими способами получения изопрена. Однако с точки зрения управления этот процесс достаточно сложен. Он осуществляется в парогазовой фазе в реакторах полочного типа при высокой температуре в присутствии катализатора. Процесс разложения ДМД в изопрен сопровождается побочными реакциями, приводящими к дезактивации катализатора за счет отложения на его поверхности кокса и смол. Поэтому периодически реактор переключается на режим регенерации, во время которой осуществляется выжиг кокса и восстанавливаются свойства катализатора. Процесс регенерации является наиболее сложным и ответственным с точки зрения управления.

Целью управления на этапе контактирования является: а) подача сырья по заданной зависимости; б) стабилизация оптимального температурного режима для каждого слоя; в) достижение заданной конверсии. Поставленная цель достигается перераспределением пара по слоям реактора.

Целью управления регенерацией является восстановление свойств катализатора за время, не превышающее заданное, при соблюдении ограничений на температуру в реакторе, чтобы не допустить резкого возгорания кокса и перегрева катализатора. Экономическим критерием качества является минимизация энергозатрат. Поставленная цель достигается за счет регулирования: а) температуры на входе в реактор; б) регулировавания максимальной температуры в реакторе и температур на трех последних полках реактора. Управляющими воздействиями являются расходы острого и перегретого пара.

Проблема синтеза автоматизированной системы управления не может быть решена с использованием только классических методов оптимального управления по Понтрягину из-за отсутствия математической модели процесса. Поэтому в настоящей работе предлагается использование методов ситуационного управления с удовлетворением ряда критериев (быстродействие, ограничение фазового пространства состояний).

Алгоритмы управления используются в АСУТП контактного разложения ДМД.

УДК 517.95 В. Е. Назайкинский (Москва)

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказана локальная теорема существования и единственности решения в задаче Коши для переопределенной системы дифференциальных уравнений на комплексном многообразии в классе ветвящихся аналитических функций.

Пусть $\mathcal{M}$ — левый когерентный $\mathcal{D}_X$-модуль с простыми характеристиками на комплексном многообразии X. Рассматривается задача Коши для системы $\mathcal{M}$ на комплексном подмногообразии $Y \subset X$ в окрестности характеристической точки $x_0 \in Y$. Предполагается, что Y не целиком характеристично в окрестности точки x_0, т.е., что проекция на X множества $N^*Y \cap \mathrm{char}(\mathcal{M})$ является *собственным* аналитическим подмножеством в Y. В отл. ие от случая определенных систем, здесь уже сама постановка задачи Коши нетривиальна. Действительно, в нехарактеристическом случае данные Коши для переопределенной системы $\mathcal{M}$ суть решения индуцированной системы $\mathcal{M}_Y$; однако, в характеристических точках система $\mathcal{M}_Y$ перестает быть когерентной, и в результате указанная трактовка не согласуется более со стандартным пониманием данных Коши как задания джетов некоторого *конечного* порядка от неизвестных функций на подмногообразии Y. При определенных геометрических и аналитических условиях на пару $(\mathcal{M}, Y)$ получены следующие результаты: (а) построена всюду когерентная на Y "регуляризованная" индуцированная система $\tilde{\mathcal{M}}_Y$, изоморфная $\mathcal{M}_Y$ вне характеристических точек; (б) доказан изоморфизм

$$\mathcal{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\tilde{\mathcal{M}}_Y, \mathcal{O}_{Y,Z}^{\mathrm{ram}}) \simeq f^{-1}\mathcal{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X,\mathrm{cone}(Z)}^{\mathrm{ram}})$$

пучков решений систем $\tilde{\mathcal{M}}_Y$ и $\mathcal{M}$, соответственно, в классах ветвящихся аналитических функций $\mathcal{O}_{Y,Z}^{\mathrm{ram}}$ (аналитические функции на Y, ветвящиеся вокруг множества Z характеристических точек начального многообразия Y) и $\mathcal{O}_{X,\mathrm{cone}(Z)}^{\mathrm{ram}}$ (аналитические функции на X, ветвящиеся вокруг характеристического конуса $\mathrm{cone}(Z)$). Используемая в доказательстве конструкция обобщает процедуру униформизации для определенных систем, предложенную Ж. Лере.

Автор благодарен Б. Ю. Стернину и В. Е. Шаталову за внимание к работе и поддержку.

УДК 517. 956.6 Нахушева Ф.Б. (Нальчик)

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Для математического моделирования одномерного переноса в коллоидном капиллярнопористом теле поликапиллярной структуры А.В.Лыков в работе [1] предложил следующую систему

$$u = -\mathcal{D}_m \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} - \tau_{rm} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (2)$$

где $u = u(x,\tau)$ - поток; $v = v(x,\tau)$ - влажность в точке x в момент времени τ; $\tau_{rm} = \mathcal{D}_m / W_{rm}^2$; W_{rm} - величина, равная в первом приближении средней скорости капиллярного движения.

Из (1), (2) когда τ_{rm} не зависит от τ, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \mathcal{D}_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_{rm} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \qquad (3)$$

Функция $\tau_{rm} = \tau_{rm}(x)$ может обращаться в нуль при $x = 0$, например

$$\tau_{rm} = k_\alpha x^\alpha, \qquad (4)$$

где k_α и α - положительные постоянные величины.

В работе для уравнения (3) в случае (4) изучена смешанная задача:

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_\tau(x,0) = \mathcal{D}(x), \quad 0 \le x \le \ell,$$

$$u(0,\tau) = \varphi_0(\tau), \quad u(\ell,\tau) = \varphi_\ell(\tau), \quad 0 \le \tau \le T.$$

Исследование проводится методом редукции задачи к задачам Дарбу и Гурса. Особо анализируется поведение решения $u(x,\tau)$ задачи в окрестности угловой точки $(0,0)$.

Литература

1. Лыков А.В. - Инж.-физ.журнал. 1965, т.9, №3, с. 287-304.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Миннауки России

УДК 517.968

Новикова Л.В. /г.Ростов-на-Дону /

БИФУРКАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Исследуются условия, при которых у операторов $N_\delta: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ $(\delta \in R_1)$ в банаховом пространстве $\mathcal{U}$ рождаются инвариантные аттрактивные многообразия, гомеоморфные n-мерным торам для всюду плотного на отрезке $(0, \varepsilon)$ параметрической оси $(\delta \in R_1)$ множества $\mathcal{M}_\varepsilon$ значений параметра δ.

При этом мера $mes\, T_\varepsilon$ множества T_ε значений параметра $\delta \in (0, \varepsilon)$, для которых существует инвариантный притягивающий тор, соотнесенная к мере ε отрезка $(0, \varepsilon)$, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для значений параметра δ, принадлежащих к дополнению $(0, \varepsilon) \setminus T_\varepsilon$ множества T_ε, структура аттракторов динамической системы / каскада / $\{N_\delta^k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, представляется весьма сложной, причём сколь угодно малые изменения параметра $\delta \in (0, \varepsilon)$ полностью меняют качественную структуру аттракторов каскада $\{N_\delta^k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Литература

1. Николенко Н.В. О приводимости нелинейных эволюционных уравнений к линейной нормальной форме, ДАН СССР, 1983, 268:3, 545-547.

2. Новикова Л.В. Об одном бесконечномерном аналоге теоремы Зигеля, Функц.анализ и его приложения, 16, вып.2, 1982, 78-79.

УДК 517.948 Курекенов Т.К. (Алма-Ата)

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ СО СТЕПЕННЫМ РОСТОМ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ПРАВОЙ ЧАСТИ ПО U

В работе приводится новый подход получения решения нелинейного уравнения мембраны вида

$$U_{tt}-U_{xx}-U_{yy}=F(t,x,y,U,U_x,U_y,U_t)$$

с краевым и начальным условиями, когда правая часть по U_x, U_y, U_t удовлетворяет условию Липшица, а по U имеет степенной рост любого порядка с помощью метода Фурье и следующей простой леммы.

Лемма. Всякое ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства $\overset{\circ}{w}{}_2^1=\left\{u=\{u_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}: \|\bar{m}u\|_2+\|\bar{n}u\|_2<\infty\right\}$, где $\|\bar{m}u\|_2^2=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}(mu_{mn})^2$, $\|\bar{n}u\|_2^2=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}(nu_{mn})^2$ является ограниченным замкнутым выпуклым множеством пространства $l_2=\left\{u:\|u\|_2^2=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}(u_{mn})^2\right\}$, причем $\overset{\circ}{w}{}_2^1$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1((0,\pi)^2)$ топологически эквивалентны.

Основные результаты доклада опубликованы в журнале " Известия АН Республики Казахстан, сер. физико-математическая, 1992, № 5, с. 30-40.

УДК 517.982.27

Овчинников В.И. (Воронеж)*

Интерполяционные соотношения для классов Неймана-Шаттена операторов, действующих в гильбертовых парах.

Пусть $\overline{H}=\{H_0,H_1\}$ - регулярная гильбертова пара, $S_p(H)$ - класс операторов Неймана-Шаттена, отображающих пространство в себя.

Оказывается, что для $1\leq p_0,p_1\leq\infty$

$$[S_{p_0}(H_0),S_{p_1}(H_1)]_\theta=S_{p_\theta}(H_\theta),$$

где $1/p_\theta=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, $H_\theta=[H_0,H_1]_\theta$, а $[\cdot,\cdot]_\theta$ - первый комплексный метод интерполяции Кальдерона, и

$$[L(H_0),L(H_1)]^\theta=L(H_\theta),$$

где $[\cdot,\cdot]^\theta$ - второй комплексный метод интерполяции.

Для вещественного метода интерполяции Лионса-Петре удается получить

$$(S_1(H_0),S_1(H_1))_{\theta,1}=N(\overline{H}^0_{\theta,\infty}\to\overline{H}_{\theta,1})$$

где $N(X\to Y)$ - пространство ядерных операторов, отображающих X в Y ; а

$$(L(H_0),L(H_1))_{\theta,\infty}=L(\overline{H}_{\theta,1}\to\overline{H}_{\theta,\infty}).$$

Оказалось, что интерполяционные пространства для пар вида $\{S_{p_0}(H_0),S_{p_1}(H_1)\}$ имеют форму $\Phi(H_\theta)$, где Φ - симметрично-нормированный идеал, довольно редко. Так, если пара $\overline{H}$ спектрально полна, то пространство $\Phi(H_\theta)$ является промежуточным пары $\{S_{p_0}(H_0),S_{p_1}(H_1)\}$ тогда и только тогда, когда $\Phi=S_{p_\theta}$. Существуют, однако, пары с разряженным спектром, для которых, например,

$$\Phi_0(H_0)\cap\Phi_1(H_1)\subset(\Phi_0\cap\Phi_1)(H_\theta)\subset(\Phi_0+\Phi_1)(H_\theta)\subset\Phi_0(H_0)+\Phi_1(H_1)$$

для любых симметрично-нормированных идеалов Φ_0,Φ_1 .

---

*Эта работа была выполнена во время посещения автором факультета экономики Университета Карлоса III в Мадриде и частично поддержана грантом DGICYT 90-187.

УДК 517 948 Павленко В.Н. (Челябинск)

Об одном классе задач управления распределенными системами с разрывными нелинейностями

Управляемая система в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ описывается уравнением

$$-\Delta w(x) + g(x, w(x)) = v(x), \quad x \in \Omega \qquad (1)$$

с граничным условием $$w|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (2)$$

где Δ - оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, функция $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева ($mod\ 0$), у которой для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, управление $v \in L_q(\Omega)$, $2n/(n+2) < q \leq 2$. Решением задачи (1) - (2) при фиксированном управлении v будем называть функцию $w \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую для почти всех $x \in \Omega$ включению $\Delta w(x) + v(x) \in [g_-(x, w(x)), g_+(x, w(x))]$, здесь $g_-(x,w) = \min(g(x,w-), g(x,w+))$, $g_+(x,w) = \max(g(x,w-), g(x,w+))$. Пара (v_0, w) называется допустимой для системы (1) - (2), если $v_0 \in L_q(\Omega)$, а w - решение задачи (1) - (2) при $v = v_0$. На множестве $\mathcal{D}$ всех допустимых пар для системы (1) - (2) рассматривается целевая функция $J(v,w) = \|w - w_0\|_Z^{\ell} + A\|v\|^{\mu}_{L_q(\Omega)}$, где ℓ, A, μ - положительные константы, а Z функциональное пространство на Ω, в которое $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ непрерывно вложено, $w_0 \in Z$. Ставится задача о нахождении $(u, z) \in \mathcal{D}$ такой, что

$$J(u, z) = \inf_{\mathcal{D}} J(v, w) \qquad (3)$$

Вариационным методом доказывается существование решения задачи (3) в предположении, что

1) $|g(x,w)| \leq a|w|^{p-1} + b(x)$ $\forall w \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$, $a > 0$, $p = q/(q-1)$, $b \in L_q(\Omega)$;

2) $g(x,w)\cdot w \geq -kw^2 - k_1(x)|w|^{2-\gamma} - k_2(x)$ $\forall w \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$, $0 < \gamma < 2$, $k_1 \in L_{2/\gamma}(\Omega)$, $k_2 \in L_1(\Omega)$, постоянная k такая, что $1 - kC > 0$, где C константа в неравенстве Стеклова

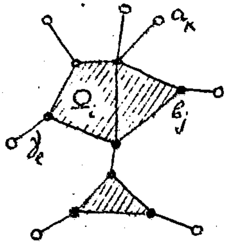
$$\int_\Omega u^2(x)\,dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_\Omega (\partial u/\partial x_i)^2 dx \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

УДК 517.927

Пенкин О.М. (Воронеж)

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ДВУМЕРНОМ КЛЕТОЧНОМ КОМПЛЕКСЕ

Эллиптическим уравнением на двумерном комплексе G (множестве типа приведённого на рисунке) мы называем уравнение



$$Lu=0 \qquad (1)$$

которое на двумерных клетках, многоугольниках Ω_i, является уравнением вида

$$div(p_i grad u_i)=0$$

(u_i - сужение u на Ω_i) ; на одномерных клетках (рёбрах γ_i), сторонах многоугольников, является обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$(p^i u^{i\prime})' - \sum_{j\in I(\gamma_i)} p_j \frac{\partial u_j}{\partial n_j} = 0,$$

где u^i - сужение u на γ_i, а суммирование производится по всем многоугольникам Ω_j, стороной которых является γ_i (таких многоугольников может быть больше двух); $n_j = n_j(x)$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega_j$ в точке $x\in\gamma_i$. На рёбрах, не являющихся сторонами многоугольников, уравнение (1) имеет вид

$$(p^i u^{i\prime})' = 0.$$

На нульмерных клетках b_j, не являющихся тупиковыми (на рисунке a_k - тупик) - внутренних вершинах G, уравнение (1) имее вид

$$\sum_{i\in I(b_j)} p^i u^{i\prime}(b_j) = 0. \qquad (2)$$

Здесь суммирование по рёбрам, примыкающим к b_j. Все коэффициенты предполагаются гладкими и положительными. Производные в (2) вычисляются по направлению "от b_j".

<u>Теорема</u> (сильный принцип максимума). Если u субэллиптична (т.е. $Lu\geq 0$ на G) и имеет внутри G (на множестве $G\setminus(\cup\{a_i\})$, a_i - тупики) точку максимума, то $u\equiv const$ на G.

Отсюда следует, что максимум субэллиптичной на G функции всегда достигается на границе $\partial G = \cup\{a_i\}$ - на множестве тупиков G.

УДК 62.50

Перов А.И. (Воронеж)

ИЗУЧЕНИЕ МАТРИЧНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$S = \mathfrak{F}(S) \equiv \Phi^*S\Phi - \Phi^*S\Gamma(C+\Gamma^*S\Gamma)^{-1}\Gamma^*S\Phi + R, \quad (1)$$

где квадратная матрица S является искомой, а остальные матрицы заданы, причем $R=R^*\geq 0$, $C=C^*\geq 0$ (неравенства понимаются в смысле квадратичных форм). Ядра $\ker R$ и/или $\ker C$ могут быть нетривиальными (сингулярный случай). При изучении уравнения (1) важную роль играет выпуклый конус

$$\mathcal{K} = \{S \in R^{n\times n} : S = S^*,\ S \geq 0,\ C+\Gamma^*S\Gamma > 0\}. \quad (2)$$

Теорема. 1) Конус $\mathcal{K}$ не пуст тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$C+\Gamma^*\Gamma > 0 \quad (\Leftrightarrow \ker C \cap \ker \Gamma = 0). \quad (3)$$

2) Оператор $\mathfrak{F}$ отображает конус $\mathcal{K}$ в себя, $\mathfrak{F}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ в том и только в том случае, когда выполнено неравенство

$$C+\Gamma^*R\Gamma > 0 \quad (\Leftrightarrow \ker R \cap \Gamma(\ker C) = 0). \quad (4)$$

3) Стабилизирующее решение S уравнения (1) положительно тогда и только тогда, когда не существует $0 \neq x \in \ker R$, $u \in \ker C$, $|\lambda|<1$, таких, что $\Phi x + \Gamma u = \lambda x$. (5)

4) Пусть пара (Φ,Γ) является ℓ_2 – управляемой и выполнены условия (3)-(5). Тогда уравнение (1) имеет единственное стабилизирующее решение S и это решение положительно. Оно может быть получено методом последовательных приближений

$$S_{k+1} = \mathfrak{F}(S_k), \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad (6)$$

отправляясь от произвольной матрицы $S_0 \in \mathcal{K}$.

Возможно, что утверждение (3) может быть получено из частотной теоремы Калмана-Якубовича [1].

1. Фомин В.Н. Методы управления линейными дискретными объектами. Ленинград, Изд-во Ленинградского университета, 1985, 336 с.

УДК 62.50 Перов А.И., Тананика А.А., Федоренкова С.В.
(Воронеж)

ОБ ОДНОМ КОНТР-ПРИМЕРЕ

Рассмотрим матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$S = \Phi^* S \Phi - \Phi^* S \Gamma (C + \Gamma^* S \Gamma)^{-1} \Gamma^* S \Phi + R \equiv \mathcal{F}(S), \quad (1)$$

в котором все матрицы, кроме S, заданы, причем матрицы R и C симметричны и положительно определены: $R = R^* > 0$, $C = C^* > 0$ ($R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$). Оператор $\mathcal{F}$ отображает выпуклый конус

$$\mathcal{K} = \{ S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S = S^* \geqslant 0 \}$$

в себя и является монотонным на нем.

ГИПОТЕЗА (сравни с [1], с.130). Для любой симметрической положительно определенной матрицы S можно указать такое число $\alpha \geqslant 1$, что

$$\mathcal{F}(\alpha S) \leqslant \alpha S. \quad (2)$$

К сожалению, как это следует из приводимого ниже примера, это гипотеза не верна. Пусть $m=1$ и $n=2$. Тогда

$$\mathcal{F}(S) = \frac{c}{c + \Gamma^* S \Gamma} \Phi^* S \Phi + \frac{\det S}{c + \Gamma^* S \Gamma} \Phi^* \begin{pmatrix} \gamma_2^2 & -\gamma_1 \gamma_2 \\ -\gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1^2 \end{pmatrix} \Phi + R,$$

где $\Gamma = \mathrm{col}\,(\gamma_1, \gamma_2)$. Положим $\nu = \mathrm{col}\,(\gamma_2, -\gamma_1)$ и предположим, что $\Phi^* \nu \neq 0$. Фиксируем матрицу S и вектор x, для которого $(\Phi^* \nu, x) \neq 0$. Тогда из (2) получаем

$$\frac{c}{c + \alpha(\Gamma, S\Gamma)} (\Phi x, S \Phi x) + \frac{\alpha \det S (\Phi^* \nu, x)^2}{c + \alpha(\Gamma, S\Gamma)} + \frac{(x, Rx)}{\alpha} \leqslant (x, Sx) \quad (3)$$

Обозначим через M минимум суммы первых двух слагаемых при $0 \leqslant \alpha < \infty$; этот минимум положителен. Заменив в (3) Φ на $\sigma \Phi$ и отбросив слева третье слагаемое, приходим к оценке $\sigma^2 M \leqslant (x, Sx)$. Поэтому при $\sigma > ((x, Sx)/M)^{1/2}$ неравенство (3), в котором Φ заменена на $\sigma \Phi$, не выполнено ни при каком α, $0 < \alpha < \infty$.

1. Фомин В.Н. Методы управления линейными дискретными объектами. Ленинград, Изд-во Ленинградского университета, 1985, 336 с.

УДК 517.978.4 Петров Н.Н. (Ижевск)

КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В конечномерном пространстве R^ν рассматривается движение конфликтно-управляемого объекта $z=(z_1,\ldots,z_n)$, описываемое системой вида

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i,v),\ z_i \in R^{n_i},$$
$$z_i(0)=z_i^0,\ u_i\in U_i\subset R^{n_i},\ v\in V\subset R^m,\ i=1,2,\ldots,n. \qquad (1)$$

Терминальное множество M состоит из множеств M_i, каждое из которых представимо в виде $M_i = M_i^1 + M_i^2$, где M_i^1 – линейное подпространство R^{n_i}, M_i^2 – выпуклый компакт, принадлежащий L_i^1 – ортогональному дополнению к M_i^1 в R^{n_i}. Дополнительно в пространстве R^m заданы: L – линейное подпространство, система вида

$$\dot{y} = Ay + v,\ v\in V,\ y(0) = y^0 \qquad (2)$$

и множество D вида

$$D=\{y \mid y\in R^m,\ \langle p_j, \pi y\rangle \le \mu_j,\ j=1,2,\ldots,r\}, \qquad (3)$$

где $p_1,\ldots,p_r$ – единичные векторы, $\pi : R^m \to L$ – оператор ортогонального проектирования, $\mu_1,\ldots,\mu_r$ – вещественные числа, такие что $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$.

