Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения — XXI»

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения – XXI»

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2010

УДК 517.94(92;054,97)
С56

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10-01-06809-моб_г

Современные методы теории краевых задач : материалы
С56 Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXI». – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 280 с.
ISBN 978-5-9273-1650-2

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским государственным университетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

УДК 517.94(92;054,97)

ISBN 978-5-9273-1650-2

В этом году школа проводится в честь юбилея

профессора Юлия Витальевича Покорного

Ю.В. Покорному — 70 лет

6 февраля текущего года исполнилось 70 лет Юлию Витальевичу Покорному — заслуженному деятелю науки, доктору физико-математичеких наук, профессору Воронежского государственного университета. Имя Ю. В. Покорного хорошо известно математической общественности благодаря Воронежским весенним математическим школам (ежегодные «Понтрягинские чтения»), которые организуются им с 1986 года и в отличной форме проводятся до сих пор. Эти школы проходят под эгидой Воронежского государственного университета, Института Математики АН России и Московского государственного университета. Бессменным председателем оргкомитета этих школ является академик В. А. Ильин. Эти школы пользуются большой популярностью в достаточно широких математических кругах (как отечественных, так и зарубежных).

Родители Ю. В. Покорного в 1940 году окончили ВГУ. Отец, Покорный Виталий Владимирович, прошел всю войну — офицером-артиллеристом — и после окончания аспирантуры при МГУ был определен на работу в Воронежский государственный университет. Мать, Валентина Федоровна (в девичестве Вершкова), всю жизнь отдала профессии школьного учителя математики. Ю. В. Покорный после окончания обычной школы поступил в ВГУ в 1956 году (16-ти лет). Уже на втором курсе стал участником научного семинара М. А. Красносельского. Первые самостоятельные шаги им были сделаны в теории нормированных колец. Начиная с дипломной работы, материалы которой были опубликованы в «Доповидях АН УРСФСР», и до кандидатской диссертации (1967 год) научные интересы Ю. В. Покорного концентрируются в теории уравнений в полуупорядоченных банаховых пространствах. Здесь ему удалось существенно усилить теоремы М. А. Красносельского о признаках сжатия и растяжения конусов, описать новый класс фокусирующих операторов, для которых оказались доступными оценки вторых собственных значений. Оказалось, что такие операторы порождаются функциями Грина многоточечных краевых задач типа Валле Пуссена. Достаточно полная теория такой функции Грина с приложениями к теории упругих деформаций многоопорных стержней стала основой докторской диссертации, защищенной в Ленинградском государственном университете в 1980 году.

С начала 80-х годов на семинаре Ю. В. Покорного начались интенсивные исследования нестандартных математических задач, моделирующих многозвенные упругие конструкции. Зародилась и получила интенсивное развитие теория дифференциальных уравнений на геометрических графах (пространственных сетях). Подобные задачи в качестве математических моделей возникают в самых разнообразных разделах естествознания и техники (малые колебания сложных молекул, процессы в гидравлических, нейронных сетях, электрических цепях, транспортных системах, решетчатых и сетчатых инженерных конструкциях и многое другое). Несколько позже эта тематика привлекла бурное внимание многих зарубежных научных групп. В рамках этой тематики творческой группой Ю. В. Покорного было выполнено более сотни публикаций, защищено более двух десятков кандидатских диссертаций, а также 4 докторские работы.

В 90-е годы XX века внимание Ю. В. Покорного и его учеников было распространено на задачи с импульсными особенностями, когда в коэффициентах обыкновенных дифференциальных уравнений и в неоднородностях появляются особенности типа дельта-функций. Важные для приложений свойства решений таких задач (знакоопределенность, число перемен знака, перемежаемость нулей и проч.), хорошо адаптированные к физическим и инженерным интересам и известные еще со времен Штурма для уравнений с импульсными возмущениями, были под большим вопросом. В основном из-за нехватки математического инструментария, так как, например, стандартная теория обобщенных функций не допускала даже корректного описания соответствующих постановок задач. В рамках теории распределений модельные уравнения не могут рассматриваться как поточечные, но лишь как связь между функционалами, что не соответствует ни физической, ни инженерной интуиции. Ю. В. Покорным был разработан подход, позволяющий записать подобные модели в виде интегро-дифференциальных уравнений с опорой на общую теорию интеграла и, в частности, на интегралы Лебега-Стилтьеса. Такой подход обусловил возможность доказательства классических осцилляционных свойств Штурма-Лиувилля как для задач с импульсным потенциалом, так и для задач на пространственных сетях.

К настоящему времени Ю. В. Покорным опубликовано около трехсот работ и три монографии. Под его руководством защищено более сорока кандидатских диссертаций и 5 докторских диссертаций.

Много сил и здоровья Ю. В. Покорным было истрачено на общественные нужды. Более десяти лет он возглавлял Институт математики при ВГУ. В настоящее время он возглавляет созданный им Докторский Совет по математическому моделированию. С середины 70-х годов он активно сотрудничает с преподавателями математики в плане проблем преподавания математики, в том числе с 1986 года до 1990-го года сотрудничал с областным институтом повышения квалификации учителей. Волновавшие его проблемы, спровоцированные резким падением уровня школьного математического образования, привели, после обстоятельного анализа, к весьма серьезным и неутешительным выводам: падение уровня математической подготовки как школьников, так и студентов порождено, в первую очередь, неграмотностью педагогической общины в психологических особенностях формирования интеллекта, когда в преподавании предпочтение отдается абстрактным дедуктивным схемам в полном отрыве от интуиции, когда учебники уподобляются научным трактатам и когда молодые люди с хорошим здравым смыслом оказываются неспособными освоить весьма простые (формально) истины, что естественно приводит значительную часть обучающихся к неприязни (и даже ненависти) к математике. Достаточно обстоятельный анализ психологических основ математических знаний приведен Ю. В. Покорным в его книге «Унижение математикой» (2006 г., Воронеж, Центрально-Черноземное книжное издательство).

Баев А. Д., Сапронов Ю. И., Курина Г. А., Зубова С. П., Зверева М. Б., Шабров С. А., Бурлуцкая М. Ш., Бахтина Ж. И.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В КЛАССАХ БЕРЛИНГА НОРМАЛЬНОГО ТИПА

Абанина Д.А. (Ростов-на-Дону)
abanina@math.rsu.ru

Пусть ω — неквазианалитический вес; $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ — пространство ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа, определяемое весом ω; $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — пространство целых функций, представляющее собой реализацию (посредством преобразования Фурье-Лапласа F функционалов) пространства $\left(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\right)'_\beta$, сильно сопряженного с $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ (см. [1]). Пусть, далее, μ — нетривиальный мультипликатор $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, а $\psi_\mu = F^{-1}(\mu)$. Определим оператор свертки T_μ, действующий непрерывно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ по правилу: $(T_\mu f)(x) = <\psi_\mu, f(x+y)>_y$, $f \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$.

Как установлено в [1], уравнение $T_\mu f = g$ разрешимо в классе $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда μ — делитель пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то есть когда из того, что $f \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})$, следует, что $\frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Пусть μ — какой-нибудь делитель пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. По нему строится слабо достаточное для $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ множество точек $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$, в которых $|\mu|$ имеет подходящую оценку снизу. При этом система экспонент $\{e^{-i\lambda_j x}\}_{j=1}^\infty$ будет абсолютно представляющей системой в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ (определение слабо достаточного множества и абсолютно представляющей системы см. в [2]). Основным результатом работы является

Теорема. Для любой функции $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ ряд $\sum_{j=1}^\infty \frac{g_j}{\mu(\lambda_j)} e^{-i\lambda_j x}$, где $\sum_{j=1}^\infty g_j\, e^{-i\lambda_j x}$ — абсолютно сходящееся в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ разложение g, сходится абсолютно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и его сумма f является решением уравнения свертки $T_\mu f = g$.

Литература

[1] Абанина Д.А. Разрешимость уравнений свертки в классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа // Математический форум. Т. 3. Исследования по математическому анализу. - Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009. - С. 34-47.

[2] Коробейник Ю.Ф. Индуктивные и проективные топологии.

Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1986. - Т. 50, № 3. - С. 539–565.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абдурагимов Г.Э. (Махачкала)
gusen_e@mail.ru

Рассматривается краевая задача

$$x''(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{2}$$

где $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ - линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1] \times [0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Обозначим через $\tilde{K}$ — конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geqslant \|x\|_C \, \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $\varphi(t) = \min(t, 1-t)$.

Получены достаточные условия существования и единственности положительного решения краевой задачи (1) - (2), доказанные в следующих теоремах:

Теорема 1. Предположим, что $T : C \to L_p$ — положительный (монотонный) на конусе $\tilde{K}$ оператор. Пусть выполнены условия

1) $p > q$;

2) $a(t)u^{p/q} \leqslant f(t,u) \leqslant bu^{p/q}$, $t \in [0,1]$, $u \geqslant 0$, где $a(t)$ — неотрицательная ($a(t) \not\equiv 0$) суммируемая на отрезке $[0,1]$ функция, b — некоторое положительное число.

Тогда краевая задача (1) - (2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Теорема 2. Краевая задача (1) - (2) при $\frac{p}{q} > 1$ имеет единственное положительное решение, если

$$\|\psi\|_{L'_p} \gamma < 2,$$

где $\psi(t) \equiv f'_u(t, \beta(T1)(t))$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, $\beta \equiv \left(\frac{1}{b^q \gamma^p}\right)^{\frac{1}{p-q}}$, γ- норма оператора $T : C \to L_p$.

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \frac{1}{(1+t)^2}\left(\int_0^1 x(s)ds\right)^2 = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{4}$$

Существование положительного решения краевой задачи (3) – (4) очевидным образом гарантирует теорема 1. Несложно проверить выполнение условий теоремы 2, обеспечивающих единственность этого решения.

ДИФФУЗИЯ ИНФОРМАЦИИ В СОЦИАЛЬНОЙ ГРУППЕ[1]

Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. (Москва)
asn@cs.msu.su *kiselev@cs.msu.su*

1. Задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1 - x), & x(0) = x_0 \in (0,1), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ L \equiv \int_0^T \left[(1 - x) + ru\right] dt \;\to\; \min\limits_{u(\cdot)} & , \quad 0 \leqslant u \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, r, $T > 0$, $x_0 \in [0,1)$ — заданные параметры, является *модифицированной моделью распространения информации* [1]. Отличие модели (1) (см. [2], [3]) от исходной [1] состоит в **выборе функционала** и в использовании безразмерной фазовой переменной $x(t) = N(t)/N^*$, где N^* — размер социальной группы, а $N(t)$ — число членов этой группы (*адептов*), получивших информацию к моменту времени t. В [2], [3] на основе принципа максимума Понтрягина найден оптимальный закон управления $u(t, \tau_*) = h(\tau_* - t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $h(\cdot)$ — функция Хевисайда. Точка переключения τ_* — минимизатор гладкой одномерной выпуклой задачи минимизации

$$\Phi(\tau) \to \min_{\tau \in [0,T]}, \qquad \tau_* = \operatorname*{argmin}_{\tau \in [0,T]} \Phi(\tau) < T. \tag{2}$$

[1] Работа поддержана грантами НШ-5443.2008.1, РФФИ 09-01-00378-а

Описаны условия на параметры задачи, при которых $\tau_* \in (0,T)$ или $\tau_* = 0$. В некоторых частных случаях для τ_* получены явные формулы, см. [2,3].

2. В докладе излагается *альтернативный подход* (без использования условий оптимальности) для построения решения одномерной нелинейной задачи оптимального управления (1) на основе специального представления функционала L (с исключённым управлением) и анализа множеств достижимости, которые не зависят от функционала. Множество достижимости $X(t) = \left[x_-(t), x_+(t)\right]$, $x_\pm(0) = x_0$, объекта (1) в момент времени $t \in [0,T]$ есть отрезок с концами $x_-(t)$, $x_+(t)$, которые определяются задачей Коши

$$\dot{x} = \left[ax + bu(t)\right](1-x), \quad x(0) = x_0, \quad \text{при} \quad u(t) \equiv 0, \ u(t) \equiv 1$$

соответственно, причём

$$\begin{cases} x_-(t) = \dfrac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-at}}, \\ x_+(t) = -\dfrac{b}{a} + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right) \Big/ \left(1 + \dfrac{1-x_0}{b/a + x_0} e^{-(a+b)t}\right). \end{cases} \tag{3}$$

При условии $x(T) = x_1 \in X(T)$ допустимые траектории $x(t)$ удовлетворяют двойному неравенству $y_-(t) \leqslant x(t) \leqslant y_+(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $y_\pm(T) = x_1$. Функции $y_\pm(t)$ допускают аналитическое описание, аналогичное (3). Множество $Y(t) = \left[y_-(t), y_+(t)\right]$ — множество достижимости (в обратном времени) в момент времени $t \in [0,T]$. Для допустимых траекторий $x(t)$, удовлетворяющих одновременно двум условиям $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1 \in X(T)$, имеет место включение $x(t) \in Z(t)$, $t \in [0,T]$, где $Z(t) \equiv X(t) \cap Y(t) \neq \varnothing$. При этом график траектории $x(t)$ расположен в области $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ z_-(t) \leqslant x \leqslant z_+(t)\}$; на рис. 1 соответствующая область заштрихована. Верхняя часть границы этой области описывается уравнением

$$x = z_+(t,\tau) \equiv \begin{cases} x_+(t), & t \in [0,\tau], \\ x_-(t,\tau), & t \in (\tau, T], \end{cases} \tag{4}$$

при некотором $\tau \in [0,T]$; $x_-(t,\tau) \equiv \dfrac{x_+(\tau)}{x_+(\tau) + \left[1 - x_+(\tau)\right] e^{-a(t-\tau)}}$. Параметр τ определяется значением $x_1 = x(T) \equiv x_-(T,\tau)$ однозначно. При изменении точки переключения $\tau \in [0,T]$ правый конец траектории x_1 пробегает множество достижимости $X(T)$. Нижняя часть границы заштрихованного множества (рис. 1) определяется уравнением $x = z_-(t, \theta)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $z_-(0, \theta) = x_0$, $z_-(T, \theta) = x_1$, где функция $z_-(t, \theta)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = \big[ax + bh(t - \theta)\big](1 - x), \quad x|_{t=0} = x_0,$$

причём параметр θ определяется значением x_1 однозначно. Рис. 1 выполнен при $a = b = 1$, $T = 3$, $x_0 = 0.1$, $\tau = 0.3$; для этого набора параметров $x_1 \approx 0.901273$, $\theta \approx 2.009887$.

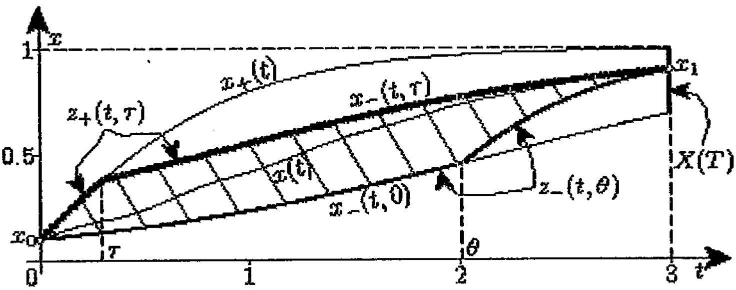


Рис. 1: К построению оптимального решения

Имеет место интегральное представление функционала

$$L = \int_0^T W\big(x(t)\big)\,dt + \frac{r}{a}\ln\frac{1 - x(T)}{1 - x_0}, \quad x(T) = x_1 \in X(T), \tag{5}$$

для получения которого выражение $u = 1/b\,\big[-ax - \dot{x}/(x - 1)\big]$ для управления, найденное из (1), подставляется в функционал L и выполняется интегрирование по частям. В формуле (5) с исключённым управлением участвует функция $W(x) = 1 - \big[1 + ar/b\big]x$, монотонно убывающая с ростом аргумента x. Поэтому при фиксированном x_1 функционал (5) минимизирует траектория (4) — верхняя граница множества достижимости, а его минимальное значение допускает представление

$$\Phi(\tau) = T + r\tau - \int_0^\tau x_+(t)\,dt - \int_\tau^T x_-(t, \tau)\,dt. \tag{6}$$

Решение одномерной задачи минимизации (2), (6) позволяет найти точку переключения τ_* оптимального управления $u(t, \tau_*) = h(\tau_* - t)$

задачи (1). Так как $\Phi'(T) > 0$, то $\tau_* < T$. Если верно неравенство $\Phi'(0) < 0$, то $\tau_* \in (0, T)$. Если же $\Phi'(0) \geqslant 0$, то $\tau_* = 0$. Оптимальность указанного решения $\big(z_+(t, \tau_*), u(t, \tau_*)\big)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является следствием описанных построений. Другие примеры применения альтернативного подхода представлены, например, в [4].

Литература

1. Измоденова К. В., Михайлов А. П. Об оптимальном управлении процессом распространения информации // Матем. моделирование, 2005. Т. 17, №5, С. 67–76.
2. Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н. Исследование модели диффузии информации // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XX» — Воронеж: ВГУ, 2009. С. 6–8.
3. Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н. Построение оптимальных законов управления для модели диффузии информации в социальной группе // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов ф-та ВМиК МГУ, под редакцией Ю. С. Осипова, А. В. Кряжимского. МАКС Пресс. 2009. – Вып. 4. С. 3–33.
4. Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Задача оптимального распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с особыми режимами // Прикладная математика и информатика. № 33, М.: МАКС Пресс. 2009. С. 13–68.

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Авраменко Л.Г., Гончаренко Ю.В. (Киев)

yuragoko@mail.ru

После распада СССР произошло повсеместное сокращение часов, выделяемых в высших учебных заведениях на курс высшей математики. Однако сложившаяся система подготовки по смежным дисциплинам (физика, сопротивление материалов, электротехника и т.д.) предъявляет прежние требования к объему математических знаний студентов. Компенсируя недостаток часов, преподаватели вынуждены опускать доказательства теорем, сокращать время на мотивацию введения новых математических понятий и превращать курс в краткий обзор всего понемногу. В качестве компенсации негативного воздействия сокращения часов авторы пытаются разработать новый учебно-методический комплекс, о разных аспектах построения которого неоднократно докладывалось в рамках Воронежских конференций. В процессе работы мы пришли к выводу, что раннее введение некоторых понятий функционального анализа существенно упрощает изложение. О раннем введении отношения порядка уже сообщалось на предыдущих чтениях. Полагаем, что следующими понятиями должны стать понятия метрики и метрического пространства.

Введение понятия расстояния сразу после элементов теории множеств и отношений (1-й семестр) позволяет ввести и оперировать такими топологическими понятиями, как окрестность, открытые и замкнутые множества, внутренняя и граничная точки, граница множества. А после введения понятия бесконечно малой числовой последовательности дать единое определение предела последовательности элементов в метрическом пространстве, которое, по нашему опыту, оказывается проще для понимания, чем определение предела числовой последовательности. Такой подход оправдан уже тем, что метрика на земной поверхности отличается от евклидовой. Следующий шаг — введение нормированного пространства и нормы линейного оператора. После доказательства принципа сжимающих отображений эти понятия позволят осмысленно строить итерационные процессы поиска неподвижных точек, доказать теорему Пикара и т.д. С другой стороны, в общей теории относительности, теории суперструн и т.д. метрика окружающего мира является основным предметом изучения, прочно вошедшим в современную субкультуру.

К ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Агачев Ю.Р. (Казань)

jagachev@ksu.ru

Пусть m, p $(p > m \geqslant 0)$ - заданные целые числа, $r = p - m$. Введем в рассмотрение функции $\rho = \rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ - вес Чебышева второго рода, $q = q(t) = [\rho(t)]^{4r-3}$. Обозначим через $L_{2,q} \equiv L_{2,q}(-1,1)$ – пространство функций, квадратично суммируемых на $[-1,1]$ с весом $q(t)$, а через $W^r L_{2,q} \equiv W^r L_{2,q}(-1,1)$ – пространство функций, r–тая

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (Госконтракт 02.740.11.0193) и РФФИ (проект 09-01-12188 офи_м)

производная которых принадлежит $L_{2,q}$, с нормой

$$\|f\|_{r;2,q} \equiv \|f\|_{W^r L_{2,q}} = \|f\|_{2,1/\rho} + \|f^{(r)}\|_{2,q}, \ f \in W^r L_{2,q}.$$

Рассмотрим пару функциональных пространств (X, Y), где $Y = W^r L_{2,q}$, $X = \overset{\circ}{W}{}^p L_{2,q}$ — подпространство функций из $W^p L_{2,q}$, удовлетворяющих условиям

$$x^{(j)}(-1) = 0, \ j = \overline{0, m-1}. \tag{1}$$

В пространстве X норму зададим формулой:

$$\|x\|_X = \|x^{(m)}\|_{2/1\rho} + \|x^{(p)}\|_{2,q}, \ x \in X.$$

Пусть $y(t), g_k(t), k = \overline{1,m}, h_j(t,s), \ j = \overline{0,p}$, - функции, обладающие свойствами:

1) $y, g_k \in Y$, $k = \overline{1,m}$;

2) $h_j \in Y \times L_1, j = \overline{0, m-1}$;

3) существует производная[1] $\frac{\partial^r h_j(t,s)}{\partial t^r} \in L_{2,q} \times L_{2,q_{-j}}$, $j = \overline{m,p}$, где $q_l(t) = (1-t^2)^{2l-3/2}$.

В работе решается проблема оптимизации по порядку точности [1, 2] прямых полиномиальных методов решения класса однозначно разрешимых в паре пространств (X, Y) задач Коши (1) для интегро-дифференциальных уравнений

$$x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds = y(t), \ m < p, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2}$$

задаваемые соответствующими классами известных коэффициентов. Отметим, что задача оптимизации по порядку точности для уравнений (2) при $m = 0, p = 1$ в периодическом случае решена в [3], а в непериодическом случае - в [4].

---

[1]Здесь запись $z(t,s) \in L_{2,q} \times L_{2,q_{-j}}$ означает, что функция $\frac{z(t,s)}{(1-s^2)^{j-3/4}} \in L_{2,q} \times L_2(-1,1)$, где $L_2(-1,1)$ есть пространство квадратично-суммируемых на $[-1,1]$ функций.

Доказано, что любой проекционный полиномиальный метод, определяемый ограниченным по норме равномерно относительно параметра дискретизации проекционным оператором в Y, является оптимальным по порядку методом среди всех прямых методов решения класса задач (1), (2). Даются приложения полученного результата к конкретным проекционным полиномиальным методам.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во КГУ, 1980. - 232 с.

2. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук в форме научного доклада. - Киев, 1985. - 48 с.

3. Габдулхаев Б.Г., Рахимов И.К. Об одном оптимальном сплайн-методе решения операторных уравнений// Изв. вузов. Математика. - 2002. - № 2. - С. 23-36.

4. Агачев Ю.Р. Об оптимизации прямых методов решения обыкновенных интегродифференциальных уравнений// Известия вузов. Математика. - 2004. - №8. - С. 3-10.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕОДНОРОДНЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аксенов Н.А. (Орел)
aksenovna@inbox.ru

Пусть H — счетно-полное локально выпуклое пространство с топологией, определяемой мультинормой $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in P$, и пусть $A : H \to H$ — регулярный оператор. Рассматривается задача отыскания вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u'(t) = \omega(t)Au(t) \tag{1}$$

и краевому условию

$$u'(a) - \mu u(a) = x_0, \tag{2}$$

$x_0 \in D_\infty(A)$, $a \in Q$, а $\mu \neq 0$ — комплексный параметр.

Здесь $D_\infty(A)$ — область определения всех степеней оператора A, а $\omega(t)$ — скалярная функция, однозначная и аналитическая в односвязной области Q, причем $\omega(a) \neq 0$.

Введем множество
$M = \{x \in D_\infty(A) : \beta_p(x) \leqslant 0, \forall p$, при $\beta_p(x) = 0$ $\alpha_p(x) < |\mu/\omega(a)|, \forall p\}$, где $\beta_p(x)$ и $\alpha_p(x)$ -- соответственно операторный p-порядок и операторный p-тип вектора x относительно оператора A [1].

Теорема. Пусть $\mu/\omega(a)$ является регулярной точкой оператора A. Тогда краевая задача (1)-(2) имеет единственное решение $\forall x_0 \in M$. Оно является векторнозначной функцией $u(t)$ со значениями в H, аналитической в области Q, и представляется в виде

$$u(t) = -\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\omega^k(a) A^{n+k}(x_0)}{\mu^{k+1} n!} \left(\int_a^t \omega(\xi) d\xi \right)^n .$$

Литература

1. Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. — Орел: ОГУ, 2009. -- 430 с.

ЛОГИСТИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПЛАНИРОВАНИЯ РАБОТЫ ПОРТА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Алексеева О.Ю., Молчанов А.В., Алексеева С.М.
(Калининград)
alekseeva-sm@yandex.ru

В условиях производственной практики в Калининградском морском рыбном порту рассматривается оптимизационная задача минимизации эксплуатационных расходов для трех судов по двум линиям при условии, что эксплутационные расходы могут колебаться в определенных пределах.

Вводя соответствующий параметр, изменяющийся в определенных задачей пределах, получаем параметрическую транспортную задачу. Исследуя планы методом потенциалов, где потенциал является линейной функцией, приходим к разбиению промежутка изменения параметра на более мелкие промежутки. В найденных промежутках строятся различные оптимальные планы с информацией относительно времени постановки судов на каждую из линий и соответствующем резерве. Проведенный с помощью системы MATLAB анализ показал, что при заданных колебаниях суточных эксплутационных расходов небольшие изменения в этих расходах, особенно вблизи тех значений, которые соответствуют точкам разбиения промежутка изменения параметра, влекут за собой существенные изменения оптимального плана.

Таким образом, данный оптимальный план неустойчив при заданных колебаниях суточных эксплутационных расходов. На это обстоятельство следует обратить особое внимание при планировании в условиях неполной определенности исходной информации и провести анализ устойчивости решения данной оптимизационной задачи, цель которого состоит в определении области значений параметра, в пределах которого решение остается оптимальным.

Литература

1. Алексеева С.М., Руденко А.И. Дискретная математика в задачах и упражнениях. Учебно-методическое пособие. Калининград. Изд-во БГА РФ. 2009.

ТОЧНАЯ СТЕПЕННАЯ АСМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Архипов В.П. (Старый Оскол)
varhipov@inbox.ru

Рассматриваем при $t \in [0; d]$ уравнения вида

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t), \tag{1}$$
$$a(0) = 0,\ b(0) \neq 0,\ a(t) > 0,\ \text{при t} \in (0; d]$$

вблизи точки вырождения. Для простоты изложения считаем коэффициенты и правую часть уравнения (1) бесконечно дифференцируемыми функциями на $[0; d]$. В [1] была установлена гладкость решений уравнения (1) вплоть до точки $t_0 = 0$ и приведены формулы, выражающие их в виде асимптотических рядов по некоторым специальным функциям. Однако, в ряде случаев подобные представления могут оказаться не очень удобными. Результаты работы [1] позволяют выписать в некоторой окрестности точки вырождения точные степенные разложения решений. Отметим здесь лишь результаты для фундаментальной системы решений однородного уравнения (1) в случае сильного вырождения ($a'(0) = 0$).

Теорема. Пусть коэффициенты в (1) бесконечно дифференцируемы, $a(0) = a'(0) = 0$, $b_0 = b(0) \neq 0$, $a(t) > 0$ при $t > 0$. Существуют

линейно-независимые решения $u_{1,2}(t) \in C^{\infty}(0;d]$ однородного уравнения (1) для которых при некотором значении $\delta > 0$ справедливы следующие представления:
если $b(0) < 0$, то $u_{1,2}(t) \in C^{\infty}(0;d]$
и $u_1(t) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{1,i}t^i$, $u_2(t) = \exp\{\int\limits_t^{\delta} \frac{b(\tau)}{a(\tau)}d\tau\} \cdot \sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{2,i}t^i$, $\lim\limits_{t \to 0+0} u_2^{(m)}(t) = 0$
для всех $m \geqslant 0$;
если $b(0) > 0$, то $u_2(t) \in C^{\infty}(0;d]$
и $u_1(t) = \exp\{\int\limits_t^{\delta} \frac{b(\tau)}{a(\tau)}d\tau\} \cdot \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \tilde{u}_{1,i}t^i$, $u_2(t) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \tilde{u}_{2,i}t^i$,
$\lim\limits_{t \to 0+0} u_1^{(m)}(t) = \infty$ для всех $m \geqslant 0$.

Коэффициенты разложений $u_{k,i}, \tilde{u}_{k,i}$ $(k = 1,2)$ вычисляются по последовательным рекуррентным формулам.

Составлена программа расчета коэффициентов разложений в специализированном пакете символьных вычислений MATHEMATICA .

Литература

1. Архипов В.П. Точная асимптотика решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. Современные методы теории краевых задач. - Воронеж: ВГУ, 2008-с.23-24.

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ В ИРАКЕ

Астахова И.Ф., Асвад Ф.М. (Воронеж)
astachova@list.ru

С целью автоматизации работы учебного заведения требуется разработать базу данных и web-интерфейс к ней.

База данных должна хранить информацию о следующих объектах: факультете; кафедре; преподавателях; студентах; экзаменах; предметах. Web-интерфейс состоит из совокупности взаимосвязанных страниц. Одна из страниц имеет вид:

С помощью программного продукта можно получить результаты успеваемости, как диаграммы Excel.

Программный продукт выполнен с помощью PHP, MySQL, web-сервера Apache.

