

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ



МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения—XXII»

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения-XXII»

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований по проекту 11-01-06810-моб_з*

Оргкомитет:

председатель В.А. Ильин, академик; сопредседатели: Д.А. Ендовицкий, ректор ВГУ, Е.И. Моисеев, академик, В.А. Садовничий, академик; заместители председателя: В.Н. Попов, А.Д. Баев, А.П. Хромов; члены оргкомитета: А.В. Боровских, Я.М. Ерусалимский, А.И. Задорожный, М.С. Никольский, А.Н. Покровский, Н.Х. Розов; ученый секретарь С.А. Шабров

Программный комитет:

председатель В.А. Ильин; заместители председателя: А.Д. Баев, Л.В. Крицков, Ю.И. Сапронов; члены программного комитета: А.Е. Барабанов, А.В. Глушко, В.И. Гурман, В.В. Жиков, В.И. Жуковский, В.Г. Задорожный, М.И. Каменский, В.А. Костин, Г.А. Курина, В.В. Провоторов, В.Д. Репников, В.И. Рязских, А.П. Солдатов, А.И. Шашкин, А.С. Шамаев

Программный совет:

С.В. Емельянов, В.А. Ильин, С.К. Коровин, А.В. Кряжковский, А.Б. Куржанский, Ю.С. Осипов, С.М. Никольский, В.М. Тихомиров

Современные методы теории краевых задач : материалы
С56 Воронежской весенней математической школы «Понtryгинские чтения–XXII» / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – 221 с.

ISBN 978-5-9273-1787-5

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским государственным университетом совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

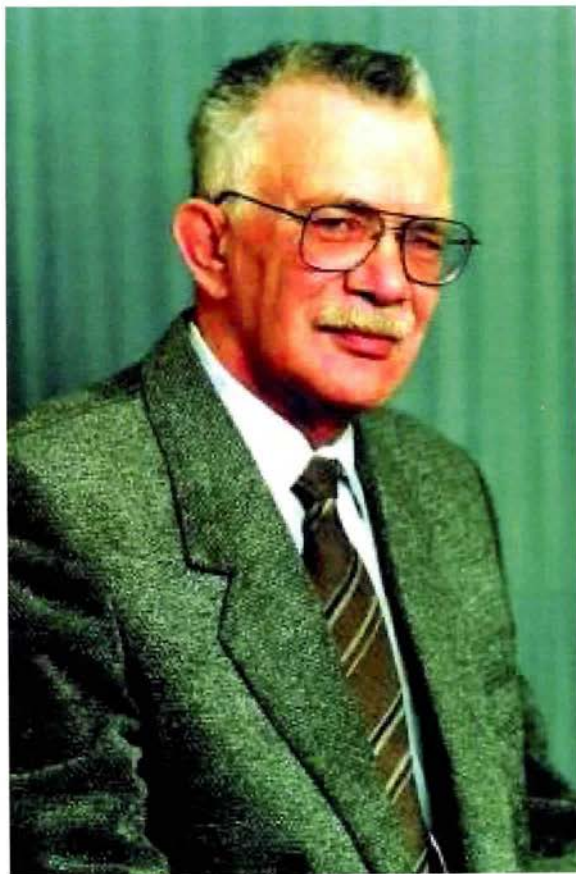
Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

УДК 517.94(92;054,97)

- © Воронежский государственный университет, 2011
- © Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2011
- © Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2011
- © Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011

ISBN 978-5-9273-1787-5

Посвящается памяти
Юлия Витальевича Покорного



**О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО
РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО
НЕЛИНЕЙНОГО
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Абдурагимов Г.Э. (Махачкала)

gusen_e@mail.ru

Рассматривается краевая задача

$$x''(t) + a(t)(Tx)^q = 0, \quad 0 < t < 1, \quad p, q \in (1, \infty) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) &= 0, \\ \alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где α_{ij}, β_{ij} ($i, j = 1, 2$) – действительные числа, $a(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, 1]$ функция, $T : C \rightarrow L_p$ ($1 < p < \infty$) – линейный положительный (монотонный) непрерывный оператор.

Обозначим через \tilde{K} – конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C , удовлетворяющих условию

$$\min_{t \in [0,1]} x(t) \geq \frac{m}{M} \max_{t \in [0,1]} x(t) = \frac{m}{M} \|x\|_C,$$

где m и M представляют собой нижние и верхние оценки функции Грина.

Получены достаточные условия существования положительного решения краевой задачи (1) – (2).

Теорема. Предположим, что $T : C \rightarrow L_p$ – положительный (монотонный) непрерывный на конусе \tilde{K} оператор. Введем обозначения $\alpha \equiv \frac{\alpha_{12} + \beta_{11} + \beta_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}$, $\beta \equiv \frac{\alpha_{22} + \beta_{21} + \beta_{22}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}$.

При выполнении условий

- 1) $\alpha \neq \beta, \alpha_{11} + \alpha_{12} \neq 0, \alpha_{21} + \alpha_{22} \neq 0,$
- 2) $\frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}} (1 - \alpha) - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} (1 - \beta) \right] < 0,$
- 3) $\frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{\alpha_{21} - \beta_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}} (1 - \alpha) - \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} (1 - \beta) \right] > 0,$
- 4) $\frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}} \alpha - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \beta \right] > 0,$
- 5) $\frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}} \alpha - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \beta + 1 \right] < 0,$

краевая задача (1) – (2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + (S_{1/2}x)^2(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3)$$

$$x(0) - 9x'(0) = 0,$$

$$10x(0) - 99x'(0) - x'(1) = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } (S_{1/2}x)(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1/2, \\ x(t - 1/2), & 1/2 < t < 1. \end{cases}$$

АВТОР ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНИКОВ КАК СЦЕНАРИСТ ВОСПРИЯТИЯ

Авраменко Л.Г. (Киев)

luragoco@mail.ru

Количество электронных книг, распространяемых в США, Японии и некоторых других странах к концу 2010 г. превысило количество проданных бумажных книг. Повторение этого успеха в других странах вопрос ближайшего времени. Возникает вопрос, а что может предложить математическое сообщество (преподаватели) потенциальному потребителю (студенту).

Заметим, что уже простая подготовка математических текстов существенно отличается от учебников по истории, философии и др., то есть тех предметов, в которых основной контент вербальный, передаваемый фонетическим письмом в виде последовательного файла. Для этих дисциплин слово, выбитое на каменных скрижалях или появившееся на бумаге из лазерного принтера, примерно одинаково понятно. В текстах, содержащих иероглифическое письмо и множественные перекрестные связи, особую роль играет организация материала на видимых доступных поверхностях (экранах).

Компьютер, как средство отображения и управления информацией, позволяет задействовать новые выразительные средства, недоступные бумажным изданиям. При подготовке справочного пособия по решению задач (раздел "Интегрирование") авторы использовали мультимедийные возможности вычислительной техники. Это видеосъемка и последующий видеомонтаж. Использование графического планшета и звукозапись комментариев. Работая над пособием авторы столкнулись с кругом вопросов, неявно присутствующих труду преподавателя, но не возникающих при подготовке полиграфических изданий.

Многообразие изобразительных средств потребовало написания сценария изложения к каждому примеру. В отличие от произведений искусства, которые могут понравиться или нет, учебная литература должна провести студента от постановки задачи до понимания ее решения с "гарантированным" успехом. Таким образом, авторы столкнулись с проблемой написания и реализации сценария, который был назван сценарием восприятия. Распространение печатных изданий в цифровой форме не приведет к изменению восприятия материала. Готовьтесь стать сценаристами, но вряд ли плоды трудов ваших будут называть книгой.

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФРЕШЕ

Авраменко Л.Г., Гончаренко Ю.В. (Киев)

yuragoso@mail.ru

О ходе работ по разработке учебно-методического комплекса по высшей математике неоднократно сообщалось на Воронежских конференциях. Мы отмечали, что раннее введение некоторых понятий функционального анализа существенно упрощает изложение.

По сути, математический анализ развился из задач линейной аппроксимации. Так, если для функции $y = f(x)$ в точке x_0 найдется такая линейная функция $y = f(x_0) + k(x - x_0)$, что при $x \rightarrow x_0$

$$f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = o(x - x_0),$$

то эта линейная функция называется касательной, число k является значением производной в точке x_0 , функция $k(x - x_0)$ называется дифференциалом и т.д.

В векторном анализе и немного раньше, в разделах, посвященных замене переменных в кратных интегралах, изучаются отображения (в общем случае, нелинейные) $F : R^n \rightarrow R^n$, т.е. $\vec{y} = F(\vec{x})$, $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$. Совершенно аналогично, если в точке \vec{x}_0 найдется такой линейный оператор A , что при $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$

$$\|F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)\| = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|),$$

то матрица A является значением производной Фреше в точке \vec{x}_0 . Мы убедились на практике, что эта прямая аналогия легко воспринимается студентами, особенно, если для начала ограничиться случаем R^2 . Там же устанавливается и вид матрицы A — это матрица Якоби, указывается геометрический смысл определителя этой матрицы и т.д.

Далее, в ТФКП рассматривается то же равенство

$$|f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)| = o(|z - z_0|), \quad (*)$$

где $z = x + iy$, $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$, а $c = a + ib$ называется значением производной в точке z_0 .

Но по сути, f - это отображение $f : R^2 \rightarrow R^2$. Если оно дифференцируемо по Фреше, то $du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$ и $dv = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$. Чтобы дифференцируемое по Фреше отображение f имело вид (*), требуется, чтобы $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = b$. Что дает условия Коши-Римана.

Математика — единая наука и единство методов изложения существенно облегчает восприятие.

**МЕТОДИКА МИНИМИЗАЦИИ
ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ РАСХОДОВ В
ЛОГИСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ ГРУЗОВЫХ
ПЕРЕВОЗОК НА МОРСКОМ ТРАНСПОРТЕ В
УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ
ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ НА ПРИМЕРЕ
ПРОЕКТИРУЕМОГО БАЛТИЙСКОГО
КОНТЕЙНЕРНОГО ТЕРМИНАЛА**

Алексеева О.Ю., Алексеева С.М. (Калининград)

alekseeva-sm@yandex.ru

Проектируется контейнерный терминал с двумя причалами, имеющий в эксплуатации три контейнерных судна, осуществляющие контейнерные перевозки по двум линиям. Пусть для данного эксплуатационного периода заданы объемы перевозок на этих линиях, производительность контейнерных судов, а также эксплуатационные расходы, которые зависят от типа и мощности судна, цен на топливо, географии перехода и т.д. и в общем случае не являются постоянными. Грузовладельцы должны быть заинтересованы в том, чтобы годовые эксплуатационные расходы по содержанию имеющихся контейнеровозов были как можно меньше. Целью данной работы является создание эффективной методики минимизации эксплуатационных расходов в логистическом процессе грузовых перевозок на морском транспорте при неточной информации об эксплуатационных контейнерных расходах в сутки. Поставим задачу минимизации эксплуатационных расходов для трех судов по двум линиям при условии, что судовые суточные эксплуатационные расходы на линиях точно не определены. В математической модели задачи коэффициенты целевой функции - суммарных эксплуатаци-

онных расходов - линейно зависят от введенного параметра, изменяющегося в определенных задачах пределах, ограничения заданы как в виде равенств, так и в виде неравенств. Ограничения - неравенства выражают требование выполнить перевозки в заданный эксплуатационный период, а ограничения - равенства - выполнить заданный объем перевозок на каждой линии. Мы провели дальнейшее исследование, применяя возможности средств программирования в системе MATLAB. Составлена программа для расчета эксплуатационных расходов. Изменяя параметр t с малым шагом, сначала наблюдаем устойчивость оптимального плана, и непрерывное изменение значения целевой функции относительно параметра. Вблизи некоторого значения t небольшое изменение параметра привело к существенному изменению оптимального плана. Данное значение t может быть найдено как абсцисса точки пересечения соответствующих прямых, выражающих зависимость значений целевой функции от параметра. Таким образом, увеличивая t , находим все такие значения параметра, в окрестности которых найденный оптимальный план неустойчив и приходим к разбиению промежутка изменения параметра на более мелкие промежутки, в которых имеется непрерывная зависимость решения от параметра. В найденных промежутках рассматриваются оптимальные планы с информацией относительно времени постановки судов на каждую из линий и соответствующем резерве. Проведенный анализ показал, что при заданных колебаниях суточных эксплуатационных расходов небольшие изменения в этих расходах вблизи тех значений, которые соответствуют точкам разбиения промежутка изменения параметра, влекут за собой существенные изменения оптимального плана. Таким образом, оптимальный план в целом неустойчив при заданных колебаниях суточных эксплуатационных расходов. Составленная программа для расчета эксплуатационных расходов позволяет провести анализ устойчивости решения данной оптимизационной задачи, цель которого состоит в определении области значений параметра, в пределах которого решение остается оптимальным.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Андреева Е.А., Большакова И.С. (Тверь)

andreeva.tgu@yandex.ru

В работе рассматривается линейная управляемая динамическая система с распределённым и сосредоточенным запаздыванием, в

которой необходимо минимизировать функционал:

$$J(u) = \int_a^b [(a(t), x(t)) + \varphi(t, u(t))] dt + (b, x(T))$$

при динамических ограничениях

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^N A_k(t)x(t - h_k) + \int_{-r}^0 A(t, s)x(t + s)ds + u(t)$$

с начальными условиями

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h_k, 0], 0 < h_1 < \dots < h_k$$

и ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t) \subset R^r, \text{ п.в. } t \in [0, T] = \Gamma.$$

Показано, что оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума

$$-\varphi(t, \bar{u}(t)) + (\psi(t), \bar{u}(t)) = \max_{v \in U(t)} [-\varphi(t, v) + (\psi(t), v)],$$

где $\psi(t)$ является решением системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}(t) = a(t) - \sum_{k=i}^N (A_k(t + h_k), \psi(t + h_k)) - \int_t^{t+r} (A(s, t - s), \psi(s)) ds,$$

$$t \in (T - h_i, T - h_{i-1}], i = k, \dots, 2;$$

$$\dot{\psi}(t) = a(t) - \int_t^{t+r} (A(s, t - s), \psi(s)) ds, t \in (T - h_1, T), \psi(T) = -b.$$

Разработаны численные методы и алгоритмы построения оптимального решения для динамической системы, описывающей взаимодействие двух популяций, позволяющие исследовать влияние запаздывания на оптимальное решение.

**ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО
ПАРАМЕТРА В МЕТОДЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ
ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ**

Андрианова А.А. (Казань)

Anastasiya.Andrianova@ksu.ru

Предлагается использовать идею аппроксимации допустимого множества в методе параметризации целевой функции (МПЦФ) с целью решения задачи условной оптимизации с заданной точностью по функционалу. Использование мультипликативного параметра, аналогичного штрафному коэффициенту, позволяет свести исходную задачу к задаче безусловной минимизации вспомогательной функции МПЦФ. Эта идея использовалась в методе центров ([1]).

Пусть $f(x), f_i(x), i = 1..m$ определены и непрерывны в евклидовом пространстве R_n . Решается задача условной оптимизации $\min\{f(x), x \in D\}$, где $D = \{x : x \in R_n, f_i(x) \leq 0, i = 1..m\}$ - допустимое множество, которое регулярно по Слейтеру. По заданному $\varepsilon > 0$ требуется получить точку их множества $X_\varepsilon^* = \{x : x \in D, f(x) \leq f^* + \varepsilon\}$. Обозначим $(\varphi(x))_+ = \max\{0, \varphi(x)\}$.

Модифицируем известные вспомогательные функции МПЦФ посредством введения параметров $\eta, \alpha > 0, \gamma > 0$:

$$F^1(x) = (f(x) - \eta)_+ + \sum_{i=1}^m \{(\alpha f_i(x) + \gamma)_+\},$$

$$F^2(x) = (f(x) - \eta)_+ + \max\{(\alpha f_i(x) + \gamma)_+, i = 1..m\},$$

$$F^3(x) = \max\{(f(x) - \eta)_+, \max\{(\alpha f_i(x) + \gamma)_+, i = 1..m\}\}.$$

Доказано, что если X_ε^* ограничено и значения параметров $\eta, \gamma > 0, \alpha > 0$ будут выбраны так, что

$$f^* + \varepsilon - \eta \leq \gamma, \quad \alpha \geq \frac{-\gamma}{\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\}},$$

где $g(x) = \max\{f_i(x), i = 1..m\}$, то точки абсолютного минимума функций $F^1(x), F^2(x)$ и $F^3(x)$ будут являться ε -решениями исходной задачи.

Данные правила выбора значений управляющих параметров являются теоретическими. Практические аналоги получены для случаев, когда целевая функция $f(x)$ и функции-ограничения $f_i(x), i = 1..m$ являются сильно квазивыпуклыми.

Литература

1. Андрианова А.А. Параметризация метода центров для минимизации явно квазивыпуклых функций [Текст] /А.А.Андрианова

ОБ УСЛОВИЯХ НЕСТРОГОГО ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Антюшина И.В., Близняков Н.М. (Воронеж)

iamveryok@mail.ru, nmbliznyakov@yandex.ru

Рассматривается классическая задача нахождения условий нестрогого локального экстремума функций двух действительных переменных. Задача рассматривалась разными авторами. В работах П.П. Забрейко, А.В. Кривко-Красько [1], [2] дано полное исследование проблемы (там же имеется история вопроса); предложенный ими алгоритм требует решения алгебраических уравнений, вообще говоря, произвольных степеней, что является серьёзным ограничением для использования алгоритма в прикладных задачах. Известно (см. напр. [3]), что задача о локальном экстремуме "почти всегда" может быть решена в результате конечного числа арифметических и логических операций над коэффициентами тейлоровского разложения функции в данной точке. Это утверждение, однако, не может быть использовано на практике в силу исключительной громоздкости алгоритма Тарского-Зайденберга (см. напр. [4]), являющегося базовым при решении задач об алгебраической разрешимости.

В докладе предлагаются достаточно простые необходимые и достаточные условия, позволяющие выяснить, является ли данная точка плоскости точкой нестрогого экстремума многочлена из $\mathbb{R}[x, y]$, в результате конечного числа арифметических операций и функции sign над коэффициентами многочлена.

Не ограничивая степени общности будем формулировать условия экстремума в нулевой точке $(0, 0)$ для функции, равной в этой точке нулю.

Введём необходимые обозначения. Пусть $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$ и $g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k$ — многочлены из $\mathbb{R}[x]$ и $a_k \neq 0$. Для всякого $i = 1, \dots, k$ обозначим

$$\nabla_i(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{2i-1} \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_{2i-1} \\ 0 & a_0 & \dots & \dots & \dots & a_{2i-2} \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & \dots & b_{2i-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_0 & \dots & a_i \\ & & & b_0 & \dots & b_i \end{vmatrix} \quad (a_j = b_j = 0 \text{ при } j > k).$$

Для всякого многочлена $h(\varepsilon) = c_0\varepsilon^s + c_1\varepsilon^{s-1} + \dots + c_s \in \mathbb{R}[\varepsilon]$ обозначим $las h(\varepsilon)$ последнее отличное от нуля число в ряду его коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_s . Пусть $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$ — последовательность действительных чисел, причём $\mu_0 \neq 0, \mu_r \neq 0$. Заменяем в последовательности нули (если они имеются) на ненулевые числа по правилу: для всякой группы подряд идущих нулей $\mu_{p+1} = \dots = \mu_{p+q}$ ($\mu_p \neq 0, \mu_{p+q+1} \neq 0$) заменим μ_{p+i} ($1 \leq i \leq q$) на $(-1)^{i(i-1)/2}\mu_p$. Число знакоперемен в полученной последовательности обозначим $V(\mu_0, \dots, \mu_r)$.

Теорема 1. Пусть $F(x, y)$ — многочлен из кольца $\mathbb{R}[x, y]$ степени n и k его степень по переменной x . Пусть $F(0, 0) = 0$ и $F(x, 0) \neq 0$. Обозначим многочлены от переменной ε :

$$\begin{aligned} \nabla_i^{(1)}(\varepsilon) &= \nabla_i(F(x - \varepsilon, \varepsilon^{n+1}), xF(x - \varepsilon - \varepsilon^{n+2}, \varepsilon x - \varepsilon^2 + \varepsilon^{n+1})), \\ \nabla_i^{(2)}(\varepsilon) &= \nabla_i(F(x + \varepsilon, \varepsilon^{n+1}), xF(x + \varepsilon - \varepsilon^{n+2}, \varepsilon x + \varepsilon^2 + \varepsilon^{n+1})), \\ \nabla_i^{(3)}(\varepsilon) &= \nabla_i(F(x - \varepsilon, -\varepsilon^{n+1}), xF(x - \varepsilon + \varepsilon^{n+2}, \varepsilon x - \varepsilon^2 - \varepsilon^{n+1})), \\ \nabla_i^{(4)}(\varepsilon) &= \nabla_i(F(x + \varepsilon, -\varepsilon^{n+1}), xF(x + \varepsilon + \varepsilon^{n+2}, \varepsilon x + \varepsilon^2 - \varepsilon^{n+1})), \\ i &= 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Пусть $\nabla_{m_i}^{(i)}(\varepsilon)$ — последний отличный от тождественного нуля многочлен в ряду $\nabla_1^{(i)}(\varepsilon), \nabla_2^{(i)}(\varepsilon), \dots, \nabla_k^{(i)}(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Точка $(0, 0)$ является точкой нестрогого экстремума многочлена $F(x, y)$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & m_1 - m_2 - m_3 + m_4 - 2 \left(V \left(1, las \nabla_1^{(1)}(\varepsilon), \dots, las \nabla_{m_1}^{(1)}(\varepsilon) \right) - \right. \\ & - V \left(1, las \nabla_1^{(2)}(\varepsilon), \dots, las \nabla_{m_2}^{(2)}(\varepsilon) \right) - \\ & - V \left(1, las \nabla_1^{(3)}(\varepsilon), \dots, las \nabla_{m_3}^{(3)}(\varepsilon) \right) + \\ & \left. + V \left(1, las \nabla_1^{(4)}(\varepsilon), \dots, las \nabla_{m_4}^{(4)}(\varepsilon) \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Если точка $(0, 0)$ является точкой нестрогого экстремума многочлена $F(x, y)$, то при $\lim F(x, 0) > 0$ она является точкой нестрогого минимума, а при $\lim F(x, 0) < 0$ — точкой нестрогого максимума.

Если исследуемый многочлен $F(x, y)$ не удовлетворяет условию $F(x, 0) \neq 0$ теоремы 1, то он представим в виде $F(x, y) = y^d G(x, y)$, где $G(x, 0) \neq 0$. Если $d \equiv 1 \pmod{2}$, то, очевидно, точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума. Если же $d \equiv 0 \pmod{2}$, то точка $(0, 0)$, очевидно, является точкой экстремума тогда и только тогда, когда она является точкой экстремума многочлена $G(x, y)$.

Метод позволяет также решать задачу о наличии экстремума в данной точке плоскости всякой бесконечно гладкой функции в этой точке во всех тех случаях, когда экстремум определяется конечным числом членов ряда Тейлора функции в данной точке.

Литература

1. Забрейко П.П. Общие условия локального минимума гладких функций двух переменных / П.П. Забрейко, А.В. Кривко-Красько // Докл. Национальной академии наук Беларуси. — 2007. — Т. 51, № 5. — С. 11-16.

2. Забрейко П.П. Условия локального минимума функций двух переменных и диаграмма Ньютона / П.П. Забрейко, А.В. Кривко-Красько // Докл. Национальной академии наук Беларуси. — 2007. — Т. 51, № 6. — С. 30-34.

3. Арнольд В.И. О локальных задачах анализа / В.И. Арнольд // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. — 1970. — № 2. — С. 52-56.

4. Горин Е.А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных / Е.А. Горин // Успехи математических наук. — 1961. — Т. 16, вып. 1(97). — С. 91-117.

5. Близняков Н.М. Индексы Коши и индекс особой точки векторного поля / Н.М. Близняков // Применение топологии в современном анализе : сб. / Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1985. — С. 3-21.

ТЕСТИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Аристова Л.Н. (Воронеж)

Постоянное совершенствование учебного процесса требует развития и внедрения новых форм обучения. А это ведет к изменению

в системе контроля. Контроль и оценка знаний с позиций личностно ориентированного обучения должны предполагать повышение активной деятельности ученика.

Для осуществления контроля в рамках личностно ориентированного образования необходимо, чтобы: уровень проверяемого материала опирался на реальные достижения учащихся; цели, поставленные учителем, были достигаемы; предупреждалось состояние тревожности; акцентировалось внимание на учебные возможности каждого ученика, особенности его личности; полученные знания ребенок смог применить в несколько отличных от обязательных результатов обучения ситуациях.

Объективная оценка учебных достижений может быть осуществлена с помощью тестирования. Использование тестов на уроках математики дает возможность осуществлять реальную индивидуализацию и дифференциацию обучения; вносить своевременную коррекционную работу в процесс преподавания; достоверно оценивать и управлять качеством обучения

Основная цель проведения тестирования в 5–11 классах состоит в контроле знаний по всем изучаемым темам. Правильно составленный тест представляет собой совокупность сбалансированных тестовых заданий. Количество заданий в тесте по различным разделам должно быть таким, чтобы пропорционально отражать основное содержание той или иной темы. Тестирование, проводимое в системе, позволяет:

- проверить основные знания и умения по изучаемой теме;
- проследить за поддержанием основного уровня учебной деятельности, важнейших положений всего курса и усвоением интеллектуальных умений и навыков, таких, как: умение подводить под определение, выстраивать логическую цепочку рассуждений, правильно оценивать ситуацию;
- проследить за умением понимать текст задания, выделять в тексте задания условие и заключение, читать и делать схематические построения, чертежи, сопровождающие задачу, а при чтении выделять необходимую информацию на данном этапе решения задачи.

На уроках математики внедрение тестовой формы контроля по предмету осуществляется поэтапно. На первом этапе проводится входной контроль. На втором этапе проводится текущий контроль – для ликвидации пробелов и коррекции умений и знаний учащихся в процессе изучения данной темы. Итоговый тест (тематический)

систематизирует, обобщает учебный материал, проверяет сформированные знания и умения. Данная форма контроля наиболее эффективна при современном блочном изучении материала.

Тестовые задания удобно использовать при организации самостоятельной работы учащихся в режиме самоконтроля, при повторении учебного материала. Тесты с успехом можно применять наряду с другими формами контроля, обеспечивая информацию по ряду качественных характеристик знаний и умений учащихся. Введение тестового контроля существенно повышает мотивацию обучения и заинтересованность обучаемого.

За последнее время появились новые оригинальные методы разработки и применения тестов. Современные тесты позволяют выявить скрытые от поверхностного взгляда знания и способности учащихся. Большие перспективы перед тестами открываются в связи с появлением достаточно развитых средств диалогового общения человека с компьютером. Использование программного комплекса влияет на мотивацию учащихся и итоговые результаты. Так, например, программа контроля знаний учащихся «Вердикт» предназначена для проведения компьютерного тестирования и выставления оценки по указанной в тесте шкале. В классах, где используется данная технология, качество обучения значительно выше.

ОБРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аршава Е.А. (Харьков)

elarshava@mail.ru

Изучается задача обращения векторных интегральных операторов в пространстве $L_m^2(0, \omega)$ вектор-функций методом операторных тождеств, что является продолжением исследований, представленных в работах [1-4].

Введем пространство $L_m^2(0, \omega)$, которое состоит из вектор-функций

$$\vec{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)],$$

$$\|\vec{f}\|_m = \left(\sum_{k=1}^m \int_0^{\omega} |f_k(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 2.$$

Пусть задан оператор S , который ограничен в $L_m^2(0, \omega)$,

$$S\vec{f} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^\omega S(x, t) \vec{f}(t) dt, \quad \alpha = \bar{\alpha} \neq 0 \quad (1)$$

и матричный оператор A_0 вида:

$$A_0 \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{\alpha(\xi-t)}) f_1(\xi) d\xi \\ \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{\alpha(\xi-t)}) f_2(\xi) d\xi \end{pmatrix},$$

$S(x, t)$ -матрица, элементы которой принадлежат $L_{m \times m}^2(0, \omega)$ и удовлетворяют уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] S_{ij}(x, t) = 0.$$

Теорема 1. Для любого ограниченного оператора вида (1), который действует в $L_m^2(0, \omega)$, верно представление

$$\begin{aligned} & (A_0 S - S A_0^*) \vec{f} = \\ & = \int_0^\omega \left(M_1(x) + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} M_2(x) + N_1(t) + \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} N_2(t) \right) \vec{f}(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \begin{pmatrix} s_{11}(x, 0) & s_{12}(x, 0) \\ s_{21}(x, 0) & s_{22}(x, 0) \end{pmatrix}, \\ M_2(x) &= \begin{pmatrix} s'_{11}(x, 0) & s'_{12}(x, 0) \\ s'_{21}(x, 0) & s'_{22}(x, 0) \end{pmatrix}, \\ N_1(t) &= - \begin{pmatrix} s_{11}(0, t) & s_{12}(0, t) \\ s_{21}(0, t) & s_{22}(0, t) \end{pmatrix}, \\ N_2(t) &= - \begin{pmatrix} s'_{11}(0, t) & s'_{12}(0, t) \\ s'_{21}(0, t) & s'_{22}(0, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следствие 1. Если оператор S имеет ограниченный обратный T , то

$$(T A_0 - A_0^* T) \vec{f} = \int_0^\omega R(x, t) \vec{f}(t) dt, \quad \text{где} \quad R(x, t) = \sum_{i=1}^4 P_i(t) Q_i(x), \quad (2)$$

P_i, Q_i - матрицы (2×2) ($i = \overline{1,4}$), которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} S^*P_1 &= E_m, & S^*P_2 &= \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} E_m, \\ S^*P_3 &= N_1^*, & S^*P_4 &= N_2^*, \\ SQ_1 &= M_1, & SQ_2 &= M_2 \\ SQ_3 &= E_m, & SQ_4 &= \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha} E_m. \end{aligned} \quad (3)$$

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Теорема 2. Если оператор S ограничен вместе со своим обратным T и существуют матрицы P_i, Q_i ($i = \overline{1,4}$), которые удовлетворяют соотношениям (3), то для оператора $T = S^{-1}$ верно представление

$$T\vec{f} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} \right) \int_0^\omega \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi(x, t) \vec{f}(t) dt, \text{ где } \vec{f} \in L_m^2(0, \omega),$$

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)} \int_{x+t}^{2\omega+x-t} \int_{x-t}^{\tau-2\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau} R\left(\frac{\tau+\xi}{2}, \frac{\tau-\xi}{2}\right) d\xi d\tau + \\ + B(x+t), & x-t \leq 0 \\ -\frac{1}{4} e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)} \int_{x+t}^{2\omega-x+t} \int_{x-t}^{2\omega-\tau} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau} R\left(\frac{\tau+\xi}{2}, \frac{\tau-\xi}{2}\right) d\xi d\tau + \\ + B(x+t), & x-t > 0, \end{cases}$$

а матрица - функция $R(x, t)$ определяется формулой (2).

Пусть задан оператор вида (1) и оператор $B\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_0^2 \vec{f}$, где

$$A_0 \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{\alpha(\xi-t)}) f_1(\xi) d\xi \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{\alpha(\xi-t)}) f_2(\xi) d\xi \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Выясним, при каких условиях оператор $BS - SB^*$ представляет собой конечномерный оператор. Учитывая (4), имеем

$$B\vec{f} = \begin{pmatrix} \int_0^t (t-\xi) \frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f_2(\xi) d\xi + 2 \int_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)} - 1}{\alpha^3} f_2(\xi) d\xi \\ 0 \\ \int_0^t (t-\xi) \frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f_1(\xi) d\xi + 2 \int_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)} - 1}{\alpha^3} f_1(\xi) d\xi \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(BS - SB^*)\vec{f} = \left[-\frac{t}{\alpha^2} (1 + e^{-\alpha t}) - \frac{2}{\alpha^3} (e^{-\alpha t} - 1) \right] \cdot \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{M} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{P} \rangle \end{pmatrix} + \\ + \left[\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha} \right] \cdot \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{N} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{Q} \rangle \end{pmatrix},$$

где $\langle \vec{f}, \vec{M} \rangle$ - скалярное произведение в пространстве L^2 ,

$$\vec{M}(\tau) = \begin{pmatrix} M_1(\tau) \\ M_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(\tau) = \begin{pmatrix} M_3(\tau) \\ M_4(\tau) \end{pmatrix}, \\ \vec{P}(\tau) = \begin{pmatrix} M_5(\tau) \\ M_6(\tau) \end{pmatrix}, \quad \vec{Q}(\tau) = \begin{pmatrix} M_7(\tau) \\ M_8(\tau) \end{pmatrix},$$

$$M_1(\tau) = \overline{S'_{21}}(0, \tau), \quad M_2(\tau) = \overline{S'_{22}}(0, \tau), \\ M_3(\tau) = \overline{S_{21}}(0, \tau), \quad M_4(\tau) = \overline{S_{22}}(0, \tau), \\ M_5(\tau) = \overline{S'_{11}}(0, \tau), \quad M_6(\tau) = \overline{S'_{12}}(0, \tau), \\ M_7(\tau) = \overline{S_{11}}(0, \tau), \quad M_8(\tau) = \overline{S_{12}}(0, \tau).$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Достаточным условием конечномерности оператора $BS - SB^*$ при $S \in L^2_{2 \times 2}(0, \omega)$ является выполнение для матричных элементов s_{ij} уравнения*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 JS = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 SJ, \text{ где } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2. *Если у ограниченного оператора S существует обратный T , то он также ограниченный и удовлетворяет соотношению*

$$(TB - B^*T)\vec{f} = \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{\Pi} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{R} \rangle \end{pmatrix} \varphi(t) + \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{U} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{K} \rangle \end{pmatrix} \psi(t),$$

где $S\varphi(t) = \left[-\frac{t}{\alpha^2} (1 + e^{-\alpha t}) - \frac{2}{\alpha^3} (e^{-\alpha t} - 1) \right]$, $S\psi(t) = \left[\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha} \right]$, $S^*\vec{\Pi} = \vec{M}$, $S^*\vec{R} = \vec{P}$, $S^*\vec{U} = \vec{N}$, $S^*\vec{K} = \vec{Q}$.

Рассмотрим коммутационное соотношение $BS - SA_0 = P$. Тогда

$$(BS - SA_0)\vec{f} = \left[-\frac{t}{\alpha^2} (1 + e^{-\alpha t}) - \frac{2}{\alpha^3} (e^{-\alpha t} - 1) \right] \cdot \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{M} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{P} \rangle \end{pmatrix} + \\ + \left[\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha} \right] \cdot \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{N} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{Q} \rangle \end{pmatrix},$$

где $\langle \vec{f}, \vec{M} \rangle$ - скалярное произведение в пространстве L^2 ,

$$\vec{M}(\tau) = \begin{pmatrix} M_1(\tau) \\ M_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(\tau) = \begin{pmatrix} M_3(\tau) \\ M_4(\tau) \end{pmatrix}, \\ \vec{P}(\tau) = \begin{pmatrix} M_5(\tau) \\ M_6(\tau) \end{pmatrix}, \quad \vec{Q}(\tau) = \begin{pmatrix} M_7(\tau) \\ M_8(\tau) \end{pmatrix}, \\ M_1(\tau) = \overline{S'_{21}}(0, \tau), \quad M_2(\tau) = \overline{S'_{22}}(0, \tau), \\ M_3(\tau) = \overline{S_{21}}(0, \tau), \quad M_4(\tau) = \overline{S_{22}}(0, \tau), \\ M_5(\tau) = \overline{S'_{11}}(0, \tau), \quad M_6(\tau) = \overline{S'_{12}}(0, \tau), \\ M_7(\tau) = \overline{S_{11}}(0, \tau), \quad M_8(\tau) = \overline{S_{12}}(0, \tau).$$

Теорема 4. Для конечномерности оператора $BS - SA_0$ достаточно выполнение для матричных элементов s_{ij} уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \right) JS = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 S, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 3. Если у ограниченного оператора S существует обратный T , то он также ограниченный и удовлетворяет соотношению

$$(TB - A_0T)\vec{f} = \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{\Pi} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{R} \rangle \end{pmatrix} \varphi(t) + \begin{pmatrix} \langle \vec{f}, \vec{U} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{K} \rangle \end{pmatrix} \psi(t).$$

Аналогично можно рассмотреть случай оператора $A_0S - SW$, когда A_0 определен формулой (4), а

$$W\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{\alpha(\xi-t)}) f_2(\xi) d\xi \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{\alpha(\xi-t)}) f_1(\xi) d\xi \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. Для конечномерности оператора $A_0S - SW$ достаточно выполнение для матричных элементов s_{ij} уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \right) S = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) SJ, \text{ где } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Сахнович Л.А. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке. // Успехи математических наук. - М., 1980. - Т.35, Вып. 4 (214). - С.69-129.
2. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1996. - Т.32, №10. - С. 1427-1428.
3. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений": в двух томах. - Т.1. Математический анализ. - Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. - С. 25 - 29.
4. Аршава Е.А. Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". - Воронежский государственный университет, 2011.- С.19-24.

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Астахов А.Т. (Воронеж)

Теорема. Пусть $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ – решение эллиптического уравнения

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \kappa^2(x)u(x) = 0, \quad (1)$$

определенное на $|x| \geq R_0 > 0$. Тогда, если выполняются условия:

$$a_j(x) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \kappa^2(x) \in C^\infty(|x| \geq R_0),$$

$$\frac{\kappa^2(x)}{a_j(x)} - 1 = \bar{o} \left(\frac{1}{|x|} \right) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} = \overset{\circ}{0} \left(\frac{a_j(x)}{|x|} \right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty \text{ и}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{R+\varepsilon} |u(x)|^2 dx = 0,$$

где $\varepsilon \neq 0$ — фиксированное число, то $u(x) \equiv 0$.

Автор благодарен проф. В.З. Мешкову за внимание к работе.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА И РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

Асташова И.В. (Москва)

ast@diffiety.ac.ru

В работе [1] получены равномерные оценки положительных решений с общей областью определения дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} + p(x) |y|^{k-1} y = 0, \quad (1)$$

где $p(x)$ и $a_j(x)$ — непрерывные функции, $n \geq 1$, $k > 1$. В работе [2] получены аналогичные равномерные оценки модулей всех решений уравнений вида

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} + p(x) |y|^k = 0. \quad (2)$$

Приведем результаты о равномерных оценках модулей всех решений уравнений

$$y''' + p(x, y, y', y'') |y|^{k-1} y = 0, \quad (3)$$

где функция $p(x, y_0, y_1, y_2)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по последним трем аргументам.

Теорема 1. Для любых констант $k > 1$, $0 < p_* < p^*$, $h > 0$ существует такое $C > 0$, что для любой функции $p(x, y, y', y'')$, удовлетворяющей условию

$$0 < p_* \leq p(x, y_0, y_1, y_2) \leq p^* < \infty, \quad (4)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00989).

любое решение $y(x)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию $|y(x_0)| = h$ в некоторой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, не может быть продолжено на интервал $(x_0 - Ch^{-\beta}, x_0 + Ch^{-\beta})$.

Теорема 2. Для любых констант $k > 1$, $0 < p_* < p^*$, $a > 0$ существует такое $C > 0$, что для любой функции $p(x, y, y', y'')$, удовлетворяющей условию (4), любое решение $y(x)$ уравнения (3), определенное на $[-a, a]$, удовлетворяет неравенству $|y(0)| \leq (\frac{C}{a})^{1/\beta}$.

Теорема 3. Для любых констант $k > 1$, $0 < p_* < p^*$, $a < b$ существует такое $C > 0$, что для любой функции $p(x, y, y', y'')$, удовлетворяющей условию (4), любое решение $y(x)$ уравнения (3), определенное на $[a, b]$, допускает оценку

$$|y(x)| \leq C \min(x - a, b - x)^{-1/\beta}.$$

Литература

1. Асташова И. В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений// Известия РАН, сер. Мат., 2008. Т. 72. No. 6. С. 85–104.

2. Асташова И. В. Равномерные оценки решений квазилинейных дифференциальных неравенств// Труды семинара им. И.Г. Петровского, 2007. Т. 26. С. 27-36.

МНОГОМОДАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ БИМОДАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Бабаева Е.В. (Харьков)

lena-babaeva@yandex.ru

Работа посвящена кинетической теории газов. Основным средством изучения достаточно разреженного газа является кинетическое уравнение Больцмана, которое представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных [1].

Уравнение Больцмана для модели твердых сфер имеет вид:

$$D(f) = Q(f, f), \quad (1)$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(v - v_1, \alpha) \times$$

$$\times (f(t, v'_1, x)f(t, v', x) - f(t, v_1, x)f(t, v, x)),$$

где d — диаметр молекул, $t \in R^1$ — время, $x = (x^1, x^2, x^3)$ — координата частицы, $v = (v^1, v^2, v^3)$ — ее скорость, $f(t, v, x)$ — искомая

функция распределения частиц, Σ — единичная сфера в R^3 , $\alpha \in \Sigma$, v', v'_1 — скорости частиц после столкновения.

Одно из главных направлений исследований, которые имеют отношение к этому уравнению, это поиск точных решений в случае максвелловских молекул и некоторых его обобщений.

На данный момент известно только одно точное решение уравнения Больцмана для модели твердых сфер — максвелловское распределение (максвеллиан) [2], которое обращает обе части уравнения в ноль.

В работах [3–6] построены явные приближенные решения уравнения Больцмана для твердых сфер, которые являются бимодальными. При этом использовалась “смешанная” невязка (равномерно-интегральная норма разности между $D(f)$ и $Q(f, f)$):

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in R^4} \int_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| dv \quad (2)$$

Поэтому вызывает интерес поиск иных точных и приближенных решений уравнения Больцмана.

Работа посвящена исследованию, направленному на построение многомодальных точных и приближенных решений уравнения Больцмана. Речь идет о функциях такого вида:

$$f(t, v, x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i M_i, \quad (3)$$

$$\varphi_i = \varphi_i(t, x) \geq 0, i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$M_i = M_i(v) = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp^{-\beta_i(v - \vec{v}_i)^2}, i = 1, \dots, m \quad (5)$$

Параметры максвеллианов M_i таковы: $\rho_i > 0$ — плотности, $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ — обратные температуры, $\vec{v}_i \in R^3$ — массовые скорости.

При поиске приближенных решений (3)–(5) уравнения Больцмана для модели твердых сфер, в частности, рассматриваются коэффициентные функции типа разбиения единицы.

В данной работе приближенные многомодальные (в частности тримодальные) решения ищутся с учетом обеспечения малости невязки (2) за счет соответствующего выбора коэффициентных функций и некоторых других параметров.

Результаты работы состоят в следующем: получены различные достаточные условия стремления к нулю равномерно-интегральной невязки между левой и правой частями уравнения (1), тем самым построены некоторые новые точные и приближенные решения уравнения Больцмана.

Литература

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана.- М.: Мир, 1978.- 495 с.
2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов.- М.: Иностранной литературы, 1960.- 118 с.
3. Mott-Smith H.M. The Solution of the Boltzman Equation for a Shock Wave// Phys. Rev. -1951.- 82, N 6.- P.885-890.
4. Гордецкий В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер// Матем. физика, анализ, геом.-1995.- Т.2, №2.- С.168-176.
5. Гордецкий В.Д. Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана// Матем. физика, анализ, геом.-1997.- Т.4, №1/2.- С.46-58.
6. Гордецкий В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана// Теорет. и мат. Физика.-1998.- Т.114, №1.- С.126-136.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НУЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ¹

Бадков В.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(t)$; $\{x_{n,\nu}^{(p)}\}_{\nu=1}^n$ — нули многочлена $p_n(t)$; $x_{n,\nu}^{(p)} = \cos \theta_{n,\nu}^{(p)}$; $0 < \theta_{n,1}^{(p)} < \theta_{n,2}^{(p)} < \dots < \theta_{n,n}^{(p)} < \pi$. Аналогичные обозначения введем для многочленов, ортогональных с весом $q(t) = (1 - t^2)p(t)$.

Основным результатом сообщения является следующая

Теорема. Пусть $p(t) = H(t)(1 - t^2)^{-1/2}$, $q(t) = (1 - t^2)p(t)$, где $H(t)$ — положительная и непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция, и модуль непрерывности функции $h(\tau) = H(\cos \tau)$ удовлетворяет условию $\tau^{-1}\omega(h; \tau) \in L^1[0, \pi]$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно по ν

$$\theta_{n,\nu}^{(p)} = \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n} [1 + o(1)], \quad \theta_{n,\nu}^{(q)} = \frac{\nu\pi}{n + 1} [1 + o(1)] \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

¹Работа поддержана РФФИ (проект 11-01-00462)

Как известно, при $H(t) \equiv 1$ в этих формулах $o(1) = 0$. При доказательстве сформулированной теоремы использована установленная в [1] (см. также [2]) формула приращения аргумента многочлена, ортогонального на окружности. Заметим еще, что даваемая теоремой асимптотическая формула для $\theta_{n,\nu}^{(p)}$ выглядит проще, чем соответствующая известная формула (см. [3, формула (XII.22)]).

Литература

1. Бадков В.М. *О нулях ортогональных полиномов* // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 30-46.
2. Бадков В.М. *Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов* Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. 132с.
3. Сегё Г. *Ортогональные многочлены*. М.: Физматгиз, 1962.

ТЕОРЕМА О КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

Баев А.Д. (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(R_+^1)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор с символом, зависящим от комплексного параметра p . Этот оператор определен формулой $K^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t}) v(x, t) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} [\lambda(p, t, \xi, \eta) F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} v(x, t)]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p, t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,p}^{\sigma}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$ открытое множество, $p \in Q$, где Q — некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ — действительное число, если функция $\lambda(p, t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^m \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \lambda(p, t, \xi, \eta) \right| \leq c_{m,l} \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}(\sigma - m - l)}$$

с константами $c_{m,l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $p \in Q$, $t \in \Omega$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема. Пусть $K^{(\sigma_1)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ и $K^{(\sigma_2)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_1(p, t, \xi, \eta)$ и $\lambda_2(p, t, \xi, \eta)$, принадлежащими соответственно классам $S_{\alpha,p}^{\sigma_1}(\Omega)$ и $S_{\alpha,p}^{\sigma_2}(\Omega)$ (σ_1 и σ_2 — действительные числа). Тогда для любого $N \geq 0$ существует такое $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha}^{-N}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} K^{(\sigma_1)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t}) K^{(\sigma_2)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1} R_j(p, t, D_x, D_{\alpha,t}) = \\ = T_{N_1}(p, t, D_x, D_{\alpha,t}), \end{aligned}$$

где $T_{N_1}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(p, t, \xi, \eta)$; $R_j(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(p, t, \xi, \eta) = \frac{1}{j!} \partial_{\eta}^j \lambda_1(p, t, \xi, \eta) \cdot (\alpha(t) \partial_t)^j \lambda_2(p, t, \xi, \eta).$$

**О СОПРЯЖЕННОМ ОПЕРАТОРЕ ДЛЯ ОДНОГО
КЛАССА ВЕСОВЫХ
ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С
ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ**
Баев А.Д. (Воронеж)

В работе получено представление сопряженного оператора для весовых псевдодифференциальных операторов в случае, когда символ оператора зависит от переменных x и t . В случае, когда символ зависит только от переменной t , аналогичное утверждение доказано в [1].

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in (0; +\infty)$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Введем интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное, первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсевала, что позволяет определить преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi} = F_{x_1 \rightarrow \xi_1} F_{x_2 \rightarrow \xi_2} \dots F_{x_{n-1} \rightarrow \xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $P(x, t, D_x, D_{\alpha, t})v(x, t) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1}[\lambda(x, t, \xi, \eta) F_\alpha F_{x \rightarrow \xi}[v(x, t)]]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(x, t, \xi, \eta)$ принадлежит классу символов $S_\alpha^\sigma(R_+^n)$, $\sigma \in R^1$, если $\lambda(x, t, \xi, \eta) \in C^\infty(R^{n-1} \times (0; +\infty) \times R^{n-1} \times R^1)$ и справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^m \frac{\partial^l}{\partial \xi^l} \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} \lambda(x, t, \xi, \eta) \right| \leq c_{k, m, l, p} \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}(\sigma - l - p)},$$

где $k, m, l, p = 0, 1, 2, \dots$; $c_{k, m, l, p} > 0$ — некоторые константы, не зависящие от x, t, ξ, η, σ .

Определение 2. Сопряженным оператором к весовому псевдодифференциальному оператору $P(x, t, D_x, D_{\alpha, t})$ назовем оператор $P^*(x, t, D_x, D_{\alpha, t})$, удовлетворяющий равенству

$$(P(x, t, D_x, D_{\alpha, t})u(x, t), v(x, t))_{L_2(R_+^n)} =$$

$$= (u(x, t), P^*(x, t, D_x, D_{\alpha, t})v(x, t))_{L_2(R_+^n)}$$

для всех $v(x, t) \in L_2(R_+^n)$, $u(x, t) \in L_2(R_+^n)$ таких, что $P(t, D_x, D_{\alpha, t})u(x, t) \in L_2(R_+^n)$.

Здесь $(\cdot, \cdot)_{L_2(R_+^n)}$ — скалярное произведение в $L_2(R_+^n)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $p(x, t, \xi, \eta) \in S_\alpha^\sigma(R_+^n)$, $\sigma \in R^1$, $\delta \in [0, 1)$. Тогда оператор $P^*(x, t, D_x, D_{\alpha, t})$, сопряженный к весовому псевдодифференциальному оператору $P(x, t, D_x, D_{\alpha, t})$ с символом $p(x, t, \xi, \eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $p^*(x, t, \xi, \eta) \in S_\alpha^\sigma(R_+^n)$. Причём справедливо соотношение

$$p^*(x, t, \xi, \eta) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(i)^j}{j!} (\alpha(y)\partial_y)^j \partial_\eta^j \bar{p}(x, t, \xi, \eta) \in S_\alpha^\sigma(R_+^n)$$

для любых $N = 1, 2, \dots$

Литература

1. Баев А. Д. О разрешимости общих краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Вестник Самарского гос. ун-та, серия "Естественные науки". — 2008. — №3(62). — С. 40 – 50.

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Бакланов А.П. (Екатеринбург)

artem.baklanov@gmail.com

Рассматривается линейная игровая задача программного управления, где игроки имеют ограничения на выбор управлений, одно из которых — «мгновенность» импульса управления. Доказано, что используя достаточно «узкие» импульсы, т.е. ослабив ограничение, мы можем сколь угодно точно аппроксимировать результат «идеально импульсной» игры в классе обобщенных управлений. Для нахождения асимптотических результатов игры используются конструкции расширения в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер [1].

В работе показано, что рассматриваемая асимптотическая задача сводится к обобщенной, в которой каждый игрок, выбирает управления-меры из множества притяжения \mathbf{G}^λ в пространстве к.-а. вероятностных мер. В работе [2] представлено точное описание \mathbf{G}^λ и доказана нечувствительность данного множества к выбору

различных форм допустимых обычных управляющих функций в случае с ослабленными ограничениями на «мгновенность» импульса, что верно и в нашем случае.

Построено представление G^λ для одной задачи об импульсном игровом взаимодействии двух материальных точек в классе программных управлений.

Литература

1) *Ченцов А.Г.* О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского Университета. 2010. Вып. 3. С. 104–119.

2) *Скворцова А.В., Ченцов А.Г.* О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.

О КОРРЕКТНОМ РАСШИРЕНИИ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ (0,1)-МЕР

Бакланов А.П., Ченцов А.Г. (Екатеринбург)

artem.baklanov@gmail.com, chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается задача на максимин функционала

$$(x, y) \mapsto f_0(\alpha(x), \beta(y)) : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $f_0 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}, \alpha : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^k, \beta : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^l$, в условиях, когда выбор $x \in E_1, y \in E_2$ стеснены ограничениями

$$(\gamma(x) \in P) \& (\omega(x) \in Q), \quad (2)$$

где $\gamma : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^p, \omega : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^q, P$ и Q — непустые компакты в \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q соответственно. Функция f_0 предполагается непрерывной по совокупности переменных, функции $\alpha, \beta, \gamma, \omega$, вообще говоря, разрывны. Рассматривается постановка, в рамках которой допускается ослабление условий (2) посредством замены компактов P и Q их окрестностями. Для каждой задачи с ослабленными ограничениями постулируется свойство совместности, что позволяет рассматривать «максимин» платы (1) (в упомянутом «максимине» достижимость экстремумов не предполагается, т.е. речь идет о вычислении $\sup \inf$). Установлено, что асимптотика значений «максимина» при неограниченном ужесточении ослабленных ограничений определяется (точным) максимином обобщенной игровой задачи в классе

конечно-аддитивных $(0,1)$ -мер. В основе построения находится общая конструкция расширения задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера, изложенная в [1]-[3].

Литература

1) *Ченцов А.Г.* О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского Университета. 2010. Вып. 3. С. 104–119.