Данный конфликтно-управляемый процесс описывает дифференциальную игру между группой преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и убегающим E, причем условия (2),(3) являются дополнительными ограничениями для E. Получены достаточные условия поимки. В качестве примера рассматривается обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина со многими участниками и фазовыми ограничениями на состояния убегающего при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков.

УДК 517.9 Плотников В. А., Плотникова Л. И. (Одесса)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И R - УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x,\varepsilon) \quad , x(0) \in K \subset comp(R^n). \qquad (1)$$

Многозначная функция $R(t)$ называется [1] R - решением, порожденным дифференциальным включением (1), если при каждом t множество $R(t)$ замкнуто, функция $R(t)$ абсолютно непрерывна и для почти всех t

$$\lim_{\Delta\to+0} \frac{1}{\Delta} h(R(t+\Delta), \bigcup_{x\in R(t)} (x + F(t,x)\cdot\Delta) = 0 , \qquad (2)$$

где $h(\cdot,\cdot)$ - расстояние по Хаусдорфу.

R -решение $F(t)$ дифференциального включения (1) будем называть [2] устойчивым по Ляпунову, если для любого $\eta > 0$ и $t_0 \in [0,\infty)$ можно указать $\delta(\eta,t_0) > 0$ такое, что

1) все R - решения $Y(t)$ дифференциального включения (1), удовлетворяющие условию

$$h(Y(t_0), R(t_0)) < \delta(\eta,t_0) \qquad (3)$$

определены для всех $t \ge t_0$;

2) для решений, удовлетворяющих неравенству (3) выполняется неравенство

$$h(Y(t),R(t)) < \eta$$

для всех $t \ge t_0$.

Асимптотическая устойчивость R - решений определяется аналогично.

В докладе приводятся результаты по обоснованию асимптотических методов на конечном и бесконечном промежутках с использованием сформулированного определения R - устойчивости. Рассмотрены также вопросы асимптотического построения множества достижимости.

Литература.

1. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во БГУ, 1977. -206с.

2. Плотников В. А. Метод усреднения в задачах управления. Киев - Одесса: Лыбидь, 1992. -188с.

Ю.В.Покорный, А.В.Боровских

О СИСТЕМЕ ХААРА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Как принято считать, знаменитые интерполяционные свойства Чебышева-Хаара имеют сугубо одномерную природу: Дж. Мэрхьюбером в 1956 г. было показано, что для произвольной системы функций $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ / $n \geq 2$ / неравенство Хаара

$$\Delta\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} \overset{def}{=} \det\|x_i(t_j)\|_{i,j=1}^n \neq 0 \qquad (I)$$

может выполняться для всех попарно различных t_i из некоторого компакта K лишь если K гомеоморфен окружности или её части. Оказывается, однако, что неравенство (I), с некоторыми естественными оговорками, всё-таки может быть распространено на системы функций, заданных на множестве более сложной, квазидвуморной природы - геометрическом графе.

Пусть Γ - граф-дерево /граф без циклов/. Под линейной на графе функцией $x(t)$ мы будем понимать всякое решение дифференциального уравнения $x'' = 0$ на графе Γ. Это уравнение, как обычно, "включает" в себя условия непрерывности решений и склейки их производных во внутренних вершинах графа. Множество линейных функций на графе-дереве имеет, как известно, размерность, равную числу n граничных вершин графа; можно считать, что в пространстве таких функций фиксирован некоторый базис $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Набор точек $(t_1, \dots, t_n)$ / $t_i \in \Gamma$ / будем называть регулярным, если он может быть переведен в граничные вершины графа /которых тоже n штук/ по непрерывным взаимно не пересекающимся кривым $\varphi_i(\tau) : [0,1] \to \Gamma$; $\varphi_i(0) = t_i$; $\varphi_i(1) \in \partial\Gamma$. Множество всех регулярных наборов относительно открыто в Γ^k и распадается на $n!$ компонент связности; точки одной компоненты могут быть получены из точек другой путем перенумерации t_i в другом порядке.

Т е о р е м а. Для однозначной разрешимости интерполяционной задачи $x(t_i) = \xi_i$ / $i = 1, \dots, n = |\partial\Gamma|$/ в классе линейных на графе функций (или, что то же самое, невырожденности матрицы (I) для базисных функций $x_i(\cdot)$) необходимо и достаточно, чтобы набор $(t_1, \dots, t_n)$ был регулярным.

УДК 517.9

Покровский А.Н. (С.-Петербург)

СИНХРОНИЗАЦИЯ БЫСТРЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ СРЫВЕ

Сингулярно возмущённая система дифференциальных уравнений, зависящая от параметра κ, $\kappa \geq 0$:

$$\varepsilon \dot{x}_1 = f_1(x_1, y_1) + \kappa(x_2 - x_1); \quad \dot{y}_1 = g_1(x_1, y_1); \quad x_1(0) = x_1^0; \quad y_1(0) = y_1^0; \qquad (I)$$
$$\varepsilon \dot{x}_2 = f_2(x_2, y_2) + \kappa(x_1 - x_2); \quad \dot{y}_2 = g_2(x_2, y_2); \quad x_2(0) = x_2^0; \quad y_2(0) = y_2^0,$$

при $\kappa = 0$ распадается на две автономные системы типа Ван-дер-Поля, решения которых - релаксационные колебания. Обозначим корни уравнений $f_i(x_i, y_i) = 0$ как $x_i = \varphi_{i1}(y_i)$; $\varphi_{i2}(y_i)$; $\varphi_{i3}(y_i)$. $\varphi_{i1} \leq \varphi_{i3} \leq \varphi_{i2}$, $i = 1;2$. Ветви φ_{i1}, φ_{i2} - устойчивые, φ_{i3} - неустойчивые. Пусть x_1^0, y_1^0 - точка срыва при $\kappa = 0$: $x_1^0 = \varphi_{11}(y_1^0)$, $f_{1x}(x_1^0, y_1^0) = 0$; x_2^0, y_2^0 находится на устойчивой ветви: $x_2^0 = \varphi_{21}(y_2^0)$, $f_{2x}(x_2^0, y_2^0) < 0$. Тогда в невозмущённой системе (I) при $\kappa = 0$ в момент $t = 0$ происходит скачок к точке $\varphi_{12}(y_1^0)$, $\varphi_{21}(y_2^0)$, затем движение по устойчивому корню до точки срыва x_2^c, y_2^c, и скачок к той ветви устойчивого корня, к которой принадлежит $\varphi_{12}(y_1^0)$, $\varphi_{22}(y_2^0)$.

<u>Утверждение I.</u> Существует такое $\kappa_1 > 0$, что при $0 \leq \kappa < \kappa_1$ в невозмущённой системе (I) в момент $t_1 = 0(\kappa)$ происходит скачок к устойчивому корню в окрестности $\varphi_{12}(y_1^0)$, $\varphi_{21}(y_2^0)$. Существует такое $\kappa_2 > \kappa_1$, что при $\kappa \geq \kappa_2$ в невозмущённой системе (I) происходит скачок к той ветви устойчивого корня, к которой принадлежит $\varphi_{12}(y_1^0)$, $\varphi_{22}(y_2^0)$.

<u>Утверждение 2.</u> При $\kappa > 0$ существует такое $y_2^{(1)}$, что при $y_2^0 < y_2^{(1)}$, $x_2^0 = \varphi_{21}(y_2^0)$ в невозмущённой системе (I) происходит скачок к устойчивому корню в окрестности $\varphi_{12}(y_1^0)$, $\varphi_{21}(y_2^0)$. Существует такое $y_2^{(2)} < y_2^c$, $f_{2x}(x_2^c, y_2^c) = 0$, что при $y_2^{(2)} < y_2^0 < y_2^c$ в невозмущённой системе (I) происходит скачок к той ветви устойчивого корня, к которой принадлежит $\varphi_{12}(y_1^0)$, $\varphi_{22}(y_2^0)$.

<u>Следствие.</u> Асимптотическое разложение быстрых движений в возмущённой системе (I) при $\varepsilon > 0$ в этих двух случаях различно.

Из полученного результата вытекает, что в общем случае конечной размерности "быстрых" переменных, большей, чем единица, для построения асимптотического разложения быстрых движений необходима предварительная классификация быстрых движений и вид разложения для разных классов будет различен.

УДК 517.95 Пономарёв А.К. (Пермь, ПГТУ)

Введение понятия вращения для одного класса некомпактных липшицевых отображений.

Пусть X - банахово пространство с мерой некомпактности $\chi(\cdot)$, $X \supset \Omega$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega$ и $\chi(\partial\Omega)=a<\infty$. Определим следующие классы отображений и гомотопий :

$$\Phi_1 = \{ f : \partial\Omega \to X\backslash\theta,\ k\text{-липшицевы} \},$$
$$H_1 = \{ h : \partial\Omega\times[0,1] \to X\backslash\theta \mid h(x,0)\in\Phi_1,\ h(x,1)\in\Phi_1,\ k\text{-лип.} \},$$
$$\Phi_0 = \{ f : \partial\Omega \to X\backslash\theta,\ k\text{-липшицевы конечномерные} \},$$
$$H_0 = \{ h : \partial\Omega\times[0,1] \to X\backslash\theta \mid h(x,0)\in\Phi_0,\ h(x,1)\in\Phi_0,\ k\text{- липшицевы конечномерные} \}.$$

Если гомотопии $h(x,t)$ допускают замены переменных

$$h_1(x,t)=h_0(x,1-t),\quad h_0(x,t)\equiv f(t),\quad h_3(x,t)=\begin{cases} h_1(x,2t),\ t\in[0,\frac{1}{2}] \\ h_2(x,2t-1),\ t\in[\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

то гомотопии из H_i определяют отношение эквивалентности в Φ_i. Пусть $f\in\Phi_1$. По определению $\chi(\Omega)$: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ A=\{y_i\}_{i=1}^{N}$-конечная $(a+\varepsilon)$-сеть на множестве $f(\partial\Omega)$. По ней построим проектор Шаудер'а $P_{k(a+\varepsilon)}: f(\partial\Omega)\to E_n=\overline{co}A$. Если отображения и гомотопии из $\{\Phi_0,H_0\}$ и $\{\Phi_1,H_1\}$ удовлетворяют условиям

$\forall f_1\in\Phi_1\ \exists\ f_0\in\Phi_0;\ h\in H_1 : f_1 \overset{h}{\sim} f_0$;

$(f_1,f_2\in\Phi_0,\ h_1\in H_1 : f_1 \overset{h_1}{\sim} f_2) \Rightarrow \exists h_0\in H_0 : f_1 \overset{h_0}{\sim} f_2$;

$\forall x\in\partial\Omega : \|fx - P_{k(a+\varepsilon)}\circ fx\| < k(a+\varepsilon)$ и выполнено хотя бы одно из неравенств $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|fx\|>k\cdot a$, $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|P_{k(a+\varepsilon)}\circ fx\|>k\cdot a$, $\min\limits_{y_i\in A}\|P_{k(a+\varepsilon)}\circ f y_i\|>k\cdot a$,

а также условие $\forall x\in\partial\Omega$: $fx\neq const$,

то для $f\in\Phi_1$ можно определить вращение $\gamma(f,\partial\Omega)$ формулой

$$\gamma(f,\partial\Omega)\overset{def}{=}\gamma(f_0,\partial\Omega),\quad f_0\sim f,\quad f_0\in\Phi_0.$$

Посвянский В.П. (Москва)

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается задача оптимального управления для системы с распределенными параметрами вида

$$C(h)u+K(h)\frac{\partial u}{\partial t}+M(h)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{r} \delta(x-x^i)f_i(t)+F(x,t).$$

Здесь $x, x^i \in D \subset \mathbb{R}^n$; $h = h(x) > 0$; $t \in [0,T]$;
$u = u(x,t)$ – функция, удовлетворяющая нулевым начальным и однородным краевым условиям. $C(h)$ – эллиптический дифференциальный оператор 4 - го порядка. $K(h) = 2kC(h)$, где $0 < k << 1$.

$M(h)$ – положительная функция от h, $\delta(x-x^i)$ – функции Дирака, сосредоточенные в точках x^i, $f_i(t)$ – управления.

Требуется найти оптимальные управления $f_i(t)$ и точки x^i, минимизирующие функционал энергии

$J = \langle C(h)u, u \rangle + \langle M(h)\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \rangle$, при ограничении

$$\sum_{i=1}^{r} \int_0^T f_i^2(t)dt \leqslant C_f,$$

где $\langle \; , \; \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(D)$,

C_f – ресурс управления.

Поставленная задача может быть сведена к решению системы интегральных уравнений Фредгольма 2 - го рода, а последняя – к бесконечномерной системе линейных уравнений. Исследуется вопрос об аппроксимации данной задачи конечномерной моделью. Получена ассимптотическая оценка остатка.

УДК 517.9

Провоторов В.В., Дикарева Е.В. (Воронеж)

О ФУНКЦИИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НА СЕТИ

На сети S, состоящей из $m+n$ полуинтервалов $\Delta_i = (a_i, b]$, $i=\overline{1,m}$ (ориентированных "к b"), $\Delta_{m+i} = [b, a_{m+i})$, $i=\overline{1,n}$ (ориентированных "от b") имеющих одну общую точку b, зададим "дифференциальное уравнение" $Lu=f$ на S соотношениями:

$$-(pu')' + qu = f, \quad t \in S \setminus \{b\},$$
$$u_1(b) = u_2(b) = \ldots = u_{m+n}(b),$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i u_i'(b) = \sum_{i=1}^{n} p_{m+i} u_{m+i}'(b).$$

Здесь функции $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $f(\cdot)$ определены и обладают известной гладкостью на $\bar{S}$: $u_i^{(k)}(b) = \lim\limits_{\substack{t\to b \\ (t\in\Delta_i)}} u^{(k)}(t)$

$p_i(b) = \lim\limits_{\substack{t\to b \\ (t\in\Delta_i)}} p(t)$, $i=\overline{1,m+n}$ $(k=0,1)$.

Аналогично классическому случаю (дифференциальное уравнение на оси) вводится понятие линейной независимости функций на сети S.

Лемма. Среди функций $\varphi_k(\cdot)$, $k=\overline{1,m+n}$, являющихся линейно независимыми решениями уравнения $Lu=0$ на S, найдется пара функций $\varphi_{k_1}(\cdot)$, $\varphi_{k_2}(\cdot)$ линейно независимых на каждом из Δ_i, $i=\overline{1,m+n}$.

Обозначим $W\{\varphi_{k_1},\varphi_{k_2}\} = \begin{vmatrix} \varphi_{k_1}(t) & \varphi_{k_2}(t) \\ p\varphi_{k_1}'(t) & p\varphi_{k_2}'(t) \end{vmatrix}$, $t\in S\setminus\{b\}$;

$$S(t) = \begin{cases} \left(\bigcup\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \Delta_i\right) \cup [a_j, t], & t\in\Delta_j,\ j=\overline{1,n}; \\ \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} \Delta_i\right) \cup [b, t], & t\in\Delta_{m+i},\ i=\overline{1,n}. \end{cases}$$

очевидно $W\{\varphi_{k_1},\varphi_{k_2}\}\neq 0$ на $S\setminus\{b\}$ и $S(t)\subset S$, $\forall t\in S$.

Теорема. Функция $u(t) = \int\limits_{S(t)} C(t,s) f(s)\,ds$, где

$$C(t,s) = \frac{1}{W\{\varphi_{k_1},\varphi_{k_2}\}} \begin{vmatrix} \varphi_{k_1}(s) & \varphi_{k_2}(s) \\ \varphi_{k_1}(t) & \varphi_{k_2}(t) \end{vmatrix}, \quad t, s \in S\setminus\{b\}$$

является решением уравнения $Lu = f$ на сети S.

Замечания. 1) Функция $C(t,s)$ — аналог функции Коши в классическом случае.

2) Функция Грина для краевой задачи для уравнения $Lu=f$ строится по функции $C(t,s)$ аналогично классической.

УДК 517.956 Пулькина Л.С. /Самара/

О РАЗРЕШИМОСТИ В КЛАССЕ L_2 ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Вырождающееся гиперболическое уравнение

$$y^m u_{xx} - u_{yy} + a u_x + b u_y + c u = f(x,y)$$

рассматривается в симметричной относительно линии параболического вырождения $y=0$ характеристической области. Для него изучается нелокальная задача, которая заключается в отыскании решения уравнения, если известны некоторые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, связывающие значения искомого решения на характеристиках различных семейств.

Получена априорная оценка, в которой L_2 - норма решения оценивается через L_2 - нормы данных задачи, и установлена однозначная разрешимость поставленной нелокальной задачи, если $f(x,y) \in L_2(D)$, $y^m\varphi(y) - \psi(y) \in L_2(-1,1)$, а коэффициенты $a(x,y) \in C^1(\bar{D})$, $b(x,y) \in C^1(\bar{D})$, $c(x,y) \in C(\bar{D})$ и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

УДК 517.968 Пуляев В.Ф. (Краснодар)

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

Рассматриваются интегральные уравнения вида

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)x(s)ds+f(t)\quad(t\in R^1;\ x,f\in R^n),\qquad (1)$$

в которых ядро $K(t,s)$ является периодической (почти периодической) матрицей. Такие ядра являются естественным обобщением разностных ядер ($K(t,s)=K(t-s)$), а переходу от интегральных уравнений с разностными ядрами к уравнениям с периодическими и почти периодическими ядрами в случае дифференциальных уравнений соответствует переход от линейных систем с постоянной матрицей к системам с периодическими и почти периодическими матрицами. Неформальность этой аналогии подтверждается многими результатами, полученными для интегральных уравнений с такими ядрами [1-2].

В докладе обсуждаются результаты, известные в настоящее время для уравнений (1). Рассматриваются следующие вопросы: разрешимость в пространстве непрерывных ограниченных функций и его естественных подпространствах, а также в пространствах функций степенного и экспоненциального роста; анализ $n(d)$-нормальности уравнений при переходе от пространства к подпространству, и наоборот; структура решений однородного уравнения и интегральное представление решений неоднородного.

Литература

1. Пуляев В.Ф.//Дифференц.уравнения. 1989.Т.25. № 10.С.1787-1798. (1990.Т.26. №8. С.1423-1432).

2. Пуляев В.Ф.//Изв.вузов. Математика. 1990.№ 8. С.65-73.

УДК 517.9 Радыно Н.Я. (Минск)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА.

Построенная, в связи с проблемой умножения распределений, в последнее десятилетие теория новых обобщенных функций [1],[2] (или мнемофункции), допускающих всюду определенное умножение основана на приближении обобщенных функции гладкими. Ряд сложностей в теории неограниченных операторов аналогичен сложностям, возникающим при умножении распределении и естественно рассмотреть для операторов конструкцию аналогичную конструкции мнемофункций и вложить в построенную алгебру некоторый класс неограниченных операторов. В настоящей работе приведены соответствующие построения.

Пусть X банахово (или локально выпуклое) пространство, а $L(X)$ пространство линейных ограниченных операторов на нем. В работе рассматриваются классы эквивалентных последовательностей линейных ограниченных операторов. Эти классы образуют алгебру, которая обозначается $G_L = G_M(L)/N(L)$. Где

$G_M(L)=\{T_n \in L(X)$: существуют $m_0 \in \mathbb{R}$ и $c_0>0$ так, что в неравенстве $\|T_n x\| \le c(n)\|x\|$, $|c(n)| \le c_0 n^{m_0}\}$.

$N(L)=\{T_n \in L(X)$: для любого $m \in \mathbb{R}$ существует $c>0$ так, что в неравенстве $\|T_n x\| \le c(n)\|x\|$, $|c(n)| \le c n^{m}\}$

Таким образом, G_L является алгеброй обобщенных операторов.

Обобщенный оператор $\widetilde{T}=T_n$ называется ассоциированным с оператором S, действующим в X с областью определения $D(S)$, если для любого $x \in D(S)$ $T_n x$ сходится в X к Sx.
В ряде задач можно рассмотреть вместо неограниченного оператора S, ассоциированный с ним $\widetilde{T}$.

Литература

1. Егоров Ю.В. К теории обобщенных функций //УМН,1990,т.45, вып.5, с.3-40.
2. Антоневич А.Б.,Радыно Я.В. //Докл. АН СССР,1991,т.318, 2, с.267-270.