База данных состоит из шести связанных между собой таблиц: *College, Department, Lectures, Students, Exams, Subjects* необходимых

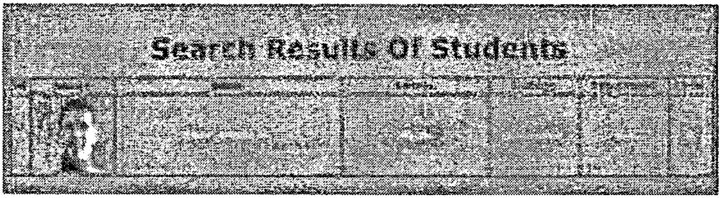


Рис. 1 Результат поиска студента

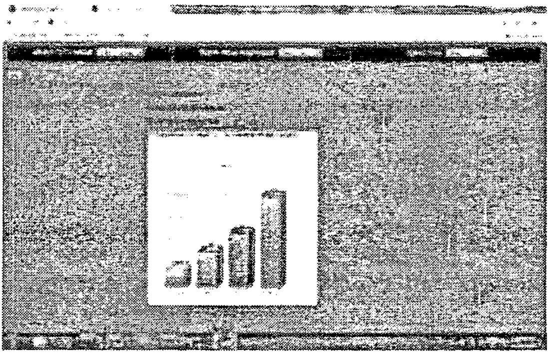


Рис. 2 Успеваемость студентов после сдачи экзаменов

для работы основной программы и таблицы User, в которой храняться сведения о пользователях. Таблица ***College*** служит для хранения данных о факультетах университета Диала, ***Department*** служит для хранения данных о кафедрах факультетов, в таблице ***Lectures*** хранятся данные о преподавателях, работающих на определенных кафедрах, таблица ***Students*** представлены сведения о студентах, обучающихся в университете, в таблице ***Subjects*** хранятся данные о предметах, преподаваемых на кафедрах, таблица ***Exams*** содержит информацию о сданных студентами экзаменах. Структура сайта имеет следующий вид:

В Petinput.php предлагается войти или как пользователь, или как администратор. В nextpage.php проверяется правильно ли введен пароль, если пароль не совпадает с ключевым словом, то предлагается попытаться ввести пароль еще раз. При правильном введении пароля отправляемся в Glavn.html. Если пароль неизвестен, то можно войти как пользователь – файл User.php, но уже с ограниченными

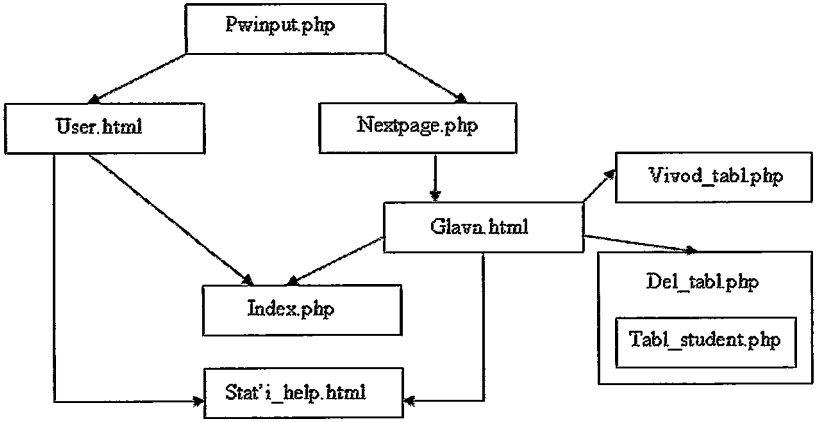


Рис. 3. Структура сайта

правами. В Glavn.html проверяется правильно ли введены фамилия, имя, введены ли номер курса, номер группы, название города. Если какое – либо поле не заполнено, то выдается соответствующее сообщение и предлагается ввести данные еще раз.

Литература

1. PHP / Дунаев В.В. ; «Питер Пресс», 2007. – 283 с.
2. JavaScript / Дунаев В.В. ; «Питер», 2005. – 393 с.
3. PHP5 / Зольников Д.С. ; М. : «NT Press», 2005. – 259 с.

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ГОРОДОВ ИРАКА

Астахова И.Ф., Ахмед А.М. (Воронеж)
astachova@list.ru

Разрабатываемая информационная система состоит из базы данных, web-интерфейса, написана на языке PHP, с использованием СУБД MYSQL, сервера Apache.

Web-интерфейс состоит из совокупности взаимосвязанных страниц, стартовая страница имеет вид:

База данных состоит из шести связанных между собой таблиц *City, Monument, River, Street, Student, Study* необходимых для работы основной программы и таблицы User, в которой храняться сведения о пользователях. Таблица ***City*** служит для хранения данных о

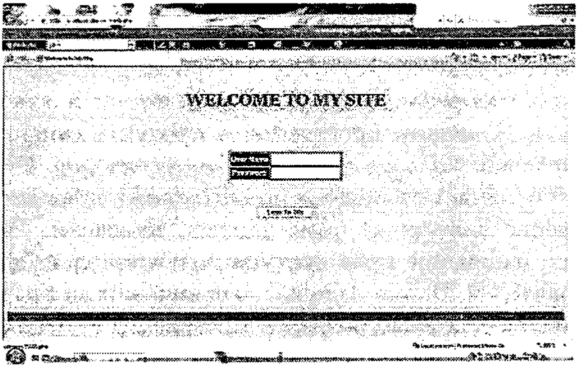


Рис. 1. Страница авторизации

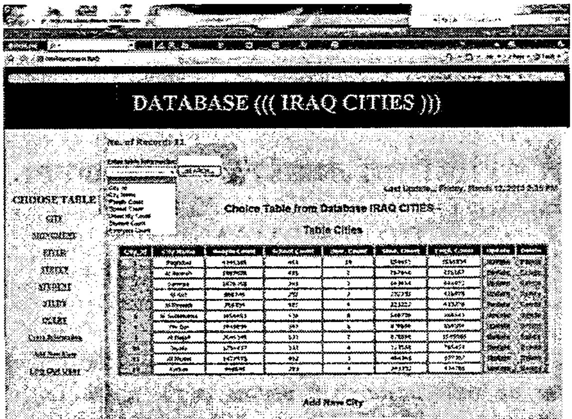


Рис. 2. Страница работы с базой данных

городах Ирака, ***Monument*** служит для хранения данных о памятниках в разных городах Ирака, в таблице ***River*** хранятся данные по существующим рекам Ирака, таблица ***Street*** хранит информацию об улицах в городах Ирака, в таблице ***Student*** представлены сведения о студентах в университете Ирака, Таблица ***Study*** содержит информацию об образовательных учреждениях городов Ирака.

Сайты имеют фреймовую структуру. При загрузке сайта пользователь проходит авторизацию, после чего он входит в основной раздел программы. В данном программном продукте существует два типа пользователей: *пользователь* и *администратор*. Второй тип пользователей отличает наличие дополнительных прав доступа, таких как удаление данных из базы данных, изменение сведений о пользователях, изменение прав доступа пользователей, добавление новых пользователей. Пользователь с ограниченными правами имеет доступ только к основным разделам программы («Добавить горизонтальную информацию таблицы», «Поиск информации») и может изменять свой пароль.

Литература

1. СУБД: Язык SQL в примерах и задачах: учебное пособие/ И.Ф. Астахова, А.П. Толстобров, В.М. Мельников – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 174 с.

2. Самоучитель PHP 5 / Колисниченко Д.Н. – М. : Наука и техника, 2004. – 576 с.

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ[1]

Бадков В.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на окружности с весом $\varphi(\tau)$, а $\{\Phi_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная тем же весом на $[0, 2\pi]$ система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \ldots$ методом Шмидта. Автор получил оценки величин $|\varphi_n(e^{i\theta})|$ в случае веса $\varphi(\tau)$ обобщенного якобиева вида, с помощью которых исследовал асимптотику функций Лебега

$$L_{\varphi,n}(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{2n}\Phi_k(\theta)\Phi_k(\tau)\right|\varphi(\tau)\,d\tau.$$

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00213)

В [1] оценивались величины $|\varphi_n^{(j)}(e^{i\theta})|$ $(j, n \in \mathbf{Z}_+, n > j)$ для более общих весов, что позволило С.Е. Памятных и С.Л. Сандаковой получить двусторонние поточечные оценки для $L_{\varphi,n}(\theta)$.

Основным результатом сообщения является полученная на основе новой информации о поведении $|\varphi_n^{(j)}(e^{i\theta})|$ (см. [2]) следующая

Теорема. *Пусть* $\varphi(\tau) := h(\tau)|\sin(\tau/2)|^{-1}g(|\sin(\tau/2)|)$ $(\tau \in \mathbf{R})$, *где* $g(t)$ *— вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле;* $t^{-1}g(t) \in L^1[0,1]$; $0 < h(\tau) \in C_{2\pi}$; *модуль непрерывности* $\omega(h;\delta)$ *удовлетворяет условию* $\omega(h;\tau)\tau^{-1} \in L^1[0,1]$. *Тогда имеет место равномерная по* $n \in \mathbf{N}$ *и* $\theta \in \mathbf{R}$ *двусторонняя оценка* $L_{\varphi,n}(\theta) \asymp 1 + \ln(1 + n|\sin(\theta/2)|)$.

Литература

1. Бадков В.М. *Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса* // Тр. МИРАН. - 1992. - Т. 198. - С. 41-88.

2. Бадков В.М. *Поточечные оценки многочленов, ортогональных на окружности с весом, не принадлежащим пространствам* L^r $(r > 1)$ // Тр. Ин-та математики и механики ИММ УрО РАН. - 2009. Т. 15, № 1.- С. 66-78.

ОБ АНАЛОГЕ НЕРАВЕНСТВА ГОРДИНГА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

Баев А.Д. (Воронеж)

В работе получен аналог неравенства Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов в случае, когда символ оператора зависит от переменных x и t. В случае, когда символ зависит только от переменной t, аналогичное неравенство доказано в [1].

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in (0;+\infty)$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Введем интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp\left(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное, первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty\left(R_+^1\right)$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля, что позволяет определить преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha\left[\lambda(x,t,\xi,\eta)\,F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right]$ на функциях $v(x,t)$, принадлежащих, например, $C_0^\infty\left(R^n_+\right)$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ принадлежит классу символов S^σ_α, $\sigma \in R^1$, если $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in C^\infty\left(R^{n-1}\times(0;+\infty)\times R^{n-1}\times R^1\right)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\frac{\partial^l}{\partial\xi^l}\frac{\partial^p}{\partial\eta^p}\lambda(x,t,\xi,\eta)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_{k,m,l,p}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)},$$

где $k,m,l,p = 0,1,2,\dots$; $c_{k,m,l,p} > 0$ — некоторые константы, не зависящие от x,t,ξ,η,σ.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n}(1+|\xi|^2+\eta^2)^s\left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Теорема. Пусть $P(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in S^\sigma_\alpha$, $\sigma \in R^1$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda(x,t,\xi,\eta) \geqslant c(1+|\xi|+|\eta|)^\sigma$ для всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $x \in R^n$, $t \in K \subset [0;+\infty)$, где K — произвольное компактное множество. Тогда для любых $s_1 \in R^1$ и $u(t) \in C_0^\infty(K)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(P(t,D_x,D_{\alpha,t})u(x,t),u(x,t)) \geqslant c_0\|u\|^2_{\frac{\sigma}{2},\alpha} - c_1\|u\|^2_{s_1,\alpha}$$

с некоторыми константами $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$.

Здесь (v,w) — скалярное произведение в $L_2(R^n_+)$.

Литература

1. Баев А. Д. О разрешимости общих краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Вестник Самарского гос. ун-та, серия “Естественные науки”. – 2008. – №3(62). – С. 40 – 50.

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

Баев А. Д., Зенина В. В. (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор с символом, зависящим от комплексного параметра p. Этот оператор определен формулой $K^\sigma(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x} F_\alpha^{-1}\left[\lambda(p,t,\xi,\eta)\,F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \overline{R}^1_+$ открытое множество, $p \in Q$, где Q — некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ — действительное число, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,1,2,\ldots$, $l = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \frac{\partial^l}{\partial \eta^l}\lambda(p,t,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{m,l}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-m-l)}$$

с константами $c_{m,l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $p \in Q$, $t \in \Omega$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha,p} = \int\limits_{R^n} (|p| + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Теорема. Пусть $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$ (σ — действительное число), $\Omega \subset \overline{R}^1_+$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $K^\sigma(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Батурина О.В. (Москва)
ol.baturina@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления:

$$I(x,u) = \int_0^T \beta u^2(t)dt + (x(T), Lx(T)) \to min, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = (A + uB)x, x(0) = x^0, x \in E^n, u \in [-a, a], \qquad (2)$$

где E^n - эвклидово пространство размерности n с произведением $xy = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, заданы числа $T > 0$, $a > 0$, $\beta > 0$, вектор x^0, квадратные матрицы L, A и B размерности n. Множество пар вектор-функций $v = (x(t), u(t))$, определенных на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющих перечисленным условиям (2) будем называть множеством допустимых процессов и обозначать через D. При этом функция $u(t)$ - кусочно-непрерывна, $x(t)$ - непрерывна и кусочно-дифференцируема. Предполагается, что D непусто.

Выделим из данной задачи подзадачу улучшения. Пусть имеется допустимый неоптимальный процесс $v_0 = (x_0(t),\ u_0(t)) \in D$. Требуется найти процесс $v = (x(t),\ u(t)) \in D$, такой что $I(v) < I(v_0)$. Повторяя эту операцию, получим улучшающую последовательность допустимых процессов $\{v_s\} \subset D$, для которой $I(v_{s+1}) < I(v_s)$.

В докладе рассматривается глобальный метод Кротова решения задачи улучшения управления, на характерных примерах сравнивается скорость сходимости этого метода с традиционным градиентным. Рассматриваемый класс задач играет существенную роль в теории оптимального управления. Так, к нему относится актуальный класс задач управления квантовыми системами, [2].

Литература

[1] V.F. Krotov *Global methods in optimal control theory.* NY.: Marcel Dekker, Inc, 1995. - 382 p.

[2] В.Ф. Кротов *Об оптимизации управления квантовыми системами.* ДАН, 2008, т. 423, № 3, стр. 316-319.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ НАГРЕВА ПОМЕЩЕНИЯ

Баширов Н.Г. (Вологда)
bashirova35@mail.ru

Для экономии теплоты в производственных, общественных и частных зданиях используют дежурное отопление, когда в нерабочее время температуру воздуха в помещении снижают ниже требуемой. Далее возникает задача оптимизации температуры воздуха в помещении посредством управления мощностью обогревателя при различных ограничениях.

Моделирование задачи на основе законов теплопередачи, нагрева и с учетом изменений температуры воздуха на улице приводит к линейному неоднородному уравнению. Решение такого дифференциального уравнения можно выразить через параметры внешней среды, коэффициента теплопередачи через стенку от помещения на улицу и мощности обогревателя.

Задача оптимизации обогрева помещения можно решить в нескольких вариантах: в простейшем случае можно включить обогреватель на постоянную мощность и получить решение изменения температуры в помещении, например, за сутки. Во-вторых, решить задачу оптимизации нагрева таким образом, чтобы в помещении температура не опускалась ниже минимальной. В-третьих, можно изменять мощность самого обогревателя по нужному закону, чтобы затраты электроэнергии были минимальны. В-четвертых, можно решать задачу включения обогревателя на постоянную мощность только в определенном временном интервале: а) в противофазе с изменением температуры наружного воздуха и 2) сохранением температуры воздуха в помещении в требуемом интервале. Последнюю задачу можно решить методом принципа максимума Понтрягина: функцию работы обогревателя необходимо задавать тремя параметрами - временным интервалом работы нагрева, мощностью работы нагревателя в течение интервалов и временем включения и выключения обогревателя. Таким образом, решается задача оптимизации нагрева помещения.

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОСТНОЙ ЗАДАЧЕ СО СДВИГОМ ДЛЯ ПАРЫ ФУНКЦИЙ

Башкарёв П.Г., Лысенко З.М., Матвиюк Л.В. (Odessa)

ivanpribegin@rambler.ru

Пусть $\Pi = \{ z \in \mathbf{C} : Imz > 0 \}$ — верхняя полуплоскость комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с обычной мерой Лебега $dA(\omega) = dxdy$; $A_2(\Pi)$ — бергманово пространство в области Π всех аналитических в $L_2(\Pi)$ функций, $\tilde{A}_2(\Pi) = \{\bar{f}, f \in A_2(\Pi)\}$ — антибергманово пространство в области Π антианалитических в $L_2(\Pi)$ функций;
$B_\Pi : L_2(\Pi) \to A_2(\Pi)$ (бергмановский проектор) и
$\tilde{B}_\Pi : L_2(\Pi) \to \tilde{A}_2(\Pi)$ (антибергмановский проектор) являются двумерными интегральными операторами следующего вида:

$$(B_\Pi f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi} \frac{f(\omega)}{(z-\bar{\omega})^2} dA(\omega), f \in L_2(\Pi), z \in \Pi,$$
$$(\tilde{B}_\Pi f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi} \frac{f(\omega)}{(\bar{z}-\omega)^2} dA(\omega), f \in L_2(\Pi), z \in \Pi.$$

Задан сдвиг $\alpha : \Pi \to \Pi$, удовлетворяющий условию:

$$W_\alpha B_\Pi W_\alpha^{-1} = \tilde{B}_\Pi, \text{ где } (W_\alpha f)(z) = f[\alpha(z)].$$

Рассматривается плоскостная задача со сдвигом и сопряжением о нахождении пары функций $\psi \in A_2(\Pi)$ и $\varphi \in \tilde{A}_2(\Pi)$, удовлетворяющих следующему условию:

$$a(t)\psi[\alpha(t)] + b(t)\overline{\psi[\alpha(t)]} + e(t)\varphi(t) + d(t)\overline{\varphi(t)} = h(t), t \in \Pi, \qquad (1)$$

где $h \in A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi), a, b, e, d \in C(\dot{\overline{\Pi}})$ $(\dot{\overline{\Pi}} = \Pi \cup \mathbf{R} \cup \{\infty\})$,
$\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$.

С помощью операторного подхода [1] доказан следующий критерий фредгольмовости задачи (1).

Теорема. *Задача (1) фредгольмова тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\Delta = uB_\Pi + \bar{u}\tilde{B}_\Pi$, действующий в $A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi)$, где $u = \bar{a}d - b\bar{e}$.*

1. Лисовец Н. И. Исследование некоторых смешанных краевых задач теории аналитических функций // Диссертация ... канд. физ.-мат.наук. Одесса, 1984, 149 с.

НЕЙРОННЫЕ СЕТИ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ

Беленова О.В. (Воронеж)
hinda2008@hotmail.ru

Задача распознавания образов актуальна для различных видов современных наукоемких технологий. Целью данной работы является написание программы распознавания образов, а именно букв английского алфавита с помощью нейронной сети Кохонена. Для достижения данной цели необходимо построить нейронную сеть (для исследования была выбрана сеть Кохонена), разработать алгоритм обучения и реализовать этот алгоритм. Для реализации поставленной задачи и проведения исследований поведения нейронной сети на различных этапах работы (жизни сети) был выбран язык Delphi. Среда разработки - Borland Delphi 7.0 (Build 4.453). Для проведения обучения нейронной сети создается обучающая выборка. Она состоит из нескольких изображений букв английского алфавита (эталонный образец, образец написания буквы, близкий к эталонному, образец с помехами на контуре, с помехами на фоне и т.п.). Итоговая обучающая выборка состоит из 10 различных изображений каждой буквы алфавита. Проверка алгоритма на распознавание символов на обучающей выборке показывает корректность и завершенность обучения алгоритма. Далее формируется тестовый набор изображений, содержащий по одному изображению на каждую букву (всего 26 изображений). В результате проведения исследования на всей тестовой выборке, было установлено, что сетью Кохонена были верно распознаны все изображения. Таким образом, можно сделать вывод, что нейронные сети вполне подходят к решению проблем распознавания различных образов. Наряду с компактностью реализации алгоритмов, следует отметить компактность хранимых данных, нужных для работы нейронной сети в режиме распознавания новых образов.

ВТОРАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Беседина Т.В. (Воронеж)
tanja_bes@yahoo.com

Находятся моментные функции случайного процесса $u : T \times R^3 \to$

R, определяемого начальной задачей для уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} =< \varepsilon(t), \nabla u > +\mu(t)\Delta u + f(t,x), \quad u(t_0,x) = u_0(x), \qquad (1)$$

где $T = [t_0, t_1] \subset R$, $\varepsilon : T \to R^3$, $\mu : T \to R$, $f : T \times R^3 \to R$, $u_0 : R^3 \to R$ - случайные процессы. Рассматривается случай, когда u_0 не зависит от ε, μ, f. Случайные процессы ε, μ, f заданы характеристическим функционалом $\varphi(v,p,w)$ [1].

Получена вторая моментная функция решения задачи (1)

$$\mathbf{M}(u(t,x)u(\tau,y)) = \mathbf{M}(u_0(x)u_0(y))*_{xy}$$

$$*_{xy}F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[U(t_0,\tau,t_0,t)\varphi(0,0,0)](y)](x)-$$

$$-i\int_{t_0}^{\tau} \mathbf{M}(u_0(x)) *_x F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[F_y[U(s,\tau,t_0,t)\frac{\delta\varphi(0,0,0)}{\delta w(s,y)}](\eta)](y)](x)ds-$$

$$-i\int_{t_0}^{t} \mathbf{M}(u_0(y)) *_y F_\eta^{-1}[F_\xi^{-1}[F_x[U(t_0,\tau,s,t)\frac{\delta\varphi(0,0,0)}{\delta w(s,x)}](\xi)](x)](y)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1}[F_x[F_\eta^{-1}[F_y[U(s_1,\tau,s,t)\frac{\delta^2\varphi(0,0,0)}{\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)}](\eta)](y)](\xi)](x)ds_1 ds,$$

где U определяется следующим равенством $U(s_1,\tau,s,t)\varphi(v,p,w) = \varphi(v - \eta\chi(s_1,\tau,\cdot) - \xi\chi(s,t,\cdot), p + i|\eta|^2\chi(s_1,\tau,\cdot) + i|\xi|^2\chi(s,t,\cdot), w)$, $\chi(s,t,s_1)$ равно $sign(s_1 - s)$, если s_1 принадлежит отрезку с концами s, t и нулю в противном случае, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $|\xi|^2 = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$, F_x и F_ξ^{-1} - прямое и обратное преобразования Фурье, знак $*$ означает свертку по соответствующему переменному.

Литература

1. Задорожний В. Г. Методы вариационного анализа // НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, М. - Ижевск - 2006. - 316 с.

О ПРОЕКТОРАХ НА ПРОСТРАНСТВА ТИПА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Блатов И.А., Добробог Н.В. (Самара)
dobrobog-nv@psuti.ru

Операторы проектирования и оценки их норм занимают важное место в исследовании и обосновании приближенных и численных методов. В частности изучение сходимости рядов Фурье, ортогональных и интерполяционных процессов [1,2,3] опирается на оценки норм проекторов. Для обоснования сходимости метода коллокации Галеркина [4] исследовались оценки норм галеркинских проекторов на пространства сплайнов на квазиравномерных сетках. В [5] для решения аналогичных проблем в случае сингулярно возмущенных задач рассматривались ортогональные, интерполяционные и галеркинские проекторы на пространства сплайнов на сильно неравномерных сетках, предложенных Н.С. Бахваловым.

Однако в настоящее время неисследованными остались два важных класса задач, имеющих большое прикладное и и теоретическое значения.

Первый класс - это метод конечных элементов для сингулярно возмущенных задач на сетках, предложенных Г.И. Шишкиным [6]. Эти сетки завоевали большую популярность, в связи с простотой соответствующих вычислительных алгоритмов для сложных многомерных задач.

Второй класс задач связан с обоснованием сходимости метода подвижных адаптивных сеток. Алгоритмы построения подобных сеток давно и успешно применяются к решению задач с особенностями. Этим вопросам посвящена обширная литература (см., например, [7] и библиографию там же). Однако математическая теория таких процессов, в частности, доказательство сходимости, до последнего времени отсутствовало.

В настоящей работе мы предлагаем подход к решению этих вососов, основанный на оценке норм ортогональных и галеркинских проекторов на соответствующих сетках.

В [8] опубликована общая теорема, сводящая сходимость адаптационных процессов к оценке норм галеркинских проекторов на соответствующие пространства. В данной работе мы приводим эти теоремы для некоторых классов сингулярно возмущенных краевых задач, в случае использования сеток Г.И.Шишкина.

Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon x \equiv -\varepsilon^2 x'' + c(t)x = f(t), \quad x(-1) = x(1) = 0, \qquad (1)$$

$c(t)$, $f(t) \in C^1[-1,1]$, причем $c(t) \geqslant c_0 > 0$, $t \in [-1,1]$, ε - малый положительный параметр.

Зафиксируем некоторое натуральное m и ведем пространство

$$E_{m,p} = \{x_m = x_m(t) \in S(\Delta_{m,p}, 1, 1), x_m(-1) = x_m(1) = 0\},$$

где $S(\Delta_{m,p}, 1, 1)$ - пространство линейных сплайнов дефекта 1 на сетке Шишкина $\Delta_{m,p}$, определенной параметрами m и $p > 0$.

Для нахождения приближенного решения задачи (1) используется м.к.э., суть которого заключается в отыскании $x_{m,p}(t) \in E_{m,p}$, такой, что для любой $y(t) \in E_{m,p}$ имеет место

$$F_\varepsilon(x_{m,p}, y) \equiv \varepsilon^2(x'_{m,p}, y') + (x_{m,p}, c(t)\, y) = (f, y), \qquad (2)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[-1,1]$.

Алгоритм адаптации сетки к пограничному слою состоит в уточнении расположения точки перехода от редкой к густой сетке. Эта точка фактически отделяет пограничный слой, и ее положение определяется параметром p_k разбиения Δ_{m,p_k}.

$E = \{x = x(t) \in C[-1,1], x(-1) = x(1) = 0\}$. Определим семейство галеркинских проекторов $P_{m,p_k} : E \to E_{m,p_k}$, действующих по принципу $Px = x_{m,p_k}$, где x - точное решение задачи (1), x_{m,p_k} решение задачи (2). В [9] показано, что метод (2) является квазиоптимальным, т.е. существует положительная константа C, независящая от m, p_k, такая, что $\|P_{m,p_k}\|_{E\to E} \leqslant C$. Это условие является ключевым в доказательстве следующего утверждения

Теорема 1 Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 \in N$, $\gamma > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m \geqslant m_0 : \varepsilon \ln m \leqslant \gamma/m$ алгоритм (I) - (V) адаптации [10] закончит работу при $k < C_2 \ln m / \ln\ln m$, причем для решения $x_m^{(k)}$ на сетке, определяемой параметром p_k, будет справедлива оценка: $\|x_m^{(k)} - x\|_C \leqslant C_1 \ln m/m^2$.

Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon x \equiv -\varepsilon x'' + b(t)\, x' + c(t)x = f(t), x(0) = x(1) = 0, \qquad (3)$$

$b(t)$, $c(t) \in C^2[0,1]$, $f(t) \in C[0,1]$, причем $b(t) \geqslant b_0 > 0$, $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1]$. Для оператора L_ε была поставлена соответствующая галеркинская задача и предложен алгоритм адаптации сетки к пограничному слою.

Доказывается, что соответствующий метод галеркинских проекций для "укороченного" оператора $L_{\varepsilon,0}x \equiv -\varepsilon x'' + b(t)x'$ является квазиоптимальным. Использование некоторых общих идей метода компактной аппроксимации [5], позволяет доказать квазиоптимальность для оператора общего вида $L_\varepsilon = L_{\varepsilon,0} + L_{\varepsilon,1}$, $L_{\varepsilon,1}x = c(t)x$, что в свою очередь позволяет сформулировать и доказать следующее утверждение

Теорема 2 Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 \in N$, $\gamma > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m \geqslant m_0$: $\varepsilon \ln m \leqslant \gamma/m$ алгоритм адаптации закончит работу при $k < C_2 \ln m / \ln\ln m$, причем для решения $x_m^{(k)}$ на сетке, определяемой параметром p_k, будет справедлива оценка: $\|x_m^{(k)} - x\|_C \leqslant C_1 \ln m/m^2$.

Литература

[1] К. И. Бабенко Основы численного анализа, М-И.: НИЦ, 2002 [2] С. Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин Сплайны в вычислительной математике, М.: Наука, 1976 [3] Ю.С. Волков Хорошо обусловленные методы построения сплайнов высоких степеней и сходимость процессов интерполяции, докт. диссерт. [4] Natterer F. Uniform convergence of Galerkin method for splines on highly nonuniform mesh // Math. Comput. 1977. V. 31. P.457-468. [5] И.А.Блатов, В.В.Стрыгин. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем. Воронеж: ВГУ, 1997. [6] Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрОРАН, 1992. [7] Лисейкин В.Д. Методы построения сеток. Springer, 1999. [8] Блатов И.А., Добробог Н.В. Об оценках норм семейства проекторов на пространстве типа конечных элементов и их приложение. Тезисы докладов ВЗМШ С.Г.Крейна - 2010 [9] Блатов И.А., Добробог Н.В. О квазиоптимальности метода конечных элементов Галеркина для сингулярно возмущенных краевых задач на сетках Шишкина. Вестник СамГУ, естественнонаучная серия, 2007, № 6(56), стр.119-132. [10] Сборник статей IV МНТК "Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем Пенза 2009, с. 18-20

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИСХОДНОГО ПРОЦЕССА С ПРИОРИТЕТАМИ

Богатова В.П., Швырева О.В. (Воронеж)
verabogа@rambler.ru

Распределение исходного процесса можно получить с помощью теории восстановления, используя распределение процесса на периоде занятости системы. Рассмотрим модель процесса с двумя классами приоритетов: требования первого класса приоритетны, второго — неприоритетны. Тип рассматриваемой модели (N_1, N_2). Источники требований конечны ($N_i < \infty, i = 1, 2$). Предполагая, что в начальный момент система пуста, получим плотности совместного распределения длин очередей:

$\hat{g}_1(m_1, m_2, x_1, x_2, s) = (N_1\lambda_1 + N_2\lambda_2) \cdot \hat{p}(s) \cdot \hat{g}_1^*(m_1, m_2, x_1, x_2, s)$,

$\hat{g}_2(0, m_2, x_2, s) = (N_1\lambda_1 + N_2\lambda_2) \cdot \hat{p}(s) \cdot \hat{g}_2^*(0, m_2, x_2, s)$.

Здесь $g_1(m_1, m_2, x_1, x_2, t)dx_1\, dx_2$ есть вероятность того, что в системе находится m_1 приоритетных и m_2 неприоритетных требований, обслуживается приоритетное требование, время его обслуживания находится в интервале $(x_1, x_1 + dx_1)$, время обслуживания вытесненного неприоритетного требования находится в интервале $(x_2, x_2 + dx_2)$, и период занятости к моменту времени t не закончился; $g_2(0, m_2, x_2, t)$ имеет аналогичный смысл, но относится к обслуживанию неприоритетного требования. Символ $*$ означает период занятости, $\hat{f}$ означает преобразование Лапласа функции f. Индексы 1 и 2 здесь и далее относятся к приоритетным и неприоритетным требованиям соответственно. Вероятность того, что обслуживающий прибор свободен, задается формулой $\hat{p}(s) = [s + (1 - \hat{\gamma}(s)]^{-1}(N_1\lambda_1 + N_2\lambda_2)$, где $\gamma(s)$ — плотность длительности периода занятости:

$\gamma(s) = \frac{\lambda_2}{N_1\lambda_1 + \lambda_2}\hat{B}_2(s) + \frac{N_1\lambda_1}{N_1\lambda_1 + \lambda_2}\hat{b}(s)[\lambda_2\,(1 - \hat{c}_2(s)) + s]$.