2) *Chentsov A. G.* Asymptotic attainability. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

3) *Baklanov A. P., Chentsov A. G.* On question about extension of abstract attainability problems admitting discontinuous dependences // FDE. 2010. Vol.17. No. 1-2, pp. 21-50.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЗАДАЧЕ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНА ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА

Батаев Е.С. (Москва)

bataev.evgeny@gmail.com

Опционом европейского типа называется контракт, обладатель которого имеет право в определенный момент времени (T) купить или продать указанный в контракте актив по заданной цене (K). Мы будем решать следующую задачу: возможно ли рассчитать рыночную цену P_t опциона в момент t , $0 \leq t \leq T$? Введем следующие обозначения: S_t — цена актива в момент t , $r(t)$ — процентная ставка безрискового актива, $\sigma(S, t)$ — волатильность актива. Важным допущением является то, что рынок является безарбитражным. Основной формулой в ценообразовании опционов является формула Блэка-Шоулса (см., напр., [2,3]). Приведем ее для опциона put:

$$P_t = E^* \left(e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} (K - S_t(T))_+ \mid F_t \right), \quad (1)$$

где P_t — цена опциона put с функцией выплат $(K - S_t(T))_+$ в момент t ; E^* — условное математическое ожидание, F_t — фильтр стохастического процесса (см., напр., [2,3]).

Используя формулу Ито, можно привести уравнение (1) к параболическому уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(S, t) - \frac{\sigma^2(S, t) S^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} P(S, t) -$$

$$-r(t)S \frac{\partial}{\partial S} P(S, t) + r(t)P(S, t) = 0, \quad (2)$$

$$P(S, 0) = P_0(S), \quad S \in R_+.$$

Применяя метод конечных элементов, разобьем интервал $[0, \bar{S}]$, где \bar{S} достаточно большое, чтобы $P_0(\bar{S}) = 0$, на подынтервалы $k_i = [S_{i-1}, S_i]$, $1 \leq i \leq N+1$, и обозначим через h_i – длину i -го интервала. Также, применяя метод Крэнка–Николсона (см., напр., [1]), разобьем интервал времени $[0, T]$ на $[t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq M$. Таким образом, задача сводится к нахождению $(P_h^m)_{0 \leq m \leq M}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} P_h^0 &= P_0, \\ (P_h^m - P_h^{m-1}, v_h) + \frac{\Delta t_m}{2} (a_m(P_h^m, v_h) + a_{m-1}(P_h^{m-1}, v_h)) &= 0, \\ 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (3)$$

Приводим задачу (3) к матричному уравнению:

$$M(P^m - P^{m-1}) + \frac{\Delta t_m}{2} (A^m P^m + A^{m-1} P^{m-1}) = 0, \quad (4)$$

где:

$$\begin{aligned} P^m &= (P_h^m(S_0), \dots, P_h^m(S_N))^T, \\ A_{i,i}^m &= \frac{S_i^2 \sigma^2(t_m, S_i)}{2} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \frac{r(t_m)}{2} (h_{i+1} + h_i), \\ A_{i,i-1}^m &= -\frac{S_i^2 \sigma^2(t_m, S_i)}{2h_i} + \frac{r(t_m)}{2} S_i, \\ M_{i,i-1} &= \frac{h_i}{6}, \quad M_{i,i} = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad M_{i,i+1} = \frac{h_{i+1}}{6}. \end{aligned}$$

Полученная задача решается численно, существуют программные реализации ее решения (см., напр., [1]).

Литература

1. Achdou Y., Pironneau O., Computational methods of option pricing. SIAM., 2005.
2. Бьорк Т., Теория арбитража в непрерывном времени. М., 2008.
3. Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. М., 2003.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОТНОШЕНИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Бесаева С.В. (Владикавказ)

besaevasu@mail.ru

Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство, $LB(X)$ — алгебра линейных операторов, действующих в X , E — линейное подпространство из X . Обозначим через $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$, где $p \in [1, \infty]$, банахово пространство, состоящее из последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ векторов принадлежащих X , суммируемых с весом (весовой функцией) $\alpha : \mathbb{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$ с нормой $\|x\| = \|x\|_{p, \alpha} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} \right)^p \right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$, и ограниченных относительно α $\|x\| = \|x\|_{\infty, \alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}$, $p = \infty$.

Следующие теоремы описывают спектр линейного разностного отношения $\mathcal{K}_E \in LR(l_\alpha^p)$, определенного на банаховом пространстве $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$, заданного следующим соотношением $\mathcal{K}_E = \{(x, y) \in l_\alpha^p \times l_\alpha^p : y(n) = Bx(n-1), n \geq 1, y(0) \in E\}$, где $B \in L(X)$. Считается что $B \neq 0$. В частности, если $E = \{0\}$, то $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{\{0\}}$ является линейным оператором. Введем следующие обозначения $\mathfrak{a}_{out}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}$, $\mathfrak{a}_{int}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}$

Теорема 1. Пусть $E = \{0\}$, тогда $\sigma(\mathcal{K}_{\{0\}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\mathfrak{a}_{out}(\alpha)\}$, при $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)} < \infty$, и $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_{\{0\}}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, при $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)} = \infty$.

Теорема 2. Пусть $E = X$ и оператор B обратим, тогда $\sigma(\mathcal{K}_X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \mathfrak{a}_{int}(\alpha)/r(B^{-1})\}$, при $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} < \infty$, и $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_X) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ при $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} = \infty$.

Теорема 3. Пусть $E = X$ и оператор B не обратим, тогда $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Литература

1. Бичегкуев М. С., Бесаева С. В.: О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов, в весовых пространствах. /Бичегкуев М. С., Бесаева С. В.// Изв. вузов. Математика. — 2010. — №2. — С. 16-21.

2. Баскаков А. Г., Чернышов К.И.: Спектральный анализ линей-

**МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ N-ГО ПОРЯДКА
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ СО
СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Беседина Т.В. (Воронеж)

tanja_bes@yahoo.com

Рассматривается задача Коши для уравнения диффузии с тремя фазовыми переменными, коэффициенты уравнения и начальное условие которой являются случайными процессами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \langle \varepsilon(t), \nabla u \rangle + \mu(t) \Delta u + f(t, x), \quad u(t_0, x) = u_0(x), \quad (1)$$

где $t \in [t_0, t_1] = T \subset R$, $x \in R^3$, $(\nabla u)_k = \partial u / \partial x_k$, $k = 1, 2, 3$, Δ – оператор Лапласа по x , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^3 , $u : T \times R^3 \rightarrow R$ – искомая функция, $\varepsilon : T \rightarrow R^3$, $\mu : T \rightarrow R$, $f : T \times R^3 \rightarrow R$, $u_0 : R^3 \rightarrow R$ – случайные процессы. Рассматривается случай, когда u_0 не зависит от ε , μ , f .

Получены формулы моментной функции n -го порядка решения задачи (1) в случае, когда известен характеристический функционал процессов ε , μ , f и моментные функции u_0 до n -го порядка включительно. В случае если случайный процесс f не зависит от процессов ε , μ , требуется знать не характеристический функционал процесса f , а его моментные функции до n -го порядка включительно.

**ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА
ДОСТИЖИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ
УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ**

Бондаренко Н.В. (Москва)

nataliabonda@mail.ru

Целью работы является исследование множества достижимости нелинейной системы трех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t)y(t)z(t) + u(t)(m - x(t)), & t \in [0, T], \\ \dot{y}(t) = -x(t)y(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t)z(t) - bz(t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \\ x_0 \in (0, m), y_0 > 0, z_0 > 0, \end{cases}$$

моделирующей управляемый процесс биологической очистки сточных вод с использованием теплового метаболизма термофильных аэробных бактерий и описывающей изменение концентрации кислорода, загрязняющих веществ и термофильной биомассы соответственно. В качестве допустимых управлений рассматриваются всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, на которые наложено ограничение в виде отрезка.

Сначала изучаются свойства фазовых переменных: доказываем, что решения исходной системы определены на всем заданном отрезке, обосновывается их положительность и ограниченность всюду на этом отрезке.

Затем исследуется множество достижимости. Оно оказывается компактным множеством, расположенным в положительном октанте. С помощью принципа максимума Понтрягина доказываем, что каждой точке границы множества достижимости отвечает кусочно-постоянное управление, принимающее крайние значения из ограничивающего отрезка и имеющее не более двух переключений.

Далее строится параметрическое описание множества достижимости с помощью кусочно-постоянных управлений, принимающих крайние значения из ограничивающего отрезка. Доказываем, что каждой внутренней точке этого множества соответствует указанное управление ровно с тремя переключениями, а каждой граничной точке отвечает такое управление с не более двумя переключениями. В среде *Matlab* производится построение множества достижимости рассматриваемой системы.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ РЕЗОНАНСНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

Бравый Е.И. (Пермь)

bravyi@perm.ru

Краевая задача

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t), & t \in [a, b], \\ \lambda x(a) - x(b) = \alpha_1, & \dot{x}(a) - \dot{x}(b) = \alpha_2, \end{cases} \quad (1)$$

является резонансной, так как однородная задача (при $f = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$) имеет нетривиальное решение $v(t) = 1 + (t - a)(\lambda -$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-96054-р-урал-а).

1)/(b - a), t ∈ [a, b]. Следовательно, эта фредгольмова задача не является разрешимой при всех правых частях f ∈ L[a, b], α_i ∈ R, i = 1, 2. Рассмотрим возмущения краевой задачи (1) линейными положительными операторами T^{+/-} : C[a, b] → L[a, b]:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), & t \in [a, b], \\ \lambda x(a) - x(b) = \alpha_1, & \dot{x}(a) - \dot{x}(b) = \alpha_2, \quad \lambda > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решением задачи (2) называется функция x : [a, b] → R с абсолютно непрерывной производной, удовлетворяющая краевым условиям и почти всюду на [a, b] функционально-дифференциальному уравнению задачи.

Теорема 1. Пусть заданы неотрицательные числа T⁺ ≠ T⁻. Для того чтобы задача (2) имела единственное решение при каждом f ∈ L[a, b], α₁, α₂ ∈ R при всех таких линейных положительных операторах T^{+/-} : C[a, b] → L[a, b], что ||T^{+/-}v||_{L[a,b]} = T^{+/-}, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{Y}{1 - Y} \leq X \leq 2(1 + \sqrt{1 - Y}),$$

где X = M max(T⁺, T⁻), Y = M min(T⁺, T⁻), M = $\frac{b - a}{(1 + \sqrt{\lambda})^2}$.

Аналогичные условия разрешимости других краевых задач, в частности, периодической краевой задачи (M = (b - a)/4), получены в работах А.Г. Ломтатидзе, С.В. Мухигулашвили, Р. Хакла, Ю. Шрепра.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ С ИНВОЛЮЦИЕЙ¹

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)

bmsh2001@mail.ru

1. Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1)

где $x \in [0, 1]$, $t \in (-\infty, \infty)$, β — вещественное число, $q(x) \in C^1[0, 1]$ и вещественная, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Обозначим через L и L_0 операторы

$$\begin{aligned}(Ly)(x) &= y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1), \\ (L_0y)(x) &= y'(1-x) + q_0(x)y(x), \quad y(0) = y(1),\end{aligned}$$

где $q_0(x) = \frac{1}{2}[q(x) + q(1-x)]$. Собственные значения оператора L_0 простые и имеют вид $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$, $n \in \mathbb{Z}$, где $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t)dt$.

Собственные значения λ_n оператора L , достаточно большие по модулю, простые, причем λ_n можно занумеровать так, что справедлива асимптотика $\lambda_n = \lambda_n^0 + O(1/n)$. Пусть R_λ и R_λ^0 — резольвенты операторов L и L_0 соответственно.

Теорема 1. *Классическое решение задачи (1)–(2) существует и имеет вид: $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t)$.*

Здесь

$$u_0(x, t) = [p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)]e^{a\beta it},$$

$p(x) = e^{i(ax - \int_0^x q_0(\tau) d\tau)}$, $f_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \in (-\infty, +\infty)$, периодическая с периодом 1 функция, причем $f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)]$ при $x \in [0, 1]$;

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0) \varphi)(x) e^{\lambda \beta it} d\lambda,$$

где r таково, что $\inf_n |\lambda_n^0| - r > 0$, и настолько велико, что λ_n и λ_n^0 , большие по модулю, чем r , простые; ряд

$$u_2(x, t) = \sum_{|\lambda_n| > r} [(\varphi, y_n) y_n(x) e^{\lambda_n \beta it} - (\varphi, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta it}], \quad (3)$$

и ряды, получающиеся из (3), почленным дифференцированием по x и t , сходятся равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-A, A]$, $\forall A > 0$.

В (3) $y_n(x)$ ($y_n^0(x)$) — собственные функции оператора L (L_0) для собственных чисел λ_n (λ_n^0).

2. Рассмотрим смешанную задачу для неоднородного уравнения:

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x). \quad (5)$$

Условия на β , $q(x)$, те же, что и в п.1, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, $f(x, t)$, $f'_x(x, t)$ непрерывны на $[0, 1] \times (-\infty, +\infty)$ и $f(0, t) = f'_x(1, t) = 0$.

Теорема 2. *Классическое решение задачи (4)–(5) существует и имеет вид: $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где $u_1(x, t)$ есть решение задачи (4)–(5) при $f(x, t) \equiv 0$; $u_2(x, t) = \beta i \int_0^t w(x, t - \tau, \tau) d\tau$ и $w(x, t, \tau)$ есть решение задачи (4)–(5) при $f(x, t) \equiv 0$ и $\varphi(x) = f(x, \tau)$ (τ выступает как параметр).*

Вид решения задачи (4)–(5) при $f(x, t) \equiv 0$ приведен в [1]. Теоремы 1 и 2 получены методом Фурье с привлечением идей из работ А.Н. Крылова [2] и В.А. Чернытина [3].

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // ДАН Т.435, № 2. 2010. С. 151-154.

2. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах / ГИТТЛ. Л, 1950. – 368 с.

3. Чернытин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ. 1991. 112 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

Быстрецкий М.В. (Вологда)

ptbmv@bk.ru

Рассмотрим краевую задачу

$$z'' = \overline{(z' - bz)^m} + f(t, z, z'), \quad 0 < t < 1, \quad z \in C, \quad (1)$$

$$z'(0) = a_{00}z(0) + a_{01}z(1) + h_0(z), \quad z'(1) = a_{10}z(0) + a_{11}z(1) + h_1(z), \quad (2)$$

где C - комплексная плоскость, a_{00} , a_{01} , a_{10} , a_{11} - комплексные числа, m - целое число, большее единицы, $f : [0, 1] \times C \times C \mapsto C$, $h_0, h_1 : C^1([0, 1]; C) \mapsto C$ - непрерывные отображения, такие, что

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |f(t, z_1, z_2)| (|z_1| + |z_2|)^{-m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z_1| + |z_2| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$\|z\|_{C^1}^{-1} |h_j(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \|z\|_{C^1} = \|z\|_C + \|z'\|_C \rightarrow \infty, j = 0, 1. \quad (4)$$

Будем говорить, что задача (1), (2) допускает априорную оценку, если множество решений задачи либо пусто, либо ограничено по норме пространства $C^1([0, 1]; C)$, т.е. существует $M > 0$ такое, что для любого решения задачи верна оценка $\|z\|_{C^1} < M$. В работе [1] было установлено наличие априорной оценки для данного типа задач.

Задачу (1), (2) назовем разрешимой, если при любых f, h_0 и h_1 , удовлетворяющих условиям (3), (4), существует хотя бы одно решение задачи (1), (2). В настоящей работе доказано, что в условиях существования априорной оценки задача (1), (2) разрешима. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$(a_{00} + a_{01}e^b - b)(a_{10} + a_{11}e^b - be^b) \neq 0,$$

$$\arg \frac{a_{00} + a_{01}e^b - b}{a_{10} + a_{11}e^b - be^b} \neq \frac{\pi}{m+1}(2k+1), \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Тогда задача (1), (2) допускает априорную оценку и разрешима.

Литература

[1]. Наимов А.Н., Быстрецкий М.В. Об априорной оценке и разрешимости третьей двухточечной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т.46, №2. – С.280-284.

УЧЕТ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА И ЕГО ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ В МОДЕЛЯХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Вервейко Н.Д., Просветов В.И. (Воронеж)

viprosvetov@rambler.ru

Фундаментальные законы механики – сохранение массы, изменения количества движения материальной точки, изменения количества движения, неубывание энтропии – составляют основу математических моделей механики сплошной среды.

$$\frac{dM}{dt} = 0; \quad \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}; \quad \frac{d\bar{G}}{dt} = \overline{M\omega m}; \quad \eta = 0 \quad (1)$$

где M - масса фиксированной части материи; \bar{Q} и \bar{G} - количество и момент количества движения материальной частицы; η - энтропия; \bar{F} и $\overline{M\omega m}$ - главные вектор и момент.

Конкретная связь между напряженным состоянием и кинематикой движения среды задается реологическими уравнениями, которые имеют место в фиксированный момент времени в текущей точке трехмерного пространства.

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{ij}, e_{ij}) \quad (2)$$

где σ_{ij} - тензор напряжений, ε_{ij} - тензор деформаций, e_{ij} - тензор скоростей деформации, f_{ij} - функционал.

Наличие микроструктуры в реальных макроматериалах (горные породы, грунты, полимеры и др.) влияют на распределение напряжений и скоростей в телах. Микроструктура в газах и жидкостях при наличии больших градиентов скоростей требует введение в классические модели МСС геометрического характерного параметра h и параметра τ , определяющего инертность процессов, в рамках представительных «бесконечно малых» объемов, которые в классических моделях МСС отсутствуют.

Учет таких малых параметров h и τ приводит к модификации выражений для скоростей деформации. Уточненные квазигазодинамические уравнения течения газа представляют в этом случае систему уравнений в частных производных по времени и пространству с малыми параметрами при старших производных, которая является сингулярно возмущенной.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + e \cdot \rho + \frac{h^2}{6} \rho \cdot \Delta e &= 0 \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \tau \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{h^2}{6} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta \sigma_{ij} \\ \sigma_{ii} &= \sigma \\ \sigma_{ij} &= 0, \quad i \neq j \\ \sigma &= -P + 3\lambda \cdot e \\ P &= C\rho^\gamma \\ e &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3)$$

Предельный переход при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ приводит (3) к классическим уравнениям течения вязкого сжимаемого газа.

Литература

1. Четверушкин Б. Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2005. – т. 17. - № 4. – с. 27-39.

2. V. I. Prosvetov, P.P. Sumets, N.D. Vervevko Modeling of flow of medium with homogeneous microstructure // International journal of mathematical models and methods in applied sciences Issue 3, Volume 5, 2011 – pp. 508-516

3. Быкова М. И. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры: монография / М. И. Быкова, Н. Д. Вervevко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина; Воронежский государственный университет. – Воронеж: Издательско- полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 192 с.

О ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

$${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3; z)$$

Вишневская Н.И. (Воскресенск)

01nadya1984@mail.ru

Работа посвящена исследованию функции гипергеометрического типа от одной переменной ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3; z)$, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$z^3(1-z)f^{IV} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - z(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 6))z^2f''' + (\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 1 - z(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 + 7))zf'' + (\beta_1\beta_2\beta_3 - z(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 1))f' - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4f = 0$$

Аналогичное уравнение в последнее время исследуется в физических работах по конформной теории поля (см, например [1]), связанных с исследованием корреляционных функций в двумерных статистических моделях в критической точке. Исследованию таких функций посвящен также целый ряд работ Гельфанда, Граева, Мимаки, Като и др. В докладе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, найдены экспоненты линейно независимых решений во всех особых точках и получена система типа Фукса для канонического вектор столбца, построенного по решению этого уравнения. Изучаются матрицы связи систем решений в окрестности решений особых точек (ассоциаторы Дринфельда).

Литература

1. В.С.Доценко, В.А. Фатеев, *Конформная алгебра и многомерные корреляционные функции в 2D статистических моделях*, Nucl.Phys., 1984, B240[FS 12], 312–348
2. В.А.Голубева, *Гипергеометрические функции двух переменных Аппеля и Кампе де Ферье*, Сибирский математический журнал XX, №5 1979, 997–1014
3. Mitsuo Kato, Masatoshi Noumi, *Monodromy Groups of hypergeometric functions satisfying algebraic equations*, Tohoku Math. Journal, 55, 2003, 189–205
4. Katsuhisa Mimachi, *Connection Matrices Associated with the Generalized Hypergeometric Function ${}_3F_2$* , Funkcialaj Ekvacioj 51., 2008, 107–133

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИЙ В МОДЕЛИ СОЛОУ

Вожжова Т.А. (Воронеж)

TAV60488@yandex.ru

Одно из главных положений теории Р. Солоу — технологическое развитие становится фундаментальной предпосылкой для экономического роста [1], [2] (в длительной перспективе).

При использовании этой модели часто рассматривается такое регулирование, при котором соотношения между потреблением, накоплением и инвестированием постоянны: $i = sy$, $c = (1 - s)y$, $\frac{i}{c} = \frac{s}{1-s}$, где s — коэффициент инвестирования $0 \leq s \leq 1$. Хотя в реальной ситуации естественно рассматривать и переменные соотношения: $s = s(t)$.

Уравнение Р. Солоу записывается в виде [1], [2] $\dot{k} = -\lambda k + s A k^\alpha$. Задача оптимизации инвестиций состоит в том, чтобы определить регулирование $s = s(t)$, при котором достигалось бы наилучшее потребление, уровень которого определяется функционалом благосостояния $V = \int_0^T e^{-\delta t} U(c(t)) dt$, δ — коэффициент дисконтирования, U — функция благосостояния, $c(t) = (1 - s(t))y(t)$ — удельное потребление.

Из базового уравнения можно найти функцию капитала. Подставив ее в производственную функцию, получим выражение V через s . После этого отыскивается функцию s , на которой функционал V достигает максимума. Поиск оптимальных инвестиций в достаточно общем классе управляющих функций предложен в [1]

(на основе принципа минимума Л.С. Понтрягина). Если ограничиться более простым классом управляющих функций — релейными управлениями, то поиск оптимума существенно упрощается. Более того, появляется возможность более детального анализа процесса оптимизации.

Литература

1. Митягин Б.С. Заметки по математической экономике // Успехи математических наук. 1972. Т 27, вып. 3. С.3–19.
2. Занг В.–Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир. 1999. – 335 с.

ОДНО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ 1-Й КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ¹

Волков Р.В., Прядиев В.Л. (Белгород)

home@rvolkov.ru, pryadiev@bsu.edu.ru

Рассмотрим следующую задачу:

$$U_{xx} + U_{yy} = U_{tt} \quad ((x, y) \in \Omega, t > 0), \quad (1)$$

$$U(x, y, t) = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega, t \geq 0), \quad (2)$$

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{\Omega}), \quad (3)$$

$$U_t(x, y, 0) = 0 \quad ((x, y) \in \bar{\Omega}), \quad (4)$$

где Ω – прямоугольник $(x_1; x_2) \times (y_1; y_2)$. Имеет место

Теорема. Существует непрерывная и кусочно-гладкая функция $g : \bar{\Omega}^2 \times [0; +\infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что для любой $\varphi \in C^4(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{n}^2} \Big|_{\partial\Omega} = 0$ (\mathbf{n} – нормаль), решение задачи (1)–(4) существует, единственно и представимо в виде

$$U(x, y, t) = \int_{\Omega} g(x, y, t; \xi, \eta) \Delta \varphi_{yy}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где лапласиан применяется по переменным ξ и η .

¹Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракты № П693 от 20.05.2010 г., № 02.740.11.0613 от 29.03.2010 г.).

Функция g определяется следующим образом. Пусть $\xi \in (x_1; x_2)$, $\eta \in (y_1; y_2)$. Пусть $\Gamma(y, \eta)$ – функция Грина задачи

$$Y''(y) = f(y) \quad (y_1 < y < y_2),$$

$$Y(y_1) = 0, Y(y_2) = 0.$$

Пусть $G(x, y, \xi, \eta)$, как функция последних своих двух переменных, непрерывна на Ω и является гармонической всюду в Ω , за исключением прямой $\xi = x$, удовлетворяя при этом соотношению

$$G_\xi(x, y, x+, \eta) - G_\xi(x, y, x-, \eta) = \Gamma(y, \eta).$$

Тогда g , как функция x , y и t , есть обобщённое решение задачи (1)–(4), если в последней заменить $\varphi(x, y)$ на $G(x, y, \xi, \eta)$.

ФОРМАЛИЗМ ВИТРИАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

Волов Д.Б. (Самара)

volovdm@mail.ru

В качественных методах математического моделирования предлагается использовать битриальную логику. В отличие от бинарного подхода к описанию (в основе которого заложены понятия "да"(1) и "нет"(0)), битриальная логика основана на понятиях "да"(1), "нет"(то есть "отсутствует") (0), и "противоположно да"(-1). По мере развития некоторая дискретная счетная система скачком делится на две части, в одной из которых остаются признаки (0, 1), а в другой - (0, -1).

Под развитием системы подразумевается увеличение числа ее элементов при последовательном делении, каждый раз на две части. Доказывается, что деление обладает минимальной асимметрией и образует почти симметричные масштабы - счетные самоподобные подмножества с разделенным признаком [1]. После деления две части системы развиваются независимо друг от друга, по мере роста реализуя (при следующем делении) и следующий признак (-1, 0, 1). Это минимальный из возможных алгоритмов, допускающих развитие. Мы его будем называть битриальным алгоритмом.

Битриальную логику можно использовать, например, при моделировании деления клеток эмбриона. При каждом новом делении клетка реализует новый признак (-1, 0, 1), сохраняя все свойства (0, 1) старой. В результате из одних клеток потом развивается один

вид ткани, из других - другой, и все они сохраняют общие свойства, поскольку произошли от одной-единственной клетки [2].

Вводится понятие ленточной матрицы [1], которая слева-направо содержит: "начало"; "тело где записаны все признаки, доставшиеся от прежних "поколений" и "зону роста". Зона роста (аналог матрицы Паули) и есть $(-1, 0, 1)$. Прослеживается некоторая "схожесть" признаков ленточной матрицы и структуры ДНК [3].

Обозначаются три направления развития данного подхода: битриальная логика, битриальная алгебра и дискретная небинарная математика. Операции битриальной математики производятся на дискретном счетном множестве с исключенным нулем [1].

При самом описании системы возможны три уровня $(-1, 0, 1)$: 1 - уровень "дилетанта достаточен аппарат битриальной логики (позволяет структурировать систему). 2 - уровень "специалистов" двух типов (отличающихся по отношению к объекту, реализуют "термодинамический" и "статистический" походы) - основан на битриальной алгебре для ленточных матриц [1]; отсутствует определенность, имеет противоречие, решаемое специалистами разных типов по-разному. 3 - уровень "профессионала который позволяет разрешить противоречие путем расширения масштаба системы.

Представляется полезным использование битриальных алгоритмов при моделировании систем, состоящих из большого счетного числа элементов.

Литература

1. Дм. Волов, Вестник СамГУПС, №1(23), 165 (2011).
2. Дм.Волов, Вестник СамГУПС, №4(22), 170 (2010).
3. Burge S, Parkinson G, Hazel P, Todd A, Neidle S. (2006). "Quadruplex DNA: sequence, topology and structure". *Nucleic Acids Res.* 34 (19): 5402-15.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВУЗАХ

Глушакова Т.Н., Крыжко И.Б. (Воронеж)

glushakovatn@gmail.com

Проблема преподавания математики в ВУЗах резко обострилась с введением школьного ЕГЭ. У детей пропал стимул в изучении тех разделов математики, которые не входят в типовые задания, потому что теперь главная задача - это поступление в ВУЗ, а не знание предмета. В итоге первокурсники даже тех факультетов, где

математика является профильным предметом, не умеют считать производные, не могут строить графики функций с исследованием, не знают формул по тригонометрии и не умеют пользоваться единичной окружностью, не говоря уже о векторах, которые они проходят в 9 классе и к началу 1-го курса благополучно забывают. Ситуация тем более ужасна, что подавляющее большинство поступающих - выпускники математических классов. Отчасти это объясняется тем, что навыки и знания, полученные в школе, в этой же школе не закрепляются. Это приводит к тому, что к началу учебного года в ВУЗах первокурсники забывают многое из того, чему их учили.

Еще более страшно то, что дети разучились думать. В школе идет "натаскивание" детей по определенным темам. Развивать логическое мышление у детей в школе некогда, да и незачем, так как результаты работы школы оцениваются результатами ЕГЭ, а в ЕГЭ умение логически мыслить нужно только в последних номерах группы С, до которой у большинства учителей просто не доходят руки.

В результате у первокурсников не сформировано умение логически мыслить, они не хотят думать (вполне возможно, что многие уже и не могут). В связи с этим преподавателям, которые ведут математические дисциплины в ВУЗах, приходится думать не только о том, как донести до ребят знания по своему предмету, но и о том, как заткнуть пробелы в школьных знаниях. А на это, к сожалению, времени нет. К тому же ситуация осложняется тем, что по всем фундаментальным дисциплинам, в частности, на факультете ПММ ВГУ, количество часов, в том числе и на первом курсе, в последние годы резко сократилось, а требования по содержанию к объему материала остались прежними. Вот и выкручиваются преподаватели, кто как может. А в итоге страдают дети.

Хотелось бы заметить, что все эксперименты как со школьной программой, так и с вузовской, приводят только к ухудшению ситуации. Сокращение часов по фундаментальным математическим дисциплинам в ВУЗах пагубно отражается на дальнейшем усвоении материала, так как в математике все взаимосвязано. Почему этого не хотят понять в нашем министерстве - абсолютно непонятно. Ведь если ты хорошо знаешь основы, то самостоятельно освоить все, "что близко лежит не составляет большого труда.

Таким образом, школьные проблемы накладываются на вузовские, и улучшения ситуации, к сожалению, не предвидится.

ИМПУЛЬСНЫЕ ПАКЕТЫ В ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМАХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Глызин С.Д. (Ярославль)

glyzin@uniyar.ac.ru

Изучается построенная на основе феноменологической модели импульсного нейрона система

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda[-1 - f_{Na}(u_1) + f_K(u_1(t-1))]u_1 + D(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda[-1 - f_{Na}(u_2) + f_K(u_2(t-1))]u_2 + D(u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (1)$$

описывающая слабое электрического взаимодействия пары одинаковых осцилляторов нейронного типа. Здесь $u_1(t), u_2(t)$ — мембранные потенциалы взаимодействующих клеток, функции $f_{Na}(u) = r_1 \exp(-u^2)$ и $f_K(u) = r_2 \exp(-u^2)$ характеризуют, соответственно, проводимости натриевых и калиевых каналов, наконец, коэффициент $D > 0$ определяется связью нейронов между собой. Используя локальные асимптотические методы, в [1] удалось определить область значений параметров r_1, r_2 , для которых при подходящем образом выбранном параметре связи D и увеличении λ в (1) наблюдаются разномасштабные колебания, причем движения большой амплитуды представляют собой случайную последовательность импульсных пакетов. В качестве величин, адекватно характеризующих процесс возникновения импульсов или пакетов импульсов, были выбраны статистические характеристики непрерывной случайной величины расстояния между последовательно идущими пакетами. Проведенный статистический анализ зависимости предыдущего расстояния между пакетами $x(n)$ от последующего $x(n+1)$ показал, что можно выделить два класса режимов, существенно отличающихся наличием в одном из случаев сложной внутренней структуры псевдофазовой плоскости $\{x(n), x(n+1)\}$. Выяснилось, что надежно идентифицировать данные режимы позволяет оценка статистической энтропии, предложенная в [2]. Данная оценка наилучшим образом зарекомендовала себя и с точки зрения вычислительного процесса, так как трудоемкость нахождения этой величины существенно ниже, чем для определения, например, корреляционного интеграла.

Литература

1. Глызин С.Д., Киселева Е.О. *Моделирование и анализ информационных систем*. Т. 15, № 2. (2008).
2. Тимофеев Е.А. *Алгебра и анализ*. Т. 17, № 3. (2005).

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ПРОЦЕССА КАРБОНИЗАЦИИ АММОНИЗИРОВАННОГО РАССОЛА

Гнатенко Ю.А., Валиев Р.А. (Стерлитамак)

Valieva_Julia@mail.ru

Карбонизация аммонизированного рассола является основным процессом содового производства (ОАО „Сода“ г. Стерлитамак). Температурный режим карбонизационной колонны значительно влияет на процесс образования целевого продукта – кристаллов гидрокарбоната натрия [4].

Теоретическая оптимизация осуществляется на основе кинетической модели с последующим выбором технологической схемы реактора, позволяющим наилучшим образом приблизиться к теоретическому оптимальному режиму. Полученный теоретический оптимальный режим позволяет оценить предельные возможности технологии.

На основе упрощенного механизма процесса карбонизации была построена следующая кинетическая модель [2]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{S}{v} \frac{F_i - x_i F_n}{N}, \quad i = \overline{1, 9}; \quad \frac{dN}{dt} = \frac{S}{v} F_n \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, 9}; \quad N(0) = 1. \quad (2)$$

Функции $F_n, F_i, i = \overline{1, 9}$ с учетом матрицы стехиометрических коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned} F_1 &= -W_1(\mathbf{x}, T) - 2W_2(\mathbf{x}, T), & F_2 &= W_1(\mathbf{x}, T), \\ F_3 &= W_1(\mathbf{x}, T) + W_2(\mathbf{x}, T) + W_3(\mathbf{x}, T), & F_4 &= -W_2(\mathbf{x}, T) - W_3(\mathbf{x}, T), \\ F_5 &= W_2(\mathbf{x}, T) - W_3(\mathbf{x}, T), & F_6 &= 2W_3(\mathbf{x}, T) - W_4(\mathbf{x}, T), \\ F_7 &= -W_4(\mathbf{x}, T), & F_8 &= W_4(\mathbf{x}, T), \\ F_n &= W_1(\mathbf{x}, T) - W_2(\mathbf{x}, T) - W_3(\mathbf{x}, T), & F_9 &= W_4(\mathbf{x}, T). \end{aligned}$$

x_i – концентрация i -того компонента химической реакции; N – относительное изменение числа молей реакционной среды; v – скорость потока; S – площадь поперечного сечения реактора; l – длина реактора; W_j – приведенные скорости химических реакций, которые в свою очередь зависят от кинетических констант $k_s(T)$. Константы зависят от температуры T , исходя из уравнения Аррениуса:

$$k_s(T) = k_s^0 e^{-\frac{E_s}{RT}}, \quad s = \overline{1, 7},$$

где k_s^0 – предэкспоненциальный множитель; E_s – энергия активации стадии; T – абсолютная температура; R – универсальная газовая постоянная.

В качестве управления будем рассматривать температурный профиль $T = T(l)$, причем из технологических соображений на управление наложены ограничения $T_1 \leq T \leq T_2$. Тогда возникает следующая задача оптимального управления: определить оптимальный температурный режим процесса, описываемого системой нелинейных дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2), при котором достигается максимальная концентрация x_8 целевого продукта:

$$R = x_8(l_k) \rightarrow \max. \quad (3)$$

Сведем критерий (3) к минимизации функционала:

$$I = \int_0^{l_k} \varphi_0(\mathbf{x}, T) dl, \quad (4)$$

где

$$\varphi_0(\mathbf{x}, T) = -\frac{dx_8}{dl} = -\frac{S F_8 - x_8 F_n}{v N}.$$

Для единства обозначений положим $N = x_{10}$. Длина реактора l_k известна.

Задачу оптимального управления (1)–(4) решим с помощью принципа максимума Понтрягина [3]. Составим функцию Понтрягина H (гамильтониан):

$$H = \sum_{i=0}^{10} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}, T) = \frac{S}{v} \left(\sum_{i=1}^9 \lambda_i \frac{F_i - x_i F_n}{x_{10}} + \lambda_{10} F_{10} \right), \quad (5)$$

где $\varphi_i(\mathbf{x}, T)$, $i = \overline{1, 10}$ – правые части системы уравнений (1).

Здесь функции $\lambda_i(t)$ удовлетворяют системе сопряженных уравнений:

$$\frac{d\lambda_i}{dl} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, 10}. \quad (6)$$

Недостаток граничных условий восполняется условиями трансверсальности, число которых равняется числу недостающих граничных условий для основной и сопряженной системы уравнений (для задачи со свободным правым концом).

$$\lambda_i(l_k) + \lambda_0 \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, 10}. \quad (7)$$

Таким образом, получена двухточечная краевая задача для систем (1), (6) с заданными граничными условиями (2), (7) в начальной и конечной точке $l = 0$ и $l = l_k$ соответственно. Данная задача была решена численно с помощью метода последовательных приближений [2].

В результате для получения максимального выхода гидрокарбоната натрия необходимо в реакторе поддерживать постоянную оптимальную температуру 47°C , при этом на выходе концентрация целевого продукта составляет 1843,65 кг/тс. Для сравнения на предприятии ОАО „Сода“ (г. Стерлитамак) в карбонизационной колонне на выходе получается 1599 кг/тс, что говорит о возможности применения полученных результатов для дальнейшего технологического этапа оптимизации [4].

Литература

1. Афанасенко А.Г., Гнатенко Ю.А. Математическая модель и оптимизация процесса карбонизации аммонизированного рассола // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20, №9. – С.105-110.
2. Афанасенко А.Г., Гнатенко Ю.А. Математическое моделирование и оптимизация процесса карбонизации аммонизированного рассола // Свид. об офиц. рег. программы для ЭВМ №2008610163. Роспатент, 9 января 2008.
3. Мустафина С.А., Валиева Ю.А., Спивак С.И. Расчет оптимальных режимных параметров реакции олигомеризации α -метилстирола на основе принципа максимума Понтрягина // Башкирский химический журнал. – Уфа: Гилем. – 2004. – Т. 11, №5. – С. 32-36.
4. Ткач Г.А., Шапорев В.П., Титов В.М. Производство соды по малоотходной технологии: Монография.– Харьков: ХГПУ, 1998.– 429с.

ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ СМО СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ, БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ И РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Головко Н.И., Крылова Д.С. (Владивосток)

cdo@psue.ru

Исследование моделей систем массового обслуживания (СМО) в информационных сетях (ИС) позволяет определять характеристики показателей эффективности функционирования СМО в ИС с целью оптимизации состояния ИС. Функционирование некоторых серверов в ИС, например, таких как проху или web сервер, описывается следующей моделью СМО. СМО имеет бесконечный накопитель и два прибора: основной и резервный. На обоих приборах обслуживание экспоненциальное: интенсивности μ на основном приборе и интенсивности $\mu + \Delta$ на резервном приборе, который включается, если число заявок в СМО станет больше или равным m . Входной поток заявок является дважды стохастическим пуассоновским потоком заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, изменяющийся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α . Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа условную плотность распределения $\varphi(x|y) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx | \lambda(t_0 - 0) = y\}/dx \equiv \varphi(x)$, то есть предполагается, что значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва t_0 слева и справа — независимы. Предполагается выполнение условия отсутствия перегрузок в стационарном режиме $b < \mu$. В работе получены следующие результаты. Для стационарного распределения $q_k(x) = P\{\nu = k, x < \lambda < x + dx\}/dx, k \geq 0$, числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме осуществлен переход от первой модели ко второй. Для распределения числа заявок получена стационарная производящая функция F комплексного аргумента z в виде ряда $F(x, z) = (I - A)^{-1}f(x, z) = \sum_{n \geq 0} A^n f(x, z)$, $A = (x + \mu + \alpha - xz)^{-1}(\mu\mathcal{K} + \alpha\Phi + \Delta(z^{m+1}\mathcal{K}^{m+1} + z^{m+1}\mathcal{K}^{m+2}))$, $f(x, z) = x\varphi(x)(x + \mu + \alpha - xz)^{-1}$, $\mathcal{K}^m \sum_{n \geq 0} h_n(x)z^n = \sum_{n \geq 0} h_{n+m}(x)z^n$, $\Phi F(y, z) = \varphi(x) \int_a^b F(y, z) dy$.

В работе показано: 1) норма оператора A строго меньше единицы; 2) все ряды равномерно сходятся по $x \in [a, b], z \in \mathcal{Z}$.

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ СМО

M/G/1

Головки Н.И., Пелешок О.В. (Владивосток)

cdo@psue.ru

Исследование моделей систем массового обслуживания (СМО) в информационных системах (ИС) сетях позволяет определять характеристики показателей эффективности функционирования СМО в ИС с целью оптимизации состояния ИС. Поэтому разработка теоретических методов, позволяющих прогнозировать показатели эффективности функционирования ИС является актуальной и практически значимой задачей. В данной работе рассматривается дважды стохастическая СМО типа $M/G/1$ с одним прибором, бесконечным накопителем, с произвольным законом распределения длительности η обслуживания $B_\eta(u) = P\{\eta < u\}$. На вход рассматриваемой СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, изменяющийся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T , распределенными по экспоненциальному закону с параметром α . Обозначим через $U(t)$ – незавершенную работу системы в момент времени t . В работе получено интегродифференциальное уравнение типа Такача для стационарного режима:

$$-(\alpha + x)\mathbf{H}(w, t, x) + \frac{\partial \mathbf{H}(w, t, x)}{\partial w} + x \int_0^w B(w-s) \frac{\partial \mathbf{H}(s, t, x)}{\partial s} ds + \\ + \alpha \varphi(x) \int_a^b \mathbf{H}(w, t, x) dy = \frac{\partial \mathbf{H}(w, t, x)}{\partial t}, w > 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{H}(w, t, x) = P\{U(t) < w, x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$ – нестационарная функция распределения незавершенной работы $U(t)$ и интенсивности входного потока $\lambda(t)$. Данное уравнение решено с применением преобразования Лапласа - Стилтеса. Нахождение обратного преобразования связано со значительными затруднениями, однако через преобразования Лапласа - Стилтеса выражены среднее и дисперсия незавершенной работы в нестационарном режиме.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение. 1979.

НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБСТВЕННЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Головцов А.В. (Казань)

golovcov-anton@mail.ru

Функция $\varphi(t)\psi(x, y, z)$ называется элементарной собственной сейсмической волной, если она является ненулевым решением однородного волнового уравнения. Если переменные в уравнении разделяются, то

$$\varphi^{(2)} + a_1(t)\varphi^{(1)} + a_2(t)\varphi = 0, \quad W\psi(x, y, z) = \lambda\psi(x, y, z),$$

где W —волновой оператор, λ —собственное значение оператора W , вещественные функции $a_j(t)$ в общем случае зависят от λ и определяются параметрами среды, где распространяется волна [1]. Они, как и λ , как правило, нам не известны. Ставится вопрос об определении $\varphi(t)\psi(x, y, z)$ в заданной точке (x_0, y_0, z_0) по результатам измерений амплитуд волны в моменты t_1, \dots, t_n . В случае, когда функции $a_j(t)$ — T -периодические и суммируемые в $[0, T]$, предлагается ответ на поставленный вопрос. С использованием теоремы Флоке [2] доказывается, что каждая элементарная собственная сейсмическая волна имеет один из видов $(\exp(\alpha_1 t)h_1(t) + \exp(\alpha_2 t)h_2(t))\psi(x, y, z)$, $(\exp(\alpha_3 t)(f_1(t) \cos(\beta t) + f_2(t) \sin(\beta t)))\psi(x, y, z)$, $\exp(\alpha_4 t)(tg_1(t) + g_2(t))$, где α_j, β —вещественные числа, $\beta \neq \pi k/T$, $k = 0, \pm 1, \dots$, функции $h_j(t), f_j(t), g_j(t)$ —вещественные и дифференцируемые, причём $h_j(t)$ либо обе— T -периодические, либо обе—анти T -периодические, либо одна— T -периодическая, другая—анти T -периодическая, функции $f_j(t)$ — T -периодические, $g_j(t)$ либо обе— T -периодические, либо обе—анти T -периодические.

В зависимости от результатов замеров $A_j, j = 0, 1, 2, 3$ амплитуд при $t = 0, T, 2T, 3T$ устанавливается вид волны и вычисляются параметры волны. Исследованы все 9 возможностей. Доказано, что результаты замеров амплитуд при $t_j, t_j + T$ позволяют приближённо вычислить волну на каждом отрезке $[a, b]$, в том числе при $b < 0$, то есть восстановить вид волны до начала измерений. Решён вопрос о шумах при измерении амплитуд.

Литература

1. Шерриф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка. В 2-х т. Т.1. Пер.с англ. М., 1987.
2. Еругин Н.П. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963.

ИНТЕГРАЛЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В $L_{p,\rho_+}(L_{p,\rho_-})$

Горлов В.А. (Воронеж)

gorlov.vladimir@gmail.com

Как известно в случае дробных интегралов Римана-Лиувилля:

$$(I_{0+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (1.1)$$

$$(I_-^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (1.2)$$

Весовые пространства $L_{p,\rho}$ со степенными весами $\rho(t) = (1+t)^M$ не инвариантны относительно операций I_{0+}^α и I_-^α , но таким свойством обладают пространства $L_{p,\rho}$ с экспоненциальными весами $\rho(t) \in e^{-\omega t}$, где $\omega > 0$ в случае I_{0+} , и $\omega < 0$ в случае I_- .

Следующая теорема позволяет расширить классы пространств инвариантных относительно операций (1.1), (1.2).

Теорема 2.1 Пространства L_{p,ρ_+} инвариантны относительно операции I_+ , а пространства L_{p,ρ_-} инвариантны относительно операции I_- и справедливы следующие оценки:

$$\|I_{0+}^\alpha f\|_{L_{p,\rho_+}} \leq M \|f\|_{L_{p,\rho_+}},$$

$$\|I_-^\alpha f\|_{L_{p,\rho_-}} \leq M \|f\|_{L_{p,\rho_-}}.$$

Литература

1. Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский.— Глав. ред. физ.-мат. литер. "Наука 1975— 480 с.
2. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова / А.В. Костин, В.А. Костин.— Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.— 259 с.

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В РЕФЛЕКСИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Горшков А.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

tiger-nn@mail.ru, msumin@sinn.ru

Доклад посвящен обсуждению результатов, связанных с конструированием алгоритма двойственной регуляризации [1,2] для параметрической задачи выпуклого программирования в рефлексивном пространстве

$$f(z) \rightarrow \min, \quad Az = h + p, \quad g(z) \leq r, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z, \quad (1)$$

где $f : \mathcal{D} \rightarrow R^1$ – строго равномерно выпуклый функционал, $A : Z \rightarrow H$ – линейный непрерывный оператор, $h \in H$ – заданный элемент, $g(z) \equiv (g_1(z), \dots, g_m(z))^*$, $g_i : \mathcal{D} \rightarrow R^1, i = 1, \dots, m$, – выпуклые функционалы, $p \in H, r \in R^m$ – параметры, \mathcal{D} – выпуклое замкнутое множество, Z, H – рефлексивные пространства.

Как и в случае задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве (Z, H – гильбертовы пространства) [1,2], двойственный алгоритм в параметрической задаче (1) заключается в непосредственном решении на основе метода регуляризации Тихонова двойственной к (1) задачи. Его сходимость, при обосновании которой, в отличие от [1,2], важную роль играют понятия так называемых обобщенного субдифференциала (в смысле Мордуховича) и субдифференциала Фреше полунепрерывной снизу функции в рефлексивном пространстве, имеет место вне зависимости от того разрешима или нет двойственная задача. Качество этой сходимости напрямую зависит от дифференциальных свойств выпуклой функции значений (S -функции) задачи (1), как функции параметров (p, r) , которые тесно связаны с седловыми точками функции Лагранжа, а также с принципом Лагранжа задачи (1).

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т 47. №4. С. 602-625.
2. Sumin M.I. Parametric Dual Regularization in a Linear-Convex Mathematical Programming. In book: Computational Optimization: New Research Developments. New-York: Nova Science Publishers Inc., 2010, Chap. 10, pp. 265-311.

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ И ЭКСТРЕМАЛИ С ДВОЙНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ

Дерунова Е.В., Сапронов Ю.И. (Воронеж)

derunova-el@mail.ru, yusapr@mail.ru

Задача изучения ветвления критических орбит $SO(2)$ -инвариантного функционала (с круговой симметрией) является частью более широкой задачи бифуркационного анализа — изучения экстремалей функционалов вблизи точек с многомерным вырождением. Один из известных методов решения такой задачи — применение вариационной версии редуцирующей схемы Ляпунова-Шмидта, позволяющей сводить эту задачу к анализу $SO(2)$ -инвариантного полинома на \mathbf{R}^n [1] – [2]. Например, экстремали функционала

$$V(w) = \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(w) dz \text{ с лагранжианом } \mathcal{L}(w) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|^2 - \mu \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 \right) +$$

$\Pi(w)$ (Π — полином), при условии периодичности $w(z + 2\pi) = w(z)$, определяются уравнением $f(w) = 0$, $w \in E$, $f(w) \in F$,

где $f := \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \text{grad } \Pi$ — нелинейный дифференциальный оператор, E, F — соответствующие пространства периодических функций. Локальный анализ решений данного уравнения (вблизи критической точки) сводится к анализу (ключевой) функции

$W(\xi) := \text{extr}_{w:g(w)=\xi} V(w)$, $\xi \in \mathbf{R}^4$ (g — редуцирующее отображение $E \rightarrow \mathbf{R}^4$ [1]), на основе которого можно составить полное представление о ветвлении экстремалей V . В настоящее время

дано исчерпывающее описание нормальных форм ключевых функций, отвечающих простым сильным резонансам и некоторым случаям двойных резонансов. В основе описания нормальных форм находится отыскание систем образующих инвариантов относительно ортогональных полусвободных действий окружности в \mathbf{R}^4 и \mathbf{R}^6 .

Литература

1. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140.

2. Дерунова Е.В., Сапронов Ю.И. Ветвление периодических экстремалей в стационарной точке с резонансом 1:2:4// Семинар по глобальному и стохастическому анализу. Вып. 5. Воронеж: ВГУ, 2010. С.42-54.

**О НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТИМОСТИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ ПРИ
ПОМОЩИ УПОРЯДОЧЕННОЙ ПАРЫ ЛИНЕЙНЫХ
ОПЕРАТОРОВ**

Диденко В.Б. (Воронеж)
vladimir.didenko@gmail.com

Пусть X - банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, определенных на всем пространстве X .

Символом Δ обозначим множество $[a, b] \times [a, b]$. Отображение $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow EndX$ называется (сильно непрерывным) *семейством эволюционных операторов* на $[a, b]$, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ - тождественный оператор для любого $t \in [a, b]$;
- (2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех t, s, τ из $[a, b]$;
- (3) отображение $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x : \Delta \rightarrow X$ непрерывно для любого $x \in X$.

Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}([a, b], X)$ будем обозначать либо банахово пространство непрерывных на $[a, b]$ функций, либо пространство $L_p = L_p([a, b], X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть (A, B) - упорядоченная пара линейных ограниченных операторов, определенных на всем пространстве X . Определим операторы $\mathcal{L}_i : D(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, следующим образом. Функция x_i , $i = 1, 2$, из \mathcal{F} включается в область определения $D(\mathcal{L}_i)$ оператора \mathcal{L}_i тогда и только тогда, когда для функции x_1 существует такой элемент v из X , что

$$Av = x_1(a), Bv = x_1(b),$$

а для функции x_2 выполняется равенство

$$Ax_2(a) = Bx_2(b),$$

и, кроме того, существует такая функция f_i из \mathcal{F} , что справедливы равенства

$$x_i(t) = \mathcal{U}(t, s)x_i(s) + \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f_i(\tau)d\tau, a \leq s \leq t \leq b, i = 1, 2.$$

При этом полагается $\mathcal{L}_i x = f_i$.

Теорема 1. Оператор \mathcal{L}_1 непрерывно обратим тогда и только тогда, когда оператор $B - \mathcal{U}(b, a)A$ сюръективен и, кроме того, выполняется включение $\text{Ker}(B - \mathcal{U}(b, a)A) \subseteq \text{Ker} A$.

Теорема 2. Оператор \mathcal{L}_2 непрерывно обратим тогда и только тогда, когда оператор $A - B\mathcal{U}(b, a)$ инъективен и, кроме того, выполняется включение $\text{Im} B \subseteq \text{Im}(A - B\mathcal{U}(b, a))$.

О ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дмитриев В.Б. (Самара)

dmitriev_v.b@mail.ru

Математическое моделирование физических явлений и биологических процессов часто приводит к нелокальным задачам для уравнений в частных производных. Краевые задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений второго порядка были исследованы Л.С. Пулькиной. Однако при этом нелокальные задачи для уравнений в частных производных первого порядка исследованы слабо.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu \equiv u_t + \text{div}(A(x, t)u) + B(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

в цилиндре $Q_T = \{(x, \tau) : x \in \Omega, 0 < \tau < T\}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и поставим для него задачу с начальным условием Коши

$$u(x, 0) = \tau(x) \quad (2)$$

и нелокальным условием

$$u(x, t)|_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, y, t) u(y, t) dy|_{S_T}, \quad (3)$$

где $\tau(x), K(x, y, t)$ заданы. Далее, $S_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ - боковая поверхность цилиндра Q_T . Здесь $A(x, t) = (A_1(x, t), \dots, A_n(x, t))$ - векторнозначная функция.

В предлагаемой работе получены условия на функции K, A_i, B, τ, f , при выполнении которых задача (1) - (3) имеет единственное обобщенное решение из $L_2(Q_T)$.