УДК 517.9 А.В.Разгулин (Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова)

О КОНЕЧНОМЕРНОСТИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ ДИФФУЗИИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВРЕМЕННОЙ КООРДИНАТ

Описание нелинейной динамики светового поля в оптических системах с обратной связью приводит к постановке новых для нелинейной оптики начально-краевых задач для уравнения диффузии, содержащего значения неизвестной функции в точках с преобразованными координатами:

$$u_t + u = du_{xx} + F(u(x_\Delta, t - T)), t > 0; \quad u(t) = \phi(t), t \in [-T, 0]. \tag{1}$$

Здесь функция $u = u(x,t)$ является 2π - периодической по x, $x_\Delta = x + \Delta$, функция $F(s) \in C^1(R)$ удовлетворяет некоторым условиям роста.

Целью настоящей работы является описание глобального поведения траекторий системы (1) при $t \to +\infty$. Исследование динамики системы (1) сводится к исследованию свойств оператора S, действующего в пространстве $W = \{w : w \in L^2(0,T;V), w_t \in L^2(0,T;V^*)\}$ по правилу $S\phi = S_1 u$, где $V = \{v : v \in H^1(0,2\pi), v(0) = v(2\pi)\}$, $u = S_1\phi \in W$ суть решение задачи

$$u_t + u = du_{xx} + F(\phi(x_\Delta, t)), t \in (0,T); \quad u|_{t=0} = \phi(x,T).$$

Степени S^N оператора S задают дискретную полугруппу в пространстве W, обладающую следующими свойствами: полугруппа S^N равномерно ограничена в W; существует ограниченное в W поглощающее множество для S^N; операторы S^N вполне непрерывны в W при натуральных N. Полученные свойства гарантируют существование компактного в W минимального глобального аттрактора U, удовлетворяющего условиям инвариантности ($S(U) = U$) и притяжения ограниченных в W множеств B ($dist_{N\to+\infty}(S^N(B), U) = 0$).

Характерной чертой аттрактора U является конечность его хаусдорфовой размерности, что позволяет говорить о конечномерности динамики рассматриваемой системы. Отмеченное свойство есть следствие оценок $\|S\phi - S\hat{\phi}\| \le l\|\phi - \hat{\phi}\|$, $\|Pr_{W_n}(S\phi - S\hat{\phi})\| \le \delta\|\phi - \hat{\phi}\|$, $0 < \delta < 1$, описывающих разбегание траекторий (1) и сближение их ортопроекций на некоторое пространство W_n коразмерности n под действием оператора S. Конечномерность динамики систем вида (1) с преобразованием пространственной координаты, но без временной задержки установлена ранее в [1].

1. Vorontsov M.A., Razgulin A.V. Properties of global attractor in nonlinear optical system with nonlocal interactions// Photonics and Optoelectronics, No. 2. Allerton-Press, 1993.

УДК 517.95 Ратыни А.К. (Иваново)

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Задача

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) \ (x\in D),$$
$$u(x) - u(\sigma x) = \psi(x) \quad (x \in S) \qquad \text{(A)}$$

рассматривается в следующих предположениях.

а) D и D_1 – ограниченные области R^n с границами S и S_1 соответственно, $D_1 \subset D$, S и S_1 – поверхности класса C^2; б) $a_{ij}, b_i, c \in C_\alpha(D)$; в) в $\bar{D}$ матрица $\{a_{ij}\}$ положительно определена, $c \leq 0$; г) σ – однозначное непрерывное отображение S на S_1; д) множество $S \cap S_1$ состоит из точек $x^1,\dots,x^m$ (попарно различных при $m \geq 2$), в каждой из которых S_1 касается S; е) $|\sigma x - x^k| \leq \ell |x - x^k|$ при $x \in S \cap \{x : |x - x^k| \leq \varepsilon\}$ $(k = \overline{1,m})$, где $|\cdot|$ – евклидова норма в R^n, ε и ℓ – некоторые числа: $\varepsilon > 0$, $0 < \ell < 1$.

Выполнение перечисленных условий гарантирует справедливость утверждений 1,2 (здесь $C_\alpha, C_\beta, C_{2+\alpha}$ – пространства Гельдера с α и $\beta \in (0,1)$, δ_{ki} – символ Кронекера).

1. Для любых f, ψ: $f \in C_\alpha(D), \psi \in C_\beta(S)$, $\psi(x^k) = 0$ $(k = \overline{1,m})$, – задача (А) имеет единственное решение $u_0 \in C_{2+\alpha}(D)$ такое, что $u_0(x^k) = 0$ $(k = \overline{1,m})$. При этом $u_0 \geq 0$ в D, если $f \leq 0$ в D, $\psi \geq 0$ на S.

2. Задача (А) с $f \equiv 0, \psi \equiv 0$ имеет m таких решений $u_k \in C_{2+\alpha}(D)$, что: $u_k(x^i) = \delta_{ki}$, $u_k > 0$ в D $(k, i = \overline{1,m})$, любое решение из $C_{2+\alpha}(D)$ задачи (А) с $f \equiv 0, \psi \equiv 0$ представимо в виде

$$\sum_{k=1}^{m} A_k u_k \quad , \text{ где } A_k \text{ – постоянные.}$$

Приведенные результаты дополняют посвященные задаче (А) исследования Бицадзе А.В. (Докл. АН СССР, 1985, т.280, № 3), Скубачевского А.Л. (Докл. АН СССР, 1986, т.291, № 3), Кишкиса К.Ю. (Дифференц. уравнения, 1989, т.25, № 1).

УДК 517.958 Розанова О.С. /Белгород/

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть V – риманово n – мерное ориентируемое многообразие бесконечной гладкости с метрическим тензором a_{ij} и локальными криволинейными координатами x. Рассматривается задача Коши для заданной на V системы уравнений вида

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \nabla_j q^{ji}(u,x,t) + Q^i = 0 \quad , \quad i = 1,\dots,n \; ; \qquad (*)$$

где u и Q являются n – мерными векторнозначными функциями, q – это C^1 – гладкое по всем своим аргументам тензорное поле, а ∇_j – дивергенция тензора, вычисленная в метрике a_{ij} с учетом зависимости u от x. Слагаемое Q может включать зависимость не только от u, x, t и параметров, но также от различных интегральных и дифференциальных выражений, составленных с помощью этих величин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Не зависящее от времени векторное поле на многообразии V назовем допустимым, если оно является гладким всюду, кроме конечного числа гладких гиперповерхностей, на которых может иметь разрывы первого рода.

Положим $F(t) = \int\limits_V (u,X)\,dV$, где $(\cdot,\cdot)$ –скалярное произведение на V в метрике a_{ij}. Введем функцию $H(p)$ одной переменной такую, что $H(p)>0$ при $p>p_0$ и $\int\limits_{p_0}^{\infty} \frac{dp}{H(p)} = K < \infty$.

ТЕОРЕМА. Пусть X – допустимое векторное поле на компактном многообразии V. Если для первоначально классического решения системы $(*)$, заданной на V, выполняются условия

$$I(t) = \int\limits_V \left(q^{ji}_i \nabla_j X^i - \nabla_j (q^{ji} X^i) - (X, Q) \right) dV \geq 0, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

и $\quad H(F(t)) \leq C\, I(t) \quad , \quad C = const > 0,$

а кроме того, выполняется зависящее лишь от начальных данных требование $F(0) > p_0$, то решение $u(x,t)$, перестает существовать за время $t_0 \leq T \leq CK$.

В качестве приложений получены достаточные условия потери гладкости решениями модельных систем уравнений метеорологии, что с точки зрения геофизики связано с задачами о формировании атмосферного фронта и струйного течения.

УДК 517.911.5 Руренко Е.Н. /Киров/

НОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается следующий подход к построению численных схем для приближенного решения дифференциальных уравнений обыкновенного и запаздывающего типов, базирующийся на квадратурных формулах.

С целью приближенного решения задачи Коши

$$\dot{x}(t)=f(x(t)),\ t\in[0,T];\ x(0)=x^{0}, \qquad (1)$$

где $f(x),\ x\in R^{n}$, удовлетворяет определенному условию роста и локально липшицева, доказывается, что для точек $\bar{x}_0=x^{0}$, $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_N$, удовлетворяющих формуле

$$\bar{x}_{i+1}=\bar{x}_i+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}f\Big(\bar{x}_i+\int\limits_{t_i}^{t}f\big(\bar{x}_i+(s-t_i)f(\bar{x}_i)\big)ds\Big)dt, \qquad (2)$$

выполняется оценка погрешности

$$|x(t_i)-\bar{x}_i|\le c_1h^{3},\ i=0,\ldots,N,$$

а для точек $\bar{\bar{x}}_0=x^{0}$, $\bar{\bar{x}}_1,\ldots,\bar{\bar{x}}_N$, удовлетворяющих

$$\bar{\bar{x}}_{i+1}=\bar{\bar{x}}_i+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}f\Big(\bar{\bar{x}}_i+\int\limits_{t_i}^{t}f\Big(\bar{\bar{x}}_i+\int\limits_{t_i}^{s}f\big(\bar{\bar{x}}_i+(\tau-t_i)f(\bar{\bar{x}}_i)\big)d\tau\Big)ds\Big)dt \qquad (3)$$

выполняется оценка погрешности

$$|x(t_i)-\bar{\bar{x}}_i|\le c_2h^{4},\ i=0,\ldots,N,$$

где $x(t)$ – точное решение (1), константы c_1, c_2 определены из условий для $f(x)$. С использованием для "раскрытия" интегралов в (2), (3) квадратурных формул и оценок их погрешности строятся новые численные схемы 3-го и 4-го порядков для приближенного решения (1) и выводятся их оценки. К примеру, одна из схем 4-го порядка:

$$x^{i+1}=x^{i}+\frac{1}{6}K_0^{i}+\frac{2}{3}hf\Big(x^{i}+\frac{1}{6}K_1^{i}+\frac{2}{3}K_{123}^{i}+\frac{1}{6}K_{112}^{i}\Big)+$$
$$+\frac{1}{6}hf\Big(x^{i}+\frac{1}{6}K_0^{i}+\frac{2}{3}K_{012}^{i}+\frac{1}{6}K_{001}^{i}\Big),$$

где

$$K_m^{i}=2^{-m}hf(x^{i}),\ K_{pqm}^{i}=2^{-p}hf\big(x^{i}+2^{-q}hf(x^{i}+2^{-m}hf(x^{i}))\big).$$

Приводятся новые численные схемы 3-го и 4-го порядков сходимости для приближенного решения в случае дифференциального уравнения с запаздыванием, причем вместе с оценками их погрешности.

УДК 517.946

Ручкин Ю.А. (Воронеж)

НЕРАВЕНСТВО ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $P(x,D)=\sum a_{jk}(x)D_j D_k+\sum b_j(x)D_j + c(x)$ $(D_j=-i\,\partial/\partial x_j)$ - эллиптический оператор второго порядка с вещественными C^∞- коэффициентами в связной окрестности нуля такой, что $P(0,D)=\Delta$ где Δ - оператор Лапласа.

Введем в $R^n\setminus 0$ полярные координаты
$r=|x|=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$, $\omega=x/|x|\in S^{n-1}$, $d\omega$ - поверхностная мера на единичной сфере S^{n-1}. Имеет место следующая

Теорема I. Пусть $P(x,D)$ удовлетворяет указанным условиям. Существует $\rho>0$ такое, что если функция v принадлежит пространству Соболева $H_2(R^n)$, $v=0$ при $|x|>\rho$ и

$$\int\limits_{R^n}\sum_{|\alpha|\le 2}|D^\alpha v|^2 r^{-2\tau}\frac{dr}{r}\,d\omega<\infty\ ,\ \forall\tau>0\ ,$$

то для любого, достаточно большого $\tau>0$ имеет место следующее неравенство

$$\int\limits_{R^n} r^{-2\tau}\Big(r^{-4+\varepsilon}\tau^3|v|^2+r^{-2+\varepsilon}\tau\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v|^2+r^{\varepsilon}\tau^{-1}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha v|^2\Big)\frac{dr}{r}\,d\omega$$

$$\le C\int\limits_{R^n} r^{-2\tau}|Pv|^2\frac{dr}{r}\,d\omega\ ,\quad \varepsilon>0\ ,$$

где константа C не зависит от τ и v.

Замечание. Условие $P(0,D)=\Delta$, накладываемое на оператор P, не является ограничительным; этого всегда можно добиться с помощью линейной замены переменных.

Данное неравенство имеет широкое применение при доказательстве теорем единственности и теорем о представлении решений рядами.

УДК 5I7.95 Рыжих А.Д. (Москва)

АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В работе изучаются условия существования аналитического решения по малому параметру системы линейных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными в банаховом пространстве. Для такой системы нулевой значение параметра является особым и классические теоремы о гладкости по параметру решений задачи Коши не работают в окрестности этого значения. Поэтому в общем случае не существует решения задачи Коши для рассматриваемой системы, аналитического по малому параметру в окрестности его нулевого значения. Вместе с тем, если задать начальные условия только для медленных переменных, то при определенных условиях существует единственное аналитическое решение в указанной окрестности, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Для исследования этого вопроса используются пространства векторов экспоненциального типа, разработанные в работе I . Идея применить такие пространства в аналитической теории сингулярных возмущений принадлежит С.А.Ломову . 2 . Результат данной работы является обобщением результатов, опубликованного в 3 .

I. Радыно Я.В. - Докл. АН БССР, I988, т.27, № I0, с.875-878.
2. Качалов В.И., Ломов С.А. - ДАН СССР, I988, т.299, № 4, с.805-808
3. Рыжих А.Д. - IУ конф. математиков Беларуси. Тезисы доклада. Гродно, I992. - ч.3, с.70.

Ряжских В.И. (Воронеж)

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ I-ГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Ищется решение уравнения

$$\partial Y(X,\theta)/\partial\theta = -A\,\partial Y(X,\theta)/\partial X - Z(X)\,Y(X,\theta) \tag{I}$$

с условиями

$$Y(X_0,\theta)=1\ ,\quad Y(X,0)=F(X)\not\equiv 0\ ,\quad A=\mathrm{const}. \tag{2}$$

Подстановкой

$$\Omega(X,\theta)=\ln Y(X,\theta)+A^{-1}\int\limits_{X_0}^{X} Z(X)\,dX \tag{3}$$

задача (I) и (2) приведена к виду

$$\partial\Omega(X,\theta)/\partial\theta = -A\,\partial\Omega(X,\theta)/\partial X \tag{4}$$

$$\Omega(X_0,\theta)=0\ ,\quad \Omega(X,0)=\Psi(X)\ , \tag{5}$$

где

$$\Psi(X)=\ln F(X)+A^{-1}\int\limits_{X_0}^{X} Z(X)\,dX\ .$$

Решение задачи (I), (2), полученное с помощью интегрального преобразования Лапласа задачи (4),(5) по переменной X и с учетом вида подстановки (3), таково

$$Y(X,\theta)=F(X-A\theta)\exp\Big[-A^{-1}\int\limits_{X-A\theta}^{X} Z(X)\,dX\Big].$$

УДК 517.9 Т.В.Савченко (Минск)

ПОСТРОЕНИЕ МАЖОРАНТЫ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В N-НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\mathbf{X}$ – n-нормированное пространство, т.е. $\mathbf{X} = (X,]\cdot[)$, где X некоторое линейное пространство и $]\cdot[= (\|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_n)$, $\|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_n$ – n полунорм на нем, причем из равенств $\|x\|_1 = \ldots = \|x\|_n = 0$ вытекает, что $x = 0$.

Для анализа уравнений в K-пространствах, частным случаем которых является n-нормированные пространства, Л.В.Канторовичем был предложен метод мажорант (*мажорантой оператора* A *на множестве* R называется [1] монотонный оператор $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, если справедливо неравенство

$$]A(x + h) - Ax[\le W(]x[+]x - h[) - W(]x[), \quad (x, x + h \in R).$$

Неподвижные точки мажорант и их геометрические свойства определяют [2] область существования и единственности решений уравнения $Tx = x$.

Для операторов, удовлетворяющих условию Липшица

$$]Ax_1 - Ax_2[\le Q(r)]x_1 - x_2[\quad (x_1, x_2 \in B]0, r[, \ r > 0, \qquad (1)$$

в случае потенциальной матрицы $Q(r)$ существует наилучшая мажоранта

$$Wr =]A0[+ \int_0^r Q(z)dz.$$

Однако требование потенциальности сильно сужает множество рассматриваемых уравнений.

Теорема. *Пусть оператор* A *определен на* n-*шаре* $B(x_0, R)$ n-*нормированного пространства* $\mathbf{X}$ *и удовлетворяет на нем условию Липшица* (1). *Тогда функция* $W: [0, R] \to \mathbb{R}^n_+$ *вычисляемая по формуле*

$$Wr =]A0[+ \int_\gamma Q(z)dz,$$

где криволинейный интеграл берется по объединению n *отрезков с концами* $(r_1, \ldots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \ldots, r_n)$ и $(r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, \ldots, r_n)$ $(1 \le i \le n)$, *является мажорантой для* A.

Литература

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 408 с.

2. J.Appel, A.Carbone, P.P.Zabrejko. Kantorovic majorants for nonlinear operators and applications to Uryson integral equations. – Preprint Univ. de Calabria, 13 p.

УДК 517.544 Салимов Р.Б., Стрежнева Е.В. /Казань/

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАЗРЕШИМОСТИ И ОДНОЛИСТНОСТИ ОБРАТНЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНОЙ И ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЕЙ В СЛУЧАЕ ПОЛИГОНА

Рассматривается внутренняя и внешняя обратная смешанная краевая задача (ОСКЗ) для односвязной области, ограниченной замкнутой кривой, часть границы которой известна и имеет форму ломаной, состоящей из определенного числа прямолинейных звеньев, а остальная часть отыскивается по образу в плоскости значений этой функции. Первоначальная постановка и исследование этой задачи даны В.Н.Монаховым. В нашем случае, в отличие от постановки В.Н.Монахова не фиксируются длины звеньев ломаной и задаются образы вершин в плоскости значений аналитической функции, при этом допускается произвольная степень закрутки ломаной.

Кроме вышеуказанной задачи рассматривается внутренняя и внешняя ОСКЗ для двусвязной области, когда известная часть границы искомой области, имеющая форму ломаной, охватывает неизвестную часть границы, а также общий случай этой задачи.

При определенных условиях данные ОСКЗ редуцируются к краевой задаче Гильберта с разрывными коэффициентами; в результате ее исследования получаем интегральное представление решений рассматриваемых ОСКЗ, в которое входит произвольное число постоянных, существенно зависящее от индекса задачи Гильберта.

Полученные представления решений и изучение поведения сингулярных интегралов, входящих в эти решения, приводят к теоремам о существовании решения рассматриваемых ОСКЗ, дающим условия разрешимости задачи через исходные данные.

Рассмотрены достаточные условия однолистности одной внутренней ОСКЗ для односвязной области; показано как за счет выбора произвольных постоянных, входящих в интегральное представление решения можно добиться разрешимости задачи и получить однолистную область более или менее желательной формы.

УДК 517.988

Сапронов Ю.И. (Воронеж)

РЕДУКЦИЯ МОРСА-БОТТА ДЛЯ КИРХГОФОВА СТЕРЖНЯ

Известно, что равновесные конфигурации кирхгофова стержня [1] соотвествуют экстремалям функционала $V=\int_0^1(\frac{1}{2}(A\omega,\omega)+\lambda(f\tau_3,\tau_3))ds$, где $f(s)$ - функция со значениями в $SO(3)$, s - параметр длины стержня, $\omega(s)=f^{-1}(s)\frac{d}{ds}(f)(s)$, $\tau_3=(0,0,1)^T$, λ - параметр продольного сжатия, $A=diag(A_1,A_2,A_3)$ - тензор упругости в поперечном сечении. При условии жесткого закрепления стержня на концах $(f(0)=f(1)=I)$ получаем вариационную задачу $V\longrightarrow inf$ на бесконечномерной группе Ли $\mathcal{M}$ петель в точке $f=I$ на $SO(3)$.

Гладкая субмерсия $\pi: f(s)\longmapsto\tau(s):=f(s)\tau_3$ расслаивает $\mathcal{M}$ над многообразием $\tilde{\mathcal{M}}$ петель в точке $\tau=\tau_3$ на сфере S^2. В случае симметричного стержня $(A_1=A_2)$ поведение V на $\mathcal{M}$ полностью определяется поведением функционала

$$\tilde{V}(\tau,\lambda):=\inf_{f\in\pi^{-1}(\tau)}V(f)=\int_0^1(\frac{A_1}{2}|\dot{\tau}|^2+\lambda(\tau,\tau_3))ds$$

на $\tilde{\mathcal{M}}$. В свою очередь анализ $\tilde{V}$ на $\tilde{\mathcal{M}}$ осуществляется через конечномерную редукцию Морса-Ботта (из вариационной теории геодезических). Например, при $\lambda<4\pi^2$ поведение $\tilde{V}$ на $\tilde{\mathcal{M}}$ определяется гладкой функцией

$$W(\xi,\lambda):=\inf_{\tau}\tilde{V}(\tau,\lambda),\ \tau(\tfrac{1}{2})=\xi\in S^2.$$

Маргинальное отображение $\Phi:\xi\longmapsto\tau$, $\tilde{V}(\tau,\lambda)=W(\xi,\lambda)$, здесь задается явным образом в виде $\tau(s)=(\cos\varphi(s))\tau_3+(\sin\varphi(s))\tau$, где $\varphi(s)$ получается склейкой в точке $s=1/2$ решений уравнения $\ddot{\varphi}+\lambda\cdot\sin\varphi=0$ при краевых условиях $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(1/2)=\zeta$ и $\varphi_2(1/2)=\zeta$, $\varphi_2(1)=0$, $\zeta=\arccos(\tau_3,\xi)$. Функции φ_1 и φ_2 допускают явное представление через эллиптические функции Якоби (см. [1], [2]). Следовательно, ключевая функция $W(\xi,\lambda)$ также допускает явное представление (соответствующие вычисления проведены О.Н. Андрущенко).