Здесь $B_2(t)$ — плотность длительности периода занятости прибора обслуживанием требований 2-го класса, $c_2(t)$ — плотность длительности цикла обслуживания 2-го класса, $b(t)$ — вероятность того, что период занятости оканчивается в интервале $(t, t + dt)$.

Из формул плотностей $\hat{g}_1(m_1, m_2, x_1, x_2, s)dx_1 dx_2$ и $\hat{g}_2(0, m_2, x_2, s)$ получим производящую функцию совместного распределения длин очередей: $\hat{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2, s) = \hat{p}(s)\,[1 + (N_1\lambda_1 + N_2\lambda_2)]\,\hat{\Pi}^*(\alpha_1, \alpha_2, s)$, где $\hat{\Pi}^*(\alpha_1, \alpha_2, s)$ - производящая функция совместного распределения длин очередей на периоде занятости.

РЕВОЛЮЦИЯ В ОБРАЗОВАНИИ НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Богомолов А.И. (Москва)
alivbog@gmail.com

Становится общепризнанным тот факт, что человечество вступило в новую фазу своего развития, которая именуется "информационным обществом" или "обществом знаний". И сегодня перед всеми государствами мира стоит альте5рнатива: или быть потребителем новых знаний и технологий или самому создавать их. От ответа на этот вопрос зависит место государства в современном мире, и в конечном итоге, само его существование как суверенного субъекта мировой политики. Что бы занять достойное место в мире, государство должно рассматривать образование в своей стране как стратегическую, первоочередную задачу. А чтобы качество образования оставалось на мировом уровне и даже превосходило его, необходимо постоянно и интенсивно, не считаясь с расходами (которые в конечном итоге многократно окупятся!) внедрять в образовательный процесс новые информационно-образовательные технологии. Эти технологии, в свою очередь, базируются на технологиях Интернет (Web 2) и мобильной связи.

Какие же революционные преобразования в образовательном процессе готовятся или уже осуществляются ведущими мировыми информационными компаниями (Google, Yahoo, MSN, Hewlett-Packard, Apple и др.)? Эти преобразования основываются на следующих принципах.

1. Образовательный процесс должен основываться на сетевых технологиях и использовать специальные учебные информационные ресурсы, которых уже в настоящее время имеется несколько десятков тысяч [1].

2. Образовательный процесс должен быть максимально свободным и являть собой равноправное сотрудничество учителей и учащихся, т.е. допускать даже такие ситуации, когда в роли "учителя"выступает сам ученик.

3. Образовательный процесс должен быть мобильным и не зависеть от места пребывания ученика и учителя, будь то колледж, дом или университет.

4. Должна быть персонифицированная система обучения, кото-

рая позволит учащемуся учиться в собственном, удобном ему темпе и отслеживать свое продвижение по выбранному им учебному плану.

5. Наконец, учителям и студенты через сеть сотрудничают с другими участниками, которые разделяют те же самые образовательные интересы.

Для реализации этих новаций в образовательном процессе создаются различные инструменты, например LectureShare [2] , который предназначен для создания дистанционных курсов обучения по различным дисциплинам.

Литература

1. http://zaidlearn.blogspot.com/2007/09/edu20-lms.html
2. http://www.lectureshare.com/

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ С АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

Богомолов В.Г. (Москва)

los118@yandex.ru

С помощью численных расчетов решений задач упругости, основанных на модели Кирхгофа-Лява, при описании оболочек акустического приближения для жидкости было обнаружено существование слабо затухающих колебаний тонких цилиндрических и сферических оболочек в жидкости. Проводились аналитические исследования, подтвердившие существование таких колебаний для моделей оболочек в рамках гипотез Киргофа-Лява.

В данной работе исследовано точное аналитическое решение задачи о взаимодействии с окружающей ее акустической жидкостью тонкой сферической оболочки. Оболочка описывается уравнениями типа Тимошенко. Для этой модели доказано существование слабо затухающих колебаний оболочки в жидкости.

Рассматриваемая задача поставлена в рамках оболочечных уравнений типа Тимошенко, учитывающих деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения. Рассматривается линейное приближение осесимметричного движения в акустической жидкости тонкой упругой сферической оболочечной конструкции, подверженной воздействию нестационарной падающей волны избыточного давления и поверхностной нагрузки. Взаимодействие описывается в подвижной системе координат в безразмерных переменных системой уравнений в частных производных с граничными и начальными условиями.

К системе применено преобразования Лапласа по временной переменной. С помощью разложения в ряды по полиномам Лежандра искомых функций система уравнений, описывающая взаимодействие, была сведена к другой системе, которая была решена аналитически.

В частном предельном случае безразмерной оболочки полученные результаты совпали с результатами, выведенными на основании оболочечных уравнений Кирхгофа-Лява в случае предельного перехода.

Функция нормального прогиба, результирующая нагрузка на оболочку, а также смещение центра масс и безразмерная сила были получены путем применения к полученным в результате решения системы выражениям обратного преобразования Лапласа. Отдельно учитывались особые точки подынтегральных выражений, зависящие от параметров оболочки и жидкости.

Результаты показали, что предельное смещение центра масс не зависит от упругих свойств оболочки. Это подтверждает выводы, полученные Олвером ранее в общем виде для упругого тела.

Предельные (по времени) результаты для общего вида падающей волны и произвольной нагрузки будут одни и те же как для модели Кирхгофа-Лява, так и для модели типа Тимошенко. В случае модели Тимошенко доказано существование слабо затухающих колебаний оболочки в жидкости, ранее обнаруженных в теоретических исследованиях для модели Кирхгофа-Лява.

Данный подход удобно использовать в случае различных оболочечных конструкций.

Литература

1. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. –Л.: Судостроение, 1974. 208 с.

2. Авербух А.З., Вецман Р.И., Генкин М.Д. Колебания элементов конструкций в жидкости. –М.: Наука, 1987. 158 с.

О СПЕКТРЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ИСЧЕЗАЮЩЕГО КОЭФФИЦИЕНТА

Богомолова Е.П. (Москва)

epbogomolova@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения

$$y'' + (P_0(x)\rho^2 + P_1(x)\rho + P_2(x))y = 0,\ x \in [a,0) \cup [0,b],\ \rho = \alpha + i\beta \in \mathbb{C},$$

$P_0(x), P_1(x), P_2(x) \in C^2([a,b])$,

Причем $P_0(x) < 0$ на $[a,0)$; $P_0(x) \equiv 0$ на $[0,b]$, $P_1(x) < 0$ на $[a,b]$.

Характеристическим уравнением по Тамаркину [1] здесь является уравнение $\varphi^2 + P_0(x) = 0$, имеющее на $[a,0)$ два различных действительных корня $\varphi_{1,2}(x) = \pm\sqrt{-P_0(x)}$, а на $[0,b]$ – один двукратный нулевой корень.

Дополнительное уравнение $\Phi^2 + \varphi' + P_1 + +\varphi \cdot P_0 = 0$ на $[0,b]$ имеет два различных действительных корня $\Phi_{1,2}(x) = \pm\sqrt{-P_1(x)}$.

На $[a,0)$ существует фундаментальная система решений, допускающих при достаточно больших $|\rho|$ представление [1] вида:

$$y_{1,2}(x,\rho) = \exp\left(\int\limits_a^x \rho \cdot \varphi_{1,2}(\xi)\,d\xi\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\eta_{1,2,\nu}(x)}{\rho^\nu},$$

а на $[0,b]$ – фундаментальная система решений, представимая при больших $|\rho|$ в виде [2] .

$$y_{1,2}(x,\rho) = \exp\left(\int\limits_0^x \sqrt{\rho} \cdot \Phi_{1,2}(\xi)\,d\xi\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z_{1,2,\nu}(x)}{(\sqrt{\rho})^\nu}.$$

С помощью стандартной операции "склейки" решений на границе $x = 0$, получаются два линейно независимых решения на всем отрезке $[a,b]$, которые и подставляются в краевые условия вида:

$$y'(a) + y'(b) = 0; \quad y(a) + y(b) = 0.$$

Уравнение, определяющее собственные значения при $\rho \to \infty$, имеет вид

$$D_1 + D_2 \cdot \exp(\text{æ}\sqrt{\rho} + \omega\rho) + D_3 \cdot \exp(\text{æ}\sqrt{\rho} - \omega\rho) + D_4 \cdot \exp(-\text{æ}\sqrt{\rho} - \omega\rho) +$$

$$+ D_5 \cdot \exp(-\text{æ}\sqrt{\rho} + \omega\rho) + D_6 \cdot \exp(2\text{æ}\sqrt{\rho}) + D_7 \cdot \exp(-2\text{æ}\sqrt{\rho}) = 0,$$

где $\text{æ} = \int\limits_0^b \sqrt{-P_1(\xi)}d\xi > 0$; $\omega = \int\limits_a^0 \sqrt{-P_0(\xi)}d\xi > 0$.

В первой координатной четверти плоскости спектрального параметра ρ собственные значения определяются уравнением

$$æ\sqrt{\rho} - \omega\rho = \ln\left|\frac{D_2}{D_6}\right| - i\arg\frac{D_2}{D_6} + 2\pi k i + O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right),$$

начиная с некоторого, являются простыми и располагаются на ветвях кривой

$$4\omega^4\alpha^4 - 4\omega^2 æ^2\alpha^3 - æ^4\beta^2 = 0.$$

Аналогичным образом спектр определяется и в остальных координатных четвертях.

Литература

1. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917.

2. Печенцов А.С. Асимптотические разложения решений линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Д.У., 1981, т. XVII, 9.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ[1]

Бондаренко Н.П. (Саратов)

BondarenkoNP@info.sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу $L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма-Лиувилля:

$$lY := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi),$$
$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y(x) = [y_k]_{k=\overline{1,m}}$ – вектор-столбец, $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0,\pi)$, $Q(x) = Q^*(x)$. Краевые условия задаются $m \times m$ матрицами h и H, $h = h^*$, $H = H^*$.

Исследуется *обратная задача*: по спектральным данным $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geq 0, q=\overline{1,m}}$ (см. [1]) построить Q, h и H.

Введем Ω аналогично [2, с.61] с учетом специфики матричного случая; Ω характеризует разницу между спектральными данными Λ и $\tilde{\Lambda}$ двух краевых задач L и $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00099)

Будем говорить, что величины $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, если λ_{nq} — вещественные числа, α_{nq} — $m \times m$ матрицы, $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^* \geqslant 0$, $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$, если $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$, и ранги матриц α_{nq} совпадают с кратностями соответствующих λ_{nq}.

Теорема 1. *Пусть дана задача $\tilde{L}$. Существует $\delta > 0$ (зависящее от $\tilde{L}$) такое, что если величины $\Lambda \in Sp$ удовлетворяют условию $\Omega < \delta$, то существует единственная задача $L(Q(x), h, H)$, для которой Λ являются спектральными данными, причем*

$$\|Q(x) - \tilde{Q}(x)\|_{L_2((0,\pi),C^{m\times m})} < C\Omega, \quad \|h - \tilde{h}\| < C\Omega, \quad \|H - \tilde{H}\| < C\Omega,$$

где C зависит только от $\tilde{L}$.

Метод доказательства представляет собой развитие идей метода спекральных отображений [2].

Литература

1. *Бондаренко Н.П.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного уравнения Штурма-Лиувилля // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 7-10.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 384 с.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Бравый Е.И. (Пермь)

bravyi@perm.ru

Рассматривается периодическая краевая задача для системы двух линейных функционально-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon_1(T_1x)(t) + \varepsilon_2(T_2y)(t) + f_1(t), & t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) = \varepsilon_3(T_3)x(t) + \varepsilon_4(T_4y)(t) + f_2(t), & t \in [a,b], \\ x(a) - x(b) = \alpha_1, \quad y(a) - y(b) = \alpha_2, \end{cases} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-96054-р-урал-а)

где числа $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ таковы, что $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$; $T_i : \mathbf{C}[a,b] \to \mathbf{L}[a,b]$, $i = 1,2,3,4,$ — линейные положительные операторы; f_1, $f_2 \in \mathbf{L}[a,b]$; α_1, $\alpha_2 \in \mathbf{R}$.

Теорема. Пусть заданы неотрицательные числа A, B, C, D. Периодическая задача (1) однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах $T_i : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, удовлетворяющих условиям

$$||T_1|| = A, \quad ||T_2|| = C, \quad ||T_3|| = D, \quad ||T_4|| = B,$$

тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$0 < A < 4, \quad 0 < B < 4,$$

$$C\,D < A\,B \min\left(\frac{1}{1+A}, 1 - \frac{A}{4}\right) \min\left(\frac{1}{1+B}, 1 - \frac{B}{4}\right)$$

или

$$0 \leqslant A < 1,\ 0 \leqslant B < 1,$$

$$\frac{A\,B}{(1-A)\,(1-B)} < C\,D < 2\left(4 - A - B + \sqrt{(4-A-B)^2 - 4AB}\right).$$

Замечание. При $B = A$ последнее условие имеет простой вид:

$$\frac{A}{1-A} < \sqrt{C\,D} < 4\,(1 + \sqrt{1-A}).$$

Для систем с нулевыми диагональными операторами условием разрешимости является неравенство $0 < CD < 16$.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ[1]

Бравый Е.И., Макагонова М.А. (Пермь)

bravyi@perm.ru

Неулучшаемые условия однозначной разрешимости для функционально-дифференциальных уравнений с регулярными невольтерровыми операторами получены для уравнений порядка $n = 1$ в [1]. Рассмотрим здесь случай высших порядков, когда $n \geqslant 2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-96054-р-урал-а)

Теорема 1. Пусть задано неотрицательное число $\mathcal{T}^-$. Задача Коши

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = -(T^-x)(t) + f(t), & t \in [0,1], \\ x^{(i)}(0) = \alpha_i, & i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

однозначно разрешима для семейства всех таких линейных положительных операторов $T^- : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$, что $\|T^-\| \leqslant \mathcal{T}^-$, тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}^- \leqslant (n-1)! \left(\min_{z \in [\frac{1}{2},1]} \frac{(z^{n-1}+1)^2}{z^{2(n-1)} - (2z-1)^{n-1}} - 1 \right) \equiv \mathcal{T}_n^-.$$

Имеем $\mathcal{T}_2^- = 8$, $\mathcal{T}_3^- = 2\,(6\sqrt{3}+9)$, последовательность $\frac{\mathcal{T}_n^-}{n!}$ возрастает и стремится к числу $k_0^2 \approx 12.9$, где k_0 — решение уравнения $1 + k_0 = k_0 \ln k_0$.

Теорема 2. Пусть заданы неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$. Сингулярная задача Коши

$$\begin{cases} (1-t)^{n-1} x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), & t \in [0,1], \\ x^{(i)}(0) = \alpha_i, & i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$, что $\|T^+\| \leqslant \mathcal{T}^+$, $\|T^-\| \leqslant \mathcal{T}^-$, тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}^+ < (n-1)!, \quad \mathcal{T}^- \leqslant (n-1)! \left(1 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^+/(n-1)!}\right).$$

Литература

1. Bravyi E., Hakl R., Lomtatidze A. Optimal conditions on unique solvability of the Cauchy problem for the first order linear functional differential equations. Czechoslovak Math. J. V. 52(127). 2002. P. 513–530.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж), Хромов А.П. (Саратов)

burlutskaya@math.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1)

Рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = u_\xi(\xi,t)\Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \; x \in [0,1], t \in (-\infty,+\infty) \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u(0,t) = 0. \quad (2)$$

Предполагаем выполненными следующие условия: β — вещественное число, $\beta \neq 0$; $q(x) \in C[0,1]$, $q(x) = q(1-x)$, $q(x)$ — вещественная функция; $\varphi \in C^1[0,1]$,и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$.

Краевые задачи с инволюцией активно исследуются (см., например, обзор в [1]). Решение задачи (1)–(2) мы находим методом Фурье. Наши предположения позволяют получить классическое решение, избегая почленного дифференцирования функционального ряда, при этом использованы приемы из [2]. Условия на $\varphi(x)$ являются естественными, так как им удовлетворяют собственные функции порождаемой (1)–(2) краевой задачи. Условия на $q(x)$ снимают многие трудности при исследовании задачи и позволяют дать хорошую структурную форму для решения.

Согласно методу Фурье, решение задачи (1)–(2) представляется формальным рядом $u(x,t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}$, где $c_n = (\varphi, y_n)\gamma_n^2$, $\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\lambda_n = 2\pi n + a$, $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, $y_n(x) = p(1-x)e^{2\pi n i(1-x)} - ip(x)e^{2\pi n i x}$, $p(x) = \exp\left(aix - i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$. Система $\{y_n\}$ полная и ортогональная. Указанный ряд сходится абсолютно и равномерно.

Лемма. *Функция* $f_0(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi n i x}$ *принадлежит пространству* $C^1(-\infty,+\infty)$, *является периодической с периодом 1, и при* $x \in [0,1]$ *определяется по формуле*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\right]. \quad (3)$$

В силу периодичности функция $f_0(x)$ однозначно определяется на всей оси заданием ее лишь на отрезке $[0,1]$ с помощью (3).

Теорема. *Классическое решение задачи (1)–(2) существует и имеет вид*

$$u(x,t) = e^{a\beta it}\left[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\right].$$

Литература

1. *Андреев А.А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом//Труды 2-го межд. семинара "Диффер. уравнения и их приложения". Самара, 1998. С. 5-18.

2. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ. 1991. 112 С.

О СОПОСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С АТТРАКТОРАМИ СИСТЕМ ИТЕРАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Буховец А.Г., Шитов В.В., Москалев П.В., Бирючинская Т.Е. (Воронеж)

moskaleff@mail.ru

Многие модели фрактальных множеств могут быть получены с помощью алгоритмической реализации определенного класса систем рандомизированных итеративных функций (РСИФ).

Тестирование таких реализаций показало, что пространственное распределение точек аттрактора РСИФ может быть в некотором смысле близким к решениям ряда краевых задач.

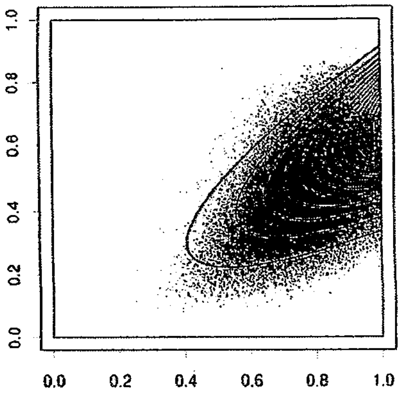
В качестве примера сопоставим численное решение волнового уравнения, возникающего при моделировании нестационарного тепломассопереноса в пористых средах [1]: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial T}{\partial x} = \beta\frac{\partial T}{\partial t}$, где α и $\beta = \text{const}$; с реализацией РСИФ вида [2]: $\mathbf{m}_{i+1} = \frac{\mathbf{m}_i + \mu\mathbf{z}_i}{1+\mu}$, где $\mathbf{m}_i(x_i, t_i) \in \boldsymbol{\Omega}$ — вектор текущей точки аттрактора; $\mu = \text{const}$; $\mathbf{z}_i \in \boldsymbol{\Gamma}$ — вектор текущей псевдослучайной граничной точки, подчиняющейся бета распределению с фиксированными параметрами: $\boldsymbol{\Gamma} \mapsto [0,1) \sim \mathbf{B}(2,5)$.

Анализ полученных результатов (см. рисунок) позволяет, на наш взгляд, выдвинуть предположение о возможности аппроксимации решений подобных краевых задач аттракторами РСИФ.

Литература

1. Распространение температурных волн в двумерных пористых средах / В.В. Фалеев, Н.Д. Вервейко, А.Н. Глушаков, П.В. Москалев // Тепломассообмен ММФ-96. Тр. III Минск. междунар. конференции по тепломассообмену. Т. VII. Минск, 1996. С. 214–217.

2. Буховец А.Г. Аппроксимация многомерных данных фрактальными множествами // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. тр. междунар. конференции. Ч. 1. Воронеж: ВГУ, 2009. С. 81–84.



КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Быков Д.С. (Екатеринбург)

bykovdanila@gmail.com

В функциональном пространстве состояний $\mathbf{H} = L_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ рассматривается уравнение

$$\frac{dx_t}{dt} = \mathbf{A}x_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty), \tag{1}$$

где неограниченный оператор $\mathbf{A}$ определяется формулами

$$(\mathbf{A}x)(\vartheta) = \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta}, \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{A}x)(0) = Ax(0) + A_\tau x(-\tau)$$

и имеет область определения $D(\mathbf{A}) = \{x(\cdot) : x(\cdot) \in W_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\}$. Оно определяет систему дифференцильных уравнений с запаздыванием и постоянными матрицами A, A_τ размерности $n \times n$.

Красовский Н.Н. показал, что решения системы с запаздыванием можно приближать решениями специальной системы обыкновенных дифференцальных уравнений [1]. В предлагаемой работе уравнение (1) аппроксимируется в функциональном пространстве состояний уравнением

$$\frac{dx_t}{dt} = \mathbf{A}_m x_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty),$$

где $\mathbf{A}_m : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ — конечномерный оператор, определяемый формулами $(\mathbf{A}_m x)(\vartheta) = m^2\tau^{-2}\left(\int_{-\frac{k-1}{m}\tau}^{-\frac{k-2}{m}\tau} x(\xi)\, d\xi - \int_{-\frac{k}{m}\tau}^{-\frac{k-1}{m}\tau} x(\xi)\, d\xi\right)$, $\vartheta \in \left[-\frac{k}{m}\tau, -\frac{k-1}{m}\tau\right)$, $k = 2, \ldots, m$, $(\mathbf{A}_m x)(\vartheta) = \frac{m}{\tau}\left(x(0) - \frac{m}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{m}}^{0} x(\xi)\, d\xi\right)$, $\vartheta \in \left[-\frac{\tau}{m}, 0\right)$, $(\mathbf{A}_m x)(0) = Ax(0) + \frac{m}{\tau}A_\tau \int_{-\tau}^{-\tau+\frac{\tau}{m}} x(\xi)\, d\xi$.

Теорема. Имеет место асимптотическая оценка

$$\|R(\lambda, \mathbf{A})x - R(\lambda, \mathbf{A}_m)x\|_{\mathbf{H}} = O\left(m^{-1}, \lambda\right)\left(\|x\|_{W_2^1} + \|x\|_{\mathbf{H}}\right),$$

где $x \in W_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \to +\infty$.

Литература

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием// Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28, № 5. С. 605–618.

МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Бырков И.А.

byrkov@niti.ru

При разработке математической модели электрического равновесия сети формализацию представления исходных данных о ее топологии и параметрах элементов осуществляют с помощью матрицы инциденций структурного графа [1], содержащей n узлов и m ветвей. При больших размерах сетей, входящих в состав электроэнергетических систем, основные затраты машинного времени приходятся на решение системы сетевых уравнений. В связи с этим актуальным становится вопрос минимизации числа возникающих итераций. Изменение конфигурации сети влечет за собой изменение матрицы инциденций. Если происходят одиночные удаления, восстановления ветвей сети и редкие (по сравнению с количеством осуществляемых расчетных шагов) перемены системных параметров и частоты вращения ротора опорной синхронной машины, меняется не вся обратная матрица системы, а лишь незначительная ее часть. Поэтому для ускорения поиска решения модели целесообразно разделять обратную матрицу на изменяемые и неизменяемые подматрицы.

В случае принятия условий идеализации Горева-Парка [2], при наличии резистивных, индуктивных и емкостных составляющих у ветвей сети, после осуществления процедуры дискретизации уравнение узловых напряжений полученное из матричных представлений законов Ома и Кирхгофа в относительных единицах и системе координат d, q будет иметь следующую форму записи

$$\begin{aligned} \mathbf{u_s}(t) = -(\mathbf{E_{3n}})^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{E_{3m}}\mathbf{W}(\mathbf{E_{3m}})^{-1}\mathbf{A}^*]^{-1}\times \\ \times[\mathbf{A_c}\mathbf{E_{3m}}\mathbf{i_c}(t) + \mathbf{A}\mathbf{E_{3m}}\mathbf{b}(t-1)], \end{aligned}$$

где $\mathbf{E_{3n}}$ и $\mathbf{E_{3m}}$ – состоят из строк единичной матрицы, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A_c}$ – содержат строки матрицы инциденций, $\mathbf{i_c}$ – вектор задающих токов, $\mathbf{u_s}$ – вектор узловых напряжений. При редких изменениях системных параметров и частоты вращения ротора опорной синхронной машины матрица $\mathbf{W}$ – квазипостоянная. Для древовидного структурного графа матрица $\mathbf{A}$ – неособая и имеет место формула

$$\mathbf{i}(t) = -(\mathbf{E_{3m}})^{-1}(\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A_c}\mathbf{E_{3m}}\mathbf{i_c}(t).$$

Токи ветвей сети в этом случае представляют собой линейные комбинации токов синхронных и асинхронных машин, статических нагрузок находящихся в одной компоненте связности с рассматриваемыми ветвями.

Коэффициенты правых частей последних двух систем будут меняться преимущественно в случае изменения структуры сети. Представив матрицу $\mathbf{A}\mathbf{E_{3m}}\mathbf{W}(\mathbf{E_{3m}})^{-1}\mathbf{A}^*$ в виде $\mathbf{A}\mathbf{B}^*$, где $\mathbf{B}^* = \mathbf{E_{3m}}\mathbf{W}(\mathbf{E_{3m}})^{-1}\mathbf{A}^*$ и обозначив блоки матрицы $(\mathbf{A}\mathbf{B}^*)^{-1}$ символами $\mathbf{\Omega_{ij}}$, можно получить следующую форму записи $(\mathbf{A}\mathbf{B}^*)^{-1}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Omega_{21}} = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A_2}\mathbf{B_1^*}(\mathbf{A_1}\mathbf{B_1^*})^{-1}; \\ &\mathbf{\Omega_{11}} = (\mathbf{A_1}\mathbf{B_1^*})^{-1} - (\mathbf{A_1}\mathbf{B_1^*})^{-1}\mathbf{A_1}\mathbf{B_2^*}\mathbf{\Omega_{21}}; \\ &\mathbf{\Omega_{22}} = \mathbf{Q}^{-1}; \\ &\mathbf{\Omega_{12}} = -(\mathbf{A_1}\mathbf{B_1^*})^{-1}\mathbf{A_1}\mathbf{B_2^*}\mathbf{\Omega_{22}}; \\ &\mathbf{Q} = \mathbf{A_2}\mathbf{B_2^*} - \mathbf{A_2}\mathbf{B_1^*}(\mathbf{A_1}\mathbf{B_1^*})^{-1}\mathbf{A_1}\mathbf{B_2^*}, \end{aligned}$$

где индексу 1 соответствуют строки матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ не подвергшиеся изменению, индексу 2 – измененные строки. Последние уравнения минимизируют машинные затраты при расчете сети с изменяющейся конфигурацией.

Таким образом, разработан алгоритм расчета системы уравнений большой трехфазной электрической R, L, C сети с изменяющейсмя конфигурациией. Известные методы в отличие от предложенного алгоритма не используют факт фрагментарности изменения обратной матрицы в процессе перемены структуры сети. Данный алгоритм нашел реализацию при математическом моделировании электроэнергетических систем в составе полномасштабных тренажеров [3].

Литература

1. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы/пер. с англ. М. В. Горбатовой и др. ; под ред. В. А. Горбатова. М.: Мир, 1984. 455 с.

2. *Веретенников Л. П.* Исследование процессов в судовых электроэнергетических системах. Теория и методы. Л.: Судостроение, 1975. 376 с.

3. *Бырков И. А., Витин С. П., Гордиевский С. Г. и др.* Полномасштабный тренажер "Диана-Барс-М" – Труды XXXVI Всероссийская конференция по управлению движением кораблями и специальными аппаратами. Северодвинск. 2009.

О НАИМЕНЬШЕМ ПОЧТИ ПРОСТОМ ЧИСЛЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТ ПРОСТОГО АРГУМЕНТА

Вахитова Е.В. (Воронеж)

Рассмотрим задачу об оценке наименьшего почти простого числа последовательности

$$\{k^2p^2+1|k,p\in\mathbf{N},p-\text{простое},p\leqslant x\},$$

где x - достаточно большое положительное число.

Будем наименьшее почти простое число P_r^* оценивать как функцию $k(r\in\mathbf{N},r\geqslant 2)$. Пусть P_r^* не превосходит k^A , где A - некоторая постоянная, не зависящая от k : $P_r^*\leqslant k^A$.

В 1965 году Левин Б.В. ([1], теорема 4) получил для k^2p^2+1

$$P_7^*\leqslant k^{7,6},$$

и, если справедлива расширенная гипотеза Римана, то

$$P_5^*\leqslant k^{31,4}.$$

В настоящей работе с помощью метода весового решета ([2]) получена

Теорема. Пусть $F(p) = k^g p^g + l^g$ - неприводимый полином, $k, p, l \in \mathbf{Z}$, p - простое, $g \in \mathbf{N}$, $2 \leqslant g \leqslant 8$, $\rho(p)$-число решений сравнения $F(n) \equiv 0(mod\, p)$, $\rho(p) < p$ для всех p, k и l - такие, что $\rho(p) \neq 0$, $p \not| F(p)$, и $\rho(p) \neq 1$, $p \mid F(p)$. Тогда наименьшее значение $F(p)$, имеющее не более $2g+1$ простых множителей с учетом их кратности, не превосходит k^A, где

$$A = g + \frac{12g^2}{5,65625 - 0,6864g}.$$

В частности, наименьшее значение $F(p) = k^2p^2+1$, имеющее не более пяти простых множителей с учетом их кратности, не превосходит $k^{13,2061}$.

Теорема дает оценки для задачи, безусловный результат для которой ранее не рассматривался, и для более общей задачи при всех g, удовлетворяющих неравенству $2 \leqslant g \leqslant 8$.

Литература

[1] *Левин Б. В.* О наименьшем почти простом числе арифметической прогрессии и последовательности k^2x^2+1 // УМН.-1965.-Т.20.-N 4(124).-С. 158-162.