Единственность доказана надлежащим выбором вспомогательной функции. Доказательство существования решения базируется на полученной априорной оценке. Она оценивает энергетическую норму решения $u(x, t)$, квадрат которой по определению будет равен

$$z(t) = \sup_{0 \leq \xi \leq t} \int_{\Omega} u^2(x, \xi) dx + \int_0^t \int_{\partial\Omega} |(A(x, \tau), \mathbf{n})| u^2(x, \tau) ds d\tau,$$

через начальные данные Коши и $f(x, t)$. Здесь \mathbf{n} - вектор внешней нормали.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Дмитриев М.Г. (Москва)

m.dmitriev@mail.ru

Для непрерывной нелинейной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления Майера-Больца в классической постановке с быстрыми и медленными движениями рассматривается соответствующая краевая задача принципа максимума Понтрягина. Методом пограничных функций строится асимптотика ее решения и оценка остаточного члена асимптотики проводится непосредственно, опираясь на достаточные условия оптимальности второго порядка.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Дыльков А.Г. (Магнитогорск)

dylkov@yandex.ru

На графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ рассмотрим линейные уравнения

$$\lambda x_{jt} + x_{jtss} = \beta x_{jss} - \alpha x_{jssss} + \gamma x_j + u_j, \quad (1)$$

с условиями

$$x_j(0, t) = x_k(0, t) = x_m(l_m, t) = x_n(l_n, t), \quad (2)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(l_k, t) = 0, \quad (3)$$

$$P_{in}(x(0) - x_0) = 0, P_{fin}(x(\tau) - x_\tau) = 0, \quad (4)$$

где P_{in}, P_{fin} – некоторые специальным образом построенные проекторы [1], $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_2^2(0, l_j) \text{ и выполнено (2), (3)}\}$.

Построим операторы $\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle = \sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{jkq} (u_{jk}^{(q)})^2(t)$, ν_{jkq} – положительные числа.

Определение 1. Вектор-функцию $u_0 \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи (1), (2)*, если выполнено

$$J(u_0) = \min_{u \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})} J(u), \quad (5)$$

где H_∂^{p+1} – замкнутое и выпуклое подмножество в $H^1(\mathfrak{U}) = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in L_2(0, \tau; (0, l_j))\}$,

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|x^{(q)} - x_0^{(q)}\|_{\mathfrak{X}}^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Теорема 1. При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\beta, \gamma, \lambda, \tau \in \mathbb{R}$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ существует единственное решение задачи (1) – (4), (5).

Литература

1. Загребина С.А., Соловьева Н.П. Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе // Обзорение приклад. и пром. математики. 2009. Т. 16, вып. 2. С. 329–330.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Дюжева А.В. (Самара)

aduzheva@rambler.ru

В области $Q = (0, l) \times (0, T)$ для уравнения

$$D_t^4 u - u_{xx} + c(x)u = f(x, t) \quad (1)$$

поставлена следующая задача: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad D_t u|_{t=T} = 0 \quad (2)$$

$$u_x(l, t) = 0, \quad u_x(0, t) = \int_0^l K(x)u(x, t)dx. \quad (3)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x, t) \in \dot{W}_2^{1,2}(Q)$ для любой функции $v(x, t) \in \dot{W}_2^{1,2}(Q)$, удовлетворяющую тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (D_t^2 u D_t^2 v - 2\lambda D_t^2 u D_t v - \lambda^2 D_t u D_t v + \\ & \quad + \lambda^3 D_t u v + u_x v_x + cuv) e^{-\lambda t} dx dt = \\ & = \int_0^T e^{-\lambda t} v(0, t) \int_0^l K(x)u(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^l f v e^{-\lambda t} dx dt. \end{aligned}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема. Пусть $c(x, t) \in C(\overline{Q})$, $K(x) \in C[0, l]$, $c(x, t) \geq c_0 > 0$, $l > \frac{1}{2}$, $\int_0^l K^2(x) dx < \frac{1}{2}$, тогда существует не более одного решения поставленной задачи.

Доказательство теоремы базируется на априорных оценках решения, полученных с помощью теоремы вложения для анизотропных пространств.

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.Н. Интегральные представления функций и теорема вложения. М: Наука, 1975.

СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАТОРОВ, ИМЕЮЩИХ ПСЕВДООБРАТНЫЕ

Еровенко В.А., Гулина О.В. (Минск)

erovenko@bsu.by, gulina_o@mail.ru

Рассмотрим оператор $T \in \mathbf{B}(X)$, где $\mathbf{B}(X)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих на бесконечномерном банаховом пространстве X над полем комплексных чисел. Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ имеет псевдообратный, если существует такой оператор $S \in \mathbf{B}(X)$, что выполняется равенство $TST = T$ [1].

Обозначим через $S_e(X)$ множество всех линейных ограниченных операторов $T \in \mathbf{B}(X)$, для которых существует псевдообратный оператор и выполняется существенное включение Като

$N(T) \overset{e}{\subset} R^\infty(T)$, т.е. $N(T) \subset R^\infty(T) + F$, где $F \subset X$ – конечномерное подпространство банахова пространства X , $N(T)$ – ядро оператора T , а $R^\infty(T) := \bigcap \{R(T^k) : k = 1, 2, \dots\}$ – обобщенная область значений оператора T . Существенное включение Като и эквивалентные ему существенные включения рассмотрены, например, в работе [2].

Для операторов $T \in S_e(X)$ справедливы следующие результаты об устойчивости при возмущении операторами конечного ранга, малыми по норме и квазинильпотентными операторами [3].

Теорема 1. Пусть $T \in S_e(X)$ и возмущение $A \in B(X)$ – оператор конечного ранга. Тогда возмущенный оператор $T - A \in S_e(X)$.

Теорема 2. Пусть $T \in S_e(X)$. Тогда существует такое малое $\varepsilon > 0$, что для любого возмущения $A \in B(X)$, коммутирующего с оператором T , т.е. $TA = AT$, норма которого меньше ε , т.е. $\|A\| < \varepsilon$, возмущенный оператор $T - A \in S_e(X)$.

Теорема 3. Пусть $T \in S_e(X)$ и возмущение $A \in B(X)$ – квазинильпотентный оператор, коммутирующий с оператором T , т.е. $TA = AT$. Тогда возмущенный оператор $T - A \in S_e(X)$.

Литература

1. Caradus S.R. Generalised inverses and operator theory. – Kingston: Queen's University, 1978. – 209p.
2. Гулина О.В. Свойства существенного спектра Сафара для ограниченных операторов // Вестник МГУ им. А.А. Кулешова. – 2007. – № 4. – С. 151–158.
3. Еровенко В.А., Гулина О.В. Об устойчивости существенно регулярных операторов и соответствующего спектра Сафара // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 27–32.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТЯХ С НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ

Ерусалимский Я.М., Водолазов Н.Н. (Ростов-на-Дону)

nickolay_vodolazov@rambler.ru

Задачи на графах с нестандартной достижимостью рассматриваются в [1]. На графах с дополнительными ограничениями некоторые пути в зависимости от вида ограничений становятся недопустимыми для потока.

В [1] приведены алгоритмы поиска максимального потока на

графах с ограничениями на достижимость, работающие на некотором подмножестве графов. В [2] построен алгоритм, имеющий более широкую область применения, чем алгоритм из [1], однако и этот алгоритм не находит решения на некоторых графах. В [3] и [4] показано, что задача поиска максимального целочисленного потока для графов с барьерной, вентильной (при $k \geq 2$), магнитной и монотонной (при $r \geq 2$) достижимостями NP-полна.

В данной работе показано, что задача поиска максимального потока в сети с вентильной достижимостью при $k = 1$ и в сети с ограниченной магнитной достижимостью может быть решена за полиномиальное время. Для доказательства предложены новые способы построения вспомогательного графа, на вспомогательном графе нет ограничений на пути и для поиска максимального потока на нем можно использовать любой алгоритм поиска максимального потока для графов без ограничений на достижимость, например алгоритм Эдмондса-Карпа.

Литература

1. Ерусалимский Я.М. Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения. / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов, М.В. Кузьмина, А.Г. Петросян. –Ростов-на-дону: ЮФУ, 2009 –195с.
2. Водолазов Н.Н. Об особенностях потока в сетях с барьерной достижимостью. / Н.Н. Водолазов. //Вестник ДГТУ, 2008 -Т.8. - №2(37). -С.127-136.
3. Ерусалимский Я.М. NP-полнота задачи нахождения максимального потока в графах с дополнительными ограничениями на достижимость. / Я.М. Ерусалимский, Н.Н. Водолазов. // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понрягинские чтения-XXI» (доп. выпуск). – Воронеж: ВГУ, 2010. – С.14-15.
4. Водолазов Н.Н. Поток на графах с ограничениями на достижимость. / Водолазов Н.Н., Ерусалимский Я.М. // Труды научной школы И.Б. Симоненко. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. – С. 44-57.

**ТЕОРЕМА БОРСУКА-УЛАМА ДЛЯ
ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ИНДЕКСА**

Жук Н.М. (Воронеж)

chuk_n_m@mail.ru

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $S \subset E_1$ — единичная сфера в пространстве E_1 , $a : D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $F : S \rightarrow Kv(E_2)$ — вполне непрерывное нечетное многозначное отображение. Рассмотрим включение $a(x) \in F(x)$. Пусть $N(a, F)$ множество решений этого включения.

Теорема 1. *Если $\dim(Ker a) \geq n > 0$, то множество $N(a, F) \neq \emptyset$ и $\dim(N(a, F)) \geq n - 1$.*

Одним из следствий этой теоремы является следующее утверждение.

Определение 1. *Оператор a называется фредгольмовым оператором положительного индекса, если выполнены следующие условия:*

- 1) $Im(A)$ является замкнутым подпространством пространства E_2 ;
- 2) $\dim(Coim(A)) < \infty$;
- 3) $\dim(Ker(A)) > \dim(Coim(A))$, где $\dim(Ker(A))$ может быть бесконечность.

Теорема 2. *Пусть $a : D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — фредгольмов оператор положительного индекса и $ind(a) \geq n > 0$. Тогда множество $N(a, F) \neq \emptyset$ и $\dim(N(a, F)) \geq n - 1$.*

Литература

1. Жук Н.М. Теорема Борсука-Улама для многозначных отображений // Материалы Воронежской зимней школы.- Воронеж: Издат.-полигр.центр ВГУ, 2011. - 133 с.

**ВЛИЯНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ
СТАЦИОНАРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА
ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СЛОЕ
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ**

Задорожный А.И. (Ростов-на-Дону)

simon@sfnedu.ru

В связанной постановке решается плоская спектральная задача о свободных колебаниях безграничного слоя гравитирующей

экспоненциально стратифицированной несжимаемой электропроводящей жидкости, ограниченной сверху вакуумом, а снизу абсолютно твердым идеальным диэлектриком. На систему наложено однородное стационарное магнитное поле (МП), занимающее всю плоскость ($z \in]-\infty; +\infty[$). Начало системы координат помещено на невозмущенной свободной поверхности (СП) $z = 0$, уравнение дна в безразмерных координатах $z = 1$. Стационарная плотность при равномерной стратификации задается формулой $\rho_0(z) = \exp(-\Gamma z)$ [1]. Коэффициент электропроводности жидкости принимается равным бесконечности. Все неизвестные функции, входящие в линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики [2], представляются в форме $f(x, z, t) = \exp(i(kx + \omega t))F(z)$, где $k = 2\pi D/\Lambda$, D - глубина слоя, Λ - произвольно заданная длина волны. В дальнейшем для упрощения выкладок применяются приближение Буссинеска и приближение "твёрдой крышки отфильтровывающее поверхностную волну.

В конечном итоге после склеивания решений для области, занятой жидкой средой, с решениями уравнений Максвелла для вакуума и диэлектрика приходим к спектральной краевой задаче для ОДУ четвертого порядка

$$A(W^{IV} - k^2W'') + \omega^2 \left[W'' - k^2 \left(1 - \frac{\Gamma}{\omega^2} \right) W \right] = 0,$$

где $A = (H_z^0)^2 / (\rho_0(0)gD)$ - вертикальное число Альфвена, $H_z^0 = const$ - напряженность внешнего МП, $W(z)$ - амплитудная функция вертикальной составляющей скорости, ω - искомое собственное число.

Граничные условия имеют вид:

1) $W(-1) = 0$ - условие непроницаемости дна,

2) $W(0) = 0$ - условие приближения "твёрдой крышки

3) $W'''(-1) - kW'(-1) = 0$, 4) $W'''(0) + kW'(0) = 0$, здесь два последних условия выражают факт непрерывности касательной составляющей тензора магнитных напряжений при переходе через границы раздела сред.

Путем составления отношения Рэлея доказывается утверждение о том, что спектр симметрично расположен на мнимой оси ($\Im(\omega) = 0$). Фундаментальная система решений исходного ОДУ находится вполне элементарно. Частотное (дисперсионное) уравнение для определения получается приравниванием нулю определителя четвертого порядка линейной однородной алгебраической систе-

мы, получающей при удовлетворении граничных условий (1)-(4). Дальнейшее исследование проведено численно. Интересным представляется факт превращения счетного спектра внутренних волн, имеющего место при $A = H_z^0 = 0$ (см. [1]), и превращение его в одну дополнительную к счетному спектру сугубо МГД-волн внутреннюю моду первого порядка, что объясняется эффектом "вмороженности" натянутых магнитных силовых линий в жидкость.

Литература

1. Краусс В. Внутренние волны. - Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
2. Ладиков Ю.П., Ткаченко В.Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах. - М.: Наука, ГРФМЛ, 1983. 248 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БИНГАМА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Залыгаева М.Е. (Воронеж)

m_zalygaeva@rambler.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$ - область, возможно неограниченная. $V = \{u \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} u = 0\}$. $H_0^1(\Omega)^n$ - замыкание пространства финитных в Ω функций в норме $W_2^1(\Omega)^n$. Рассматривается краевая задача для стационарной модели Бингама, описывающей движение несжимаемой жидкости:

$$\sum_{j=1}^n u_j(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}(x) = F_i(x), x \in \Omega, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u(x)|_{x \in \Omega} = 0; \quad u(x)|_{x \in \partial \Omega} = 0, \quad (2)$$

где u - поле скоростей жидкости; F - плотность объемных сил; $T = \{T_{ij}\}_{ij=1}^n$ - тензор напряжений: $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_1 \varepsilon_{ij}(u) + \sigma_{ij}$; $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{ij=1}^n$ - пластическая часть тензора, на которую накладываются следующие ограничения:

$$\|\sigma(x)\|_{\mathbf{R}^{n^2}} \leq \mu_2, \quad \forall x \in \Omega \quad (3)$$

$$\sigma(x) = \mu_2 \frac{\varepsilon(u)(x)}{\sqrt{I(u)(x)}}, \quad I(u)(x) = \sum_{ij=1}^n (\varepsilon_{ij}(u))^2 \neq 0, \quad (4)$$

Из системы (1) при помощи соотношений (3)-(4) получено вариационное неравенство. Далее, вводится понятие слабого решения задачи (1)-(4). Методами, использованными в работах [1], [2] доказано следующее утверждение:

Пусть $n = \{2, 3\}$, Ω - область в \mathbf{R}^n , возможно неограниченная. Для любой правой части $F \in L_2(\Omega)^n$ задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение $u \in V$.

Литература

1. Звягин, В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса // В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко. — М. : УРСС, 2004. — 112 с.

2. Vorotnikov D. A., Zvyagin V. G. On the existence of weak solutions for the initial-boundary value problem in the Jeffreys model of motion of a viscoelastic medium.// Abstract and Applied Analysis, 2004. — №10 (2004). — P. 815-829

ПРИНЦИП ХИКСА ДЛЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Зверева М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)

margz@rambler.ru

Весьма популярное в математической экономике свойство Хикса [1] квалифицирует строгую монотонную зависимость от входных параметров положительно обратимой задачи типа модели Леонтьева при увеличении неотрицательного вектора правой части по одной компоненте. Этот принцип Ю. В. Покорным совместно со Зверевой М. Б. и Гулыниной Е. В. был перенесен на краевую задачу с импульсными параметрами $-(pu')' + qu = f$, $u(0) = u(1) = 0$, когда увеличение f по одной компоненте означало переход к уравнению $-(pu')' + qu = f + \delta(x - s)$, являющемуся аналогом уравнения Эйлера для минимали функционала

$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{pu'^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^1 udF - u(s),$$

где $Q' = q$, $F' = f$, $s \in (0, 1)$, при условиях $u(0) = u(1) = 0$. На случай геометрического графа Γ принцип Хикса может быть перенесен в следующей форме.

Теорема 1. Пусть $u_0(x) \rightarrow \min_{u|_{\partial\Gamma=0}} \Phi(u)$, где

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - u(s),$$

предполагается, что $\inf_{\Gamma} p > 0$, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре, через $\partial\Gamma$ обозначено множество граничных вершин ($s \notin \partial\Gamma$). Тогда $\max_{\Gamma} u_0(x) = u(s)$.

Для случая, когда функционал имеет вид $\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx - u(s)$, эта теорема была установлена в работе [2].

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 при предположении, что $F(x)$ не убывает на каждом ребре, $u_0(x) \rightarrow \min_{u|_{\partial\Gamma=0}} \Phi_1(u)$, где

$$\Phi_1(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} u dF.$$

И пусть $v_0(x) \rightarrow \min_{v|_{\partial\Gamma=0}} \Phi_2(v)$, где

$$\Phi_2(v) = \int_{\Gamma} \frac{pv'^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{v^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} v dF - v(s).$$

Тогда $\max_{\Gamma} \frac{v_0 - u_0}{u_0} = \frac{v_0(s) - u_0(s)}{u_0(s)}$, где $s \notin \partial\Gamma$.

Литература

1. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Наука, 1972. – 179 с.
2. Покорный Ю.В. О свойстве Хикса для вариационной задачи на графе / Ю.В. Покорный, Е.В. Гулынина, Т.В. Перловская // Известия вузов: Математика. – 2008, №10. – С. 48-54

ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Звягин А.В. (Воронеж)

zvyagin@math.vsu.ru

Мы будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи:

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \kappa \operatorname{Div} \left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) + \operatorname{grad} p = f \in \Psi(v), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

где v - вектор-функция скоростей в точках области Ω пространства \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, с границей $\partial\Omega$, p - функция давления, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$ - тензор скоростей деформации, f - плотность внешних сил, ν - кинематический коэффициент вязкости, а κ - время запаздывания. $\Psi : V \rightarrow V^*$, удовлетворит определенным условиям: i_1) имеет непустые, компактные, выпуклые значения; i_2) полунепрерывно сверху и компактно; i_3) глобально ограничено и i_4) слабо замкнуто.

Обозначим через $\mathcal{V} = \{v \in C^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$; V - замыкание \mathcal{V} по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$; X - замыкание \mathcal{V} по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$.

Теорема. Пусть отображение Ψ удовлетворяет условиям i_1) - i_4). Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи (1)-(3).

Обозначим через $\Sigma \subset V \times V^*$ множество всех слабых решений задачи (1)-(3). Рассмотрим произвольный функционал стоимости $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям: j_1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$; j_2) если $v_m \rightarrow v_*$ в V и $f_m \rightarrow f_*$ в V^* , то $\Phi(v_*, f_*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Теорема. Пусть отображение Ψ удовлетворяет условиям i_1) - i_4), а функционал Φ удовлетворяет условиям j_1), j_2). Тогда задача (1)-(3) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Зубова С.П. (Воронеж)

spzubova@mail.ru

Задача стабилизации для динамической системы, замкнутой обратной связью, моделируется как задача построения решения $\bar{x}(t)$ задачи

$$A\dot{\bar{x}}(t) = C\bar{x}(t), \quad (1)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}^0 \quad (2)$$

с условием $\bar{x}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$.

Исследуется стабилизируемость возмущённой системы

$$(A - \varepsilon B)\dot{x}(t, \varepsilon) = Cx(t, \varepsilon), \quad (3)$$

$$x(0, \varepsilon) = \bar{x}^0 + O(\varepsilon), \quad (4)$$

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad t \in [0, \infty)$. Здесь A, B, C — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 , с плотными в E_1 областями определения. Далее: A — фредгольмовский оператор с нулевым индексом, $\dim \text{Ker } A = 1$. Операторы A, B, C , вообще говоря, неограниченные, но ограниченными предполагаются операторы A^-B, A^-C, QB, QC , где A^- — полуобратный (для A) оператор, Q — проектор на $\text{Coker } A$, отвечающий разложению $E_2 = \text{Im } A + \text{Coker } A$.

Рассматривается случай обратимости оператора $A - \lambda C$ при достаточно малых λ , отличных от нуля.

Фазовым пространством для уравнения (3) является некоторое подпространство M_ε , инвариантное относительно оператора $A_{\varepsilon\lambda} = (A - \varepsilon B - \lambda C)^{-1}(A - \varepsilon B)$. Прямое дополнение в E_1 к M_ε — корневое подпространство N_ε . Корневое подпространство оператора $A_\lambda = (A - \lambda C)^{-1}A$ обозначим N_0 .

Теорема. Решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (3), (4) равномерно на $[0, \infty)$ стремится к решению $\bar{x}(t)$ задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $\dim N_\varepsilon = \dim N_0$.

На практике удобнее пользоваться следующим результатом.

Теорема. Решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (3), (4) равномерно на $[0, \infty)$ стремится к решению $\bar{x}(t)$ задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в том и только том случае, когда длины C -жордановых цепочек для A и для $A - \varepsilon B$ одинаковы.

О ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС РАБОТЫ РЕКУПЕРАТИВНОГО ГИДРОПРИВОДА БЕСЧОКЕРНОГО ТРЕЛЕВОЧНОГО УСТРОЙСТВА
Зубова С.П., Раецкая Е.В., Фам Туан Кыонг (Воронеж)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru, tuancuonghd@yahoo.com

Рассматривается дифференциально-алгебраическая система наблюдения, описывающая процесс подъема пачки деревьев бесчокерным трелевочным устройством с рекуперативным гидроприводом, применяемым в лесном хозяйстве для сбора деревьев посредством захвата:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \alpha p(t) - \beta, \quad (1)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \delta v(t) - \epsilon p(t) + \gamma - \mu(t), \quad (2)$$

$$F(t) = kp(t) - lv(t), \quad (3)$$

где $p(t)$ – давление рабочей жидкости гидросистемы, $v(t)$ – вертикальная проекция скорости движения захвата, $F(t)$ и $\mu(t)$ – показания датчиков, коэффициенты $\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \gamma, \kappa, l$ – известные величины.

Вектор-функция $\begin{pmatrix} v(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$ – функция состояния системы, $F(t)$ и $\begin{pmatrix} -\beta \\ \gamma - \mu(t) \end{pmatrix}$ – выходная и входная функции, соответственно.

Система является полностью наблюдаемой (идентифицируемой по Калману), если по известным, реализуемым входной и выходной функциям состояние системы в каждый момент времени определяется однозначно.

Исследование полной наблюдаемости системы (1)-(3) ведется методом каскадной декомпозиции.

Устанавливаются условия, при выполнении которых система (1)-(3) является полностью наблюдаемой. В случае её полной наблюдаемости приводятся формулы для построения функций $p(t)$ и $v(t)$.

**О ВОЗМОЖНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО
ПРОДОЛЖЕНИЯ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ,
ПОРОЖДЕННЫХ РЕГУЛЯРНЫМ ОПЕРАТОРОМ**

Иванов К.С. (Орел)

or100585iks@gmail.com

Существующие результаты (см. например, [1]) для нахождения области аналитичности векторнозначных функций $\varphi(At)(x)$ порожденных регулярным оператором опираются на аналог формулы Коши — Адамара, который позволяет установить аналитичность функции в некотором круге. Но область аналитичности такой функции в большинстве случаев оказывается значительно шире. Здесь мы решим задачу о ее нахождении.

Теорема 1. Векторнозначная функция $\varphi(At)(x)$, $x \in H$, определена и аналитична в области: $D(\varphi(At)) = \{t \in \mathbb{C} : t\sigma(A) \subset D(\varphi)\}$, где

H — локально выпуклое пространство (далее л.в.п.), A — линейный, непрерывный, регулярный оператор, $D(\varphi)$ — область аналитичности скалярной функции $\varphi(t)$, $\sigma(A)$ — спектр оператора A .

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение теоремы.

Пусть $H = H(G)$, $G = \{z : |z - 2| < 1\}$, $A(F(t)) = tF(t)$. Рассмотрим уравнение $Atu(t) = u(t + 1)$. Докажем, что решениями данного уравнения являются операторные Γ -функции:

$u(t) = \Gamma(At)(x)$, $\forall x \in H$. С учетом равенства $t\Gamma(t) = \Gamma(t + 1)$ функция $u(t) = \Gamma(At)(x)$ формально удовлетворяет уравнению. С помощью теоремы 1 определим область существования и аналитичности функции $u(t)$. Функция $u(t)$ порождена оператором A и скалярной функцией $\Gamma(t)$, особые точки которой — полюсы: 0, -1, -2, Так как $t\sigma(A) \subset D(\varphi)$, то $-m \notin t\sigma(A)$, $\forall m = 0, 1, 2, \dots$. То есть, областью аналитичности является область

$$U = \left\{t \notin \frac{m}{G}\right\} = \mathbb{C} \setminus \left\{z : \left|z - \frac{4}{3}n\right| < \left(\frac{2n}{3}\right)\right\} \setminus \{0\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Литература

[1] Громов В. П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. — Орел: ОГУ, 2009. 430с.

[2] Ле Хай Хой. Векторнозначные функции и дифференциальные операторы бесконечного порядка. — Ростов-на-Дону: РГУ, 1981. 54с.

[3] Радыно Я. В. Линейные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах I. Регулярные операторы и их

**ОБ ОПЕРАТОРАХ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ
ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ
НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**

Иноземцев А.И. (Липецк)

inozemcev.a.i@gmail.com

Работа содержит условия действия и непрерывности оператора

$$K = \sum_{i=1}^{2^n} K_i, \text{ где } (K_1 x)(t) = k_1(t)x(t), (K_i x)(t) = \int_{D_i} k_i(t, T_i)x(\tilde{t}_i) dT_i,$$

$1 < i \leq 2^n$, $k_1: D \rightarrow R$, $k_i: D \times D_i \rightarrow R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geq 2$), $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ — вектор n -мерного пространства Лебега. T_i — набор переменных τ_j из i -го подмножества множества $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, вектор \tilde{t}_i получается заменой координат вектора t соответствующими элементами из T_i , D_i — декартово произведение областей определения всех τ_j из T_i .

В случае $n = 2$ систематическое изложение теории линейных операторов K с частными интегралами в различных функциональных пространствах содержится в работах А.С. Калитвина, П.П. Забрейко, В.А. Калитвина, Ю. Аппелля, Е.В. Фроловой и др.

Пусть D — компакт, $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций с нормой $\|x\| = \max_{t \in D} |x(t)|$.

Теорема 1. *Если оператор K действует в $C(D)$, то он непрерывен.*

Определение. *Измеримые функции $k_i(t, T_i)$ ($i = 2, 3, \dots, 2^n$) называются непрерывными в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|t - \tilde{t}\| < \delta$ вытекает неравенство $\int_{D_i} |k_i(t, T_i) - k_i(\tilde{t}, T_i)| dT_i < \varepsilon$, и интегрально ограниченными, если $\sup_D \int_{D_i} |k_i(t, T_i)| dT_i = L_i < \infty$.*

Теорема 2. *Пусть функция $k_1(t)$ непрерывна на D , а ядра $k_i(t, T_i)$ непрерывны в целом и интегрально ограничены. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro—Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КЭЛИ-НЕЙМАНА И ОПЕРАТОРНОЕ СЕМЕЙСТВО $\{\Gamma_\gamma\}$ Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Рассматриваются линейные операторы, действующие в пространстве Крейна. Для оператора A , имеющего точку λ такую, что $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$, $\beta \neq 0$, λ не принадлежит $\sigma_p(A)$, рассмотрим прямое преобразование Кэли-Неймана

$$C = (A - \bar{\lambda} I) \cdot (A - \lambda I)^{-1}.$$

Установлен критерий того, что $C \in \Gamma_\gamma$ для некоторого $\gamma \geq 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы выполнялось условие $C \in \Gamma_\gamma$ для некоторого $\gamma \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы точка βi была точкой регулярного типа для оператора

$$JA - \alpha J.$$

Здесь $J = P_+ - P_-$ - каноническая симметрия пространства Крейна.

В частности, установлен критерий того, что $C \in \Gamma_0$, где Γ_0 - наименьший из классов операторного семейства $\{\Gamma_\gamma\}$. Поясним, что это семейство обладает свойством:

$$0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow \Gamma_{\gamma_1} \subset \Gamma_{\gamma_2}.$$

Теорема 2. Для того, чтобы выполнялось условие $C \in \Gamma_0$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A действовал по формуле

$$Ax = (\alpha I - \beta i J)x \quad \forall x \in D_A,$$

или, что равносильно, по формуле

$$Ax = (\lambda P_- + \bar{\lambda} P_+)x \quad \forall x \in D_A,$$

В заключение напомним, что операторный класс Γ_γ ($\gamma \geq 0$) может быть определен следующим образом:

$C \in \Gamma_\gamma$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$[Ch, Ch] - [h, h] \leq \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \{\|Ch\|^2 + \|h\|^2\} \quad \forall h \in D_C.$$

**ТОЧКИ НУЛЕЙ И СТАЦИОНАРНОСТИ В РЕШЕНИИ
СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**
Исраилов С.В. (Грозный)

Считается, что в бесконечной системе дифференциальных уравнений

$$y_i' + \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(x)y_j = f_i(x, y_1, y_2, \dots), i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

функции $P_{ij}(x), i \neq j$, непрерывны при $x \in [a, b]$, а функции $P_{ii}(x), i = 1, 2, \dots$, непрерывны на интервалах $[a, x_i), (x_i, b], i = 1, 2, \dots$, однако при $x = x_i, i = 1, 2, \dots$, имеют сингулярности в смысле работ [1, 2], связанные следующими обстоятельствами: предполагается, что выполнена одна из групп неравенства

$$\begin{cases} P_{ii}(x) > 0, x \in [a, x_i), \\ -P_{ii}(x) \leq \psi_{ii}(x), x \in (x_i, b], \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} P_{ii}(x) \leq \psi_{ii}(x), x \in [a, x_i), \\ P_{ii}(x) < 0, x \in (x_i, b], i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3)$$

где для любого $\delta_i > 0$

$$\int_{x_i - \delta_i}^{x_i} P_{ii}(t)dt = +\infty, \quad \int_{x_i}^{x_i + \delta_i} P_{ii}(t)dt = -\infty, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$\psi_{ii}(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots$, причем функции $\psi_{ii}(x)$ интегрируемы в смысле Римана на $[a, x_i), (x_i, b]$.

Функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots)$ непрерывны по совокупности аргументов в области $D_i : \{|y_i| \leq d_i, x \in [a, x_i) \cup (x_i, b], i = 1, 2, \dots\}$, удовлетворяют условиям

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots)| \leq \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

где функции $\psi_i(x), i = 1, 2, \dots$, интегрируемы в смысле Римана на $[a, b]$.

Рассматриваются вопросы существования и единственности непрерывного и ограниченного решения $y_i(x), i = 1, 2, \dots$, система (1), непрерывно дифференцируемого при $x \in [a, x_i) \cup (x_i, b], i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего одной из групп условий

$$y_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad y_i'(t_i) = 0, \quad t_i \in (a, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$y_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad y'_i(s_i) = 0, \quad s_i \in (x_i, b), \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Конечные результаты разрешимости задач (1), (5) и (1), (6) получены путем применения теории бесконечных определителей Коха методами [2]. Доказаны теоремы существования и единственности решений этих передопределенных краевых задач.

Литература

[1] КИГУРАДЗЕ И.Т. *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*. Тбилиси: изд. Тбилисского университета, 1975. С.352.

[2] ИСРАИЛОВ С.В., ЮШАЕВ С.С. *Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*. Нальчик, Издательский центр «Эль-фа», 2004, с.445.

СЛУЧАИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исраилов С.В. (Грозный)

Изучается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'_i + \sum_{g=1}^{\infty} P_{ig}(x)y_g = f_i(x, y_1, y_2, \dots), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где функции $P_{ig}(x), i \neq g$, непрерывны на сегменте $[a, b]$, а функции $P_{ii}(x), i = 1, 2, \dots$, непрерывны на интервалах $[a, x_i), (x_i, b]$, но при $x = x_i, i = 1, 2, \dots$, имеют сингулярности в смысле работ [1, 2], т.е. выполняются неравенства

$$P_{ig}(x) \text{sign}(x - x_i) < 0, \quad x \in [a, x_i) \cup (x_i, b], \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

и для любого $\delta_i > 0$

$$\int_{x_i - \delta_i}^{x_i} P_{ii}(+)df = +\infty, \quad \int_{x_i - \delta_i}^{x_i} P_{ii}(+)df = -\infty, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Далее, функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots), i = 1, 2, \dots$ непрерывны по совокупности аргументов в области $D_i : \{|y_i| \leq d_i, x \in [a, x_i) \cup (x_i, b], i = 1, 2, \dots\}$ и удовлетворяют условиям

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots)| \leq \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где функции $\psi_i(x), i = 1, 2, \dots$, интегрируемы в смысле Римана на сегменте $[a, b]$.

Пусть $t_i \in (a, x_i), s_i \in (x_i, b), i = 1, 2, \dots$, фиксированные точки. Речь идет о существовании ограниченного решения $y_i(x), i = 1, 2, \dots$, системы (1) из пространства бесконечномерных непрерывных вектор-функций $C_\infty(a, b)$, непрерывно дифференцируемых при $x \in (a, x_i] \cup (x_i, b), i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего условиям

$$y'_i(t_i) = 0, \quad y'_i(s_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Если такое решение задачи (1),(5) существует, то в силу (1) выполняются функционально-алгебраические равенства

$$\begin{aligned} \sum_{g-1}^{\alpha} P_{ig}(t_i)y_i(t_i) &= f_i(t_i, y_1(t_i), y_2(t_i), \dots), \quad i = 1, 2, \dots, \\ \sum_{g-1}^{\alpha} P_{ig}(s_i)y_i(s_i) &= f_i(s_i, y_1(s_i), y_2(s_i), \dots), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

И наоборот, решение переопределенной краевой задачи (1),(6) является и решением задачи (1),(5) с условиями стационарности. Методами работы [2] путем применения теории бесконечных определителей Коха, задачи (1),(6) с помощью ступенчатых операторов [2] сводится к бесконечной системе функционально-интегральных уравнений и доказываются теоремы существования и единственности ее решения которое, удовлетворяет и условиям $y_i(x_i) = 0, i = 1, 2, \dots$.

Литература

[1] ЧЕЧИК В.А. *Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью*. , Труды Московского математического общества, 1959 т 8. с. 155-196.

[2] ИСРАИЛОВ С.В., ЮШАЕВ С.С. *Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*. Нальчик, Издательский центр «Эль-фа», 2004, с.445.

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, УПЛОТНЯЮЩИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Калабухова С.Н. (Воронеж)

Sv-tik.86@mail.ru

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \rightarrow E_2$ - произвольное отображение. Пусть ψ - монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности в E_2 .

Определение. Будем говорить, что отображение f является (A, ψ) -уплотняющим, если из $\psi(A(\Omega)) \leq \psi(f(\Omega))$ следует, что $\psi(A(\Omega)) = 0$.

Пусть $x_0 \in D(A)$ - некоторая точка, $B_R[x_0]$ - замкнутый шар радиуса R с центром в x_0 , $f : B_R[x_0] \rightarrow E_2$ - (A, ψ) - уплотняющее отображение.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) = f(x). \quad (1)$$

Теорема 1. Если $\|A(x_0) - f(x)\| \leq \frac{R}{k}$, где $k > \|A^{-1}\|$, то уравнение (1) имеет решение.

Следствие 1. Если выполнены следующие условия:

(i) существуют числа $c > 0$ и $d > 0$ такие, что $\forall x \in E$ справедливо неравенство $\|f(x)\| < c\|x\| + d$;

(ii) $c\|A^{-1}\| < 1$.

Тогда уравнение (1) имеет решение.

Литература

[1] Об уравнениях с (A, ψ) -уплотняющими отображениями/ Кабулова С.Н. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ.- Воронеж: Издательство ВГУ. - 2011. - С. 156-157.

СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМОЙ СХЕМЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И.А. КРЫЛОВА Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО ДЛЯ СЛАБОУПРАВЛЯЕМЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Калашникова М.А. (Воронеж)

Margarita.Kalashnikova@mail.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \int_0^T (F^0(x, t) + \varepsilon F^1(x, u, t)) dt \rightarrow \min_u \quad (1)$$

на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x, t) + \varepsilon f^1(x, t, u), \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь $T > 0$ фиксировано, $t \in [0, T]$, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, ε -малый параметр. Проводится сравнение двух методов асимптотического решения задачи (1)-(2), а именно, метода последовательных приближений из [1] и метода прямой схемы асимптотического решения задач оптимального управления, заключающегося

в непосредственной подстановке в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения в виде $x(t) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j x_j(t)$, $u(t) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j u_j(t)$ и определении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики (см.[2]).

Утверждение. Приближение n -го порядка решения регулярно возмущенной задачи (1)-(2), полученное при помощи прямой схемы, отличается от $(n+1)$ -го приближения решения, полученного методом последовательных приближений, на величину порядка ε^{n+1} , то есть $\widehat{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n = O(\varepsilon^{n+1})$, $\widehat{u}_{n+1} - \widetilde{u}_n = O(\varepsilon^{n+1})$, где $\widetilde{u}_n = \sum_{j=0}^n \varepsilon^j u_j$, $\widetilde{x}_n = \sum_{j=0}^n \varepsilon^j x_j$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — n -е приближение решения из метода прямой схемы, а $(\widehat{u}_{n+1}, \widehat{x}_{n+1})$ — $(n+1)$ -ое приближение в методе последовательных приближений, если в качестве начального приближения взять решение вырожденной задачи, получаемой из (1)-(2) при $\varepsilon = 0$.

Литература

- [1] И.А.Крылов, Ф.Л. Черноусько, ЖВМФ 2, №6, 1962г.,с.1132-1139.
 [2] Г.А. Курина Доклады академии наук №1,т. 343, 1995г.,с. 28-32.

О СПЕКТРЕ И ЧАСТЯХ СПЕКТРА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БАРБАШИНА

Калитвин А.С. (Липецк)

kalitvin@mail.ru

Рассматривается задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Барбашина:

$$\lambda \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = \int_S m(t, s, \sigma) \frac{\partial x(t, \sigma)}{\partial t} d\sigma + \int_S n(t, s, \sigma) x(t, \sigma) d\sigma + f(t, s),$$

$$x(t_0, s) = \varphi(s), \quad (1)$$

где λ — числовой параметр, S — компакт в R^n , $t \in [a, b]$, $s \in S$, m, n — измеримые функции, f и φ — непрерывные функции, а под решением задачи понимается непрерывная вместе с x'_t функция x . Предположим, что операторы $My(t, s) = \int_S m(t, s, \sigma)y(t, \sigma) d\sigma$

и $Ny(t, s) = \int_{t_0}^t \int_S n(t, s, \sigma)y(\tau, \sigma)d\tau d\sigma$ действуют в пространстве $C(D)$ -непрерывных на $D = [a, b] \times S$ функций. Тогда задача (1) равносильна рассматриваемому в $C(D)$ интегральному уравнению

$$\lambda y(t, s) = (M + N)y(t, s) + g(t, s) \equiv Ky(t, s) + g(t, s), \quad (2)$$

где $g(t, s) = f(t, s) + \int_S n(t, s, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma$, в том смысле, что их решения связаны равенством $x(t, s) = \int_{t_0}^t y(\tau, s)d\tau + \varphi(s)$. Поэтому под спектром и частями спектра задачи (1) будем понимать спектр и части спектра действующего в $C(D)$ оператора K из уравнения (2).

Через $C(L^1)$ обозначим множество измеримых на $D \times S$ функций, каждая из которых непрерывна по $(t, s) \in D$ как вектор-функция со значениями в $L^1(S)$, через $\sigma(A)$, $\sigma_{ew}(A)$ и $\sigma_{es}(A)$ — спектр, существенный спектр в смысле Вольфа и Шехтера линейного в $C(D)$ оператора A [1], а через $\sigma(M(t))$ — спектр действующего в пространстве $C(S)$ -непрерывных на S функций оператора $M(t)u(s) = \int_S m(t, s, \sigma)u(\sigma)d\sigma$ ($t \in [a, b]$).

Теорема. Если $m, n \in C(L^1)$, то

$$\sigma(K) = \sigma_{ew}(K) = \sigma_{es}(K) = \sigma(M) = \sigma_{ew}(M) = \sigma_{es}(M) = \cup_t \sigma(M(t)).$$

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин В.А. (Липецк)

kalitvin@gmail.com

Рассматривается интегральное уравнение

$$x(t, s) = \int_a^t l(t, s, \tau)x(\tau, s)d\tau + \int_a^t \int_c^d n(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + f(t, s) \equiv (Ax)(t, s) + f(t, s) \quad (t \in [a, b], s \in [c, d]), \quad (1)$$

где l, n и f — заданные непрерывные функции. Уравнение (1) обратимо в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций. Его явное решение находится редко. Применение известных численных схем решения обычных интегральных уравнений требует обоснования, так как оператор A не компактен при ненулевой функции l . Приводимая ниже теорема содержит условия применения к уравнению (1) метода механических квадратур, основанного на замене интегралов по квадратурным и кубатурным формулам.

Отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ разобьем на части точками $t_p = a + ph$ ($p = 0, 1, \dots, P, a + Ph \leq b < (P+1)h$), $s_q = c + qg$ ($q = 0, 1, \dots, Q, c + Qg \leq d < (Q+1)g$). Полагая в (1) $t = t_p$, $s = s_q$ и заменяя первый интеграл по квадратурной формуле $\int_a^{t_p} l(t_p, s_q, \tau)x(\tau, s_q)d\tau = h \sum_{i=0}^p \alpha_{pi} l_{pqi} x(t_i, s_q) + u_{pq}$ с узлами в точках $t = t_p$ и $s = s_q$, а второй интеграл по кубатурной формуле $\int_a^{t_p} \int_c^d n(t_p, s_q, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma = hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + v_{pq}$, где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $n_{pqij} = n(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а u_{pq} и v_{pq} — остатки этих формул, получим систему уравнений относительно неизвестных $x(t_i, s_j)$ ($i = 0, 1, \dots, P; j = 0, 1, \dots, Q$). Отбрасывая остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p, s_q)

$$x_{pq} = \sum_{i=0}^p \alpha_{pi} l_{pqi} x_{iq} + hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq} \quad (2)$$

($p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q$), где $f_{pq} = f(t_p, s_q)$, а δ_{pq} — погрешности вычислений для уравнений системы (2) с x_{pq} .

Теорема. Пусть в квадратурной и кубатурной формулах остатки стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$, $|\alpha_{pi}| \leq A < \infty$, $|\gamma_{pqij}| \leq B < \infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} ($p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q$) может быть найдено по формулам (2), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0 , что при $h < h_0$ и $g < g_0$ $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon$ ($p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q$).

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Канатов А.В., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

alexkanatov@yandex.ru; msumin@sinn.ru

Доклад посвящен конструированию алгоритма двойственной регуляризации [1] применительно к нелинейной параметрической задаче математического программирования общего вида в гильбертовом пространстве,

$$f(z) \rightarrow \inf, \quad g(z) = p, \quad h(z) \leq r, \quad z \in D \subset Z, \quad (1)$$

где $f : D \rightarrow R^1$ — непрерывный функционал, $g : D \rightarrow H$ — вполне непрерывный оператор, $h : D \rightarrow R^m$ — непрерывный векторный функционал, $D \subset Z$ — замкнутое ограниченное множество, $p \in H$, $r \in R^m$ — параметры, Z, H — гильбертовы пространства.

Основная цель конструируемого двойственного формализма для задачи (1), в которой, вообще говоря, может и не быть оптимального элемента, состоит в конструктивном построении в ней минимизирующей последовательности допустимых элементов, под которой понимается минимизирующее приближенное решение в смысле Дж.Варги. В основе этого формализма лежит конструкция модифицированной функции Лагранжа, устройство которой полностью определяется дифференциальными свойствами полунепрерывной снизу функции значений (S -функции) задачи (1). При этом, если функция значений обобщенно субдифференцируема в смысле существования так называемого проксимального субградиента в некоторой точке (p, r) , то в задаче (1) существует и обобщенный вектор Куна-Таккера, что, в свою очередь, обеспечивает наличие седловой точки модифицированной функции Лагранжа. Центральным в обсуждаемом двойственном формализме при конструировании минимизирующей последовательности является предположение о возможности сколь угодно точной минимизации модифицированной функции Лагранжа.

Литература

1. Sumin M.I. Parametric Dual Regularization in a Nonlinear Mathematical Programming. In book: Advances in Mathematics Research, Vol. 11. New-York: Nova Science Publishers Inc., 2010, Chap. 5, pp. 103-134.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА-ШРЕДИНГЕРА

Карпикова А.В.

Рассматривается одномерный оператор Хилла-Шредингера [1]

$$L = A - B : D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[0, 2\pi],$$

который определяется дифференциальным выражением

$$Ly = -y'' - v(t)y,$$

с областью определения $y \in D(L) = \{y \in W_2^2[0, 2\pi] : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)\}$, т.е. областью определения, задаваемой периодическими краевыми условиями. Ком-

плекснозначный потенциал $v \in L_2[0, 2\pi]$, причем $v(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k e^{ikt}$,

$t \in [0, 2\pi]$. Предполагается, что $v_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) dt = 0$.

Спектр и собственные функции самосопряженного оператора A с компактной резольвентой имеют следующий вид: $\sigma(A) = \{n^2, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ — спектр оператора A ; $E_n^0 = \text{Span}\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)}\}$ — собственное подпространство для собственного значения n^2 , $n \neq 0$, где $e_n^{(1)}(t) = e_n(t) = e^{int}$, $e_n^{(2)}(t) = e_{-n}(t) = e^{-int}$; $E_0^0 = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда с помощью метода подобных операторов [2] можно получить

Теорема 1 *Существует такой оператор $\widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$. Тогда для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \setminus \sigma_m^0$ имеет место оценка (равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений)*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_0 \left(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \widetilde{B}) \frac{1}{m(\Omega)} \right) \leq C_0 \alpha(\Omega, \Gamma B) + C_1 (\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, JB) + \alpha(\Omega, B\Gamma B)) \frac{1}{m(\Omega)}.$$

где $C_0, C_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от Ω , $m(\Omega) = \max_{k \in \Omega} k$.

Теорема 2 *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что*

$$\sum_{|n| \geq m+1} \frac{1}{\beta_n^2} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 \cdot n^2 < \infty,$$

где $\beta_n = \alpha_n(\Gamma B) + \alpha_n(JB) + \alpha_n(B\Gamma B)$, $|n| \geq m + 1$.

Литература

1. Джаков П, Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи математических наук. 2006. Т.61. — №4. — с. 77-182.
2. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: изд-во Воронежского государственного университета. 1987. — 165 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т III. — М.: Мир. 1974. — 661 с.

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЁННОЙ
 ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА НА
 ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ ПРИ УСЛОВИЯХ НЕЙМАНА¹**

Карсакова М.С., Прядиев В.Л. (Белгород)

karsariya@rambler.ru, pryadiev@bsu.edu.ru

Пусть Γ – замкнутый и конечный геометрический граф из \mathbf{R}^n , V – множество его вершин. Рассмотрим задачу:

$$(Ly)(x) = f(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $(Ly)(x) = -y''(x)$ при $x \in \Gamma \setminus V$, $(Ly)(x) = - \sum_{h \in T(x)} y'_h(x)$ при $x \in V$; здесь $T(x)$ – множество всех допустимых направлений в точке x относительно Γ , $y'_h(x)$ – правая производная y в точке x по вектору h . Если к вершине b примыкает ровно одно ребро, то уравнение (1) при $x = b$ принимает вид: $y'(b) = 0$, т. е. вид условия Неймана. Этим мы оправдываем термин "задача", говоря об (1).

В случае задачи (1) обобщённая функция Грина $G : \Gamma^2 \rightarrow \mathbf{R}$ должна определяться следующими условиями: 1) для любой $s \in \Gamma$ функция $G(x, s)$, как функция от x , удовлетворяет уравнению

$$(Ly)(x) = -1, \quad x \in \Gamma \setminus \{s\},$$

2) для любой $s \in \Gamma$ функция $G(\cdot, s)$ непрерывна в точке $x = s$, причём $\sum_{h \in T(s)} G'_h(s, s) = -1$ (здесь и далее производная по h – по первому аргументу).

Рассмотрим теперь функцию $H(x, s_1, s_2)$, определяемую условиями: 1) $H : \Gamma^3 \rightarrow \mathbf{R}$ и, как функция по x , удовлетворяет уравнению $(Ly)(x) = 0$, $x \in \Gamma \setminus \{s_1, s_2\}$, 2) $\sum_{h \in T(s_j)} H'_h(s_j, s_1, s_2) = (-1)^j / |\Gamma|$, где

$$|\Gamma| - \text{сумма длин всех рёбер } \Gamma, \quad 3) \int_{\Gamma} H(x, s_1, s_2) dx = 0.$$

Теорема. Если Γ – граф-звезда, то $\int_{\Gamma} H(x, s, \sigma) d\sigma$ является обобщённой функцией Грина задачи (1).

¹Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракты № П693 от 20.05.2010 г., № 02.740.11.0613 от 29.03.2010 г.).

**НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО
ЗНАЧЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ
УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ И КРАЕВЫМИ
УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО ТИПА¹**

Карулина Е.С. (Москва)

karulinaes@yandex.ru

Рассматривается задача Штурма-Лиувилля:

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k^2 y(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функция $q(x) \geq 0$, суммируемая и ограниченная на $[0, 1]$ и удовлетворяет условию: $\int_0^1 q^\gamma(x) dx = 1$, $\gamma \neq 0$. Множество таких функций $q(x)$ обозначим A_γ .

Оценивается минимальное собственное значение λ_1 этой задачи при различных значениях γ и k .

Были получены некоторые оценки для

$$M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q) \text{ и } m_\gamma = \inf_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q):$$

- 1) Если $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, то $M_\gamma = +\infty$.
- 2) Если $\gamma \geq 1$ и $k = 0$, то $M_\gamma = 1$.
- 3) Если $\gamma = 1$ и $k \neq 0$, то $M_1 = \xi_*$, где ξ_* — решение уравнения $\arctg \frac{k^2}{\sqrt{\xi}} = \frac{\xi-1}{2\sqrt{\xi}}$.
- 4) Если $\gamma > 1$, то $m_\gamma = \lambda_1^0$, где λ_1^0 — наименьшее решение уравнения $(k^4 - \lambda) \sin \sqrt{\lambda} + 2k^2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$.
- 5) Если $\gamma > 0$, то $m_\gamma \rightarrow \pi^2$ при $k \rightarrow \infty$.

Подобная задача для уравнения $y'' + \lambda q(x)y = 0$ при условиях $y(0) = y(1) = 0$, $q(x) \in A_\gamma$ рассматривалась в работе [1].

Литература

1. Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // in Operator theory: Advances and Applications. Birkhou-ser, 1996, v.89.

¹Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ N 11-01-00989.

**О ПРИМЕНЕНИИ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА
ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ,
СОДЕРЖАЩЕГО ОПЕРАТОР БЕССЕЛЯ**

Катрахова А.А. (Воронеж)

kafedra@vmfmm.vorstu.ru

В работе рассматривается смешанная краевая задача для сингулярного гиперболического уравнения, содержащего оператор Бесселя. Доказаны существование и единственность классического решения данной задачи, и к её решению применён классический метод Фурье.

Пусть

$$R_+^{n+1} = \{x \in R^{n+1} : x = (x_1, \dots, x_n, y), x' \in R^n, y > 0, y \in R\},$$

Ω^+ – произвольная область пространства R_+^{n+1} , ограниченная гиперплоскостью $\Gamma^0 : y = 0$ и произвольной поверхностью типа Ляпунова Γ^+ , Q_T^+ – цилиндр в пространстве $R_+^{n+1} : Q_T^+ = \Omega^+ \times [0, T]$.

В цилиндре рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Pu = f, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi, \quad u|_{\Gamma^+ \times [0, T]} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma^0 \times [0, T]} = 0, \quad (2)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции, $f(x, t)$ – функция, заданная в цилиндре $Q_T^+ : x \in \Omega^+, t \in [0, T]$;

$$P(D_{x'}, B_y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + bB_y + c, \quad (3)$$

$$B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad k \geq 0, c \leq 0$$

Предполагается, что $P(D_{x'}, B_y)$ – оператор B – эллиптического типа [1] и существует $\delta > 0$ такое, что для любого $q = (q_1, \dots, q_{n+1})$, $|q| \neq 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} q_i q_j + b q_{n+1}^2 \geq \delta |q|^2, \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (4)$$

Для равномерно эллиптического оператора $P(D_x, B_y)$ ($k = 0$) обоснованию метода Фурье посвящено большое количество работ. полные исследования содержатся в работах Ладыженской О.А., при этом наиболее общие результаты получены В.А. Ильиным. В работах Киприянова И.А. достаточно полно исследована задача Коши для волнового уравнения, имеющего особенности вида (3), как по времени, так и по пространственным переменным.

В данной работе получены достаточные условия на границу области, начальные функции и правую часть уравнения (1), при которых существует единственное классическое решение смешанной задачи (1)-(2).