Литература: 1. Ляв А. Математическая теория упругости. - М.-Л.: НКТП СССР, 1935. - 674 с.
2. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. - М.: ОГИЗ. - 1948. - 170 с.

УДК 517.53 Свистула М.Г.(Самара)

О СВЯЗНОСТИ МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ВЕКТОРНОЙ МЕРЫ

Пусть (T,A) - измеримое пространство, $(G,+,\tau)$ - топологическая абелева группа, $m:A \longrightarrow G$ - конечноаддитивная функция множества.

Говорят, что m исчерпывающая, если для любой последовательности попарно дизъюнктных множеств $\{E_n\} \subset A$ $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n) = 0$.

m называется полувыпуклой, если для любого $E \in A$ существует множество $E_{1/2} \in E \cap A$, такое что

$$m(E_{1/2}) + m(E_{1/2}) = m(E)$$

m называется квазимонотонной, если для любой окрестности нуля U в G и любого $E \in A$ из того что $m(E) \in U$ следует $\{m(F),\ F \in E \cap A\} \subset U$.

Доказана теорема :

Множество значений полувыпуклой квазимонотонной исчерпывающей конечноаддитивной функции множества со значениями в топологической абелевой группе без циклических элементов второго порядка является линейно связным.

Эта теорема обобщает результаты работы [2], где на группу G накладывается дополнительное условие локальной компактности.

Литература.

1. Landers D. Connectedness properties of range of vector and semimeasures // Manuscripta. Math.-1973.-9.-P.105-112.
2. Martellotti A.,Sambucini A. Riesz space valued submeasures and application to group-valued finitely additive measures// Le Matematiche.-1987.-V.XL#.-P.37-48.

УДК 637.1:65.011.56

Сербулов Ю.С. (Воронеж)

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОСТАВКИ МОЛОЧНОГО СЫРЬЯ

Поставка сырья на молочное предприятие (МП) с позиций управления является сложной трехуровневой производственной системой, характеризующейся иерархической структурой, у которой в качестве подсистемы верхнего уровня выступает МП, среднего - автотранспортное предприятие (АП), нижнего - поставщики сырья (ПС). Трудность решения задачи заключается в том, что все участники данного технологического процесса преследуют разные цели, что приводит к возникновению таких ситуаций, когда не удается соблюсти интересы одного или нескольких участников, не ущемляя интересы других.

Рассматривается математическая модель (ММ), полностью отражающая специфику поставки сырья на МП. В ММ учтены все показатели работы ПС, АП, МП, а также составные показатели, характеризующие взаимодействие всех участников данного технологического процесса. В результате получено три набора неизвестных, подлежащих определению: один набор дискретных (булевских) переменных и два набора непрерывных. При этом индикаторы входят в виде множителей в ограничения ММ.

Построенная ММ достаточно сложна для получения точного решения оптимизационной задачи, так как является многокритериальной, причем не все критерии имеют аналитическую запись; имеет очень большую размерность; является нелинейной (в ограничениях и в функциях цели встречаются произведения неизвестных) и смешанной по характеру неизвестных (непрерывно-дискретного типа), что делает невозможными аналитические методы ее решения. Наличие в ММ неизвестных булевского типа требует применения специальных методов дискретного программирования (типа метода ветвей и границ), связанных с перебором вариантов.

Громоздкость задачи, разнотипность неизвестных, многокритериальность были преодолены лишь на основе декомпозиции, разбиения ее на ряд последовательных, более простых задач. Решение разработанной ММ методами векторной оптимизации позволяет выделять парето-оптимальные множества. ЛПР предоставляется возможность выбрать одно или несколько решений из конфликтных и получить информацию по этим решениям.

УДК 658.52.011.56

Ю.С.Сербулов, Б.Е.Никитин (Воронеж).

Функция принадлежности множества Парето при нечетко заданном множестве альтернатив.

При моделировании функционирования реальных технологических систем, как правило, нет четкого представления у ЛПР о предпочтениях на множестве альтернатив. В этом случае с помощью экспертов выявляется нечеткое отношение предпочтения альтернатив, в котором каждой паре (x,y) соответствует степень выполнения предпочтения $x>y$.

Пусть X - нечетко заданное множество альтернатив. Каждая альтернатива характеризуется вектором критериев $(q_1,\ldots,q_m)$.

Нечеткое отношение предпочтения O_i на множестве X имеет вид: $O_i=\{(x,y)|x,y\ (X,q_i(x)>q_i(y)\}$, функция принадлежности которого:

$$\mu_i(x,y)=\begin{cases}[0,1], \text{если } (x,y)\in O_i\\ 0, \text{если } (x,y)\notin O_i\end{cases}$$

Тогда по каждому критерию q_i можно найти такие точки x_i, что $\mu_i(x^0_i,x)=1, x\in X$.

Введем нечеткие множества $F_i(x)=\{x|x\ (X,\mu_j(x,x^0_i))>\mu_j(x^0_i,x)\}, j\neq i, j=1..m$, функции принадлежности которых $\phi_i(x)=1-\mu^s_i(x^0_i,x), j\neq i, j=1..m, \mu^s_i$ - функция принадлежности нечеткого отношение строгого предпочтения:

$$\mu^s_i(x,y)=\begin{cases}\mu_i(x,y)-\mu_i(y,x) \text{ при } \mu_i(x,y)>\mu_i(y,x),\\ 0 \text{ при } \mu_i(x,y)<\mu_i(y,x).\end{cases}$$

Тогда можно уменьшить размерность исходного нечеткого множества X: $X1=\cap F_i, i=1..m$, функция принадлежности которого $\phi(x)=\{\phi_1(x),\ldots,\phi_m(x)\}=$ $=\min\{1-\mu^s_j(x^0_1,x),\ldots,1-\mu^s_j(x^0_i,x),\ldots,1-\mu^s_j(x^0_m,x)\}, j\neq i, j=1..m.$

Тогда множество Парето описывается функцией принадлежности вида: $\mu_0(x)=1-\sup_{y\in X1}\mu^s_0(y,x), x\in X1$, где $\mu^s_0(y,x)$-свертка нечетких отношений строгого предпочтения, $\mu^s_0(y,x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mu^s_i(y,x), \lambda_j=1/m$, если считать, что все критерии одинаково важны.

УДК 513.88

Склядяев С.А. (Воронеж)

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Пусть на линейной подструктуре H K-пространства X (автор придерживается терминологии монографии [1]) определен аддитивный, однородный и строго положительный оператор A со значениями в регулярном K-пространстве Y, обладающий свойствами:

1^0. Если $\{h_k\} \subset H$ и $h_k \downarrow 0$, то $Ah_k \downarrow 0$.

2^0. Если $\{h_k\} \subset H$ - монотонно возрастающая последовательность и $Ah_k \leq y_0$ при всех k, то последовательность $\{h_k\}$ ограничена сверху в X.

Тогда пополнение H по структурной норме $N: H \to Y$, где $N(h) = A(|h|)$ является регулярным K-пространством и обладает многими свойствами пространств суммируемых функций. Обозначим это пополнение через $L(H, A)$.

При построении теории интегрирования функций, определенных на $[0,1]$ и принимающих значения в регулярном K-пространстве Y, мы обычным образом определим интеграл на ступенчатых функциях и, используя изложенные выше результаты, получим пространство интегрируемых функций - $L([0,1], Y)$. Очевидно, что такой подход правомерен, только в том случае, когда определенный на ступенчатых функциях интеграл обладает свойствами 1^0 и 2^0, что целиком зависит от свойств пространства Y.

Теорема. Для того, чтобы регулярное K-пространство Y с единицей по Фрейденталю обладало свойствами 1^0 и 2^0 необходимо и достаточно, чтобы на $L([0,1] \times Q, \mathfrak{R}, \nu, Y)$ была справедлива теорема Фубини.

Через $L([0,1] \times Q, \mathfrak{R}, \nu, Y)$ обозначается пространство скалярных функций, определенных на $[0,1] \times Q$ (где Q - стоуновский бикомпакт) и суммируемых относительно естественным способом конструируемой векторной меры $\nu: \mathfrak{R} \to Y$.

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Ф-М, 1961.

УДК 517.9

Слобожанин Н.М. (С.-Петербургский университет)

Об оптимальном управлении в динамических антагонистических процессах с переменной задержкой информации

Рассматривается динамический антагонистический процесс с дискретным временем. То есть процессом управляют два участника с антагонистическими интересами. Динамика каждого участника определяется функцией достижимости, зависящей от фазовых координат и от времени. Состояние информации каждого участника определяется информационной функцией. На траекториях управляемого процесса задана функция выигрыша. Один из участников стремится ее максимизировать, другой минимизировать. Предполагается также, что на пространстве, в котором протекает процесс, задана измеримая структура.

Вводится понятие измеримых управлений. По паре измеримых управлений строится мера на траекториях процесса. Получены достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу. В частности показано, если функция выигрыша полунепрерывна в топологии Бэра, то ситуация равновесия существует. Определены функциональные уравнения, связывающие процесс и подпроцесс. Получен метод, использующий функциональные уравнения для нахождения оптимальных управлений. Полученные результаты являются уточнением и обобщением результатов Л.С.Шепли и Х.Э.Скарфа [2] , также Л.А.Петросяна [1] и [3] .

Литература

1. Петросян Л.А. Дифференциальные игры с неполной информацией. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 3, с. 558-561.
2. Скарф Х.Э., Шепли Л.С. Игры с неполной информацией. В кн.: Применение теории игр в военном деле. М.: Сов. радио, 1961, с. 256-274.
3. Слобожанин Н.М. Многошаговые игры с задержкой информации.- В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т.142.Проблемы теории вероятностных распределений IX. Л., 1985, с. 152-159.

УДК 517.9 Слугин С.Н. (Нижний Новгород)

СКАЛЯРНЫЙ АНСАМБЛЬ В СЕМЕЙСТВЕ Н-ПРОСТРАНСТВ И ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ГРАНИЦЫ

Задана последовательность Н-пространств X_m $(m \geq 1)$ со скалярным произведением $(.,.)_m$ и нормой $\|.\|_m$. Абстрактные параметры τ – элементы окрестности нуля линейного нормированного пространства T. Каждому параметру отвечает Н-пространство X_τ. Линейные ограниченные операторы $p_{m\tau}$ и $p_{m(m+1)}$ с единичной нормой отображают, соответственно, пространства X_τ (но при $m\|\tau\| < 1$) и X_{m+1} на X_m. Обозначения: $X = X_0$, $p_m = p_{m0}$.

Выставлены требования:

$$p_{m(m+1)} p_{(m+1)\tau} = p_{m\tau}; \quad \|p_m x\|_m \longrightarrow \|x\|_X;$$

если $x_m = p_{m(m+1)} x_{m+1}$, $\|x_m\|_m \leq c$ $(\forall m)$,

то существует элемент $x \in X$: $p_m x = x_m$ $(\forall m)$.

Для элементов $x \in X_\tau$, $y \in X_t$ определен скалярный ансамбль:

$$(p_{m\tau} x, p_{mt} y)_m \qquad (m\|\tau\|, m\|t\| < 1).$$

Элемент $x_0 \in X$ назовем X-пределом последовательности элементов $x \in X_\tau$, если $\tau \longrightarrow 0$ и для любого фиксированного номера m при $m\|\tau\| < 1$: $d_m(x, x_0) \longrightarrow 0$.

Пусть значения операции $x = x(\tau) \in X_\tau$. Назовем ее X-липшиц-непрерывной в нуле, если для любого m есть такое число $\delta_m \leq m^{-1}$, что при $\|\tau\| < \delta_m$: $d_m(x(\tau), x(0)) \leq c\|\tau\|$.

Линейный ограниченный оператор $D: T \to X$ назовем X-сильной производной в нуле, если для любого m есть такое $\delta_m \leq m^{-1}$, что при $\|\tau\| < \delta_m$:

$$p_{m\tau} x(\tau) = p_m(x(0) + D\tau) + o_m(\tau).$$

Для семейства пространств X_τ со скалярным ансамблем установлены абстрактные аналоги теорем о непрерывности и дифференцируемости неявной функции и об условном экстремуме. На основе этих аналогов найдены необходимые условия оптимальности для распределенных систем, описываемых краевыми задачами на переменных областях с управляемым положением границы.

УДК 513.83 Смирнов В.А. /Москва/

СТАБИЛЬНЫЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СФЕР

В работе рассматривается проблема описания стабильных гомотопических групп сфер $\mathfrak{S}_*$, точнее, их 2 - компоненты. При этом используются операдные методы, в частности, понятия A_∞ - алгебры [1] и E_∞ - алгебры [2], [3].

Первый результат сводит проблему описания стабильных гомотопических групп сфер к чисто гомологической задаче.

Теорема 1. В тензорной алгебре TK над коалгеброй K, двойственной алгебре Стинрода, можно ввести новые операции сложения и дифференцирования, превращающие её в E_∞ - алгебру, гомологии которой изоморфны стабильным гомотопическим группам сфер: $\mathfrak{S}_* \cong H_*(\widetilde{F}K)$.

В следующей теореме выясняется какая структура имеется на гомологиях произвольной E_∞ - алгебры.

Теорема 2. Гомологии E_∞ - алгебры являются коммутативной A_∞ - алгеброй и, следовательно, на стабильных гомотопических группах сфер имеется структура A_∞ - алгебры $\pi_i : \mathfrak{S}_* \times \ldots \times \mathfrak{S}_* \longrightarrow \mathfrak{S}_*$, $i \geqslant 0$, удовлетворяющая условиям коммутативности.

Наконец, последняя теорема дает искомое описание стабильных гомотопических групп сфер /точнее, их 2 - компоненты/.

Теорема 3. Стабильные гомотопические группы сфер $\mathfrak{S}_*$, рассматриваемые как коммутативная A_∞ - алгебра, порождаются элементами h_0, h_1, h_2, h_3 размерности 0, 1, 3, 7, соответственно и соотношениями:

$$\pi_0(h_0 \otimes h_1) = 0; \quad \pi_1(h_0 \otimes h_1 \otimes h_2) = 0; \quad \pi_2(h_0 \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) = 0.$$

Умножение на 2 задается формулой $2 \cdot x = \pi_0(h_0 \otimes x)$.

Литература:

1. Stasheff J.D. Homotopy associativity of H-spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 1963, v. 108, № 2, p. 275-312.

2. Смирнов В.А. Гомотопическая теория коалгебр. Известия АН СССР, 1985, т.40, в.6, с. 1103-1121.

3. Смирнов В.А. Вторичные операции в гомологиях операды E. Известия АН СССР, 1992, т.56, в. 2, с. 449-468.

УДК 514.76 Н.К.Смоленцев (Кемерово)

КРИВИЗНА НЕКОТОРЫХ ГРУПП ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Пусть M – гладкое, класса C^∞, замкнутое ориентируемое контактное многообразие размерности $n = 2k+1$. Будем предполагать что контактная структура, заданная 1-формой θ на M, является регулярной. Зафиксируем на M ассоциированную метрику g. Пусть $\mathcal{D}_\theta$ – группа контактных диффеоморфизмов многообразия M, $\mathcal{D}_\theta = \{ \eta \in \mathcal{D}; \eta^*\theta = \theta \}$. Алгебра Ли $T_e\mathcal{D}_\theta$ группы $\mathcal{D}_\theta$ состоит из контактных векторных полей X на M, т.е. таких, что $L_X\theta = 0$, где L_X – производная Ли. Группа $\mathcal{D}_\theta$ обладает естественной правоинвариантной слабой римановой структурой:

$$(X,Y)_e = \int_M g(X(x),Y(x))d\mu,$$

где $X,Y \in T_e\mathcal{D}_\theta$, μ – риманов элемент объёма ассоциированной метрики, $\mu = \theta\wedge(d\theta)^n$.

Если $X \in T_e\mathcal{D}_\theta$ – контактное векторное поле, то функция $f = \theta(X)$ называется контактным гамильтонианом поля X, векторное поле X обозначается X_f и оно может быть представлено в виде

$$X_f = f\xi - \varphi\,\mathrm{grad} f,$$

где ξ – характеристическое векторное поле контактной структуры θ, φ – аффинор контактной метрической структуры.

Определим скобку Лагранжа $[f,g]$ контактных гамильтонианов равенством $[f,g] = X_f(g)$.

Теорема. Секционная кривизна группы $\mathcal{D}_\theta$ в направлении двумерной площадки $\sigma \subset T_e\mathcal{D}_\theta$ образованной ортонормированной парой контактных векторных полей $X_f, Y_g \in T_e\mathcal{D}_\theta$ выражается формулой:

$$K_\sigma = -\frac{1}{2}\int_M [[f,g],g]Df\,d\mu - \frac{3}{4}\int_M [f,[f,g]]Dg\,d\mu - \frac{3}{4}\int_M [f,g]D[f,g]\,d\mu -$$
$$-\frac{1}{4}\int_M [f,g]([f,\Delta g] + [g,\Delta f])d\mu - \int_M [f,\Delta f]D^{-1}([g,\Delta g])d\mu +$$
$$+\frac{1}{4}\int_M ([f,\Delta g] + [g,\Delta f])D^{-1}([f,\Delta g] + [g,\Delta f])d\mu,$$

где $D = 1+\Delta$, $\Delta = -\mathrm{div}\circ\mathrm{grad}$ – лапласиан, $[f,g]$ – скобка Лагранжа функций на контактном многообразии.

Аналогичные формулы получены для секционных кривизн группы $\mathcal{D}_\mu$ диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объёма μ и для группы $\mathcal{D}_\omega$ симплектических диффеоморфизмов.

УДК 517.9 Степанов Г.Д. (Ярославль)

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ КРИТЕРИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ И ЗНАКОРЕГУЛЯРНОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается двухточечная краевая задача

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + p_2(t)y^{(n-2)} + \dots + p_n(t)y = \lambda y, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_{ai}(y) &\equiv y^{(k_{ai})}(a) + \sum_{k<k_{ai}} \alpha_{ik} y^{(k)}(a) = 0, \quad i=\overline{1,m}, \\ U_{bj}(y) &\equiv y^{(k_{bj})}(b) + \sum_{k<k_{bj}} \beta_{jk} y^{(k)}(b) = 0, \quad i=\overline{1,n-m}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $p_i(t)$ вещественны и непрерывны на $[a,b]$, α_{ik}, β_{jk} вещественны, $0<m<n$, $n-1 \geq k_{a1} > \dots > k_{am} \geq 0$, $n-1 \geq k_{b1} > \dots > k_{b\,n-m} \geq 0$.

Функция Грина $G(t,s)$ называется знакорегулярной, если для некоторой последовательности чисел $\varepsilon_p = \pm 1$ при $p=1,2,\dots$ выполнены условия

$$\varepsilon_p G\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_p \\ s_1 & s_2 & \dots & s_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad \left(a < \begin{matrix} t_1 < t_2 < \dots < t_p \\ s_1 < s_2 < \dots < s_p \end{matrix} < b\right). \tag{3}$$

При $\varepsilon_p = (-1)^{p(n-m)}$ функция Грина называется осцилляционной. Известно, что знакорегулярность $G(t,s)$ влечет важные спектральные свойства: вещественность и простоту всех собственных значений λ_i, совпадение λ_i по знаку с $\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i$, перемежаемость нулей собственных функций и т.д.

Обозначим через $v_{ai}(t)$ $(i=\overline{1,m})$, $v_{bj}(t)$ $(j=\overline{1,n-m})$ решения уравнения $Ly=0$, удовлетворяющие условиям

$$U_{ai}(v_{ak}) = (-1)^{n-1-k_{ai}}\delta_{ik} \ (i=\overline{1,m}; k=\overline{1,m}),\ U_{bj}(v_{ak})=0 \ (j=\overline{1,n-m}; k=\overline{1,m}),$$

$$U_{ai}(v_{bk}) = 0 \ (i=\overline{1,m}; k=\overline{1,n-m}),\ U_{bj}(v_{bk}) = -\delta_{jk} \ (j=\overline{1,n-m}; k=\overline{1,n-m}).$$

Теорема 1. Для того, чтобы функция Грина задачи (1),(2) была знакорегулярной, необходимо и достаточно, чтобы при $a<t<b$, $i\leq m$, $j\leq n-m$ все вронскианы

$$[v_{a1},\dots,v_{ai}](t),\ [v_{bj},\dots,v_{b1}](t),\ [v_{a1},\dots,v_{ai},v_{bj},\dots,v_{b1}](t) \tag{4}$$

были отличны от нуля и совпадали по знаку при совпадении порядков.

З а м е ч а н и е. В случае знакорегулярности $G(t,s)$ знаки ε_p из (3) совпадают со знаками вронскианов p-го порядка из (4).