[2] *Вахитова Е. В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Математические заметки.-1999.-Т.66.-N 1.-С. 38-49.

[3] E. V. Vakhitova. Selbergs One-Dimensional Sieve With Bukhstab Weights of New Type //Kinwer Academic / Plenum Publishees. 2000. Mathematical Notes.-1999.-V. 66.-N 1.-P.30-39.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ЗАДАЧ

Вахитова С.Р., Перловская Т.В., Покорный Ю.В., Смирнова Е.В. (Воронеж)

student_sveta@mail.ru

Рассматривается уравнение

$$-D(pu') + (DQ)(u) = DF \tag{1}$$

где DQ- дифференциал Стилтьеса, определяемый пространством непрерывных функций $C(\bar{\Gamma})$ и порождаемый функцией Q ограниченной вариации, и имеющий тем самым вид:

$$(DQ)(u) = \int_{\Gamma} u\,dQ.$$

Теория дифференциала Стилтьеса имеет разработанные основы (см [1]) от простейшего регулярного случая, когда P, Q, F - достаточно гладкие скалярные функции и задача рассматривается на конечном промежутке $[0; l] \subset \mathbf{R}$, до нерегулярных случаев, когда аргумент x (неизвестного решения $u(x)$) является ветвящимся, т.е. изменяется на пространственной сети(графе); или когда параметр уравнения (1) имеет импульсные компоненты и когда функции F, Q имеют скачки. Мы рассматриваем именно этот случай. Нас интересует вопрос о том, является ли существенным в поведении решения влияние этих скачков, если они достаточно малы.

Мы будем считать, что функция ограниченной вариации $Q(x)$ представима в виде

$$Q(x) = Q_0(x) + \varepsilon Q_\sigma(x), \tag{2}$$

где Q_σ функция скачков. Согласно общепринятым договоренностям это значит, что Q_σ допускает представление

$$Q_\sigma = \sum \alpha_i \Theta(x - \xi_i), \tag{3}$$

где $\Theta(x)$ - функция Хэвисайда, α_i- величина скачка точки ξ_i. Т.к. $Q(x)$ по предположению имеет ограниченную вариацию, то множество ее точек разрыва счётно. Мы предполагаем, что эти точки разрыва пронумерованы произвольным образом. Если $p(x), Q_0(x), F(x)$ гладки, то предположения (2)-(3) означают, что уравнение (1) можно представить в виде

$$-(p\frac{d}{dx}(u(x)))' + Q_0'(x)u(x) + \varepsilon \sum \alpha_i \delta(x - \xi_i) = F'(x)$$

где $\delta(x)$ обозначает δ-функцию Дирака. Оказывается, для любых начальных условий решения $u_\varepsilon(x)$ такого уравнения (1) имеют асимптотическое представление с достаточно хорошими при малом ε знакорегулярными свойствами.

Литература

[1] *Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. // Физматлит.-2009.-С. 117.

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ В ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ "МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА" ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПСИХОЛОГОВ

Веберг Т.И., Набатникова Н.В. (Липецк)

Применение математических методов анализа, методов компьютерной обработки информации в психологических исследованиях стало объективной причиной включения в образование психологов курса математики и информатики. Мы считаем, что одним из продуктивных подходов к решению проблемы проектирования содержания математического образования для гуманитариев является дидактический подход, суть которого заключается в следующем: содержание математического образования должно быть представлено не только в логике современной математики, но и в логике будущей профессиональной деятельности студента. В таком случае целью учебной деятельности студента является не только овладение математическим аппаратом как целостной научной системой, а формирование профессионально значимых качеств личности на основе логики математики. Именно такая цель обеспечивает оптимальные условия для формирования познавательного интереса к изучению математики у студентов-психологов, и тем самым, создает предпосылки к эффективной организации процесса обучения математическим дисциплинам. Подход к проблеме содержания математического образования студентов гуманитарных специальностей определяется переносом акцента с внутренней цели обучения (подготовить к продолжению образования), на внешнюю (формирование и развитие культуры мышления).

С помощью специально подобранных упражнений можно осуществлять целенаправленное обучение будущего психолога умениям анализировать, понимать смысл поставленной задачи, предугадывать пути решения задачи, предвидеть результат. Чем разнообразнее будет набор специально подобранных задач, тем большей активности потребует их решение от студента, тем выше будет готовность будущего специалиста к самостоятельному принятию решений в различных ситуациях. Как показывает опыт работы, целенаправленное обучение студентов решению задач, проводимое в системе, прививает навыки творческого мышления, самостоятельной работы, эффективно способствует развитию интереса к предмету.

По нашему мнению, математика и информатика должны работать на профессиональную подготовку будущего специалиста.

К ЗАМКНУТОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ СВЯЗНЫХ СЫПУЧИХ СРЕД В НАПРЯЖЕНИЯХ

Вервейко Н.Д., Ерохина Е.Н. (Воронеж)
erokhina1985@mail.ru

Математическая модель пространственного деформирования связных сыпучих сред описывается системой трех уравнений в частных производных для шести компонент напряжений ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, i, j = 1..3$) и одним уравнением предельного состояния материала [2,3]. Рассматриваемая система уравнений в напряжениях является незамкнутой и ее замыкание может быть осуществлено путем аппроксимации нелинейного условия пластичности в пространстве напряжений совокупностью плоскостей в некоторой точке, которые геометрически представляют собой грани пирамиды [1].

Рассмотрим систему уравнений в напряжениях, описывающую пластическое деформирование связных сыпучих сред:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (i, j = 1, 2) \tag{1}$$

$$\Phi = I^2_{2\sigma'} - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + f^2 I^2_{1\sigma} = 0, \tag{2}$$

здесь $I^2_{2\sigma'}$ - второй инвариант девиаторной части тензора напряжений, $I_{1\sigma}$ - первый инвариант тензора напряжений, α - коэффициент внутреннего трения, f - коэффициент внутреннего трения качения ($f>\alpha$).

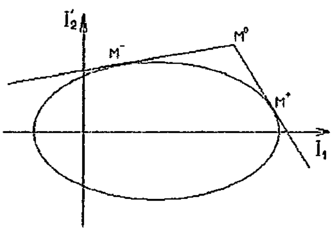


Рис.1. Аппроксимация сечения эллипсоида.

На рисунке 1 представлена аппроксимация сечения эллипсоида парой касательных плоскостей. В произвольном пространственном случае эта пара плоскостей может быть реализована как три боковые грани тетраэдра или четыре грани четырехугольной пирамиды. Минимальное количество касательных плоскостей аппроксимирующих эллипсоид, равное трем, позволяет заменить одно условие пластичности (2) на три соотношения аппроксимирующих нелинейное условие пластичности.

В итоге математическая модель деформирования связных сыпучих материалов сводится к ситеме трех линейных уравнений в частных производных и трех независимых линейных уравнений для напряжений, содержащих некоторый итерационный параметр. В качестве итерационного параметра выбирается расстояние по нормали от поверхности текучести до точки, через которую проходят три линейно независимые плоскости, аппроксимирующие нелинейное условие пластичности в пространстве напряжений.

Одним из вариантов построения замкнутой системы уравнений в напряжениях деформирования связных сыпучих материалов является использование сферической системы координат в пространстве напряжений и углов Эйлера в пространстве главных напряжений. Это позволяет сократить число параметров определяющих напряжения и свести исследуемую математическую модель к пяти уравнениям, из которых три уравнения в частных производных и два нелинейных уравнения, определяющих плоскости в пространстве главных напряжений.

Литература

1. Вервейко Н.Д., Купцов А.В. Метод характеристик решения пространственной задачи идеальной пластичности при условии Мизеса // Механика твердого тела. - 2009. - N2. - С.181-192.

2. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш.шк., 1969. - 608с.

3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. М.: Физматлит, 2001. Т.1. - 445с.

К ПОСТРОЕНИЮ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ЗАДАННЫМИ ВИХРЕВЫМИ СВОЙСТВАМИ И ЛИНИЯМИ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ[1]

Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.
(Екатеринбург)
yunsub@imm.uran.ru

Пусть $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(D)$ — класс всех гладких потенциальных в области $D \subset R^3$ векторных полей $\vec{\beta}(\vec{X})$, исчерпывающий класс всех гладких в D решений системы уравнений

$$|\vec{\beta}(\vec{X})| = 1, \quad \oint_L (\vec{\beta}(\vec{X}), d\vec{X}) = 0 \ \text{ для любого } \ L \subset D.$$

Здесь и ниже $\vec{X}$ — радиус-вектор произвольной точки из D, L — спрямляемый замкнутый контур в D. При известном классе $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(D)$ возможно его расширение до классов $\mathfrak{T}_{\mathrm{op}}(D)$ и $\mathfrak{T}_{\mathrm{o}}(D)$ неединичных соответственно потенциальных и непотенциальных векторных полей $\vec{b}(\vec{X})$, линии которых прямолинейны и ортогональны (в случае непотенциальных полей) их вихревым линиям. Класс $\mathfrak{T}_{\mathrm{op}}$ полей исчерпывает класс всех решений системы уравнений

$$(\vec{b}(\vec{X}), \vec{\nabla})(\vec{b}(\vec{X})/|\vec{b}(\vec{X})|) = 0,$$

$$\oint_L (\vec{b}(\vec{X}), d\vec{X}) = 0 \ \text{ для любого } \ L \subset D$$

при условиях $\vec{b}(\vec{X}) \in C^{(1)}(D)$, $|\vec{b}(\vec{X})| \neq 0$ почти всюду в D. А класс $\mathfrak{T}_{\mathrm{o}}(D)$ полей исчерпывает класс всех решений системы уравнений

$$(\vec{b}(\vec{X}), \vec{\nabla})(\vec{b}(\vec{X})/|\vec{b}(\vec{X})|) = 0, \quad (\vec{b}(\vec{X}), \mathrm{rot}\, \vec{b}(\vec{X})) = 0$$

при тех же условиях на $\vec{b}(\vec{X})$ и дополнительном условии $\mathrm{rot}\, \vec{b}(\vec{X}) \neq 0$ почти всюду в D, где $\vec{\nabla}$ — дифференциальный оператор Гамильтона. Описание указанных полей дается теоремами.

Теорема 1. *Соответствие $\vec{X} \to \vec{b} = \vec{b}(\vec{X})$ определяет в D потенциальное поле класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{op}}(D)$, линии которого прямолинейны, тогда и только тогда, когда $\vec{b}(\vec{X}) = \sigma(\vec{X})\vec{\beta}(\vec{X})$ и*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00014)

1) $\vec{\beta}(\vec{X}) \in \mathfrak{T}_{up}(D)$;

2) *скалярное поле* $\sigma(\vec{X}) = \mu(U)\Big|_{U=U(\vec{X})}$ $\left(\sigma(\vec{X}) = \frac{d\mu(U)}{dU}\Big|_{U=U(\vec{X})}\right)$ *в случае односвязной (в случае неодносвязной) области* D *как функция переменной* $\vec{X}$ *определено всюду в* D, *не меняет знак, непрерывно дифференцируемо, отлично от нуля почти всюду в* D, *а скалярное поле* $U = U(\vec{X}) \in C^{(2)}(D)$ *есть скалярный потенциал поля* $\vec{\beta}$.

Теорема 2. *Соответствие* $\vec{X} \to \vec{b} = \vec{b}(\vec{X})$ *определяет в* D *поперечно вихревое векторное поле класса* $\mathfrak{T}_{up}(D)$, *линии которого прямолинейны, тогда и только тогда, когда* $\vec{b}(\vec{X}) = \sigma(\vec{X})\vec{\beta}(\vec{X})$ *и*
1) $\vec{\beta}(\vec{X}) \in \mathfrak{T}_{up}(D)$;

2) *скалярное поле* $\sigma(\vec{X})$ *всюду в* D *определено, не меняет знак, непрерывно дифференцируемо, причем* $\sigma(\vec{X})$ *и* $[\vec{\nabla}\sigma(\vec{X}), \vec{\beta}(\vec{X})]$ *отличны от нуля почти всюду в* D.

Сам же класс $\mathfrak{T}_{up}(D)$ можно найти путем непосредственного конструирования полей на основе метода отображений (см. [1], [2]) с учетом особенностей геометрического строения единичных потенциальных векторных полей [3].

Литература

1. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 82–91.

2. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121.

3. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. К построению потенциальных и поперечно вихревых векторных полей с линиями нулевой кривизны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. 11 с. (в печати).

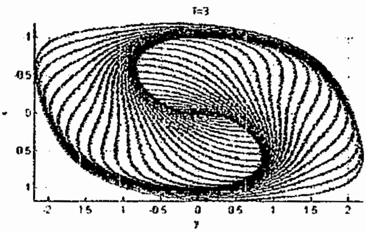
АППРОКСИМАЦИЯ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Винников Е.В. (Москва)

evinnikov@gmail.com

Для нелинейных управляемых динамических систем, в которых область управления является компактом, получены оценки для расстояние Хаусдорфа между истинным множеством достижимости и его дискретными аппроксимациями, построенными с использованием численных схем решения дифференциальных уравнений (методы Эйлера и Рунге-Кутта). В среде *Matlab* реализованы модификации метода пикселей [1] построения множеств (областей) достижимости (МД), управляемости и интегральных воронок в двумерном и трёхмерном случаях с фазовыми ограничениями и без них (программа *PixelSet*). С помощью *PixelSet* исследованы более 50 управляемых систем.

Анализ МД используется для решения некоторых задач оптимального управления, в частности, позволяет достаточно легко количественно оценить оптимальность решения задачи с терминальным функционалом, что особенно важно для большинства нелинейных задач оптимального управления. В качестве примера рассмотрим нелинейную управляемую систему, описываемую уравнением Дуффинга [2] $\dot{x}(t) = y(t)$, $\dot{y}(t) = -x(t) - x^3(t) + u(t)$, $x(0) = y(0) = 0$, $y(0) = 0$, $|u| \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$. На рисунке изображена проекция на плоскость Oyx интегральной воронки при $T = 3$, построенной в программе *Pixelset*.



Литература

1. Гусейнов Х. Г., Моисеев А. Н., Ушаков В. Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем. // Прикладная математика и механика. — 1998, т.62, вып.2. — С.179-187.

2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 С.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КЛЮЧЕВОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ ЦИКЛОВ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Владимирова Е.В., Сапронов Ю.И. (Воронеж)
vev@mail.ru, yusapr@mail.ru

Разработке и практической апробации методов исследования зарождения периодических волн, вихревых структр и циклов динамических систем вблизи сложных стационарных состояний посвящено большое число работ [1,2]. В настоящем сообщении изложена процедура анализа ветвления периодических решений дифференциальных уравнений гидродинамического типа, основанная на методах функционального анализа. Методологическую основу предложенной процедуры составляют теория гладких $SO(2)$–эквивариатных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах [4,5]. Акцент сделан на случай резонансов 1:1 и 1:1:1, для которых дано описание главной части ключевого отображения.

Литература

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. 1984. 432 с.

2. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир. 1985. 280 с.

3. Карпова А.П., Сапронов Ю.И. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008, вып. 3. С.12-22.

4. Копытин Н.А., Копытин Н.А., Сапронов Ю.И. Фредгольмово уравнение с круговой симметрией в окрестности резонансной особой точки// Математические модели и операторные уравнения. Том 4. Воронеж: ВГУ, изд-во "Созвездие2007. С.69-90.

5. Карпова А.П., Ладыкина У.В., Сапронов Ю.И. Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения// Математические модели и операторные уравнения. - Т. 5, ч. 1. Воронеж: ВорГУ, изд-во "Созвездие2008. С.45-90.

6. Карпова А.П., Копытин Н.А., Сапронов Ю.И. Ключевые уравнения в динамических системах с 2-кратными резонансами// Математические модели и операторные уравнения. Том 6. Воронеж: ВГУ, изд-во "Созвездие2009. - С.51-58.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ РЕШЕНИЯ ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Галимянов А.Ф., Гадильшина В.Р. (Казань)

anis_59@mail.ru, venera_gadilshina@mail.ru

В данной работе исследуется метод коллокаций приближенного решения дробно-интегрального уравнения

$$A\bar{\varphi} \equiv \gamma + I^{(\alpha)}(\varphi; t) + T(\varphi; t) = f(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{1}$$

где $\gamma, \varphi(t)$ неизвестны, $I^{(\alpha)}(\varphi; t)$–дробный интеграл Вейля порядка $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$(см. [1]), $f(t)$–заданная непрерывная функция, T–заданный линейный оператор.

Пусть $C_{2\pi}$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций со стандартной нормой;

$$C_{2\pi}^0 = \{f \in C_{2\pi} : \int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = 0\};$$

$$\bar{C} = \{\bar{\varphi} = (\gamma, \varphi) : \ \gamma \in \mathbb{R}, \ \varphi \in C_{2\pi}^0\}$$

с нормой $\|\bar{\varphi}\| = |\gamma| + \|\varphi\|_{C_{2\pi}}$, а также $C^\alpha[0, 2\pi]$ – пространство дробно-дифференцируемых порядка α функций с нормой

$$\|f\|_{C^\alpha} = |c_0(f)| + \max_{t \in [0, 2\pi]} |D^{(\alpha)}(f - c_0(f); t)|,$$

где $D^{(\alpha)}(f)$ – производная Вейля-Лиувилля от $f(t)$ порядка $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Так как исходное уравнение, как правило, не решается точно, ставится задача разработки приближенных методов ее решения. Для этого приближенное решение (1) ищется в виде вектор-функции $\overline{\varphi_n}(t) = (\gamma_n, \varphi_n(t)), \gamma_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \ n \in \mathbb{N}.$$

Неизвестные коэффициэнты $\{a_k, b_k\}$ определяются из системы уравнений, полученной из условий

$$A(\overline{\varphi_n}; t_j) = f(t_j), \ j = \overline{0, 2n},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193)

где $t_j = \frac{2\pi j}{2n+1}$, $j = \overline{0, 2n}$–система узлов на $[0, 2\pi]$. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* (1) *имеет единственное решение при любой правой части* $f \in C^{\alpha}[0, 2\pi]$, *выполнены условия* $D^{(\alpha)}(T(\varphi; t)) \in Lip_M \beta$, $D^{(\alpha)}(f(t)) \in Lip_{M_1} \beta$. *Тогда система уравнений метода коллокации однозначно разрешима при достаточно больших* n, *и приближенные решения* $\overline{\varphi_n}^*(t)$, *сходятся к точному решению* $\overline{\varphi}^*(t)$ *со скоростью*

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi_n}^*\|_{\bar{C}} = O(\frac{\ln n}{n^{\beta}}) \ (n \to \infty).$$

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения.* - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

2. Габдулхаев Б.Г. *Прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I рода. Учебное пособие.* - Казань: Казанский Государственный Университет им В.И. Ульянова-Ленина, 2006. - 137 с.

3. Eduard Belinsky, Werner Linde: *Compactness properties of certain integral operators related to fractional integration,* Springer-Verlag 2005.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Галимянов А.Ф., Доценко Е.В. (Казань)

anis_59@mail.ru, ignore88@yandex.ru

Рассмотрим приближенное решение слабосингулярного интегрального уравнения вида

$$Kx \equiv x(t) + \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{x(\tau)d\tau}{(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}|t-\tau|^{1-\gamma}} +$$

$$+\mu \int_{-1}^{+1} \frac{h(t,\tau)x(t)d\tau}{(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}} = y(t), \qquad (0.1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193)

где $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $-1 < \alpha, \beta < 1$, $h(t, \tau)$, $y(t)$ - известные непрерывные функции, $x(t)$ - искомая функция, λ, μ - постоянные.

Приближенное решение уравнения (0.1) ищется в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k l_k(t), \qquad l_k(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t - t_k)\omega_n'(t - t_k)} \tag{0.2}$$

а неизвестные коэффициенты $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ определяются из СЛАУ

$$\beta_j + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(t_j)\beta_k + \mu \sum_{k=1}^{n} A_k h(t_j; t_k)\beta_k = y(t_j), j = \overline{1, n}, \tag{0.3}$$

где A_k и t_k - коэффициенты и узлы квадратурной формулы Гаусса для весовой функции Якоби $\rho = \rho(t) = (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}$.

Приведенная вычислительная схема обоснована[1]. Приведем одну из теорем.

Теорема. Если уравнение (0.1) однозначно разрешимо в пространстве $L_{2,\rho}$, то при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv c_1\{|\lambda| n \frac{1-\gamma}{2} + |\mu| E_{n-1}^t(h) + |\mu| \sum_{n-1}^{\tau}(h)\} < 1, \tag{0.4}$$

СЛАУ (0.2) также однозначно разрешима. Приближенное решение сходится к решению $x^*(t)$ уравнения (0.1) в пространстве $L_{2,\rho}$ со скоростью, определяемой неравенством

$$\|x^* - x_n\|_{2\rho} \leqslant c_2\{E_{n-1}(y) + |\mu| E_{n-1}^t(h) + E_{n-1}^t(h) + E_{n-1}^\tau(h) + |\lambda| n \frac{1-\gamma}{2}\},$$

$$\gamma = max(|\alpha|, |\beta|) < 1,$$

где c_i-положительные постоянные, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* - Казань: Казанский Государственный Университет им В.И. Ульянова-Ленина, 1980. - 232 с.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ[1]

Галимянов А.Ф., Петров А.С. (Казань)

anis_59@mail.ru, apetrovs@mail.ru

Рассматривается уравнение

$$I^{(\alpha)}u + Tu = f, \tag{1}$$

где $I^{(\alpha)} = (I_+^{(\alpha)} + I_-^{(\alpha)})/2\cos(\alpha\pi/2)$. $I_\pm^{(\alpha)}$ – дробные интегралы Вейля. Можно доказать, что $I^{(\alpha)}$ – симметричный, положительно определенный оператор. Учитывая это введем скалярное произведение и норму

$$[u, v] = (I^{(\alpha)}u, v), \quad [u] = [u, u]^{1/2}.$$

Пополняя $D(I^{(\alpha)})$ по введенной норме получим H_I – энергетическое пространство. Умножая исходное уравнение на произвольную функцию $v \in D((I^{\alpha}))$, получаем равенство, которому удовлетворяет решение исходного уравнения

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v). \tag{2}$$

Равенство (2) допускает обобщенную постановку задачи. Обобщенным решение уравнения (1) назовем функцию $u \in H_I$, удовлетворяющую соотношению (2) для любой $v \in H_I$.

Сформулируем метод Бубнова-Галеркина для решения этой задачи.

1) В H_I выбираются базисные функции φ_i.

2) Приближенное решение ищется в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i.$$

3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений вида

$$[u_N, \varphi_i] + (Tu_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1..N. \tag{3}$$

Т е о р е м а. Пусть 1) уравнение (1) имеет единственное решение.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агенства по науке и инновациям (госконтракт №02.740.11.0193)

2) Форма $L(u,u) = [u,v] + (Tu,v)$ является H_I-определенной и H_I-ограниченной, т. е. $L(u,u) \geqslant \gamma_0^2[u]^2$ и $L(u,v) \leqslant \gamma_1^2[u][v]$, $\gamma_0, \gamma_1 = const$.

3) Последовательность подпространств H_N — линейных оболочек функций $\varphi_i, i = 1..N$ — является предельно плотной в H_I.

Тогда при любом конечном N система (3) однозначно разрешима, приближенное решение u_N сходится к точному при $N \to \infty$ по метрике $[\cdot]$ и справедлива оценка погрешности

$$[u - u_N] \leqslant c\varepsilon(u,N),$$

где $\varepsilon(u,N)$ — заданная функция от N (оценка погрешности аппроксимации), удовлетворяющая неравенству

$$\min_{c_j} \left\| I^{(\alpha)} \left(u - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \right) \right\| \leqslant \varepsilon(u,N).$$

Литература

1. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев.—Минск: Наука и техника, 1987.—687с.

2. Березин И. С. Методы вычислений. Т.2: учебное пособие для высших уч.зав. / И. С. Березин, Н. П. Жидков.—Изд.2-е, пераб..—Москва: Физматгиз, 1962.—640с.

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЕЯ – ТЕЙЛОРА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Гальцев О.В. (Белгород)

galtsev@bsu.edu.ru

Настоящая работа посвящена задаче Маскета, описывающую фильтрацию двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с различными постоянными вязкостями и плотностями, разделенных некоторой движущейся границей (свободной границей). В классической постановке задачи движение каждой из жидкостей описывается системой уравнений фильтрации Дарси для скорости жидкости $\mathbf{v}$ и давления в жидкости p, а на свободной границе контакта двух жидкостей выполнены условия непрерывности давлений и равенства нормальных скоростей жидкостей нормальной скорости свободной границы. Последние условия означают, что свободная граница есть материальная поверхность и позволяют ввести понятие обобщенного решения [1]. А именно, ищутся четыре неизвестные функции $\mathbf{v}$, p, ρ и μ, удовлетворяющие макроскопической системе уравнений фильтрации

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p + \rho \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

и двум транспортным уравнениям

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mu = 0,$$

с разрывными кусочно – постоянными начальными условиями.

Следуя [1] решение этой задачи ищем как предел решений системы уравнений на микроскопическом уровне в периодическом поровом пространстве, состоящей из уравнений Стокса для скорости и давления в жидкости и транспортных уравнений для вязкости и плотности жидкостей, когда размер ячейки периодичности стремится к нулю.

Для конкретной геометрии порового пространства численно описано поведение границы раздела двух жидкостей.

Литература

1. А. М. Мейрманов, О некоторых принципах моделирования задач фильтрации жидкости со свободными границами, Научные ведомости БелГУ, Серия Математика, Физика. - 2008. - №13(53). - Выпуск 15. - С. 58-72.

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ СМО M/G/1 СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Головко Н.И., Пелешок О.В. (Владивосток)

cdo@psue.ru

При проектировании и эксплуатации различных информационных сетей актуальной является проблема исследования стационарных и нестационарных характеристик систем массового обслуживания (СМО). В данной работе рассматривается дважды стохастическая СМО типа $M/G/1$ с одним прибором, бесконечным накопителем, с произвольным законом распределения длительности η обслуживания $B_\eta(u) = P\{\eta < u\}$. На вход рассматриваемой СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, изменяющийся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа плотность распределения $\varphi(x) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx\}/dx$. Обозначим через $U(t)$ - незавершенную работу системы в момент времени t. Незавершенная работа представляет собой время, необходимое системе для освобождения от всех заявок, находящихся в ней в момент времени t. В работе получено интегро-дифференциальное уравнение типа Такача для стационарного режима:

$$-(\alpha + x)\mathbf{h}(w, x) + \frac{\partial \mathbf{h}(w, x)}{\partial w} + x \int_0^w B(w - s) \frac{\partial \mathbf{h}(s, x)}{\partial s} ds +$$

$$+\alpha\varphi(x) \int_a^b \mathbf{h}(w, x) dy = 0, w > 0,$$

где $\mathbf{h}(w, x) = P\{U < w,\ x < \lambda < x + dx\}/dx$ - совместное стационарное распределение незавершенной работы U и интенсивности входного потока λ. Данное уравнение решено с применением преобразования Лапласа-Стилтьеса. Нахождение обратного преобразования связано со значительными затруднениями, однако через преобразования Лапласа-Стилтьеса выражены среднее и дисперсия незавершенной работы в стационарном режиме.

Литература

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение. 1979.

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ[1]

Голубь А.В. (Саратов)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1.), гранта РФФИ 10-01-00270

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t)\, dt,$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, то есть $\theta(\theta(x)) = x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$. Требования на ядро оператора A: функция $A(x,t) = 0$ при $t \geqslant x$, $A(x, x-0) \equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A(x,t)$ непрерывны при $t < x$ и $k + l \leqslant 2$. Такой оператор был рассмотрен в [1]. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций оператора A образует базис Рисса со скобками в пространстве* $L_2[0,1]$.

Литература

1. Голубь А.В., Хромов А.П. Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы // Изв. Сарат. ун-та. нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 5–10.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Гончарова Г.А., Егорова Л.Н., Гарбуз Е.В. (Саратов)

Рассматриваются конструкции, подвергающиеся многофакторным внешним воздействиям: механическим нагрузкам, агрессивных коррозионных сред, температурных и электромагнитных полей. Такое комплексное воздействие приводит к ускорению процессов старения материала конструкции, увеличению износа и уменьшению срока службы конструкции.

Указанные воздействия являются нестационарными и случайными, что приводит не только к ухудшению условий эксплуатации, но и к изменению физико-химических свойств материала конструкции. При комплексном моделировании работы конструкции воздействия представляются в виде случайных процессов, которые имеют определенную функциональную зависимость от времени, взаимосвязаны, а их случайный характер определяется случайными параметрами, не зависящими от времени. Такие процессы принято называть детерминированными.

Считаем, что изменение несущей способности конструкции во времени происходит из-за колебаний внешних воздействия и может быть представлено в виде стационарного случайного процесса. В этом случае случайный процесс изменения несущей способности аппроксимируется выражением, содержащим стационарную случайную функцию и неслучайную функцию времени и случайного аргумента.

Недостаток экспериментальных данных по рассматриваемым процессам приводит к необходимости введения гипотез о характерном виде кривых износа. При линеаризации процесса изменения параметров нестационарная случайная функция представляется в линейном виде, где скорость износа является случайной величиной. Кроме того, в качестве моделей износа рассматриваются степенная и экспоненциальная. Они могут быть линеаризованы с использованием методов пошагового (по времени) решения задачи. Указанный метод применяется к исследованию надежности строительных металлических конструкций.

Для модели износа в линейном виде, считая начальные значения несущей способности и скорость износа некоррелированными случайными величинами, распределенными по нормальному закону, была получена плотность распределения несущей способности для ряда конкретных практических задач. Данные полученных расчетов хорошо совпали с реальными данными и расчетами, полученными другими методами (при раздельном внешнем воздействии).

Кроме того, рассматривалась модель, в которой процесс износа материала конструкции был исследован при детерминированном значении скорости износа. Показано, что с вероятностью 0,97 можно утверждать, что процесс разрушения будет подчиняться закону Лапласа.

Построенные модели используются при прогнозировании долговечности строительных конструкций и мостовых сооружений.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ СЖАТОГО СКЕЛЕТА

Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н. (Воронеж)
rbgotsev@mail.ru

В качестве модели среды, учитывающей пористую структуру материала и сложную реологию сжатого скелета бралась модель, механическая схема которой показана на рисунке 1.