Доказано, что общее решение задачи (1)-(2) представимо рядом Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \nu_p(x) \left(\varphi_p \cos \sqrt{\lambda_p} t + \frac{\psi_p}{\sqrt{\lambda_p}} \sin \sqrt{\lambda_p} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^t f_p(\tau) \sin \sqrt{\lambda_p} (t - \tau) d\tau \right), \quad (5)$$

где $\nu_p(x)$ – собственные функции, а λ_p – соответствующие собственные значения краевой задачи:

$$P\nu + \lambda\nu = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad \nu|_{\Gamma^+} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial y} \Big|_{\Gamma^0} = 0, \quad (6)$$

символами φ_p , ψ_p , $f_p(\tau)$ обозначены коэффициенты Фурье разложения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$ в ряд по системе собственных функций $\{\nu_p(x)\}$ ($p = 1, 2, \dots$).

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. – М.: Наука, 1997.
2. Катрахова А.А., Сазонов А.Ю., Фомичёва Ю.Г. О существовании и единственности классического решения смешанной задачи для сингулярного гиперболического уравнения, содержащего оператор Бесселя // Вестник Тамбовского университета, 2009, т.14, Вып.6.

О ЗАРОЖДЕНИИ ЛИНИЙ НЕГЛАДКОСТИ В ОПТИМАЛЬНЫХ ВИНТОВЫХ ПАРАХ ВИНТОВЫХ НАСОСОВ

Ковалева М.И., Костин В.А., Сапронов Ю.И. (Воронеж)
marinkov@mail.ru, vlkostin@mail.ru, yusapr@mail.ru

Винтовая поверхность — это геометрическое место точек в пространстве, полученное в результате "вихревого вращения" заранее заданного профиля (поперечного сечения винта), определяемого параметрическим уравнением $z = f(\varphi)e^{i\varphi}$ (для контура с однозначным профилем) или более общим уравнением $z = f(s)e^{i(s+\beta(s))}$, где $f(s), \beta(s)$ — периодические функции. Контур поперечного и продольного сечений винта взаимно определяют друг друга и задаются парой профильных функций $f(s), \beta(s)$. Если профильная функция $f(\varphi)$ имеет (наименьший) период ω , $0 < \omega < 2\pi$, то $\omega = \frac{2\pi}{n}$, где n — целое (положительное) число, называемое количеством заходов винта (n -заходный винт). Количество заходов совпадает с количеством зубцов винта в его поперечном сечении. Разность между (абсолютными) максимумом и минимумом f называется высотой зубца в поперечном сечении винта.

Компьютерное моделирование винтовых пар в винтовых насосах выявляет образование линий негладкости на поверхности второго винта, сопряженной к (первой) гладкой винтовой поверхности (с ростом высоты винтового зубца). Математическое объяснение этого феномена (зарождения линий негладкости) представляет значительный интерес для теории и практики изготовления насосов [1,2]. Доклад посвящен тому, чтобы показать возможность исчерпывающего изучения образования и развития линий негладкости в рамках более широкой задачи — изучения нелокальных бифуркаций регрессивных точек на плоском контуре, сопряженном к гладкому контуру. При таком подходе возникает естественная теоретическая база для изучения строения (сопряженной) винтовой поверхности вблизи линии негладкости при конечных приращениях высоты зубца в поперечном сечении винта.

Литература

1. Балденко Д.Ф. и др. Винтовые насосы. М.: Машиностроение, 1982. - 228 с.
2. Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И., Семенов С.М. Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей. Воронеж: ВорГУ. 2005. - 177 с.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ПАРАМЕТРОВ В РЯДЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Козлов А.В. (Воронеж)

nk@techno-r.ru

Если параметры x, y, z , характеризующие состояние исследуемого процесса соотношением $z = z(x, y)$ взаимозависимы, то вероятные варианты взаимосвязей $y = y(x)$ можно получить из уравнения

$$\left[\frac{\delta z}{\delta x} \left(\psi + \frac{dy}{dx} \right) + a \frac{\delta z}{dy} \left(1 + \psi \frac{dy}{dx} \right) \right] \left\{ \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)^2 \left(\psi + \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\delta z}{\delta x} \frac{\delta z}{\delta y} \right. \\ \left. \left[1 + 2\psi \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + \frac{dy}{dx} \left(\frac{\delta z}{\delta y} \right)^2 \left(2\psi^2 + \psi \frac{dy}{dx} + b \right) \right\} = 0$$

В каждом интервале изменения параметров определяется единственный вариант решения (взаимосвязи), при котором критерий его устойчивости (здесь не приводится) минимален. При смене варианта взаимосвязи (переходе решения на более устойчивую ветвь) в исследуемом процессе возможны качественные изменения (фазовые переходы и другие). Предложенный метод позволяет:

- привести одно из решений полученного нами уравнения (содержит произвольную функцию ψ) в соответствие с общеизвестным для рассматриваемой задачи, что "гарантирует" его достоверность в данном случае;

- определить интервалы и условия, при которых произойдут смены уравнений взаимосвязи;

- получить новые решения, не определяемые общеизвестными способами (предложенное уравнение имеет разные варианты решения).

Кроме того (по аналогии с выводом полученного нами решения трехпараметрической системы) можно решить подобную задачу с большим числом параметров и попытаться свести их количество к некоторому пределу.

Таким образом, предложенный метод может иметь определенное прикладное значение, однако некоторые особенности его применения еще полностью не раскрыты, поэтому надеемся на сотрудничество с заинтересованными сторонами: их редакцию, взаимные консультации, совместную разработку новой теории и публикацию полученных результатов, другие формы.

ИНТЕГРИРОВАННЫЕ УРОКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ ТЕМ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Колесникова И.В. (Воронеж)

kolinna@inbox.ru

Проблема интеграции обучения в школе важна и современна как для теории, так и для практики. Её актуальность продиктована новыми социальными запросами, предъявляемыми к школе и обусловлена изменениями в различных сферах жизни. Современная система образования направлена на формирование высоко образованной, интеллектуально развитой личности с целостным представлением картины мира, с пониманием глубины связей явлений и процессов, представляющих данную картину. Предметная разобщённость становится одной из причин фрагментарных знаний выпускника школы. Таким образом, самостоятельность предметов, их слабая связь друг с другом порождают серьёзные трудности в формировании у учащихся целостной картины мира. Одной из важнейших проблем является заметное снижение интереса учащихся к предметам естественно-математического цикла, что во многом обусловлено сложностью восприятия математики. Введение в школьную программу информатики дало возможность снять многие возникающие в процессе обучения трудности, вызвать интерес у учащихся к математическим проблемам, показать возможность их решения новыми, нестандартными методами: алгоритмизацией решения сложных задач на компьютере, возможностью смоделировать и наглядно увидеть на экране дисплея сложные математические процессы и управлять этими процессами. Помимо этого, комплексный подход к обучению естественно-математическим предметам на основе информатики позволяет решить и проблемы обучения самой информатики. Например, предлагаемые в учебниках информатики задачи зачастую не имеют реальной практической ценности, выглядят формальными и не вызывают интереса у школьников. Использование же компьютера по его прямому назначению (для решения практических задач, выполнения громоздких и малоинтересных вычислений, обработки большого объёма информации и т.д.) усиливает практическую направленность как математики, так и информатики. Кроме того, это позволяет отразить современные методы исследований в этих отраслях научного знания, а также способствует устойчивому интересу учащихся к изу-

чаемым предметам. Практика показывает, что нередко одно и то же понятие в рамках каждого конкретного предмета определяется по-разному – такая многозначность научных терминов затрудняет восприятие учебного материала. Несогласованность предлагаемых программ приводит к тому, что одна и та же тема по разным предметам изучается в разное время. Эти противоречия легко снимаются в интегрированном обучении, которое решает также ещё одну проблему – экономии учебного времени.

Условно можно выделить три группы проектов в рамках интегрированных уроков:

1) проекты, создаваемые на уроках с целью изучения определенных тем курса информатики. К работе над проектом привлекаются все учащиеся. Каждый ученик (или двое, если работают вместе за компьютером) создаёт свой вариант проекта. Проект создается под контролем учителя. Взаимосвязь с другими предметами осуществляется посредством использования тем, интересных для учащихся, с целью их мотивации. Работа над проектом может быть достаточно длительной, прерываться для закрепления отдельных умений и навыков.

2) проекты, создаваемые на уроках с целью обобщения, повторения, систематизации изученного материала. В рамках данной работы учащиеся самостоятельно подбирают материал, пишут сценарий, создают и защищают проект. Роль учителя сводится к консультации, помощи в подборе материала, устранении возникающих затруднений и ошибок. К работе над данным типом проектов необходимо широко привлекать учителей-предметников. В результате работы могут быть созданы ценные учебные пособия, дети применят имеющиеся знания в других условиях, получат дополнительный стимул к дальнейшему изучению предметов.

3) проекты, создаваемые группами и отдельными учащимися на уроках и во внеурочное время "по заказу" преподавателей. К данным проектам целесообразно привлекать учащихся, опережающих прохождение программы, быстрее справляющихся с заданиями на уроке. Обычно у них остаётся достаточно времени, которое можно посвятить работе над проектом. Здесь учащиеся могут проявить свою индивидуальность. Данные проекты, безусловно, являются наиболее интересными и оригинальными.

Преимущества интегрированных уроков заключаются в том, что они:

- способствуют повышению мотивации обучения, формирова-

нию познавательного интереса учащихся и рассмотрению явления с нескольких сторон;

- в большей степени, чем обычные уроки, способствуют развитию речи, формированию умения учащихся сравнивать, обобщать, делать выводы, снимают перенапряжение, перегрузку;

- не только углубляют представление о предмете, расширяют кругозор, но и способствуют формированию разносторонне развитой, гармонически и интеллектуально развитой личности;

- интеграция является источником нахождения новых связей между фактами, которые подтверждают или углубляют определенные выводы, наблюдения учащихся в различных предметах.

Структура интегрированных уроков отличается: четкостью, компактностью, сжатостью, логической взаимообусловленностью учебного материала на каждом этапе урока, большой информативной емкостью материала.

Интеграция учебных предметов – перспективное средство совершенствования учебного плана и всей системы образования.

Практика показала плодотворность интеграции и выявила перспективы дальнейшего развития и совершенствования такого подхода к обучению. На данном этапе разрабатывается единая альтернативная программа обучения математике, информатике, при введении которой интеграция будет являться дидактическим принципом обучения. На этом, продвинутом, этапе интегрированного обучения главной целью будет формирование научного стиля мышления учащихся. Такое обучение возможно лишь при условии создания специализированного класса, набор учащихся в который должен проводиться на конкурсной основе.

Интеграция - необходимое условие современного учебного процесса, её возможная реализация в рамках какой-либо школы была бы переходом этой школы на новый качественный уровень образования.

Литература

1. Браже, Т.Г. Интеграция предметов в современной школе / Т.Г. Браже // Литература в школе. - 2004. - № 5.
2. Воронина, Т. П. Образование в эпоху новых информационных технологий / Т. П. Воронина.- М.: АМО, 2008.
3. Глинская, Е. :А. Межпредметные связи в обучении / Е.А. Глинская, С.В. Титова. - 3-е изд. - Тула: Инфо, 2007.
4. Данилюк, Д. Я. Учебный предмет как интегрированная система /Д.Я. Данилюк // Педагогика. - 2007. - № 4.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ПОСРЕДСТВОМ СОЗДАНИЯ УЧАЩИМИСЯ ПОСОБИЙ ПО ПРЕДМЕТУ

Колесникова И.В. (Воронеж)

kolinna@inbox.ru

В процессе обучения всегда привлекают внимание новые и оригинальные формы, методы и подходы к изложению учебного материала, с целью увлечения школьников предметом, повышения эффективности освоения учебного материала, а современные информационные технологии позволяют достичь более высокого уровня в изучении предмета. Инновационные преобразования в процессе обучения касаются, прежде всего, создания благоприятных условий для развития активности учащихся, т.е. составления таких развивающих заданий, которые приводят их к самостоятельному открытию, приобретению нового опыта и к дальнейшему использованию результатов этого опыта в своей деятельности. Примером такой работы учеников является создание пособий по предмету.

Начинать создавать пособия по математике можно в любом классе. Для этого необходимо использовать приёмы группировки, классификации, составления плана, выделения главных моментов, "сжатие" материала, представление информации в наглядном виде с помощью условных знаков, символов, отражающих не только отдельные элементы этих знаний, но и взаимосвязь между ними.

Основная идея состоит в том, что пособия по предмету создают для себя сами ученики. Это тоже наглядность, справочный материал, сжатый конспект, подбор заданий по определённой теме, сборник задач, но созданные учениками. Уровень сложности деятельности учеников растёт от класса к классу, растёт и уровень самостоятельности, творчества и качества выполняемых работ. Первоначально это может быть оформление правил, основных положений, изучаемой темы, формулы и т.д. Ученики с удовольствием применяют свои способности к оформлению, проявляя своё творчество. Следующий этап, например, составить подсказку, шпаргалку самому себе по изучаемому вопросу. Затем это, может быть, сжатый конспект, по представленному учителем плану, затем без плана

учителя. Задание усложняется, для краткого изложения предлагается целая тема или несколько тем. Ученики готовят сами себе справочный материал, обобщая и систематизируя, устанавливая логические взаимосвязи. Материал усваивается без особых усилий, а учащиеся получают эстетическое и моральное удовлетворение. Уже к концу девятого класса, у каждого ученика есть собственное пособие для подготовки к ГИА, которое он знает вдоль и поперёк. Прделанная учениками работа должна обязательно иметь некоторую оценку.

Так же большое значение имеет то, что творческая самостоятельная деятельность отдельных учеников, может стать составной частью коллективной работы группы учащихся или целого класса.

Очень полезно создать пособия по математике в 11 классе для подготовки к ЕГЭ. Это тетрадь или блокнот с печатной основой. Работа ведётся в соответствии с программой. Главная задача пособия – подготовка учащихся к сдаче ЕГЭ. Составление данного пособия – один из способов повторения и систематизации изученного материала по математике за 8-11 классы. Содержание включает в себя фиксацию основных теоретических положений и формул, образцы решения некоторых задач, задачи для самостоятельной и контрольной работы; задания творческого характера и задачи повышенной сложности.

Также в пособие можно включить несколько вариантов контрольной работы. Задания творческого характера предполагают более глубокую проработку изученного, использование дополнительных источников (по желанию учеников). Анализ таких работ даёт возможность оценить их ЗУН с большей степенью объективности.

Такое методическое пособие может быть выполнено в текстовом редакторе Microsoft Word (или Openoffice.org Writer – его бесплатная версия) с помощью объекта Microsoft Equation 3.0 или MathType (для набора формул). Наглядность можно реализовать с помощью графических редактор (Paint, Word, Visio) и программы создания презентаций (Power Point).

Применяя нетрадиционные методы работы (в частности, с использованием современных технологий) и новые педагогические приемы, можно добиться активизации познавательной активности учащихся, повышения эмоциональной насыщенности урока, которая помогает раскрыться способностям учеников, тем самым переводя образовательный процесс на более высокий уровень.

ПОСТРОЕНИЕ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРУГЛОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Костина Т.И. (Воронеж)

tata_sti@rambler.ru

Формы упругих равновесий круглой пластины, равномерно сжатой по краю (вдоль нормалей), в модели Кармана описывается системой двух уравнений [1]:

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w - [w, \varphi] = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2} [w, w] = 0, \quad (1)$$

в которой Δ — оператор Лапласа, $[w, \varphi] = w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$, w — функция прогиба, φ — функция напряжения, λ — параметр нагрузки. Уравнение (1) дополняется краевыми условиями, рассматривается случай жесткого закрепления: $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = w = w_x = w_y = 0|_{\partial\Omega}$, здесь $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Уравнение (1) при данных краевых условиях является уравнением Эйлера — Лагранжа экстремалей функционала полной энергии $V(w, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (|\Delta w|^2 - |\Delta \varphi|^2 - \lambda |\nabla w|^2 - \varphi [w, w]) dx dy$. Следуя схеме Ляпунова — Шмидта, можно разыскивать ключевую функцию в виде:

$$W(\xi) \equiv V(u + \Phi(\xi)), \quad u := \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \quad \Phi(\xi) \in N^\perp,$$

где $e_0 = 1$, e_1, e_2 — функции Бесселя, $N = \text{Lin}(e_1, e_2)$. Основная трудность заключается в построении приближений $\tilde{\Phi}(\xi)$ к функции $\Phi(\xi)$. Рассматривается два метода ее построения [2]. Первый метод кратчайшего спуска (по градиенту). Вторым методом являются галеркинские аппроксимации. При этом в качестве набора базисных функций берем стандартную последовательность функций Бесселя $\{e_k\}$ [3]. В результате применения указанных методов можно получить (сходящиеся) итерационные последовательности, позволяющие строить ключевую функцию с любой требуемой точностью.

Литература

1. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — М.: Наука. 1989. — 376 с.

2. Борзаков А.Ю., Костина Т.И., Сапронов Ю. И. К нелокальному бифуркационному анализу вариационных краевых задач// Математические модели и операторные уравнения. Том 6. Воронеж: ВорГУ, 2009. — С. 8-22.

ОБЪЁМЫ МНОГОГРАННИКОВ В КЛАССИЧЕСКИХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Краснов В.А. (Коломна)
krasnov-vladimir99@rambler.ru

Мы рассматриваем задачу вычисления объёмов многогранников в классический неевклидовых пространствах S^n и Λ^n постоянной кривизны $\chi = +1$ и $\chi = -1$ соответственно.

Основополагающее значение для вычисления объёмов неевклидовых многогранников имеет формула Шлефли для дифференциала объёма.

Пусть конечный выпуклый многогранник $P \subset X$, где $X = S^n$ или $X = \Lambda^n$. При этом P непрерывно деформируется, не изменяя своего комбинаторного строения, а двугранные углы при этом изменяются дифференцируемым образом. Тогда, согласно формуле Шлефли, дифференциал объёма находится по формуле:

$$\chi \cdot dV(P) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\dim F = n-2} V(F) \cdot d\alpha_F$$

С помощью соответствующего интегрирования формулы Шлефли можно получить выражения для объёмов конкретных видов многогранников.

Во второй половине XX века были основательно изучены классы специальных аналитических функций, которые получили название полилогарифмов:

$$Li_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}, x \in [-1; 1], n \geq 2$$

В пространствах S^3 и Λ^3 объёмы многогранников выражаются в терминах дилогарифма Эйлера $Li_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$. Что касается пространств размерности $n = 4$, то здесь при вычислении объёмов появляется функция трилогарифм $Li_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^3}$. А вот для пространств размерности $n \geq 5$ удобных и эффективных формул, выражающих объёмы многогранников в терминах полилогарифмов, до сих пор не получено. Но, используя формулы Аомото, выражающие объёмы неевклидовых многогранников через значения

итерированных интегралов Чена от дифференциальных форм с логарифмическими полюсами (гиперлогарифмические функции), мы в некоторых случаях можем свести их к явно выписанным выражениям, содержащим только значения полилогарифмов $Li_n(z)$.

Литература

1. Лобачевский Н.И. Воображаемая геометрия // Полн. собр. соч. Т. 1: Учен. зап. Каз. Ун-та. 1835.
2. Винберг Э.Б. Объёмы неевклидовых многогранников // УМН 1993. Т. 48. № 2. С. 17–46.
3. Aomoto K. Analytic structure of Schläfli funktion // Nagoya Math. J. 1977. V. 68. P. 1–16.
4. Aomoto K. Addition theorem of abel type for hyper-logarithms // Nagoya Math. J. 1982. V. 88. P. 55–71.
5. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. № 1. P. 307–332.

ОПЕРАТОР ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА И ИМ

ДВОЙСТВЕННЫМ НА \mathbb{R}^1

Крысанова А.В. (Воронеж)

nastasya yat@mail.ru

Следуя [1], обозначим через $S_r^*(\mathbb{R}^1)$ класс локально интегрируемых на \mathbb{R}^1 со степенью $r \geq 1$ функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{S_r^*} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x+s)|^r ds dx \right]^{\frac{1}{r}}.$$

Пространства $S_r^*(\mathbb{R}^1)$ являются двойственными (см [2]) пространствам Степанова $S_p(\mathbb{R}^1)$ с нормой

$$\|g\|_{S_p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \left[\int_0^1 |g(x+s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 \right).$$

Рассматриваются операторы Штурма-Лиувилля l_1 и l_2 , заданные дифференциальным выражением

$$l = u''(x) + q(x)u(x), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

и областями определения

$$D(l_1) = \{\varphi \in S_p, \quad l\varphi \in S_p\}; \quad D(l_2) = \{\varphi \in S_r^*, \quad l\varphi \in S_r^*\};$$

Theorem 1 а) Если в дифференциальном выражении $l q \in S_r^*(\mathbb{R}^1)$, то l_1 является генератором аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ полугруппой $U(z, l_1)$, действующей в пространствах S_p , $(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1)$.

б) Если $q \in S_p(\mathbb{R}^1)$, то l_2 является генератором аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ полугруппой $U(z, l_2)$, действующей в пространствах S_r^* .

Литература

[1] А.В. Костин, В.А. Костин. S_p -пространства Степанова и двойственные им/ Математические модели и операторные уравнения/ Т.6/ Воронеж: ВорГУ, 2009 - С.63-73.

[2] А.В. Крысанова. Мультипликативные неравенства для норм пространств, двойственных пространствам Степанова/ Математические модели и операторные уравнения/ Т.6/ Воронеж: ВорГУ, 2009 - С.74-79.

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

Курина Г.А. (Воронеж)

kurina@math.vsu.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u, x) = \frac{1}{2} \left\{ \langle C_1 E_1 x_1(t_1) - C_2 E_2 x_2(t_1), F(C_1 E_1 x_1(t_1) - C_2 E_2 x_2(t_1)) \rangle \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\langle x_j(t), W_j(t) x_j(t) \rangle + \langle u_j(t), R_j(t) u_j(t) \rangle \right) dt \right\} \quad (1)$$

на траекториях двух последовательно действующих систем

$$(E_j x_j)'(t) = A_j(t) x_j(t) + B_j(t) u_j(t), \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$E_1 x_1(0) = x^0, \quad E_2 x_2(T) = x^T, \quad (3)$$

где $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$, значения t_j и $x^0 \in \text{Im}E_1, x^T \in \text{Im}E_2$ фиксированы, $F = F^* \geq 0$, $W_j(t) = W_j(t)^* \geq 0$ и $R_j(t) = R_j(t)^* > 0$; операторы F, C_j и E_j не зависят от t , а остальные операторы непрерывны по t на соответствующих отрезках $[t_{j-1}, t_j], j = 1, 2$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в соответствующем пространстве.

Приводится алгоритм решения задачи (1)–(3), основанный на последовательном решении восьми начальных задач для дифференциально-алгебраических уравнений. При этом оптимальная траектория, оптимальное управление и минимальное значение критерия качества определяются соответственно формулами:

$$\begin{aligned} x_{j*}(t) &= z_j(t) - V_j(t)\varphi_j(t), \\ u_{j*}(t) &= -R_j(t)^{-1}B_j(t)^*(K_j(t)x_{j*}(t) + \varphi_j(t)), \quad j = 1, 2, \\ J(u_*, x_*) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle x^0, K_1(0)E_1^+x^0 + \varphi_1(0) \rangle - \langle x^T, K_2(T)E_2^+x^T + \varphi_2(T) \rangle \right). \end{aligned}$$

Здесь E_j^+ означает обратный оператор к оператору $E_j = (I - Q_j)E_j(I - P_j) : \text{Im}E_j^* \rightarrow \text{Im}E_j$, P_j и Q_j означают ортогональные проекторы пространства X_j на $\text{Ker}E_j$ и $\text{Ker}E_j^*$, соответствующие разложениям $X_j = \text{Ker}E_j \oplus \text{Im}E_j^* = \text{Ker}E_j^* \oplus \text{Im}E_j$; $K_j(t)$, $V_j(t)$, $z_j(t)$, и $\varphi_j(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j], j = 1, 2$, являются соответственно решениями следующих задач (4), (5); (6), (7); (8), (9) и (10), (11):

$$(E_j^*K_j)'(t) = -K_j(t)^*A_j(t) - A_j(t)^*K_j(t) + K_j(t)^*S_j(t)K_j(t) - W_j(t), \quad (4)$$

$$S_j(t) := B_j(t)R_j(t)^{-1}B_j(t)^*,$$

$$E_j^*K_j(t_1) = 0; \quad (5)$$

$$(E_jV_j)'(t) = M_j(t)V_j(t) + V_j(t)^*M_j(t)^* + S_j(t), \quad (6)$$

$$M_j(t) := A_j(t) - S_j(t)K_j(t),$$

$$E_1V_1(0) = 0, \quad E_2V_2(T) = 0; \quad (7)$$

$$(E_jz_j)'(t) = M_j(t)z_j(t), \quad (8)$$

$$E_1z_1(0) = x^0, \quad E_2z_2(T) = x^T; \quad (9)$$

$$(E_j^*\varphi_j)'(t) = -M_j(t)^*\varphi_j(t), \quad (10)$$

$$(I + \tilde{C}_1^*F\tilde{C}_1\tilde{V}_{11}(t_1))E_1^*\varphi_1(t_1) - \tilde{C}_1^*F\tilde{C}_2\tilde{V}_{21}(t_1)E_2^*\varphi_2(t_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{C}_1^* F(\tilde{C}_1 z_1(t_1) - \tilde{C}_2 z_2(t_1)), \\
\tilde{C}_2^* F \tilde{C}_1 \tilde{V}_{11}(t_1) E_1^* \varphi_1(t_1) + (I - \tilde{C}_2^* F \tilde{C}_2 \tilde{V}_{21}(t_1)) E_2^* \varphi_2(t_1) \\
&= \tilde{C}_2^* F(\tilde{C}_1 z_1(t_1) - \tilde{C}_2 z_2(t_1)), \tag{11} \\
\tilde{V}_{j1}(t_1) &:= (I - P_j) V_j(t_1) (I - Q_j) E_1^{*+}, \quad \tilde{C}_j := C_j E_j.
\end{aligned}$$

Доказано, что если оператор

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^* F \tilde{C}_1 & \tilde{C}_1^* F \tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_2^* F \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2^* F \tilde{C}_2 \end{pmatrix},$$

действующий в $\text{Im} E_1^* \oplus \text{Im} E_2^*$, обратим, то значения $E_1^* \varphi_1(t_1)$ и $E_2^* \varphi_2(t_1)$ однозначно определяются из (11).

При некоторых условиях установлена однозначная разрешимость всех вспомогательных задач.

В случае $E_1 = E_2 = I$, где I - единичный оператор, подобные результаты приведены в [1].

Литература

1. Г. А. Курина, И. Чоу. ДАН, 2011, том 437, № 1, с. 28-30.

О ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ МАЛКИНА

Кутищев И.Н., Письменный Н.А., Рачинский Е.В.
(Воронеж)

iliakou@rambler.ru, nikitosp@bk.ru, RachinskyEV@mail.ru

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1 \varphi_1(x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2 \varphi_2(x_1), \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1 : R^n \rightarrow R^n$, $f_2 : R^m \rightarrow R^m$, $\varphi_1 : R^m \rightarrow R^n$, $\varphi_2 : R^n \rightarrow R^m$. $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ - непрерывно-дифференцируемые функции; μ_1, μ_2 - малые параметры. Предполагается, что предельные уравнения $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ и $\dot{x}_2 = f_2(x_2)$, полученные из соответствующих уравнений системы (1), занулением параметров μ_1 и μ_2 , имеют T_1 периодическое решение $x_1 = \psi_1(t)$, и T_2 периодическое решение $x_2 = \psi_2(t)$. Так как эти уравнения автономны, то $\psi_1(t + h_1)$ и $\psi_2(t + h_2)$ тоже будут решениями предельных уравнений. Пусть единица простое собственное значение как оператора сдвига по траекториям уравнения

$$\dot{y}_1 = f_1'(\psi_1(t)) y_1 \tag{2}$$

за время T_1 , так и оператора сдвига по траекториям уравнения

$$y_2 = f_2'(\psi_2(t))y_2 \quad (3)$$

за время T_2 .

Предположим, что скалярные произведения $\langle \varphi_1(\psi_2), \xi_1 \rangle$, $\langle \varphi_2(\psi_1), \xi_2 \rangle$, где ξ_1 и ξ_2 - периодические решение уравнений, сопряженных к (2) и (3), имеют ограниченные первообразные.

Пусть для функций $P_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \varphi_1(\psi_2(s + h_1)), \xi_1(s) \rangle ds$, $P_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \varphi_2(\psi_1(s + h_2)), \xi_2(s) \rangle ds$ выполнены условия $\frac{dP_1}{dh_1} \neq 0$, $\frac{dP_2}{dh_2} \neq 0$.

Теорема 3 Пусть $c_1, c_2 > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{3}{4}$ некоторые константы, и μ_1, μ_2 меняются во множестве описываемом неравенствами: $c_1 \mu_1^{(2-\varepsilon)} < \mu_2 < c_2 \mu_1^{(1/2+\varepsilon)}$. Пусть также выполнены перечисленные выше условия. Тогда система уравнений (1) имеет единственное, почти-периодическое решение, при всех достаточно малых значениях параметров μ_1 и μ_2 .

Литература

- [1]. И.Г.Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1956, стр. 424-435.
[2]. Vladimir Burd, *Method of averaging for differential equations on an infinite interval*, Chapman and Hall/CRC, Florida, 2007, стр. 95-125.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В СМО С ОДНИМ ПРИБОРОМ И СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Кучер Н.А., Головкин Н.И. (Владивосток)

cdo@psue.ru

В докладе предлагается доказательство существования и единственности стационарного режима в системах массового обслуживания с конечным накопителем, дважды стохастическим входным пуассоновским потоком заявок со скачкообразной интенсивностью входного потока с экспоненциальным обслуживанием с параметром μ и одним обслуживающим прибором. Входной поток заявок имеет скачкообразную интенсивность $\lambda(t)$, изменяющуюся на отрезке

$[a, b]$. Интервалы постоянства процесса $\lambda(t)$ экспоненциально рас-
пределены с параметром α . Максимальное число заявок СМО равно
 $N = N_0 + 1$. Относительно нестационарных характеристик чис-
ла заявок $Q_k(t, x)$ получена система интегро-дифференциальных
уравнений.

Система уравнений относительно нестационарных характери-
стик числа заявок в стационарном режиме представлена в матрич-
ной форме

$$R + A^{-1}\alpha\Phi R = G, \quad (1)$$

где $A = xI_- - (x + \mu + \alpha)I + \mu I_+$ матрица размерности $N \times N$, Φ –
интегральный оператор, R – неизвестный вектор-функций. Систе-
ма (1) является неоднородным векторным уравнением Фредголь-
ма второго рода. Матричный интегральный оператор $\alpha A^{-1}\Phi$ был
исследован в функциональном пространстве L^N . При этом была
получена оценка $\|\alpha A^{-1}\Phi\| < 1$. Следовательно, система (1) имеет
единственное решение, которое может быть записано в явном виде

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha A^{-1}\Phi)^k A^{-1}G.$$

Отсюда следует существование и единственность стационарного
режима в СМО.

Литература

1. Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая
школа. 1982.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПЬЕЗОВЯЗКОСТИ В ЗАДАЧЕ О ВНЕШНЕМ КОНТАКТЕ ЖЕСТКИХ ЦИЛИНДРОВ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ СМАЗКИ

Лагунова Е.О., Задорожный А.И. (Ростов-на-Дону)

lagunova@rambler.ru, simon@rsu.ru

В настоящем сообщении модифицируется в направлении учета
эффекта пьезовязкости (закон Баруса) и ограниченности объема
смазки решение задачи, приведенное в [1]. Считается, что шип
неподвижен, а его радиус много больше радиуса подшипника R . На
входе в зону смазки ставятся условия Прандтля-Хопкинса [2]:

$$p'_p(\alpha_p) = 2\mu_o \frac{v}{\left(h_m + \frac{a_p^2 - c_p^2}{2R}\right)}, p_p(\alpha_p) = 0. \quad (1)$$

Здесь p_p - размерное давление, a_p - размерная входная граница смазочного слоя, а c_p - выходная граница смазочного слоя, μ_0 - динамический коэффициент вязкости, h_m - толщина слоя под максимумом давления. Кроме того, мы отказываемся от гипотезы о том, что $h_m = h_s$, где h_s - толщина слоя смазки на выходе. В таком случае, уравнение Рейнольдса эластогидродинамической теории смазки примет в безразмерной форме вид:

$$\frac{dp}{dx} = Qe^{\alpha p(x)} \frac{\gamma - 1 + x^2 - c^2}{(\gamma + x^2)^3} \quad (2)$$

где имеет место связь $x_p = \sqrt{2Rh_m}x$, $\alpha_p = P_c\alpha$, P_c - характерное давление, Q - безразмерный параметр нагрузки, $\gamma = \frac{h_s}{h_m}$. К граничным условиям (1) необходимо добавить одно из условий Свифта-Стибера: $p(c) = 0$. Обратим внимание на то, что первое соотношение из (1) позволяет установить связь между входной и выходной границами, а именно, $a = -\sqrt{2-1,5\gamma+c^2}$. Таким образом, мы приходим к специфической задаче на собственные значения для ОДУ первого порядка со спектральным параметром c . Заменой $\Pi(x) = \exp(-\alpha p(x))$ мы приходим к очевидному уравнению, интегрируя которое получим уравнение для следующего вида:

$$F(c, \gamma) = \int_{a(c)}^c \frac{x^2 - c^2 + \gamma - 1}{(x^2 + 1)^3} dx \quad (3)$$

Построение графика функции $F(c, \gamma)$ дает приближенные начальные значения для корней уравнения $c(\gamma)$ и $a(\gamma)$, например, $c(1) = 0,309, a(1) = -0,772$ $c(0,9) = 0,126, a(0,9) = -0,816$ $c(1,1) = 0,442, a(1,1) = -0,89$. Окончательно для $p(x)$ получаем выражение

$$p(x) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 - \alpha Q \int_{a(c)}^x \frac{x^2 - c^2 + \gamma - 1}{(x^2 + 1)^3} dx \right\} \quad (4)$$

Формула (4) со всей очевидностью показывает наличие критического значения α .

Литература

- [1.] *Галахов М. А., Усов П. П.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. — М., Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 280 с.
- [2.] *Александров В. М.* О постановке задач гидродинамической теории смазки // Гидромеханика, 1981 (т. 258). — № 4. — С. 819–822.

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О
СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В
НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ**

Логинава Е.А. (Воронеж)

vangog2007@list.ru

Рассматривается задача, описывающая стационарное распределение тепла в неоднородном материале (FGM) с трещиной.

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \quad (1)$$

$$u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = q_0(x_1);$$

$$\frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{k}{2} u(x_1, +0) - \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2} - \frac{k}{2} u(x_1, -0) = q_1(x_1); \quad (2)$$

$$x_1 \in [-1; 1]$$

Ранее было показано, что существует единственное в $\mathcal{L}_2(\mathcal{R}^2)$ классическое решение задачи (1) - (2) и найдено его явное представление.

Теорема 1. Пусть $q_1(x_1) \in C^2[-1, 1]$, $q_0(x_1) \in C^2[-1, 1]$. Тогда тепловой поток $\frac{\partial U}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} =$$

$$= -\frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi} \left(\frac{(1-x_1)}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1) + \frac{(1+x_1)}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1) \right) + R_1(x_1, x_2),$$

а тепловой поток $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ имеет асимптотическое представление

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi} \left(\frac{2x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1) + \frac{2x_2}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1) \right)$$

$$+ \ln((1-x_1)^2 + x_2^2) q_1(1) - \ln((1+x_1)^2 + x_2^2) q_1(-1) + R_2(x_1, x_2),$$

где $R_1(x_1, x_2)$, $R_2(x_1, x_2)$ равномерно ограничены при $x_2 \rightarrow +0$, $x_1 \in [-1; 1]$

Литература

1. Li Y.-D. An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and

linear non-homogeneities/ Yong-Dong Li, Kang Yong Lee - Int. J. Fract. 146, 2007.- 203-211.

2. Глушко А.В., Логинова Е.А. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестник ВГУ серия математика физика. - 2010. - № 2. - С. 47 - 50.

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ

Лукашов А.Л. (Саратов, Стамбул)
alukashov@fatih.edu.tr; LukashovAL@info.sgu.ru

В ряде приложений (например, при использовании спектральных методов для решения краевых задач) требуется, чтобы матрица узлов интерполирования содержала концевые точки заданной системы непересекающихся отрезков $E = \cup_{j=1}^l [a_{2j-1}, a_{2j}] \subset \mathbb{R}$ и все ее узлы находились бы на них. Ранее автором (см. [1]) были получены оценки констант Лебега рациональных интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по нулям дробей Чебышева-Маркова, наименее уклоняющихся от нуля на нескольких отрезках с фиксированным знаменателем ρ_ν , при условии регулярности (для каждого $j, j = 1, \dots, l$, сумма гармонических мер отрезка $[a_{2j-1}, a_{2j}]$ относительно нулей $z_{j,n}$ многочлена ρ_ν степени ν является натуральным числом, точнее $(n - \nu)\omega_j(\infty) + \sum_{k=1}^{\nu^*} \nu_k \omega_j(z_k) = q_j$, $q_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, l$.)

ТЕОРЕМА Пусть $z_{j,n} = \infty, j = 1, \dots, n - l + 1$ и $z_{n-l+2,n}, \dots, z_{n,n} \in \mathbb{R}$ таковы, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{n-k,n} = \infty, k = 0, \dots, l - 2$ и выполнено условие регулярности. Пусть $\mathfrak{N} = \{x_{k,n}\}_{k=1, n=2}^{n, \infty} \subset E$ - матрица узлов интерполирования, составленная из локальных экстремумов на E дробей Чебышева-Маркова, наименее уклоняющихся от нуля на E с матрицей полюсов $z_{j,n}$. Тогда константы Лебега полиномиальных интерполяционных процессов Лагранжа имеют порядок роста $O(\log n)$.

Литература

1. А.Л. Лукашов, Рациональные интерполяционные процессы на нескольких отрезках, Изв. Саратов. гос. ун-та, сер. матем., мех., инф., 2005, Т.5, вып. 1, С. 34 - 47.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И
НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ**
Матвеева О.И., Халтанова М.М. (Якутск)
ksumat@mail.ru, mariaose@yandex.ru

Под математической культурой мы понимаем осознанное применение математических приёмов и методов, позволяющее правильно оценивать полученные результаты расчётов и доказательств. Математическая культура – специфический вид культуры, необходимой не только для профессиональной деятельности, но и для повседневной жизни. В первую очередь, имеется в виду развитие умственных, логических способностей индивидуума, создание базы для решения им сложных научных, производственных и житейских задач. Большую роль при этом играет хорошее усвоение языка, на котором проводится преподавание.

На наш взгляд, одним из способов воспитания математической культуры является решение нестандартных задач. Известно, что овладеть математическими методами можно, лишь научившись решать задачи. Наряду со стандартными упражнениями и задачами на простое применение теорем и формул, а также задач, решаемых по известным алгоритмам, глубокое и творческое овладение математикой возможно лишь при решении нестандартных задач. Многие из таких задач составляют содержание олимпиад. Следует привлекать студентов, особенно одаренных, или имеющих хорошую базу знаний по школьной математической программе, к учебно-исследовательской работе, начиная с первого семестра обучения в ВУЗе. Формы работы разнообразны, в том числе к ним относятся индивидуальная работа со студентами на аудиторных и внеаудиторных занятиях (кружки по решению нестандартных задач, рефераты, подготовка студентов к участию в математических олимпиадах).

Решение нестандартных задач требует не только прочных знаний по программе, но и известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности, умения логически рассуждать, перевести необычное условие на подходящий математический язык, наконец, предполагается наличие достаточного уровня математической культуры у студента.

Решить непривычную интересную задачу, отойдя от заученных шаблонов, это уже маленькая творческая победа. Помочь студентам научиться одерживать такие победы – одна из благородных и

важных задач в преподавании математики.

При чтении лекций по высшей математике нужно постоянно вызывать у студентов положительные эмоции, которые так необходимы для возникновения и поддержания у них интереса к математике. Следует подчеркивать универсальность математических методов, способность математики очаровывать своим внутренним содержанием, неожиданными теоремами и результатами. Весьма полезным для этих целей является решение небольшого количества нестандартных задач на лекциях.

Пример 1. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}$

Решение. При $x = 0$ интеграл $\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dx = 0$. Условия для применения к пределу L правила Лопиталя (неопределенность типа $\frac{0}{0}$) выполнены. Поэтому

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \right]'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{t} |_{t=x^2} \cdot (x^2)'}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

Было бы полезно предоставлять студентам возможность самостоятельно доказывать некоторые результаты с последующим их использованием для решения конкретных задач. Например, теорема об интегрировании четных и нечетных функций, доказательство которой по силам студентам, существенно облегчает вычисление некоторых интегралов.

Теорема. Пусть $f(x)$ - интегрируемая на отрезке $[-a, a]$ функция. Тогда: если $f(x)$ - четная функция, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$; если $f(x)$ - нечетная функция, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

Решение. Функция $f(x) = \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}$ нечетная, так как

$$f(-x) = \cos(-x) \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \cos x \ln \frac{1-x}{1+x} = \cos x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\cos x \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x). \text{ Следовательно, } \int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{(2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1)dx}{x^2+2}.$$

Решение.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2} dx =$$

$$2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x^6-12x^2+1}{x^2+2} dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(3x^4 - 6x^2 + \frac{1}{x^2+2} \right) dx =$$

$$2 \left(\frac{3x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{16\sqrt{2}}{5}.$$

При решении нестандартных задач приходится проявлять определенную долю фантазии, искусства в аналитических преобразованиях, то есть проявлять черты, неотъемлемо входящие в понятие математической культуры. Этому также необходимо учить, хотя научить этому гораздо труднее, чем научить использованию готовых алгоритмов.

Участие студентов в работе по решению нестандартных задач, подготовка их к олимпиадам повышают творческую активность и заинтересованность студентов в глубоком изучении математики, при этом выявляется творчески одаренная часть молодежи, которая поступает в аспирантуру и широко использует математический аппарат в своих научных исследованиях.

Литература

1. Беркович Ф.Д., Федий В.С. Задачи студенческих олимпиад по математике с указаниями и решениями: Учебное пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.
2. Карпук А.А. Высшая математика. Интегральное исчисление функций одной переменной. – Минск: Харвест, 2008.
3. Леонов А.М., Никитина Е.С., Трофимцев Ю.И. Введение в математику для бакалавров: Учебное пособие. – Якутск: Из-во ЯГУ, 1996.

**ПОЛНАЯ ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ
КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ НА
ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ**

Махинова О.А. (Воронеж)

moa1002@mail.ru

Рассматривается ряд простых и вместе с тем типичных задач математической физики в приложении к распределенным системам на геометрическом графе. В центре исследований находится одномерный дифференциальный оператор $(A\varphi)(x) \equiv -\frac{d}{dx}(a(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)) + b(x)\varphi(x)$, определенный на гладких функциях, заданных на графе-звезде [1]. Получен конечно-разностный аналог такого оператора, причем спектральные свойства дифференциального оператора сохраняются при редукции его к конечномерному [2]. Для конечномерного оператора представлено решение полной проблемы собственных чисел: приведены алгоритмы для вычисления границ неотрицательного спектра и вычисления собственных чисел и собственных векторов матрицы, соответствующей конечно-разностному аналогу оператора $(A\varphi)(x)$.

Рассмотрены вопросы аппроксимации эволюционных и динамических задач на геометрическом графе, содержащих оператор $(A\varphi)(x)$. Представлен анализ устойчивости и сходимости разностных схем, базирующийся на спектральной технике (анализ Фурье): получены рекуррентные соотношения для коэффициентов Фурье в разложении решения, оценки для этих коэффициентов, что дает возможность установить устойчивость разностной схемы по Нейману и получить аналоги теоремы А.Ф. Филиппова. При этом следует отметить также, что задача граничного управления дифференциальной системой сводится к конечной l -проблеме моментов.

Литература

1. Махинова О.А, Провоторов В.В. Вычисление границ спектра положительной матрицы при аппроксимации эволюционных задач с носителем на графе, Актуальные проблемы математики и информатики (Труды математического факультета ВГУ). - 2009, №4. - С.51-66.

2. Махинова О.А. Разностные схемы для граничных задач на графе. Сборник материалов Воронежской весенней математической школы "Современные методы качественной теории краевых задач - Понтрягинские чтения - XXI 3 - 9 мая, 2010, С.145.

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ РАЦИОНАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДУНКЛА НА ПРЯМОЙ

Мещеряков В.В., Хэкало С.П. (Коломна)

metcherykov@mail.ru, khekalo@mail.ru

В работах [1], [2] найдены собственные функции операторов

$$\nabla = \frac{d}{dx} - \frac{k}{x}\hat{s}, T_+ = \frac{d}{dx} + \frac{k}{x}(1 - \hat{s}), T_- = \frac{d}{dx} + \frac{k}{x}(1 + \hat{s}),$$

где \hat{s} — оператор отражения ($\hat{s}[f](x) = f(-x)$); $k \in \mathbb{Z}_+$. Оператор ∇ называется рациональным оператором Дункла на прямой, а операторы T_+ и T_- естественно называть также в силу калибровочного соотношения

$$x^{-k} \circ \nabla \circ x^{-k} = \begin{cases} T_+, & \text{если } k \text{ — четное,} \\ T_-, & \text{если } k \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Предложение([1],[2]). *Собственная функция оператора ∇ , отвечающая собственному значению $\lambda = 1$ имеет вид*

$$\psi_{\text{sgn}(-1)^k}(x) = x^{(-1)^k k} \left(\mathcal{J}_{(-1)^k k - \frac{1}{2}}(x) + \frac{x}{2(-1)^k k + 1} \mathcal{J}_{(-1)^k k + \frac{1}{2}}(x) \right),$$

где $\mathcal{J}_\gamma(x)$ — ограничение функции Бесселя на мнимую ось.

Следствие. *Функция $\psi_\lambda = \psi_{\text{sgn}(-1)^k}(\lambda x)$ является собственной функцией оператора ∇ с собственным значением λ .*

Собственные функции легко находятся стандартным методом неопределенных коэффициентов $\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$. Другой способ нахождения собственных функций оператора Дункла связан с так называемым оператором косоугольного присоединенного действия. Формально, для линейных операторов A, B, C указанный оператор задается рекуррентным соотношением

$$ad_{A,B}^0 C = C; ad_{A,B}^k C = ad_{A,B}^{k-1}(AC - CB).$$

Теорема 1([3]). *Пусть $\mathcal{L}_k = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{k(k+1)}{x^2}$, тогда собственные функции этого оператора могут быть записаны в виде*

$$\varphi_k(x) = a_k \text{ch}_k(x) + b_k \text{sh}_k(x), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

где $\text{ch}_k(x) = (ad_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_0}^k x^k)[\text{ch}](x)$, $\text{sh}_k(x) = (ad_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_0}^k x^k)[\text{sh}](x)$.

Теорема 2. *Имеет место диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \nabla[f](x) = f(x) & \longrightarrow & \nabla^2[f](x) = f(x) \\ \parallel & & \parallel \\ \left\{ \begin{array}{l} f'_+(x) - \frac{k}{x}f_+(x) = f_-(x), \\ f'_-(x) + \frac{k}{x}f_-(x) = f_+(x). \end{array} \right. & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{k-1}f_+(x) = f_+(x), \\ \mathcal{L}_k f_-(x) = f_-(x), \end{array} \right. \end{array}$$

где f_+ и f_- — четная и нечетная компоненты функции f (симметрия области определения относительно точки $x = 0$ предполагается в силу введенного оператора \hat{s}).

Следствие 1. *Функция Бесселя $\mathcal{J}_{k-\frac{1}{2}}$ является одним из решений дифференциального уравнения Бесселя $z'' + \frac{2k}{x}z' - z = 0$.*

Следствие 2. *Собственная функция оператора ∇ имеет вид*

$$\psi_{\text{sgn}(-1)^k}(x) = \begin{cases} \text{sh}_k(x) + \text{sh}_{k-1}(x), & k - \text{четное}, \\ \text{ch}_k(x) + \text{ch}_{k-1}(x), & k - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Следствие 3 (классическое соотношение). *Функции Бесселя с полуцелыми индексами выражаются через гиперболические функции с рациональными по x коэффициентами:*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{k-\frac{1}{2}} &= \frac{\text{sh}_{k-1}}{x^k}, \quad \mathcal{J}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{(2k+1)\text{sh}_k}{x^k}, \quad k - \text{четное}, \\ \mathcal{J}_{-k-\frac{1}{2}} &= x^k \text{ch}_{k-1}, \quad \mathcal{J}_{-k+\frac{1}{2}} = (1-2k)x^{k-1} \text{ch}_{k-1}, \quad k - \text{нечетное}. \end{aligned}$$

Литература

- [1] Rösler M. Generalized hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, *Comm. Math. Phys.* 192 (1998), 519–542.
- [2] Мещеряков В.В., Хэкало С.П. Собственные функции рационального оператора Дункла на \mathbb{R} // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 2–7 июля 2010 г. — М: МИАН, 2010. С. 133.
- [3] Хэкало С.П. Пошаговая калибровочная эквивалентность дифференциальных операторов// Математические заметки. Т. 77. №6. 2005. С. 917–929.

**О РАДИУСЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ
ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ
СЕМЕЙСТВУ ОБОБЩЕННО ВЫПУКЛЫХ**

Микка В.П., Микка К.В. (Йошкар-Ола)

mikkav@marsu.ru

Обозначим через $S_{n;1,1}^a$ семейство обобщенно выпуклых регулярных в $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ и $S_{n;1,1}^*$ класс звездообразных относительно точки $w = f(0) = 0$ регулярных в E функций. Найдем наибольшее возможное значение параметра $r_0 > 0$, чтобы все функции $\psi_{r_0}(\zeta) = \frac{1}{r_0} f(r_0 \zeta) \in S_{n;1,1}^*$ принадлежали семейству $S_{n;1,1}^a$ при $r_0 \leq r_{S_{n;1,1}^a}[S_{n;1,1}^*]$, и этот параметр назовем радиусом принадлежности звездообразных функций семейству обобщенно выпуклых.

Теорема. Пусть

$$S_{n;1,1}^a = \left\{ f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + \dots : \operatorname{Re} \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + 1 > -a, a > -1 \right\}$$

и

$$S_{n;1,1}^* = \left\{ f(\zeta) = \zeta + b_{n+1}\zeta^{n+1} + b_{n+2}\zeta^{n+2} + \dots : \operatorname{Re} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} > 0 \right\}.$$

Тогда радиус принадлежности $S_{n;1,1}^*$ семейству $S_{n;1,1}^a$ находится по формуле

$$r_{S_{n;1,1}^a}[S_{n;1,1}^*] = \sqrt[n]{\frac{1+a}{\sqrt{(n+1)^2 - (1-a)^2} + n+1}}, \quad a > -1$$

и эта величина является неулучшаемой, ибо экстремальные звездообразные лучевые функции

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{(1-\zeta^n)^{2/n}}$$

порождают $\psi_{r_0}(\zeta)$, которые не являются обобщенно выпуклыми регулярными в E , если $r_0 > r_{S_{n;1,1}^a}[S_{n;1,1}^*]$.

Отметим, что радиус $r_{S_{1;1,1}^a}[S_{1;1,1}^*] = 2 - \sqrt{3} \approx 0,2679492$ совпадает со значением радиуса выпуклости семейства S однолистных в E функций (см., например, [1], стр. 166).

Литература

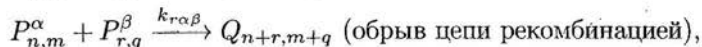
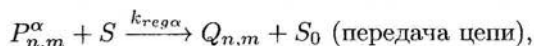
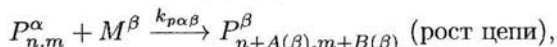
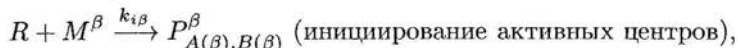
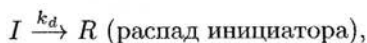
1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

**РАСЧЕТ РАЗМЕР-СОСТАВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА
СОПОЛИМЕРИЗАЦИИ БУТАДИЕНА СО СТИРОЛОМ**

Мифтахов Э.Н. (Ишимбай)

promif@mail.ru

Кинетический метод моделирования полимеризационных процессов заключается в составлении и численном решении кинетических уравнений для концентрации всех типов частиц, участвующих в процессе. При построении модели сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии будем считать, что реакционная способность активного центра на конце растущей цепи определяется лишь природой концевой звена [1]. Кинетическая схема, предложенная для описания процесса, включает следующие стадии:



где $(\alpha, \beta = \overline{1, 2})$; M^1, M^2 - мономеры первого и второго типа; $P_{m,n}$ и $Q_{m,n}$ - соответственно, активные и неактивные цепи полимера длиной $m + n$, состоящей из m звеньев мономера M^1 и n звеньев мономера M^2 ; $k_i, k_p, k_{reg}, k_d, k_r$ - константы элементарных стадий иницирования, роста, передачи цепи, диспропорционирования и рекомбинации соответственно; $A(\beta) = \{1, \text{если } \beta = 1; \text{иначе } 0\}$; $B(\beta) = \{1, \text{если } \beta = 2; \text{иначе } 0\}$.

Поскольку рассматриваемый процесс является сополимеризационным с участием двух мономеров (бутадиен, стирол), то большой интерес представляет состав сополимера, распределение звеньев в цепи. Это обусловлено тем, что свойства сополимеров в большей степени определяются именно составом и распределением звеньев того или иного мономера, т.е. композиционной неоднородностью (КН). На КН существенное влияние оказывают активности мономеров и различные физические факторы.