Теорема 2. Для того, чтобы функция Грина задачи (1),(2) была осцилляционной, необходимо и достаточно, чтобы при $a<t<b$, $i\leq m$, $j\leq n-m$ все вронскианы (4) p-го порядка строго совпадали по знаку с $(-1)^{p(n-m)}$.

Приведенные результаты позволяют, в частности, осуществлять проверку знакорегулярности и осцилляционности с помощью компьютера. Автором подготовлен демонстрационный пакет программ для оператора $Ly \equiv y^{(n)}$ с краевыми условиями общего вида.

УДК 517.9:62-531 Стрежнев В.А. /Казань/

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ В УПРАВЛЯЕМЫХ ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ПОДВИЖНЫХ ОСНОВАНИЯХ

Рассматривается косвенная стабилизация оптического изображения в оптико-механических системах (ОМС) заданной структуры на подвижных основаниях в приложении к кадровому и панорамному аэрофотоаппаратам (АФА) с управляющим зеркалом.

Обсуждаются предлагаемые способы построения математических моделей движения оптического изображения на фокальной поверхности в АФА и синтеза законов компенсации сдвига изображения.

Строятся в строгой и достаточно общей постановке задачи математические модели, описывающие движение оптического изображения на фокальной поверхности в АФА при произвольном движении носителя.

Определяется распределение скоростей движения оптического изображения по полю кадра.

Синтезируются программные законы компенсации поля скоростей движения оптического изображения на фокальной поверхности в АФА при невозмущенном (поступательном) движении носителя.

Получается и исследуется ряд упрощенных (приближенных) законов компенсации поля скоростей движения оптического изображения.

Синтезируются законы стабилизации оптического изображения на фокальной поверхности в АФА по скоростям, обусловленным уклонением движения носителя от программного при возмущенном движении носителя.

Полученные программные законы компенсации движения и законы стабилизации оптического изображения на фокальной поверхности относительно аэрофотоматериала в АФА позволяют, используя соответственно нелинейные и линеаризованные уравнения динамики АФА, определить соответствующие управляющие моменты.

Предложенные способы математического моделирования движения и синтеза программных законов компенсации движения и законов стабилизации оптического изображения на фокальной поверхности в АФА обладают достаточной общностью и могут быть использованы в других управляемых прецизионных ОМС.

Стрыгин В.В., Покорная И.Ю. (Воронеж)

О ВНУТРЕННИХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Внутренние пограничные слои для сингулярно возмущенных краевых задач порождаются разными причинами. Ниже обсуждается задача ($x \in R^2$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр)

$$\varepsilon \dot{x} - A(t)x = f(t) \quad , \ t \neq \zeta \tag{1}$$

$$x^1(a) = x^2(b) = 0 \tag{2}$$

где $A(t)$ - матрица, непрерывная во всех точках $[a, b]$, кроме точки $t = \zeta$ ($a < \zeta < b$), $f(t)$ - достаточно гладкая при всех $t \in [a, b]$.

Так как решение $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1) при $\varepsilon > 0$ должно быть непрерывно по t в точке $t = \zeta$, а решение предельного уравнения (при $\varepsilon = 0$) должно иметь, вообще говоря, разрыв в этой точке, то явление пограничного слоя должно наблюдаться не только в окрестностях концов, т.е. точек $t = a$ и $t = b$, но и в окрестности точки $t = \zeta$.

Пусть при каждом $t \neq \zeta$ матрица $A(t)$ имеет различные вещественные собственные значения противоположного знака $\lambda_1(t) < 0 < \lambda_2(t)$. Пусть $g(t)$ и $h(t)$ - соответствующие им собственные векторы матрицы $A(t)$.

При условии линейной независимости векторов $h(\zeta - 0)$ и $g(\zeta + 0)$ необходимой для непрерывной склейки решения $x(t, \varepsilon)$ в точке $t = \zeta$ при малых $\varepsilon > 0$ удается полностью исследовать асимптотику решения $x(t, \varepsilon)$. В окрестности концов $t = a$ и $t = b$ асимптотика оказывается обычной (как если бы не было особенности в точке $t = \zeta$) со стандартными оценками пограничных функций с помощью экспоненциально затухающих мажорант. Условие непрерывности $x(t, \varepsilon)$ в точке $t = \zeta$ приводит к необходимости согласования соответствующих пар пограничных функций (слева и справа). Оказывается, что такие пары пограничных функций удовлетворяют таким же оценкам.

УДК 512.86:519.12

Субботин В.Ф., Удоденко Н.Н. (Воронеж)

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОКСТЕРА

В классификации многообразий M^n важную роль играет инвариант - эйлерова характеристика $\chi(M^n)$. В [3] для некоторых многообразий установлен факт: $\chi(M^n)=|\mathcal{D}(1)|$, где $|\mathcal{D}(\lambda)|$ - характеристический многочлен преобразования Кокстера некоторого графа.

В докладе обсуждаются свойства преобразования Кокстера (ПК) и способы нахождения его характеристического многочлена (ХМПК). Пусть G - конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер с произвольной фиксированной нумерацией вершин; поставим в соответствие графу G матрицу смежности $A=(a_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$ (n - число вершин графа) и построим набор матриц - отражений σ_i $(i=\overline{1,n})$ по правилу: в единичной матрице i-ая строка заменяется на строчку $(a_{i1},\ldots,a_{i,i-1},-1,a_{i,i+1},\ldots)$. Произведение всех отражений, взятых по одному разу в некотором порядке, и есть ПК. Без ограничения общности можно считать, что $C=\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_2\sigma_1$.

Обозначим через $\mathcal{D}=(d_{ij})$ - верхнетреугольную матрицу, в которой $d_{ii}=1,\ d_{ij}=a_{ij}$, а через $\mathcal{D}(\lambda)=(f_{ij})$ λ- матрицу: $f_{ii}=1+\lambda$, $f_{ij}=-\lambda a_{ij}$ при $j<i$ $f_{ij}=-a_{ij}$ при $j>i$.

ТЕОРЕМА. 1) $C=(-\mathcal{D}^T)^{-1}\mathcal{D}$; 2) Семейство матриц $\lambda I-C$ приводится матрицей $\mathcal{D}^T$ к матрице $\mathcal{D}(\lambda)$ и $|\lambda I-C|=|\mathcal{D}(\lambda)|$. $(*)$

При помощи представления ($*$) авторами доказаны аналоги некоторых утверждений из [4] , полученных для деревьев, найден ряд рекуррентных формул для вычисления ХМПК, указана геометрическая интерпретация коэффициентов ХМПК, найдены приложения в вопросах устойчивости рассинхронизованных систем. Другие приложения ПК см. 1-3

1. Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. - УМН, т.28 вып.2 (170), 1973., - с.19-33.
2. Арнольд В.И.,Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. - М.: Наука, т.2,1984. - 336 с.
3. Маркушевич Д.Г., Ольшанецкий М.А., Переломов А.М. Теор. и матем. физика, т.77, №2, 1988, - с.212-223; т.77, №3, 1988. - с. 352-368.
4. Субботин В.Ф., Стекольщик Р.Б. Функциональный анализ и его применения. - т.12, вып.1, 1978. - с.84-85.
5. Субботин В.Ф., Удоденко Н.Н. Аналог формулы Швенка для характеристических многочленов преобразований Кокстера. - Воронеж, 1985, 25 с. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 3.1.85 г. № 82-85 Деп.

УДК 517.9 Сумин В.И. (Нижний Новгород)

ОБ ОДНОЙ УДОБНОЙ ФОРМЕ ОПИСАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Оператор $A: L_p^m(\Pi) \to L_p^\ell(\Pi)$ назовем вольтерровым на некоторой системе T измеримых подмножеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, будем писать $A \in V(T)$, если $\forall H \in T$ значения $A[z](t), t \in H$, не зависят от сужения z на $\Pi \setminus H$. Разнообразные управляемые начально-краевые задачи для полулинейных эволюционных уравнений математической физики обращением главной части дифференциального оператора сводятся к уравнениям вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \tag{I}$$

где $f(t, a, u): \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, $v(\cdot) \in L_\infty^s(\Pi)$-управление, A - линейный оператор некоторого класса $V(T)$. Часто встречается случай: $\Pi = [d, \beta] \equiv [d^1, \beta^1] \times \ldots \times [d^n, \beta^n]$ - брус в $\mathbb{R}^n$, $T = T_k \equiv \{H = [d, \rho] \subset \Pi : \rho^i = \beta^i, k+1 \leq i \leq n\}, 1 \leq k \leq n$. Функциональные вольтерровы уравнения (I) позволяют получить в достаточно общей и удобной для конкретного использования форме различные конструкции теории оптимального управления (условия устойчивости, оптимальности первого и более высоких порядков, формулы численных методов, ...).

Приведем, например, условия устойчивости существования ограниченных глобальных решений (I) по возмущению управления, переформулировка которых в терминах сводящихся к (I) краевых задач позволяет получить ряд полезных конкретных результатов. Пусть: $\Pi = [d, \beta]$; A имеет квазинильпотентную мажоранту $B: L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)$ и $\exists k \in \overline{1,n}: B \in V(T_k)$; f и f'_a - функции типа Каратеодори, ограниченные на любом множестве $\{t \in \Pi, |a| \leq M, |u| \leq M\}, M \geq 0$. Положим: $\tau(z; v, v_0) \equiv \|A[f(t, A[z], v) - f(t, A[z], v_0)]\|_{L_\infty^\ell(\Pi)}$; $\Phi(H) \equiv \sup_c \|\chi_{H+c} B[\chi_{H+c}]\|_{L_\infty(\Pi)}$, $H \subset \Pi$, где $\sup$ берется по всем $c \in \mathbb{R}^k$ таким, что $(H+c) \subset \Pi$, χ_G - - характеристическая функция G; Ω - класс тех управлений v, каждому из которых отвечает единственное в $L_\infty^m(\Pi)$ решение z_v для (I).

<u>Теорема</u>. Пусть: 1) $\|A[\chi_H z]\|_{L_\infty^\ell(\Pi)} \leq \omega \cdot \|\chi_H A[z]\|_{L_\infty^\ell(\Pi)}$ $\forall H \in T_k$, $z \in L_\infty^m(\Pi)$, где $\omega \geq 0$; 2) $\Phi([d, \beta]) \to 0$, $\beta^i \to d^i (1 \leq i \leq k), [d, \beta] \in T_k$. Тогда $\forall$ ограниченного в $L_\infty^s(\Pi)$ множества $\mathfrak{D}$ и $\forall v_0 \in \Omega \cap \mathfrak{D}$ существуют числа $\varepsilon > 0, C > 0$ такие, что если $v \in \mathfrak{D}$ и $\tau(z_{v_0}; v, v_0) < \varepsilon$, то $v \in \Omega$, причем $\|A[z_v] - A[z_{v_0}]\|_{L_\infty^\ell(\Pi)} \leq C \cdot \tau(z_{v_0}; v, v_0)$.

В докладе обсуждаются различные возможности использования функциональных уравнений вида (I) в теории оптимального управления.

Литература:

1. Сумин В.И. - ДАН СССР, 1989, т.305, №5, с.1056-1059.
2. Сумин В.И. - ЖВМ и МФ, 1990, т.30, №1, с.3-21.

УДК 517.977.56 Сумин М.И. (Нижний Новгород)

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача исследования свойств дифференцируемости функции значений $\beta(b) \triangleq \inf\{I_0(u,b) : u \in \mathcal{D}\}$ в проекции на один из самых простых классов задач оптимального управления

$$(P_b)\ I_0(u,b) \to \inf,\ I_i(u,b) \le 0,\ i=1,\dots,\varkappa_1,\ I_i(u,b)=0,\ i=\varkappa_1+1,\dots,\varkappa,\ u\in\mathcal{D},$$
$$\dot{x}=f(t,x,u(t)),\ x(0)=x_0,\ t\in[0,1],\ I_i(u,b)\triangleq g_i(x[u](1),b),$$
$$b\in B,\quad \mathcal{D}\triangleq\{u\in L_\infty[0,1] : u(t)\in U \text{ п.в. на } [0,1]\},$$

где U компакт в R^m, B – выпуклый компакт в R^l, а функции f, g_i удовлетворяют традиционным в оптимальном управлении условиям. Различные подходы для решения этой задачи предлагались многими авторами (см., например,[1]). При этом, как правило, одним из основных предположений о задаче (P_b) было предположение, обеспечивающее в ней достижение нижней грани $\beta(b)$

В докладе дифференциальные свойства функции $\beta(b)$ изучаются в наиболее общей ситуации, когда отсутствуют какие-либо предположения, связанные с существованием оптимальных управлений. Рассматриваются два подхода, один из которых [2] связан с расширением задачи на класс обобщенных управлений (что обеспечивает достижение нижней грани на этом классе), а второй основан на теории минимизирующих последовательностей (см., например,[2]) и не требует расширения задачи (P_b).

Литература

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ.-М.:Наука,1988.
2. Сумин М.И. О функционале невязки принципа максимума в теории оптимального управления//Журн.вычисл.матем.и матем.физики.1990.Т.30.№8.С.1133-1149.

УДК 517.43

Сухочева Л.И. (Воронеж)

О ОДНОВРЕМЕННОЙ ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ И БАЗИСНОСТИ ЖОРДАНОВЫХ ЦЕПОЧЕК ДВУХ ПУЧКОВ

Пусть $\mathcal{H}$ – бесконечномерное гильбертово пространство, в котором действуют ограниченные самосопряженные операторы A, B, C.

Рассмотрим самосопряженный операторный пучок L:
$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$. Пусть $a, b \in \rho(L) \cap \mathbb{R}, a \neq b$.
Произведя замену параметра

$$\lambda = (a + b\mu)/(\mu + 1), \tag{1}$$

придем к новому самосопряженному пучку M: $M(\mu) = \mu^2 \mathcal{D} + \mu F + G$, где $\mathcal{D} = L(b)$, $F = 2abA + (a+b)B + 2C$, $G = L(a)$.

Собственные значения пучков L и M связаны соотношением (1), а соответствующие жордановы цепочки соотношением

$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, где

$$y_k = \frac{(-1)^k}{(\mu+1)^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (b-a)^j x_j / (\mu+1)^j, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Важным является вопрос об одновременной двукратной полноте и базисности в пространстве $\mathcal{H}$ жордановых цепочек пучков L и M. Обозначим через $\mathcal{E}(L)$ замкнутую линейную оболочку векторов $x_0 \oplus \lambda_0 x_0,\ x_1 \oplus (\lambda_0 x_1 + x_0), \ldots, x_p \oplus (\lambda_0 x_p + x_{p-1})$, где λ_0 пробегает множество собственных значений пучка L, а $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ – множество соответствующих жордановых цепочек, а через $\mathcal{E}_0(L)$ подпространство в $\mathcal{E}(L)$, натянутое на все векторы $\{x_\alpha \oplus \lambda_\alpha x_\alpha\}$.

Справедливо равенство

$$\dim \mathcal{E}(L)/\mathcal{E}_0(L) = \dim \mathcal{E}(M)/\mathcal{E}_0(M). \tag{2}$$

Основной результат: Если величина (2) конечна, то жордановы цепочки пучка L двукратно полны (соотв., двукратно базисны) тогда и только тогда, когда этим свойством обладают жордановы цепочки пучка M.

УДК 517.9

SABRA RAMADAN (JORDAN)

CONSTRUCTION AND PROPERTY OF $\mathfrak{F}(D)$ AND $\mathfrak{F}(Z)$ SPACES

Let $S(\mathbb{R})$-Schwartz space of rapid decay and infinitely differentiable functions, with topology, defined by a collection of halfnorms $p_\alpha(f) = P_{k,l}(f) = \sup_x | x^k f^{(l)}(x) |$.

$D(\mathbb{R})$-the space of all functions in $S(\mathbb{R})$ which have a compact support. Define

$Z(a) = \{\psi \in H(\mathbb{C}) : \forall k \exists d_k > 0, | z^k \psi(z) | \le d_k \exp(a|y|), z = x+iy\}$,

where $H(\mathbb{C})$ the space of entire functions. Now define

$$Z = \bigcup_{a>0} Z(a).$$

Let E a subalgebra of $S(\mathbb{R})$. $G(E)$ is the set of all sequences $\langle e_k \rangle$ such that $e_k \in E$, $\forall k$.

Now ; it can be designated

$G_M(E) = \{(e_k) \in G(E) : \exists m \ \forall \alpha \ \exists C_\alpha > 0, P_\alpha(e_k) \le C_\alpha k^m, \ \forall k \}$.

$N(E) = \{(e_k) \in G(E) : \forall m \ \forall \alpha \ \exists C_\alpha > 0, P_\alpha(e_k) \le C_\alpha k^{-m}, \ \forall k \}$.

Theorem 1. $G_M(E)$ is the subalgebra of $G(E)$ and $N(E)$ is an ideal in $G_M(E)$.

Define the algebra of mnemofunctions as

$\mathfrak{F}(S) = G_M(S)/N(S)$, $\mathfrak{F}(D) = G_M(D)/N(D)$, $\mathfrak{F}(Z) = G_M(Z)/N(Z)$.

Theorem 1. The Fourier transform and its inverse are one-to-one mapping of $\mathfrak{F}(D)$ onto $\mathfrak{F}(Z)$.

Theorem 2. a) its true that $\mathfrak{Z}'(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}(Z) \subset \mathfrak{F}(S)$.

b) if $u \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}(Z)$, then $Fu \in \mathfrak{F}(D)$, and $Fu \approx F_S u$ i.e. Fu weak equal $F_S u$.

Bibliography

1) Schwartz L. -C. R., 1954, VOL. 239, P. 847-848,

2) Антоневич А.Б, радыно Я.В.// ДАН СССР, 1991, т.318, N2.

3) Радыно Я.В., Нго Фу Тхань, Сабра Рамадан. Докл.РАН. 1992, Т.327, N1, с.20-24.

УДК 517.9

Ткачев Д.Л. (Новосибирск)

Смешанная задача для волнового уравнения в координатной области

Исследуется следующая смешанная задача: в области $R_+^{n+3}=\{(t,x,y,\vec{z})\mid t>0,\ x>0,\ y>0,\ \vec{z}=(z_1,\dots,z_n)\in R^n\}$ требуется найти решение волнового уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-\Delta_z u=0,$$

удовлетворяющее начальным данным и граничным условиям типа наклонной производной:

$$u_t-a\cdot u_x-b\cdot u_y-(\vec{c},\nabla_z u)=0,\ x=0;$$

$$u_t-\alpha\cdot u_y-\beta\cdot u_x-(\vec{d},\nabla_z u)=0,\quad y=0,$$

$a,b,\alpha,\beta;\ \vec{c},\vec{d}$ – комплексные числа и вектора.

Основные результаты:

1) при $n=0$ получена априорная оценка в $W_2^1(R_+^2)$, гарантирующая существование обобщенного решения задачи и указана область подходящих коэффициентов граничных условий a,b,α,β;

2) построены примеры некорректности, аналогичные примеру Адамара, что при $n>4$ позволяет заключить о почти совпадении области некорректности и области значений параметров задачи, определяемой выполнением равномерного условия Лопатинского одновременно на обеих границах.

Ткачева С.А. (Воронеж)

ОЦЕНКИ В $\mathcal{L}_p$ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

При исследовании параболических задач с вырождением по пространственной переменной возникает необходимость построения $\mathcal{L}_p$ оценок решения уравнения $\mathcal{L}u = f$ на полуоси $0 < x < \infty$ с дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ вида $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha^2(x)\frac{\partial}{\partial x}) - \lambda$, где весовая функция $\alpha(x) \geq 0$, слабо вырождается при $x \to 0$, так что функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ имеет интегрируемую особенность в точке $x = 0$.

Обозначим через V класс функций $v(x) \in C^2(\bar{R}_1^+)$, $v\big|_{x=+\infty} = 0$ имеющих ограниченную производную при $x \to +\infty$.

При доказательстве априорных оценок предполагается существование неотрицательной функции $H(x)$, $x \in R_1^+$, удовлетворяющей условиям

$$H(x) \in C^2(R_1^+),\ -\mathcal{L}H(x) \geq q(x) \geq 0,\ H(x) \geq 0,\ (x \in R_1^+) \qquad (1)$$

а также одному из следующих двух условий

$$\text{I. } \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=0} = \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=+\infty} = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} H(x) = 0\ ; \qquad (2)$$

$$\text{II. } \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial x} \text{ ограничено на } R_1^+. \qquad (3)$$

Теорема I. Пусть $p > 1$, $\lambda \geq 0$; существует $H(x)$, удовлетворяющая условиям (I)-(2) (или (I)-(3)). Тогда для любой функции $v(x) \in V$ (в случае II $v(x) \in V$ и $v(0) = 0$) справедливо неравенство

$$\int_{R_1^+} |v|^p \psi\, dx \leq \int_{R_1^+} \left(\frac{pH|\mathcal{L}v|}{\psi}\right)^p \psi\, dx, \qquad (4)$$

где $\psi(x) = q(x) + (p-1)\lambda H(x)$.