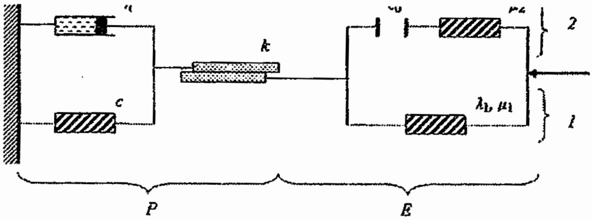


Рис. 2: Реологическая схема пористой упруго-вязко-пластической среды.

Модель состоит из двух последовательно соединенных составных частей: пластической – P и упругой – E. Пластическая часть состоит из пластического элемента (предел текучести k), последовательно соединенного с параллельной связкой вязкого элемента (коэффициент вязкости η) и упругого элемента (коэффициент упрочнения c). Упругая часть состоит из упругого сжимаемого элемента 1 (коэффициенты Лямэ λ_1, μ_1) и параллельно подсоединенной к нему последовательной связки 2 жесткого контакта (начальный раствор пор ε_0) и упругого несжимаемого элемента (коэффициент упругости μ_2).

Очевидно, что если в рассматриваемой схеме (рис.1) убрать жесткий элемент (положить $\varepsilon_0 = 0$), приходим к известной модели упруго-вязко-пластического тела, предложенной А.Н. Спорыхиным, если, кроме того, $\eta \to 0$, то приходим к модели упрочняющегося упруго-пластического тела, предложенной Д.Д. Ивлевым.

Уравнение жесткого контакта, входящего в последовательное соединение “2” согласно Садовскому В.М. имеет вид

$$\sigma_j^\beta(\varepsilon_\alpha^\alpha + \varepsilon_0) = 0.$$

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Гребенникова И.В., Кремлев А.Г. (Екатеринбург)

giv001@usla.ru

Рассматриваются управляемые сингулярно возмущенные системы (с малым параметром $\mu > 0$, запаздыванием $h > 0$):

$M(\mu)dz/dt = A(t)z(t) + G(t)z(t-h) + B(t)u(t)$,

где $t \in T = [t_0, t_1]$, матрица $M(\mu) = diag(E_n, \mu E_m)$, где E_k – единичная $k \times k$ матрица. Начальное состояние системы $z(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $z_0 = z(t_0)$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $z_0 \in Z_0$, Z_0 – выпуклый компакт в R^{n+m} ; $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $\Psi(t)$ – заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ – измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P – слабо компактное выпуклое множество в$L_2^r(T)$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди $u(\cdot) \in P$ найти $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot))$,

$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)))$,

где $\varphi(\cdot)$ – заданная выпуклая функция; $z(t; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ – решение исходной системы, исходящее из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Предлагаемая процедура [2] позволяет построить управляющее воздействие, доставляющее оптимальное значение с заданной степенью точности $o(\mu^k)$. Аппроксимация оптимального решения задачи существенно зависит от вида разложения B(t). Разрешимость исходной задачи управления, а также допустимость используемых аналитических конструкций определяется рядом требований.

Литература

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности // М.: Наука, 1977.

2. Гребенникова И.В. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Известия Саратовского университета. Серия Математика, Механика, Информатика. 2009. Т.9, Вып.3. С. 14-22.

ОБ УСРЕДНЕННОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Гриценко С.А. (Белгород)

sgritsenko@bsu.edu.ru

В периодической области Ω^ε рассматривается задача о нелинейной диффузии и медленной конвекции примесей в абсолютно твердой пористой среде. Точная физическая модель состоит из уравнений Стокса, описывающих движение слабосжимаемой вязкой жидкости, в которых кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(\tilde{c}^\varepsilon)\nabla \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon + (\alpha_\nu \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon - \tilde{p}^\varepsilon)\mathbf{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}^\varepsilon}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon = 0, \tag{2}$$

и конвективного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial \tilde{c}^\varepsilon}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon \nabla \tilde{c}^\varepsilon = \alpha_D \Delta \tilde{c}^\varepsilon. \tag{3}$$

Математическая модель рассматриваемой задачи содержит малый параметр ε, равный отношению среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l/L$, и быстро осциллирующие негладкие коэффициенты, затрудняющие ее численную реализацию. Естественным упрощением, сохраняющим основные свойства задачи, является ее усреднение, т.е. нахождение предельных режимов в точной модели при $\varepsilon \to 0$ с использованием метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга.

В результате получается модель, не содержащая быстро осциллирующих коэффициентов, в которую входят уравнение фильтрации Дарси для скорости жидкости и усредненное уравнение диффузии.

Литература

1. *Мейрманов А.М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах. Сибирский математический журнал, май-июнь 2007, том 48, Но. 3, с.645 - 667.

2. *Гриценко С.А.* Усреднение в задачах нелинейной диффузии. Сибирские электронные математические известия. Том 7, стр. 52-64 (2010)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОТИПНЫХ ИГР СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Гущин Д.В. (Челябинск)

off_side@mail.ru

Уравнения движения известных дифференциальных игр «мальчик и крокодил», контрольный пример Л. С. Понтрягина и других с помощью линейной замены переменных сводятся к виду

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad \|v\| \leqslant 1, \quad t \leqslant p, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь непрерывные функции $a(t) \geqslant 0$, $b(t) \geqslant 0$, p — момент окончания игры. На управление первого игрока накладывается интегральное ограничение

$$\mu(t) = \mu_0 - \int\limits_{t_0}^{t} g(r, \|u(r)\|)\, dr \geqslant 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant p,$$

где t_0 — начальный момент времени, $\mu_0 \geqslant 0$ — начальный запас ресурсов. Первый игрок минимизирует величину $\|z(p)\|$, второй — максимизирует ее.

Предполагается, что непрерывная при $t \leqslant p$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ функция $g(t,\varphi) \geqslant 0$ является выпуклой по φ и удовлетворяет равенству $g(t,0) = 0$. Показано, что задача

$$G(t_0, z_0, \mu_0) = \inf_{\varphi(\cdot)} \max\{F(t_0, \varphi(\cdot)); \|z_0\| + f(t_0, \varphi(\cdot))\},$$

$$f(t, \varphi(\cdot)) = \int\limits_{t}^{p} (-a(r)\varphi(r) + b(r))\; dr, \quad F(t, \varphi(\cdot)) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} f(\tau, \varphi(\cdot)),$$

$$0 \leqslant \varphi(r) \leqslant 1, \quad \mu_0 \geqslant \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \varphi(r))\, dr$$

имеет решение $\varphi_0(t)$. Используя результаты работы [1], показано, что функция $G(t_0, z_0, \mu_0)$ является ценой игры, а оптимальные управления игроков равны $u_0(t,z) = \varphi_0(t)w(z)$, $v_0(t,z) = w(z)$,

$$w(z) = \begin{cases} \frac{z}{\|z\|}, \text{ при } \|z\| \neq 0, \\ \forall s : \|s\| = 1, \text{ при } z = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Ухоботов, В. И. Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным управлением / В. И. Ухоботов //Вестник Челябинского университета. Серия математика, механика. - 1996. - Вып. 1. - С. 178 - 184.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ С КВАЗИСВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

Давыдова М.Б. (Воронеж)

mbd@vsu.ru

Как стало недавно известно из работ Ю. В. Покорного и его учеников, нерегурярная стилтьесовская струна может описываться уравнением

$$-pu'(x) + \int_0^x u\,dQ = F(x) - F(0), \tag{1}$$

где интеграл понимается по Стилтьесу. Если концы струны не закреплены наглухо, т. е. если, вообще говоря, $u(0) \neq 0$, $u(l) \neq 0$, то уравнение (1) все равно обуславливает поведение струны на концах за счет скачков функции $Q(x)$ при $x = 0$ и при $x = l$. Напомним, что в (1) функция $Q(x)$ определяет упругое взаимодействие рассматриваемой струны с внешней средой, а именно, на участке от x до $x + dx$ коэффициент упругости (коэффициентом Гука) определяется величиной $dQ(x) = Q(x + dx) - Q(x)$.

Если дифференциал Стилтьеса $dQ(x)$ неотрицателен, что означает неубывание $Q(x)$, то уравнение (1) гарантирует положительную разрешимость при неотрицательном dF. Это означает, что соответствующая функция влияния (если она существует) неотрицательна. Этот факт означает, что соответствующая спектральная задача

$$-pu'(x) + \int_0^x u\,dQ = \lambda \int_0^x u\,dM, \tag{2}$$

(задаче об упругих колебаниях $M(x)$ определяет плотность распределения масс) имеет простое позитивное собственное значение.

Автор благодарит Ю. В. Покорного за постановку задачи, а также за полезные обсуждения.

О НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Давыдова М.Б. (Воронеж)

На основе точечного подхода, предложенного Ю. В. Покорным [1] в 1999 году, для интегродифференциального уравнения

$$-(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0) \qquad (1)$$

удалось построить точную параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем (см. [2], [3], [4]).

Столь бурное и успешное развитие этой теории обусловлено тем, что уравнение (1) является поточечным в отличие от теории обобщенных функций, где любое уравнение рассматривается как равенство функционалов, что в свою очередь закрывает возможность применения качественных методов (типа теорем Ролля) анализа решений уравнения.

В работе получены достаточные условия положительной разрешимости нелинейного уравнения (когда в правой части уравнения (1) вместо $F(x) - F(0)$ стоит $\int\limits_0^x f(s, u(s))\, d\sigma(s)$, где $\sigma(x)$ — строго возрастающая на $[0; l]$ функция, при краевых условиях $u(0) = u(l) = 0$. Переменная x в нелинейном уравнении (как впрочем и в (1)) пробегает специальное расширение $\overline{[0; l]}_\sigma$ отрезка $[0; l]$, в котором каждая точка ξ принадлежащая множеству $S(\sigma)$ точек разрыва функции заменена на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$.

Литература

[1] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167-169.

[2] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. — М.: Физматлит, 2004. — 272с.

[3] Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук, 2008, Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141

[4] Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009. — 192с.

ОБ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Давыдова М.Б., Зверева М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)

В работе получены оценки, позволяющие изучать нелинейные задачи, функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x u(s)d[Q(s)] = F(x) - F(0), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mu(x)$ — возрастающая на $[0;l]$ функция, непрерывная на концах отрезка $[0;l]$; $Q(x)$ не убывает на $[0;l]$; $F(x)$ принадлежит $BV[0;l]$, т. е. имеет на $[0;l]$ конечное изменение, переменная x в уравнении (1) пробегает множество $\overline{[0;l]}_S$, в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\mu)$ разрыва функции $\mu(x)$, заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi-0, \xi, \xi+0\}$, точка $s \in S = S(Q) \cup S(f) \cup S(p) \setminus S(\mu)$ — на пару $\{s-0, s+0\}$. Интеграл в (1) понимается по Ю. В. Покорному (см. [1], [2]).

Решение (1) мы ищем в классе E — μ-абсолютно непрерывных на $[0;l]$ фунцкий, μ-производная которых принадлежит $BV[0;l]$.

Уравнение в (1) в точках $\xi \in S(\mu)$ превращается в два уравнения связи

$$-\Delta^-(pu'_\mu)(\xi) + u(\xi-0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi),$$
$$-\Delta^+(pu'_\mu)(\xi) + u(\xi+0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi),$$

где $\Delta^-\psi(\xi)$ и $\Delta^+\psi(\xi)$ — левый и правый скачки функции $\psi(x)$ в точке ξ в $s \in S$ — в одно уравнение

$$-\Delta(pu'_\mu)(s) + u(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s),$$

где $\Delta\psi(s)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке s.

Для анализа задачи (1) мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным [1], и для непрерывных решений развитый в [3], [4], [5].

Литература

[1] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167-169.

[2] Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

[3] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. — М.: Физматлит, 2004. — 272с.

[4] Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук, 2008, Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141

[5] Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009. — 192с.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ В ПОРОУПРУГИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Данилец И.В. (Белгород)

irinadanilets@yandex.ru

В настоящей работе моделируется распространение акустических волн в пороупругих слоистых средах. Рассматриваемая среда вне бесконечного слоя конечной ширины является упругим телом. В свою очередь сам слой перфорирован системой пор, которые заполнены вязкой жидкостью. В безразмерных переменных сплошная среда вне Ω описывается системой уравнений Ламэ

$$\rho_* \frac{\partial^2 \mathbf{w}_*}{\partial t^2} = div\left(\alpha_\lambda D(x, \mathbf{w}_*) + \alpha_{p,*}(div\, \mathbf{w}_*)I\right) + \rho_* \mathbf{F}. \tag{1}$$

Сама область Ω состоит из чередующихся параллельных слоев ширины ml заполненных вязкой жидкостью плотности ρ_f и вязкости μ и слоев ширины $(1-m)l$ упругого тела плотности ρ_s с упругими характеристиками λ и ν. Поведение жидкости описывается системой уравнений Стокса:

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} = div\left(\alpha_\mu D(x, \mathbf{v}_f) - p_f I\right) + \rho_f \mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} + \alpha_{p,f}\, div\, \mathbf{v}_f = 0, \tag{3}$$

Наконец, поведение упругого скелета описывается системой уравнений Ламэ

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} = div\left(\alpha_\lambda D(x, \mathbf{w}_s) + \alpha_{p,s}(div\, \mathbf{w}_s)I\right) + \rho_s \mathbf{F}, \qquad (4)$$

На границах контакта различных сред (жидкое - твердое или твердое - твердое) выполнены условия непрерывности перемещений и нормальных напряжений. Для случая

$$\lim_{l \searrow 0} \alpha_\mu = 0, \quad \lim_{l \searrow 0} \alpha_\lambda = \lambda_0, \quad \lim_{l \searrow 0} \alpha_{\lambda^*} = \lambda_0^*, \quad \lim_{l \searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \infty,$$

$$\lim_{l \searrow 0} \alpha_{p,*} = c^*, \quad \lim_{l \searrow 0} \alpha_{p,f} = c_f, \quad \lim_{l \searrow 0} \alpha_{p,s} = c_s,$$

$$0 < \lambda_0,\ \lambda_0^*,\ c^*,\ c_f,\ c_s < \infty$$

на основе метода Нгуетсенга выводятся усредненные уравнения.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Дербушев А.В. (Воронеж)

dav99984@mail.ru

В данной работе получена асимтотика спектра и спектральных проекторов оператора Дирака с краевым условием Дирихле.

Рассматривается оператор Дирака

$$L_{dir}y = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{dy}{dt} - vy, \qquad y \in D(L_{dir}),$$

$$L_{dir} : D(L_{dir}) \subset L_2([0,\pi], \mathbb{C}^2) \to L_2([0,\pi], \mathbb{C}^2),$$

где $v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0,\pi]$, $P, Q \in L_2[0,\pi]$, $y = (y_1, y_2) \in L_2\left([0,\pi], \mathbb{C}^2\right)$. Область определения $D(L_{dir})$ определяется краевым условием Дирихле : $(y_1(0) = y_2(0)$ и $y_1(\pi) = y_2(\pi))$, где $y = (y_1, y_2) \in W_2^1\left([0,\pi], \mathbb{C}^2\right)$. А именно, полагается

$$D(L_{dir}) = \left\{y \in W_2^1([0,\pi], \mathbb{C}^2) : y_1(0) = y_2(0), y_1(\pi) = y_2(\pi)\right\},$$

и соответствующий операторы будут обозначаться через L_{dir}. Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то используется запись L^0_{dir} . С помощью метода подобных операторов были получены следующие результаты:

Теорема 1 Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора L_{dir} представим в виде $\sigma(L_{dir}) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup\limits_{|n| \geqslant m+1} \sigma_n \right)$ (1), где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а множества σ_n, $|n| \geqslant m+1$, определяются равенством $\tilde{\lambda}_n = n - \theta_{2n} - \sum\limits_{j \in \mathbb{Z},\, j \neq 0} \frac{\theta^2_{j+2n}}{j} + \tilde{\beta}_n$,

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_{-\frac{n}{2}} + q_{\frac{n}{2}}); & n \in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}(\tilde{p}_{-\frac{n+1}{2}} + \tilde{q}_{\frac{n+1}{2}}), & n \in 1 + 2\mathbb{Z}. \end{cases}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{\beta}_n)| < \infty$$

Теорема 2 Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что оператор L_{dir} спектрален по Данфорду относительно разложения (1).

Локализационные оценки теоремы 1 являются новыми. Ранее даже не было установлено, что $\lim\limits_{|n| \to \infty} |\tilde{\lambda}_n - n| = 0$ для собственных значений $\tilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора L_{dir} .

Теорема 3 Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что для системы ортопроекторов $P_n, n \in \mathbb{Z}$, построенных по не возмущенному оператору L^0_{dir} и $\widetilde{P}_n$, $|n| \geqslant m+1$, — спектральных проекторов Рисса, построенных по множествам σ_n, $|n| \geqslant m+1$, участвующим в разложении (1) имеет место свойство $\sum\limits_{k \geqslant m+1} \|\widetilde{P}_k - P_k\|^2 < \infty$.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ РАСШИРЕННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА

Динь Чунг Хоа (Казань)
dinhtrunghoa@yahoo.com

Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{M}^+_*$ множество всех положительных ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathcal{M}$.

Определение ([1]). *Расширенной положительной частью* алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначается $\widehat{\mathcal{M}}_+$) называется множество всех отображений $M : \mathcal{M}^+_* \to [0, +\infty]$, обладающих следующими свойствами:

(i) $M(\lambda\varphi) = \lambda M(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$, $\lambda \geqslant 0$ (считаем, что $0 \cdot (+\infty) = 0$);

(ii) $M(\varphi + \psi) = M(\varphi) + M(\psi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$;

(iii) M полунепрерывно снизу.

Для $C \in \mathcal{M}$, $M \in \widehat{\mathcal{M}}_+$ определим $C^*MC \in \widehat{\mathcal{M}}_+$, полагая

$$C^*MC(\varphi) \equiv M(C\varphi C^*), \quad \varphi \in \mathcal{M}_*^+,$$

где $C\varphi C^*(\cdot) \equiv \varphi(C^* \cdot C)$. Если M — положительный оператор из $\mathcal{M}$, то введенная операция умножения совпадает с обычным произведением.

Отношение порядка на $\widehat{\mathcal{M}}_+$ задается следующим образом: $M \leqslant N$, если $M(\varphi) \leqslant N(\varphi)\,(\forall\varphi \in \mathcal{M}_*^+)$. Для неубывающей функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ элемент $f(M)$ определяется естественным образом.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — $\mathcal{M}$-монотонная функция (т.е. для любых положительных операторов A, B из $\mathcal{M}$ таких, что $A \leqslant B$ выполняется неравенство $f(A) \leqslant f(B)$). Тогда $f(M) \leqslant f(N)$ для любой пары элементов M, N из расширенной положительной части $\widehat{\mathcal{M}}_+$ таких, что $M \leqslant N$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — операторно монотонная функция. Тогда $C^*f(M)C \leqslant f(C^*MC)$ для любого элемента $M \in \widehat{\mathcal{M}}_+$ и любого сжатия $C \in \mathcal{M}$.

Следствие. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — нормальное вполне положительное сжатие, $\widehat{\pi}$ — продолжение π на расширенную положительную часть $\widehat{\mathcal{M}}_+$, и функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — операторно монотонна. Тогда имеет место $\widehat{\pi}(f(M)) \leqslant f(\widehat{\pi}(M))$ для любого элемента $M \in \widehat{\mathcal{M}}_+$.

Замечание. Теорема 1 является обобщением одного из основных результатов в [2]. Для ограниченных операторов утверждения теоремы 2 и следствия доказаны в [3].

Литература

[1] Haagerup U. *Operator valued weights in von Neumann algebras, I* // J. Funct. Anal. - 1979. - V. 32. - P. 175–206.

[2] Динь Чунг Хоа, Тихонов О.Е., *К теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций* // Известия ВУЗов. Математика. - 2010. - № 3. - С. 9–14.

[3] Hansen F. *An operator inequality.* Math. Ann. - 1980. - V. 246. - P. 249–250.

УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛЯХ "ВЛАСТЬ - ОБЩЕСТВО - ЭКОНОМИКА"[1]

Дмитриев М.Г. (Москва)
mdmitriev@mail.ru

В докладе приводится обзор последних результатов по моделям "власть-общество-экономика"для базовой и коррумпированной иерархий. На макроуровне изучается объединение моделей Солоу и Михайлова. Для стационарного случая моделей определяется объем власти в иерархии, максимизирующий среднедушевое потребление. Для протяженных иерархий выясняется возможность реализации оптимального стационарного объема власти в динамической иерархии с помощью систем поддержки гражданским обществом той или иной модели власти в рамках решений нестационарных сингулярно возмущенных краевых задач с быстрыми внутренними переходами - т.н. контрастными структурами, Для агрегированной нестационарной модели, где переменными состояния являются удельная фондовооруженность и объем власти в иерархии рассматриваются различные задачи оптимального управления, где в качестве управлений могут выступать норма накопления, коэффициент усиления реакции гражданского общества и изменчивость среды. Для ряда постановок анализируются приближенно оптимальные законы управления.

Литература

1. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г., Пилюгин В.С. Стационарные задачи оптимального взаимодействия в системе "власть-общество". Ученые записки РГСУ. № 6, М: Изд-во РГСУ, 2008, с. 108-118 2. Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. Оптимальный объем властных полномочий в социально-экономической иерархии по критерию удельного потребления. Информационные технологии и вычислительные системы. № 4, М.: Изд-во ЛКИ, 2007, с. 4-11. 2. Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. Развитие модели "власть - общество - экономика". Математическое моделирование социальных процессов. Вып. 10, М.: КДУ, 2009, с. 17-29. 3. Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. Учет действия коррупции в стационарной модели "власть-общество-экономика". Социальная политика и социология. № 5. Часть 1, М: Изд-во РГСУ, 2009, с. 378-387. 4. Павлов А.А. Линейный синтез управления ресурсами в нестационарной

[1]Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 08=06-00302а

модели "власть-общество-экономика". Ученые записки РГСУ. № 11, М: Изд-во РГСУ, 2009, с. 210-219.

О НЕОБХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ АТТЕСТАЦИИ СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ

Дубровская А.П., Глушко Е.Г., Провоторова Е.Н.
(Воронеж)
enprov@mail.ru

В современных условиях информатизации общества возникает потребность в специалистах с новым типом мышления. Высокий уровень профессионализма определяется не просто набором знаний, а способностью глубоко мыслить, понимать суть дела и разрешать трудные проблемы, которые ставит время. «...Способность формализовать, стоящие перед специалистом задачи, необходима и врачу, и экономисту, и юристу. А обучать этому может только математика» (ак. В.М.Тихомиров).

В подготовке специалиста инженерно-технического профиля необходимость фундаментального математического образования была, есть и всегда будет актуальной. Но в последние годы наметилась устойчивая тенденция к резкому снижению математической подготовки выпускников общеобразовательных школ. В школе зачастую формируется не только нежелание углублять свои знания, но и отсутствие всякого интереса к математическим знаниям, как к неким абстракциям, которые не имеют никакого отношения к жизни.

Таким образом, в вузах возникла критическая ситуация, когда вузы вынуждены обучать первокурсников, все большее число которых не подготовлены к восприятию и усвоению фундаментальных математических дисциплин. Поэтому необходимо искать и разрабатывать новые подходы и методы, позволяющие не только компенсировать недостающие знания, но и прежде всего повышать мотивацию к обучению, объяснять роль математической подготовки в становлении специалиста.

В рамках обозначенной выше проблемы на первый план выдвигается задача стимулировать студентов к систематической работе, активизировать самостоятельное мышление, помочь выработать навыки самопознания. Опыт преподавательской работы последних лет показывает, что одним из эффективных подходов в решении данной проблемы может оказаться создание системы непрерывной аттестации студентов с помощью гибких оперативных и разнообразных форм текущего контроля. В отличие от эпизодических проверок систематический контроль помогает регламентировать процесс обучения, дает возможность получать достаточное количество оценок, повышает интерес учащихся к учебе и чувство ответственности за его результаты.

Естественно в современных условиях для этой цели использовать возможности тестовых технологий, являющихся одним из наиболее надежных и объективных методов определения объема и глубины предметных достижений учащихся. На кафедре ВМФММ Воронежского технического университета подготовлены и используются в учебном процессе сборники тестовых заданий по различным разделам курса математического анализа. Тесты составлены с учетом разных уровней начальной подготовки, и позволяют выяснять усвоение материала не только на уровне минимальных, но и более высоких требований. Подчеркнем важность использования тестовых технологий для систематического самоконтроля и самооценки студентов.

Такое последовательное тестирование формирует у студентов на каждом этапе его движения от незнания к знанию объем и уровень знаний необходимых для усвоения дальнейшего материала, и вырабатывает у студентов психологическую установку на систематическое пополнение своих знаний и умений.

О СУЩЕСТВЕННОМ ВКЛЮЧЕНИИ КАТО ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА САФАРА

Еровенко В.А., Гулина О.В. (Минск)
erovenko@bsu.by, gulina_ o@mail.ru

Пусть $\mathbf{B}(X)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих на бесконечномерном банаховом пространстве X над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Рассмотрим оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ и следующие обозначения: $N(T)$ – ядро, $R(T)$ – область значений, $R^{\infty}(T) := \bigcap\{R(T^k) : k = 1,2,3...\}$ – обобщенная область значений оператора T.

Определение 1. Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется относительно регулярным, если для него существует такой оператор $S \in \mathbf{B}(X)$, что выполняется равенство $TST = T$.

Подробное описание относительно регулярных операторов содержится, например, в работе [1].

Определение 2. Относительно регулярный оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется регулярным, если для него выполняется включение Като $N(T) \subset R^{\infty}(T)$.

Включение Като, т.е. условие вложения ядра $N(T)$ оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ в обобщенную область значений $R^{\infty}(T)$, которое в современной интерпретации записывается в виде $N(T) \subset R^{\infty}(T)$, впервые появилось в классической работе Т. Като о возмущении линейных операторов [2].

Определение 3. Относительно регулярный оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется существенно регулярным, если для него выполняется существенное включение Като $N(T) \overset{e}{\subset} R^{\infty}(T)$, т.е. $N(T) \subset R^{\infty}(T) + F$, где $F \subset X$ – конечномерное подпространство банахова пространства X. Множество всех существенно регулярных операторов, действующих на банаховом пространстве X, обозначим через $\mathbf{S}_e(X)$.

Теорема 1. Пусть $T \in \mathbf{S}_e(X)$ и $A \in \mathbf{B}(X)$– оператор конечного ранга, тогда $T - A \in \mathbf{S}_e(X)$.

Вообще говоря, в формулировке теоремы 1 нельзя заменить условие "существенно регулярный оператор"на "регулярный оператор поскольку существенное включение Като $N(T) \overset{e}{\subset} R^{\infty}(T)$ устойчиво относительно конечномерных возмущений, а включение Като $N(T) \subset R^{\infty}(T)$ неустойчиво при конечномерных возмущениях, что можно продемонстрировать на соответствующем контрпримере.

Контрпример 1. Пусть $T = I$ – тождественный оператор на гильбертовом пространстве и пусть $A = P$ – одномерный ортогональный проектор. Тогда I – регулярный оператор, а $I - P$ – не является регулярным оператором, т.к. $N(I-P) \not\subset R^{\infty}(I-P)$, хотя он является существенно регулярным.

Существенно регулярные операторы, действующие на банаховом пространстве X, порождают соответствующий существенный спектр, который называется существенным спектром Сафара оператора линейного ограниченного оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ и определяется по формуле $\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \notin \mathbf{S}_e(X)\}$.

Различные свойства существенного спектра Сафара описаны в работе [3]. В том числе для него справедлива следующая теорема об устойчивости.

Теорема 2. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$ и $A \in \mathbf{B}(X)$ – конечномерный оператор. Тогда для существенного спектра Сафара справедливо равенство $\sigma_{es}(T - A) = \sigma_{es}(T)$.

Литература

1. Caradus, S.R. Generalized inverses and operator theory / S.R. Caradus. – Kingston: Queen's University, 1978. – 210 с. 2. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с. 3. Еровенко, В.А. Об устойчивости существенно регулярных операторов и соответствующего спектра Сафара / В.А. Еровенко, О.В. Гулина // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 27–32.

О ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ ЮРИДИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Жукова Г.С., Федякина Л.В. (Москва)

rgsukvm@mail.ru

ММатематика все чаще становится действенным инструментом исследования юридических объектов: резко увеличился объем уголов-но-статистической, криминологической, нормативно-правовой и другой информации, требующей математической обработки и интерпретации. Специфика работы юриста заключается в постоянном применении особых логических приемов и методов: определений и классификаций, аргументаций и опровержений. ФГОС ВПО по специальности "Юриспруденция"предъявляет достаточно высокие требования к математической подготовленности выпускника вуза, который должен уметь применять математический аппарат для обработки массивов профессионально-значимой информации.

Проблема профессиональной направленности математической подготовки будущих юристов включает в себя реализацию междисциплинарных связей в процессе обучения. При разработке базового курса математики для студентов юридических специальностей целесообразно обеспечить: интеллектуальное развитие студентов, формирование профессионально значимых для будущих юристов математических умений (вычислительных; методов теории вероятностей и математической статистики, математического моделирования, математической логики, и т.д.) и личностных качеств.

Для развития мотивации студентов юридических специальностей к изучению математических дисциплин целесообразно включить в учебный план элективный курс "Математика в профессии юриста который позволяет закрепить материал таких тем базового курса, как "Элементы математической логики "Элементы теории вероятностей"и др.

Математическая подготовка будущего юриста - это неотъемлемая составная часть его профессиональной подготовки, способствующая развитию интеллектуальной сферы специалиста и направленная на овладение прикладными профессионально-ориентированными математическими технологиями.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Основные положения преподавания математики в высшей школе // Математика в высшем образовании. 2003. №1.

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Забрейко П.П., Кривко-Красько А.В. (Минск)
zabreiko@mail.ru, sbmt@mail.ru

В докладе показывается как в вырожденных случаях задача нахождения условий минимума аналитической функции нескольких переменных в критической точке области определения указанной функции сводится к задаче построения неявных функций, определяемых системой аналитических в некоторой окрестности критической точки уравнений с вспомогательным скалярным параметром и несколькими неизвестными. При этом предполагается, что при равенстве нулю скалярного параметра нулевое решение этой системы является изолированным.