Если взять произвольную молекулу сополимера, то охарактеризовать ее можно заданием чисел m и n , входящих в нее мономерных звеньев M^1 и M^2 . Эти числа рассматривают как компоненты некоторого вектора I , характеризующего химический размер $l = m + n$ и состав $\zeta_1 = m/l$, $\zeta_2 = n/l$ молекулы.

Свойства сополимеров в значительной степени определяются размер-состав распределением (РСР) [2], основными показателями которого являются числовое и весовое РСР. Числовое РСР $f_N(I)$ равно доле молекул в образце полимера, характеризуемого вектором I . Весовое РСР $f_W(I)$ равно доле всех звеньев в этих молекулах. Последнее определяется соотношением:

$$f_W(I) = f_W(l)W(l|\zeta),$$

где $f_W(l)$ - распределение по размеру, $W(l|\zeta)$ - фракционное композиционное распределение.

В целях повышения качества продукта сополимеризации важно знать условия, при которых могут образовываться неоднородные по составу продукты. Количественной характеристикой этой неоднородности служит дисперсия композиционного распределения (КР):

$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p \sigma^2(p') dp' = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2,$$

где $\langle X \rangle$ представляет собой средний состав, полученный путем усреднения его мгновенного значения X по всем степеням превращения p' , меньшим p .

Математическое моделирование синтеза бутадиен-стирольного сополимера позволяет численно получить РСР продуктов сополимеризации, имеющихся в реакционной среде при заданной конверсии p , а также прогнозировать значения дисперсии композиционного распределения, чтобы избежать нежелательной композиционной неоднородности.

Литература

1. Семчиков Ю. Д. Высокомолекулярные соединения — М.: Академия, 2003, 368 с.
2. Хохлов А. Р., Кучанов С. И. Лекции по физической химии полимеров — М.: Мир, 2000, 192 с.

**ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О БИФУРКАЦИИ В СЛУЧАЕ
МНОГОМЕРНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ
НЕВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ¹**

Михайленко Б.А. (Воронеж)

B_Mikh@mail.ru

Рассматривается общее бифуркационное уравнение

$$P(x, \varepsilon) + \varepsilon Q(x, \varepsilon) = 0 \quad (1)$$

в банаховом пространстве E , где операторы P и Q действуют из $E \times [0, 1] \rightarrow E$. Предполагается, что уравнение $P(x, 0)$ имеет одномерное гладкое многообразие решений $\{x(\theta) : \theta \in [0, 1]\}$. Пусть производная по первому аргументу $P'_{(1)}(x(\theta), 0)$ такова, что оператор $I - P'_{(1)}(x(\theta), 0)$ является q -уплотняющим с константой $q < 1$. Пусть также к собственному вектору $x'(\theta)$, отвечающему нулевому собственному значению оператора $P'_{(1)}(x(\theta), 0)$, существуют присоединенные векторы $e_j(\theta), j = 1, \dots, m$. В предположении достаточной гладкости операторов P и Q получены бифуркационные условия и такие значения θ , при которых уравнение (1) имеет решение

$$x^\varepsilon = x(\theta) + \varepsilon \lambda_0 x'(\theta) + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j + \varepsilon y_0 + O(\varepsilon^3),$$

где коэффициенты $\lambda_j, j = 0, \dots, m$ и вектор y_0 могут быть вычислены в явном виде.

**УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОВЕДЕНИЕ НА
БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Мокейчев В.С. (Казань)

Valery.Mokeychev@ksu.ru

Для системы $y^{(1)} = F(t, y), t \geq t_1, F(t, 0) = 0$ (обыкновенных, либо с отклонением аргумента и так далее) главными являются проблемы существования решения, устойчивости либо асимптотической устойчивости, оценки при $t \rightarrow +\infty$. Методы Ляпунова (для обыкновенных уравнений) либо Ляпунова-Красовского (для уравнений с запаздыванием) применимы только к вещественным

¹Работа поддержана грантом РФФИ №10-01-93112-НЦНИЛ_а

решениям и имеют другие недостатки. Метод неподвижных точек требует заранее заданных оценок решений. Поэтому предлагается новый метод.

Используемые предположения: $\exists a > 0, \exists a_1 > 0, \exists \varepsilon > 0$, такие, что при каждой функции v , абсолютно непрерывной в каждом $[t_1, t_2]$ и удовлетворяющей условию $|v| \leq a$,

1) $|F(t, v)| \leq c(t), a_1 + \int_t^{t+\varepsilon} c(t)dt \leq a, F(t, v)$ непрерывно зависит от части v (а именно, от $v = v(t), t \in [t_2, t_2 + \varepsilon]$);

2) $Re(F(t, v) \circ v) \leq b(t)|v|^p, b(t) \leq 0$; 3) $Re(F(t, v) \circ v) \geq b_1(t)|v|^q$;

4) $Re(F(t, v) \circ v) \leq b(t)|v|^2 + \sum_{j=1}^m c_j(t)|v(h_j(t))||v|, c_j(t) > 0, h_j(t) \leq$

$t - \varepsilon, \sum_{j=1}^m c_j(t) \leq -b(t)\delta, \delta \in (0, 1]$ не зависит от t . Функции $b(t), b_1(t)$

локально суммируемы, $M(g, t, k) \equiv |y(t_1 + 0)|^{2-k} + (2-k) \int_{t_1}^t g(t)dt.$

Доказано

А: пусть выполняются 1)–3), если $p < 2$ и $M(b, t, p)$ обращается в нуль, то $|y(t)| \equiv 0$ на $[t_0,$

$+\infty)$, $|y(t)| > 0$ при $t \in [t_1, t_0)$, и $|y(t)| \leq |M(b, t, p)|^{1/(2-p)}$, $|y(t)|^{2-q} \geq M(b_1, t, q)$ при $t \in [t_1, t_0)$;

если $p > 2$ и $y(t) \not\equiv 0$ в каждом интервале из $(t_1, +\infty)$, то $|y(t)| > 0, |y(t)| \leq |M(b, t, p)|^{1/(2-p)}$, при этом $|y(t)| \rightarrow 0$ в случае

$\int_{t_1}^t b(t)dt \rightarrow -\infty$, и $|y(t)| \geq (M(b_1, t, q))^{1/(2-q)}$ при $q > 2$; если

$p < 2, q > 2$ и $M(b, t, p)$ обращается в нуль, то уравнение не имеет ненулевых решений;

В: в случае 1), 4), $|y(t_1 + 0)| \leq a_1, h_j(t) \rightarrow +\infty$ имеет место

$|y(t)| \leq a_1$; если, кроме того, $\exp(\int_{t_2}^t b(t)dt) \leq (\delta^\gamma - \delta)/(1 - \delta)$ при

некотором $\gamma \in (0, 1)$ и всех $t \gg t_2$, то $|y(t)| \leq a_1 \delta^k$ при $t \geq \xi_k$ и некоторых $\xi_k \rightarrow +\infty, k = 0, 1, \dots$

Каждое из выписанных предположений 2)–4) в общем случае не улучшаемо.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОРОГА ПРОТЕКАНИЯ В МОДЕЛЯХ ГРАДИЕНТНОЙ ПЕРКОЛЯЦИИ

Москалев П.В., Шитов В.В., Гребенников К.В. (Воронеж)

moskalefff@gmail.com

Одним из существенных упрощений, присутствующих в базовых перколяционных моделях, является изотропный характер процесса, с равномерным распределением реализаций псевдослучайных чисел и равными вероятностями протекания по всем направлениям решётки. Для преодоления указанного недостатка в [1] была предложена модель направленной перколяции с выделением для каждой оси перколяционной решётки разрешённого и запрещённого направлений протекания. Применительно к квадратной решётке это позволяет выбрать одно из четырёх направлений, обозначенных как NW , NE , SE и SW . Однако, для успешного использования перколяционных моделей в прикладных задачах столь грубой дискретизации явно недостаточно. В более реалистичных случаях необходимо иметь возможность непрерывного управления распределением перколяционного процесса в произвольном направлении.

Эта возможность обеспечивается обобщением модели изотропной перколяции, названной авторами градиентной перколяцией [2]. Для определения градиентной перколяции необходимо указать доли достижимых узлов для каждого направления решётки. На квадратной решётке обозначим их как p_N , p_E , p_S и p_W . Для сопоставления различных моделей будем интерпретировать доли достижимых узлов как векторы, ориентированные вдоль основных направлений перколяционной решётки. Тогда четыре равных вектора $p_{N,S,E,W} = p$, соответствующих изотропной перколяции на квадратной решётке, будут описывать круговую, а четыре различных — эквивалентную по площади эллиптическую области.

В простейшем случае противоположащие векторы принимаются попарно равными и совпадающими с полуосями эллипса $p_N = p_S = p_V$ и $p_E = p_W = p_H$. Зависимости для модулей полуосей p_V (штриховая линия) и p_H (сплошная линия) от величины эксцентриситета e при различных значениях радиуса эквивалентного по площади круга $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ показаны на рис.1, а. Хорошо заметно, что при любом ненулевом значении эксцентриситета существует предельное значение эквивалентного радиуса p , при котором модуль главной полуоси эллипса превышает единицу $p_V > 1$.

На рис.1, б показана зависимость частоты протекания w в вертикальном направлении для описанных моделей градиентной перколяции от эквивалентной доли достижимых узлов p при заданных значениях эксцентриситета $e = 0.0, 0.1, \dots, 0.8$. Построение зависимости $w(p, e)$ осуществлялось методом статистических испытаний по выборке объёмом 500 реализаций.

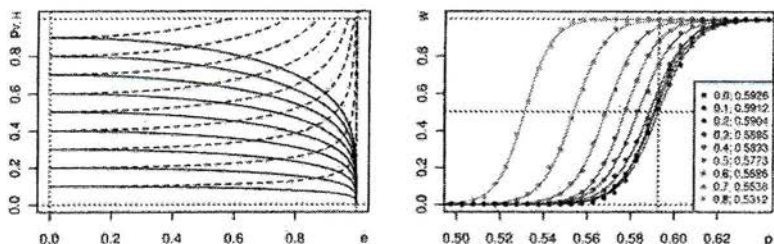


Рис.1. Определение порога протекания: а) зависимости долей достижимых узлов $p_V(e, p)$ и $p_H(e, p)$ при $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$; б) зависимость частоты протекания $w(p, e)$ при $e = 0.0, 0.1, \dots, 0.8$

Для оценки порога протекания p_c при заданном e использовалась логистическая функция вида: $w(p | p_c, s) = (1 + \exp(-\frac{p-p_c}{s}))^{-1}$, где s — масштаб аппроксимирующей функции; p_c — соответствующий порогу протекания параметр сдвига.

Вычислительное моделирование показывает, что величина порога протекания в задаче градиентной перколяции на квадратной решётке в зависимости от показателя эксцентриситета e меняется в пределах от $p_c(0.8) \approx 0.5312$ до $p_c(0) \approx 0.5926$. Полученное значение $p_c(0)$, с учётом объёма используемой выборки, хорошо согласуется с классическими оценками [3], а зависимость $p_c(e)$ монотонно убывает, начиная с правостороннего максимума при $e \searrow 0$, и стремится к нулю при $e \nearrow 1$.

Литература

1. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes // Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1957. Vol.53. P.629–641.
2. Москалев П.В., Шитов В.В. Математическое моделирование пористых структур. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 120 с.
3. Stauffer D., Aharony A. Introduction to Percolation Theory. Taylor and Fransis: London, 1992. 181 p.

АЛГОРИТМ РАСЧЁТА ДИФРАКЦИОННЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мохненко С.Н., Преображенский А.П. (Воронеж)

mohnenko@yandex.ru

Большое число дифракционных структур, входящих в состав объектов радиотехники, требуют для расчёта таких подходов, которые дают небольшую погрешность. Особенно это важно для объектов, размеры которых лежат в резонансной области.

В настоящей работе предлагается алгоритм расчёта характеристик рассеяния различных дифракционных структур в двумерном случае.

Плотности токов на поверхности объекта могут быть определены на основе уравнения Фредгольма первого рода для плотности неизвестного тока в случае Е-поляризации [1, 2]:

$$\frac{\omega \cdot \mu}{4} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} j(t) \cdot H_0^2[k \cdot L_0(\tau, t)] \cdot \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt = E_z^0(\tau),$$
$$\alpha \leq \tau \leq \beta, \quad (1)$$

где $L_0(\tau, t) = \sqrt{[\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + [\eta(\tau) - \eta(t)]^2}$ - расстояние от точки наблюдения до точки интегрирования, $E_z^0(\tau)$ - продольная составляющая напряженности первичного электрического поля в точке на контуре. Контур структуры задаётся в параметрической форме: $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, а $\xi'(t)$, $\eta'(t)$ - первые производные соответствующих функций, $k = 2 \cdot \pi / \lambda$, λ - длина падающей электромагнитной волны.

При решении данного интегрального уравнения методом моментов оно дискретизируется и приводится к системе линейных алгебраических уравнений, из которой определяются плотность продольных электрические токов. После этого определяется двумерная эффективная площадь рассеяния объекта.

На основе сравнения с методом физической оптики определены границы применимости данного алгоритма на примере объекта, представленного в виде совокупности двумерных пластин.

Литература

1. Захаров Е.В. Численные методы решения задач дифракции / Е.Б. Захаров, Ю.В. Пименов. - М.: Радио и связь, 1986. - 164 с.
2. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р.Митры. - М.: Мир, 1977. - 485 с.

НОВЫЕ ДВУМЕРНЫЕ БРИЗЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ $O(3)$ ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. (Душанбе)

muminov@tascampus.eastera.net, shokirov@rambler.ru

В настоящей работе методами численного моделирования получены новые двумерные бризерные решения $O(3)$ векторной нелинейной сигма-модели (ВНСМ). Поиск новых численных бионных (бризерных) решений нелинейных теоретико-полевых моделей (в частности, $O(3)$ ВНСМ), которые можно интерпретировать также как классические модели составных частиц (например, мезонов) привлекает многих исследователей. В работе [1] были численно исследованы локализованные возмущения типа пульсирующих решений уравнения поля Хиггса

$$u_{tt} - \Delta_{tt}u - m^2u + g^2u^3 = 0, \quad (1)$$

а также в рамках уравнения синус-Гордона (СГ)

$$u_{tt} - \Delta_{tt}u = -\sin u \quad (2)$$

в ss (сферически-симметричной) геометрии.

Исследованные численные решения, названные пульсонами, характеризовались излучением энергии и конечным временем существования. В работе [2] рассматривались ss -решения уравнений (1), (2) осцилляторного типа (пульсоны) и были обнаружены долгоживущие решения, с большой амплитудой. Численные исследования аналогичных медленно затухающих вследствие излучения энергии локализованных решений были проведены также в работе [3]. В работах [4,5] при изучении нетопологических решений двумерной бэби-скирмовской модели и $(d+1)$ -мерного уравнения СГ, были также получены метастабильные решения, которые после излучения определенной части энергии стабилизировались в нетривиальную конфигурацию. Данные полевые возмущения в работах [4,5] были названы псевдобризерами в связи с их сходством с бризерными решениями уравнения СГ. Продолжая исследования, проведенные в [4,5], авторы этих работ численно модулировали специальные периодические по времени радиально-симметричные решения $(d+1)$ -мерного уравнения СГ, задавая в качестве начальных условий пробную функцию в следующем виде [6]:

$$f(t, 0) = 4 \operatorname{arctg} \left(C \exp \left(-\frac{2r}{K\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{K} \right) \right) \right). \quad (3)$$

Решая задачу Коши с начальными условиями (3), были получены численные решения, которые оказались стабильными в течение достаточно долгого времени (более 150 000 циклов), хотя и при наличии слабого излучения.

В работе [7] продолжены исследования радиально-симметричных неподвижных решений, полученных в [6] (псевдобризеров) и пульсирующих решений, полученных для (2+1)-мерного уравнения СГ [8]. В указанной работе [7] рассматривалась в частности, динамика решений эволюционирующих из искаженных (радиально несимметричных) начальных условий. Было показано, что рассеивающееся излучение, исходящее от пульсирующей волны, стабилизирует его. В указанной работе, в частности, в рамках уравнения СГ было исследовано начальное условие вида

$$u = -4\arctg(F\sin(\varphi(t) - kx)\operatorname{sech}(\lambda(t)(x - \xi(t)))\operatorname{sech}(\lambda(t)y)), \quad (4)$$

где $u = u(x, y, t)$, $F = F(\lambda)$, которое при численном моделировании (до времен $t = 50$) описывала эволюцию периодического по времени решения, излучая при этом определенную часть своей энергии.

Цель настоящей работы заключается в получении численного решения 2D O(3) ВНСМ бризеро-подобного вида, т.е. обладающего динамикой внутренней степени свободы. В качестве начального условия было использовано измененное бризеро-подобное решение уравнения СГ вида (4) но исходя из того, что в меридианном сечении ($\varphi = \text{const}$) 2D O(3) ВНСМ сводится к уравнению СГ. Для получения решения в изопространстве сферы S^2 мы задаём возмущение в виде:

$$\theta(x, y, t) = -2\arctg(\eta\sin(\varphi - vx)\operatorname{sech}(\delta(t)x)\operatorname{sech}(\delta(t)y)), \quad (5)$$

где $\eta = \eta(x, y, t)$. Мы задаём вращение в виде $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Для эффективного моделирования бесконечной плоскости, в которой происходит эволюция решения (5) мы применили условия типа «черный ящик», поглощающие на границе излучения в виде распространяющихся линейных возмущений. Для численного моделирования эволюции данного начального решения была написана разностная схема с весами явного типа, второго порядка точности, как по времени, так и по координате [9]. Контроль точности численной схемы осуществлялся вычислением интеграла энергии, которая после сформирования устойчивого биона сохранялся с точностью $\Delta E/E_0 = 10^{-5} - 10^{-6}$. Параметры численного моделирования: шаг

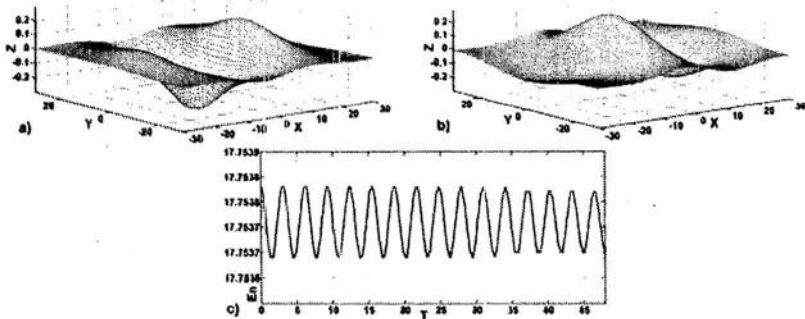


Рис. 1: Двумерное бризерное решение $O(3)$ ВНСМ: а) при $T = 0.0$; б) при $T = 50.0$; в) изменение интеграла энергии решения во времени $T \in [0, 50]$.

по координате $h = 0.01$; шаг по времени $\tau = 0.006$; время моделирования $T \in [0, 50]$; область моделирования - $\{-L_1 \leq x \leq L_1, L_2 \leq y \leq L_2\}$, $L_1 = L_2 = 30$; разрешение 6001×6001 точек в каждом слое по времени. Для получения эволюционной модели взаимодействия вплоть до времени $T = 50.0$ были проведены более 30×10^{10} вычислений разностного аналога $O(3)$ ВНСМ в каждой модели. В результате были получены численно новые двумерные бризерные (бризерные) решения обладающие динамикой внутренней степени свободы в изопространстве (рис.1(a, b)). Интеграл энергии при этом почти не изменялся, осциллируя в интервале $(17.75367-17.75377)$ и равномерно приближаясь в промежуточное значение (рис.1c).

Таким образом, численным моделированием нами получены новые бризерные решения двумерной $O(3)$ ВНСМ, путем введения возмущения в аналогичные решения уравнения СГ.

Литература

1. Боголюбовский И.Л., Маханьков В.Г. – ЖЭТФ, 1976, том 24, вып. 1, стр.15-18.
2. Боголюбовский И.Л., Маханьков В.Г. – ЖЭТФ, 1977, том 25, вып. 2, стр.120-123.
3. Christiansen P.L. – Physica Scripta, 1997, Vol. 55, 131-134.
4. A. Kudryavtsev, B. Piette, W.J. Zakrjewsky. - arXiv:hep-th/96-11217v1, 1996, DTP-96/17, 2008.
5. A. Kudryavtsev, B. Piette, W.J. Zakrjewsky. – arXiv:hep-th/96-

11217v1, 1996, DTP-96/17, 1996.

6. B. Piette, W.J. Zakrjewsky. – Nonlinearity 11 (1998) 1103-1110. Printed in the UK.

7. Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. – Physica D 189 (2004) 167-187.

8. Xin J.X. – Physica D 135 (2000) 345-368.

9. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971, 553с.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПАДА
ДВУМЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ
O(3) ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ
ВСЛЕДСТВИЕ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. (Душанбе)

muminov@tascampus.eastera.net, shokirov@rambler.ru

Работа посвящена численному моделированию и анализу распада двумерных топологических солитонов (ТС, вихрей) O(3) векторной нелинейной сигма-модели (ВНСМ) вследствие их взаимодействия. Исследования проводились для ТС обладающих различными топологическими зарядами Q (ТЗ, индекс Хопфа). Рассматривался случай двухсолитонных столкновений, где к неподвижному ТС направлялся аналогичный солитон с различными скоростями («налетающий» вид столкновения). В работах [1-3] было численно показана устойчивость данных ТС с ТЗ $Q = 1 - 6$, получены модели различных видов их столкновений. В указанных работах также описываются дальнедействующие модели взаимодействия ТС O(3) ВНСМ полученные авторами численно введением некоторых изменений в изоспиновую динамику солитонов. Плотность лагранжиана O(3) ВНСМ в 2D пространстве имеет вид (в анизотропном случае):

$$L = \frac{1}{2} [\partial_i s_a \partial^i s_a + (s_a^2 - 1)], s_a s_a = 1; i = 0, 1, 2; a = 1, 2, 3.$$

В терминах эйлеровой параметризации полевые функции имеют вид:

$$s_1 = \sin \theta \cos \varphi, s_2 = \sin \theta \sin \varphi, s_3 = \cos \theta.$$

В работах [1-3] была исследована эволюция ТС O(3) ВНСМ полученные Белавиным и Поляковым [4]:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{r}{R} \right)^Q, Q = \left(\frac{\varphi + T}{\chi} \right),$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \cos \chi = \frac{x}{r}, \sin \chi = \frac{y}{r},$$

здесь, $\theta_S(x, y, t)$, $\varphi_S(x, y, t)$ – эйлеровы углы, Q – ТЗ. Моделирование столкновений ТС $O(3)$ ВНСМ осуществлялось применением разностной схемы в основном второго порядка точности, как по координате, так и по времени [5]. В некоторых промежуточных вычислениях использовались также разностные схемы первого порядка точности. При разработке разностной схемы применялась стереографическая проекция с привлечением методов дифференциальной геометрии и особенностей алгебро-геометрической конструкции класса $O(N)$ ВНСМ теории поля, которые позволяют избегать сингулярности при проведении численных экспериментов. Ниже приводится часть разностной схемы программы моделирования для функции $z = a + ib$, $z = tg\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}$ (один из этапов вычисления $Re(z)$), которая появляется вследствие стереографической проекции $S^2 - R_{comp}^2$ при использовании комплексной параметризации в $O(3)$ ВНСМ:

$$\begin{aligned} a_{\tau+} = & \left[\left[(1 + a^2 + b^2) \left(\frac{2a - a_{\tau-}}{\tau^2} + \frac{a_{x+h} - 2a + a_{x-h}}{h_x^2} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{a}{2h_x^2} \left((a_{x+h} - a_{x-h})^2 - (b_{x+h} - b_{x-h})^2 \right) - \frac{b}{h_x^2} (a_{x+h} - a_{x-h}) \times \\ & \times (b_{x+h} - b_{x-h}) + \frac{1 + a^2 + b^2}{h_y^2} (a_{y+h} - 2a + a_{y-h}) - \frac{a}{2h_y^2} \times \\ & \times \left((a_{y+h} - a_{y-h})^2 - (b_{y+h} - b_{y-h})^2 \right) - \frac{b}{h_y^2} (a_{y+h} - a_{y-h}) \times \\ & \times (b_{y+h} - b_{y-h}) + \frac{1}{\tau^2} \left((b - b_{\tau-})(ab_{\tau-} - a_{\tau-}b) - (a - a_{\tau-}) \times \right. \\ & \left. \left. \times (aa_{\tau-} + bb_{\tau-}) \right) \right] (1 + a^2 + b^2 - a(a - a_{\tau-}) - b(b - b_{\tau-})) - \\ & - \left[(1 + a^2 + b^2) \left(\frac{2b - b_{\tau-}}{\tau^2} + \frac{b_{x+h} - 2b + b_{x-h}}{h_x^2} \right) - \frac{a}{h_x^2} \times \right. \\ & \times (a_{x+h} - a_{x-h})(b_{x+h} - b_{x-h}) + \frac{b}{2h_x^2} \left((a_{x+h} - a_{x-h})^2 - \right. \\ & \left. \left. - (b_{x+h} - b_{x-h})^2 \right) + \frac{1 + a^2 + b^2}{h_y^2} (b_{y+h} - 2b + b_{y-h}) - \frac{a}{h_y^2} (a_{y+h} - a_{y-h}) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (b_{y+h} - b_{y-h}) + \frac{b}{2h_y^2} ((a_{y+h} - a_{y-h})^2 - (b_{y+h} - b_{y-h})^2) + \frac{1}{\tau^2} \times \\ & \times \left((a - a_{\tau-})(a_{\tau-}b - ab_{\tau-}) - (b - b_{\tau-})(bb_{\tau-} + aa_{\tau-}) \right) \Big] \times \\ & \times \left(a(b - b_{\tau-}) - b(a - a_{\tau-}) \right) \Big] \frac{\tau^2}{(1 + aa_{\tau-} + bb_{\tau-})^2 + (a_{\tau-}b + ab_{\tau-})^2}. \end{aligned}$$

здесь $a_{\tau\pm} = a(x, y, t \pm \tau)$, $a_{x\pm h} = a(x \pm h, y, t)$, $a_{y\pm h} = a(x, y \pm h, t)$, аналогично для $b_{\tau\pm}$, $b_{x\pm h}$, $b_{y\pm h}$. Параметры численного моделирования: шаг по координате $h = 0.01$; шаг по времени $\tau = 0.006$; время моделирования $T = [0, 120]$; область моделирования - прямоугольная $\{-L_1 \leq x \leq L_1, -L_2 \leq y \leq L_2\}$, $L_1 = 10.0$, $L_2 = 5.0$; разрешение 2002×1001 точек в каждом слое по времени. Для получения эволюционной модели взаимодействия вплоть до времени $T = 120$ были проведены более 4×10^{10} вычислений разностного аналога O(3) ВНСМ в каждой модели.

В качестве мишени были использованы изученные в работе [1-3] ТС с ТЗ $Q = 3 - 6$, которые подвергались столкновению движущимися аналогичными ТС. Такие взаимодействия были рассмотрены при различных скоростях «налетающих» солитонов: от $V_1 \approx 0.15$ до $V_1 \approx 0.7$ (скорость дана в единицах скорости света c). Ниже приведены результаты, сгруппированные по значениям скорости налетающего ТС на неподвижную мишень ($V_2 = 0.0$). В данных экспериментах контроль консервативности численной схемы осуществлялся вычислением интеграла энергии, которая сохранялась с точностью $\Delta E/E_0 \approx 10^{-3} - 10^{-4}$.

Например, в случае $V_1 \approx 0.14834$, $V_2 = 0.0$, $Q_1 = Q_2 = 3$, при столкновении оба ТС испытывают некоторое возмущение, после которого мишень начинает двигаться прямолинейно в том же направлении. Налетающий ТС при столкновении смещается почти на треть своего размера в сторону собственного (левостороннего) вращения, становясь неподвижным [1-3]. При увеличении ТЗ мишени результаты взаимодействия, в общих чертах, аналогичны предыдущему случаю. Основное отличие состоит в том, что с увеличением ТЗ мишени увеличивается деформация кольца концентрации плотности энергии обеих ТС. Также наблюдается зависимость скорости мишени от её ТЗ - с увеличением ТЗ мишени уменьшается «приобретаемая» ею (вследствие взаимодействия) скорость.

При увеличении скорости налетающего солитона меняется характер взаимодействия ТС – во всех экспериментах данной группы наблюдается распад системы, состоящей из двух взаимодействующих ТС на несколько локализованных возмущений (ЛВ). Например, в случае $V_1 \approx 0.28735$, при одинаковом ТЗ ($Q_1 = Q_2 = 3$), происходит распад мишени на два ЛВ с ТЗ равными 1 и 2. При увеличении ТЗ мишени, результат взаимодействия отличается от предыдущего распадом обоих ТС на ЛВ. При $Q_2 = 4$ система двух взаимодействующих ТС распадается на 5 ЛВ, с ТЗ равными 2 (два ЛВ) и 1 (три ЛВ). При $Q_2 = 5$ в момент времени $T = 55.0$ можно наблюдать образование четырёх ЛВ с ТЗ равными 4 (одно ЛВ), 2 (одно ЛВ) и 1 (два ЛВ). Увеличение ТЗ мишени до $Q_2 = 6$ также приводит к образованию четырёх ЛВ с ТЗ равными 4 (одно ЛВ), 2 (два ЛВ) и 1 (одно ЛВ).

При определении ТЗ вышеописанных образовавшихся ЛВ, мы исходили из численного анализа проекций изоспина взаимодействующей двухсолитонной системы на комплексную плоскость, а также численным исследованием динамики трехмерной модели изоспинов.

В заключение отметим, что общее свойство, наблюдаемое при проведении численных экспериментов настоящей работы, заключается в сохранении суммы ТЗ взаимодействующих ТС независимо от количества ЛВ, формирующихся из двух начальных сталкивающихся солитонов.

Литература

1. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. – ДАН РТ, 2010, т.53, №9, с.679-684.
2. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. – Материалы VI межд. науч.-техн. конференции. – ВолГТУ, Вологда, 2010, т.1, с.206-211.
3. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. – Материалы Воронежской зимней математической школы. – ВГУ, Воронеж, 2011, с.224-227.
4. Белавин А.А., Поляков А.М. – ЖЭТФ, 1975, 22(10), с. 503-506.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971, 553с.

О ТЕОРЕМЕ М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Мусяенко В.К. (Воронеж)

piccolo1@yandex.ru

М.А.Красносельским была доказана теорема о существовании неподвижной точки отображения вида $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где f_1 – сжимающее отображение, а f_2 – вполне непрерывное. В настоящей работе приведены два новых варианта этой теоремы для случая многозначных отображений.

Пусть X, Y – метрические пространства, многозначное отображение $F : X \rightarrow Y$ называется сжимающим, если для любых $x, y \in X, \forall k \in [0, 1)$ справедливо неравенство $h(F(x), F(y)) \leq k\rho(x, y)$, где h – метрика Хаусдорфа в пространстве Y .

Теорема 1 Пусть $T \subset E$ – выпуклое, замкнутое, ограниченное подмножество в E . $F : T \rightarrow E$ – многозначное отображение.

Рассмотрим отображение $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ такое, что выполнены следующие условия:

1) $F_1 : T \rightarrow C_v(E)$ – сжимающее отображение;

2) $F_2 : T \rightarrow K_v(E)$ – вполне непрерывное;

3) $\forall u \in F_1(T), \forall v \in F_2(T) \Rightarrow u + v \in T$.

Тогда отображение $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ имеет неподвижную точку, т.е. $\exists x_* \in F(x_*)$.

Лемма 1 $F_1 : B_R[x_0] \times Y \rightarrow C_v(E)$ – многозначное сжимающее отображение.

Пусть $\forall y \in Y, \rho(x_0, F_1(x_0, y)) < R_1 < (1 - k)R$, тогда существует непрерывное отображение $\varphi : Y \rightarrow B_R[x_0]$ такое, что: $\varphi(y) \in F_1(\varphi(y), y)$.

Теорема 2 $F_1 : B_R[x_0] \times Y \rightarrow C_v(E)$ – многозначное сжимающее отображение. $F_2 : B_R[x_0] \times Y \rightarrow K_v(E)$ – вполне непрерывное отображение. Пусть $\forall u \in F_2(B_R[x_0])$ выполнено неравенство: $\rho(x_0, F_1(x_0) + u) < R_1 < (1 - k)R$. Тогда отображение $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ имеет неподвижную точку.

Литература

1. Гельман Б.Д. Многозначные сжимающие отображения и их приложения // Вестник ВГУ, серия физика, математика. – 2009. – В.1. – С.74-86.

**НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ ТИПА ШТУРМА ДЛЯ ОДНОГО
НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ**

Мустафокулов Р. (Душанбе)

rmustaf@list.ru

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$(p(x)y''')' - (q(x)y')' = F(x, y) \quad (1)$$

на связном геометрическом графе Γ из R^3 . Считается, что Γ состоит из объединения конечного набора γ_i взаимно не пересекающихся отрезков (ребр) и совокупности $J(\Gamma)$ некоторых их общих концов (внутренних вершин). Множество остальных концов γ_i (не вошедших в Γ), называемых граничными вершинами, обозначим через $\partial\Gamma$. В каждой из внутренних вершин $a \in J(\Gamma)$ уравнение (1) интерпретируется в виде условий связи

$$\begin{cases} y_i(a) = y_j(a), & y_i''(a) = 0, & (i, j \in I(a)), \\ \sum_{i \in I(a)} [(p_i y_i''')' - q_i y_i'](a+0) + \chi(a)y(a) = 0, & (\chi(a) > 0), \end{cases} \quad (2)$$

где через $I(a)$ обозначено множество индексов i ребр γ_i , примыкающих к a . В каждой из граничных вершин $b \in \partial\Gamma$ рассматриваются краевые условия

$$\begin{cases} [(py''')' - qu'](b-0) - \chi(b)y(b) = 0, \\ \alpha(b)y''(b) + \beta(b)y'(b-0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\chi(b) > 0$, $\alpha(b), \beta(b) \geq 0$, причем $\alpha(b) + \beta(b) > 0$ для всех $b \in \partial\Gamma$.

Пусть $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ при $x \in R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^m \gamma_i$. Предположим также, что функция $F(x, y)$ является непрерывной по совокупности переменных на $\Gamma \times R(P)$. Тогда существует функция Грина $G(x, s)$ дифференциального оператора $Ly = (py''')' - (qy')'$ при условиях связи (2) на $J(\Gamma)$ и краевых условиях (3) на $\partial\Gamma$ и краевая задача (1)-(3) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) F[s, y(s)] ds. \quad (4)$$

Интегральный оператор $F(y)(x) = \int_{\Gamma} G(x, s)F[s, y(s)]ds$ действует в пространстве $C(\Gamma)$ равномерно непрерывных на Γ функций и является вполне непрерывным по норме $\|y(\cdot)\| = \sup_{\Gamma} |y(x)|$.

Пусть $K(\Gamma)$ - конус неотрицательных функций $y(\cdot)$ из $C(\Gamma)$. Если $F(x, y)$ равномерно непрерывна на $\Gamma \times K(\Gamma)$ и принимает неотрицательные значения, то оператор F оставляет инвариантным конус $K(\Gamma)$. Поэтому вопрос о существовании неотрицательных решений краевой задачи (1)-(3) эквивалентен вопросу о существовании в $K(\Gamma)$ решений уравнения (4). Уравнение (4) с положительным вполне непрерывным оператором F будем исследовать методами относительного индекса положительных операторов.

Пусть правая часть уравнения (1) допускает представление

$$F(x, y) = a(x)y + \varphi(x, y), \quad (5)$$

где $a(x) \in C(\Gamma)$, а $\varphi(x, y)$ равномерно относительно $x \in \Gamma$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} (\|y\|^{-1} \|\varphi(x, y)\|) = 0.$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$\mu Ly(x) = a(x)y(x) \quad (x \in \Gamma) \quad (6)$$

где μ - спектральный параметр и соответствующую краевую задачу, где наряду с уравнением (6) рассматриваются условия связи (2) на $J(\Gamma)$ и краевые условия (3) на $\partial\Gamma$. Число $\lambda_* = 1/\mu_*$ называется *позитивным собственным значением* задачи (6)-(2), (3), если при $\lambda = \lambda_*$ эта задача имеет неотрицательное решение. Это решение называется *собственной функцией* задачи (6)-(2), (3), отвечающей λ_* . При условии (5) задача (6)-(2), (3) имеет единственную неотрицательную собственную функцию $y_0(x)$, которой соответствует позитивное собственное значение λ_0 , причем остальные собственные значения по модулю строго меньше λ_0 .

Теорема. Пусть $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ при $x \in R(\Gamma)$, а функция $F(x, y)$ равномерно непрерывна на $\Gamma \times R(\Gamma)$ и принимает неотрицательные значения при $y(x) \geq 0$, $x \in R(\Gamma)$. Пусть, кроме того, имеет место представление (5), причем позитивнее собственное значение λ_0 задачи (6)-(2), (3) удовлетворяет условию $\lambda_0 < 1$.

Тогда краевая задача (1)-(3) имеет по мере одно неотрицательное решение

**ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В
КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ¹**

Нестеров А.В. (Москва)

andrenesterov@yandex.ru

Строится асимптотическое разложение (АР) решения задачи Коши для системы уравнений в частных производных

$$\epsilon^2(U_t + DU_x) = AU + \epsilon^2 F(U),$$

$$U(x, 0) = U^0(x, \epsilon),$$

где $x, t \in \Omega = \{0 < t < T, |x| < \infty\}$, $U(x, t) = \{u_i(x, t)\}$, ($i = \overline{1, n}$) – вектор решений, $0 < \epsilon \ll 1$ – малый параметр. Матрица D диагональная, среди элементов матрицы D есть хотя бы два не равных, A – вырожденная ($\text{rang} A = n - 1$).

Ставятся начальные условия специального вида: $U(x, 0) = U^0(x, \epsilon) = \omega(x/\epsilon)H$, где H – вектор, $\omega(z) = 0 \quad \forall |z| > \delta > 0$, $\omega(z) \in C^\infty$.

Начальные условия имеют вид всплеска, сосредоточенного в малой ϵ -окрестности точки $x = 0$. Такая постановка может служить моделью описания распространения начального локального возмущения в многофазной среде, в случае, когда обмен между фазами происходит намного быстрее движений переноса.

Обозначим h_1 – собственный вектор матрицы A , соответствующий нулевому собственному значению $\lambda_1 = 0$.

Для построения асимптотического разложения (АР) решения с точностью $O(\epsilon^N)$ на A , $F(U)$ накладывается ряд условий.

АР решения задачи строится в виде суммы функции всплеска $S(\zeta, t)$, сосредоточенной в малой окрестности некоторой линии $\{l : \zeta = 0\}$ – “псевдохарактеристике” системы, и обыкновенной пограничной функции $P(\xi, \tau)$, сосредоточенной в малой окрестности границы $t = 0$:

$$\begin{aligned} U(x, t, \epsilon) &= S_N(\zeta, t) + P_N(\xi, \tau) + RU = \\ &= \sum_{i=0}^N \epsilon^i (s_i(\zeta, t) + p_i(\xi, \tau)) + RU = U_N + RU, \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-06-00302, 09-01-12166).

здесь U_N - построенное AP решения с точностью $O(\epsilon^N)$, RU - остаточный член. Члены разложения функции всплеска определяются как решения параболических уравнений. В частности, $s_0(\zeta, t) = \varphi_0(\zeta, t)h_1$, где $\varphi_0(\zeta, t)$ определяется как решение задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\varphi_{0t} + M\varphi_{0\zeta\zeta} = F_{ef}(\varphi_0),$$

остальные s_i определяются из линейных параболических уравнений.

Уравнения для p_i получаются стандартно [1]. Получены экспоненциальные оценки функции s_i и p_i .

Доказана равномерная оценка остаточного члена.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978, 262 с.

2. Нестеров А.В., Шулико О.В. Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с малой нелинейностью в критическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007, Т. 47, №3, С. 438-444.

3. Нестеров А.В., Шулико О.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010, Т.50, №2, С.268-275.

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ МЕТОДОМ ХИРОТЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО УРАВНЕНИЯ

Новикова О.В., Редькина Т.В. (Ставрополь)

oly-novikova@yandex.ru

Для нелинейного комплекснозначного уравнения, полученного в [1] доказаны следующие утверждения.

ЛЕММА. Уравнение в частных производных на комплекснозначную функцию

$$\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \bar{p}^2) = 0 \quad (1)$$

с помощью паде-аппроксимации

$$p(x, t) = \frac{R(x, t) + iW(x, t)}{Q(x, t)}, \quad (2)$$

и использования оператора Хироты:

$$D_x \sigma \circ \tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \sigma(x + \epsilon) \tau(x - \epsilon) = \sigma_x \tau - \sigma \tau_x,$$

эквивалентно системе билинейного квадратичного вида

$$\begin{aligned} D_t R \circ Q + D_x^2 W \circ Q &= 0, & D_t W \circ Q + D_x^2 R \circ Q &= 0, \\ D_x^2 Q \circ Q + 4(R^2 - W^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

ТЕОРЕМА. Система уравнений (3) имеет решение вида

$$R = 1 - ce^\gamma, \quad W = 1 + ce^\gamma, \quad Q = \frac{8c}{b\alpha^2} + be^\gamma, \quad (4)$$

где $\gamma = \alpha x + \alpha^2 t$, c, b, α - произвольные действительные постоянные.

СЛЕДСТВИЕ. Уравнение в частных производных (1) имеет решение в виде

$$p(x, t) = \frac{b\alpha^2 [1 + i - ce^{\alpha x + \alpha^2 t} (1 - i)]}{8c + b^2 \alpha^2 e^{\alpha x + \alpha^2 t}}. \quad (5)$$

Литература

1. Редькина Т.В., Карюк А.И., Лушникова Г.А. Нелинейные уравнения в частных производных, имеющие операторную структуру изоспектральной деформации // Системы обработки информации. - Вып.2 (69). - Харьков, 2008. - С.18-28.

СИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ИЗ СЖИМАЕМОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Огарков В.Б., Бугаков В.М. (Воронеж)

Задача проектирования и расчета конических труб из сжимаемого упруго-пластического материала имеет важное научно-практическое значение в связи с технологией протяжки цилиндрических тел через конус. При симметричном нагружении конической трубы мы имеем одномерную задачу, в которой напряженно-деформированное состояние зависит только от угла Θ . Рассмотрим коническую трубу переменного сечения, граница которой совпадает с координатными поверхностями. $\Theta_1 = \text{const}$ $\dot{\epsilon}_{\Theta_2} = \text{const}$ ($\Theta_1 < \Theta_2$)

Ввиду полной симметрии уравнение равновесия и соотношение Коши примут такой вид [1]:

$$\frac{d\sigma_{\Theta}}{d\Theta} + \operatorname{ctg} \Theta (\sigma_{\Theta} - \sigma_{\varphi}) = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\Theta} = \frac{1}{r} \frac{dv}{d\Theta}; \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \Theta \quad (2)$$

Согласно деформационной теории пластичности будем иметь:

$$\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_{\Theta} - \sigma_0); \quad \varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_{\Theta} - \sigma_0); \quad \varepsilon_r - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_i - \sigma_0) \quad (3)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_{\Theta} + \varepsilon_{\varphi}); \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_{\Theta} + \varepsilon_{\varphi}) \quad (4)$$

$$\psi = \frac{3 \varepsilon_i}{2 \sigma_i}; \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K} \quad (5)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[(\varepsilon_r - \varepsilon_{\Theta})^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_{\varphi})^2 + (\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_{\varphi})^2]} \quad (6)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_r - \sigma_{\varphi})^2 + (\sigma_r - \sigma_{\Theta})^2 + (\sigma_{\Theta} - \sigma_{\varphi})^2]} \quad (7)$$

Для конической трубы имеем [1]:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_{\Theta} + \sigma_{\varphi}) \quad (8)$$

$$\sigma_r - \sigma_0 = 0; \quad \sigma_{\Theta} - \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{\Theta} - \sigma_{\varphi}); \quad \sigma_{\varphi} - \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi} + \sigma_{\Theta}) \quad (9)$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = 0; \quad \varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\Theta} + \varepsilon_{\varphi}) \quad (10)$$

Соотношения (3) примут вид:

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_{\varphi}) = \frac{1}{2}\psi(\sigma_{\Theta} - \sigma_{\varphi}); \quad \frac{1}{2}(\varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{\Theta}) = \frac{1}{2}\psi(\sigma_{\varphi} - \sigma_{\Theta}) \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_{\varphi} = \psi(\sigma_{\Theta} - \sigma_{\varphi}); \quad \psi = \frac{3 \varepsilon_i}{2 \sigma_i} \quad (12)$$

Для условия пластичности Мизеса:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_r - \sigma_{\Theta})^2 + (\sigma_r - \sigma_{\varphi})^2 + (\sigma_{\Theta} - \sigma_{\varphi})^2]} = \sigma_T \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[(\varepsilon_r - \varepsilon_\Theta)^2 + (\varepsilon_r - E_\varphi)^2 + (E_\Theta - E_\varphi)^2]} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{3}{2}(\varepsilon_\Theta - \varepsilon_\varphi)^2} = \frac{(\varepsilon_\Theta - \varepsilon_\varphi)}{\sqrt{3}}\end{aligned}\quad (14)$$

Соотношение (7) примет вид:

$$\frac{3}{2}(\sigma_\Theta - \sigma_\varphi)^2 = 2\sigma_T^2; \sigma_\Theta = \sigma_\varphi = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\quad (15)$$

Рассмотрим соотношение (12)

$$\varepsilon_\Theta - \varepsilon_\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(\varepsilon_\Theta - \varepsilon_\varphi) 2\sigma_T}{\sigma_T \sqrt{3}} = \varepsilon_\Theta - \varepsilon_\varphi\quad (16)$$

Подставим формулу (15) в уравнение равновесия (1):

$$\frac{d\sigma_\Theta}{d\Theta} = \frac{-2\sigma_T}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \Theta\quad (17)$$

$$\sigma_\Theta = -\frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta + C_1\quad (18)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\Theta - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta + C_1 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\quad (19)$$

Соотношение (12) выполняется автоматически. Имеет место объемный закон Гука:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\Theta = \frac{(\sigma_r + \sigma_\Theta + \sigma_\varphi)}{3\hat{E}}\quad (20)$$

При симметричном деформировании конической трубы:

$$\frac{3}{2}(\varepsilon_\Theta - \varepsilon_\varphi) = \frac{\frac{3}{2}(\sigma_\Theta - \sigma_\varphi)}{3K}; \varepsilon_\Theta + \varepsilon_\varphi = \frac{(\sigma_\Theta + \sigma_\varphi)}{3K}\quad (21)$$

$$\sigma_\Theta + \sigma_\varphi = -\frac{4\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta + C_1 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\quad (22)$$

Используем соотношение Коши (2):

$$\frac{dv}{d\Theta} + \operatorname{ctg} \Theta v = r \left[-\frac{4\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta + 2C_1 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \right]\quad (23)$$

$$\frac{v}{r} = e^{-\int \text{ctg } \Theta d\Theta} \left\{ \int e^{\text{ctg } \Theta d\Theta} \left[-\frac{4\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta + 2C_1 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \right] d\Theta + C_2 \right\} \quad (24)$$

$$v = \frac{r}{\sin \Theta} \left\{ \int \sin \Theta \left[-\frac{4\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta + 2C_1 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \right] d\Theta + C_2 \right\} \quad (25)$$

Имеем граничные условия:

$$\sigma_{\Theta}(\Theta = \Theta_1) = -p; \quad \sigma_{\Theta}(\Theta = \Theta_2) = -q \quad (26)$$

$$-\frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta_1 + C_1 = -p; \quad -\frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \sin \Theta_2 + C_1 = q;$$

$$\frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = p - q \quad (27)$$

Соотношение (27) представляет собой условие реализации полной пластической деформации по всей толщине конической трубы. Полученное решение может быть обобщено на случай неоднородной конической трубы:

$$\sigma_T + \sigma_T(\Theta); \quad K = K(\Theta) \quad (28)$$

Литература

1. Д.Д. Ивлев. Теория идеальной пластичности. М. Наука, 1966 - 230 с.

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА ИЗ СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Огарков В.Б., Шабанов М.Л., Петков А.Ф. (Воронеж)

Основная система уравнений имеет следующий вид [1]:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_{\Theta}) = 0 \quad (1)$$

$$r \frac{d\varepsilon_{\Theta}}{dr} + \varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_{\Theta} = \frac{u}{r} \quad (3)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3\hat{E}} + \psi(\sigma_r - \sigma_{\bar{n}\delta}); \quad \varepsilon_{\Theta} = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K} + \psi(\sigma_{\Theta} - \sigma_{\bar{n}\delta}) \quad (4)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K} + \psi(\sigma_r - \sigma_{\bar{n}\delta}); \varepsilon_{\bar{n}\delta} = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_{\Theta} + \sigma_{\varphi}) \quad (5)$$

Из условия симметрии имеем:

$$\varepsilon_{\Theta} = \varepsilon_{\varphi}; \sigma_{\Theta} = \sigma_{\varphi} \quad (6)$$

Для деформационной теории пластичности:

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \quad (7)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{\Theta} - \sigma_r)^2 + (\sigma_{\Theta} + \sigma_{\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi} - \sigma_r)^2} \quad (8)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_{\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_r)^2} \quad (9)$$

В случае центрально-симметричного деформирования шара для условия пластичности Мизеса получим:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(\sigma_{\Theta} - \sigma_r)^2} = \sigma_{\Theta} - \sigma_r = \sigma_T \quad (10)$$

$$\sigma_r - \sigma_{\bar{n}\delta} = \sigma_r - \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_{\Theta}) = \frac{2}{3}(\sigma_r - \sigma_{\Theta}) \quad (11)$$

$$\sigma_{\Theta} - \sigma_{\bar{n}\delta} = \sigma_{\Theta} - \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_{\Theta}) = \frac{1}{3}(\sigma_{\Theta} - \sigma_r) \quad (12)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r)^2} = \frac{2}{3}(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r) \quad (13)$$

В соответствии с формулой (7):

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r)}{\sigma_T} = \frac{(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r)}{\sigma_T} \quad (14)$$

Соотношения (4) примут такой вид [2]:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K} + \frac{2}{3} \frac{(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r)}{\sigma_T} (-\sigma_T) \quad (15)$$

$$\varepsilon_{\Theta} = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K} + \frac{1}{3} \frac{(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r)}{\sigma_T} (-\sigma_T) \quad (16)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K} - \frac{2}{3}(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r); \varepsilon_{\Theta} = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K} + \frac{1}{3}(\varepsilon_{\Theta} - \varepsilon_r) \quad (17)$$

$$\frac{2}{3}\varepsilon_{\Theta} + \frac{1}{3}\varepsilon_r = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K}; \quad \frac{2}{3}\varepsilon_{\Theta} + \frac{1}{3}\varepsilon_r = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{3K}; \quad (18)$$

Подставим в формулу (18) соотношения Коши (3)

$$\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = \frac{\sigma_{\bar{n}\delta}}{K} \quad (19)$$

Подставим формулу (10) в уравнение равновесия (1)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = 2\sigma_T; \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\sigma_T}{K} \quad (20)$$

$$\sigma_r = 2\sigma_T \ln r + C_1; \quad \sigma_{\Theta} = 2\sigma_T \ln r + \sigma_T + C_1 \quad (21)$$

$$\sigma_{\bar{n}\delta} = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_{\Theta}) = 2\sigma_T \ln r + \frac{2}{3}\sigma_T + C_1 \quad (22)$$

Уравнение (19) примет такой вид:

$$\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = \frac{\sigma_T}{K} \ln r + \frac{2\sigma_T}{3K} + \frac{C_1}{K} \quad (23)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$U(r) = \frac{C_2}{r^2} + C_3 r \ln r + C_4 r \quad (24)$$

$$C_3 = \frac{2\sigma_T}{3K}; \quad C_4 = \frac{C_1}{3K} \quad (25)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \quad \sigma_r(r = r_1) = -q \quad (26)$$

$$2\sigma_T \ln r_1 + C_1 = -p; \quad 2\sigma_T \ln r_1 + C_1 = -q \quad (27)$$

$$2\sigma_T \ln \frac{r_2}{r_1} = p - q \quad (28)$$

$$C_1 = -p - 2\sigma_T \ln r_1 \quad (29)$$

Если задана толщина шара, то соотношение (28) представляет собой условие реализации полной пластической деформации по всей толщине шаровой оболочки. Если заданы p и q , то соотношения (28) и (29) определяют предельную толщину шаровой оболочки, при которой реализуется полное пластическое состояние.

Литература

1. Н.И. Безухов. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. - М.: Высшая школа, 1966. - 500 с.

2. В.Б. Огарков, В.М. Бугаков. Полярно-симметричная деформация упругого цилиндра. Материалы конференции "Зимняя математическая школа". - М, 2009, с. 127-129.

О ВОЗМОЖНОСТИ УВЕЛИЧЕНИЯ СВОБОДЫ ВЫБОРА В ПРЯМЫХ МЕТОДАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Орёл Е.Н. (Москва)

Oryol-EN@list.ru

Рассматриваются прямые методы решения задач оптимального управления, не ограничивающие свободу выбора системы и, следовательно, не использующие "элементарную операцию".