Теорема 2. В условиях теоремы I для любой функции $u \in V$ справедливо неравенство

$$\inf_{u_0} \left\{ \int_{R_1^+} \psi \left(\frac{|u+u_0|}{p'H}\right)^p dx \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_{R_1^+} \left(\frac{|\mathcal{L}u|}{\psi'}\right)^p \psi'\, dx \right. \qquad (5)$$

где infimum вычисляется по всем u_0, удовлетворяющим условиям

$$\int_{R_1^+} \left(\frac{|u_0|}{H}\right)^p \psi'\, dx < \infty,\quad \int_{R_1^+} u_0 \mathcal{L}v\, dx = 0 \text{ для всех } v \in V \qquad (6)$$

и $\psi'(x) = q(x) + (p'-1)\lambda H(x)$, $(1/p + 1/p' = 1)$.

Приводятся примеры на построение функции $H(x)$. Методика доказательства теорем близка к доказательству соответствующих утверждений в [1].

Литература

1. Глушко В.П. Об оценках решений эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Мат. заметки.- 1967.- Т.1, №5. - С. 555-564.

Тухлиев К. (Худжанд)

О аппроксимации функций класса Липщица по системам Виленкина

В этой работе устанавливается отценка для верхней грани равномерных отклонений непрерывных периодических функций из класса Липщица от средных арифметических частных сумм их ряда Фурье по системе Виленкина (см. [1]), включающей в себя системы Уолща-Пэли, т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $f(t)\in H^{(1)}$ и $\underline{X}\{P_n\}$ $(P_n\geq 2,\ n=1,2,\dots)$ система Виленкина. Тогда если

$$k=\sum_{\nu=1}^{\tilde{\nu}} a_\nu m_{n_\nu}\quad (n_1>n_2>\dots>n_\nu\geq 0,\ \ 1\leq a_\nu<P_{n_\nu}),$$

то

$$\sup_{f\in H^{(1)}}\max_t\left|f(t)-\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k}S_\nu(f;\varphi)\right|\leq\frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{n_1-1}\frac{1}{P_{i+1}}\sum_{r=1}^{P_{i+1}-1}\frac{2}{\sin\frac{\pi r}{P_{i+1}}}+O\left(\frac{1}{k}\right),$$

где $H^{(1)}$-означает непрерыв периодическых функций из класса Липщица,

$$S_\nu(f,\varphi)=\sum_{\nu=0}^{k-1}c_\nu\varphi_\nu(t),\quad c_\nu=\int_0^1 f(t)\overline{\varphi}_\nu(t)\,dt,\quad \varphi(t)\in\underline{X}\{P_n\}.$$

Отметим, что при $P_n=2$ $(n=1,2,\dots)$ аналогичная утверждения доказано в [2]

В[3]построен интерполяционный полином по системе Уолща-Пэли, а в [4] получена отценка для верхней грани уклонение функций класса Липщица от средных арифметических интерполяционных полиномов по функциям Уолща.

В данной работе обобщается теорема[4], для функций двух переменных из класса Липщица.

Теорема 2. Пусть $\sigma_{k,\ell}^{2}(f,t,\tau)$ -средных арифметических интерполяционных полиномов по функциям Уолща-Пэли. Тогда

$$\sup_{f\in H^{(1,1)}}\max_{t,\tau}\left|f(t,\tau)-\sigma_{k,\ell}^{2}(f;t,\tau)\right|=\frac{m_1}{4k}+\frac{n_1}{4\ell}+O\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{\ell}\right),$$

где

$$k=\sum_{i=1}^{\alpha}q_i 2^{m_i}\quad (m_1>m_2>\dots>m_\alpha\geq 0,\ \ q_i\ \text{равно либо}\ 0,\ \text{либо}\ 1),$$

$$\ell=\sum_{i=1}^{\beta}q_i 2^{n_i}\quad (n_1>n_2>\dots>n_\beta\quad q_i\ \text{равно либо}\ 0,\ \text{либо}\ 1).$$

Литература

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., ГИФМЛ, 1958

2. Стрбова М.А., Матем. сб., т. 71, N2, (1966), 214-226

3. Тиман М.Ф., Международная конференция конструктивной теории функций, Варна 1981

4. Тухлиев К., ИАН Тадж. ССР, отд. матем., 1986, N2, 18-24

УДК 517.98 Тюрин В.М. (Липецк)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим следующие пространства: C – пространство непрерывных ограниченных функций $f: \mathbb{R} \to X$ с $\sup$ – нормой (X – банахово пространство), L^p – лебеговы пространства функций $f: \mathbb{R} \to X$ ($p \geq 1$) , M^p – пространство сильно измеримых функций $f: \mathbb{R} \to X$ со степановской нормой.
Пусть F одно из пространств C , M^p , L^p . Зададим в F линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}u = B(t)du/dt - A(t)u$

с областью определения $\mathcal{D}(F) = \{ u \,/\, u \in F, \mathcal{L}u \in F \}$,

где $A(t)$, $B(t)$ операторные функции переменного $t \in \mathbb{R}$ со значениями в пространстве линейных операторов, действующих в X .

Оператор $\mathcal{L}: \mathcal{D}(F) \to F$ называется равномерно инъективным, если существует такая постоянная $k > 0$,что

$$\|u\|_F \leq k \, \|\mathcal{L}u\|_F .$$

Основные результаты доклада содержатся в следующих теоремах.

Теорема I. Пусть $B: \mathbb{R} \to [X]$ – непрерывная ограниченная функция ($[X]$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в X , с равномерной топологией). Тогда оператор $\mathcal{L}: \mathcal{D}(L^p) \to L^p$ равномерно инъективен если и только если, равномерно инъективен оператор $\mathcal{L}: \mathcal{D}(M^p) \to M^p$.

Обозначим через $W^1 = W^1(F)$ пространство, которое состоит из функций $f \in F$, имеющих производную $\dot{f} \in F$. Норма в W^1 определяется равенством

$$\|f\|_{W^1} = \|f\|_F + \|\dot{f}\|_F .$$

Равномерная инъективность оператора $\mathcal{L}: W^1(F) \to F$ определяется аналогично равномерной инъективности оператора $\mathcal{L}: \mathcal{D}(F) \to F$.

Теорема 2. Пусть функции $A: \mathbb{R} \to [X]$, $B: \mathbb{R} \to [X]$ ограничены и равномерно непрерывны, область значений операторов $B(t)$ не зависит от t . Тогда операторы $\mathcal{L}: W^1(M^p) \to M^p$, $\mathcal{L}: W^1(L^p) \to L^p$, $\mathcal{L}: W^1(C) \to C$ равномерно инъективны одновременно.

УДК 517.928.4 Уртенов М.Х. (Краснодар)

ОБ ОДНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Ряд прикладных задач приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям с малыми производными при старших производных, для которых оказывается необходимым обобщить известное для линейных уравнений понятие точки поворота.

В докладе предлагается определение точки поворота для нелинейных уравнений, обобщающее понятие точки поворота для линейных уравнений и точки срыва [1] для автономных уравнений с полиномиальными нелинейностями, а также основанная на теории особенностей, классификация точек поворота и соответствующих им нелинейных эталонных уравнений. Так, например, для простейших канонических форм A_n, $n = 2$, 3 эталонными уравнениями будут уравнения Риккати, Абеля, первое и второе уравнения Пенлеве.

Рассмариваются также некоторые аналоги методов ВКБ и фазовой плоскости для уравнений с полиномиальными нелинейностями.

Литература

1. Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С. //Докл. АН СССР 120, N 5, 967-969.

УДК 517.956

Н.Б. Ускова (Воронеж)

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $A:D(A)\subset H\to H$ - положительно определенный самосопряженный оператор с дискретным спектром, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H. Предположим,что его собственные значения допускают асимптотику вида $\lambda_j = C(j^{\alpha}) + O(j^{r})$, $j \geq 1$, $\alpha > 0$, $r < \alpha$ и пусть $e_1, e_2, \ldots$.ортонормированный базис из соответствующих собственных векторов. Символом M_ν обозначим банахово пространство линейных операторов вида $X=X_0A^{\nu}$, где $X_0 \in \mathrm{End}\, H$, $\nu\in(-\infty;1)$ с нормой $\|X\|=\|X\|_{\nu}=\|X_0\|_{\infty}$. Пусть линейный оператор (возмущение) $B:D(A)\ H\to H$ принадлежит M_ν и выполнено условие $\alpha(1-\nu)>1$. Рассмотрим два трансформатора $J:M_\nu\to M_\nu$, $JX=\sum\limits_{n\geq 1} P_nXP_n$, $X\in M_\nu$ и $\Gamma:M_\nu\to\mathrm{End}\, H$, где ΓX, $X\in M_\nu$, определяется как решение операторного уравнения

$$A\Gamma X-\Gamma XA=X-JX,$$

удовлетворяющее условию $J(\Gamma X)=0$, и проекторы P_n задаются формулой $P_nx=(x,e_n)e_n$, $n\geq 1$.

Т е о р е м а . Существует такое представление $\sigma(A)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n$, где σ_n - компакты и $\mathrm{dist}\,(0,\sigma_n)\to\infty$, $n\to\infty$, что имеет место формула

$$(A-B)(I+\Gamma X)=(I+\Gamma X)(A-JX),$$

то есть оператор A-B подобен оператору блочно-диагонального вида $A-JX$, $X\in M_\nu$. При этом при выполнении условия $p(\alpha-\alpha\nu-1)>1$ оператор ΓX принадлежит идеалу $\sigma_p(H)$ компактных операторов с суммируемыми со степенью p s-числами.

УДК 517.9 Филатов О.П. (Самара)

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

Построение аппроксимирующих дифференциальных включений в задачах с быстрыми и медленными переменными связано с вычислением пределов, например, следующего вида

$$J = \lim_{\Delta \to \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma(t))\, dt .$$

где $f: R \to R$, а $\sup$ вычисляется по всем решениям γ дифференциального включения

$$d\gamma/dt \in [\omega_1, \omega_2] , \quad \gamma(0) = 0 ,$$

с постоянными $0 < \omega_1 < \omega_2$.

В [1] с помощью принципа максимума Понтрягина была получена формула для вычисления J в классе гладких 2π периодических функций f с нулевым средним

$$\overset{*}{J} = \sup_{0 \leq c \leq m} \frac{(k-1)\, I(c)}{2\pi + (k-1)\lambda(c)} , \qquad (1)$$

где $I(c) \doteq \int_{A(c)} f(\gamma)\, d\gamma$, $A(c) = \{\gamma \in [0, 2\pi] : f(\gamma) > c\}$.

$\lambda(c)$ – мера Лебега множества $A(c)$, $m = \max f$, $k = \omega_2/\omega_1$.

В данном докладе будет показано, что формула (1) остается верной для более широкого класса функций f_0 , [illegible] [illegible].

Список литературы

1. Филатов О.П. [illegible] усреднения дифференциальных включений // Математические заметки. -1991. -Т.50, № 2. С.135-142.

УДК 517.95 Филимонов А.М. (Москва)

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С ДИСКРЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Хорошо известно, что естественной континуальной моделью конечной цепи Маркова

$$\dot{p}_j(t)=\alpha p_{j+1}-(\alpha+\beta)p_j+\beta p_{j-1},\ j=1,\dots,N-1;\ p_0(t)=p_N(t)=0 \qquad (1)$$

($p_j(t)$ -вероятность обнаружения частицы в j-м состоянии в момент t, α и β -константы) является краевая задача для уравнения Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t)=(\alpha-\beta)\frac{\partial}{\partial x}p+\frac{\alpha+\beta}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p,\ 0\leqslant x\leqslant l;\ p(0,t)=p(l,t)=0 \qquad (2)$$

Однако недавно было показано [1], что решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа (I) могут сильно отличаться от соответствующих континуальных моделей типа (2), получающихся из (I) путем формальной замены первой и второй разностей на соответствующие первую и вторую производные. Поэтому в качестве континуальной модели цепочки (I) (при $\alpha=\beta=0,5$) предлагается рассматривать следующую краевую задачу для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t)=\sum_{n=1}^{M}\frac{h^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}p;\quad h=l/N,$$
$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}p(0,t)=\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}p(l,t)=0,\ n=1,\dots,M-1 \qquad (3)$$

которое в качестве частного случая (M=1) содержит уравнение (2).

Доказана аппроксимационная теорема, показывающая, как при заданных параметрах задачи (I) подобрать начальные условия для уравнения (3) и величину нечетного числа M, чтобы решения (I) и (3) равномерно мало отличались на заданном промежутке времени.

Литература

1. Filimonov A.M., Kurchanov P.F., Myshkis A.D. Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with n beads, when n is large. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser.1, 1991, t.313, p.961-965.

УДК 517.977 Флоринский В.В. (Белгород)

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматривается задача оптимального быстродействия

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \; x(0) = x_0, \; x(\theta) = 0, \; |u_1| \le 1, \; |u_2| \le 1, \quad (1)$$

где θ –время оптимального быстродействия, а матрица A имеет канонический вид.

Исходную систему представляем в виде двух систем с одномерным управлением:

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \quad |u_1| \le 1; \quad (2)$$

$$\dot{x} = Ax + b_2 u_2, \quad |u_2| \le 1. \quad (3)$$

Предлагаемый метод заключается в последовательном приближении к точке $\tilde{x}_0$, в которой время быстродействия θ_1 системы (2) совпадает с временем быстродействия θ_2 системы (3), а градиенты множества достижимости системы (2) и области управляемости системы (3) в этой точке образуют угол, равный π. Очередное приближение такой точки ищется на биссектрисе угла между градиентами в точке, найденной на предыдущем шаге. В найденной точке $\tilde{x}_0$ множество достижимости системы (2) касается области управляемости системы (3) и время оптимального быстродействия $\theta_1 = \theta_2$ совпадает с временем оптимального быстродействия θ системы (1).

По найденному времени оптимального быстродействия находим моменты переключения и род управления для каждой из систем (2) и (3) методом, предложенным в работе [1], что и будет являться решением задачи (1).

Предлагаемый метод реализован на ЭВМ. Производились просчеты для некоторых систем третьего порядка.

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов.//Матем.сб. 1987. Т.134(176), № 10. С. 186-207.

УДК 517.977.56 Фокина В.Н. (Нижний Новгород)

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО УПРАВЛЕНИЮ ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ЗАДАЧЕЙ ДИРИХЛЕ С ВАРЬИРУЕМОЙ ОБЛАСТЬЮ.

В пространстве $R^n (n\geq 2)$ задано семейство замкнутых ограниченных областей Q_τ, полученных из фиксированной области Q_0 с помощью диффеоморфизма $T(x,\tau)$, определяемого формулами

$x_\tau = T(x,\tau)$, $Q_\tau = T(Q_0,\tau)$, $x\in Q_0$.

Пусть $u_\tau(x)$ непрерывное обобщенное решение задачи Дирихле

$$Lu = f(x,\ u,\ v),\ (u-\varphi)/\partial Q_\tau = 0,\ x\in Q_\tau \qquad (1)$$

Здесь L - дифференциальный эллиптический оператор 2 порядка с постоянными коэффициентами. Управляющая функция $v(x)$ - измеримая по Лебегу функция; $f(\circ,\ u,\ v)\in L^\infty(Q_\tau)$ и удовлетворяет условию Липшица по переменным u, v.

Предполагается, что при $\tau=0$ $Q_\tau=Q_0$, $v=v_0$ задача (1) однозначно разрешима. Строится отображение Φ, ставящее паре (T,v) функцию $u_\tau(T(x,\tau))$, где u_τ - решение задачи (1) I - тождественное отображение R^n в R^n. Путем построения мажорирующего однозначно разрешимого нелинейного интегрального уравнения формулируются требования к этому уравнению, обеспечивающие однозначность отображения Φ на пересечении его области определения с некоторой окрестностью пары (I,v_0) и липшицева непрерывность оператора Φ в точке (I,v_0).

УДК 517.98

Фомин В.И. (Тамбов)

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ ВЕСОВЫХ НОРМ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть E – нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$

$$L = \left\{ u : [a,b] \longrightarrow E \;\middle|\; \int_a^b \|u(t)\|\, dt < \infty \right\};$$

$\mu : [a,b] \to (0;+\infty)$, μ возрастает и ограничена.

Пусть $u \in L$. Разобьем $[a,b]$ произвольной системой точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ на n частей. Выберем на $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k ($1 \le k \le n$). Построим сумму

$$S_n(u,\mu) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k)\, \|u(\xi_{i_k})\|\, \Delta x_{i_k},$$

где $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ – такая перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$, что

$$\|u(\xi_{i_1})\| \le \|u(\xi_{i_2})\| \le \ldots \le \|u(\xi_{i_n})\|,$$

$\Delta x_{i_k} = x_{i_k} - x_{i_k - 1}$ ($1 \le k \le n$).

Определение. Функция $u \in L$ называется μ - интегрируемой на $[a,b]$, если существует конечный предел $S_n(u,\mu)$ при $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \longrightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения $[a,b]$ на части и выбора точек ξ_k; при этом, значение этого предела называется μ - интегралом функции $u(t)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается:

$$\int_a^b \mu(t) \circledast \|u(t)\|\, dt .$$

Каждая функция $u \in L$ μ - интегрируема на $[a,b]$.

Множество L является линейным нормированным пространством с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число и нормой

$$\|u\|_\mu = \int_a^b \mu(t) \circledast \|u(t)\|\, dt .$$

Эта норма называется весовой нормой, функция $\mu(t)$ ее весом.

УДК 517.9 Хапаев М.М. (Москва)

О СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ

Вводятся в рассмотрение системы дифференциальных уравнений, содержащих особые многообразия, на которых правые части обращаются в ∞, то есть сингулярные многообразия. Эти многообразия классифицируются на устойчивые и неустойчивые. Интересно отметить, что при движении вдоль интегральной кривой, в составе которой находится устойчивое сингулярное многообразие, происходит изменение порядка системы.

Предлагается использовать такие многообразия при исследовании функций на условный экстремум. На основе имеющихся ограничений строится система, содержащая эти ограничения в качестве сингулярных многообразий. Интегральная кривая этой системы является минимизирующей траекторией, касательная к которой совпадает с антиградиентом функции, вводящей в систему особые многообразия.

Хацкевич В.Л. (Воронеж)

О ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, R – вещественная прямая, 2^H – совокупность всех непустых подмножеств из H, $D \subset H$ – множество, плотно вложенное в H, многозначная функция $F(t)$ при каждом $t \in R$ действует из D в 2^H и является максимально монотонной. Через $J_\lambda(t)$ и $f_*(t)$ обозначим соответственно резольвенту и главное сечение оператора $F(t)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{u}(t) + \mu(F(t)u + \gamma u) \ni 0, \qquad (1)$$

где $\gamma > 0$ – фиксированная постоянная, $\mu > 0$ – параметр.

Теорема 1. Пусть $F(t): D \to 2^H$ при $\forall t \in R$ – максимально монотонный оператор. Пусть для $\forall z > 0$ выполнено условие

$$\|J_\lambda(t+h)x - J_\lambda(t)x\| \le \lambda |h| c(z) \quad (\forall x \in H: \|x\| \le z,\ \forall t \in R).$$

Пусть еще $\sup\limits_{t \in R} \|f_*(t)0\| \le c_0 < \infty$. Тогда при $\forall \mu > 0$ включение (1) имеет, причем единственное ограниченное на всей оси решение $\varphi_\mu: R \to H$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, более того для $\forall \lambda \in (0,1)$ и $x \in H$ функция $J_\lambda(t)x$ – почти периодична по t (по Бору). Тогда ограниченное решение включения (1) почти периодично.

В близких к теореме 2 предположениях показывается, что при стремлении параметра $\mu \to 0$ почти периодические решения $\varphi_\mu(t)$ включения (1) равномерно на R стремятся к элементу $z_0 \in D$, являющемуся единственным решением включения

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(t)z\,dt + \gamma z \ni 0. \qquad (2)$$

В (2) интеграл понимается в смысле Аумана, а предел по метрике Хаусдорфа.

УДК 517.98 Хромов А.П. (Саратов)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Доклад посвящается обзору результатов по спектральному анализу дифференциального оператора:

$$l[y]=y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)y^{(k)},\ x\in[0,1],\ p_k(x)\in L[0,1]$$

с произвольными краевыми условиями вида:

$$U_i(y)=\sum_{j=0}^{n-1}[a_{ij}y^{(j)}(0)+b_{ij}y^{(j)}(1)]=0\quad (i=1,\dots,n).$$

1. Регулярные по Биркгофу краевые условия. Теоремы равносходимости.

Результаты Д.Биркгофа, М.Стоуна, Я.Д.Тамаркина, В.А.Ильина, А.А.Шкаликова, А.П.Хромова, А.М.Минкина, В.С.Рыхлова.

2. Слабо нерегулярные краевые условия. Теоремы о сходимости и суммируемости по Риссу спектральных разложений.

Результаты А.П.Хромова, А.А.Шкаликова, О.Б.Шиловской.

3. Нерегулярные распадающиеся краевые условия. Теоремы о сходимости и суммируемости по Абелю спектральных разложений. Теоремы полноты системы собственных и присоединенных функций.

Результаты Д.Джексона, Ж.Гопкинса, Л.Уорда, Г.Зейферта, М.В.Келдыша, В.Эберхарда, А.П.Хромова, А.Г.Костюченко, А.А.Шкаликова, А.П.Гуревича, И.Ю.Трушина.