Как известно, одним из способов построения неявных функций, определяемых указанной системой, является классическая схема Рюккерта–Лефшеца. В ряде работ [1,3] утверждается, что схема Рюккерта–Лефшеца в «грубом» случае позволяет не только проводить полный анализ структуры множества неявных функций, но также строить первые члены разложений этих неявных функций по целым или дробным степеням скалярного параметра. Однако это не так — все указанные утверждения оказываются неверными [2]. В докладе предлагаются некоторые модификации схемы Рюккерта – Лефшеца, которые в некоторых случаях позволяют провести полный анализ структуры множества неявных функций. К сожалению, выяснить условия, когда такие модифицированные схемы позволяют это сделать, в полном виде пока не удалось.

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

2. Забрейко П.П., Кривко-Красько А.В. Системы скалярных уравнений и неявные функции. I. Труды Института математики. 2009. Т. 17, № 2, с. 3-14.

3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА–ФОРДА И ЕЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ

Забрейко П.П., Таныгина А.Н. (Минск)

zabreiko@mail.ru, anast-minsk@yandex.ru

В докладе излагаются результаты, полученные в [1] для конечномерной открытой модели Леонтьева-Форда

$$\begin{cases} x = A_{11}x + A_{12}y + c, \\ y = A_{21}x + A_{22}y - d, \end{cases} \tag{1}$$

где $x,\ c \in \mathbb{R}^m_+,\ y,\ d \in \mathbb{R}^n_+,\ A_{ij}\ (i,\ j = 1,\ 2)$ — неотрицательные матрицы, а также результаты работ [2, 3], относящиеся к ее бесконечномерным аналогам в идеальных пространствах и пространствах ограниченных непрерывных функций.

В проведенных ранее исследованиях модели Леонтьева–Форда (В.Я. Стеценко и его последователи) предполагалось, что векторы c и d в системе (1) являются заданными, а векторы x и y — неизвестными. В работе [1] анализ модели Леонтьева-Форда был проведен при предположении, что наряду с векторами x и y неизвестным является также вектор d. Данный подход является более естественным с экономической точки зрения. С математической точки зрения система линейных уравнений (1) оказывается недоопределенной, в связи с чем возникает ряд новых задач. В частности, было предложено новое определение продуктивности модели, отличное от использовавшегося ранее чисто формального понятия продуктивности, равносильного выполнению неравенства $\rho(A) < 1$ для спектрального радиуса технологической матрицы A (неравенство $\rho(A) < 1$ оказалось достаточным условием существования решений системы (1) с $d = 0$, т. е. полной компенсируемости модели).

Литература

1. Забрейко П.П. Открытая модель Леонтьева–Форда // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2007. Т. 15, № 2. С. 15–26.

2. Забрейко П.П., Таныгина А.Н. Описание решений открытой модели Леонтьева–Форда в идеальных пространствах // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16, № 2. С. 37–48.

3. Забрейко П.П., Таныгина А.Н. Продуктивность открытой модели Леонтьева–Форда в пространствах ограниченных непрерывных функций // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2009. № 1. С. 97–102.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ПРИЛОЖЕНИИ К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭРГОНОМИКИ

Задорожная Н.С., Ильичева В.В. (Ростов-на-Дону)

vilicheva@yandex.ru

В разделе "Дифференциальные уравнения" курса высшей математики, впрочем, как и в университетском курсе ОДУ, интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) фактически не упоминаются, а при упоминании вскользь приводятся без указания областей их практического применения.

В [1] сформулировано ИДУ вида

$$\frac{dA}{dt} = W_0 - \int\limits_0^t f(t-\tau)\frac{dA}{d\tau}(\tau)d\tau, A(0) = 0, \qquad (1)$$

где $A(t)$ - работа, совершаемая человеком, $\dot{A}(t) = W_0 = const$ - мощность, развиваемая со свежими силами. Ядро $f(t-\tau)$ характеризует факт уменьшения производительности труда вследствие усталости. Мера этой усталости зависит как от количества затраченных ранее усилий, так и от времени восстановления после предшествовавшей работы [1]. Конкретнее можно сказать, что $f(t-\tau)$ выражает влияние мощности $\dot{A}(\tau)$, затраченной в момент времени τ, на усталость работника в момент t.

Дифференцируя (1), получаем "классическое"ИДУ с интегральным оператором типа Вольтерра относительно мощности $W(t) = \dot{A}(t)$.

$$\frac{dW(t)}{dt} = -f(0)W(t) - \int\limits_0^t K(t-\tau)W(\tau)d\tau, W(0) = W_0, \qquad (2)$$

где $K(\xi) = f'(\xi)$. В качестве примера далее рассматривается линейная функция $f(t-\tau) = 2b + k^2(t-\tau), b > 0$.

Применение преобразования Лапласа с последующим использованитем теоремы о разложении [2] приводит в случае $b > k$ к решению:

$$W(t) = \frac{1}{2s}W_0\{(b+s)exp[-(b+s)t] - (b-s)exp[-(b-s)t]\},$$

в котором $s = \sqrt{b^2-k^2}$, $0 < s < b$. Ясно, что $W(t)$, убывая, в момент $t_1 = \frac{1}{2s}\cdot ln\left(\frac{b+s}{b-s}\right)$ обратится в нуль ($W(t_1) = 0$). Выполненная при этом работа находится интегрированием с учетом второго из равенств в (1). Совершенно аналогичным образом рассматриваются случаи $b = k$ и $b < k$. Строятся графики зависимости W и A от t, при $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Литература

1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та. (1989).- 156 с.

2. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. Киев: Изд-во Киевского ун-та. (1968). - 200 с.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР С "МЯГКОЙ" ПРУЖИНОЙ И ЕГО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Задорожный А.И., Ильичева В.В. (Ростов-на-Дону)
simon@rsu.ru

В отличие от гармонического осциллятора с "жесткой"пружиной

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \qquad (1)$$

уравнение колебаний осциллятора с "мягкой"пружиной без учета диссипативных эффектов имеет вид [1]:

$$\ddot{x}(t) + x^3(t) = 0, \qquad (2)$$

где переменные, естественно, являются безразмерными.

Уравнение (1) является линейно однородным (инвариантным относительно группы преобразований $\tilde{x} = \lambda x, \lambda > 0, \tilde{t} = t$) и описывает изохронные 2π - периодические колебания относительно тривиального положения равновесия. Уравнение "мягкого"осциллятора (2) относится к классу квазиоднородных уравнений, инвариантных относительно группы растяжений $\tilde{x} = \lambda x, \tilde{t} = \lambda^{-1}t$. Откуда сразу следует вывод о неизохронности колебаний и об обратной пропорциональности их периода начальной амплитуде [1].

Обратимся теперь к рыночному закону равенства спроса и предложения [2], записав функции спроса (demand) и предложения (supply) в виде

$$F_{d,s}(t,p) = c_{d,s}\ddot{p}(t) + F^L_{d,s}(t,p) = c_{d,s}\ddot{p} + b_{d,s}\dot{p} + F^C_{d,s}(p),$$

$p(t)$ - цена, где функции О.Курно [3] выбираются в виде $F^C_{d,s}(p) = a_{d,s}(p - p_e) + p_e$, p_e - равновесная цена, причем $a_d < 0, a_s > 0$ и $|\frac{a_s}{a_d}| < 1$, что обеспечивает сходимость в дискретной паутинообразной модели (cobwab model)[2]. Аналоги функции спроса О.Ланге [3] $F^L_{d,s}$ содержат слагаемые $b_{d,s}\dot{p}$, называемые спекулятивными (от фр. spéculer - размышлять) элементами спроса (не путать с элементами спекулятивного спроса!), в которых $b_s > b_d > 0, \dot{p}(t)$ именуется тенденцией формирования цены [4]. Функции Ланге несут в себе прогностическую информацию. Добавленные слагаемые $c_{d,s}\ddot{p}, c_s > c_d > 0$ играют роль прогноза в прогнозе.

Записав равенство $F_s - F_d = 0$, получим уравнение $(c_s - c_d)\ddot{p} + (b_s - b_d)\dot{p} + (a_s - a_d)(p - p_e)^3 = 0$. Переходя очевидным образом к безразмерным переменным, найдем, что

$$\ddot{p} + \nu\dot{p} + (p - 1)^3 = 0, \tag{3}$$

где $\nu > 0$ является аналогом коэффициента линейного вязкого трения. В отсутствии "диссипации"$(b_d = b_s)$ после замены $q = p - 1$ перейдем к уравнению

$$\ddot{q} + q^3 = 0.$$

В результате легко получаем семейство фазовых траекторий

$$\dot{p}^2 + \frac{(p-1)^4}{2} = \dot{p}_0^2 + \frac{(p_0 - 1)^4}{2}. \tag{4}$$

Для краткости положим $\dot{p}_0 = 0$. Тогда ясно, что период будет определяться формулой

$$T = \frac{4}{q_0}\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \cdot \frac{1}{q_0} \approx \frac{1.311}{q_0},$$

что наглядно подтверждает сделанное ранее заключение о характере неизохронности колебаний "мягкого"осциллятора.

Уравнение для "диссипативного"осциллятора будет следующим

$$\ddot{q} + \nu\dot{q} + q^3 = 0, q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0.$$

Последняя задача Коши решена численно. Все полученные результаты достаточно просто иллюстрируются графически. Заметим только, что при малом положительном коэффициенте в выражении спекулятивного элемента спроса фазовый портрет типа "центр"переходит в фазовый портрет типа "устойчивый фокус а при большом - в "устойчивый узел". Данная заметка носит методический характер.

Литература

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гл. ред.физ.-мат. литературы изд-ва "Наука М., (1978), 304 с.

2. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. М.: Наука. (1987), 602 с.

3. Аврех Г.Л., Федоренко Н.П., Щукин Е.П. Затраты и результаты: беседы об экономике. М.: Наука. (1990), 192 с.

4. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука.Гл. ред.физ.-мат. литературы. (1987), 160 с.

НОВЫЙ ВАРИАНТ СПЛАЙН-МЕТОДА ПОДОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА С ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ[1]

Замалиев Р.Р. (Казань)

zamm@list.ru

В настоящей работе предложен и обоснован новый вариант сплайн-метода подобластей, специально приспособленный к решению линейного интегрального уравнения третьего рода с фиксиро-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агенства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193)

ванными особенностями в ядре (УТРФО):

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{l}(t-t_j)^{m_j} + \int_{-1}^{1} K(t,s)\left[(s+1)^{p_1}(1-s)^{p_2}\right]^{-1} x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbf{N}$ $(j=\overline{1,l})$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$, K и y – известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, $x(t)$ – искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару.

Пусть $C\{m;0\}$ и $C\{p;1\}$ – пространства "точечно-гладких" функций, а $T: C\{m;0\} \to C$ и $S: C\{p;1\} \to C$ — соответственно "характеристические" операторы пространств $C\{m;0\}$ и $C\{p;1\}$ (см., напр., [1]). Образуем основное пространство $Y \equiv \{y \in C\{m;0\} | Ty \in C\{p;1\}\}$ на котором введем семейство X обобщенных функций вида $x(t) = z(t) + \sum_{i=0}^{m-1}\gamma_i\delta^{\{i\}}(t)$, где $t \in I \equiv [-1;1]$, $z \in C\{p;1\}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее "тейлоровские" производные (см.[2]).

Для простоты выкладок и формулировок считаем $l=1$, $t_1=0$, $p_1=0$, т.е. рассмотрим уравнение вида:

$$Ax \equiv t^m x(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)(1-s)^{-p}x(s)ds = y(t) \quad (t \in I), \tag{2}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}^+$; $y \in Y$, $K(t,s)$ – известная функция, удовлетворяющая условиям фредгольмовости оператора A [2], а $x \in X$ — искомая обобщенная функция.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде $x_n \equiv (1-t)^p\sum_{i=0}^{n-1}c_i\chi_i(t) + \sum_{i=0}^{\lambda}c_{i+n}(t-1)^i + \sum_{i=0}^{m-1}c_{i+\lambda+n+1}\delta^{\{i\}}(t)$, $(\lambda = [p]-(1+sign([p]-p)), n=3,4,\dots)$, где $\{\chi_i\}_0^{n-1}$ – система обычных фундаментальных сплайнов первого порядка по узлам $s_i \equiv -1+2i/(n-1)$ $(i=\overline{0,n-1})$. Неизвестные параметры $c_i = c_i^{(n)}$ $(i=\overline{0,n+m+\lambda})$ найдем, согласно нашему методу, из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k} (STAx_n - STy)(t)dt = 0 \ (k=\overline{0,n-1}),$$

$$
\begin{aligned}
&(TAx_n - Ty)^{\{j\}}(1) = 0 \ (j = \overline{0, \lambda}\ ), \qquad (3)\\
&(Ax_n - y)^{\{i\}}(0) = 0 \ (i = \overline{0, m-1}).
\end{aligned}
$$

Теорема. *Если* $\ker A = \{\theta\}$ *в* X *(напр., в условиях теоремы 3 [2]), то при всех* $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_0)$ *СЛАУ (3) имеет единственное решение* $\{c_i^*\}$ *и последовательность приближенных решений* $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ *сходится к точному решению* $x^* = A^{-1}y$ *по метрике пространства* X *со скоростью* $\|x_n^* - x^*\| =$

$$
= O\left\{\omega_t(h; n^{-1}) + \sum_{j=0}^{\lambda}\omega(\alpha_j; n^{-1}) + \sum_{i=0}^{m-1}\omega(\beta_i; n^{-1}) + \omega(STy; n^{-1})\right\},
$$

где $\omega(f; \Delta)$ *– модуль непрерывности функции* $f \in C$ *с шагом* Δ $(0 < \Delta \leqslant 2)$, $\omega_t(h; \Delta)$ *– частный модуль непрерывности функции* $h(t, s)$ *по переменной* t*; а непрерывные исходные данные* h, α_j, β_i *представлены в работе [2].*

При доказательстве теоремы существенно используются соответствующие результаты работ [1-4].

Литература

1. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. – 176 с.

2. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегрального уравнения третьего рода с фиксированными особенностями в ядре//Дифференц. уравнения, 2009. – Т.45, №9. – С. 1341–1348.

3. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

4. *Габбасов Н.С.* Оптимальный метод решения интегральных уравнений третьего рода//Докл. РАН, 1998. – Т.362, №1. – С. 12–15.

О ВЕТВЛЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Золотухина С.Ю., Колесникова И.В., Сапронов Ю.И.
(Воронеж)
swetlanka_88@list.ru, kolinna@inbox.ru, yusapr@mail.ru

Тема сообщения связана с задачей о бифуркации экстремалей фредгольмова функционала с круговой симметрией вблизи точки минимума с 6–мерным вырождением и особенностью 4–го порядка.

Представленные результаты получены на основе редукции (методом Ляпунова–Шмидта) к функции на $\mathbb{R}^3$, с использованием вторичных редукций и элементов теории особенностей гладких функций. Для выяснения взаимных примыканий экстремалей необходимо не только вычисление точек минимумов и седел, но и получение информации о структуре фазового портрета динамической системы $\dot{p} = -\operatorname{grad} V(p)$. Если известна ключевая функция W, то эта структура определяется фазовым портретом W (фазовым портретом градиентной динамической системы $\dot{\xi} = -\operatorname{grad} W(\xi)$).

Задача изучения ветвления экстремалей гладкого функционала V и соответствующей ключевой функции W (с параметрами) вблизи точки минимума, имеющей многомерное вырождение, представляют как теоретический интерес, так и прикладной. Эта задача тесно связана с проблемой многомодовых бифуркаций решений краевых задач, с изучением закритических прогибов упругих систем по нескольким модам, с многомодовыми фазовыми переходами в кристаллах, с нелинейными волновыми процессами и т.д. [1]–[3].

Литература

1. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3-140.

2. Колесникова И.В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка// Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ, 2009. Т.9, вып.2. С.25-30.

3. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Колесникова И.В. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка// Системы управления и информационные технологии. 2009. № 1(35). С. 72-76.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Зубова С.П. (Воронеж)

spzubova@mail.ru

Рассматривается полностью управляемая динамическая система

$$\dot{x} = A(t)x + D(t)u, \tag{1}$$

$x \in R^n$, $u \in R^k$; $A(t)$, $B(t)$ — матрицы соответствующих размеров, $t \in [0, \infty)$.

Система (1) называется полностью управляемой на $t \in [0, \infty)$, если она полностью управляема на [0,T], $\forall T > 0$.

Под воздействием программного управления u_{pr} система совершает программное движение x_{pr}.

Система (1) называется стабилизируемой, если существует управление u, при действии которого движение системы x, начинающееся в произвольной точке, стремится при $t \to \infty$ к x_{pr}. Управление u называется стабилизирующим управлением.

Управление называется экспоненциально стабилизирующим, если

$$||x - x_{pr}|| \leqslant e^{-\omega t}$$

для любого наперёд заданного $\omega > 0$.

В работах Тонкова Е.Л. и его учеников при определённых свойствах $A(t)$, $B(t)$ доказано, что полностью управляемая система является стабилизируемой.

При других свойствах $A(t)$ и $B(t)$ нами получена

Теорема. *Для полностью управляемой системы (1) существует экспоненциально стабилизирующее управление, под воздействием которого в контрольные моменты времени t_i значения x совпадают со значениями x_{pr}:*

$$x(t_i) = x_{pr}(t_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad \forall m \in N.$$

Даётся метод построения таких u и x.

ЯВЛЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Зубова С.П., Клочкова Е.В. (Воронеж)

spzubova@mail.ru, evgenia.klochkova@yandex.ru

Рассматривается система управления

$$\varepsilon \frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = Ax(t,\varepsilon) + Bu(t,\varepsilon) \tag{1}$$

на отрезке $[0, T]$ с условиями

$$x(0,\varepsilon) = x_0^{00}, x(T,\varepsilon) = x_1^{00}, \tag{2}$$

где $x(t,\varepsilon) \in \Re^n$, $u(t,\varepsilon) \in \Re^k$,
A, B - постоянные матрицы соответствующих размеров,
x_0^{00} и x_1^{00} - произвольно заданные элементы из $\Re^n$,
$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Наряду с уравнением (1), которое называется допредельным, рассматривается предельное уравнение

$$0 = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \tag{3}$$

с теми же условиями (2).

Решение $\bar{x}(t)$ уравнения (3) при любом $\bar{u}(t)$ не может удовлетворить условиям (2) в полном объеме, но может удовлетворить некоторой "части"этих условий.

Решение системы (1), ищется в виде $x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t) + v(t,\varepsilon)$, где $\bar{x}(t)$ - решение предельного уравнения (3), а $v(t,\varepsilon)$ - функция погранслоя вблизи точек $t = 0$ и $t = T$.

Как правило, при решении подобных задач, возникает условие для коэффициентов рассматриваемой системы, которое называют "условием регулярности вырождения "условием погранслоя". Обычно это ограничение на спектр некоторого оператора или на производную некоторой функции. Однако, можно построить управление $u(t,\varepsilon)$ для управляемой системы (1), под воздействием которого в системе наблюдается явление погранслоя без каких-либо условий на спектры матричных параметров.

Литература

1. Зубова С.П. Функции погранслоя. Явление погранслоя. М., 1991. Деп. в ВИНИТИ № 2517 - В91.

2. Зубова С. П., Раецкая Е. В., Лё Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления// АиТ. 2008. № 11. С.41–47.

О ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Зубова С.П., Раецкая Е.В., Фам Туан Кыонг (Воронеж)
raetskaya@inbox.ru

Рассматривается дифференциально алгебраическая нестационарная система наблюдения:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)x(t) + f(t) \tag{1}$$

$$B(t)x(t) = F(t), \tag{2}$$

где $B(t) : R^n \to R^m$, $A(t) : R^n \to R^n$, $t \in [0,T]$, T - конечно или бесконечно.

Система (1), (2) называется полностью наблюдаемой, если по заданным входной $f(t)$ и выходной $F(t)$ функциям единственным образом восстанавливается состояние системы $x(t)$ в каждый момент времени.

Переменной матрице $B(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ соответствуют разложения:

$$R^n = CoimB(t)\dot{+}KerB(t), R^m = ImB(t)\dot{+}CokerB(t)$$

с проекторами $P(t)$ и $Q(t)$ на подпространства $KerB(t)$ и $CokerB(t)$, соответственно.

Строится проектор $P(t)$ и формируется условие, при выполнении которого $dimKerB(t) = const$.

Методом каскадного расщепления производится поэтапный переход к системам, аналогичным исходной, но относительно функций из более узких подпространств.

В силу конечномерности исходного пространства за конечное число шагов выявляется полная наблюдаемость или ненаблюдаемость исходной системы.

Более того, в процесс расщепления выводятся формулы для построения функции состояния исходной системы (1), (2).

1. Раецкая Е. В. Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем. Дисс. канд.-физ.-мат. наук. Воронеж, 2004.

2. Зубова С. П., Раецкая Е. В. Об инвариантности состояния и выхода системы наблюдения относительно некоторых возмущений. Материалы весенней математической школы „Понтрягиские чтения - XIX", Воронеж, 2008, с. 95-96.

БЫСТРО УБЫВАЮЩЕЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КОНТРОЛЬНЫХ ТОЧЕК

Зубова С.П., Чан Тхань Туан (Воронеж)

tuanbg2007@mail.ru

Рассматривается полностью управляемая система

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t) + f(t) \tag{1}$$

с условиями

$$x(t_i) = a_i^0,\ i = \overline{0, m+1},\ m \in \mathbb{N},\ t_0 = 0,\ t_{m+1} = T. \qquad (2)$$

$$u^{(j)}(t_i) = b_i^j,\ j = \overline{0, r_i}, \qquad (3)$$

где $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n)$; $t, t_i \in [0, T]$, $f(t)$ - достаточно гладкая на $[0, \infty)$ вектор - функция, принадлежащая $\mathbb{R}^n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *При $Q_D f(t) = P_k(e^{-t})$ существует управление $u(t)$ системы (1), удовлетворяющее условиям (3), под воздействием которого состояние $x(t)$ удовлетворяет условиям (2) и является быстро убывающей при $t \to \infty$ функцией вида*

$$x(t) = \sum_{\xi=1}^{\widetilde{k}} c_\xi e^{-\xi t},\ c_\xi \in \mathbb{R}^n \qquad (4)$$

Здесь $\widetilde{k} = \max(\widetilde{r}, k)$, $\widetilde{r} = r + (m+2)(p+2)$, $r = \sum\limits_{i=0}^{m+1} r_i$, число $p \in \mathbb{N}$ - наименьшее из всех q, таких что $rank(D\ BD\ B^2D \cdots B^qD) = n$; Q_D - проектор на $\mathrm{Coker}D$.

Вектор-функция управления u(t) находится в виде многочлена вида (4), степень которого меньше или равна $\widetilde{k}$.

Литература

1. Зубова С.П., Раецкая Е. В., Ле Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // Автоматика и телемеханика. 2008. №11. С. 41-47.

2. Зубова С.П., Чан Тхань Туан. Построение быстро убывающего на беконечности решения линеной системы управления // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна. Воронеж. 2010. с. 67.

О ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

Зубова С.П., Чан Тхань Туан (Воронеж)

tuanbg2007@mail.ru

Рассматривается управляемость стационарной дискретной динамической системы, описываемой соотношением:

$$x(k+1) = Bx(k) + Du(k) \qquad (1)$$

с условиями

$$x(0) = a_0, \ x(N) = b_0, \tag{2}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ - дискретные сигналы (состояния) системы в соответствующих дискретных значениях времени,$u(k) \in \mathbb{R}^m$ - входные воздействия (управляющие воздействия), B,D - матрицы соответствующих размеров, $k = \overline{0, N-1}$.

Методом каскадного расщепления за p шагов ($p \leqslant N-1$) от системы (1) переходим к редуцированной системе в некотором подпространстве

$$x_p(k+1) = B_p x_p(k) + D_p u_p(k), \ k = \overline{p, N-1},$$

с условиями $x_p(p) = a_p, \ x_p(N) = b_p$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Система (1) полностью управляема в том и только в том случае, когда существует $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant N-1$, такое, что D_p сюръективен.*

Находятся все значения дискретных сигналов $x(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ и управляющих воздействий $u(k)$.

Литература

1. Зубова С.П., Раецкая Е. В., Ле Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // Автоматика и телемеханика. 2008. №11. С. 41-47.

2. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I международного конгресса международной федерации по автоматическому уравнению. Москва, 1960. С. 521-545.

3. Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. - М.: Наука, 1986 - 496 с.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ АЙДЕЛЬХАЙТА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ БЕЗ НЕПРЕРЫВНОЙ НОРМЫ

Иванова О.А., Мелихов С.Н. (Ростов-на-Дону)

neo_ivolga@mail.ru, melih@math.rsu.ru

Через ω обозначим пространство Фреше всех числовых последовательностей с топологией покоординатной сходимости. Для локального выпуклого пространства E символ E' обозначает топологическое сопряженное к E.

Последовательность $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, называется последовательностью Айдельхайта (в E'), если (линейное непрерывное) отображение

$$R : E \to \omega, \; x \mapsto (\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

сюръективно.

Исследование последовательностей Айдельхайта в пространствах Фреше начато в работе [1], в дальнейшем они изучались Pòlya, Макаровым, Cooke, Pittnauer, Zeller, Митягиным, Vogt и другими.

Если $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность Айдельхайта в E', то возникает естественный вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного к *сюръективному* оператору $R : E \to \omega$, то есть такого линейного непрерывного оператора $\Pi : \omega \to E$, что $R \circ \Pi(c) = c$ для любого $c \in \omega$.

Справедлива

Теорема 1. Пусть E — пространство Фреше. Последовательность Айдельхайта $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $R : E \to \omega$ имеет линейный непрерывный правый обратный, существует, тогда и только тогда, когда в E нет непрерывной нормы.

Литература

1. M.Eidelheit, Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, Studia Math. 6 (1936), S. 139–148.

КОНСТРУКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ[1]

Игнатьев М.Ю. (Саратов)

ignatievmu@info.sgu.ru

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ - спектр краевой задачи:

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(b - \pi) = y(b) = 0$$

с вещественным суммируемым потенциалом $q(x)$, $b \in (0, \pi/2)$ и пусть $\{\lambda_n\}_{n \in \Lambda}$ - подмножество спектра такое, что система функций $\{\sin \sqrt{\lambda_n} x\}_{n \in \Lambda}$ полна в $L_2(0, 2b)$. Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По заданным $\{\lambda_n\}_{n \in \Lambda}$ и значениям потенциала $q(x)$ на $[b - \pi, 0]$ восстановить потенциал $q(x)$ на всем $[b - \pi, b]$.

---

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00099).

В настоящей работе решение задачи 1 сводится к решению классической задачи восстановления потенциала по функции Вейля [1].

Определим $S(x,\lambda)$ как решение задачи Коши $\ell y = \lambda y$, $y(b-\pi) = 0, y'(b-\pi) = 1$. Пусть $c_1(x,\lambda) := \cos\sqrt{\lambda}x$, $c_0(x,\lambda) := \lambda^{-1/2}\sin\sqrt{\lambda}x$. Рассмотрим функции $\varphi_n(t) := S(0,\lambda_n)\,c_1(t,\lambda_n) + S'(0,\lambda_n)\,c_0(t,\lambda_n)$. Заметим, что функции $\varphi_n(t), n \in \Lambda$ полностью определяются входными данными задачи 1.

Определим решение Вейля [1] $\Phi(x,\lambda)$ на отрезке $[0,b]$ как решение краевой задачи $\ell y = \lambda y$, $y(b) = 0$, $y(0) = 1$ и функцию Вейля $M(\lambda) := \Phi'(0,\lambda)$. Основной результат работы - следующая теорема, которая показывает, как восстановить $M(\lambda)$ по входным данным задачи 1.

Теорема 1. *Существует единственная функция $f(t) \in L_2[-b,b]$ такая, что $\int\limits_{-b}^{b} f(t)\varphi_n(t)dt + \varphi_n(b) = 0, n \in \Lambda$. Пусть $d_\nu(\lambda) := c_\nu(b,\lambda) + \int\limits_{-b}^{b} f(t)c_\nu(t,\lambda)dt$, $\nu = 0,1$. Тогда $M(\lambda) = -d_1(\lambda)/d_0(\lambda)$.*

Литература

1. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* - М.: Физматлит, 2007.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА СЕМЕЙСТВУ Γ_α *[1]

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

В пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, где $H_\pm = P_\pm H$, рассматривается множество "горизонтальных конусов"

N_λ, заданных формулами:

$$N_\lambda = \{x \in H | \quad \|P_-x\|^2 \leqslant \lambda \cdot \|P_+x\|^2\}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Ранее было доказано, что условие $D_A \subset N_\lambda$ для некоторого $\lambda \geqslant 0$ влечет за собой существование оператора

$$B = (P_- + P_+A)(P_+ + P_-A)^{-1}.$$

Теорема. Пусть A - линейный оператор, действующий в пространстве Крейна H, и при этом выполнены условия:

1) $D_A \subset N_\lambda$ для некоторого $\lambda \geqslant 0$.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 08-01-00566-а

2) Оператор P_+A ограничен.
Тогда:
1) Оператор B ограничен.
2) Имеют место следующие оценки:

$$||P_-B|| \leqslant \sqrt{\lambda}, \quad ||P_+B|| \leqslant ||P_+A|| \cdot \sqrt{\lambda+1},$$

$$||B|| \leqslant \sqrt{\lambda + ||P_+A||^2 \cdot (\lambda+1)}.$$

3)$A \in \Gamma_\alpha$, где $\alpha = \lambda + ||P_+A||^2 \cdot (\lambda+1)$.
Напомним, что последнее условие означает наличие неравенства

$$[Ax, Ax] - [x, x] \leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \cdot \{||Ax||^2 + ||x||^2\} \quad \forall x \in D_A.$$

ОПЕРАТОРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВИРТИНГЕРА И НОРТКОТТА

Исламов Г.Г. (Ижевск)
ggislamov@udm.net

Для произвольной $2\pi-$ периодической гладкой вектор-функции $y : R = (-\infty, \infty) \to R^n$ со старшей производной $y^{(m)}(t)$ и нулевым средним на периоде и значений $z(t)$ операторов с периодическими по t матричными функциями и ядрами $z(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(t) y(h_k(t))$,

$$z(t) = \int\limits_0^{2\pi} d_s F(t,s) y(s), \quad z(t) = \int\limits_{-2\pi}^{0} d_s G(t,s) y(t+s)$$

получены аналоги неравенств Виртингера и Норткотта [1]:

$$\|z\|_{L_2[0,2\pi]} \leqslant \alpha_m \|y^{(m)}\|_{L_2[0,2\pi]}, \quad \|z\|_{C[0,2\pi]} \leqslant \beta_m \|y^{(m)}\|_{C[0,2\pi]}$$

на основе следующего интегрального представления. Пусть

$$K_0(t,s) = h(t-s) - \frac{1}{2\pi}(2\pi - s), \quad h(\tau) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \tau > 0, \\ 1/2, & \textit{при } \tau = 0, \\ 0, & \textit{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Если построить рекурсивно по правилу

$$\varphi_{k+1}(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} K_0(\tau, s)\varphi_k(s)\,ds, \tau \in [0, 2\pi)$$

последовательность функций $\varphi_k(\tau), k = 1, 2, \ldots$, где

$$\varphi_1(\tau) = h(\tau) - \frac{\tau + \pi}{2\pi}, \tau \in \ [0, 2\pi),$$

и эти функции периодически распространить на всю числовую прямую R, то получим интегральное представление гладких 2π- периодических функций с нулевым средним на периоде

$$y(t) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi_m(t - s) y^{(m)}(s)\,ds,$$

которое используется для получения операторных обобщений указанных неравенств.