Проблема создания прямых методов оптимального управления подробно изучается в монографии [1], где большое внимание уделяется алгоритму "киевский веник" В.С. Михалевича и Н.З. Шора. Трудность использования этого алгоритма состоит в том, что пространство состояний имеет мощность континуума, а двигаться приходится в рамках заранее заданной конечной сетки. Возникает необходимость построения управления, переводящего систему из одного заданного состояния в другое, достаточно близкое к нему, что реализуется с помощью "элементарной операции" [1]. При этом очевидно, что иногда для попадания в соседнее состояние необходим довольно сложный "манёвр разворота".

В настоящем докладе показано, что нет необходимости заставлять систему перемещаться по заранее заданным точкам – она сама может выбрать подходящее управление и оказаться в состоянии, которое заранее не намечалось. Ограничить процесс ветвления сети можно с помощью разбиения пространства состояний на конечное число (k) подмножеств. При построении дерева вариантов система может сама выбирать очередное состояние, но все выбранные ею состояния должны принадлежать разным подмножествам. Это позволяет хранить в памяти не более k единиц информации. Для построения траектории, претендующей на оптимальность, можно использовать алгоритмы поиска в глубину или в ширину [2-3].

Литература

1. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. - М.: Наука, 1971. 424 с.

2. Орёл Е.Н. Метод решения задач оптимального управления // Докл. АН СССР, 1989, т. 306, № 6. С. 1301-1304.

3. Орёл Е.Н. Алгоритмы поиска квазиоптимального управления, использующие разбиение пространства состояний // Журнал вычисл. матем. и ма-тем. физ. Т. 29. 1990. № 9. С. 1283-1293.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПОЛЯ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Орёл О.Е. (Москва)

olga_orel72@mail.ru

В [1] были рассмотрены достаточные условия для автономных систем оптимального управления. Здесь представлены аналогичные результаты для неавтономных систем [2].

Пусть $f: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L: G \times U \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемые отображения, где $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – расширенное фазовое пространство векторов вида (t, \mathbf{x}) ; $U \subset \mathbb{R}^m$ – множество управлений. Не делая различия между траекторией и процессом управления, обозначим их символом γ . Процесс γ есть пара вектор-функций $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$, определенных на отрезке $t \in [a, b]$ и удовлетворяющих уравнению $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. Минимизируемый функционал: $J(\gamma) = \int_a^b L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$. Крайние точки траектории γ обозначим соответственно через $\alpha(\gamma) = (a, \mathbf{x}(a))$ и $\beta(\gamma) = (b, \mathbf{x}(b))$.

Зафиксируем терминальную фазовую точку $(T, \mathbf{z}) \in G$ (вместо неё можно фиксировать стартовую точку). Процесс управления $\gamma = (\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$, для которого $\beta(\gamma) = (T, \mathbf{z})$, является оптимальным, если $J(\gamma) \leq J(\gamma')$ для любой траектории γ' с теми же концами ($\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma')$, $\beta(\gamma) = \beta(\gamma')$). Будем предполагать, что имеется центральное поле траекторий \mathcal{N} , однократно покрывающих область G и оканчивающихся в (T, \mathbf{z}) . Определим *действие* (аналог функции Беллмана): $S(a, \mathbf{y}) = J(\gamma)$, где $\gamma \in \mathcal{N}$ и $\alpha(\gamma) = (a, \mathbf{y})$.

Предложение. Для оптимальности поля \mathcal{N} необходимо и достаточно выполнение неравенства $J(\gamma) + S(\beta(\gamma)) - S(\alpha(\gamma)) \geq 0$ для любого процесса γ , момент окончания которого не превосходит T .

Из этого предложения вытекает, что гладкое центральное поле экстремалей Понтрягина оптимально.

Литература

1. Орёл Е.Н., Орёл О.Е. Проблема абсолютного экстремума в задачах оптимального управления. // Современные методы тео-

рии краевых задач: Материалы весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXI". - Воронеж: ВГУ, 2010. С. 171-172.

2. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1969, 384 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Орлова Т.В. (Воронеж)

За последние годы в учебном процессе активно стали применяться цифровые образовательные ресурсы по многим предметам школьной программы. Это электронные учебники, обучающие программы, программы тестирования, тренажеры, информационные ресурсы Интернета.

Подключение всех школ России к сети Интернет в рамках Приоритетного национального проекта «Образование» сделало интернет — ресурсы доступными для всех образовательных учреждений. Использование цифровых образовательных ресурсов значительно облегчает подготовку учителя к уроку, благодаря Интернету появилась возможность обмениваться опытом с коллегами, участвовать в обсуждении актуальных проблем на различных образовательных форумах и порталах.

В своей работе я часто обращаюсь к материалам моих коллег, которые опубликованы на сайте издательского дома «Первое сентября» (образовательный портал «Открытый урок»), к цифровым образовательным ресурсам сайта www.school-collection.edu.ru. При подготовке к экзаменам очень большие возможности предоставляет сайт Федерального института педагогических измерений www.fipi.ru и открытый банк заданий ЕГЭ по математике www.mathege.ru.

Кроме того, мы с учащимися создаем собственные компьютерные презентации и учебно-методические комплекты с использованием программ Power Point, Word, Publisher, Excel. Учащиеся интересуются творческим процессом и его результатом. Особенно вдохновляют их возможности редактора Power Point. Это в первую очередь оформление, красочность слайдов, всевозможные анимации. Ломаются представления о том, что математика — скучная, «сухая» наука.

Работа по подготовке ЦОР помогает развивать навыки использования информационных технологий и различных источников ин-

формации для выполнения творческих работ, развивать умения учащихся вести индивидуальную работу, закладывается основа мышления и практической деятельности ребенка, тем самым помогает формировать интерес к математике, Древняя китайская мудрость гласит: «Расскажи мне, и я забуду, покажи мне, и я запомню, вовлеки меня – и я пойму».

Использование компьютера дает возможность накопления компьютерных учебных материалов. Это позволяет сформировать базу данных хранимых ресурсов, их систематизировать, что дает возможность быстро найти соответствующие интересующей теме ЦОР как для учителей, так и для учеников.

Таким образом, использование электронных образовательных ресурсов для учащихся – это мотивация к учению и существенное расширение возможностей самостоятельной работы, возможность участия в различных конкурсах, олимпиадах, для учителя – значительное облегчение и сокращение времени подготовки к уроку.

**О ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИХ
МОДЕЛЯХ ПРОГНОЗА НЕБЛАГОПРИЯТНЫХ
ЯВЛЕНИЙ ПОГОДЫ НА ТЕРРИТОРИИ
ЦЕНТРАЛЬНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
РОССИИ В ЛЕТНИЙ ПЕРИОД 2010 ГОДА**

Переходцева Э.В. (Москва)

perekhod@mecom.ru

Летний период 2010 года, особенно месяцы июль и август, отличался аномально высокой максимальной температурой воздуха и длительным отсутствием значимого количества осадков (т.е. засухой). По данным УГМС ЦЧО на 2 августа 2011 года, например, в Воронежской, Тамбовской, Липецкой областях дневная температура составляла 40,5, в Белгородской, Курской и Брянской областях – 38,4 градуса, что значительно превышает многолетний максимум в этих пунктах. Некоторые специалисты Гидрометцентра связывают наступление такой мощной аномалии температуры с соотношением периодов вращения Земли и Луны. В оперативной системе АСООИ ежедневно просчитывался гидродинамико-статистический прогноз факта осадков и прогноз сильных осадков с заблаговременностью до двух суток. Прогнозы очень точно совпадали с фактическими даннымию. В течение более полутора месяцев в прогнозе дневных осадков над территорией Центрального Федерального Округа прогнозировалось отсутствие осадков, в то время как все дожди вы-

падали в Польше, Германии и Румынии, вызывая там разрушительные наводнения. Только после 16 августа на территории ЦФО появилась область осадков, а 18 августа прошел холодный фронт, принесший значительные осадки и понижение температуры. В докладе наглядно на примерах представляется этот смоделированный процесс.

Вместе с тем на территории Центрального Федерального Округа (ЦФО), включающего 17 областей, было отмечено по характеру разрушений и по замерам на метеостанциях значительное количество сильных шквалов, когда скорости порывов ветра превышали 24м/с. Прогнозирование сильных шквалов и смерчей (даже за 3ч, как штормовое предупреждение), является до настоящего времени одной из актуальных и труднейших задач синоптической практики.

Гидродинамические модели прогноза погоды, базирующиеся на численном решении уравнений движения атмосферы, уравнения притока тепла и уравнения непрерывности пока не дают успешного прогноза даже максимального ветра скоростью $V > 19$ м/с. На нескольких предыдущих конференциях автором были представлены результаты объективного и автоматизированного прогноза сильных шквалов и смерчей с заблаговременностью до 36ч, основанного на использовании гидродинамико-статистической модели прогноза максимальной скорости ветра $V > 24$ ч. При этом полученные на фактических данных статистические решающие правила распознавания метеорологических ситуаций, способствующих возникновению сильных шквалов, рассчитывались на выходных прогностических полях полусферной модели (автор – Беркович Л.В.). В настоящее время в связи с развитием и усовершенствованием в Гидрометцентре России региональной гидродинамической модели с более мелким разрешением (автор – Лосев В.М) автором была разработана новая гидродинамико-статистическая модель прогноза сильных шквалов и максимального ветра скоростью более 24м/с. Всего таких явлений по областям ЦФО наблюдалось 22, при этом 21 из них было предупреждено нашим прогнозом, в том числе и в Воронежской области 6 июля 2011 года и 24 июля 2011 года, когда были отмечены максимальные скорости ветра 31м/с и 26м/с соответственно.

В настоящее время с целью увеличения заблаговременности прогноза разрабатывается гидродинамико-статистическая модель прогноза явлений сильных шквалов и сильных летних осадков с использованием выходных прогностических полей метеоэлементов

полулагранжевой модели среднесрочного прогноза (автор – Толстых М.А.).

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Петросян Г.Г. (Воронеж)

garikpetrosyan@yandex.ru

Рассматривается теорема существования решения для дифференциального уравнения в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \quad t \in [0, T]$$

с нелинейным начальным условием типа $y(0) + g(y) = y_0$ где $D^\alpha, 0 < \alpha < 1$ - дробная производная Римана-Лиувилля, A - линейный замкнутый оператор в E , $f : [0, T] \times E \rightarrow E$ - непрерывное нелинейное отображение, и $g : C([0, T]; E) \rightarrow E$ - непрерывное отображение, $y_0 \in E$.

Предполагается, что f удовлетворяет условиям:

1. Для любого непустого ограниченного подмножества $Q \subset E$, существует непрерывная функция $\mu_Q : [0, T] \rightarrow R_+$, что выполнено $\|f(t, y)\|_E \leq \mu_Q(t)$, для любого $t \in [0, T], y \in Q$.

2. Существует непрерывная функция $k : [0, T] \rightarrow R_+$, что для каждого непустого $Q \subset E$, выполнено $\chi(f(t, Q)) \leq k(t)\chi(Q)$ для любого $t \in [0, T], y \in Q$, где χ - хаусдорфова мера некомпактности в E .

Литература

1. M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin - New-York, 2001.

2. V. Obukhovskii and J.-C. Yao, *Some existence results for fractional functional differential equations*, *Fixed Point Theory*, 11(2010)No.1, 85-96.

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ
„ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО“ В СТАЦИОНАРНОМ
СЛУЧАЕ**

Пилюгин В.С. (Москва)

vpilyugin@mail.ru

В развивающихся странах в переходном процессе, как, например, сегодня, в России, идет процесс установления вертикали власти, учитывающей специфику страны.

В рамках модели "Власть-Общество" А. П. Михайлова [4], в работе рассматриваются задачи оптимального управления возникающие в системе взаимодействия власти и общества при управлении СРЕДОЙ. Для простоты рассмотрения, изучаются стационарные распределения власти в системе "Власть-Общество" в предположении о нелинейности реакции ГРАЖДАНСКОГО ОБЩЕСТВА. Таким образом, правая часть дифференциальной задачи системы представляет собой кубическую нелинейность [1-2]. Допуская в рассмотрение, что изучаемая властная вертикаль является достаточно протяженной, с высоким уровнем безответственности элементов иерархии и предполагая, что механизм команд через "голову" [3-4] отсутствует в модели соответствующая краевая задача становится сингулярно возмущенной. Таким образом оптимальное распределение власти есть решение сингулярно возмущенной вариационной задачи. Такая модель может иметь несколько решений, которые могут содержать как классические погранслойные участки вблизи границы, так и участки с быстрым переходом в окрестности некоторых внутренних точек.

Распределение власти в иерархии будет удовлетворять следующей краевой задаче

$$\epsilon^2 \frac{d^2 p}{dx^2} = (p - p_1(x))(p - p_2(x))(p - p_3(x)) + bu(x),$$

$$\frac{dp}{dx}(0) = \frac{dp}{dx}(1) = 0, 0 < \epsilon \ll 1,$$

где управление $u(x)$ отражает естественные возможности для государства и общества изменять как величину реакции, так и ее распределение по иерархии, b -коэффициент усиления реакции общества. Очевидно, что это влияние положительно и других ограничений на него не накладываем, т.е., считаем $u(x) > 0, 0 \leq x \leq 1$.

В качестве критерия оценки допустимых управлений предложим квадратичный интегральный функционал

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\alpha_1 [p - p^*]^2 + \alpha_2 \left(\epsilon \frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha_3 u^2) dx \rightarrow \min_u.$$

Далее в работе строится асимптотика решения соответствующей сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с внешними пограничными слоями. При этом используется классический асимптотический анализ [5] и формализм прямой схемы [6]. Проведена интерпретация полученного асимптотического решения в терминах модели. Для гипотетической иерархии приводятся результаты численных расчетов.

Литература

1. Дмитриев М.Г., Петров А.П. Анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти // Математические методы и приложения. Труды девятого математических чтений МГСУ. М.: 2002. С. 150-154.
2. Дмитриев М.Г., Петров А.П. и др. Моделирование социально-политической и экономической динамики. М.: Издательство РГСУ, 2004. - 224 с.
3. Михайлов А.П. Математическое моделирование власти в иерархических структурах // Матем. моделирование, 1994. Т.6, №6. С. 108-138.
4. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: идеи, методы, примеры. М.: Наука. Физматлит, 2001., 320 с.
5. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Об асимптотической теории пространственных контрастных структур // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 1988. Т.28. №3, С. 346-361.
6. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. №1 С.3-53.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Плаксина В.П. (Пермь)

vpplaksina @ list.ru

Пусть W^2 — пространство абсолютно непрерывных функций, производная которых суммируема на отрезке $[a, b]$. Пусть, далее,

функция $p(t)$ суммируема на отрезке $[a, b]$, функция $h(t)$ непрерывна и разность $h(t) - t$ принимает значения одного знака, то есть справедливо одно из неравенств $h(t) \leq t$ или $h(t) \geq t$, при этом мера множества $t \in [a, b]$, для которых $h(t) = a$ или $h(t) = b$, равна нулю. Обозначим $x_h^{[a,b]}(t) = x[h(t)]\sigma_h(t)$, где $\sigma_h(t) = 1$ для $h(t) \in [a, b]$ или 0 в противном случае.

Рассмотрим двухточечные краевые задачи

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h^{[a,b]}(t) = f(t) \quad \dot{x}(a) = 0, x(b) = 0 \quad t \in [a, b] \quad (1)$$

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h^{[a,b]}(t) = f(t) \quad x(a) = 0, \dot{x}(b) = 0 \quad t \in [a, b] \quad (2)$$

Пусть $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. В пространстве $W^2[a, b]$ рассмотрим вспомогательные задачи

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h^{[\alpha,\beta]}(t) = f(t) \quad \dot{x}(a) = 0, x(\beta) = 0 \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (3)$$

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h^{[\alpha,b]}(t) = f(t) \quad x(\alpha) = 0, \dot{x}(b) = 0 \quad t \in [\alpha, b] \quad (4)$$

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h^{[\alpha,\beta]}(t) = f(t) \quad x(\alpha) = 0, x(\beta) = 0 \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (5)$$

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h^{[\alpha,\beta]}(t) = f(t) \quad x(\alpha) = 0, \dot{x}(\alpha) = 0 \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (6)$$

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h^{[\alpha,\beta]}(t) = f(t) \quad x(\beta) = 0, \dot{x}(\beta) = 0 \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть задача (1) однозначно разрешима и ее функция Грина сохраняет знак. Тогда для всех $\beta \in (a, b)$ однозначно разрешима задача (3) и для всех $\alpha, \beta \in (a, b)$ однозначно разрешимы задачи (5), (6), (7). Пусть задача (2) однозначно разрешима и ее функция Грина сохраняет знак. Тогда для всех $\alpha \in (a, b)$ однозначно разрешима задача (4) и для всех $\alpha, \beta \in (a, b)$ однозначно разрешимы задачи (5), (6), (7).

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

2. А.И.Домошницкий. О взаимобусловленности знаков функций Грина двухточечных краевых задач// Краевые задачи. Межвуз. сб. научн. тр. Пермь. ППИ. 1987. С.15-20.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ СИНГУЛЯРНОГО ПО НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ УРАВНЕНИЯ

Плаксина И.М. (Пермь)

impl @ list.ru

Пусть D_0^p - пространство абсолютно непрерывных скалярных вещественных функций $x: [0, n\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих производные из пространства L^p и удовлетворяющих условию $x(m\pi) = 0, m = 0, 1, \dots, n$. Здесь n - некоторое фиксированное натуральное число. Пусть, далее, оператор $T: D_0^p \rightarrow L^p$ вполне непрерывен.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{k}{\sin t} x(t) + (Tx)(t) = f(t) \quad t \in [0, n\pi] \quad (1)$$

Уравнение (1) является сингулярным по независимой переменной в точках $0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$. В работе [1] приведено достаточно подробное описание математических моделей процессов, при изучении которых возникают сингулярные уравнения. Там же содержится подробная библиография. Из более поздних работ, в которых изучаются сингулярные уравнения, отметим монографии [2-4].

Основным результатом предлагаемой работы является тот факт, что фредгольмовость уравнения (1) определяется одним параметром, числом k .

Пусть q - сопряженный к p индекс: $q = \frac{p}{p-1}$.

Теорема. Уравнение (1) фредгольмово тогда и только тогда, когда $k \in \left(-\infty, -\frac{1}{q}\right) \cup \left(\frac{1}{q}, +\infty\right)$.

Литература

1. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т.30. С. 105-201.

2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

3. Кигурадзе И.Т. Об условиях корректности линейных сингулярных краевых задач // Дифференц. уравнения. 2010. Т.46. №2. С.183-190.

4. Rachunkova I., Stanek S., Tvrdy M. Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Differential Equations. Hindawi Publishing Corporation, New York, USA, 2009. 268 pages.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ПРИ АНАЛИЗЕ ИСТОРИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

anpokr@petrodvorets.spb.ru

Рабочие гипотезы. I. Властные лица любого государства иногда совершали и будут совершать выгодные им преднамеренные фальсификации истории своей страны, используя закрепление этих версий в учебниках истории. Примеры: 1) Лет 40 назад в школах Японии были введены новые учебники истории, в которых было напечатано, что СССР в сентябре 1945 г. сбросил атомные бомбы на Хиросиму и Нагасаки. Сейчас большинство японцев верят этой "школьной истине". 2) Великая рабовладельческая революция в России в 1606 - 1613 г.г. называется "смутным временем". Историки изучали любые события этого времени, кроме главного (указ "об отмене Юрьего дня" издан 160 лет спустя!). 3) Успешный государственный переворот Николая I в декабре 1825 г. называется "восстанием декабристов". **II.** Властные лица мировых религий (или идеологий) иногда совершали фальсификации истории своих религий (или идеологий). Пример: В 1582 г. римский папа ввёл новый календарь на основании вычисленных дат затмений, упомянутых в Евангелии. Календарь (вычислен лет за 40 до открытия законов Кеплера) канонизирован и используется до сих пор.

Проблема выявления ошибок в истории. Прежде всего необходимо найти противоречия или сходство различных исторических текстов. Для хронологии эта огромная работа выполнена А.Т.Фоменко и Г.В.Носовским. Но есть и другие возможности для искажения истории. Гигантский объём и сложность исторической информации требуют использования вычислительной техники. При этом возникают новые проблемы: перевод исторических текстов в электронную форму, выделение разных аспектов текстов и их сравнение. Вероятно, что развитие в ближайшие десятилетия вычислительной техники и программирования сделают возможной "полную компьютеризацию" истории.

В заключение – пример общепринятой версии исторического процесса. В 18 - 19 веках был канонизирован "обязательный

порядок" смены общественных формаций (рабовладение - феодалы - капитализм - социализм). С этого утверждения начинался "Коммунистический манифест" К. Маркса и Ф. Энгельса. За эту ошибку наша страна жестоко расплачивается.

МЕТОД ПОДОВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ НЕСАМОСOPЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Поляков Д.М. (Воронеж)

DmitryPolyakow@mail.ru

Пусть $L_2[-1, 1]$ — гильбертово пространство измеримых по Лебегу на $[-1, 1]$ комплекснозначных функций, определенных на $[-1, 1]$ со скалярным произведением $(x, y) = \int_{-1}^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$, $x, y \in L_2[-1, 1]$.

Через $W_2^4[-1, 1]$ обозначим пространство Соболева $\{y : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} : y \text{ имеет три непрерывные производные, } y''' \text{ абсолютно непрерывна и } y^{(IV)} \in L_2[-1, 1]\}$.

Рассматривается оператор

$$L = A - B : D(L) \subset L_2[-1, 1] \rightarrow L_2[-1, 1],$$

который определяется дифференциальным выражением

$$Ay = y^{(IV)}, \quad By = a(t)y'' + b(t)y,$$

с областью определения $y \in D(L) = D(A) = \{y \in W_2^4[-1, 1] : y(-1) = y(1) = 0, y'(-1) = y'(1) = 0\}$, где $a, b \in L_\infty[-1, 1]$ (т.е. пространству существенно ограниченных функций на $[-1, 1]$).

Методом подобных операторов получен следующий результат.

Теорема. Оператор L является оператором с компактной резольвентой и его собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ допускают следующую асимптотику

$$\lambda_k = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right)^4 + \frac{\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right)^2}{2e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}}(a_{k1} + a_{k2}) + o(\pi k), k \in \mathbb{N},$$

где $a_{k1} = \int_{-1}^0 a(t)e^{(\frac{\pi}{2} - 2\pi k)t} dt$, $a_{k2} = \int_0^1 a(t)e^{(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)t} dt$ для нечетного случая;

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)^4 + \frac{\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)^2}{2e^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}}(b_{k1} + b_{k2}) + o(\pi k), k \in \mathbb{N},$$

где $b_{k1} = \int_{-1}^0 a(t)e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)t} dt$, $b_{k2} = \int_0^1 a(t)e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)t} dt$ для четного случая.

Литература

1. А.Г. Баскаков, *Гармонический анализ линейных операторов*, изд-во Воронежского государственного университета, Воронеж, 1987.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА - ПУАССОНА - ДАРБУ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Попова В.А. (Воронеж)

PVA300378@mail.ru

Рассматривается двухточечная обратная задача для дифференциального уравнения с ограниченным оператором в банаховом пространстве E

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t) + f(t) + p\varphi(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1} I^\beta u(t) = u_1. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi_k(z) = \int_0^1 S_k(\tau, z)\varphi(\tau) d\tau,$$

где

$$S_k(\tau, z) = \frac{\Gamma((1+k)/2)\Gamma((3-k)/2)}{\Gamma(\beta)} \int_\tau^1 t^{1/2-k/2} \tau^{1/2+k/2} (1-t)^{\beta-1} \times \\ \times (I_{(k-1)/2}(\tau\sqrt{z})I_{(1-k)/2}(t\sqrt{z}) - I_{(k-1)/2}(t\sqrt{z})I_{(1-k)/2}(\tau\sqrt{z})) dt,$$

Теорема. Для того, чтобы задача (1), (2) при любых $u_0, u_1 \in E$, $f(t) \in C([0, 1], E)$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора A не обращалась в нуль функция $\chi_k(z)$, то есть, чтобы

$$\chi_k(z) \neq 0, \quad z \in \sigma(A). \quad (3)$$

Замечание. Если $\varphi(t) = 1$ и $k \neq 2n + 1$, $n \in N$, то для того, чтобы задача (1), (2) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора A выполнялось условие

$$I^\beta \left(\frac{{}_0F_1(k/2 + 1/2, t^2 z/4) - 1}{z} \right) \neq 0, \quad z \in \sigma(A) \quad (4)$$

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ НА ГРАФЕ

Провоторов В.В. (Воронеж)

wvprov@mail.ru

В классе функций из C^2 представлен метод нахождения граничных управляющих воздействий в задаче управления колебаниями упругой системы из m струн, закрепленных по типу графа-звезды, состоящей в переводе процесса колебаний системы из заданного начального состояния в заданное финальное состояние.

Колебания на каждом из ребер графа Γ при произвольном значении времени t описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k}, \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

внутри каждого ребра γ_k ($k = \overline{1, m-1}$), $t \in (0, T)$ и соотношениями в узле ξ (условия непрерывности и гладкости)

$$\begin{aligned} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} \quad (k = \overline{1, m-1}), \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2)$$

К соотношениям (1), (2) добавляются начальные условия при $x \in \Gamma$, $t = 0$:

$$\Omega(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

и финальные условия при $x \in \Gamma$, $t = T$:

$$\Omega(x, T) = \tilde{\varphi}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, T) = \tilde{\psi}(x), \quad (4)$$

а также граничные условия в граничных узлах графа:

$$\Omega(0, t)_{\gamma_k} = \mu_k(t) \quad (k = \overline{1, m-1}), \quad \Omega(\pi, t)_{\gamma_m} = \nu(t), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

(здесь используются обозначения монографии [2]). Для заданных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\mu_k(t)$ ($k = \overline{1, m-1}$), $\nu(t)$ выполнены условия согласования и принадлежности классу C^2 .

Задача управления колебаниями дифференциальной системы (1)-(2) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$ ($k = \overline{1, m-1}$), $\nu(x)$ из граничных условий (5) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись начальные условия (3), а в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (4).

В соответствии с новым направлением в теории граничной управляемости (конструктивная управляемость) открытым работами В.А. Ильина (например, [1]), обосновывается существование граничных управляющих воздействий и представлен метод нахождения их. Для решения поставленной задачи рассматриваются ее частные случаи – гашение колебаний системы и перевод покоящейся системы в заданное состояние. Анализ поставленной задачи основан на спектральной технике (анализ Фурье): сравнительно легко преодолеваются сложности, порожденные геометрией графа, тем более в случае, когда граф является произвольным деревом. При этом используется свойство спектральной полноты системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, соответствующей начально-краевой задаче для системы (1)-(2) [3]. Главный результат исследования представлен в виде готовых формул, определяющих искомые граничные управления как функции времени.

Литература

1. Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 11. С.1517-1534.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит, 2004.
3. Провоторов В.В. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде // Математический сборник. 2008. Т. 199. № 10. С.105-126.

ОБ УСПОКОЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ИЗ ТРЕХ СТРУН

Провоторова Е.Н. (Воронеж)

enprov@mail.ru

В задачах управления колебаниями сетеподобных конструкций (колебания линейного фрагмента описываются классическим вол-

новым уравнением, в каждом узле сетки заданы условия связи), как правило, преследуются две цели: 1) погасить нежелательные колебания и неустойчивости, 2) генерировать колебания заданных частот. Управляющие воздействия на объект прилагаются либо во всех узлах конструкции, либо только на границе конструкции, т.е. в граничных узлах сети [1, 2]. Следует отметить, что доступность управлению всех узлов сети [1] является обременительным условием в прикладных задачах, постановка же задачи граничного управления в работе [2] отличается от традиционной: управление осуществляется частичным динамическим состоянием сетеподобной конструкции – амплитудами волн, скорости изменения амплитуд остаются вне влияния управлений. Автором рассматривается дифференциальная система на графе-звезде, описывающая малые колебания конструкции из трех струн. Обосновывается существование граничных управляющих воздействий и представлен метод нахождения их в модельной задаче, состоящей в переводе процесса колебаний системы из заданного начального состояния в состояние покоя. Для анализа поставленной задачи используется спектральная техника (анализ Фурье): сравнительно легко преодолеваются сложности, порожденные геометрией графа, тем более в случае, когда граф содержит m ребер или является произвольным деревом. Главный результат исследования представлен в виде готовых формул, определяющих искомые граничные управления как функции времени.

Литература

1. Avdonin S. A., Ivanov S. A. Families of exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems. Cambridge University Press, Cambridge: 1995. 93 с.
2. Белишев М.И. О граничной управляемости динамической системы, описываемой волновым уравнением на одном классе графов (на деревьях) // Записки научных семинаров ПОМИ, Том 308, 2004. С.23-45.

О ФОРМИРОВАНИИ НАВЫКОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Романова И.С. (Воронеж)

Формирование навыков самостоятельной деятельности учащихся – одна из актуальных задач современного образования. При обучении математике эта задача решается: 1) в процессе восприятия

учащимися информации на уроке; 2) в процессе применения изученной информации на уроке; 3) в процессе выполнения домашних заданий.

Следует учесть, что навыки самостоятельной деятельности не являются чем-то данным человеку от рождения. Выработка их происходит постепенно в течение всех лет обучения. С первых дней обучения работа по формированию навыков самостоятельной деятельности учащихся проводится на начальном уровне – восприятия и воспроизведения учеником информации, сообщённой на уроке, по контролирующим вопросам учителя. Так как на этом этапе обучения учащийся не умеет самостоятельно оценивать материал по степени сложности и важности изложенных в нём сведений, то одной из задач учителя при составлении системы контролирующих вопросов является обучение школьников выявлению узловых моментов. Поэтому в этот период система вопросов, которые контролируют усвоение теоретического материала, должна охватывать все узловые моменты излагаемого материала, не должна содержать мало-значительные вопросы, вопросы, не относящиеся к основному материалу.

При традиционном способе преподавания учитель часто ставит ученика в положение объекта передаваемой ему извне информации. Такой постановкой образовательного процесса учитель искусственно задерживает развитие познавательной активности ученика, наносит ему большой вред в интеллектуальном и нравственном отношении.

«Знание только тогда знание, когда оно приобретено усилиями своей мысли, а не памятью», — эти слова Л. Н. Толстого должны стать смыслом работы учителя.

Самостоятельную деятельность учащихся можно и нужно организовывать на различных уровнях: от воспроизведения действий по образцу и узнавания объектов путем их сравнения с известным образцом до составления модели и алгоритма действий в нестандартных ситуациях. Учителю необходимо учитывать, что при составлении заданий для самостоятельной работы степень сложности должна отвечать учебным возможностям детей.

Переход с одного уровня на другой должен осуществляться постепенно, только когда учитель будет убежден, что учащийся справится со следующим уровнем самостоятельности. Иначе в атмосфере спешки и нервозности у ученика возникают пробелы в знаниях.

Очень важно, чтобы содержание самостоятельной работы, фор-

ма и время ее выполнения отвечали основным целям обучения данной теме на данном этапе.

В то же время учителю нужно знать, что злоупотребление самостоятельной работой в учебном процессе также вредно, как и ее недооценка. Бывает так, что учитель включает в урок самостоятельную работу без особой необходимости, просто ради разнообразия, не продумав ее содержание и форму организации. Результаты бывают плачевны: или дети не готовы выполнить задание, или не хватило времени и т.п. А в результате — зря потрачено драгоценное время урока. Но если, составляя план урока, учитель тщательно продумал место и время самостоятельной работы, четко определил ее общее содержание, разбил задания по разным уровням сложности, то она сыграет свою положительную роль.

Но нельзя забывать, что на успехи ученика огромное влияние оказывает настрой самого учителя. Здесь очень важен известный психологам эффект Резенталя — Якобсона. Эти исследователи провели следующий эксперимент: они давали учителям заведомо неправильную информацию о показателях умственного развития детей. Как выяснилось, последующие достижения учеников зависели от этой информации, т. е. от мнения учителя о возможностях ученика. Те дети, которые воспринимались учителем как более одаренные (хотя таковыми не являлись), показали большие сдвиги в учебе по сравнению с детьми, которых учитель считал менее одаренными. Вот почему так важно умение учителя создать в классе доброжелательную атмосферу, особенно во время выполнения самостоятельных работ.

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРНОМ УРАВНЕНИИ

Рыданова С.С. (Воронеж)

rydanova_vrn@mail.ru

Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства. $A : D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$, $B : D(B) \subset E_2 \rightarrow E_3$ — замкнутые сюръективные линейные операторы.

Обозначим $\|A^{-1}\|, \|B^{-1}\|$ — нормы многозначных отображений, обратных к A, B соответственно (см. [1]). Пусть $C = B \circ A$. Рассмотрим уравнение:

$$C(x) = f(x). \quad (1)$$

Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в x_0 , $f : B_R[x_0] \rightarrow E_3$ — вполне непрерывное отображение, $N(C, f)$ множество решений уравнения (1).

теорема. Если существует такое $k > \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_{\mathbb{R}}[x_0]$ справедливо неравенство:

$$\|C(x_0) - f(x)\| < \frac{R}{k},$$

то:

- 1) $N(C, f) \neq \emptyset$;
- 2) $N(C, f) \cap \partial B_{\mathbb{R}}[x_0] \neq \emptyset$;
- 3) $\dim(N(C, f)) \geq \dim(\text{Ker}(C))$.

Эта теорема продолжает исследования, начатые в [2].

Литература

[1] Гельман Б. Д. Операторные уравнения и задачи Коши для вырожденных дифференциальных уравнений // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. 2007, №2, с. 86-91.

[2] Рыданова С. С. Об операторных уравнениях с сюръективными операторами // Современные методы теорий функций и смежных проблемы. 2011, с.289-290.

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Рыжкова А.Е. (Воронеж)

В программе по математике указано, что математика, дав-но став языком науки и техники, в настоящее время всё шире проникает в повседневную жизнь и обиходный язык, всё более внедряется в традиционно далёкие от неё области. Поэтому счита-ю важным вопросом осуществление межпредметных связей, что способствует выработке единого целостного научного мировоззрения, созданию общей естественнонаучной картины мира. В нашей школе реализуется обучение по двум профилям: информационно-технологический и социально-гуманитарный. Межпредметные свя-зи и интеграция математики с предметами физика и информатика давно вошли в практику и их необходимость очевидна. Но очень интересным является привлечение сведений из общественных наук – истории и обществознания в классах, где дети планируют изуче-ние этих предметов на профильном уровне на 3-й ступени.

Так, например, на уроке по теме «Решение задач с помощью уравнений» в 7 классе я предложила ребятам вспомнить, что на уроках истории изучается культура и архитектура России 16 века времен правления Ивана Грозного.

— Сегодня урок будет необычным. Мы совершим воображаемую экскурсию по архитектурным памятникам России 16-го века. На слайдах – фотографии архитектурных памятников России: Троицкий собор Троицко-Сергиева монастыря (основан в 14 веке Сергием Радонежским), церковь Спаса Преображения в Новгороде, Успенский собор Московского Кремля, Печорский монастырь Псково-Печорской крепости. В ходе путешествия нам предстоит разгадать загадку строительства одного из исторических памятников России – Печорского монастыря. Существует легенда, о том, что Иван Грозный, не желая создания в Печорах большой крепости, разрешил игумену монастыря Корнилию построить такую крепость, какую займет на земле воловья шкура. Корнилий схитрил и разрезал шкуру на полоски, которые и составили периметр будущей крепости. Решаем задачу: - Найти количество полосок и вычислить протяженность крепостной стены, зная, что длина каждой полоски составляла 2м, ширина одной трети от всего количества полосок – 5мм, одной трети – 6мм, еще одной трети – 7мм. Площадь воловьей шкуры приближенно считается равной 4,38кв.м.

Еще один пример решения нескольких интересных задач в 8 классе, связанной с темой обществознания «Жилищное право» и использованием понятия процента.

1) Вычислить, сколько процентов дохода семьи составляет оплата коммунальных услуг за февраль месяц, при условии, что семья проживает в частном доме. Группа из 3-х человек получила следующие результаты: 10 %, 8 %, 12 %. Затем предлагалось найти среднее значение.

2) Необходимо купить квартиру в строящемся доме площадью 45 м² квадратный метр жилья стоит 25000р. Доход от бизнеса предпринимателя составляет 15 % в год. Первоначальный капитал 450000р. Через сколько лет этот человек сможет купить квартиру?

3) Договор найма жилого помещения предполагает, что ежемесячно за однокомнатную квартиру необходимо заплатить собственнику жилья 9000р., кроме того, 10 % от оставшегося дохода семьи составит плата за коммунальные услуги. Ежемесячный доход семьи равен 25000р. Договор найма жилого помещения предусматривает ремонт на сумму 50000 р. Сколько процентов годового дохода семьи составит плата за жилье?

В 11 классе при изучении практического применения производной снова обращаемся к истории. В 1912 году при раскопках в долине Нила ученые обнаружили полуразрушенный храм, на стене

которого сохранился текст задачи. Решивший ее становился жрецом бога Ра, а не решивший – погибал в башне голодной смертью. Учащиеся решают задачу с привлечением аппарата производной, получают приближенный ответ и делают вывод о серьезности подобного испытания и роли научных знаний в Древнем Мире.

Такого рода задачи значительно повышают интерес к математике у учащихся, планирующих выбор гуманитарного профиля.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу для пучка $L(\lambda)$ вида

$$y'' - 3\lambda y' + 2\lambda^2 y = 0, \quad (1)$$

$$3\lambda y(0) + y'(1) + \lambda y(1) = 0, \quad y'(0) - 2\lambda y(0) = 0. \quad (2)$$

Корни характеристического уравнения $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$ есть $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$. Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ есть $\Delta(\lambda) = 3\lambda^2(1 + \exp(2\lambda))$, то есть пучок является сильно нерегулярным.

Положив $v_0 = y$, $v_1 = \lambda v_0$ в (1)–(2), получим краевую задачу для линейного оператора \hat{L} в пространстве вектор-функций

$$v_1 = \lambda v_0, \quad -\frac{1}{2}v_0'' + \frac{3}{2}v_1' = \lambda v_1,$$

$$3v_1(0) + v_0'(1) + v_1(1) = 0, \quad v_0'(0) - 2v_1(0) = 0.$$

Собственные значения пучка $L(\lambda)$ и оператора \hat{L} совпадают. Система производных цепочек пучка $L(\lambda)$, построенных по системе его корневых функций, совпадает с системой корневых векторов оператора \hat{L} . Пусть $(\hat{L} - \lambda E)^{-1}f = (v_0(x, \lambda; f), v_1(x, \lambda; f))^T$, где $f = (f_0, f_1)^T$, $f_j \in L_1[0, 1]$, $j = 1, 2$. Справедлива теорема.

Теорема 1. Если $f_0 \in W_1^1[0, 1]$, $f_1 \in L_1[0, 1]$ и $f_0(0) = f_0(1) = 0$, то

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} v_0(x, \lambda; f) d\lambda = 2f_0(x) - \frac{2}{3}f_0(2x-1) - 2F_1(x) + \frac{4}{3}F_1(2x-1) + o(1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1).

при $\nu \rightarrow \infty$, где $F_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt$, а Γ_ν — круговой контур с центром в начале и радиуса $\pi\nu$.

Следствие 1. Если функции f_0 и f_1 в теореме таковы, что выполняется условие $f_0(x) - \frac{2}{3}f_0(2x-1) - 2F_1(x) + \frac{4}{3}F_1(2x-1) = 0$, то

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} v_0(x, \lambda; f) d\lambda = f_0(x) + o(1).$$

ПОЛНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ДВУХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА¹

Рябов П.Е. (Москва)

oretryabov@mail.ru

В интегрируемом случае Ковалевской–Яхья в динамике тяжелого гиростата и в задаче о движении волчка в двойном поле (случай интегрируемости Реймана – Семенова-Тян-Шанского), которые относятся к вполне интегрируемым по Лиувиллю гамильтоновым системам с двумя и тремя степенями свободы соответственно, получена полная аналитическая классификация особых точек отображения момента.

В системе с k степенями свободы тип критической точки ранга $r < k$ определяется собственными числами $k - r$ симплектических операторов, особым образом построенных из первых интегралов системы. В общем случае нет практических способов их построения.

В указанных задачах выполнено явное построение таких операторов для всех критических точек ранга 0, 1, 2. Предъявлены явные формулы характеристических уравнений для собственных чисел этих операторов, для вывода которых используется параметризация периодических решений и двумерных торов в критических подсистемах, полученная в [1-4] как составная часть разделения переменных и построения алгебраического решения. На основании классификации картановских подалгебр, порожденных найденными операторами, проведено полное исследование критических точек с точки зрения их невырожденности. Вместе с известной классификацией всех бифуркационных диаграмм двух задач (М.П. Харламов, П.Е. Рябов), новые результаты полностью определяют грубый топологический инвариант рассматриваемых систем.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00043).

Литература

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. НГУ, 1965.
2. Харламов П.В. *Механика твердого тела*, 1971, № 3.
3. Харламов М.П., Савушкин А.Ю. *Укр. мат. вестн.*, 2004, 1(4).
4. Kharlamov M.P. *Regul. & Chaotic Dyn.*, 2009, 14(6).

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОБЩЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Рябцева Н.Н. (Белгород)

science@bupk.ru

При анализе условий экстремума функционала на геометрическом графе

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} F(x, u(x), u'(x)) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} G(a, u(a)) \quad (1)$$

достаточно естественно получается, как необходимое условие, аналог уравнения Эйлера

$$F_u(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0 \quad (2)$$

в сочетании с условиями трансмиссии во внутренних вершинах

$$- \sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} \varkappa_i(a) F_{u'}^{(\gamma_i)}(a, u_0(a), (u_0)'_i(a)) + G_u(a, u_0(a)) = 0. \quad (3)$$

Привлечение второй вариации исходного функционала приводит к проблеме изучения общего квадратичного функционала, вида

$$\delta^2 \Phi(u_0)h = \int_{\Gamma} (Mh'^2 + 2Qhh' + Nh^2) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} R(a)h^2(a), \quad (4)$$

где условие неотрицательности этого функционала оказывается связано, аналогично классическому скалярному случаю, с предположением об отсутствии нулей у некоторого решения следующего уравнения

$$-(Mh')' + 2Qhh' - \left(\frac{Q^2}{M} + N\right)h = 0. \quad (5)$$

Оказывается, что уравнение (5) обладает свойствами, вполне аналогичными каноническим свойствам уравнений второго порядка, описанным в [1].

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев Л.В., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

ЛИЧНОСТНО ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Сапунова И.И. (Воронеж)

«Развитие и обучение ребенка должно определяться не столько тем, что человек имеет, сколько тем, что он есть, что он может сделать с тем, что имеет» Э. З. Фромм.

Урок был и остается основным элементом образовательного процесса, поэтому я ставлю перед собой задачу: вовлечь каждого ребенка в учебную деятельность, сделать так, чтобы каждый ученик чувствовал себя на уроке «успешным».

Достигнуть этой цели можно посредством внедрения в учебный процесс современных педагогических технологий.

Среди многих технологий, я выбрала личностно-ориентированные технологии обучения, воспитания и развития учащихся.

Личностно ориентированный подход к ученикам, включает: отказ от ориентировки на среднего ученика; умение видеть в каждом ученике уникальную личность, уважать, понимать, принимать ее; создание для ребенка ситуации успеха, поддержки, доброжелательности; исключение прямого принуждения; предоставление возможности и помощи детям в реализации себя в положительной деятельности.

При использовании технологии разноуровневого обучения каждый ученик имеет возможность овладеть учебным материалом школьной программы на разном уровне: А- базовый, В- повышенный. Класс делю на разноуровневые группы. Использую разные критерии отбора учащихся в тот или иной уровень. Это могут быть результаты тестирования на достижение уровня базовой подготовки и желание самих учащихся. Перед разными группами ставлю различные цели: одни ученики должны достичь базового уровня математической подготовки, а другие, проявляющие интерес к математике и обладающие математическими способностями добиться

более высоких результатов. При такой технологии состав групп я меняю. Любой ученик может перейти из одной группы в другую и наоборот. Работу в группах осуществляю на определенных этапах урока. Так при изучении новой темы, я работаю со всем классом, для этого продумываю, как доступно, понятно объяснить новый материал, как заинтересовать их, как сделать так, чтобы они не просто слушали объяснение, а стали соучастниками открытия, доказательства, важного вывода, чтобы уже во время объяснения новой темы ученики почувствовали себя творцами. «Плохой учитель преподносит истину, хороший учит ее находить» – слова немецкого педагога и математика А. Дистервега нельзя забывать, когда готовимся к урокам. При рассмотрении новой темы, стараюсь никого не обойти вниманием. После объяснения темы – отработка ее понимания, первичное закрепление: работа у доски, в парах, комментирование решений. После первичного закрепления, приступаю к дифференцируемой самостоятельной работе в группах. Я выступаю в роли консультанта и помощника. Затем осознанное решение более сложных задач. И на этом этапе возникает проблема: как организовать работу всех детей, чтобы каждый ученик научился решать задачи. Здесь использую карточки с индивидуальными заданиями, которые составляю на каждого ученика с учетом его личностных способностей. Выполнение заданий по индивидуальным карточкам способствует выработке навыка самостоятельной работы, и успешное выполнение задания придает ученику уверенность в своих силах, воспитывает смелость и твердость характера и желание дальше заниматься математикой. Важно создать ученику ситуацию успеха

Данную технологию я использую при проверке домашнего задания, при подготовке к контрольной работе.

Внедрение данной технологии в учебный процесс способствует активизации мыслительной деятельности учащихся; созданию положительной мотивации к учению; освоению базовых знаний всеми учащимися и возможностям для каждого ученика реализовать свои склонности на продвинутом уровне.

**ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ
СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ
СТАЦИОНАРНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ**

Свиридова Е.А. (Воронеж)

formytravel@yandex.ru

Рассматривается система линейных уравнений с частными производными второго порядка, описывающая малые колебания вязкой сжимаемой жидкости с переменной стационарной плотностью

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} U(t, x) \\ P(t, x) \end{pmatrix} \equiv \\ \equiv \begin{pmatrix} \rho_0(x) \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \rho'_0(x) I - \rho_0(x) \frac{\partial}{\partial x} & \alpha^2 \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t, x) \\ P(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

где $x > 0, t > 0$. Система дополнена начальными и граничными условиями

$$U(t, x)|_{t=0} = P(t, x)|_{t=0} = 0, U(t, x)|_{x=0} = W(t), U(t, x)|_{x=\infty} = 0.$$

Здесь $U(t, x), P(t, x)$ - соответственно скорость и отклонение от стационарного давления в частице жидкости, находящейся в момент $t > 0$ в точке $x > 0$; ν - динамический коэффициент вязкости среды; $\alpha^2 \neq 0$ - коэффициент сжимаемости жидкости; $\rho_0(x)$ - стационарная плотность. С целью изучения в дальнейшем разрешимости и поведения при $t \rightarrow \infty$ решения данной задачи к рассматриваемой системе применяется преобразование Лапласа по переменной t , а затем

рассматривается задача в образах Лапласа $A\left(\gamma, \frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} V(\hat{\gamma}, x) \\ \hat{P}(\gamma, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}(\gamma, x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\nu}(\gamma, x)|_{x=0} = 0, \nu(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0$, которая будет сведена к одному уравнению, дополненному краевым условием

$$\frac{\partial^2 \nu(\gamma, x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha^2 \rho_0(x) \gamma^2}{\rho_0(x) + \alpha^2 \nu \gamma} \nu(\gamma, x) = -f(\gamma, x),$$

$$\nu(\gamma, x)|_{x=0} = 0, \nu(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0. \quad (1)$$

Сформулируем ряд условий и утверждений относительно решения задачи (1).

Условие 1. Существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что при $x \in [0, \infty)$ выполнено неравенство $\varepsilon_1 \leq \rho_0(x) \leq \varepsilon_2$, $\rho_0(x) \in C^2[0, \infty)$.

Определение. Пусть $\delta > 0$ через $l_\delta^{\alpha, \beta}$ обозначим следующий контур $l_0 \cup l \cup l_1$, где $l = -\xi^2 \alpha + i \xi \beta$ при $\xi \in [-\delta, \delta]$, $l_0 = -\delta^2 \alpha - i(\delta + \xi)\beta$ при $\xi \in [0, \infty)$, $l_1 = -\delta^2 \alpha + i(\delta + \xi)\beta$ при $\xi \in [0, \infty)$, где $\alpha = \frac{6\varepsilon_2}{\alpha^2 v}$, $\beta =$

Лемма. Пусть функции $f(\gamma, x)$, $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0, \infty))$ по переменной x при каждом фиксированном γ лежащим правее некоторого контура $l_\delta^{\alpha, \beta}$, тогда существует такое $\delta_1 > 0$, что правее контура $l_{\delta_1}^{\alpha_1, \beta_1}$ будет выполнена следующая оценка $\left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c(\gamma) \|f(\gamma, x)\|^2$ при каждом γ , лежащем правее контура $l_{\delta_1}^{\alpha, \beta}$, за исключением $\gamma = 0$, $0 < \varepsilon_1 < c(\gamma) < \varepsilon_2$.

Теорема 1. Пусть функция $f(\gamma, x)$ принадлежит пространству $L_2([0, \infty))$ по переменной x при $\operatorname{Re} \gamma \geq -\varepsilon$, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда при каждом фиксированном γ лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$, за исключением, быть может, $\gamma = 0$ у задачи (1) существует единственное решение из $H^2([0, \infty))$.

Теорема 2. Пусть функции $f(\gamma, x)$, $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0, \infty))$ по переменной x при каждом γ , лежащем правее некоторого контура $l_\delta^{\alpha, \beta}$, функция $f(\gamma, x)$ аналитична по γ при каждом фиксированном x , для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1 и функция $f(\gamma, x)$ аналитична по γ равномерно по $x \in [0, \infty)$, тогда при γ лежащем правее контура $l_\delta^{\alpha, \beta}$ функции $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ будут аналитичны по γ равномерно по $x \in [0, \infty)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЖФАЗНОЙ ЗОНЫ В НЕКОТОРОЙ СИНГУЛЯРНО ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Селиванова Н.Ю., Шамолин М.В. (Москва)

shamoln@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Продолжается исследование математической модели сепарации двухкомпонентного сплава свинец-олово, рассмотренной в [1], с существенно различными кристаллическими структурами компонент. Проблема описания процесса возникновения и роста кристалла остается на сегодняшний момент одной из труднейших задач математической физики. Важнейшую роль в исследовании классиче-

ской модели Кана–Хилларда [2] сыграла ее сингулярно-предельная задача — так называемая задача Мелина–Сикерка со свободной границей, позволившая на сегодняшний момент только численно описать неустойчивость процесса кристаллизации. Целью данной работы является подготовка материала для вывода сингулярно предельной задачи для существенно несимметричной модели [2, 3].

Литература

[1] Раджевич Е. В., Захарченко М. Асимптотическое решение расширенной модели Кана–Хилларда // *Соврем. мат. и ее прил.* — 2003. — 2. — С. 121–138.

[2] Cahn J. W., Hilliard J. E. Free energy of a non-uniform system, Part I: Interfacial free energy // *J. Chemical Physics.* — 1958. — 28, № 1. — С. 258–267.

[3] Dreyer W. and Muller W. H. A study of the coarsening in tin/lead solders // *Int. J. Solids Structures.* — 2000. — 37. — С. 3841–3871.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЗАДАННОЙ НА ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Семенов С.Л. (Воронеж)

sergo_7@list.ru

В работе устанавливается принадлежность решений начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности заданной на области с кусочно-плоской границей специальным функциональным пространствам с топологией заданной системой полуном. А именно, пусть Ω — замкнутая область в R^n с границей $\partial\Omega$, являющейся объединением $n - 1$ мерных поверхностей с нулевой кривизной. Рассматривается пространство $E^{2+\lambda}(\Omega)$ с топологией определяемой следующей системой норм

$$p_0(\varphi) = \|\varphi\|_{C(\Omega)}$$

$$p_i(\varphi) = \|\varphi\|_{C^{2+\lambda}(D_i)} + \|\varphi\|_{C^{2+\lambda}(B_i)} \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \dots \subset \Gamma$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \Gamma$ и ∂B_i — гладкая поверхность, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \dots \subset \Gamma$, $\partial B_i \cap \partial\Omega = \emptyset$, $\partial B_i \cap \partial\Gamma \neq \emptyset$, $\partial B_1 \cap \partial\Gamma \subset B_2 \cap \partial\Gamma \subset \dots \subset \partial\Gamma$.

Тогда задача

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U + \Delta U = F & x \in \text{int}\Omega \quad t \in (0, T], \\ U|_{\partial\Omega} = \psi(x, t) & x \in \partial\Omega \quad t \in (0, T], \\ U|_{t=0} = \varphi(x) & x \in \Omega \quad t = 0, \end{cases}$$

где $F \in C^\lambda(\Omega \times [0, T])$, $\psi \in C(\partial\Omega) \cup C^1[0, T]$, $\varphi \in C(\Omega)$ имеет решение в классе функций $C(\Omega \times [0, T]) \cup C^1(0, T) \cup E^{2+\lambda}(\Omega)$.

Литература

1. Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ. Л.А. Гусарова, под. ред. В.А. Ильина — М., 1968.

2. Рудин, У. Функциональный анализ /У. Рудин ; Пер. с англ. В.Я. Лина, под. ред. Е.А. Горина .— М. : Мир, 1975 .- 443 с.