4. Оператор n -кратного дифференцирования с нерегулярными нераспадающимися краевыми условиями. Задача М.А.Наймарка.

Результаты А.П.Хромова, О.Ю.Дмитриева.

УДК 518:517.948 Хромова Г.В. (Саратов)

О ВЕРХНИХ ГРАНЯХ УКЛОНЕНИЙ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА НЕКОТОРЫХ КОМПАКТНЫХ КЛАССАХ И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{M}_2^r[a,b]=\{f(x)\in W_2^r[a,b]:\|f\|_{W_2^r}\le 1\},\quad r\ge 1,\ r-$$

– целое , использующийся в методах регуляризации при решении уравнений I рода.

Пусть R_α ($\alpha>0$ – параметр) семейство интегральных операторов с ядрами $K_\alpha(x,t)$ таких, что $\|R_\alpha^{(m)}f-f^{(m)}\|_C\to 0$ при $\alpha\to 0$, $m=0,1,\dots,r-1$, $R_\alpha^{(m)}$ интегральный оператор с ядром $K_\alpha^{(m)}(x,t)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}K_\alpha(x,t)$. Обозначим

$$\Delta_1^{(m)}(\alpha,R_\alpha,r)=\sup\{\|R_\alpha^{(m)}f-f^{(m)}\|_C : f\in\mathcal{M}_2^r\}.$$

Теорема. Справедливо представление:

$$\Delta_1^{(m)}(\alpha,R_\alpha,r)=\max_{a\le x\le b}\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m}g^{(m)}(x,x,\alpha)-\int_a^b K_\alpha^{(m)}(x,t)g^{(m)}(x,t,\alpha)dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $g^{(m)}(x,t,\alpha)=G^{(m)}(t,x)-\int_a^b K_\alpha^{(m)}(x,\eta)G(t,\eta)d\eta$,

$$G^{(m)}(t,x)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}G(t,x),$$

$G(t,x)$ – функция Грина краевой задачи, порожденной дифференциальным выражением $ly=(-1)^r y^{(2r)}+y$ и краевыми условиями:

$$y^{(k)}(a)=y^{(k)}(b)=0,\quad k=r,\dots,2r-1.$$

Следствие.

$$\Delta_0^{(m)}(\alpha,r)\equiv\sup\{\|f^{(m)}\|_C : f\in\mathcal{M}_2^r\}=\sup_{0\le x\le 1}\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m}G^{(m)}(x,x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Указанные представления используются для получения точных по порядку оценок погрешностей приближенных решений уравнений I рода, а также для получения априорных оценок для производных точных решений этих уравнений.

УДК 517.9 Чегис И.А.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В КЛАССЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Алгоритм решения задачи распределения вихревых токов $\underline{J}(x)$ [1] (Eddy Current) в области $V\subset R^3$, сводящий решение системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении к решению стандартного интегрального уравнения на поверхности $S=\partial V$, известного как уравнения Фока в теории рассеяния [2], дополнен доказательством теоремы существования и единственности решения задачи в классе функций $\underline{J}(x)\in C^2(V)\cap C^{0,\alpha}(\overline{V})$, $\mathrm{rot}\underline{J}\in C^{0,\alpha}(\overline{V})$. Решена система интегральных уравнений для скалярных функций $\varphi(x)\in C^{0,\alpha}(S)$ и $\psi(x)\in C^{1,\alpha}(S)$ плотностей потенциалов простого и двойного слоя, возникающая как следствие основной теоремы, доказанной ранее в [1], о возможности расщепления системы уравнений Максвелла на два уравнения, действующих в двух ортогональных подпространствах Вейля [3]. В [1] была доказана теорема: пусть 1/ V - конечная область в R^3 с границей S класса гладкости C^2, 2/ $\underline{H}o(x)=\nabla Uo(x)$, $\Delta Uo(x)=0$, $x\in\overline{V}$, 3/ решение системы уравнений Максвелла, вихревой ток $\underline{J}(x)$ принадлежит классу гладкости $\underline{J}(x)\in C^2(V)\cap C^{0,\alpha}(\overline{V})$, $\mathrm{rot}\underline{J}\in C^{0,\alpha}(\overline{V})$ и удовлетворяет условиям: $\mathrm{div}\underline{J}=0, x\in V$, $(\underline{J},\underline{n})_x=0, x\in S$, тогда существуют и единственны две скалярные функции $\varphi(x)\in C^{0,\alpha}(S)$ и $\psi(x)\in C^{1,\alpha}(S)$ являющиеся плотностями потенциалов простого и двойного слоя $u(x)$ и $v(x)$ соответственно такие, что

$$\nabla u(x) - \nabla v(x) = k^2\underline{H}o(x);\ x\in V$$

$$\underline{J}(x) = -k^2\underline{J}(x),\ x\in V$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{J}(x) = \mathrm{Grad}\,\psi(x) + \nabla u(x),\ x\in S$$

где $k^2=i\omega\mu\sigma$ определяется материальными константами среды V.

Все доказательства носят конструктивный характер, позволяющий написание численных алгоритмов решения задачи.

[1] И.А.Чегис, Ж.вычисл. и матем. физ. Т.32, №7, 1992, С.1046-1056.

[2] Д.Колтон, Р.Кресс, Интегральные уравнения в теории рассеяния, М.: Мир, 1987, С.141.

[3] Э.Е.Быховский, Н.В.Смирнов, К.Труды МИАН, Т.59, 1960, С.5-36.

УДК 517.9 Черевко И. М., Якимов И. В. (Черновцы)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим сингулярно возмущенную систему уравнений

$$\varepsilon \frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} [d\eta(t,\theta)]x(t+\varepsilon\theta) + f(t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $\eta(t,\theta)$, $f(t)$ непрерывные, периодические по t с периодом T функции, $\eta(t,\theta)$ - функция ограниченной вариации по θ, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $\tau = const > 0$.

Пусть корни характеристического уравнения

$$\det\left\{\int_{-\tau}^{0}[d\eta(t,\theta)]\exp(\lambda\theta) - \lambda E\right\} = 0$$

лежат в левой полуплоскости, тогда при малых ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ существует единственное периодическое решение системы (1).

Если $f(t)$, $\eta(t,\varepsilon)$ достаточно гладкие по t, построено равномерное асимптотическое разложение периодического решения.

2. Пусть $C^\ell = C^\ell[-\tau,0]$ -пространство ℓ раз дифференцируемых функций. Обозначим $C^\ell_H = \{\varphi \in C^\ell, \|\varphi\|_{C^\ell} < H,\ H > 0\}$.

Рассмотрим квазилинейное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^{0}[d\eta(\theta)]x(t+\theta) + \int_{-\tau}^{0}[d\xi(\theta)]\dot{x}(t+\theta) + \varepsilon F(t, x_t, \dot{x}_t), \tag{2}$$

где $\eta(\theta)$, $\xi(\theta)$ - функции ограниченной вариации, $\left|\bigvee_{-\tau}^{0}\xi(\theta)\right| < d < 1$, $F(t,\varphi,\psi)$ - нелинейный ограниченный функционал в $R \times C_H \times \overset{\circ}{C}_H \times [0,\varepsilon_0]$. Предположим, что для соответствующего (2) линейного неоднородного уравнения справедлива альтернатива Фредгольма и выполняются условия

$$|F(t,\varphi_1,\psi_1) - F(t,\varphi_2,\psi_2)| \le L\left(\|\varphi_1-\varphi_2\|_C + \|\psi_1-\psi_2\|_C\right), \tag{3}$$

$$|F(t,\varphi,\psi_1) - F(t,\varphi,\psi_2)| \le L\|\psi_1-\psi_2\|_C, \tag{4}$$

семейство

$$\{f_\psi : R\times M \to R^n,\ f_\psi = F(t,\varphi,\psi)\} \tag{5}$$

равностепенно непрерывно, если M компактное множество из C_H и $\psi \in C^1_H$ фиксировано.

Теорема. Пусть $F(t,\varphi,\psi)$ - T -периодическая функция по t. Если выполняется условие (3), тогда при достаточно малых ε уравнение (2) имеет единственное T - периодическое решение.
Если выполняются условия (4), (5), тогда при достаточно малых ε уравнение (2) имеет по крайней мере одно T -периодическое решение.

УДК 519.316.4 Чернявский И.Б., Мухин [illegible] (Москва)

АППРОКСИМАЦИЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В задачах управления с векторным критерием качества возникает необходимость аппроксимации множества Парето. Именно, нахождение всего множества Парето-максимальных значений векторного критерия на области достижимости управляемой системы.

Рассматривается задача

$$\langle X,\ f(x)\rangle, \tag{1}$$

где область достижимости управляемой системы $X \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$, векторный критерий есть $f(x) = (f_1(x),\dots,f_N(x))$, $f_i(x) \in C(x)$, $i \in N$. Множество Парето-максимальных решений задачи (1) имеет вид

$$X^P = \{\, x^P \in X \mid f(x^P) \not\leq f(x),\ \forall x \in X \,\},$$

где $[f^{(1)} \geq f^{(2)}] \Leftrightarrow [(f_i^{(1)} \geqslant f_i^{(2)}) \wedge (f^{(1)} \neq f^{(2)})]$, $[f^{(1)} \not\leq f^{(2)}] \Leftrightarrow [\neg f^{(1)} \geq f^{(2)}]$.

Рассмотрим свертку критерия $f(x)$: $\Phi(x,k,\alpha) = \sum\limits_{i\in N} \left[\frac{\alpha_i}{f_i(x)}\right]^k$. Здесь $k \in Z_+$, вектор $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N) \in M = \{\alpha \in R^N,\ \alpha_i = \text{const} > 0,\ i \in N,\ \sum \alpha_i = 1\}$; без потери общности будем считать $f_i(x) \geqslant \delta > 0$.

<u>Лемма</u> $X^P \supset X(P,k_2) \supset X(P,k_1) \supset X_L(P)$, $\forall (k_1, k_2 \in Z_+,\ k_1 < k_2)$,

где

$$X(P,k) = \{\, x^* \in X \mid \Phi(x^*,k,\alpha) = \min_{x\in X} \Phi(x,k,\alpha),\ \alpha \in M \,\},$$

$$X_L(P) = \{\, x^0 \in X \mid \sum_{i\in N} \alpha_i f_i(x^0) = \max_{x\in X} \sum_{i\in N} \alpha_i f_i(x),\ \alpha \in M \,\}.$$

Введем множества

$$f(X^P) = \bigcup_{x\in X^P} f(x);\quad X(P) = \lim_{k\to\infty} X(P,k);\quad f(X(P)) = \bigcup_{x\in X(P)} f(x).$$

<u>Теорема</u> В задаче (1) имеет место равенство

$$\overline{f(X^P)} = \overline{f(X(P))},$$

где $\overline{A}$ – замыкание множества A.

Таким образом, для любых $x^P \in X$ и $\varepsilon > 0$ существуют $k \in Z_+$, $x_k^P \in X(P,k)$ такие, что $|f(x^P) - f(x_k^P)| < \varepsilon$.

Литература

Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. Vector-Valued Maxmin. N.Y. Academic Press, 1993

УДК 518.9

А.А.Чикрий (Киев)

ФУНКЦИОНАЛЫ МИНКОВСКОГО В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ.

Пусть задан квазилинейный конфликтно управляемый процесс

$$\dot{z} = Az + \varphi(u,v), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \ v \in V, \tag{1}$$

где A – квадратная матрица порядка n, функция $\varphi: U \times V \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных, а $U \in K(\mathbb{R}^n)$, $V \in K(\mathbb{R}^n)$, $K(\mathbb{R}^n)$ – совокупность непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$.

Терминальное множество цилиндрическое

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 – линейное подпространство из $\mathbb{R}^n$, а $M \in \operatorname{co} K(L)$, $L = M_0^{\perp}$.

В процессе игры преследователь (u) в момент t использует информацию о начальном состоянии z^0 и предыстории управления убегающего $v_t(\cdot)$. Оба игрока в качестве управлений используют измеримые функции.

Пусть $\pi: \mathbb{R}^n \to L$ – ортопроектор. Рассмотрим многозначные отображения

$$W(t,v) = \pi e^{At} \varphi(U,v), \quad W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t,v), \quad t \geq 0.$$

Условие Понтрягина [1]. $\operatorname{dom} W(t) = [0,\infty)$.

Зафиксируем некоторый борелевский селектор $\gamma(t)$, $\gamma(t) \in W(t)$, и положим $\xi(t,z,\gamma(\cdot)) = \pi e^{At} z + \int_0^t \gamma(\tau)\, d\tau$. Пусть множество X, $X \subset \mathbb{R}^n$, замкнуто и $0 \in X$, а $\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha p \in X\}$, $p \in \mathbb{R}^n$, обратный к функционалу Минковского [2]. Обозначим

$$\alpha(t,\tau,z,v,m,\gamma(\cdot)) = \alpha_{W(t-\tau,v)-\gamma(t-\tau)}(m - \xi(t,z,\gamma(\cdot))), \quad t \geq \tau \geq 0, \ z \in \mathbb{R}^n, \ v \in V, \ m \in M,$$

$$T(z,\gamma(\cdot)) = \min\left\{ t \geq 0 : \int_0^t \inf_{v \in V} \max_{m \in M} \alpha(t,\tau,z,v,m,\gamma(\cdot))\, d\tau \geq 1 \right\}$$

Теорема. Пусть для конфликтно управляемого процесса (I),(2) выполнено условие Понтрягина, а для начального состояния z^0 существует борелевский селектор $\gamma^0(\cdot)$ такой, что $T(z^0,\gamma^0(\cdot)) < +\infty$.

Тогда траектория системы (I) может быть приведена из начального состояния z^0 на множество M^* в момент $T(z^0,\gamma^0(\cdot))$.

I. Л.С.Понтрягин, Избранные научные труды, т.2, М. "Наука", 1988, 576с.

2. А.А.Чикрий, Конфликтно управляемые процессы, К."Наукова думка", 1992. 384с.

УДК 517.54:517.862

Чуешев В.В. (Кемерово)

РАССЛОЕНИЕ ПРИМА И ГАННИНГА НАД ПРОСТРАНСТВОМ ТЕЙХМЮЛЛЕРА

Пусть F -отмеченная компактная риманова поверхность (о.к.р.п.) рода $g \geq 2$; Γ - отмеченная фуксова группа I рода, инвариантно действующая в $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ такая, что $F=\mathcal{U}/\Gamma$; $Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ - группа Ли, состоящая из всех I-мерных представлений $\rho:\Gamma\to\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus 0$. Голоморфным ρ -дифференциалом Прима на F называется голоморфная дифференциальная I -форма $\varphi(z)$ на $\mathcal{U}$ такая, что $\varphi(Tz)=\rho(T)\varphi(z)$, $T\in\Gamma$, $z\in\mathcal{U}$. Расслоение Прима P над $\mathbb{T}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\setminus L_g)$ имеет слой $\Gamma([F_\mu],O^{1,0}(\rho_\mu))$ (векторное пространство ρ_μ- дифференциалов Прима на F_μ) над $([F_\mu],\rho_\mu)$, где $[F_\mu]$ - класс эквивалентности о.к.р.п. со структурой μ , т.е. точка пространства Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F)$ рода g ; L_g - g- мерная подгруппа Ли . Отображение периодов $\varphi:\Gamma\to\mathbb{C}$ для ρ - дифференциала Прима $\varphi(z)$ удовлетворяет условию $\varphi(ST)=\varphi(S)+\rho(S)\varphi(T)$, $S,T\in\Gamma$. Все $\varphi:\Gamma\to\mathbb{C}$ с таким условием образуют векторное пространство $Z^1(\Gamma,\rho)$. Расслоение Ганнинга H над $\mathbb{T}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\setminus 1)$ имеет слой $Z^1(\Gamma^\mu,\rho_\mu)/B^1(\Gamma^\mu,\rho_\mu)$ над $([F_\mu],\rho_\mu)=(\Gamma^\mu,\rho_\mu)$, где $B^1(\Gamma^\mu,\rho_\mu)$ - порождается элементом σ_μ $(\sigma_\mu(T)=1-\rho_\mu(T)$, $T\in\Gamma^\mu)$; Γ^μ - квазифуксова группа униформизирующая F_μ . Пространство Римана $\mathbb{R}_g(F)=$ $\doteq\mathbb{T}_g(F)/M_g$, где M_g - модулярная группа Тейхмюллера. На P задаётся естественная эрмитова метрика $\langle\varphi_1(z),\varphi_2(z)\rangle_{\rho_\mu}=i\int_{s[F_\mu](\Delta)}\varphi_1(z)\wedge\overline{\varphi_2(z)}$, где Δ - фундаментальная область для Γ ; s - глобальное вещественно аналитическое сечение над $\mathbb{T}_g(F)$ для канонического отображения(Ирл К.), $s[F_\mu](\Delta)$ - квазиконформная деформация для Δ .

Теорема I. Расслоение Прима P является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга ($g-1$) над $\mathbb{T}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\setminus L_g)$, а также над $\mathbb{R}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\setminus L_g)$.

Теорема 2. Расслоение Ганнинга H является голоморфным векторным расслоением ранга$(2g-2)$ над $\mathbb{T}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\setminus 1)$, а также над $\mathbb{R}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\setminus 1)$.

Отображение $p:\varphi(z)\mapsto[\varphi]$ (класс периодов ρ - дифференциала Прима $\varphi(z)$) будет голоморфной инъекцией для $\rho\notin L_g$.

Теорема 3. Последовательность голоморфных векторных расслоений $0\to P\xrightarrow{p}H\to H/P\to 0$ является точной.

УДК 517.9

Чуешева Н.Л. (Кемерово)

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

В четырёхмерном кубе $Q = \{0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < t < 1,\ 0 < z < 1\}$ с границей Γ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \Delta_{xy}\Delta_{tz}u + a_{113}u_{xxt} + a_{223}u_{yyt} + a_{123}u_{xyt} + a_{114}u_{xxz} + a_{224}u_{yyz} + a_{124}u_{xyz} + cu = f(x,y,t,z), \tag{1}$$

коэффициенты которого $a_{ijk}(x,y,t,z)$, $c(x,y,t,z) \in C^3(\bar{Q})$, $i,j = 1,2$, $k = 3,4$, $a_{ijk} = a_{jik}$; операторы $\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta_{tz} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее краевому условию:

$$u\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Теорема. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,y,t,z) \in L_2(Q)$ и для коэффициентов этого уравнения выполнены условия:

1) $c(x,y,t,z) > 0$ и достаточно большой;

2) $\min\limits_{\bar{Q}}(a_{113t} + a_{114z}) + \min\limits_{\bar{Q}}(a_{223t} + a_{224z}) - (1/4\pi^2)\max\limits_{\bar{Q}}|a_{123t} + a_{124z}| + 2 > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и мало.

Тогда решение краевой задачи (1),(2) существует и единственно из пространства H.

Здесь пространство H — пространство типа С.Л.Соболева с нормой:

$$\|u\|_H^2 = \int\limits_Q (u_{xxtt}^2 + u_{yytt}^2 + u_{xxzz}^2 + u_{yyzz}^2 + u_{xxt}^2 + u_{yyt}^2 + u_{xyt}^2 + u_{xxz}^2 + u_{yyz}^2 + u_{xyz}^2 + u^2)\,dQ.$$

Замечание. Условие 2) в теореме на коэффициенты уравнения (1) определено с точностью до ε. Если же левая часть этого неравенства будет меньше нуля, то можно построить пример неединственности решения однородного уравнения (1) с краевым условием (2).

УДК 519.9 Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. (Москва)

ЗАДАЧИ ПОИСКА И ОБНАРУЖЕНИЯ НА НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1. Общая постановка задачи. Точечные объекты A (ищущий) и B (убегающий) перемещаются по некоторой кусочно гладкой поверхности S так, что их скалярные скорости, a и b соответственно, постоянны, причем $a > b$. Объект B считается обнаруженным, если в некоторый момент времени он оказывается в геодезическом круге обнаружения с центром в точке A и фиксированным радиусом $l>0$. Параметры a, b, l известны обоим объектам. Кроме того, объекту B в каждый момент времени известна траектория объекта A и его местоположение на ней.
Требуется указать: а) достаточные условия на параметры, при выполнении которых возможен успешный поиск, б) траекторию объекта A, посредством которой успешный поиск реализуется.
2. Следящая область. Пусть объект A движется по некоторой кусочно гладкой кривой Γ, лежащей на поверхности S. Тогда в каждый момент времени на поверхности S возникает *следящее* множество, в котором объект B находиться не может. Это множество состоит из двух частей: в одну из них (*остаточную*) он не успевает попасть после ухода круга обнаружения вследствие условий на параметры, а из другой (*упреждающей*) не успевает уйти.
3. Результаты. При помощи следящих областей исследована задача поиска:
а) на прямом круговом цилиндре радиуса R и высоты H,
б) на сфере радиуса R.
Доказано, что для обеих поверхностей успешный поиск возможен при условии, что $R < la/\Pi b$ (построены соответствующие траектории и указано требуемое время).
Показано, что задача поиска может быть успешно решена на поверхности вращения без края при условии, что радиусы $R(z)$ ее параллелей подчиняются неравенству $R(z) < la/\Pi b$ (в неодносвязном случае при некоторых дополнительных предположениях).