Литература

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965. — 276 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИОНОСФЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН

Ишанов С.А. (Калининград)

math@dekan.albertina.ru

Представим модели E, D и F-областей ионосферы и модель распространения электромагнитной волны [1]. Первая рассчитывает пространственно-временное распределение компонентов: N_2, O, O_2, O_3, $O(^1D)$, $O(^1S)$, $O_2(^1\Delta_g)$, H, H_2, OH, H_2O, H_2O_2, $H(^4S)$, $H(^2D)$, NO, NO_2, CO, CO_2, O^+, O_2^+, NO^+, O_4^+, N^+, N_2^+, N_e, Y^+, Y^-, где Y^+ — суммарная концентрация положительных ионов, Y^- — отрицательных. Применим эти расчеты при распространении радиоволн. Система (1)–(8) и численные методы ее решения описаны в [1–3]. Уравнения непрерывности ионов и нейтралов:

$$\frac{\partial n_l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_l \frac{\partial n_l}{\partial z} + \overline{D}_l n_l\right) - L_l n_l + P_l, \quad l = j, k, \qquad (1-2)$$

где коэффициенты диффузии D_j – ионов, $D_k = D_{kM} + D_T$; D_{kM} – k-го компонента, D_T – турбулентной. Суммарные концентрации положительных и отрицательных ионов-связок и электронов

$$\frac{d[Y^\pm]}{dt} = P^\pm - \alpha[Y^\pm], \quad \frac{dN_e}{dt} = P_e - \alpha_{\text{эф}} N_e, \tag{3 – 4}$$

с квазинейтральностью $[N_e] + Y^- = [Y^+] + \sum\limits_{i=1}^{6}[N_i]$, где $\sum\limits_{i=1}^{6}[N_i]$ – суммарная концентрация положительных ионов.

Использованные фотохимические схемы приведены в [1–2].

Для расчета высотно-временного распределения концентрации O^+, H^+ вдоль магнитной силовой линии Земли использовались уравнения [3] соответственно непрерывности, движения и энергии, записанных в системе координат вдоль магнитной силовой линии:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + B\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{B}n_i V_i\right) = F_i - \alpha_i n_i, \tag{5}$$

$$n_i m_i\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i\frac{\partial V_i}{\partial s}\right) + \frac{\partial P_i}{\partial s} = -n_i m_i g \sin I +$$

$$+ n_i \sum_j S_{ij}(V_j - V_i) + n_i R_i (V_{nx}\cos I - V_i) - \frac{n_i}{N_e}\frac{\partial P_e}{\partial s}, \tag{6}$$

$$\frac{3}{2}kN_e\frac{\partial T_e}{\partial t} = B\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{B}\lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial s}\right) +$$

$$+ \sum_i \frac{3m_e N_e}{m_i}\nu_{ei}k(T_i - T_e) + Q_e - L_{en}, \tag{7}$$

$$\frac{3}{2}kN_i\frac{\partial T_i}{\partial t} = B\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{B}\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial s}\right) + 3n_i\nu_{ie}k(T_e - T_i) +$$

$$+ \sum_n \frac{3m_i n_i}{m_i + m_n}\nu_{in}k(T_n - T_i) + Q_i - L_i. \tag{8}$$

Геометрическая оптика [4] сводит уравнение взаимодействия радиоволны с ионосферой к уравнениям для фазы (эйконала) и амплитуды (перенос) поля. Характеристическая система [5]:

$$\frac{d\bar{x}}{d(ct)} = \frac{c}{\omega}\bar{k}, \quad \frac{d\bar{k}}{d(ct)} = \frac{2\pi e^2}{m_e\omega^2 c}\nabla N_e, \quad \frac{d\varphi}{d(ct)} = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{4\pi e^2}{m_e\omega^2 N_e}\right), \tag{9}$$

где $\bar{k}$ — волновой вектор, $\bar{x}$ — текущая точка траектории, ω — угловая частота, φ — фаза. Для численного решения (9) и определения траектории луча выбираем оптимальное приближение N_e и ее градиентов N_r, N_φ, N_θ, например, с помощью математической модели.

В [3] разработаны основные требования к теоретическим моделям ионосферы: характерные размеры ионосферных неоднородностей по высоте L_h, долготе L_φ и широте должны быть больше соответствующих межузловых расстояний: $L_h \gg \Delta h$, $L_\varphi \gg \Delta_\varphi$, а шаг интегрирования характеристической системы $S \ll L_h, L_\varphi$.

Моделирование ионосферы успешно используются в задачах распространения радиоволн. Для более точного расчета учитывают поглощения этих сигналов на нижележащих слоях (D и E областях).

Литература

1. *Ишанов С. А., Медведев В. В., Залесская В. А.* // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 4. С.3–7.

2. *Ишанов С. А., Латышев К. С, Медведев В. В.* // Модели в природопользовании. Калининград, 1989. С. 55–71.

3. *Власов М. Н., Григорьев С. А., Ишанов С. А., Латышев К. С.* // Космические исследования. 1991. Т. 29. № 3. С. 404–413.

4. *Яковлев О. И., Якубов В. П., Урядов В. П., Павельев А. Г.* Распространение радиоволн. М.: URSS, 2009.

5. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.

МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ишанов С.А., Клевцур С.В. (Калининград)

math@dekan.albertina.ru

Задача математического моделирования структуры, динамики и теплового режима ионосферной плазмы в несогласованном виде, т. е. когда информация о параметрах верхней нейтральной атмосферы задается из независимых источников (в виде некоторых эмпирических или полуэмпирических моделей), сводится к интегрированию для каждой ионизированной компоненты соответствующей системы уравнений непрерывности, движения и теплового баланса. Возьмем, например, уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \mathrm{div}(N_i\vec{v}_i) = Q_i - L_i\dot{N}_i, \qquad (1)$$

где N_i и $\vec{v}_i$ — концентрация и скорость движения частиц сорта i, Q_i и L_i — скорость образования и коэффициент рекомбинации.

Уравнения типа (1) изучались как аналитическими, так и численными методами. При этом обычно рассматривали диффузионное приближение, когда в уравнениях движения пренебрегали инерционными членами и подставляли компоненты $\vec{v}_i$ в дивергентный член уравнения. В итоге имели уравнение параболического типа со смешанными производными, не позволяющими свести трехмерную задачу к цепочке одномерных, а первые производные дивергентного вида затрудняли построение монотонных разностных схем.

Следуя [1], строим для трехмерного уравнения диффузии аддитивные разностные схемы с суммарной аппроксимацией. Способ сведения трехмерной задачи к последовательности двумерных рассмотрим на примере уравнения диффузии (1), записанного в дивергентной форме в сферической системе координат в шаровом слое:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial t} = {} & \frac{\partial}{\partial r}\left(P_{rr}\frac{\partial N_i}{\partial r} + P_{r\Theta}\frac{\partial N_i}{\partial \Theta} + P_{r\lambda}\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} + P_r N_i\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(P_{\Theta\Theta}\frac{\partial N_i}{\partial \Theta} + P_{\Theta r}\frac{\partial N_i}{\partial r} + P_{\Theta\lambda}\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} + P_\Theta N_i\right) + \qquad (2) \\ & + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(P_{\lambda\lambda}\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} + P_{\lambda r}\frac{\partial N_i}{\partial r} + P_{\lambda\Theta}\frac{\partial N_i}{\partial \Theta} + P_\lambda N_i\right) - L_i N_i + Q, \end{aligned}$$

где t — время, r — координата вдоль радиуса вектора, Θ — коширота, λ — долгота, $P_{rr}, \ldots, P_{\lambda\Theta}$ — коэффициенты дифференциального оператора, относящиеся к иону сорта i (в данном случае ионы O^+), выражение для которых приведены в работе [2].

Ищем решение $N(t, r, \Theta, \lambda)$ уравнения (2) в области G с границей Γ (параллелепипеде), заданную неравенствами $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$, $\Theta_0 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_1, \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$. Дополним уравнение (2) начальными условиями ($t = 0$) $N(0, r, \Theta, \lambda) = \psi(r, \Theta, \lambda)$ и граничными условиями первого рода $N(t, r, \Theta, \lambda)|_\Gamma = \mu(t, r, \Theta, \lambda)$ при $(r, \Theta, \lambda) \in \Gamma$.

Задача решалась с использованием схем конечно-разностной аппроксимации.

Одним из наиболее эффективных способов решения системы разностных уравнений является итерационный $\alpha - \beta$-алгоритм [3], который представляет собой двумерный вариант метода прогонки по двум пространственным координатам.

Этот алгоритм протестирован контрольных уравнениях, имеющих аналитическое решение. На основе трехмерных математических моделей ионосферной плазмы в шаровом слое, в состав которых входил данный алгоритм, рассчитаны реальные геофизические ситуации [3]. В частности, проведена оценка роли смешанных производных в уравнениях диффузии. Показано, что их неучет может привести к 15% отклонению в электроной концентрации F2-слоя ионосферы на средних широтах в околополуночные часы.

Полученные результаты говорят, что при многомерном моделировании ионосферы необходимо сохранить смешанные производные по пространственным переменным в уравнениях диффузии ионов. Их влияние еще более значительно при моделировании ионосферных возмущений.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

2. *Фаткуллин М. Н., Клевцур С. В., Латышев К. С.* Оператор переноса в уравнениях непрерывности для ионов в трехмерно неоднородной области F // Геомагнетизм и аэрономия. 1984. № 24. № 6. С. 906–910.

3. *Ишанов С. А., Клевцур С. В., Латышев К. С.* Алгоритм итераций в задачах моделирования ионосферной плазмы // Математическое моделирование. 2009. 21. № 1. С. 33–45.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ $au_{xx} + bu_{xt} = shu$

Ищенко В.М. (Ставрополь)

ishchenko_vm@mail.ru

Нелинейное уравнение с частными производными

$$au_{xx} + bu_{xt} = shu, \tag{1}$$

где a, b - постоянные, $u(x,t)$ - функция, является частным случаем уравнения $\left(\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\right) \ln g = \beta_1 q - \beta_2 \frac{1}{q}$, вывод которого предложен в [1]. Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - постоянные, $q(x,t)$ - функция.

Теорема. Уравнению (1) соответствует операторное представление Лакса $L_t = [L, A] = LA - AL$ [2], с матричными операторами вида

$$L = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u} \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) u & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) u \end{pmatrix}.$$

Доказательство осуществляется с помощью непосредственной подстановки.

Уравнение (1) имеет решение, записанное в виде эллиптического интеграла. Пусть $z = x + \alpha t$, где α - некоторая постоянная. Тогда уравнение (1) обращается в $(a+\alpha b)u_{zz} = shu$, которое при $u_z = p(z)$, переходит в $(a+\alpha b)p_z p = shu$. Дважды интегрируя последнее равенство, получим $z = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{(a+\alpha b)}chu+C}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{(a+\alpha b)}+C}} F(\varphi, k)$, где C - постоянная интегрирования, $F(\varphi, k)$ - эллиптический интеграл первого рода, $\varphi = arcsin\sqrt{\frac{\frac{2}{(a+\alpha b)}chu - C}{\frac{2}{(a+\alpha b)}(chu-1)}}$, $k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$.

Литература

1.Ищенко В.М. Получение уравнений с частными производными обладающих операторной структурой Лакса. Ставроп. гос. ун-т. - Ставрополь, 2005. - 18 с. - Библиогр.: 2 назв. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 07.07.2005 № 957-В2005.

2.Лакс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. - Математика, 13:5, С. 128-150. - М.: Мир, 1969.

ОБ ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ БАРБАШИНА

Калитвин А.С. (Липецк)

kalitvin@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = a(t,s)x(t,s) + \int\limits_G k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s), \qquad (1)$$

где $(t,s) \in J \times G = D$ (J — конечный или бесконечный промежуток числовой оси R, измеримое множество $G \subset R$ и неограничено или $G \subset R^2$), $a(t,s), k(t,s,\sigma)$, $f(t,s)$ — заданные измеримые на $D, D\times G, D$ соответственно функции, а интеграл понимается в смысле Лебега. Уравнение (1) с начальным условием $x(t_0,s) = \varphi(s)$ сводится к задаче Коши в банаховом пространстве X :

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(t_0) = \varphi(s), \tag{2}$$

где $x(t) := x(t,s)$, $f(t) := f(t,s)$ — вектор-функции со значениями в X, $x'(t)$ — производная Фреше и $A(t)y(s) := a(t,s)y(s) + \int_G k(t,s,\sigma)y(\sigma)d\sigma$. При $G = [c,d]$ и $X = C(G)$ или $X = L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ решение уравнения (2) в классическом смысле является решением уравнения (1) [1]. При множестве $G \subseteq R^2$ и при неограниченном G из R уравнения (1) и (2) изучены недостаточно.

Теорема. *Если измеримые на D и $D\times G$ соответственно функции $a(t,s)$ и $k(t,s,\sigma)$ удовлетворяют условиям: а) для любого $t \in J$ функция $a(t,\cdot) \in L^\infty(G)$, причем при $p < \infty$ функция $t \to a(t,\cdot)$ ограничена из J в $L^\infty(G)$ и непрерывна из J в $L^1(G)$, а при $p = \infty$ непрерывна из J в $L^\infty(G)$; б) для любого $t \in J$ функция $k(t,\cdot,\cdot)$ определяет ядро регулярного интегрального оператора, а функция $t \to k(t,\cdot,\cdot)$ ограничена из J в пространство Заанена ядер регулярных интегральных операторов [1]; в) при $p < \infty$ функция $t \to \int_c^\alpha k(t,\cdot,\sigma)d\sigma$ непрерывна из J в $L^p(G)$ для каждого $\alpha \in R$, а при $p = \infty$ функция $t \to \int_H k(t,\cdot,\sigma)d\sigma$ непрерывна из J в $L^\infty(G)$ для каждого $H \subseteq G$, то для любого $\varphi \in X$ задача (2) имеет в $X = L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ единственное решение, а уравнение (1) с начальным условием $x(t_0,s) = \varphi(s)$ разрешимо однозначно.*

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

О НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА БАРБАШИНА

Калитвин В.А. (Липецк)

kalitvin@gmail.com

Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} - \int\limits_G m(t,s,\sigma)\frac{\partial x(t,\sigma)}{\partial t}d\sigma = c(t,s)x(t,s) + \int\limits_G k(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma$$

$$+f(t,s), x(0,s) = \varphi(s), \tag{1}$$

где G — отрезок $[0,b]$ или прямоугольник $[0,b] \times [0,d]$, $t \in [0,a]$, $s \in G$, $c(t,s)$, $m(t,s,\sigma,u)$ и $k(t,s,\sigma,u)$, $g(t,s)$, $\varphi(s)$ — заданные на $D = [0,a] \times G$, $D \times G \times (-\infty,+\infty)$, D, G соответственно непрерывные функции, причем $k(t,s,\sigma,u)$ удовлетворяет условию Липшица: $|k(t,s,\sigma,u) - k(t,s,\sigma,v)| \leqslant N|u-v|, N = const$. Решением задачи считается непрерывная вместе со своей частной производной по t функция $x(t,s)$, удовлетворяющая интегро -дифференциальному уравнению (1) и заданному начальному условию.

Пусть оператор $(I - M)u(t,s) = u(t,s) - \int_G m(t,s,\sigma)u(t,\sigma)d\sigma$ обратим в $C(D)$. Тогда справедливо равенство $(I - M)^{-1}u(t,s) = u(t,s) + \int_G r(t,s,\sigma)u(t,\sigma)d\sigma$, где $r(t,s,\sigma)$ — некоторая непрерывная на $D \times G$ функция [1]. Применяя оператор $(I - M)^{-1}$ к обеим частям уравнения (1) и учитывая теорему Фубини, получим $\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_G a(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + h(t,s)$, $x(0,s) = \varphi(s)$, где $a(t,s,\sigma,u) = k(t,s,\sigma,u) + c(t,\sigma)r(t,s,\sigma)u + \int_G r(t,s,v)k(t,v,\sigma,u)dv$ и $h(t,s) = f(t,s) + \int_G r(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma$ — непрерывные функции, причем функция $a(t,s,\sigma,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u.

Последняя задача разрешима однозначно [1], ее приближенное решение строится численно по схемам из [2] с применением Mathcad и Scilab, а $r(t,s,\sigma)$ находится эффективно для вырожденных и других ядер $m(t,s,\sigma)$.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин В.А. О применении пакетов Mathcad и Scilab к численному решению интегро-дифференциальных уравнений Барбашина// Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. — Минск, 2009. — С. 77-78.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

Каменский М.И., Кутищев И.Н., Рачинский Е.В.

(Воронеж)
mikhailkamenski@mail.ru, iliakou@rambler.ru, RachinskyEV@mail.ru

В данной работе мы покажем как, используя, некоторые правила, имитирующие поведение игроков на рынке, имеющем стохастическую структуру, построить модель колебательного режима цены и объемов продаж. Опишем эту модель более подробно.

Предположим у нас есть два ящика (под ящиком мы понимаем некоторое абстрактное пространство). Один ящик мы назовем (+), другой (−). В этих ящиках находятся частицы (единичные элементы). Их количество в ящиках соответсвенно N_+ и N_-. Общее количество частиц в двух ящиках $N = N_+ + N_-$. Тогда применим к этим частицам некоторые действия, которые описаны следующими правилами:

1) Правило "Мутации": выбирается произвольно одна частица из N и перемещается с вероятностью r или не перемещается с вероятностью $1 - r$ в противоположный ящик. ($0 \leqslant r \leqslant 1$).

2) Правило "Структуры": предположим, что у нас есть некоторая произвольная переменная, назовем ее S и параметр c ($0 < c < N$). Произвольно выбирается 3 частицы из N. Если 2 частицы были взяты из ящика (+) и 1 из ящика (−), то 1 частицу из ящика (−) перемещаем в ящик (+). При этом значение $S \cdot c$ увеличивается на 1. Если 2 частицы были взяты из ящика (−) и 1 из ящика (+), то 1 частицу из ящика (+) перемещаем в ящик (−). При этом значение $S \cdot c$ уменьшается на 1. Если 3 частицы были взяты из ящика (+), то с частицами ничего не происходит, а значение $S \cdot c$ увеличивается на 3. Если 3 частицы были взяты из ящика (−), то с частицами ничего не происходит, а значение $S \cdot c$ уменьшается на 3.

3) Правило "Реакции": мы изменяем количество частиц N_+ в ящике (+) (такие же действия могут быть применены к частицам N_- из ящика (−)) с вероятностью, которая пропорциональна переменной S, т.е. если S положительное число, то количество N_+ уменьшается на 1 с вероятностью $\frac{S}{N}$, если S отрицательное, количество N_+ увеличивается на 1 с вероятностью $-\frac{S}{N}$.

Представим себе, что каждая частица, находящаяся в ящике (+) это позиция покупателя (игрока на повышение), а каждая частица в ящике (−) представляет собой позицию продавца (игрока на понижение). Пусть переменная S характеризует цену, а c величину пакета ценных бумаг. Правило 1) моделирует позицию каждого игрока на бирже, а правило 2) изменение этой позиции. Правило 3) моделирует изменение цены в зависимости от объемов продаж или покупки.

Представим N_+, и S как функцию времени t с шагом 1. Подсчитаем математическое ожидание приращений $N_{+(t)}$ и $S_{(t)}$ в соответствии с правилами 1)-3), тогда

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{N_{+(t+1)}-N_{+(t)}}{N}\right] &= r\left\{-\frac{N_{+(t)}}{N}+\frac{N_{-(t)}}{N}\right\}+\\
&+3\frac{c}{N}\cdot\frac{N_{+(t)}\left(N_{+(t)}-1\right)N_{-(t)}}{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)}-\\
&-3\frac{c}{N}\cdot\frac{N_{+(t)}\left(N_{-(t)}-1\right)N_{-(t)}}{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)}-\lambda\frac{S_{(t)}}{N},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{S_{(t+1)}-S_{(t)}}{N}\right] &= 3\frac{c}{N}\cdot\frac{N_{+(t)}\left(N_{+(t)}-1\right)\left(N_{+(t)}-2\right)}{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)}+\\
&+3\frac{c}{N}\cdot\frac{N_{+(t)}\left(N_{+(t)}-1\right)N_{-(t)}}{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)}-\\
&-3\frac{c}{N}\cdot\frac{N_{-(t)}\left(N_{-(t)}-1\right)\left(N_{-(t)}-2\right)}{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)}-\\
&-3\frac{c}{N}\cdot\frac{N_{+(t)}\left(N_{-(t)}-1\right)N_{-(t)}}{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где λ параметр, который мы вводим для удобства. Пусть теперь t непрерывная переменная, тогда полагая:

$$
E\left[\frac{N_{+(t)}-\frac{N}{2}}{N}\right]=x\left(t\right)\ \text{и}\ E\left[\frac{S_{(t)}}{N}\right]=\nu\left(t\right)
$$

и, считая, что $x'(t)$ аппроксимирует $E\left[\frac{N_{+(t+1)}-N_{+(t)}}{N}\right]$, положив, $\frac{c}{N}=k$ (в рыночной интерпритации k - это часть пакета ценных бумаг $0<k<1$), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{d}{dt}x=-2rx+6kx\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)-\lambda\nu\\
\frac{d}{dt}\nu=3\left(\frac{1}{2}+x\right)^3+3\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\left(\frac{1}{2}-x\right)-\\
-3\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-3\left(\frac{1}{2}-x\right)^3=6kx,
\end{array}
\right.
\tag{3}
$$

где $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

Из (3) легко получить уравнение Ван дер Поля:

$$\frac{d^2}{dt^2}x - 6k(\frac{3-4r}{12} - 3x^2)\frac{d}{dt}x + 6\lambda kx = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет при определенных параметрах k и r устойчивые периодические циклы, см. [2, 3]. Подобного типа модель с другими правилами «игры на бирже» была рассмотрина в [1].

Литература

1.] Takahashi H. , Itox Y.,*Majority Orienting Model for the Oscillation of Market Price*, (Tokyo, Japan,2004).

[2.] А.Ф.Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, 1984, стр. 198-214.

[3.] О.Блакьер, *Анализ нелинейных систем*, Мир, 1966, стр. 102-114.

[4.] Cont, R. and Bouchaud, J.P. *Macroeconomic Dynamics*, 2000,стр. 170-196.

ПРОЕКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ И УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА РУМЬЕ

Капитонова Е.В., Мелихов С.Н. (Ростов-на-Дону)

melih@math.rsu.ru

Пусть Ω – локально замкнутое выпуклое открытое подмножество R^N (класс таких множеств Ω включает в себя все выпуклые компактные и выпуклые открытые подмножества R^N); $(K_n)_{n\in N}$ – фундаментальная последовательность (выпуклых) компактов в Ω; ω – некоторая весовая функция, как в [1]; H_n – опорная функция компакта K_n, $n \in N$.

Пусть $w_{nk}(z) := \exp\left(-H_n(\mathrm{Im}z) - \frac{1}{k}\omega(z)\right), \quad z \in C^N, \quad n,k \in N$. Введем весовые пространства целых функций

$$H_{nk}(C^N) := \{f \in H(C^N)| \ \ \|f\|_{nk} := \sup_{z\in C^N} |f(z)|w_{nk}(z) < +\infty\},$$

$$n,k \in N; WH(C^N) := \mathrm{ind}_n \mathrm{proj}_k H_{nk}(C^N).$$

Пространство $WH(C^N)$ топологически изоморфно (посредством преобразования Фурье-Лапласа) сильному сопряженному к пространству ультрадифференцируемых на Ω функций типа Румье, определяемому ω. Ассоциированное с (w_{nk}) семейство весов $\overline{W}$ состоит из всех полунепрерывных сверху функций $\overline{w} : C^N \to [0, +\infty)$ таких, что для любого n существуют $\alpha_n > 0$ и $k = k(n)$, для которых $\overline{w} \leqslant \alpha_n w_{nk}$ на C^N. Проективная оболочка индуктивного предела $WH(C^N)$ определяется следующим образом:

$$H\overline{W}(C^N) := \{f \in H(C^N) | \ \|f\|_{\overline{w}} := \sup_{z \in C^N} |f(z)|\overline{w}(z) < +\infty$$

$$\text{для любого } \ \overline{w} \in \overline{W}\}.$$

Топология $H\overline{W}(C^N)$ задается семейством преднорм $\| \cdot \|_{\overline{w}}$, $\overline{w} \in \overline{W}$. Пространство $WH(C^N)$ непрерывно вложено в $H\overline{W}(C^N)$.

Теорема. *Индуктивная топология в пространстве $WH(C^N)$ строго сильнее проективной топологии в нем, индуцированной из $H\overline{W}(C^N)$.*

Аналогичный результат ранее был получен в случае, когда Ω – выпуклое открытое подмножество R^N (см. [2]).

Литература

[1] R. W. Braun, R. Meise, and B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, Result. Math. 17 (1990), 206-237.

[2] J. Bonet, R. Meise, Ultradistributions of Roumieu type and projective descriptions. J. Math. Anal. Appl. 255 (2001), 122-136.

ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧЕ

Карелин В.В. (Санкт-Петербург)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

Выберем на отрезке $[0, T]$ k точек $t_i (i \in [1, k])$, и пусть $x(t_i), x^{(')}(t_i), ..., x^{(n-1)}(t_i), i = l, 2, ..., k$ значения функции x(t)и ее производных в указанных точках. Образуем уравнение, связывающие эти величины:

$$\Phi(x(t_1), x^{(')}(t_1), ..., x^{(n-1)}(t_1), ..., x(t_k), x^{(')}(t_k), ..., x^{(n-1)}(t_k)) = \eta \tag{2}$$

и поставим задачу: найти на отрезке $[0, T]$ решение $x(t)$ уравнения (1), которое удовлетворяло бы n условию (2). Запишем функционал

$$I = (\Phi(x(t_1), x^{(')}(t_1), ..., x^{(n-1)}(t_k)) - \eta)^2.$$

Введем множество $\Omega := \{[z, x_0] \mid z \in C[0,T], : \varphi(z, x_0) = 0\}$, где

$$\varphi(z, x_0) = \left[\int_0^T \left(z(t) - f(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, x_0, t) \right)^2 dt \right]^{1/2}.$$

Если $z, x_0 \in \Omega$, то функция $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau$ удовлетворяет системе (1), и наоборот. Отсюда получаем что, задача решения системы (1) для некоторого $x_0 \in R^n$ эквивалентна нахождению $z \in P[0,T]$ такого, что $\varphi(z, x_0) = 0$.

Следуя работе [1] можно доказать утверждение.

Теорема. Если φ липщицева на $C[0,T] \times R^n$ тогда найдется $\lambda_0 \geqslant 0$ такая, что для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ множество минимумов функции φ на множестве $\Omega = \{[z, x_0] | \varphi(z, x_0) = 0\}$ совпадает с множеством минимумов функции $\psi_\lambda(z, x_0) = I(z, x_0) + \lambda\varphi(z, x_0)$ на всем множестве $C[0,T] \times R^n$.

Таким образом многоточечную задачу удалось свести к задаче оптимизации без ограничений, для которой найдены условия оптимальности.

Литература

[1] *Demyanov V. F., Giannessi F., Karelin V. V.* Optimal control problems via Exact Penalty Function // 1998. J. of Global Optimiz. Vol. 12, No 3. - P. 215 - 223.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Карюк А.И., Редькина Т.В. (Ставрополь)
karyuk@mail.ru

Как известно, уравнение трехволнового взаимодействия связано с задачей рассеяния для оператора третьего порядка [1].

Теорема 1. Уравнение в частных производных

$$u_{tt} + ABu_{xxxx} + \left(BC - \frac{4A}{3}\gamma\right) u_x u_{xx} + (A+B)u_{xxt} - \frac{4}{3}\gamma u_x u_t - \\ -\frac{4}{3}\gamma\varphi(t)u_x + \varphi'(t) = 0,$$

где $u_x(x,t) = n_{31}$, γ, A, B, C-const, φ - произвольная функция имеет операторную структуру Лакса.

Доказательство. Имеет место матричная система

$$v_x = i\xi Dv + Nv, \qquad v_t = Qv, \tag{1}$$

где ξ-параметр, v-вектор-столбец третьего порядка, матрицы D, N, Q - размера 3×3, причем D - постоянная диагональная матрица, а матрица N такая, что

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n_{21} & 0 & kn_{31} \\ n_{31} & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

здесь $n_{21} = \frac{1}{B}(u_t + Au_{xx} + \varphi(t))$ (k-некоторый мнимый параметр).

Данная система равносильна матричному уравнению

$$N_t + i\xi[D, Q] + [N, Q] = Q_x. \tag{2}$$

Рассматривая случай, когда матрица Q имеет разложение до второго порядка по степеням ξ, получаем матричное уравнение, которое сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных на функции $n_{ij}(x,t)$. В результате некоторых преобразований и замены функции $n_{31} = u_x(x,t)$ полученная система приводится к одному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$u_{tt} + ABu_{xxxx} + \left(BC - \frac{4A}{3}\gamma\right) u_x u_{xx} + (A+B)u_{xxt} - \frac{4}{3}\gamma u_x u_t - \\ -\frac{4}{3}\gamma\varphi(t)u_x + \varphi'(t) = 0,$$

где $A = \frac{\gamma}{2k-1}$, $B = \frac{(1-2k)k^2+k-2}{(1+k)(1-2k)k}\gamma$, $C = \frac{2}{3}k\left(\frac{5k-4}{2k-1} + \frac{1}{k}\right)\gamma$.