ПРОЕКТНО – ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕТОД ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Семенютина Л.С. (МОУ Дивногорская СОШ
Лискинского р-на)

«Воспитание представляется сложным делом до тех пор, пока мы хотим, не воспитывая себя, воспитывать своих детей. Если же поймешь, что воспитывать других мы можем только через себя, то упраздняется вопрос о воспитании и остается один вопрос: как надо самому жить?» Эти слова Л.Толстого актуальны сегодня как никогда и относятся не только к воспитанию, но и к обучению. Наступила очень сложная эпоха для учителя, потому что по-старому работать невозможно. Нужны такие методы обучения, при которых ученик самостоятельно овладевает знаниями, быстро ориентируется в мире информации, эффективно ее обрабатывает и использует для получения качественных знаний. Одним из таких методов является проектно-исследовательский. В России получила широкое распространение программа «Обучение для будущего», которая объединяет преимущества проектно-исследовательского метода и возможности компьютерных технологий, где главным действующим лицом становится ученик. Поучаствовав в 2009 году в конкурсе «Проект – это здорово!», материалы к которому предоставила компания Intel, я очень многому научилась. У меня сформировалось целостное представление о проектном методе обучения. Теперь я готовлю полноценные проекты с детьми, как на уроках, так и во внеурочное время. В качестве примера могу привести учебный

проект «Нужны ли человеку окружность и круг?» и проект, посвященный 160-летию С.В. Ковалевской. По методике каждый проект должен начинаться с агитации детей и взрослых принять участие в проекте. Такая агитация была у нас представлена в виде буклета, который был доступен и учителям, и детям. Далее следует приглашение в проект в виде стартовой презентации учителя, в которой учитель в увлекательной форме рассказывает: какие вопросы будут решаться в ходе проекта, какие цели стоят, где дети могут себя проявить. Весь проект проходил по строго определенному плану. Было продумано методическое сопровождение проекта: викторина, кроссворд, олимпиада для девочек, подготовлен методический материал: подобраны книги о С.В. Ковалевской, статьи из Интернет о жизни и творчестве Ковалевской, В. Ковалевского, необходимые иллюстрации. Каждый этап приближал детей к решению главного, основополагающего вопроса, имел целью дать детям знания, благодаря которым они бы могли провести исследование и ответить на вопрос «Патриот ли С.В. Ковалевская своей страны?» Мини-проекты выбирались группой детей самостоятельно, согласно своим интересам и возможностям. Работой детей руководил учитель. Доля помощи учителя в каждой группе зависела от имеющегося опыта группы. Итоги работы учащихся были представлены разными способами: в виде газеты, в виде спектакля, в виде докладов с компьютерной поддержкой, в виде виртуальной экскурсии, в виде дискуссии «Пусть говорят». В проекте важным этапом является этап признания успехов учащихся, этап оценки. Этот этап дает детям уверенность в своих силах, показывает, чего можно достичь упорным трудом, любознательностью.

Целью проекта «Нужны ли человеку окружность и круг?», который проводился с учащимися 6 класса, было ознакомление учащихся с методами исследования, формирование навыков выдвигать гипотезы, искать пути подтверждения или опровержения выдвинутых гипотез, работать в команде, оценивать себя и других. Во время урока дети путешествовали по страницам прочитанных книг и журналов, в которых рассказывалось о том, какую роль играют в жизни человека эти фигуры. Рассмотрев информацию, найденную в Интернет, сделали вывод: человек использует знания о круге и окружности при изучении звука, изготовлении прочных тросов, строительстве морских судов, изготовлении деталей для машин, станков... Затем дети были приглашены в цирк, чтобы понаблюдать, так как наблюдение – это интересный и доступный

способ добычи новых знаний. Оказалось, что без знания круга и окружности нам не обойтись даже в цирке. Перед этим уроком детям было дано творческое домашнее задание: подумать и написать сочинение на тему «Что бы случилось, если бы в один прекрасный момент исчезли окружность и круг?». В конце урока был сделан вывод: Нет, человек не готов жить в мире, где нет круглых предметов. Гипотеза «Человек может обойтись без окружности и круга» не подтвердилась, так мы пришли к ответу на вопрос: нужны ли человеку окружность и круг? Таким образом, проектно-исследовательская деятельность способствует воспитанию более интеллектуально развитого ребенка, так как дети учатся ставить проблему, выдвигать гипотезы, искать пути подтверждения или опровержения данной гипотезы, использовать различные методы исследования (опрос, наблюдение), работать в команде, оценивать себя и других. Проектно-исследовательский метод обучения способствует формированию у детей комплексного мышления. Ребенок, работая над проектом, прикладывает огромные усилия для решения поставленных проблем, стремится полученные знания сконцентрировать, разрозненные базовые знания по предметам объединить в одно целое, более качественное знание. В результате происходит скачок в мышлении ребенка. Работая над проектом в группе, дети развивают у себя способность замечать различия между собой: контрасты в настроении, в отношении к порученному делу, в методах работы с информацией. А это в свою очередь дает пищу ребенку для работы над своим внутренним миром, дает возможность находить средства контроля своего поведения. Так у детей формируются качества человека будущего, человека XXI века. Сейчас умение пользоваться методом проектов, обучением в сотрудничестве является показателем высокой квалификации преподавателя, его прогрессивной методики обучения и развития учащихся. Поэтому эти технологии относятся к технологиям 21 века.

В заключение приведу слова А.Эйнштейна: «Где ученье не клеится – а это бывает со всеми предметами – там главная вина падает на учителя. Успехи учащихся – лучшее мерило для достоинств учителя».

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРНОЙ ДИНАМИКИ НЕОБРАТИМО РАЗВИВАЮЩИХСЯ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ

Сенникова Л.И. (Ставрополь), Кочкар А.А. (Москва)

s-ludhen@yandex.ru, akochkar@gmail.com

Задача построения структур с заданными характеристиками является там, где требуется объединить элементы, часто различной природы, в целостную функционирующую систему. Эта задача является одной из основополагающих так называемой “сетевой науки” (*Network Science*). Развитие глобальных сетей (информационных, социальных, технических) и накопление за последние десятилетия эмпирического материала спровоцировали новый виток изучения сложных многоэлементных сетевых структур [1].

Предложенный в работе класс предфрактальных графов моделирует один из возможных сценариев изменения структуры сложных многоэлементных сетевых систем [2]. В качестве примера решается задача распознавания предфрактальных графов, порожденных множеством затравок с чередованием.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = \{1, 2, \dots, L-1\}$ графе G_l каждую его вершину связной затравкой $H = (W, Q)$. На первом этапе предфрактальному графу соответствует затравка. При этом об описанном процессе говорят, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$.

Процесс построения предфрактального графа, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов, которую и назовем *траекторией*. Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $H = \{H_t\} = \{H_1, H_2, \dots, H_t, \dots, H_T\}$, $T \geq 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in H$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры. Если при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина графа G_{l-1} замещается одной конкретной случайно выбранной затравкой $H_{t^*} \in H$, то будем говорить, что *предфрактальный граф* G_L

порожден множеством затравок $H = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$, с чередованием. Если при порождении предфрактального графа с чередованием, для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с возрастанием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным возрастанием затравок*.

Рассмотрим задачу, когда требуется распознать предфрактальный граф, порожденный парой полных затравок с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

Переход в траектории $G_1, G_2, \dots, G_r, \dots, G_L$ графа с чередованием затравок от текущего графа $G_r = (V_r, E_r)$ к следующему графу G_{r+1} всякий раз подчиняется основным правилам порождения предфрактального графа с чередованием затравок при сохранении смежности старых ребер.

Распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер можно осуществить алгоритмом β . Суть алгоритма β заключается в идентификации графов $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ как затравок предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, а также идентификации траектории самого предфрактального графа.

Theorem 1 *Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$, $|V_1| = m_1$ и $|V_2| = m_2$ ($m_1 > m_2$), с упорядоченным возрастанием и сохранением смежности старых ребер распознается алгоритмом β с полиномиальной трудоемкостью $O(|E_L| + L|V_L|)$.*

Литература

[1] Newman M.E.J. *Networks: an introduction*. Oxford University Press, New York, 2010.

[2] Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А. *Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2004. – Т. 44, № 6. – С. 1147-1152.

АППРОКСИМАЦИИ ЛИНИЙ СПРОСА РЯДАМИ ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТОРГОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Сергеев С.М., Паничева М.З. (С.-Петербург)

sergeevs@yandex.ru

Планирование торговой деятельности требует достоверных оценок будущих потребностей рынка. В первую очередь это связано с тем, что торговая организация является замыкающей в длинной цепочке состоящей из производителей и посредников, причем каждое звено характеризуется своим лагом и имеет свои особенности (в т.ч. сезонность, другие известные маркетологам факторы). Математический анализ дает ряд способов прогнозирования будущих значений какого-либо процесса на основе экстраполяции известных результатов. Простейший путь – регрессионный и трендовый анализ [1]. Цикл по виду товаров не обязательно однократный (возможно несколько сезонов в году). Промежутки между циклами внутри года также не обязательно одинаковые, обычно наблюдается неравномерная частотная характеристика.

Исходными данными будем считать показатели товарооборота за достаточно большой промежуток времени, желательно, включающем в себя, по крайней мере, два полных годовых цикла. Для определенности считаем, что данные поступают ежемесячно, что, несомненно, удобно, т.к. согласуется с технологией бухгалтерского учета. Воспользовавшись возможностями электронных таблиц OpenOffice.org Calc можно получить простыми средствами функцию, описывающую (аппроксимирующую) данные по продажам за прошедший период.

1. Так как 2π -периодическую функцию при достаточно необременительных условиях на нее можно представить в виде ряда Фурье, то продолжив ее четным образом на симметричный горизонт планирования, получаем:

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos \left(2\pi \frac{k}{T} x + \theta_k \right) \quad (1)$$

где $F(x)$ – произвольная функция, A_0 – константа характеризующая смещение, A_k – амплитуда k -го гармонического колебания, $2\pi \frac{k}{T}$ – круговая частота гармонического колебания, θ_k – началь-

ная фаза k -го колебания. Задача состоит в определении неизвестных коэффициентов разложения Фурье A_0 , A_k и θ_k , T .

2. Приведем описание алгоритма определения коэффициентов. По умолчанию в OpenOffice.org Calc определен только режим расчетов по линейной модели, следовательно, необходимо добавить нелинейное расширение Solver for Nonlinear Programming. Для поиска решения преобразуем соотношение (1) следующим образом. Учитывая данные по товаробороту по месяцам (период принимается равным одному году), получим выражение для первой гармоники разложения Фурье:
$$F(m) = A_0 + A_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{12}(m + \theta_1)\right),$$
 где m — номер месяца. Кроме того, понадобятся целевое значение и критерий оптимизации, в качестве которого принимается минимум среднеквадратического отклонения расчетных данных. Целевое значение рассчитывается средствами OpenOffice.org Calc. Программа Solver for Nonlinear Programming предлагает на выбор либо DEPS Evolutionary Algorithm, либо SCO Evolutionary Algorithm. DEPS (Differential Evolution & Particle Swarm Optimization) состоит из двух независимых алгоритмов, компоненты решения представлены координатами в фазовом пространстве аргументов. В каждой итерации выбирается одна из двух стратегий. Процедура SCO (Social Cognitive Optimization) проводит анализ и осуществляет обмен информацией. На каждой итерации определяется решение, сравнивая его с уже полученными данными. Далее вычисляется квадрат коэффициента корреляции (коэффициент детерминации R^2) полученного тренда с базовым рядом и выясняется, насколько значим полученный коэффициент детерминации. Для оценки значимости коэффициента детерминации, воспользуемся t -критерием Стьюдента, чтобы сравнить его со значением t -критерия Стьюдента имеющего заданную доверительную вероятность и число степеней свободы. Если выполнено соответствие между ними, то величину коэффициента корреляции следует признать существенной. Поскольку на соотношение количества продаваемых товаров и выручки сильное влияние оказывает инфляция, необходимо рассчитать линейный тренд, на его основе сформировать корректировку влияния инфляции. Следующий шаг — определение величин сезонной компоненты. Добавляются два члена ряда Фурье следующего порядка, т.к. обычно явно прослеживается асимметрия экстремумов (что вполне очевидно в общем случае). Объединив данные по аппроксимирующей функции и показателям инфляции, можно да-

вать достаточно достоверные прогнозы торговой деятельности. Полученные результаты реализованы в одном из модулей экспертной системы.

Литература

1. Сергеев С.М. Математическое моделирование экономических показателей торговых процессов // Актуальные проблемы математики и информатики. - № 1, 2010. - С.114-119.

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ¹

Сесекин А.Н. (Екатеринбург)

seseкин@list.ru

Рассматривается вопрос формализации и описания решения функционально-дифференциального уравнения вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau), v(t)) + G(t, x(t - \tau))\dot{x}(t - \tau) + \\ &+ Q(t, x(t))\dot{x}(t - \tau) + B(t, x(t)) \dot{v}(t), \\ x(t) &= \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(t)$ и $v(t)$ соответственно n - и m -вектор-функции времени, $f(t, x, y, v)$ — n -вектор-функция и $B(t, x)$ — $n \times m$ -матрица-функция, $v(\cdot) \in BV_m[t_0, \vartheta]$, где $BV_m[t_0, \vartheta]$ обозначает Банахово пространство m -вектор-функций ограниченной вариации, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ есть начальная n -вектор-функция ограниченной вариации. Решение определяется с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Установлены достаточные условия существования так определенного решения и получено интегральное уравнение, описывающее это решение. Подробно рассмотрен случай, когда $G(t, x) \equiv Q(t, x) \equiv 0$.

Литература

1. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

2. Сесекин А. Н., Фетисова Ю. В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 227–233.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00356.

ОЦЕНКИ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ¹

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Пусть $L_p (1 \leq p < \infty)$ – множество измеримых функций двух переменных, 2π – периодических по каждому переменному с конечной нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x,y)|^p dx dy \right)^{1/p}$; L_∞ – множество непрерывных функций двух переменных, 2π – периодических по каждому переменному с нормой $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi} |f(x,y)|$,

$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, t_1, t_2)_p = \sup_{|h_1| \leq t_1, |h_2| \leq t_2} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f(x,y)))\|_p$ – модуль гладкости положительного порядка $\alpha_1 > 0$ по переменной x и положительного порядка $\alpha_2 > 0$ по переменной y , где

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)\dots(\alpha_1-\nu+1)}{\nu!} f(x + (\alpha_1 - \nu)h_1, y),$$

$$\Delta_{h_2}^{\alpha_2} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha_2(\alpha_2-1)\dots(\alpha_2-\nu+1)}{\nu!} f(x, y + (\alpha_2 - \nu)h_2).$$

Утверждение 1. Пусть $\beta_1 > \alpha_1 > 0, \beta_2 > \alpha_2 > 0, 1 \leq p < q \leq \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, q^* = q$, если $q < \infty$ и $q = 1$, если $q = \infty$.

I. Пусть p и q таковы, что $1 < p < q < \infty$ или $1 = p < q = \infty$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-\theta} \omega_{\alpha_1 + \theta, \alpha_2 + \theta}(f, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}}.$$

II. Пусть p и q таковы, что $1 < p < q = \infty$ или $1 = p < q < \infty$. Тогда $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll$

$$\ll \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-\theta} \omega_{\alpha_1 + \theta, \alpha_2 + \theta}(f, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} + \\ + \delta_1^{\alpha_1} \left\{ \int_{\delta_1}^1 \int_0^{\delta_2} \left(t_1^{-(\alpha_1 + \theta)} t_2^{-\theta} \omega_{\beta_1 + \theta, \alpha_2 + \theta}(f, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} +$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00175а) и гранта поддержки ведущих научных школ (проект НШ 32-52.2010.1).

$$\begin{aligned}
& +\delta_2^{\alpha_2} \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_{\delta_2}^1 \left(t_1^{-\theta} t_2^{-(\alpha_2+\theta)} \omega_{\alpha_1+\theta, \beta_2+\theta}(f, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} + \\
& +\delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2} \left\{ \int_{\delta}^1 \int_{\delta_2}^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+\theta)} t_2^{-(\alpha_2+\theta)} \omega_{\beta_1+\theta, \beta_2+\theta}(f, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}}.
\end{aligned}$$

Замечание 1. 1. При $1 < p < q < \infty$ утверждение 1 см. в [1].

2. Покажем, что утверждение 1 точное. Пусть $f_0(x, y) = \sin x \sin y$. Тогда $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f_0, \delta_1, \delta_2)_q \asymp \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}$;

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-\theta} \omega_{\alpha_1+\theta, \alpha_2+\theta}(f_0, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} \asymp \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}; \\
& \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-\theta} \omega_{\alpha_1+\theta, \alpha_2+\theta}(f_0, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} + \\
& +\delta_1^{\alpha_1} \left\{ \int_{\delta_1}^1 \int_0^{\delta_2} \left(t_1^{-(\alpha_1+\theta)} t_2^{-\theta} \omega_{\beta_1+\theta, \alpha_2+\theta}(f_0, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} + \\
& +\delta_2^{\alpha_2} \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_{\delta_2}^1 \left(t_1^{-\theta} t_2^{-(\alpha_2+\theta)} \omega_{\alpha_1+\theta, \beta_2+\theta}(f_0, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} + \\
& +\delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2} \left\{ \int_{\delta}^1 \int_{\delta_2}^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+\theta)} t_2^{-(\alpha_2+\theta)} \omega_{\beta_1+\theta, \beta_2+\theta}(f_0, t_1, t_2)_p \right)^{q^*} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right\}^{\frac{1}{q^*}} \asymp \\
& \asymp \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Утверждение 2. Пусть $1 \leq p < q \leq \infty$; $q^* = q$, если $q < \infty$ и $q = 1$, если $q = \infty$; $T_{N_1 N_2}(x, y) = \sum_{\nu_1=1}^{N_1} \sum_{\nu_2=1}^{N_2} (a_{\nu_1 \nu_2} \cos \nu_1 x \cos \nu_2 y + b_{\nu_1 \nu_2} \cos \nu_1 x \sin \nu_2 y + c_{\nu_1 \nu_2} \sin \nu_1 x \cos \nu_2 y + d_{\nu_1 \nu_2} \sin \nu_1 x \sin \nu_2 y)$ - тригонометрический полином порядка N_1 по переменной x и порядка N_2 по переменной y . Тогда

1) если $1 < p < q < \infty$ или $1 = p < q = \infty$, то $\|T_{N_1 N_2}(x, y)\|_q \ll \|T_{N_1 N_2}^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, \frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x, y)\|_p$,

2) если $1 = p < q < \infty$ или $1 < p < q = \infty$, $2^{n_1} \leq N_1 < 2^{n_1+1}$, $2^{n_2} \leq N_2 < 2^{n_2+1}$ для некоторых $n_1 = 0, 1, \dots$, $n_2 = 0, 1, \dots$, то

$$\begin{aligned}
& \|T_{N_1 N_2}(x, y)\|_q \ll \left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1+1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2+1} \|(V_{2^{\nu_1} 2^{\nu_2}}(T_{N_1 N_2}) - \right. \\
& \left. V_{[2^{\nu_1-1}] 2^{\nu_2}}(T_{N_1 N_2}) - V_{2^{\nu_1} [2^{\nu_2-1}]}(T_{N_1 N_2}) + V_{[2^{\nu_1-1}] [2^{\nu_2-1}]}(T_{N_1 N_2}))^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, \frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(x, y)\|_p^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}}.
\end{aligned}$$

где $f^{(\rho_1, \rho_2)}(x, y)$ - производная в смысле Вейля порядка ρ_1 по переменной x и порядка ρ_2 по переменной y .

Замечание 2. Из утверждения 2 следует неравенство Никольского для тригонометрических полиномов.

Литература

[1] Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Соотношения между смешанными модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского. Тр. МИАН. 2010. Т. 269, с. 204 - 214.

ОБ ОДНОМ К-ФУНКЦИОНАЛЕ¹

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Пусть $L_p (1 \leq p < \infty)$ – множество измеримых функций двух переменных, 2π – периодических по каждому переменному; L_∞ – множество непрерывных функций двух переменных, 2π – периодических по каждому переменному;

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, t_1, t_2)_p = \sup_{|h_1| \leq t_1, |h_2| \leq t_2} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f(x, y)))\|_p;$$

$$W_p^{(\alpha_1, 0)} = \{f \in L_p([0, 2\pi]^2) : \exists f^{(\alpha_1, 0)} \in L_p, \alpha_1 > 0\},$$

$$W_p^{(0, \alpha_2)} = \{f \in L_p([0, 2\pi]^2) : \exists f^{(0, \alpha_2)} \in L_p, \alpha_2 > 0\},$$

$$W_p^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{f \in L_p([0, 2\pi]^2) : \exists f^{(\alpha_1, \alpha_2)} \in L_p, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0\}.$$

Пусть $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. К -функционалом будем называть функционал

$$\begin{aligned} & K(f, t_1, t_2; L_p([0, 2\pi]^2), W_p^{(\alpha_1, 0)}, W_p^{(0, \alpha_2)}, W_p^{(\alpha_1, \alpha_2)}) = \\ & = \inf_{g_1 \in W_p^{(\alpha_1, 0)}, g_2 \in W_p^{(0, \alpha_2)}, g \in W_p^{(\alpha_1, \alpha_2)}} \left\{ \|f - g_1 - g_2 + g\|_p + t_1^{\alpha_1} \|g_1^{(\alpha_1, 0)}\|_p + \right. \\ & \left. + t_2^{\alpha_2} \|g_2^{(0, \alpha_2)}\|_p + t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \|g^{(\alpha_1, \alpha_2)}\|_p \right\}. \end{aligned}$$

Утверждение. Пусть $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$. Тогда $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p \asymp K(f, \delta_1, \delta_2; L_p([0, 2\pi]^2), W_p^{(\alpha_1, 0)}, W_p^{(0, \alpha_2)}, W_p^{(\alpha_1, \alpha_2)})$.

Замечания . 1. Это утверждение является обобщением аналогичного утверждения, сформулированного в [1] для функции одного переменного: $\omega_\alpha(f; \delta)_p \asymp K(f; \delta; L_p, W_p^\alpha)$,

$$\text{где } K(f; t; L_p([0, 2\pi]), W_p^\alpha) = \inf_{g \in W_p^\alpha} \{ \|f - g\|_p + t^\alpha \|g^{(\alpha)}\|_p \},$$

$$W_p^\alpha = \{f \in L_p([0, 2\pi]) : \exists f^{(\alpha)} \in L_p([0, 2\pi])\}.$$

2. При целых $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ этот К-функционал совпадает с К - функционалом, введенным в [2], [3].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00175а) и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-3252.2010.1

Литература

- [1] Butzer P.L., Dyckhoff H., Görlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes. *Can. J. Math.* 29, 1977, p. 781 - 793.
- [2] Руновский К.В. Некоторые вопросы теории приближений. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1989.
- [3] Cottin C. Mixed K-Functionals: A Measure of Smoothness for Blending-type Approximation. *Math. Z.* 204, 1990, p. 69-83.

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ¹

Симонов П.М. (Пермь), Чистяков А.В. (Ижевск)

simonov@econ.psu.ru

Рассмотрим линейную краевую задачу для функционально-дифференциальных уравнений в канонической форме, принятой в монографии [1]:

$$(\mathcal{L}x)(t) = (Q\dot{x})(t) + A(t)x(a) = f(t), \quad (1)$$

$$lx = \Phi\dot{x} + \Psi x(a) = \alpha, \quad (2)$$

где $Q : B \rightarrow B$ — линейный ограниченный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве B суммируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$; $\Phi : B \rightarrow \mathbf{R}$ — линейный ограниченный функционал на пространстве B ; $A \in B$ и $\Psi \in \mathbf{R}$. В рассматриваемой здесь стандартной ситуации, полагая $Q(t, s) = (Q^* \chi_{[a, t]})(s)$ ($t, s \in [a, b]$), мы получим дифференциально-интегральное представление слабо порядково непрерывного оператора Q [2] в естественном виде

$$(Qf)(s) = \frac{d}{dt} \int_a^b Q(t, s) f(s) ds$$

для каждого $f \in B$ при почти всех $t \in [a, b]$.

Фактически это представление есть следствие слабой секвенциальной полноты порядково сопряженного пространства B' [3] и слабой порядковой непрерывности оператора Q , позволяющей распространить оператор с фундаментального по мере множества характеристических функций $\{\chi_{[a, t]}\}_{t \in [a, b]}$ на все пространство B .

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Пермского края (проект №10-01-96054-р-урал-а) и ЗАО "ПРОГНОЗ".

Будем предполагать, что краевая задача (1)–(2) однозначно разрешима при любых $f \in B$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Как следует из теории линейных краевых задач, общее решение рассматриваемой задачи имеет вид

$$x = X\alpha + Gf.$$

Здесь X — фундаментальное решение, а G — оператор Грина. В случае наиболее популярных в приложениях пространств L_p ($1 \leq p \leq \infty$), за исключением пространства L_∞ , оператор Грина G является интегральным:

$$(Gf)(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds.$$

Условия, гарантирующие при $p = \infty$ интегральное представление оператора Грина, были найдены Г.Г. Исламовым [4] и Л.Ф. Рахматуллиной [5]. Сформулируем эти условия в следующем виде: L_i) оператор Q^* , сопряженный к “главной части” Q оператора \mathcal{L} , переводит интегральные функционалы в интегральные функционалы; l_i) функционал Φ является интегральным.

Затем П.М.Симоновым [6] было доказано, что при выполнении условия l_i) условие L_i) необходимо для интегрального представления оператора Грина, если $B = L_\infty$. Схема исследования, возникшая при изучении условий интегральности оператора Грина в случае $B = L_\infty$, применима и для других функциональных пространств. В соответствии с этой схемой в работе [7] приведено обобщение обсуждённых ранее результатов на случай, когда пространства B сопряжено к пространству интегральных функционалов на B . Однако такое ограничение на пространство B — очень жесткое условие. Оно не выполняется для многих актуальных и приложениях пространств, привлекающихся А.И. Шиндяпиным [8] и Л.Ф. Рахматуллиной [9] для изучения сингулярных краевых задач.

Оказывается, что эти условия являются необходимыми и достаточными условиями интегральности оператора Грина в достаточно общей и весьма естественной ситуации (см. [2]).

Т е о р е м а. Пусть $L_\infty \subset B \subset L_1$ и B порядково рефлексивно [3]. Тогда оператор Грина имеет интегральное представление в том и только в том случае, если выполнены условия L_i и l_i . В этом и

только в этом случае краевая задача (1)–(2) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_a^b Q(t, s) \dot{x}(s) ds + A(t)x(a) = f(t),$$

$$\int_a^b \Phi(s) \dot{x}(s) ds + \Psi x(a) = \alpha.$$

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М: Наука, 1991. 280 с.
2. Чистяков А.В. Наполненность алгебры слабо порядково непрерывных операторов // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2002. №1. С. 66–73
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
4. Исламов Г.Г. К вопросу о представлении решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12, №7. С.1194–1203.
5. Рахматуллина Л.Ф. К вопросу о представлении решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Краевые задачи. Пермь: Перм. политех. ин-т. 1979. С.107–110.
6. Симонов П. М. Критерий интегральности оператора Грина // Функционально-дифференциальные уравнения: III Урал. регион. конф.: Тез. докл. Пермь: Перм. гос. ун-т. 1988 С. 80.
7. Симонов П. М., Чистяков А. В. Условия интегральности оператора Грина // Краевые задачи. Пермь: Перм. политех. ин-т. 1988. С. 87–91.
8. Шиндяпин А. И. О краевой задаче для одного сингулярного уравнения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, №3. С. 450–455.
9. Rakhmatullina L. F. On the integral representation of the Green operator // Funct. Different. Equat. 2004. V. 11, №3–4. P. 475–483

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Статкевич В.М. (Киев)

mstatckevich@yahoo.com

Рассматривается задача Дирихле $(Lu)(x) + a(x)u(x) = f(x)$, $u|_{\partial G} = g$ в специальном классе областей G счётномерного вещественного гильбертового пространства H с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором вида $(Lu)(x) = j(u''(x))$. j – неотрицательный линейный функционал на пространстве самосопряжённых ограниченных операторов, ядро которого содержит все операторы конечного ранга. Такой оператор (обобщение классического оператора Лапласа-Леви [1]) предложен Ю.В. Богданским [2], в соответствующем пространстве функций на H он допускает замыкание, порождающее (C_0) -полугруппу $T(t)$ [3]. Область G такова, что для неё существует фундаментальная функция $\theta(x)$ в смысле [4]; \bar{a} , \bar{f} , \bar{g} – продолжения функций a , f , g на всё пространство H .

Основным результатом доклада является следующая:

Теорема. Рассматриваемая задача имеет единственное решение, представимое в виде явной формулы: $u(x) = - \int_0^{\theta(x)} \exp\left(\int_0^t (T(s)\bar{a})(x)ds\right) (T(t)\bar{f})(x)dt \Big|_G + \exp\left(\int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar{a})(x)dt\right) \times (T(\theta(x))\bar{g})(x) \Big|_G$.

Литература

- [1] Леви П. *Конкретные проблемы функционального анализа*. – М.:Наука, 1967. – 512с.
- [2] Богданский Ю.В. *Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журнал. – 1977. – 29, №6. – С.781-784.
- [3] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярными эллиптическими операторами* // Там же. – 1989. – 41, №5. – С. 584-590.
- [4] Богданский Ю.В. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором* // Там же. – 1994. – 46, №7. – С.803-808.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ПЛАТО С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Стенюхин Л.В. (Воронеж)

stenyuhin@mail.ru

Задача о существовании двумерных минимальных поверхностей с ограничениями типа неравенств в конформных координатах описывается функционалом Дирихле $D(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy$, Ω – двумерный замкнутый диск, $u \in W_4^2(\Omega)$ с граничным условием $u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi(s)$, $s \in \partial\Omega$ и условием $u(x_0, y_0) \leq c_0 = \text{const}$ в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Пусть $F_1(u) = u_x^2 - u_y^2$, $F_2(u) = u_x u_y$, $f(u) = u(x_0, y_0)$. Задача сводится к исследованию на экстремум функционала Дирихле на множестве

$$M = \{u \in W_4^2(\Omega) \mid F_1(u) = 0, F_2(u) = 0, f(u) \leq c_0\}.$$

Обозначим $F(u) = F_1(u) \oplus F_2(u)$. образуем функцию Лагранжа

$$L(u, \lambda^*, \lambda) = D(u) + \lambda^* F(u) + \lambda(u(x_0, y_0) - c_0),$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda^* = \lambda^{1*} \oplus \lambda^{2*} \in W_2^{1*}(\Omega) \oplus W_2^{1*}(\Omega)$.

По теореме Куна-Таккера [1] имеем дифференциальное включение

$$0 \in \partial D(u) + (\lambda^*, \partial F(u)) + \lambda \partial f(u), \tag{1}$$

где ∂ – субдифференциал отображений D, F и f .

Рассмотрим сечение включения (1)

$$\Delta u + F'^*(u)\lambda^* + \lambda u^* = 0, \tag{2}$$

где u^* – малая по норме функция. Это уравнение определяет следующую задачу

$$\begin{cases} (1 - 2\lambda^{1*})u_{xx} + (1 + 2\lambda^{1*})u_{yy} - 2\lambda^{2*}u_{xy} - \\ -(2\lambda_x^{1*} + \lambda_y^{2*})u_x + (2\lambda_y^{1*} - \lambda_x^{2*})u_y = -\lambda u^*, \\ u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi(s). \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие строгой эллиптичности задачи (3). Тогда существует и единственно решение задачи (3) $u = u(\lambda^*, \lambda)$ из пространства $W_4^2(\Omega)$.

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 408 с.

РОЛЬ МУЛЬТИМЕДИЙНЫХ ПРОДУКТОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

Столярова Е.С. (Воронеж)

Важнейшие цели математического образования – развитие навыков пространственного воображения, логического мышления – словом, развитие интеллекта. Ничто не может способствовать этому лучше, чем математика, поэтому система работы учителя должна быть направлена на развитие учащихся: их мировоззрения, креативных способностей, познавательной активности. Обучение для всех должно быть интересным, увлекательным, но особо значимым для тех, кто действительно испытывает удовольствие от поиска истины, от красоты самой математики. Преподавание математики в профильных классах заставляет учителя постоянно пересматривать арсенал средств обучения и воспитания, выбирая наиболее эффективные формы.

Всем известно, что изучение такого раздела математики, как стереометрия, вызывает у многих учащихся существенные затруднения, усвоение материала чаще всего строится на зазубривании. Использование компьютера значительно облегчает процесс изучения стереометрии через реализацию одного из принципов обучения – наглядности. Наглядность – «золотое правило дидактики» (Я.А. Коменский) составляет содержание одного из ведущих принципов обучения.

Одной из основных задач при изучении стереометрии в школе является развитие у учащихся пространственного воображения. Поэтому целесообразно применять компьютер на уроках стереометрии в обучающем режиме и в режиме графической иллюстрации изучаемого материала. Особенно важно перейти от использования готовых программ по предмету к созданию силами учителей и учащихся собственных учебно-методических пособий в среде Microsoft Power Point. Создание учебных сайтов и презентаций – это, прежде всего, приобщение школьников к исследованиям, призванное активизировать познавательную деятельность учащихся. При использовании продуктов такого рода на уроках и во внеурочной деятельности повышается доступность обучения за счет более понятного,

яркого и наглядного представления материала. Процесс обучения проходит успешно, так как он основан на наблюдении объектов и явлений. Целеустремленный поиск нового жизненного опыта с помощью информационных технологий способствует тому, что в сознании учащихся наступает качественный скачок на пути развития пространственных представлений.

Темы для создания сайтов и презентаций могут быть самые различные: как взятые из основных разделов школьной программы, так и далеко выходящие за рамки школьной программы, но необходимые для целостного восприятия математических знаний. Наиболее яркими примерами является презентация «Этот удивительный мир многогранников» - результат совместной работы учителя и учеников 11 класса экономико-технологического профиля и сайт «Кривые и поверхности второго порядка» - совместный продукт учеников 10 экономического класса.

Данные мультимедийные продукты могут быть использованы:

- при изучении нового материала;
- при закреплении пройденного материала;
- при отработке учебных умений и навыков;
- в процесс повторения;
- при практическом применении полученных навыков;
- при обобщении и систематизации знаний;
- при подготовке к государственной итоговой аттестации;
- на факультативных и кружковых занятиях по предмету.

Использование сайтов и презентаций на уроке не подменяет деятельность учителя, а дополняет ее. Часть необходимой информации вынесена на демонстрационные слайды, а часть проговаривается учителем, что, несомненно, повышает продуктивность урока. Это позволяет учителю увеличить объем излагаемого на уроке материала без ущерба для восприятия новых знаний учащимися. Продуктивность повышается за счет сокращения времени на «перерисовывание» чертежей сначала на доску, а затем в тетради учеников. В результате быстрее проходит повторение опорных знаний и увеличивается число решаемых задач.

В связи с этим можно выделить ряд преимуществ использования мультимедийных продуктов на уроках и во внеурочной деятельности:

- аккуратное, яркое, цветное изображение на экране легко воспринимается даже учениками, сидящими за последней партой;

•наглядность материала прямо пропорциональна его усвоению, так как работает наглядно-образное мышление;

•появляется возможность организовать проектную деятельность учащихся по созданию учебных программ под руководством учителей информатики и математики;

•у учеников формируется пространственное и логическое мышление.

Все это, несомненно, способствует формированию у выпускника школы ключевых компетентностей, позволяющих ориентироваться в ситуациях неопределенности, применять знания в нестандартных ситуациях.

ПРИМЕНЕНИЕ АБСТРАКТНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СВОЙСТВ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Струков В.Е. (Воронеж)
sv.post.of.chaos@gmail.com

Пусть $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных 2π - периодических функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Символом $EndC_{2\pi}(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов $A : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Рассмотрим группу сдвигов $S : [0, 2\pi) \rightarrow EndC_{2\pi}(\mathbb{R})$, $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$. Каждому оператору $A \in EndC_{2\pi}(\mathbb{R})$ соотнесем операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \rightarrow EndC_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\Phi_A(t) = S(t)AS(-t)$. Линейное подпространство операторов $A \in EndC_{2\pi}(\mathbb{R})$, для которых Φ_A непрерывна в равномерной операторной топологии, обозначим через $End_c C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Коэффициентами Фурье оператора $A \in End_c C_{2\pi}(\mathbb{R})$ будем называть операторы $A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t)AS(-t)e^{-ikt} dt$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $d_A(k) = \|A_k\|$, $k \in \mathbb{Z}$. Символом $End_1 C_{2\pi}(\mathbb{R})$ обозначим алгебру операторов $A \in EndC_{2\pi}(\mathbb{R})$ таких, что $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) < \infty$.

Пусть $K \in EndC_{2\pi}(\mathbb{R})$ – интегральный оператор вида $(Kx)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau, u)x(u)du$ (1) с ядром \mathcal{K} , обладающим свойствами:

1. $\mathcal{K}(\tau + 2\pi, u + 2\pi) = \mathcal{K}(\tau, u) \quad \forall \tau, u \in \mathbb{R}$;
2. $\mathcal{K}(\tau, \cdot) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$;

3. $\mathcal{K}(\cdot, u) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L_{2\pi}^1(\mathbb{R}))$ (функция $\mathcal{K}(\cdot, u)$ непрерывна по норме пространства $L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$).

Основным результатом данного сообщения является

Теорема 1 Пусть оператор $A = (\alpha I + K) \in \text{End}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R})$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, а K - вышеописанный оператор, обратим, тогда обратный оператор $A^{-1} = (\frac{1}{\alpha} I + \tilde{K}) \in \text{End}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R})$, причем \tilde{K} допускает представление (1), а его ядро удовлетворяет свойствам 1.-3.

Литература

1. Баскаков А.Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. - 1997. - Т. 38. - №1. - С. 14-28.
2. Баскаков А.Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. матем. - 1997. - Т. 61. - № 6. - С. 3-26.
3. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения // Функц. ан. и его прил. - 1990 - Т.24 - №2 - С. 98-99.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИЙ¹

Теляковский Д.С. (Москва)

dtelyakov@mail.ru

Функция называется выпуклой, если через каждую точку её графика можно провести опорную прямую, т.е. прямую под которой нет точек графика функции. Показано, что для полунепрерывных сверху функций условие на опорную прямую можно немного ослабить. Достаточно предполагать, что через каждую точку $(\xi; f(\xi))$ графика функции проходит прямая l_ξ , для которой график лежит выше l_ξ только с точностью до $o((x - \xi)^2)$ при $x \rightarrow \xi$.

Прямую l_ξ с уравнением $y = kx + c$, проходящую через точку $(\xi; \zeta) = (\xi; f(\xi))$ графика функции $f(x)$, будем называть асимптотической опорной прямой графика функции в точке ξ , если при $x \rightarrow \xi$ выполнено неравенство $f(x) \geq kx + c + o((x - \xi)^2)$.

Теорема. Если полунепрерывная сверху функция $f(x)$ в каждой точке интервала $(a; b)$ имеет асимптотическую опорную прямую, то функция $f(x)$ выпукла на $(a; b)$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00648), проекта АВЦП 2.1.1/6827 и гос. контрактов с Рособразованием П268 и П943.

Эта теорема показывает, что определение выпуклости функций устойчиво в том смысле, что графику функции можно разрешить заходить немного вниз под опорную прямую. Отказаться от предположения о полунепрерывности нельзя.

Для функций многих переменных справедливо утверждение, аналогичное приведенной теореме.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ПЯТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МЕЖДУ СОБОЙ ПРЯМЫХ ИЗОКЛИН

Тлячев В.Б., Ушко А.Д. (Майкоп)
tlyachev@adygnet.ru, uschho76@rambler.ru

Известно [1], что система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij}x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij}x^i y^j, \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R} \quad (1)$$

при наличии у нее двух параллельных инвариантных прямых и алгебраического цикла в виде эллипса не имеет других предельных циклов.

Однако существуют системы вида (1), обладающие тремя инвариантными прямыми и хотя бы одним, вообще говоря, неалгебраическим предельным циклом.

В работе [2] доказано, что система (1) при наличии у нее не менее одной особой точки может иметь не более пяти параллельных между собой прямых изоклин. В [2] также установлено, что множество M , состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин может быть разбито на непустые непересекающиеся подмножества только пятью способами, каждому из которых соответствует специальная форма записи системы (1), упрощающая качественное исследование в целом этой системы.

В настоящей заметке доказывается, что система (1), обладающая хотя бы одной особой точкой и пятью параллельными между собой прямыми изоклинами:

- а) имеет не более четырех инвариантных прямых;
- б) не имеет предельных циклов при наличии у этой системы не менее трех инвариантных прямых.

Литература

1. Столяров В.В. О предельных циклах и ограниченности одной динамической системы / В.В. Столяров // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1823-1824.
2. Ушко А.Д. Параллельные прямые изоклины кубичных дифференциальных систем на плоскости / А.Д. Ушко // Вестник АГУ. Серия "Естественно-математические и технические науки". – 2009. – №2(49). – С. 16-25. (Доступен URL: <http://vestnik.adygnet.ru>)

СЛОВО О Н.П. САРДАНОВСКОМ

Удоденко Н.Н. (Воронеж)

В первый год деятельности Воронежского университета важную, а точнее решающую роль на математическом отделении физико-математического факультета играли профессора Юрьевского университета В.Г. Алексеев, Л.С. Лейбензон, П.П. Граве. После кончины П.П. Граве и отъезда из Воронежа В.Г. Алексеева и Л.С. Лейбензона непродолжительное время на факультете работал ученик Н.Е. Жуковского — Л.В. Ассур, скончавшийся весной 1920 года. В 1921 году начал работать на факультете профессор А.К. Сушкевич. Начиная с 1921 года состав преподавателей физмата ВГУ стал пополняться первыми выпускниками ВГУ, одним из которых был Николай Петрович Сардановский (1889-1965), жизни и педагогической деятельности которого посвящена данная работа. Родился он в Воронеже, в семье канцелярского служащего. В 1917 году Н.П. Сардановский поступил на математическое отделение физмата Харьковского университета, а после создания Воронежского университета, перевёлся в Воронеж.

В 1921 году после окончания университета он был оставлен работать на физмате ВГУ. В дальнейшем его педагогическая деятельность протекала в ВУЗах г. Воронежа и других ВУЗах Советского Союза. Подробности этой деятельности будут приведены в докладе. Сведения об этой деятельности подчеркнуты из работ [1-3] и личных дел Н.П. Сардановского, хранящихся в ВУЗах г. Воронежа, где он работал.

Литература

1. Соболев В.И. От Адама до Красносельского. В сб. "Материалы к истории математического факультета ВГУ". — Воронеж. Издательство ВГУ. — 1998. — с. 3-12.

2. Соболев В.И. Кафедра математического анализа. В сб. "Материалы к истории математического факультета ВГУ". — Воронеж. Издательство ВГУ. — 1998. — с. 98-103.

3. Федосеев М.В. Математико-механический факультет. "Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна 2008". — Воронеж. Издательство ВГУ. — 2008. — с. 342-350.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПОДОБИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА¹

Ускова Н.Б.

Пусть $\mathcal{H} = L_2[0, 2\pi]$. В пространстве \mathcal{H} рассмотрим дифференциальный оператор $(\tilde{A}y)(y) = -y''(t) - v(t)y(t)$ с областью определения $D(A) \subset \mathcal{H}$, задаваемой краевыми условиями $y(2\pi) = e^{i\theta}y(0)$, $y'(2\pi) = e^{i\theta}y'(0)$, $\theta \in [0, \pi]$. Пусть функция $v(t)$ имеет ряд Фурье вида $v(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k e^{ikt}$, $v_0 = 0$, причем $\sum_k |v_k|^2 \alpha^2(k) < \infty$, где

$\alpha(k)$ — субмультипликативный вес. Символом P_k обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_k оператора A . В случае, если θ отделено от нуля и π , то $\sigma_k = \{\lambda_k\}$; при $\theta \in [0, \varepsilon]$ $\sigma_k = \{\lambda_k, \lambda_{-k}\}$; при $\theta \in [\varepsilon, \pi]$ $\sigma_k = \{\lambda_k, \lambda_{-(k+1)}\}$. Введем пространство $\sigma_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ операторов из алгебры Гильберта–Шмидта, таких что $\sum_p \sum_{i-j=p} |x_{ij}|^2 \alpha^2(p) < \infty$, где $X = (x_{ij})$ — матрица оператора X в базисе из собственных векторов $e_k(t)$ оператора $(Ay)(t) = -y''(t)$ с теми же краевыми условиями. Пусть m — достаточно большое число.

Теорема. *Оператор \tilde{A} подобен оператору $A - V_0$, имеющему матрицу блочно-диагонального вида в базисе $\{e_k\}$, при этом оператор V_0 принадлежит пространству $\sigma_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Оператор, осуществляющий преобразование подобия оператора \tilde{A} в оператор $A - V_0$ представим в виде $I + U$, где $U \in \sigma_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Более того, спектральные проекторы P_k оператора \tilde{A} и \tilde{P}_k оператора $A - V_0$, $k > m$, такие что $P_k - \tilde{P}_k \in \sigma_{2,\alpha}(\mathcal{H})$.*

Отметим, что оператор V_0 есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00276

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАНИЯХ ВСЕРОССИЙСКИХ СТУДЕНЧЕСКИХ ОЛИМПИАД ПО ИНФОРМАТИКЕ

Ускова О.Ф., Горбенко О.Д., Шашкин А.И.

В течении восьми лет Воронежский государственный университет является базовым вузом проведения третьего тура Всероссийских студенческих олимпиад «Информатика. Программирование. Информационные технологии.», которые проводятся согласно приказам Министерства образования и науки Российской Федерации (№ 1187 от 25.03.03, № 408 от 03.03.04, № 85 от 22.02.05, № 285 от 14.11.06, № 326 от 14.02.07, № 261 от 31.03.08, № 251 от 13.03.09, № 199 от 12.03.10)

В организации и проведении этих соревнований активное участие принимают не только преподаватели факультета прикладной математики, информатики и механики, но и студенты. Успешно работают в период подготовки и проведения олимпиад студенческие общественные организации: студенческий директорат и студенческий секретариат.

Студенческие олимпиады по информатике являются составной частью процесса обучения и платформой профессионального воспитания специалистов.

Олимпиады проходят при поддержке ведущих компьютерных фирм города Воронежа: Пет, ЗАО НПП Релэкс, Информсвязь – Черноземье, Мир ПК, DataArt, ООО OCS – Юг, Siemens, Murano Soft, многие сотрудники которых в студенческие годы были победителями и призерами олимпиад, работали в студенческих директоратах и секретариатах.

В восьмой Всероссийской студенческой олимпиаде, которая проходила в сентябре – октябре 2010 года, приняли участие студенты, представляющие города Санкт-Петербург, Саратов, Ярославль, Кемерово, Воронеж, Киров, Тамбов, Чебоксары, Томск, Челябинск, Липецк, Орел, Магнитогорск, Тула, Курск, Рязань, Балашов, Новосибирск, Брянск, Шуя, Ставрополь, Пенза, Анжеро – Судженск, Таганрог, Владивосток, Комсомольск-на-Амуре, Бийск, Волгоград, Вологда, Амурск, Соликамск, Волжский, Абакан, Котовск. Победителем олимпиады стал Ахи Антон из Санкт – Петербурга. Задания заочного и основного туров олимпиады связаны с прикладной математикой. В их разработке принимали участие Поляков А.Е., Якубенко А.П., Мамедов Э., которые были победителями предше-

ствующих олимпиад, с отличием закончили университет и успешно работают программистами.

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА И ОПТИМИЗАЦИИ СЕТЕВЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ КОНЦЕПЦИИ СЕТЕЙ ПОСЛЕДУЮЩЕГО ПОКОЛЕНИЯ

Ухлова В.В. (Воронеж)

Ouklova@mail.ru

Новые технологии передачи данных создали возможность объединения специализированных сетей по предоставлению услуг (телефония, Интернет и т.п.) в единую сеть передачи данных, определяемая как концепция сетей последующего поколения (СПП). Ее особенности: разнородный трафик, технология пакетной коммутации и архитектура QoS. В проблеме обеспечения качества обслуживания данных в системах СПП выделены два направления: разработка алгоритмов вычисления времени задержки требований и разработка алгоритмов оптимизации сетевых ресурсов.

На практике, для оценки времени задержек используют среднее время пребывания требований в системе. Особенности систем СПП требуют уточнения существующих алгоритмов расчета. Моделирование узлов сети как СМО, позволяет разработать алгоритм, основанный на определении времени задержки, через оценку вероятностей различных состояний системы.

Существующие подходы по решению задачи о допустимости сети основаны на нахождении кратчайших путей по всем направлениям и не учитывают динамики процессов сетей. В работе предложен алгоритм, определения допустимости потоков в сети с учетом сетевой загрузки, характеризующийся специальным подходом интеграции методов линейного программирования и теории графов.

Для оптимизации сетевых ресурсов предложен алгоритм оптимального распределения потоков в сети с разнородным трафиком. Алгоритм отражает стремление пропустить большую часть потока по кратчайшим путям, но при этом учитывается загрузка сети и, при перегрузке линий, потоки специальным образом перераспределяются по другим путям.

Литература

1. Крылов, В.В. Теория телетрафика и ее приложения [Текст] /

О ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ИЗМЕНЕНИЯ ДОЛЕЙ ПОТРЕБЛЕНИЯ И НАКОПЛЕНИЯ В НАЦИОНАЛЬНОМ ДОХОДЕ

Фам Туан Кыонг (Воронеж)

tuancuonghd@yahoo.com

Рассматривается дифференциально-алгебраическая система, описывающая процесс изменения долей потребления и накопления в национальном доходе:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t) + bx_2(t) + f_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = cx_2(t) + f_2(t), \quad (2)$$

$$F(t) = gx_1(t) - hx_2(t), \quad (3)$$

где $x_1(t)$ – фонд производственного накопления; $x_2(t)$ – фонд потребления (включая непродуцированное накопление); $f_1(t)$, $f_2(t)$, $F(t)$ – наблюдаемые функции; a, b, c, g, h , – известные коэффициенты. Вектор-функция $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ называется состоянием системы,

$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ и $F(t)$ – входной и выходной функциями, соответственно.

Система (1)-(3) называется полностью наблюдаемой, если с помощью входной и выходной функций состояние системы в каждый момент времени определяется единственным образом.

Исследование полной наблюдаемости системы ведётся методом каскадного редуцирования и перехода к системам, вполне аналогичным исходной. Процесс каскадного расщепления полностью реализуется за конечное число шагов. Устанавливаются условия, при выполнении которых редуцированная система последнего шага является полностью наблюдаемой. В этом случае исходная система (1)-(3) также является полностью наблюдаемой и предъясняются формулы для построения функции состояния $x(t)$.

**ПРИМЕНЕНИЕ БАЗИСОВ ВСПЛЕСКОВ К
РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРЕМЕННОГО ТИПА**

Феоктистов В.В., Феоктистова О.П. (Москва)

pfeoktis@mail.ru

Решается краевая задача для нелинейного уравнения

$$t(x-t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = u^2(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x u(t, x), \quad (1)$$

которое в классе $L_2(\Omega)$, $(t, x) \in \Omega$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, является уравнением переменного типа [1]. Уравнение (1) встречается в газовой динамике и теории пограничного слоя. На границе единичного квадрата Ω известны функции $u(t, 0)$ и $u(t, 1)$, функция $u(0, x)$, в свою очередь, является решением краевой задачи для уравнения Блэзиуса

$$u(0, x) \frac{d^2 u(0, x)}{dx^2} + \frac{1}{2} x = 0, \quad (2)$$

$$u(0, 0) = \text{const}, \quad u(0, 1) = 0, \quad (3)$$

а функция $u(1, x)$ — решением задачи для уравнения Рэлея

$$u(1, x) \frac{d^2 u(1, x)}{dx^2} + \frac{1}{2} = 0, \quad (4)$$

$$u(1, 0) = \text{const}, \quad u(1, 1) = 0. \quad (5)$$

Воспользуемся ортогональным разложением гильбертова пространства $L_2(\Omega)$, которое применяется в кратномасштабном анализе [2]:

$$L_2(\Omega) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (6)$$

В соответствии с разложением (6) решение задачи ищется в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) \Phi_k(t) + \sum_{j=0}^M \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk}(x) \Psi_{jk}(t), \quad (7)$$

$$\Phi_k(t) = \Phi(t-k), \quad \Phi \in V_0,$$

$$\Psi_{jk}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t-k), \quad \Psi_{00}(t) = \Psi(t), \quad \Psi_{jk} \in W_j,$$

где M — число масштабов, используемых для данного приближения; $\Phi(t)$ — выбранная для задачи масштабирующая функция,

$\{\Phi_k(t)\}$ — ортонормированный базис в V_0 ; $\Psi(t)$ — базовый всплеск с общим для всех W_j компактным носителем, $\{\Psi_{jk}(t)\}$ — ортонормированный базис в W_j , $j = \overline{0, M}$.

Вследствие ортогональности подпространств V_0 и W_j результирующая система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для определения коэффициентов разложения (7) распадается на две независимые системы относительно $c_k(x)$ и $d_{jk}(x)$. Для решения полученных систем допустимо использовать метод конечных разностей в силу его совместимости с аппаратом кратномасштабного анализа. Проблема согласования решений на линии $t = x$, при переходе через которую уравнение (1) меняет свой тип, решена при помощи сдвига аргумента функций $\Psi_{jk}(t)$.