УДК 517.9

Шалаумов В.А. (Кемерово)

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Пусть G_i, $i=\overline{1,4}$ ограниченные области в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкими границами такие, что $\overline{G}_i \subset G_{i+1}$. В области $\mathcal{D}=G_4 \setminus G_1$, рассмотрим следующее уравнение Беллмана

$$\begin{cases} \max\limits_{u\in U}\left\{\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 m^{\varepsilon,u}}{\partial x_i \partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{A_i(x,u)}{\varepsilon}\chi_{\mathcal{D}_1}(x)+\frac{B_i(x,u)}{\varepsilon}\chi_{\mathcal{D}_3}(x)\right)\frac{\partial m^{\varepsilon,u}}{\partial x_i}+1\right\}=0, \\ m^{\varepsilon}(x)\big|_{\Gamma_1}=m^{\varepsilon}(x)\big|_{\Gamma_4}=0, \end{cases}$$

где $\mathcal{D}_i=G_{i+1}\setminus G_i$, $\Gamma_i=\partial G_i$, U – ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$. Считаем, что коэффициент оператора $L^{\varepsilon,u}$ – достаточно гладкие функции, оператор строго положительно определён. Предположим также, что для любого $u\in U$, траектории динамических систем

$$\dot{x}_t=A(x_t,u),\ x_0=x\in\mathcal{D}_1;\ \dot{x}_t=B(x_t,u),\ x_0=x\in\mathcal{D}_3$$

выходят соответственно на Γ_2, Γ_3 за конечное время, причём

$$(A(x,u),n(x))\big|_{\Gamma_2}<0,\quad (B(x,u),n(x))\big|_{\Gamma_4}<0,$$

$n=n(x)$ – вектор внешней нормали. Гладкое решение уравнения Беллмана интерпретируется как наибольшее среднее время пребывания в $\mathcal{D}$ диффузионного процесса управляемого оператором $L^{\varepsilon,u}$.

<u>Теорема.</u> Для $x\in\mathcal{D}_2$, существует $\hat{g}=const>0$

$$m^{\varepsilon}(x)=\exp\{\hat{g}/\varepsilon\}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i d_i(x)\right)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i f_i(x).$$

Для $x\in\mathcal{D}_1$

$$m^{\varepsilon}(x)=\exp\{\hat{g}/\varepsilon\}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\left(\varphi_i(x)+\psi_i^{\Gamma_2}(\rho/\varepsilon,\varphi)\right)\right)+\exp\left\{\frac{g(x)}{\varepsilon}\right\}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i p_i(x)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i q_i(x),\quad g(x)>0 \text{ при } x\in\mathcal{D}_1,\ g(x)\big|_{\Gamma_2}=0.$$

УДК 517.9 Шаталов Ю.С. (Уфа)

ОЦЕНКИ ВОЗМУЩЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТФХ В ПОЛЕ КООРДИНАТ ИЗОТЕРМ

Для коэффициентов и источниковых слагаемых уравнения энергии (в том числе гиперболического типа, которым моделируют релаксационные явления) получено функционально-интегральное уравнение (ФИУ) вида

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\underline{g}}^{\bar h} K(s,t,\tau)\,\varepsilon(s)\,ds\Big|_{\tau=\alpha(t)}^{\tau=\beta(t)} + \int_{\underline{g}}^{\bar h}\sum_{j=s}^{j=w_1} K_j(s,t)\,\xi_j(s)\,ds + S\xi = Q(t),$$

где ξ – вектор ТФХ (релаксации, теплоемкости, теплопроводности, скорости деструкции материала, тепловыделений и функции наследственных свойств материала), зависящий от температуры s; S – оператор суперпозиции. Ядра K_j калорических величин строятся с помощью координатного оператора изотерм

$$\theta \triangleq \int_{\Omega}\left[\theta\chi(g_u,T(x,\tau),s) + (\theta-1)\chi(T(x,\tau),h_u,s)\right]dx, \qquad \theta\in R^1,$$

$\chi(r,T,s) = \begin{cases} 1, & s\in(r,T) \\ 0, & s\notin(r,T)\end{cases}$, $T(x,t)$ – температура тела в точке $x\in\Omega\subset R^3$, $\underline{g}$, $\bar h$ – минимальная и максимальная температуры опыта.

В частности, ядро теплоемкости $K_c(s,t) = \theta[\ldots]\Big|_{\tau=\alpha(t)}^{\tau=\beta(t)}$ –

$$-\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\theta[s,\tau,r_c,\rho_\tau,\theta_c]\,d\tau + \int_{\Omega}\left[\theta_c\,\Phi\Big|_{r=g_c} + (1-\theta_c)\,\Phi\Big|_{r=h_c}\right]dx.$$

Оценены нормы возмущений операторов $\Delta K_j = \int_{\underline{g}}^{\bar h}\Delta K_j(s,t)\,\xi_j(s)\,ds$.

К примеру,

$$\|\Delta K_c\|_{L_2\to L_2} \leqslant \mu_c\sqrt{2\delta_T}, \qquad \frac{|\Delta T(x,t)|}{\bar h-\underline{g}} \leqslant \delta_T = \mathrm{const}.$$

Полученные оценки применяются при решении ФИУ методом регуляризации.

Шурупова И. Ю. (Воронеж)

О НЕКОТОРЫХ РАЗРЫВНЫХ ЗНАКОРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Применение последнего результата Боровских А. В., Покорного Ю. В. об осцилляционных спектральных свойствах для интегральных операторов с разрывными ядрами к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных операторов требует анализа знакорегулярных свойств разрывных решений. Речь идёт о разрывах, порождаемых краевыми условиями с носителями во внутренних точках основного интервала.

Ниже описываются условия, при которых функция Грина $G(t,s)$ краевой задачи

$$-(px')'=f, \quad (t\neq\xi_i, \ i=\overline{1,n})$$
$$x(0)-\gamma_1 x'(0)=0,$$
$$x(1)+\gamma_2 x'(1)=0, \quad (\gamma_1,\gamma_2>0)$$
$$a_1^i x(\xi_i+0)+b_1^i x'(\xi_i+0)=\alpha_1^i x(\xi_i-0)+\beta_1^i x'(\xi_i-0),$$
$$a_2^i x(\xi_i+0)+b_2^i x'(\xi_i+0)=\alpha_2^i x(\xi_i-0)+\beta_2^i x'(\xi_i-0).$$

является ядром Келлога. Здесь $p(t)>0$ на $[0,1]$. Функция Грина $G(t,s)$, вообще говоря, разрывна на прямых $t=\xi_i$, $s=\xi_i$.

Теорема. Для того чтобы $G(t,s)$ была ядром Келлога и соответствующая спектральная задача имела осцилляционный спектр, достаточно, чтобы при каждом i матрица

$$\begin{pmatrix} a_1^i & \alpha_1^i & \beta_1^i & b_1^i \\ a_2^i & \alpha_2^i & \beta_2^i & b_2^i \end{pmatrix}$$

имела ранг 2 и была знакорегулярной (все ненулевые миноры второго порядка должны иметь одинаковый знак).

УДК 517.9 Щербатых В.Е. (Воронеж)

Оценки производных решения начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой стратифицированной жидкости в полупространстве

Изучается решение системы уравнений в частных производных вида

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)V=\begin{pmatrix} \partial/\partial t-\nu\Delta_x & 0 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & \partial/\partial t-\nu\Delta_x & g & \partial/\partial x_2 \\ 0 & \omega_0^2/g & \partial/\partial t & 0 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$V_1\big|_{t=0}=V_{0,1}(x);\ V_2\big|_{t=0}=V_{0,2}(x);\ V_3\big|_{t=0}=V_{0,3}(x) \qquad (2)$$

и условиях на границе полупространства $R_2^+=\{x=(x_1,x_2)\in R_2,\ 0<x_2<\infty\}$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=0;\quad V_2\big|_{x_2=0}=0 \qquad (3)$$

В (1) $V(x,t)=\{V_1(x,t),V_2(x,t),V_3(x,t),V_4(x,t)\}^T$ –искомая вектор-функция, Δ –оператор Лапласа в R_2; g,ω_0^2 –положительные постоянные. С помощью формулы представления решения, полученной методом "отражения", проводятся оценки норм производных решения $V(x,t)$ через нормы данных задачи (1)-(3) $V_{0,j}(x)$ $(j=\overline{1,3})$. Приведем здесь лишь некоторые из полученных оценок

$$|||\frac{\partial}{\partial x_i}V_k|||^+ + |||\frac{\partial}{\partial t}V_k|||^+\le c_1\sum_{j=1}^{3}\left(\|V_{0,j}\|^+ + \|(-\Delta)^{1/2}V_{0,j}\|^+\right),\quad i=1,2;\ k=1,2;$$

$$|||\frac{\partial}{\partial x_i}V_3|||^+ + |||\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}V_4|||^+\le c_2\left(\sum_{j=1}^{2}\|V_{0,j}\|^+ + \|(-\Delta)V_3\|^+\right),\quad i=1,2;$$

$$|||\frac{\partial}{\partial t}V_3|||^+\le c_3\left(\sum_{j=1}^{2}\|(-\Delta)^{1/2}V_{0,j}\|^+ + \|V_{0,3}\|^+\right),$$

где $\|\cdot\|^+$ –норма в $L_2(R_2^+)$; $|||\cdot|||^+$ –норма в $L_2(R_2^+\times(0,\infty))$.

При оценке используются свойства фундаментальной матрицы решений, для $A\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$, исследованной А.В. Глушко (см. [1]).

Литература

1. Глушко А.В. Асимптотика при $t\to\infty$ решения задачи коллапса пятна интрузии в вязкой стратифицированной жидкости//Математические заметки.-1993.-Т.53.-Вып.1.-С.16-24.

УДК 513.88

В.М.Щербин

О НЕКОТОРОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ КОЛЕЦ

Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - полуупорядоченные кольца.
На $\mathcal{X}$ рассматривается мера $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{Y}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ обладающая обычными свойствами.
По поводу терминологии см. [1] - [2] .

Сначала определяется интеграл от ступенчатых отображений следующим образом

$$\int_E f(x)\,d\mu_x = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i)$$

Затем определяется интеграл от положительного отображения как

$\tau - \lim \int_E f_n(x)\,d\mu_x = \int_E f(x)\,d\mu_x$, где $\{f_n(x)\}$ - последовательность ступенчатых положительных отображений и $f_n(x) \xrightarrow{(\tau)} f(x)$.

Если $f: E \to \mathcal{Y}$; $E \subset \mathcal{X}$ - отображение произвольного знака, то интеграл от этого отображения определим следующим образом:

$\int_E f(x)\,d\mu_x = \int_E f_+(x)\,d\mu_x - \int_E f_-(x)\,d\mu_x$, предполагая, что хотя бы один из интегралов $\int_E f_+(x)\,d\mu_x$; $\int_E f_-(x)\,d\mu_x$ конечен.

Далее формулируются и доказываются основные свойства введенного интеграла, в том числе и теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, об абсолютной непрерывности и счетной аддитивности такого интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б,З.Вулих.Введение в теорию полуупорядоченных пространств.М.: Физматгиз,1961.
2. В.И.Соболев, В.М.Щербин. О дифференцировании отображений - пространств.-Докл. АН СССР.-1975,-т.212.- № 5.-с.1020-1022.

УДК 5I9.853.53 Яблоков Л.Н. (Псков)

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО МАКСИМИНА

Антагонистической игрой с векторной функцией выигрыша называется тройка $\Gamma=\langle X{\times}Y,\ P^N,\ f\rangle$, где X,Y и P- некоторые множества, P- линейно упорядочено и $f=\langle f_1(x,y),\dots,f_N(x,y)\rangle:X{\times}Y{\to}P^N$- векторная функция. Обозначим $Y(x)=\{y(x)|\ \forall y\in Y(f(x,y(x))\not< f(x,y))\}$. Стратегия x^* называется [I] максиминным по Слейтеру решением игры Γ, если существует $y^*(x^*)\in Y(x^*)$ такое, что $\forall x\in X\forall y(x)\in Y(x)(f(x,y(x))\not< f(x,y(x)))$.

Через φ обозначим такое предложение, что для всякой игры Γ $\Gamma|=\varphi$ тогда и только тогда, когда игра Γ имеет максиминное по Слейтеру решение. Пусть $\tau=\{X,Y,P,f_1,\dots,f_N\}$- сигнатура, содержащая N бинарных функциональных символов $f_1,\dots,f_N$ и три унарных предикатных символа X,Y и P. Через $L_{\omega\omega}(\varphi)[\tau]$ обозначим обогащение логики первого порядка в сигнатуре τ с помощью предложения φ. Положим $L(\varphi)=\{\phi|\phi\in L_{\omega\omega}(\varphi)[\tau]$ и φ входит в ϕ в качестве подформулы$\}$. Множество предложений $L(\varphi)$ назовем теорией векторного максимина (порядка N). Будем говорить, что теория $L(\varphi)$ эффективно разрешима относительно теории T, если существует алгоритм (см.[2]), который по внешнему виду предложения $\phi\in L(\varphi)$ позволял бы ответить на вопрос: верно ли, что для любой игры Γ, если $P|=T$, то $\Gamma|=\phi$?

ТЕОРЕМА I. Пусть T есть арифметика Пеано PA или элементарная теория рациональных чисел.Тогда теория $L(\varphi)$ не является эффективно разрешимой относительно T?

ТЕОРЕМА 2. Пусть T есть одна из следующих теорий: теория линейного порядка, элементарная теория действительных или комплексных чисел. Тогда $L(\varphi)$ эффективно разрешима относительно T?

Рассматривается возможность приложения двух данных утверждений к антагонистической дифференциальной позиционной игре с векторной терминальной функцией выигрыша.

ЛИТЕРАТУРА

[I].Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E., Vector-Valued Maxmin, N.Y., Academic Press, 1993.

[2].Мальцев А.И., Теория алгоритмов и эффективная вычислимость, М.,1974.

УДК 517.9 Ярославцева В.Я. (Липецк)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЁННОГО СДВИГА

В работе рассматривается оператор обобщённого сдвига T_φ^α, порождённый сингулярным дифференциальным оператором

$$P_\varphi = -\frac{d^2}{d\varphi^2} - 2\nu \, ctg\,\varphi \frac{d}{d\varphi} + \nu^2 ,$$

где $0 < \varphi < \pi$, а ν - действительное число, $\nu > 0$. Оператор T_φ^α действует на гладкие чётные функции по формуле

$$T_\varphi^\alpha f(\cos\varphi) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\cos\varphi\cos\alpha +$$

$$+ \sin\varphi \sin\alpha \cos t) \sin^{2\nu-1} t \, dt .$$

Показывается, что операторы P_φ и T_φ^α коммутируют и устанавливается связь оператора обобщённого сдвига с операторами преобразования, введёнными в [1].
Полученные результаты используются для исследования общей краевой задачи для эллиптических уравнений в частных производных, по одной из переменных которых действует оператор P_φ.

Литература

1. Ярославцева В.Я. Об одном классе операторов преобразования и их приложение к дифференциальным уравнениям. // Докл. АН СССР, 1976 т.227 № 4, с.816 - 819.

УДК 515.142.26 Дубенец Ю.В. (Липецк)

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ РАЗМЕРНОСТИ ОБРАЗА И ПРООБРАЗА ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Деформационной размерностью $def\text{-}dim X$ топологического пространства X называется наименьшее $n \geq -1$, для которого любое отображение X в CW-комплекс гомотопно некоторому отображению в n-мерный остов этого комплекса. В случае метризуемых компактов деформационная размерность совпадает с фундаментальной размерностью, определяемой в теории шейпов. Для деформационной размерности имеют место следующие оценки, аналогичные оценкам для фундаментальной размерности метризуемых компактов [1,2].

Теорема 1. Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое отображение сильно паракомпактного хаусдорфова пространства X в непустое совершенно нормальное пространство Y. Тогда $def\text{-}dim X \leq def\text{-}dim f + Ind Y$, где $def\text{-}dim f = \sup\{def\text{-}dim f^{-1}(y)\}$.

Введём обозначения: $B = cl\{y \in Y : |f^{-1}(y)| \geq 2\}$, $A = f^{-1}(B)$, $D_i = cl\{y \in Y : def\text{-}dim f^{-1}(y) \geq i\}$ и $C_i = f^{-1}(D_i)$.

Теорема 2. Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое отображение линделёфова пространства X на Y. Тогда $def\text{-}dim Y \leq \max(def\text{-}dim X, def\text{-}dim B, def\text{-}dim A + 1)$.

Теорема 3. Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое отображение сильно паракомпактного хаусдорфова пространства X в совершенно нормальное пространство Y. Тогда $def\text{-}dim X \leq \max(def\text{-}dim C_1, Ind Y)$.

Теорема 4. Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое отображение сильно паракомпактного хаусдорфова пространства X в совершенно нормальное пространство Y и $def\text{-}dim f = k$. Тогда $def\text{-}dim X \leq \max(Ind Y, Ind D_1 + 1, \ldots, Ind D_k + k)$.

Теорема 5. Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое отображение линделёфова пространства X на совершенно нормальное пространство Y и $def\text{-}dim f = k$. Тогда $def\text{-}dim Y \leq \max(def\text{-}dim X, Ind B + 1, Ind D_1 + 2, \ldots, Ind D_k + k + 1)$.

1. Дубенец Ю.В. О теореме Гуревича для фундаментальной размерности. // Вестник МГУ.Сер. 1.Матем. и мех.,1990,№ 6,С. 11-14.
2. Дубенец Ю.В. Отображения, повышающие фундаментальную размерность Fd .// УМН,1991,т. 46,вып. 5,С. 169-170.

СПИСОК ЛЕКТОРОВ

Благодатских В.И., Бобылев Н.А., Борисович Ю.Г., Васильев В.Ф., Величенко В.В., Ильин В.А., Куржанский А.Б., Ломов С.А., Мищенко А.С., Моисеев Е.Н., Мышкис А.Д., Назайкинский В.Е., Никольский М.С., Перов А.И., Покорный Ю.В., Пшеничный Б.И., Розов Н.Х., Смирнов В.А., Стернин Б.Ю., Хромов А.П., Шаталов В.Я., Ширяев А.Н.

УЧАСТНИКИ, ПРИСЛАВШИЕ ЗАЯВКИ (БЕЗ ТЕЗИСОВ)

Аваков Е.Р., Баранов Ю.С., Белолипецкий А.А., Бокарева Т.А., Бурыкина Н.В., Воронова Н.П., Власов В.В., Глушанкова Л.Я., Дмитрук А.В., Крамаренко З.С., Кулешов А.А., Логунова Н.В., Любасова Г.Ю., Овезов, Петросян Л.А., Самодуров А.А., Серов В.П., Седлецкий А.М., Ченцов А.Г., Юсупова О.В.

УДК 517.97 Соловьев С.А. (Москва)

О ПРОЕКЦИОННЫХ ПРОЦЕДУРАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В докладе исследуется метод гармонического баланса приближенного построения колебательных режимов многоконтурных систем автоматического регулирования. Приводятся оценки количества гармоник, дающих приближение к отыскиваемому режиму с заданной точностью. Указывается способ, позволяющий по найденному приближению судить об устойчивости отыскиваемого колебательного режима. Приведем один из результатов, относящийся к одноконтурным системам автоматического регулирования.

Рассмотрим систему, динамика которой описывается дифференциальным уравнением

$$L(p)x=M(p)f(t,x), \qquad (1)$$

где $p=d/dt$, $L(p)=p^l+a_1p^{l-1}+\ldots+a_l$, $M(p)=b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m$, $l>m$, многочлен $L(p)$ не имеет корней вида $2\pi ki/T$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $f(t+T,x)=f(t,x)$. Перейдем от уравнения (1) к эквивалентной системе в пространстве состояний

$$\dot z=Bz+g(t,x). \qquad (2)$$

Пусть $\mathfrak{M}_n$ - множество приближений к отыскиваемому периодическому режиму системы (2), полученных методом гармонического баланса с n гармониками.

<u>Теорема</u>. Пусть выполнены оценки: $|g(t,z)|\le C$, $\|g'_z(t,z)\|\le K$, $\|g'_z(t,z_1)-g'_z(t,z_2)\|\le D|z_1-z_2|$, $\max\|e^{Bt}\|\le L$ $(0\le t\le T)$, $\|(I-e^{BT})^{-1}\|\le Q$, $\rho=KTL(2(1+QL^2))^{1/2}<1$, $ab^2c/(2n+1)\le 1/4$, где $a=(T/\pi)(2(\|B\|^2K^2+TC^2))^{1/2}$, $b=1/(1-\rho)$, $c=DTL(2(1+QL^2))^{1/2}$, $K=CTL(2(1+QL^2))^{1/2}$. Тогда $\mathfrak{M}_n\neq\emptyset$, и для каждого $z_n\in\mathfrak{M}_n$ система (2) имеет по крайней мере одно решение z_*, удовлетворяющее неравенству

$$\|z_*-z_n\|_{L_2[0,T]}\le\frac{1-(1-4ab^2c/(2n+1))^{1/2}}{2bc}.$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