Результаты, полученные при решении нелинейной краевой задачи для уравнения (1), распространены на дифференциальный оператор 2-го порядка D ,

$$D \equiv D(t, x, u, u^2, u_t, u_x, u_{xx}), \quad (8)$$

который содержит коэффициент при u_t , меняющий знак в области рассмотрения, и квадратичные члены, составленные из искомой функции (и ее производных).

На границе области поставлены нелинейные краевые условия, в которые неизвестная функция и ее производные также входят в квадратичной форме, что позволяет разрешить нелинейность в системах обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(x)$ и $d_{jk}(x)$ [3]. Такие краевые задачи возникают при решении задач для нелинейных уравнений переменного типа [1].

Литература

1. Ларькин И. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Неленные уравнения переменного типа. — Новосибирск: Наука, 1983.
2. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2006. — 616 с.
3. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. О решении задач пограничного слоя, преобразованных к системе уравнений в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью // Вестник МГТУ. Серия "Естественные науки". — 2004. т.1(12). — С. 54–71.

О СМЕШАННЫХ В-ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА ЛИУВИЛЛЯ-КИПРИЯНОВА

Феоктистова А.А. (Липецк)

alek-feoktistova@yandex.ru

Мы будем рассматривать функции, определенные в части евклидова пространства точек $R_N^+ = R_k^+ \times R_{n-k} \times R_m^+ \times R_{N-n-m}$. Введем обозначения $u = (x, y)$, $x \in R_k^+ \times R_{n-k}$, $y \in R_m^+ \times R_{N-n-m}$. Каждая из переменных x и y в свою очередь разбита на части $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$: $x' = (u_1, \dots, u_k)$, $x'' = (u_{k+1}, \dots, u_n)$, $y' = (u_{n+1}, \dots, u_{n+m})$, $y'' = (u_{n+m+1}, \dots, u_N)$, где переменные x' и y' размерности k и m соответственно, по смыслу рассматриваемых здесь задач, будем называть весовыми. При этом числа k, n, m, N предполагаются фиксированными, $1 \leq n \leq N$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq m \leq N - n$, $k + m \neq 0$.

Пусть $l = (l_1; l_2) = (l'_1, l''_1; l'_2, l''_2)$, где l'_1, l''_1, l'_2, l''_2 — мультииндексы, состоящие из целых положительных чисел размерности соответственно $k, n - k, m, N - n - m$. И пусть $(BD)^l = (B_{x'}^{l'_1} D_{x''}^{l''_1} B_{y'}^{l'_2} D_{y''}^{l''_2})$, где $B_{x'} = (B_{u_1}, \dots, B_{u_k})$, $D_{x''} = (\frac{\partial}{\partial u_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n})$, $B_{y'} = (B_{u_{n+1}}, \dots, B_{u_{n+m}})$, $D_{y''} = (\frac{\partial}{\partial u_{n+m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_N})$. B_{u_i} — оператор Бесселя, действующий по одной из весовых переменных u_1, \dots, u_k или u_{n+1}, \dots, u_{n+m} следующим образом: $B_{u_i} = \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + \frac{\gamma_i}{u_i} \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\gamma_i > 0$. Выражение вида $(B_{x'}^{l'_1} D_{x''}^{l''_1} B_{y'}^{l'_2} D_{y''}^{l''_2})f(x, y)$ мы будем называть смешанной В-производной от функции $f(x, y)$.

Через $S_{ev} = S_{ev}(R_N^+)$ обозначим подпространство пространства Шварца основных функций $S(R_N)$, состоящее из функций, четных по каждой из переменных u_1, \dots, u_k и u_{n+1}, \dots, u_{n+m} . Пространство весовых обобщенных функций $S'_{ev} = S'_{ev}(R_N^+)$ определяется на основе весовой линейной формы $(f, \varphi)_\gamma = \int_{R_N^+} f(u) \varphi(u) u^\gamma du$.

Пусть $\varphi(u) = \varphi(x, y) \in S_{ev}(R_N^+)$, $\varphi(x, y) = \varphi(x', x'', y', y'')$, где x' и y' — весовые переменные. По группе переменных $x = (x', x'')$ смешанное преобразование Фурье-Бесселя определяется следующим выражением

$$\widehat{\varphi}^x(\xi, y) = (F_B)_x[\varphi](\xi, y) = \int_{R_n^+} \varphi(x, y) \mathfrak{J}_\gamma(x', \xi') e^{-i(x'', \xi'')} x^\gamma dx,$$

где по весовым переменным x' применяется преобразование Фурье-

Бесселя, а по переменным x'' — преобразование Фурье. При этом

$$j_\gamma(x', \xi') = \prod_{i=1}^k j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(u_i \xi_i), \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n u_i^{\gamma_i},$$

где γ_i — фиксированные положительные числа.

Операция

$$F = I_{\gamma, x^r} f = (F_B^{-1})_\xi [(1 + |\xi|^2)^{-\frac{r}{2}} (F_B)_x [f]] \quad (1)$$

соответствует действительному числу r , отображает S'_{ev} на S'_{ev} взаимно однозначно. Мы также рассмотрим подобные операции на координатных осях. Если выбрана ось u_j , то операцию (1) обозначим через $I_{\gamma_j, u_j r}$.

Определение. Пусть $f \in L_p^\gamma$. Множества функций

$$F = I_{\gamma, x^r} f, \quad F = I_{\gamma_j, u_j r} f, \quad f \in L_p^\gamma$$

будем называть классами Лиувилля-Киприянова и обозначать, соответственно,

$$L_{xp}^{r, \gamma} = L_{xp}^{r, \gamma}(R_N^+), \quad L_{u_j p}^{r, \gamma} = L_{u_j p}^{r, \gamma}(R_N^+), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad -\infty < r < +\infty.$$

При этом норма определяется равенством $\|F\|_{L_{xp}^{r, \gamma}} = \|f\|_{L_p^\gamma}$, в частности, $\|F\|_{L_{u_j p}^{r, \gamma}} = \|f\|_{L_p^\gamma}$. Класс $L_{xp}^{r, \gamma} = L_{xp}^{r, \gamma}(R_N^+)$, соответствующий произвольному действительному вектору \mathbf{r} , определяется как пересечение $L_{xp}^{r, \gamma} = \bigcap_{j=1}^n L_{u_j p}^{r_j, \gamma}$ с нормой $\|f\|_{L_{xp}^{r, \gamma}} = \sum_{j=1}^n \|f\|_{L_{u_j p}^{r_j, \gamma}}$.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $\Psi \in L_p^{r, \gamma}(R_N^+)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N) > 0$ ($r_j > 0$) и $l = (l_1; l_2) = (l'_1, l''_1, l'_2, l''_2)$ — мультииндекс, состоящий из целых положительных чисел, для которого $\kappa = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{l_j}{r_j}$. И пусть $\rho = \kappa \mathbf{r}$, тогда смешанная B -производная функции Ψ принадлежит классу Лиувилля-Киприянова $L_p^{\rho, \gamma}(R_N^+)$, т.е. $(BD)^l \Psi \in L_p^{\rho, \gamma}(R_N^+)$, и выполняется следующая оценка $\|(BD)^l \Psi\|_{L_p^{\rho, \gamma}} \leq C \|\Psi\|_{L_p^{r, \gamma}}$.

Литература

[1] Киприянов, И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М.: Наука, 1997. — 199 с.

[2] Ляхов, Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами / Л. Н. Ляхов. — Липецк: ЛГПУ, 2007. — 232 с.

[3] Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1977. — 436 с.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ РОБЕНА¹

Филиновский А.В. (Москва)

flnv@yandex.ru

Мы будем рассматривать задачу на собственные значения с граничным условием Робена

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей Γ , где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ . Из вариационного принципа следует, что первое собственное значение $\lambda_1(\alpha)$ задачи (1), (2) монотонно возрастает по α и удовлетворяет неравенству $\lambda_1 < \lambda_1^{(d)}$, где $\lambda_1^{(d)}$ — первое собственное значение задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω .

Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\lambda_1(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. В монографии [1] (см. главу 6, § 2) было отмечено, что $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \lambda_1 = \lambda_1^{(d)}$. При $n = 2$ в работе [2] получены следующие оценки:

$$\lambda_1^{(d)} \left(1 + \frac{\lambda_1^{(d)}}{\alpha q_1} \right)^{-1} \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^{(d)} \left(1 + \frac{4\pi}{\alpha |\Gamma|^{n-1}} \right)^{-1}, \quad \alpha > 0,$$

где $|\cdot|_k$ — k -мерная мера, q_1 — первое собственное значение задачи Стеклова

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u|_{\Gamma} &= 0, \quad \left(\Delta u - q \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 11-01-00989 и РНП 2.1.1/7161.

Теорема 1. При $n \geq 2$ имеет место представление

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda_1^{(d)} - \frac{\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 ds}{\int_{\Omega} v^2 dx} \alpha^{-1} + o(\alpha^{-1}), \quad \alpha \rightarrow +\infty,$$

где v — первая собственная функция задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda_1^{(d)} v &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ v|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Литература

1. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики.* Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1951.
2. Sperb R. *Untere und obere schranken für den tiefsten eigenwert elastisch gestützten membran* // Zeitschrift Angew. Math. Phys. 23 (1972). no. 2. 231–244.

О САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Фомин В.И. (Тамбов)

kulikov@apmath.tsu.ru

В учебно-методическом комплексе дисциплины (УМКД) "Математика" для различных направлений подготовки бакалавров часть содержания этой дисциплины отводится под самостоятельную работу студентов (СРС), при этом не уточняется, какой именно материал нужно включать в СРС. В связи с этим необходимо указать *критерии отбора* учебного материала для СРС. Главным из таких критериев является *критерий усвояемости материала*, т.е. в СРС нужно включать лишь тот учебный материал, который действительно доступен студенту для самостоятельного изучения, при этом нужно ориентироваться на среднестатистического студента (в смысле его математических способностей и уровня школьной подготовки по математике). Вторым по важности критерием является *критерий увязки материала* для СРС с учебным материалом для аудиторных занятий, т.е. преподавание дисциплины "Математика" должно вестись в едином ключе, а именно, на аудиторных занятиях должны быть изложены все темы данной дисциплины, включенные в УМКД, при этом по ходу изложения часть материала должна отводиться для СРС.

Для СРС требуется новый тип учебников, а именно, учебники, в которых весь материал, включенный в УМКД, изложен с достаточной строгостью, ясностью и полнотой. Ниже предлагаются учебные пособия для специальности 090105, в которых автор попытался достичь указанных требований.

Литература

1. Фомин В.И. Математический анализ I.-Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008.-236с.
2. Фомин В.И. Теория функций комплексного переменного.-Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010.-296с.
3. Фомин В.И. Дифференциальные уравнения.-Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010.-156с.

ОБ ОПЕРАТОРАХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ОКТАНТЕ

Фролова Е.В. (Липецк)

lsnn48@mail.ru

Многочисленные задачи математической физики приводятся к уравнениям

$$x = Kx + g, \quad (1)$$

где $K = L + M + N$ - оператор с частными интегралами, операторы L, M, N определяются равенствами

$$(Lx)(t, s, r) = \int_a^{+\infty} l(t, s, r, \tau)x(\tau, s, r) d\tau,$$

$$(Mx)(t, s, r) = \int_c^{+\infty} \int_e^{+\infty} m(t, s, r, \sigma, \theta)x(t, \sigma, \theta) d\sigma d\theta,$$

$(Nx)(t, s, r) = \int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} \int_e^{+\infty} n(t, s, r, \tau, \sigma, \theta)x(\tau, \sigma, \theta) d\theta d\sigma d\tau;$
 $t, \tau \in [a, +\infty), s, \sigma \in [c, +\infty), r, \theta \in [e, +\infty), l, m, n$ — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Фредгольмовость оператора $I - K$ изучается в пространстве $C_h(D)$ — множестве заданных на $D = [a, +\infty) \times [c, +\infty) \times [e, +\infty)$ функций, таких, что $hx \in C(D)$ - пространству равномерно непрерывных и ограниченных на D функций; $h(t, s) = e^{-k(t+s+r)}$, где $k > 0$. Норма в $C_h(D)$ определяется равенством $\|x\|_{C_h(D)} = \|hx\|_{C(D)}$.

Теорема. Пусть $u = t+s+r, l(t, s, r, \tau) = e^{-ku} \sum_{i=1}^p l_i(t)\bar{l}_i(s)\tilde{l}_i(r)a_i(\tau),$

$$m(t, s, r, \sigma, \theta) = e^{-ku} \sum_{j=1}^q m_j(t)\bar{m}_j(s)\tilde{m}_j(r)b_j(\sigma, \theta), n(t, s, r, \tau, \sigma, \theta) =$$

$$e^{-ku} \sum_{k=1}^r n_k(t)\bar{n}_k(s)\tilde{n}_k(r)c_k(\tau, \sigma, \theta), \text{ где } l_i, \bar{l}_i, \tilde{l}_i \quad (i = 1, \dots, p), m_j, \bar{m}_j,$$

\tilde{m}_j ($j = 1, \dots, q$), $n_k, \bar{n}_k, \tilde{n}_k(r$ ($k = 1, \dots, r$) – равномерно непрерывные и ограниченные функции; $\int_a^{+\infty} |a_i(\tau)| d\tau < A < \infty$ ($i = 1, \dots, p$), $\int_c^{+\infty} \int_e^{+\infty} |b_j(\sigma, \theta)| d\theta d\sigma < B < \infty$ ($j = 1, \dots, q$), $\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} \int_e^{+\infty} |c_k(\tau, \sigma, \theta)| d\theta d\sigma d\tau < C < \infty$ ($k = 1, \dots, r$). Тогда фредгольмовость уравнения (1) равносильна обратимости операторов $I - L$ и $I - M$.

Более того, $H = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}(LM + N)$ – компактный интегральный оператор с вырожденным ядром и однозначная разрешимость уравнения (1) в $C_h(D)$ равносильна обратимости оператора $I - H$.

ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СЛОЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ¹

Харламов М.П. (Волгоград)

mharlamov@vags.ru

В интегрируемых системах с тремя степенями свободы, обладающих одномерной группой симметрии, процедурой факторизации (понижения порядка по Раусу) переходят к семейству приведенных систем с двумя степенями свободы, зависящих от одного параметра ℓ – постоянной циклического интеграла (интеграла момента). В системе с двумя степенями свободы фиксируется постоянная энергии h и рассматриваются трехмерные многообразия – изоэнергетические уровни $Q^3(\ell, h)$. Последние, в свою очередь, расслоены на уровни оставшегося интеграла, и грубую топологию лиувиллева слоения можно описать с помощью графа Фоменко.

В неприводимой системе глобальное понижение порядка невозможно. В связи с этим интеграл, возникающий вместо циклического, теряет свое особое значение. Задачу топологического анализа естественно ставить в применении к изоэнергетическим уровням исходной системы (роль интеграла энергии, как гамильтониана системы, в любом случае особая, что показывает хотя бы особая роль его критических точек – положений равновесия в системе, устойчивость которых определяется по вторым производным гамильтониана). Эти уровни пятимерны, как правило, компактны и могут иметь весьма нетривиальную топологию, как показывает пример задач с конфигурационным пространством $SO(3)$. На них возникает инте-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00043).

гральное отображение в \mathbb{R}^2 , критические значения которого формируют изоэнергетическую бифуркационную диаграмму. Для критических точек разработаны практические методы указания комбинаций первых интегралов, индуцирующих симплектические операторы, определяющие тип критической точки. Привязав к каждой точке диаграммы определенный код, полностью описывающий количество и характер критических точек в ее прообразе, получим новый инвариант – оснащенную бифуркационную диаграмму.

Представлена полная классификация оснащенных изоэнергетических диаграмм задачи о движении в двойном поле волчка типа Ковалевской (случай Реймана–Семенова–Тян–Шанского без гиросtatического момента).

ЭЛЕКТРОННЫЕ АТЛАСЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ-ЯХЬЯ¹

Харламова И.И. (Волгоград)

irinah@vags.ru

Предложен новый взгляд на классификацию бифуркационных диаграмм и условия существования критических движений интегрируемой задачи о движении тяжелого гиростата при условиях типа Ковалевской (случай интегрируемости Х.М. Яхья). Построено множество на плоскости «энергия-гиросtatический момент», классифицирующее диаграммы на изоэнергетических уровнях. Выписаны конструктивно проверяемые условия существования критических движений в терминах параметров на поверхностях, несущих листы бифуркационных диаграмм. Создан электронный атлас изоэнергетических диаграмм.

Под электронным атласом семейства плоских геометрических объектов $T \subset \mathbb{R}^2$, зависящих от векторного параметра $c \in \mathbb{R}^2$, понимается следующее: 1) введение отношения эквивалентности объектов (например, диффеоморфизм или, как в случае с диаграммами, клеточный изоморфизм, когда структура клеточного комплекса задается рангом интегрального отображения); 2) наличие аналитических уравнений разделяющего множества (в любой окрестности точки которого имеются неэквивалентные объекты), позволяющих строить наглядное представление любой его малой области; 3) возможность интерактивного выбора точки в плоскости параметров;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00043).

- 4) возможность компьютерной визуализации объекта $T(c)$, по крайней мере, для любой неразделяющей точки плоскости параметров;
- 5) возможность детализации любой части построенного объекта с целью выявления происходящих в нем перестроек при пересечении разделяющего множества.

Представлен и электронный атлас бифуркационных диаграмм случая Яхья для приведенных систем, когда в качестве параметров рассматриваются постоянная площадей и гиростатический момент. При этом использованы результаты работ [1, 2].

Литература

1. Рябов П. Е. Механика твердого тела, 1995, № 27, с. 36-40.
2. Харламов М. П., Харламова И. И., Шведов Е. Г. Механика твердого тела, 2010, № 40, с. 77-90.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Харченко А.С. (Белгород)

science@bupk.ru

Ставится и изучается экстремальная задача для функционала

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu'^2}{2} dx + \int_0^l Ruv' dx + \int_0^l \frac{u^2}{2} dS + \int_0^l udM + N \quad (1)$$

с условиями $u(0) = A$, $u(l) = B$ в классе E абсолютно- непрерывных функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$.

Установлено необходимое условие экстремума для функционала (1), согласно которому точка экстремума функционала (1) при условиях $u(0) = A$, $u(l) = B$ должна являться решением уравнения

$$pu'(x) + \int_0^x udR - \int_0^x udS - M(x) = pu'(0) - M(0). \quad (2)$$

Будем называть уравнение

$$-pu'(x) + \int_0^x udQ = -pu'(0) \quad (3)$$

неосциллирующим на отрезке $[0, l]$, если всякое его нетривиальное решение имеет на $[0, l]$ не более одного нуля.

Теорема. Для того, чтобы квадратичный функционал

$$\delta^2 \Phi(u)h = \int_0^l p h'^2 dx - \int_0^l h^2 dR + \int_0^l h^2 dS$$

являющийся второй вариацией функционала (1), был неотрицателен для всех h из E , удовлетворяющих условиям, достаточно, чтобы, и уравнение (3) не осциллировало на $[0, l]$, где $Q=S-R$.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев Л.В., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО СОУДАРЕНИЯ РАЗНОМАСШТАБНЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ¹

Хорев И.Е., Горельский В.А., Захаров В.М.,
Аверьянов Г.А. (Томск)

Разработана в первом приближении математическая модель поведения материалов, подверженных интенсивным ударным нагрузкам. Она включает кинетическую модель разрушения материалов в волнах разрежения активного типа и экспериментальные зависимости прочностных характеристик от температуры и пористости [1].

В общем случае, в первом приближении, предлагается математическая модель, которая описывается сжимаемой упругопластической средой. Поведение такой среды при динамических нагрузках характеризуется уравнением состояния, модулем сдвига, динамическим пределом текучести и константами кинетической модели разрушения активного типа, описывающей накопление, развитие и эволюцию микроповреждений, которые непрерывно изменяют свойства разрушающегося материала и вызывают релаксацию напряжений.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-08-00398 а) и РНП ВШ (рег. №2.1.1/4147)

Физико – математическое моделирование откольного и сдвигового разрушения конструкционных материалов осуществлялось, исходя из представления о непрерывной мере разрушения, в качестве которой выбран удельный объём трещин. При этом скорость роста удельного объёма трещин задавалась как функция действующего давления и достигнутого объёма трещин, а по мере разрушения среды прочностные характеристики её падают по определённым зависимостям [2].

Численное описание высокоскоростного взаимодействия различных бойков с преградами конечной толщины и их разрушение проводилось методом конечных элементов, который достаточно хорошо и надёжно проявил себя в течение 30 лет использования его в работах Томской школы механиков для решения широкого круга задач удара и взрыва [3].

На основе этой модели, алгоритмов и методик создан программный комплекс для компьютерного моделирования процессов ударного деформирования и разрушения преград и конструкций в осесимметричной, плоской и трехмерной постановках.

Проведены параметрические исследования различных задач высокоскоростного соударения разномасштабных твёрдых тел. В частности описано формирование лицевого и тыльного откола в преградах конечной толщины, взаимодействие ударника с откольной тарелочкой, особенности разрушения преград при больших углах встречи с образованием откольного эллипса и т.д. Математически описаны обнаруженные новые физические явления при пробитии преград конечной толщины, слоистых, экранированных и разнесённых в пространстве конструкций при нормальном и косом столкновении, включая наличие у ударников углов нутации.

На рис. 1 представлена хронограмма процесса внедрения стержневого ударника в преграду в момент времени 10 мкс при скорости встречи 1950 м/с, угле взаимодействия 45 и угле нутации 30/

Литература

1. Хорев И.Е. Физическое и математическое моделирование разрушения материалов и конструкций по анализу предразрушения соударяющихся тел// Химическая физика, 2002, т. 21, № 9, с 17–21.
2. Канель Г.И., Разорёнов С.В., Уткин А.В., Фортон В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1999. 408 с.
3. Хорев И.Е., Толкачёв В.Ф., Ерохин Г.А., Физико – матема-

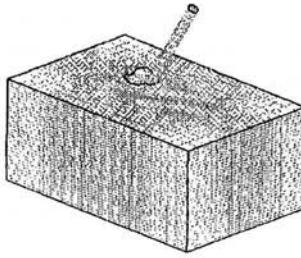


Рис. 1

тический анализ противоударной стойкости преград и конструкций для защиты космической техники. Космические исследования. 2007, т. 45, № 2, с.183 – 188.

ФОРМУЛА ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ¹

Хромов А.П. (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q_1(x)u(x, t) + q_2(x)u(1-x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in (-\infty, \infty)$, β – вещественное число, $q_j(x) \in C[0, 1]$, $q_1(x)$ – вещественная функция, $q_1(x) = q_1(1-x)$, $q_2(x) = -q_2(1-x)$, $q_2(x) = -\overline{q_2(x)}$, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) + q_2(0)\varphi(1) = 0$.

Теорема. *Классическое решение задачи (1)–(2) существует и дается формулой:*

$$u(x, t) = [p(1-x)f_0(1-x + \beta t) - ip(x)f_0(x + \beta t)]e^{a\beta it + \int_0^x q_2(\xi) d\xi},$$

где $a = \pi/2 + \int_0^1 q_1(t)dt$, $p(x) = e^{i(ax - \int_0^x q_1(\xi) d\xi)}$, $f_0(x)$ – непрерывно дифференцируемая при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, периодическая с пери-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1)

одом 1 функция, и при $x \in [0, 1]$

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [\dot{\varphi}_1(x) + \varphi_1(1-x)], \quad \varphi_1(x) = \varphi(x)e^{-\int_0^x q_2(\xi) d\xi}.$$

В случае $q_2(x) \equiv 0$ этот результат установлен в [1].

Литература

1. Хромов А.П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида//Изв. Саратовского ун-та. Серия Мат. Мех. Киб. Т.10, вып. 4. 2010. С. 17-22.

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ПЛОСТОСТИ С КРЕСТООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Черникова А.С. (Воронеж)

chernikova-an@mail.ru

Рассматривается уравнение стационарной теплопроводности, причем неоднородность материала описывается функцией $G(x_2) = G_0 e^{kx_2}$, что соответствует ситуации, когда вектор направления изменения неоднородности направлен параллельно оси Ox_2 . Уравнения

стационарной теплопроводности в таком случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \quad (1)$$

Искомая функция $u(x_1, x_2)$ - это температура в точке материала с координатами (x_1, x_2) . Областью, в которой рассматривается уравнение (1), является плоскость Ox_1x_2 с разрезом, описывающим крестообразную трещину $\{x_1 \in [-1, 1], x_2 = 0\} \cup \{x_1 = 0, x_2 \in [-1, 1]\}$. Граничные условия заданы следующим образом (см. [1])

$$u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = q_0^1(x_1); x_1 \in [-1, 1],$$

$$u(+0, x_2) - u(-0, x_2) = e^{-\frac{k}{2}x_2} q_0^2(x_2); x_2 \in [-1, 1],$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{k}{2}u(x_1, +0) - \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2} - \frac{k}{2}u(x_1, -0) &= \\
&= q_1^1(x_1); x_1 \in [-1, 1], \\
\frac{\partial u(+0, x_2)}{\partial x_1} + \frac{k}{2}u(+0, x_1) - \frac{\partial u(-0, x_2)}{\partial x_1} - \frac{k}{2}u(-0, x_2) &= \\
&= e^{-\frac{k}{2}x_2} (q_1^2(x_2) \frac{k}{2} q_0^2(x_2)); x_2 \in [-1, 1].
\end{aligned} \tag{2}$$

Первое и второе из условий (2) описывает разности между температурами верхнего и нижнего берега трещины, а второе и третье – разности между тепловыми потоками через эти берега. Решение исходной задачи единственно в $L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
U(x_1, x_2) = e^{-\frac{k}{2}x_2} & \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_1^1(\sigma_1) \partial\sigma_1 + \right. \\
& + \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{x_1^2 + (x_2 - \sigma_2)^2}\right) q_1^2(\sigma_2) \partial\sigma_2 + \right. \\
& + \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{x_1}{\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}} q_0^1(\sigma_1) \partial\sigma_1 + \\
& \left. + \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{x_1^2 + (x_2 - \sigma_2)^2}\right) \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + (x_2 - \sigma_2)^2}} q_0^2(\sigma_2) \partial\sigma_2 \right],
\end{aligned}$$

где K_0, K_1 - функции Макдональда (см. [2]). Из свойств функций K_0 и K_1 следует, что функция бесконечно дифференцируема по x_1 и x_2 при всех $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (l_1 \cup l_2)$, где $l_1 = \{x_1 \in [-1, 1], x_2 = 0\}$, $l_2 = \{x_1 = 0, x_2 \in [-1, 1]\}$

Доказано, что решение $U(x_1, x_2)$ исследуемой задачи непрерывно вплоть до границы области. Также получены асимптотические представления производных решения $\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_k}$ вблизи вершин крестообразной трещины.

Литература

1. Глушко А.В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с

трещиной / А.В.Глушко, Е.А.Логина. – Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математики., 2010 №2, -С.47-50.

2. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функции / Г.Н.Ватсон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 875 с.

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛЕММЫ БИХАРИ¹

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

chavnn@mail.ru

Лемма Бихари [1] — простейший нелинейный аналог леммы Гроулла–Беллмана — хорошо известна специалистам по теории дифференциальных уравнений и имеет многочисленные приложения. Далее формулируется операторное обобщение леммы Бихари для случая лебеговых пространств.

Пусть $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное измеримое по Лебегу множество; для $p \in [1; +\infty)$ $L_p^+ = L_p^+(\Pi) = \{x \in L_p(\Pi): x(t) \geq 0 \text{ для п.в. } t \in \Pi\}$, $L_p = L_p(\Pi)$. Рассмотрим уравнение

$$x = B[x^{q/p}] + G[x] + \varphi, \quad x \in L_q^+(\Pi), \quad (1)$$

где $B: L_p \rightarrow L_q$, $G: L_r \rightarrow L_q$ — положительные ЛОО, для любого $\delta > 0$ обладающие общей для них вольтерровой δ -цепочкой \mathcal{T} [2,3], числа p, q, r таковы, что $+\infty > q \geq \max\{p, r\}$, $p, r \in [1, +\infty)$.

Следующее утверждение является (нелокальным по норме) обобщением теоремы 2.1 из [3] и подобно [3] может использоваться, в частности, для получения равномерных поточечных оценок разности решений управляемых начально-краевых задач.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) имеет решение $x = \bar{x} \in L_q^+$ при $\varphi = \bar{\varphi} \in L_q^+$. Тогда $\forall \varphi \in L_q^+$ такого, что $\varphi \leq \bar{\varphi}$ уравнение (1) также имеет, и притом единственное, решение $x = x_\varphi \leq \bar{x}$. Более того, $\forall x \in L_q^+$ такого, что $x \leq B[x^{q/p}] + G[x] + \varphi$, справедлива оценка: $x \leq x_\varphi$.

Литература

1. I. Bihari. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. №7.-1956.-С. 81-94.

¹Поддержка грантом АЦВП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)" Минобрнауки РФ, рег. № 2.1.1/3927, и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2009-2013), проект НК-13П(9).

2. В.И. Сумин, А.В. Чернов. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. Т.34, №10.-1998.-С. 1402-1411.

3. А.В. Чернов. О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах // Матем. заметки. Т.88, №2.-2010.-С.288-302.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОВЕДЕНИЯ НЕЙРОНОВ, СВЯЗАННЫХ ВОЗМОЖНОЙ СИНЦИТИАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ¹

Чижов А.В., Смирнова Е.Ю., Покровский А.Н.

(Санкт-Петербург)

anpokr@petrodvoretz.spb.ru

Экспериментальные данные в [1] указывают на существование синцитиальной связи между нейронами. Методами математического моделирования можно получить полезную информацию. Рассматривались задачи:

- 1) проследить картину перехода возбуждения между нейронами при наличии синцитиальной связи;
- 2) оценить влияние проводимости электрического контакта на синхронизацию нейронов;
- 3) определить влияние синцитиальной связи на порог возбуждения нейрона.

Была построена распределенная математическая модель двух пирамидных нейронов, связанных синцитиальной связью. Модель каждого из пирамидных нейронов включает в себя кабельное уравнение для мембранного потенциала на аксоне и сосредоточенной сине, аппроксимации кинетики ионных каналов, заимствованных из модели пирамидной клетки CA1-области гиппокампа крысы, и аппроксимацию тока через электрический контакт, удаленный от сомы на расстояние одной характеристической длины волокна.

Результаты демонстрируют эффект синхронизации вследствие синцитиальной связи. Наблюдалась синхронизация активности двух нейронов при проводимости синцитиальной связи 100 mS/cm^2 (проводимость мембраны в покое 0.05 mS/cm^2) в сравнении с некоррелированной активностью этих нейронов при проводимости 1 mS/cm^2 . Кроме того, наблюдался переход активности от нейрона к нейрону при проводимости синцитиальной связи 10 mS/cm^2 , а

¹Работа поддержана РФФИ 09-01-00473-а, 07-04-92167-а.

также подавление активности одного нейрона другим при больших стимулирующих токах.

Литература

1. Сотников О.С. Статика и структурная кинетика живых асимптотических дендритов. Санкт-Петербург: "Наука", 2008. 398 с.

УСЛОВИЯ НЕ ЗАМЫКАЕМОСТИ И УСЛОВИЯ ЗАМКНУТОСТИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ

Чшиев А.Г. (Воронеж)

zchaslan@mail.ru.

Пусть X — комплексное банахово пространство и $EndX$ — банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X . Под полугруппой операторов будем понимать сильно непрерывную операторную функцию $T: (0, \infty) \rightarrow EndX$, для которой $T(t+s) = T(t)T(s)$ при всех $t, s > 0$. Согласно работе [1], определим следующие подпространства из X : $KerT = \{x \in X: T(t)x = 0 \text{ при всех } t > 0\}$ — ядро полугруппы T ; $X_1(T) = \{x \in X: \int_0^1 \|T(t)x\| dt < \infty\}$; $\tilde{X}_1(T) = \{x \in X_1(T): \lim_{\eta \rightarrow 0+} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta T(t)x dt = x\}$.

Определение. Инфинитезимальным оператором полугруппы T называется линейный оператор $A_0: D(A_0) \subset X \rightarrow X$ вида $A_0x_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x_0 - x_0}{t}$, $x_0 \in D(A_0) = \{x \in X: \exists \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t}\}$.

В следующих теоремах приводятся необходимые условия и достаточные условия для того, чтобы инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы T был замкнутым, был не замыкаемым в классе операторов, то есть замыкание $\overline{A_0}$ оператора A_0 не являлся оператором.

Теорема 1. Пусть инфинитезимальный оператор A_0 не замыкаем в классе операторов. Тогда $\overline{ImA_0} \cap KerT \neq \{0\}$.

Теорема 2. Пусть $X_1(T) = X$ и $\overline{ImA_0} \cap KerT \neq \{0\}$. Тогда инфинитезимальный оператор A_0 не замыкаем в классе операторов.

Следствие 1. Пусть $\overline{ImA_0} \cap KerT = \{0\}$. Тогда оператор A_0 замыкаем.

Теорема 3. Пусть $X_1(T) = X$, и пусть инфинитезимальный оператор A_0 замкнут. Тогда $\overline{ImA_0} \subset \tilde{X}_1(T)$.

Теорема 4. Пусть $X_1(T) = X$, и пусть $\overline{ImA_0} \subset \tilde{X}_1(T)$. Тогда инфинитезимальный оператор A_0 замкнут.

Литература

1. Баскаков А. Г.: Линеинные отношения как генераторы полугрупп операторов /А. Г. Баскаков // Математические заметки. - 2008, т.84, №2. - с. 175-192.

2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд. ИЛ, 1962.-829с.

ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТЬ СПЕКТРА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Шабров С.А. (Воронеж)

Бурное развитие качественная теория дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами получила после работы Ю. В. Покорного [1] 1999 года. Столь успешное продвижение обусловлено тем, что дифференциальное уравнение трактуется как поточечно заданное, т.е. как обыкновенное. Это позволяет применить качественные методы анализа решения (типа теорем Ролля) дифференциальных уравнений. Последнее делает возможным получить столь важную для приложений информацию (например, количество нулей, экстремумов и пр.). Изучение же уравнения с позиций теории обобщенных функций позволяет установить лишь слабую разрешимость (оставляем за кадром вопросы о перемежаемости нулей и пр.). Это неудивительно: уравнение расценивается как равенство функционалов, определенных на D пространстве бесконечно дифференцируемых финитных на $[0; l]$ функций.

С позиции поточечной интерпретации уравнения для краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = \lambda uM'_{\sigma}, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

λ — спектральный параметр, удается доказать осцилляционность спектра (при выполнении определенных условий).

Решение краевой задачи (1) мы ищем в классе непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, первая производная $u'(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0; l]$; вторая производная $u''_{xx}(x)$ имеет конечное на $[0; l]$ изменение; $(pu''_{xx})(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0; l]$, $(pu''_{xx})'_x(x)$ и $(ru'_x)(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0; l]$.

В уравнении (1) все производные до третьего порядка включительно понимаются в обычном смысле, а четвертого — по Радону-Никодиму [1].

На коэффициенты $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ мы накладываем вполне физические условия

1. $p(x)$ и $r(x)$ имеют конечные на $[0; l]$ изменения;
2. $\inf_{x \in [0; l]} p(x) > 0$ и $r(x) \geq 0$;
3. $Q(x)$ — не убывает на $[0; l]$;
4. $M(x)$ — возрастает на $[0; l]$;
5. $Q(x)$ и $M(x)$ — σ -абсолютно непрерывна на $[0; l]$.

Переменная x в уравнении принадлежит специальному множеству $\overline{[0; l]}_\sigma$, в котором каждая точка ξ , принадлежащая множеству $S(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma(x)$, заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0, \xi, \xi + 0\}$.

Литература

[1] Покорный Ю.В. Стильтеса и производная по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. — 1999. — Т. 364, 2. — С. 167–169.

[2] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Успехи матем. наук. — Т. 63, вып. 1 (379). — 2008. — С. 111–154.

[3] Покорный Ю.В. Осцилляционный метод в спектральных задачах / Покорный Ю.В. [и др.]. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192 с.

О ВАРИАЦИОННОМ ПОДХОДЕ К ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Шабров С.А., Лылов Е.В. (Воронеж)

shaspoteha@mail.ru

В работе излагается вариационный подход к спектральной задаче:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = \lambda u\frac{dM}{d\Gamma}, \\ u|_{\partial\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\frac{d}{d\Gamma}(pu')$ для случая, когда x принадлежит ребру γ_i графа Γ без циклов (см. например, [1, 2]), означает производную по мере, а для внутренней вершины — сумму односторонних производных, посчитанных при ориентации от вершины; $\frac{dQ}{d\Gamma}$ и $\frac{dM}{d\Gamma}$ во внутренней вершине a графа равны соответственно q_a, m_a .

Показывается, что ведущее собственное значение дает минимум функционалу

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} pu'^2 dx + \int_{\Gamma} u^2 dQ$$

на E - множестве абсолютно непрерывных на замыкании I каждого ребра (в концевых точках $u(x)$ определяется своими предельными значениями) функций, первая производная которых имеет конечное на I изменение, принимающих на границе Γ нулевые значения, при дополнительном условии $\int_{\Gamma} u^2 dM = 1$, при этом Q и M определяют меры на графе Γ .

Литература

1. Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах - М., 2009.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах - М., 2004.

О ПОСЛОЙНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ СИММЕТРИЙНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОПИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Шананин Н.А. (Москва)

nashananin@inbox.ru

Введем обозначения: Ω - открытое множество в \mathcal{R}^n , $\langle \varrho, \alpha \rangle = \varrho_1 \alpha_1 + \dots + \varrho_n \alpha_n$ - взвешенный порядок дифференцирования ∂^α , $\varrho \in \mathcal{N}^n$, $\mu = \min_j \varrho_j$, $[u]_k(x)$ - совокупность значений всех производных функции $u(x)$ в точке x , взвешенный порядок которых не превышает k , $x' = \{x_j | \varrho_j = \mu\}$ и $x'' = \{x_j | \varrho_j > \mu\}$, \mathcal{F}_{x^0} - связанная компонента слоя $\{x \in \Omega | x'' = x''^0\}$, содержащая $x^0 \in \Omega$. Пусть $u \in C^\infty(\Omega)$ - решение уравнения

$$\sum_{m-\mu < \langle \varrho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) \partial^\alpha u = f(x, [u]_{m-\mu}(x)), \quad (1)$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x))$. Предположим, что пучок символов

$$\mathcal{H}_u(x, \xi, h) = \sum_{k=0}^{\mu-1} h^k \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle = m-k} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) (i\xi)^\alpha,$$

уравнения на решении $u(x)$ обладает свойствами: 1) из равенства $\mathcal{H}_u(x, \xi', 0, 0) = 0$ следует $\xi' = 0$; 2) для каждой точки $y \in \mathcal{F}_{x^0}$ и любых неколлинеарных векторов (ξ'^0, ξ''^0) и $(\eta'^0, 0)$ существует окрестность W точки $(y, \eta'^0, \xi^0, 0)$, в которой уравнение

$$\mathcal{H}_u(x, z\eta' + \xi', \xi'', h) = 0$$

имеет только простые корни, причём для каждого из них либо мнимая часть тождественно равна нулю в этой окрестности, либо отлична от нуля во всех ее точках.

Теорема. Пусть Γ нехарактеристическая для уравнения (1) в точке $x^0 \in \Omega$ гиперповерхность, G - группа симметрий уравнения. Предположим, что существуют такие окрестности U точки x^0 и V единицы группы симметрий, что

$$\partial^\alpha (g \circ u - u)|_{\Gamma \cap U} = 0$$

при $|\alpha| < t/\mu$. Тогда решение u G -инвариантно во всех точках компоненты F_{x^0} .

УПРАВЛЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТЬЮ С НЕФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ РАБОТЫ

Шаронов Д.А. (Тверь)
sharonov.demets@gmail.com

В работе задача обучения нейронной сети рассматривается как задача минимизации функционала

$$J(x, \omega, T) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (\omega_{ij}(t))^2 dt + \sum_{i=1}^n M_i (x_i(T) - A_i)^2$$

при динамических ограничениях

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i \left(\int_0^t \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(z) x_j(z) dz \right) + \gamma_i u_i(t), \quad i = 1 \dots n$$

с начальными условиями $x_i(0) = \Theta_i$ и ограничениями на управление и весовые коэффициенты $u_i(t) \in [-b_i, b_i]$, $\omega_{ij}(t) \in [-a_{ij}, a_{ij}]$, $i, j = 1 \dots n$, п. в. $t \in [0, T]$. Здесь a_{ij} , b_i , $i, j = 1 \dots n$ - заданные положительные параметры модели, $\omega_{ii}(t) \equiv 0$.

Для рассматриваемой задачи со свободным правым концом сформулирован принцип максимума. При помощи разработанного программного продукта получено численное решение. Исследовано влияние изменения начальных значений управления, весовых коэффициентов и времени работы сети на результат работы алгоритма обучения. Также исследовано поведение системы при изменении величин штрафов интегрального и терминального слагаемых.

Литература

1. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации. М.: Высшая школа, 2006.
2. Андреева Е.А. Оптимальное управление динамическими системами. Тверь, 1999.

О ПРИМЕНЕНИИ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ К РЕШЕНИЮ КОАЛИЦИОННЫХ ИГР

Шаура А.С. (Ижевск)

shaura@mail.ru

В последние годы получило довольно широкое распространение использование генетических алгоритмов для решения задач структурной оптимизации, комбинаторики, моделирования систем и др. По аналогии с такими задачами можно рассматривать и коалиционные игры, где выигрыш участников зависит от их взаимодействия друг с другом, и потому решение коалиционной игры можно представить как поиск оптимального состава коалиций.

Не всегда классические методы решения коалиционных задач, существующие в теории игр: С-ядро, вектор Шепли, НМ-решение, могут быть применены на практике, поэтому остается актуальным вопрос о рассмотрении иных способов дележа, которые бы удовлетворяли здравому смыслу и были бы "справедливыми" в отношении участников рассматриваемой игры. В качестве такого "справедливого" дележа предлагается искать долю каждого i -го игрока в виде суммы выигрыша $V(i)$, который получил бы игрок действуя в одиночку, и некоторой части от разности $V(S) - \sum_{i \in S} V(i)$, пропорциональной вкладу этого игрока в выигрыш коалиции $V(S)$. Разность $V(S) - \sum_{i \in S} V(i)$ характеризует преимущество, получаемое игроками от вступления в коалицию S .

Классическая теория игр не позволяет вместе с дележом найти и состав коалиций, в то время как во многих практических задачах поиск структуры является не менее важной составляющей.

Применение генетического алгоритма к решению коалиционных игр позволяет последовательно формировать коалиции на множестве игроков, оценивать их и распределять выигрыш в каждом конкретном случае. В качестве хромосомы генетического алгоритма можно использовать аналог матрицы смежности, что позволяет описать любые возможные коалиции. Таким образом, решается не

только задача нахождения дележа, но и задача определения состава коалиций, в которых задействованы игроки.

Проведены расчеты на модельных задачах, приведены результаты работы предложенного алгоритма.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ¹

Юрко В.А. (Саратов)

yurkova@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный граф G в \mathbf{R}^l с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_s\}$, множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ и с отображением σ , которое каждому ребру $e_j \in \mathcal{E}$ ставит в соответствие упорядоченную пару (возможно равных) вершин: $\sigma(e_j) := [u_{2j-1}, u_{2j}]$, $u_j \in \mathcal{V}$. Вершины $u_{2j-1} := \sigma^-(e_j)$ и $u_{2j} := \sigma^+(e_j)$ называются *начальной* и *конечной* вершинами e_j , соответственно. Положим $U := \{u_j\}_{j=\overline{1,2s}}$. Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ порождает класс эквивалентности такой, что $v = u_{j_1} = \dots = u_{j_\nu}$. Пусть v_1, \dots, v_p – граничные вершины, e_1, \dots, e_p – граничные ребра, $p > 0$, а l_j – длина ребра e_j . Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка u_{2j-1} соответствует $x_j = 0$. Цепочка ребер $\{e_{\nu_1}, \dots, e_{k, \nu_\eta}\}$ называется *циклом*, если она образует замкнутую кривую. Ребро $e_j \in \mathcal{E}$ называется *простым*, если оно не является частью цикла. Пусть e_1, \dots, e_r – простые ребра. Возьмем вершину v_p в качестве корня. Интегрируемая функция Y на G может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, l_j]$ определена на ребре e_j . Обозначим $Y|_{u_{2j-1}} := y_j(0)$, $Y|_{u_{2j}} := y_j(l_j)$, $\partial Y|_{u_{2j-1}} := y'_j(0)$, $\partial Y|_{u_{2j}} := -y'_j(l_j)$. Если $v \in \mathcal{V}$, то $Y|_v = 0$ означает, что $Y|_{u_j} = 0$ для всех $u_j \in v$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,s}}$ – интегрируемая вещественная функция на G ; q называется потенциалом. Рассмотрим дифференциальное уравнение на G :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{1, s}, \quad x_j \in [0, l_j], \quad (1)$$

где y_j удовлетворяют условиям склейки (УС) в каждой внутренней вершине v_ξ :

$$Y|_{u_i} = Y|_{u_j} \text{ для всех } u_i, u_j \in v_\xi, \quad \sum_{u_i \in v_\xi} \partial Y|_{u_i} = 0. \quad (2)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00099).

Зафиксируем e_k , $k > r$ и $\varepsilon_k = 0 \vee 1$. Положим $w_k := u_{2k-\varepsilon_k}$. Если (2) верно для $U \setminus \{w_k\}$, то будем называть эти условия w_k -УС. Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) с УС (2) и с граничными условиями $Y|_{v_j} = 0$, $j = \overline{1, p}$. Рассмотрим также краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1, p-1}$ для уравнения (1) с УС (2) и с краевыми условиями $\partial Y|_{v_k} = 0$, $Y|_{v_j} = 0$, $j = \overline{1, p} \setminus k$. Пусть $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 1}$, $k = \overline{0, p-1}$ – собственные значения (с учетом кратностей) задач $L_k(G)$. Пусть $L_\nu^\xi(G)$, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$ – краевые задачи для (1) с w_ξ -УС и с краевыми условиями $\partial^\nu Y|_{w_\xi} = 0$, $Y|_{v_j} = 0$, $j = \overline{1, p}$, где $\partial^0 Y := Y$, $\partial^1 Y := \partial Y$. Через $\Lambda_\nu^\xi = \{\lambda_{\nu n}^\xi\}_{n \geq 1}$ обозначим собственные значения задач $L_\nu^\xi(G)$. Исследуется обратная задача: *Даны спектры Λ_k , $k = \overline{0, p-1}$, Λ_ν^ξ , $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, построить потенциал q на G .*

Теорема 1. *Задание спектров Λ_k , $k = \overline{0, p-1}$, Λ_ν^ξ , $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, однозначно определяет потенциал q на G .*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [1] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Литература

1. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач*. - М.: Физматлит, 2007.

Именной указатель

А

Абдурагимов Г.Э., 5
Аверьянов Г.А., 202
Авраменко Л.Г., 6, 7
Алексеева О.Ю., 8
Алексеева С.М., 8
Андреева Е.А., 9
Андрианова А.А., 11
Антюшина И.В., 12
Аристова Л.Н., 14
Аршава Е.А., 16
Астахов А.Т., 21
Асташова И.В., 22

Б

Бабаева Е.В., 23
Бадков В.М., 25
Баев А.Д., 26, 28
Бакланов А.П., 29, 30
Батаев Е.С., 31
Бесаева С.В., 33
Беседина Т.В., 34
Близняков Н.М., 12
Большакова И.С., 9
Бондаренко Н.В., 34
Бравый Е.И., 35
Бугаков В.М., 132
Бурлуцкая М.Ш., 36
Быстрецкий М.В., 38

В

Валиев Р.А., 48
Вервейко Н.Д., 39
Вишневская Н.И., 41
Водолазов Н.Н., 62
Вожжова Т.А., 42
Волков Р.В., 43
Волов Д.Б., 44

Г

Глушакова Т.Н., 45
Глызин С.Д., 47
Гнатенко Ю.А., 48
Головко Н.И., 51, 52, 101
Головцов А.В., 53
Гончаренко Ю.В., 7
Горбенко О.Д., 189
Горельский В.А., 202
Горлов В.А., 54
Горшков А.А., 55
Гребенников К.В., 117
Гулина О.В., 61

Д

Дерунова Е.В., 56
Диденко В.Б., 57
Дмитриев В.В., 58
Дмитриев М.Г., 59
Дыльков А.Г., 59
Дюжева А.В., 60

Е
Еровенко В.А., 61
Ерусалимский Я.М., 62

Ж
Жук Н.М., 64

З
Задорожный А.И., 64, 102
Залыгаева М.Е., 66
Захаров В.М., 202
Зверева М.Б., 67
Звягин А.В., 69
Зубова С.П., 70, 71

И
Иванов К.С., 72
Иноземцев А.И., 73
Иохвидов Е.И., 74
Исраилов С.В., 75, 76

К
Калабухова С.Н., 77
Калашникова М.А., 78
Калитвин А.С., 79
Калитвин В.А., 80
Канатов А.В., 81
Карпикова А.В., 82
Карсакова М.С., 84
Карулина Е.С., 85
Катрахова А.А., 86
Ковалева М.И., 88
Козлов А.В., 89
Колесникова И.В., 90, 93
Костин В.А., 88
Костина Т.И., 95
Кочкаров А.А., 169
Краснов В.А., 96
Крыжко И.Б., 45
Крылова Д.С., 51
Крысанова А.В., 97

Курина Г.А., 98
Кутищев И.Н., 100
Кучер Н.А., 101

Л
Лагунова Е.О., 102
Логинова Е.А., 104
Лукашов А.Л., 105
Лылов Е.В., 211

М
Матвеева О.И., 106
Махинова О.А., 109
Мещеряков В.В., 110
Микка В.П., 112
Микка К.В., 112
Мифтахов Э.Н., 113
Михайленко Б.А., 115
Мокейчев В.С., 115
Москалев П.В., 117
Мохненко С.Н., 119
Муминов Х.Х., 120, 123
Мусиенко В.К., 127
Мустафокулов Р., 128

Н
Нестеров А.В., 130
Новикова О.В., 131

О
Огарков В.Б., 132, 135
Орёл Е.Н., 138
Орёл О.Е., 139
Орлова Т.В., 140

П
Паничева М.З., 171
Пелешок О.В., 52
Переходцева Э.В., 141
Петков А.Ф., 135
Петросян Г.Г., 143

Пилогин В.С., 144
Письменный Н.А., 100
Плаксина В.П., 145
Плаксина И.М., 147
Покровский А.Н., 148, 208
Поляков Д.М., 149
Попова В.А., 150
Преображенский А.П., 119
Провоторов В.В., 151
Провоторова Е.Н., 152
Просветов В.И., 39
Прядиев В.Л., 43, 84

Р

Раецкая Е.В., 71
Рачинский Е.В., 100
Редькина Т.В., 131
Романова И.С., 153
Рыданова С.С., 155
Рыжкова А.Е., 156
Рыхлов В.С., 158
Рябов П.Е., 159
Рябцева Н.Н., 160

С

Сапронов Ю.И., 56, 88
Сапунова И.И., 161
Свиридова Е.А., 163
Селиванова Н.Ю., 164
Семенов С.Л., 165
Семенютина Л.С., 166
Сенникова Л.И., 169
Сергеев С.М., 171
Сесекин А.Н., 173
Симонов Б.В., 174, 176
Симонов П.М., 177
Смирнова Е.Ю., 208
Статкевич В.М., 180
Стенюхин Л.В., 181
Столярова Е.С., 182

Струков В.Е., 184
Сумин М.И., 55, 81

Т

Теляковский Д.С., 185
Тлячев В.Б., 186

У

Удоденко Н.Н., 187
Ускова Н.Б., 188
Ускова О.Ф., 189
Ухлова В.В., 190
Ушко А.Д., 186

Ф

Фам Туан Кыонг, 71, 191
Феоктистов В.В., 192
Феоктистова А.А., 194
Феоктистова О.П., 192
Филиновский А.В., 196
Фомин В.И., 197
Фролова Е.В., 198

Х

Халтанова М.М., 106
Харламов М.П., 199
Харламова И.И., 200
Харченко А.С., 201
Хорев И.Е., 202
Хромов А.П., 204
Хэкало С.П., 110

Ч

Ченцов А.Г., 30
Черникова А.С., 205
Чернов А.В., 207
Чижев А.В., 208
Чистяков А.В., 177
Чшиев А.Г., 209

Ш

Шабанов М.Л., 135

Шабров С.А., 67, 210, 211
Шамолин М.В., 164
Шананин Н.А., 212
Шаронов Д.А., 213
Шаура А.С., 214
Шашкин А.И., 189
Шитов В.В., 117
Шокиров Ф.Ш., 120, 123

Ю

Юрко В.А., 215

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения–XXII»

Верстка и подготовка оригинал-макета
С.А. Шаброва

Подписано в печать 25.04.2011. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 12,8.
Тираж 200 экз. Заказ 531.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел.: +7(473) 259-80-26 (факс)
<http://www.ppc.vsu.ru>; e-mail: pp_center@typ.vsu.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3