Литература

[1] Абловиц М., Сигур. Х. *Солитоны и метод обратной задачи*: пер. с англ. - М.:Мир, 1987/ - 479 с.

УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ РЕГИОНАЛЬНОГО ТОПЛИВООБЕСПЕЧЕНИЯ

Кетова К.В., Трушкова Е.В. (Ижевск)

e.v.trushkova@gmail.ru

На протяжении последних 25-ти лет экономики ведущих стран мира активно внедряют ресурсосберегающие технологии, учитывающие принципы экологической безопасности. Разрабатываются новые эффективные технологии получения топливно-энергетических ресурсов (ТЭР) из древесных отходов (ДО). Разработанная на региональном уровне концепция развития топливно-энергетического комплекса для Удмуртской Республики обусловила необходимость решения задачи математического управления региональной системой теплоснабжения.

Начальными данными для решения задачи является информация о местах расположения предприятий лесозаготовки и деревопереработки, а также информация о населенных пунктах с теплоисточниками. Суть решения логистической задачи заключается в определении оптимальных мест расположения пунктов переработки ДО и пунктов подготовки ТЭР с точки зрения минимизации транспортных расходов.

Общий алгоритм решения динамической задачи логистики топливообеспечения состоит из пяти этапов: 1) решение задачи маршрутизации; 2) решение задачи кластеризации; 3) решение задачи оптимального распределения ресурсов на районном уровне; 4) решение динамической задачи управление запасами на складе теплоисточника и пункта подготовки ТЭР; 5) решение задачи оптимального распределения ресурсов на региональном уровне.

Динамическая задача логистики топливообеспечения была решена на примере региональной системы теплоснабжения Удмуртской Республики [1].

Литература

1. Преснухин В.К., Русяк И.Г., Королев С.А. и др. Концепция Республиканской целевой программы "Снабжение населения, объектов социально-бытовой сферы в отдаленных населенных пунктах Удмуртской Республики местными видами топлива, альтернативными природному газу (2 этап)"; Ижевск: ИжГТУ, 2009.

ЧИСЛЕННОЕ ОТЫСКАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ ЗНАКОНЕОПРЕДЕЛЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО

ОПЕРАТОРА

Китаева Е.В. (Самара)

el_kitaeva@mail.ru

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+p(t,\xi,u), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u\Big|_{\xi=-1}=u\Big|_{\xi=1}=0. \tag{2}$$

Предположим, что

A1. Краевая задача (1)–(2) при $\varepsilon=0$ имеет при $t\in R,\xi\in[-1,1]$ решение $u_0(t,\xi)$, причем для линейной краевой задачи для уравнения $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+a(t,\xi)u+f(t,\xi)$ с граничными условиями (2), где $a(t,\xi)=p_u(t,\xi,u_0(t,\xi))$ выполнены предположения

B1. Функции $f(t,\xi),a(t,\xi)$ и все их частные производные $\frac{\partial^{|i|}f}{\partial t^{i-s}\partial\xi^s},\frac{\partial^{|i|}a}{\partial t^{i-s}\partial\xi^s}$,$0\leqslant i\leqslant 2k_1+1$, $0\leqslant s\leqslant i$ при некотором $k_1\geqslant 2$ равномерно ограничены при $t\in R,\xi\in[-1,1]$.

B2. При каждом фиксированном $t\in R$ для собственных значений оператора $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+a(t,\xi)$ с краевыми условиями (2) справедливы неравенства $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_k>0>\lambda_{k+1}>\cdots$, $|\lambda_i(t)|\geqslant\lambda_0>0$ и выполняются условия $\lambda_s=O^*(s^2),|\lambda_i-\lambda_j|\geqslant C|i-j|^2,i\neq j$, $\inf\limits_{t\in(-\infty,+\infty)}|\lambda_i(t)|\geqslant\lambda_0>0$.

A2. Функция $p(t,\xi,u)$ имеет на множестве

$$\{(t,\xi):t\in R,|\xi|\leqslant r,|u|\leqslant r\},$$

где $r>0$ — достаточно большое, но не зависящее от ε число, все $2k_1+1$ частные производные по ξ,t.

Теорема 1 *Задача (1)-(2) имеет в некотором шаре пространства $C(R\times[-1,1])$ с центром в $u_0(t,\xi)$ единственное ограниченное при $t\in(-\infty,+\infty)$, $\xi\in[-1,1]$ решение $u(t,\xi)$.*

Данная задача является модельной для описания критических режимов горения. Ее решение неустойчиво как в прямом так и в обратном времени.

В докладе предлагается итерационный метод [1], суть которого состоит в подавлении части компонент вектора ошибки решения разностной задачи при движении в прямом времени, а остальных компонент - в обратном времени, с применением быстрого преобразования Фурье. Излагается алгоритм метода и приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

[1] Китаева Е.В., Соболев В.А. Численное отыскание ограниченных на всей оси решений дискретных сингулярно возмущенных уравнений и критических режимов горения. Журн. вычисл.матем. и матем. физики. 2005. Т.45, №1. с.56-87.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА STATISTICA В МЕДИЦИНСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ АНОМАЛИЙ МОЗГА

Клейменова И.С., Свиридова Ю.А., Ускова Н.Б., Ускова О.Ф. (Воронеж)

ulya4732@mail.ru

Существует несколько систем, реализующих концепции и технологии современного анализа данных на компьютере (SAS, SPSS, S-плюс и другие). Система Statistica - это интегрированная система анализа и управления данными. Ее достоинство состоит в том, что она основана на Windows-технологиях, легка в освоении и использовании. Система Statistica [1], [2] построена по модульному принципу и содержит все известные методы статистического анализа. Обрабатываемые системой Statistica данные при необходимости легко экспортируются в популярные базы данных и импортируются из них.

С помощью включенных в систему Statistica статистических методов проанализированы аномалии мозга на основе выборочных данных, которые представляют собой таблицу, содержащую информацию о параметрах: нозологические формы, профиль психоневрологического развития, неврологические симптомы, аномалии мозга.

С помощью модуля *Основные статистики и таблицы/Парные и частные корреляции*:

- вычислены коэффициенты корреляции Пирсона между соответствующими показателями;
- проанализировано влияние аномалий мозга на нозологические

формы, выделены факторы гипотеза о незначимости которых отвергается при уровне значимости $p = 0.05$;

- исследована корреляция аномалий мозга и индекса развития;
- выявлено влияние аномалий мозга на формирование патологических и неврологических симптомов.

С использованием модуля *Множественная регрессия* проведен регрессионный анализ для оценки воздействия аномалий мозга на профиль психоневрологического развития. В результате исследований выявлены наиболее значимые факторы. Результаты проделанных вычислений предназначены для врачей-неврологов областной детской клинической больницы г. Воронежа.

Литература

[1] Боровиков В.П., Ивченко Г.И. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows. - М.: Финансы и статистика, 2000. - 382с.: ил.

[2] Боровиков В.П. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: для профессионалов. 2-е изд. - СПб.: Питер, 2003. - 686 с.: ил.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Ключев В.В. (Йошкар-Ола)

vfri@mail.ru

Рассматривается задача Коши $d^2x(t)/dt^2 = Ax(t)$, $t \in [0,T]$, $x(0) = f$, $\dot{x}(0) = 0$ где $A : D(A) \subset X \to X$ – неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве X; $\overline{D(A)} = X$, $f \in D(A)$. Предполагается, что для спектра $\sigma(A)$ и резольвенты $(\zeta E - A)^{-1}$ оператора A выполняется условие секториальности: $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ и имеет место оценка $\|(\zeta E - A)^{-1}\| \leqslant C_0(1 + |\zeta|)^{-1} \forall \zeta \in \mathbb{C} \backslash K(\varphi_0)$, где $K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |\arg \zeta| < \varphi\}$. ($C_i > 0$ – постоянные). Данная задача поставлена, вообще говоря, некорректно.

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 09-01-00273а)

В продолжение [1], рассмотрим следующий класс разностных схем численной аппроксимации решения задачи Коши $x = x(t)$: $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n = (\Delta t)^2(\beta_2 Ax_{n+2}+\beta_1 Ax_{n+1}+\beta_0 Ax_n), n = \overline{0, N-2}$, $\Delta t = \frac{T}{N}$; $x_0 = x_1 = f$. Здесь $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ — вещественные числа, выбор которых определяет конкретную разностную схему.

В работе [1] установлены ограничения на $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, при выполнении которых для приближений x_n, порождаемых схемой, существование решения на отрезке $[0; T_1]$, $T_1 > T$ влечет равномерную оценку $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_1(\Delta t)^q$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $\Delta t \in (0,\varepsilon)$ для $\forall q \in (0; 1 - T_1^{-1}T)$ с постоянной C_1, определяемой лишь выбранным методом.

В данном сообщении анонсируется условие $x(T) \in D(A^{q_1})$ с произвольным $q_1 \in (0, q/2)$ как необходимое для выполнения оценки $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_2(\Delta t)^q$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $q \in (0,1)$ $\Delta t \in (0,\varepsilon)$ при соответствующих ограничениях на параметры разностной схемы.

Литература

1. А.Б. Бакушинский, М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев. Об оценке скорости сходимости разностных методов решения некорректной задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вычислительные методы и программирование.– 2010, Т.11.– С.25–31.

О ПРИМЕНЕНИИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ К ВАРИАЦИОННЫМ НЕРАВЕНСТВАМ НА ШАРЕ[1]

Кокурин М.М. (Йошкар-Ола)

kokurin@nextmail.ru

Пусть в окрестности единичного шара $B \subset R^n$ задано гладкое векторное поле Φ. Рассматривается вариационное неравенство (ВН)

$$(\Phi(x^*), x^* - x) \leqslant 0 \quad \forall x \in B \quad (x^* \in B). \tag{1}$$

Предполагается, что искомое решение x^* ВН (1) лежит на сфере $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$. К ВН в такой постановке приводит, в частности, задача нахождения условий сбалансированного роста экономических систем в модели Солоу–Самуэльсона [1,гл.3]. Любое решение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00273а)

(1) удовлетворяет уравнению

$$F_\lambda(x) \equiv x - \frac{x - \lambda\Phi(x)}{\|x - \lambda\Phi(x)\|} = 0 \tag{2}$$

с произвольным $\lambda > 0$. Исследуется возможность применения к (2) итерационных методов градиентного и ньютоновского типа. Следующая теорема указывает условия, обеспечивающие локальную сильную монотонность оператора $F_\lambda : R^n \to R^n$ и, следовательно, локальную единственность решения (1) и (2).

Теорема. *Пусть* $(\Phi'(x^*)y, y) > -\|\Phi(x^*)\| \quad \forall y \in R^n, (y, x^*) = 0, \|y\| = 1$. *Тогда найдётся такое* $\varepsilon > 0$, *что для всех значений* $\lambda \in (0, \lambda_0]$ *с достаточно малым* $\lambda_0 > 0$ *выполняется* $(F'_\lambda(x^*)h, h) \geqslant \varepsilon\|h\|^2 \quad \forall h \in R^n$.

Данное свойство позволяет применять для решения (2) различные итерационные процессы градиентного и ньютоновского типа [2,гл.2]. Численные эксперименты на модельных задачах подтвердили возможность устойчивой аппроксимации решения задачи (1) на основе рассматриваемого подхода.

Литература

1. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972.

2. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.

ВЕТВЛЕНИЯ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФАЗ КРИСТАЛЛА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ФАЗЫ С ОДНОРОДНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Колесникова И.В. (Воронеж)

kolinna@inbox.ru

Особенности шестого порядка представляют реальный интерес для задачи феноменологического описания фазовых переходов [1]. Главная часть ключевой функции после вторичной редукции принимает следующий вид:

$$\sigma_1^3 + \varepsilon\,\sigma_1^2 + \delta\,\sigma_1 + p\,\sigma_1\sigma_2 + \gamma\,\sigma_2 + q\,\sigma_3,$$

В полярных координатах $r_1 = r\cos(\varphi_1)$, $r_2 = r\cos(\varphi_2)$, $r_2 = r\cos(\varphi_3)$ получим $\sigma_1 = r^2$,

$$\sigma_2 = r^4\left(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)\right),$$

$\sigma_3 = r^6 \left(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)\left(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2)\right)\right).$

Множество критических точек ключевой функции является (при фиксированных значениях параметров) пересечением поверхностей M_0, M_1 и M_2, определяемых уравнениями $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ (поверхность радиально стацинарных точек) и $\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = 0$ (поверхности стацинарных точек по тангенциальным переменным φ_1, φ_2).

Поверхность M_0 задается уравнением

$$6r^5 + 4\varepsilon\, r^3 + 2\delta\, r \;+\; 2r^3\left((3p\, r^2 + \gamma\right)\cdot$$

$$\cdot(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)) +$$

$$+6q\, r^5\left(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2))\right) = 0.$$

Поверхность M_k задается уравнением $(p\ r^2 + \gamma)\frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi_k} + q\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varphi_k} = 0$. Множество всех критических точек совпадает с пересечением $M_0 \cap M_1 \cap M_2$. Пересечение $M_1 \cap M_2$ определяется уравнением $(p\ r^2 + \gamma)\ \mathrm{grad}_\varphi\ \sigma_2 + q\ \mathrm{grad}_\varphi\ \sigma_3 = 0$. Часть этого множества определяется соотношениями $(p\, r^2 + \gamma) = 0$, $\mathrm{grad}_\varphi\ \sigma_3 = 0$.

Остальные точки данного множества определяются (при различных значениях параметров) уравнением $[\sigma_2, \sigma_3] = 0$, где $[\sigma_2, \sigma_3]$ — якобиан (скобка Пуассона) функций σ_2, σ_3 (по φ_1, φ_2).

Теорема. Имеет место представление

$$[\sigma_2, \sigma_3] = \left(1 - 3u + 2u^2 + v\right)\left(1 - \cos^2(\varphi_3)\right)\sin(2\varphi_1)\sin(2\varphi_2)\ ,$$

в котором $u = 1 - \cos^2(\varphi_3)$, $v = \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)$. На основе этого утверждения можно находить расклады бифурцирующих критических точек и определять их взаимные примыкания. Количество клеточных комплексов, изображающих bif—расклады критических точек (в случае трех мод), весьма обширно и в полном объеме пока не известно. В настоящее время найдено десять максимальных (состоящих из 125 элементов) комплексов. Этим комплексам соответствуют следующие расклады критических точек:

$$(27, 54, 36, 8), (27, 56, 36, 6), (7, 42, 56, 20), (19, 50, 48, 12), (19, 54, 44, 8),$$

$$(15, 50, 48, 12), (7, 42, 56, 20), (15, 48, 48, 14), (27, 56, 36, 6), (27, 54, 36, 8).$$

Литература

1. Широков В.Б., Юзюк Ю.И., Dkhil B., Леманов В.В. Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В.Н. $BaTiO_3$// Физико твердого тела. Том 50, вып. 5 (2008), с. 889–892.

2.Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140.

3.Колесникова И.В. Бифуркационный анализ несоизмеримых сегнетоэлектрических фаз кристаллов(в феноменологической модели Ландау)/И.В.Колесникова //Диссертация на соискание уч.ст. к.ф.-м.н. по спец.05.13.18.Воронеж, ВорГУ. 2009. 130 с.

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ МЕДЛЕННОЙ КРИВОЙ В ЗАДАЧЕ КАТАЛИТИЧЕСКОГО ОКИСЛЕНИЯ[1]

Кононенко Л.И. (Новосибирск)

volok@math.nsc.ru

Пусть дано произвольное метрическое пространство M. Параметризованной кривой или путем в пространстве M называется всякое непрерывное отображение $x : [a,b] \to M$. Кривая в метрическом пространстве определяется как класс эквивалентности параметризованных кривых или путей в этом пространстве. Параметризация простой дуги K есть непрерывное взаимно однозначное отображение отрезка $[a,b]$, где $a < b$, на множестве K. Понятие простой дуги распространяется на нормальные пути. Множество всех нормальных параметризованных кривых в пространстве распадается на классы эквивалентных путей. Каждый такой класс называется кривой в пространстве M. Если K есть кривая в пространстве M, то есть класс эквивалентных нормальных параметризованных кривых в пространстве M, то элементы этого класса называются параметризациями кривой K [1].

Приведен пример параметризации медленной кривой, взятой из сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей реакцию каталитического окисления,

$$\varepsilon\dot{z} = Z(z,t,\varepsilon),$$

вектор-функция Z, где $z \in R^{m+n}$, $t \in R$, $0 < \varepsilon \ll 1$, вектор-функция Z достаточно гладкая по всем переменным [2,3].

1. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа, Ч. 1, кн. 2. Новосибирск: изд. Ин-та математики, 1999.

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 09-01-0070) и Сибирским отделением РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 107)

2. Кононенко Л.И. О гладкости медленной поверхности сингулярно возмущенных систем // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т.5, №2(10).

3. Гольдштейн В.М. Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРОВНЕЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Коробейникова Н.И., Пантюхина И.А. (Ижевск)

mathudgu@mail.ru

Рассматривается оператор вида

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x)\theta(x_0 - x) + V_1\theta(x - x_1),$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда,$V_0 < 0$, $V_1 < 0$.

Функция Грина $G(x, y, E, V_0, V_1, x_0, x_1)$ оператора H (ядро резольвенты оператора) найдена в явном виде. Обозначим $k = \sqrt{E}$, $h = \sqrt{E - V_0}$, $m = \sqrt{E - V_1}$. Знаменатель Δ функции Грина оператора H имеет вид:

$$\begin{gathered}\Delta = e^{imx_1 - ihx_0} i(k-h)\times \\ \times\left[-(k+h)(k+m)e^{ik(x_0-x_1)} + (k-h)(k-m)e^{-ik(x_0-x_1)}\right] + \\ + e^{imx_1 + ihx_0} i(k-h)\times \\ \times\left[(h-k)(k+m)e^{ik(x_0-x_1)} + (k+h)(k-m)e^{-ik(x_0-x_1)}\right].\end{gathered}$$

Под резонансом оператора H понимаем полюс функции Грина относительно парметра (импульса) $k = \sqrt{E}$ ($E \in \mathbf{C}$). При этом решения уравнения Шредингера $H\psi = E\psi$, отвечающие сответствующему E будут экспоненциально возрастать при $|x| \to +\infty$.

Уровнем E оператора H будем называть собственное занчение или резонанс данного оператора (а также соответствующее E число $k = \sqrt{E}$). Существование уровня оператора H эквивалентно существованию решения уравнения $\Delta = 0$.

Будем предполагать, что имеет место зависимость $V_0 = -A_0\varepsilon^{\gamma_0}$ и $V_1 = -A_1\varepsilon^{\gamma_1}$, где A_0, A_1, γ_0, γ_1 - положительные числа.

Теорема. Пусть $A = \mathrm{const} > 0$ и $\gamma_0 > 2$, $\gamma_1 > 2$, тогда у оператора H отсутствуют уровни вида $k = A\varepsilon$.

Предположим, что уровни k оператора H имеют вид $k = A\varepsilon^{\gamma}$, где $A > 0$ и $\gamma > 0$. При некоторых дополнительных условиях на γ_0, γ_1, γ показано, что оператор H имеет два уровня в окрестности нуля и получены асимптотические формулы.

Литература

Плетникова Н.И. Об уровнях оператора Шредингера с возмущенным ступенчатым потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. 2005. №1. С. 155-166.

БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА–ХОПФА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ[1]

Красносельский А.М. (Москва)

sashaamk@iitp.ru

Предлагаются новые условия возникновения бифуркаций Пуанкаре–Андронова–Хопфа на бесконечности [1] для уравнений

(1) $$L(d/dt)x = f(x, \lambda),$$

$L(p)$ — многочлен с постоянными коэффициентами, $\deg L > 2$, функция f непрерывна по совокупности переменных $x \in R, \lambda \in \Lambda = (a, b)$ и равномерно ограничена.

Определение [1]. *Значение* λ_0 *параметра называется* точкой бифуркации на бесконечности *для уравнения (1) (с частотой* w_0*), если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\lambda_\varepsilon \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$*, что уравнение (1) при* $\lambda = \lambda_\varepsilon$ *имеет периодическое решение* $x_\varepsilon(t)$ *периода* T_ε*, причем* $|T_\varepsilon - 2\pi/w_0| < \varepsilon$ *и* $\max|x_\varepsilon(t)| > \varepsilon^{-1}$.

Бифуркации Хопфа — классический объект исследований математиков, инженеров, специалистов по теории управления, физиков, биологов и пр. Обычно, точка бифуркации определяется линейной частью уравнения, если она зависит от λ (см. [1]); в [2] начато изучение уравнений вида (1) с линейной частью от λ не зависящей.

Пусть w_0 — корень многочленов $L(wi)$ и $\Im L(wi)$ одной и той же нечетной кратности и пусть $L(kw_0 i) \neq 0$, $k = 0, 2, 3, \ldots$.

Теорема 1 [2]. *Пусть* $f(x, \lambda) \to f^{\pm}(\lambda)$, $x \to \pm\infty$ *и функция* $f^{+}(\lambda) - f^{-}(\lambda)$ *принимает значения обоих знаков в каждой окрестности* λ_0*. Тогда* λ_0 *— точка бифуркации для уравнения (1).*

Теорема 2. *Пусть* $f(x, \lambda) \to 0$, $x \to \pm\infty$*. Более того, пусть* $|f(x, \lambda)| \leqslant \Theta(|x|)$*, где* $\Theta : R^{+} \to R^{+}$ *непрерывна, не возрастает и*

[1]Автор поддержан грантом РФФИ 10-01-93112-НЦНИЛ_а

$\int^{\infty} u\Theta(u)\,du < \infty$. Пусть функция $\int_{-\infty}^{\infty} u\, f(u,\lambda)\,du$ принимает значения обоих знаков в каждой окрестности λ_0. Тогда λ_0 является точкой бифуркации на бесконечности для уравнения (1).

Литература

1. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Циклы больших амплитуд в автономных системах с гистерезисом. Доклады Академии наук, 1985, **283**, ь1, 23-26.

2. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Hopf bifurcations from infinity, generated by bounded nonlinear terms. Functional Differential Equations. 1999, **6**, ь3-4, 357-374.

К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ СОКРАЩЕННОГО СРОКА ОБУЧЕНИЯ

Кретова Л.Д., Посметьев В.В., Ускова Н.Б. (Воронеж)
kafedra@vmfmm.vorstu.ru

В последние годы в Воронежском государственном техническом университете производится обучение выпускников средних специальных учебных заведений на высшем звене по аналогичной специальности с сокращенным сроком обучения. На радиотехническом факультете такое обучение возможно по специальностям «Радиотехника» и «Проектирование и технология радиоэлектронных средств». Такие студенты, в отличии от обычных первокурсников, уже имеют квалификацию техника и определенные умения и навыки в области профессиональной деятельности. Кроме того, курс математики, преподаваемый в техникуме, принципиально отличается от школьного курса математики по двум направлениям: во – первых, он шире из-за необходимости изучения некоторых разделов, используемых в спецдисциплинах в техникуме, во – вторых, количество часов, отводимых на математику, меньше. Кроме того, выпускники техникумов, как правило, не сдают ЕГЭ по математике, или соответствующий вступительный экзамен, в техническом университете они сдают только собеседование по физике. Следствием является как их относительно низкий входной уровень математических знаний, так и поверхностное знакомство со многими разделами вузовского курса математики. Поэтому при изучении математики для такого контингента обучающихся необходимо ориентироваться не только на усвоение нового теоретического и практического материала и повторения наиболее важного из школьного курса, но и на решение профессионально ориентированных заданий и на практическое, инженерное применение полученных знаний.

Применение современных компьютерных технологий на занятиях по математике у таких студентов способствует эффективной организации учебного процесса, позволяет лучше понять структуру математических алгоритмов и методов, не вдаваясь в систему их реализации на языке программирования высокого уровня. Помимо лучшей усвояемости и приживаемости математических знаний у указанного контингента, такой подход способствует усилению мотивации обучения математике в вузе, что благоприятно сказывается на процессе обучения. На собственном опыте, исходя из своих профессиональных умений и навыков, обучающиеся видят необходимость математики и возможные сферы ее применения. Кроме того, частичное освобождение студентов от рутинной работы в пользу акцентирования на сути и вопросах практического применения полученных знаний активизирует интерес к изучению математики, в конечном итоге, повышает качество усвоения материала.

ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ В ТЕОРИИ ИГР С ИЕРАРХИЧЕСКИМ ВЕКТОРОМ ИНТЕРЕСОВ

Кунаковская О.В. (Воронеж)

ovk@math.vsu.ru

В [1] предложена модель взаимодействия в социально-экономических системах (или, иначе, сообществах), принятие решения в которых производится на основе стремления элементов системы к увеличению своих векторных иерархизованных интересов. Сообщество образуется n игроками и разбивается на ряд иерархически устроенных групп, относимых к m уровням, $3 \leqslant n$, $2 \leqslant m \leqslant n$. Рассматривается класс игр Γ с независимыми ресурсами, в которых каждый игрок i $(i = 1, \ldots, n)$ распоряжается выбором вектора $x_i = \{x_i^0, \ldots, x_i^m\}$, где $\sum\limits_{k=0}^{m} x_i^k = a_i$, $x_i^k \geqslant 0$. Здесь a_i – заданный (вообще говоря, векторный) ресурс игрока i. Предполагается, что общий интерес ω_j^k группы j уровня k зависит только от выборов всех входящих в нее игроков. Задача каждого игрока i в игре класса Γ состоит в том, чтобы выбрать стратегию распределения своего ресурса по всем интересам. При этом не рассматриваются смешанные стратегии. Предполагается, что игроки принимают коллективное решение, исходя из принципа ситуаций равновесия (по Нэшу). Как отмечено в [1], источником описанной игровой модели служит не только сфера производственных и социальных отношений индивидов или хозяйственных единиц, но и область международных отношений.

В [1] доказано, что в двухуровневом ($m = 1$) сообществе для игры Γ при скалярных ресурсах существует и единственна ситуация равновесия. Совместное исследование автора со студентами [2], [3], [4] позволило выделить трехуровневые игры с иерархическим вектором интересов, в которых гарантировано существование равновесных стратегий. Оказалось возможным здесь применить теорию степени отображения (или, эквивалентно, теорию вращения векторного поля. Например, для игры 3 лиц со следующим распределением по уровням 0, 1, 2 скалярных ресурсов a_i i-ого игрока $(i = 1, 2, 3)$

$$\begin{array}{rcl} a_1 &=& x_1^0 + x_1^1 + x_1^2, \\ a_2 &=& x_2^2, \\ a_3 &=& x_3^2 \end{array}$$

соответствующий инвариант равен 1. Этот результат допускает обобщение на некоторые другие случаи $n \geqslant m \geqslant 3$.

Литература

1. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. Игры с иерархическим вектором интересов. – Техническая кибернетика. – 1974, N 3. – С. 54-69.

2. Рудометов А.И. Игры с иерархическим вектором интересов. Выпускная квалификационная работа. ВГУ (научн. рук. – О.В. Кунаковская). – Воронеж, 2003. – 39 с.

3. Сухотерина Е.В. Равновесные стратегии в играх с иерархическим вектором интересов. Выпускная квалквалификационная работа. ВГУ (научн. рук. – О.В. Кунаковская). – Воронеж, 2008. – 46 с.

4. Вахитова С.Р. Оптимальные стратегии в играх с иерархическим вектором интересов. Выпускная квалификационная работа. ВГУ (научн. рук. – О.В. Кунаковская). – Воронеж, 2009. – 33 с.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРИИ ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Кушель О.Ю. (Минск)

kushel@mail.ru

Рассмотрим линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и его внешний квадрат $A \wedge A$, действующий в конечномерном пространстве $\wedge^2\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{C_n^2}$.

Линейный оператор A назовем $(K_1,\ K_2)$-*вполне положительным*, если для некоторого телесного конуса $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ справедливо включение $AK_1 \subseteq \mathrm{int}(K_1)$, и для некоторого телесного конуса $K_2 \subset \mathbb{R}^{C_n^2}$ справедливо включение $(A \wedge A)K_2 \subseteq \mathrm{int}(K_2)$.

Пусть даны два телесных конуса $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $K_2 \subset \mathbb{R}^{C_n^2}$. Определим множество $S(K_1, K_2) \subset \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$S(K_1, K_2) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \exists\ x_1 \in \mathrm{int}(K_1),\ \text{такой, что}\ x_1 \wedge x \in \mathrm{int}(K_2)\}}.$$

Определим множество $T(K_1, K_2) = S(K_1, K_2) \cup (-S(K_1, K_2))$. При некоторых дополнительных условиях множество $T(K_1, K_2)$ будет телесным конусом ранга 2 (здесь замкнутое множество, содержащее вместе с каждой точкой x прямую tx $(-\infty < t < \infty)$, называется *конусом ранга* 2, если оно содержит хотя бы одно двумерное подпространство и не содержит подпространств большей размерности [1]).

Пусть оператор A является $(K_1,\ K_2)$-вполне положительным. Тогда он оставляет инвариантным множество $T(K_1, K_2)$.

Теорема 1. *Пусть линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является $(K_1,\ K_2)$-вполне положительным. Тогда у оператора A имеются два простые положительные собственные значения, отличные по модулю друг от друга и от остальных собственных значений:*

$$0 \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_3| < \lambda_2 < \lambda_1.$$

Более того, собственный вектор x_1, соответствующий максимальному собственному значению λ_1, лежит в $\mathrm{int}(K_1)$, а собственный вектор x_2, соответствующий второму по модулю собственному значению λ_2, лежит в $\mathrm{int}(S(K_1, K_2) \setminus K_1)$.

Литература

1. **Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.** *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов* — М.: Наука, 1985. - 256 с.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ГУРСА – ДАРБУ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМОЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Лисаченко И.В. (Н. Новгород)

i_lisach@mail.ru

Рассматривается управляемая задача Гурса-Дарбу

$$\begin{aligned} &x''_{t_1 t_2}(t) = g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t), u(t)), t \in \Pi \equiv [0,1]^2, \\ &x(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), t_1 \in [0,1]; x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), t_2 \in [0,1], \end{aligned} \tag{1}$$

где $g(t,l,v) : \Pi \times R^3 \times R \to R$ вместе с $g'_l(t,l,u)$ непрерывны по t, l, v, $\varphi_i(t_i) : [0,1] \to R$ абсолютно непрерывны, $\varphi_i(0) = 0$, $u(t)\colon \Pi \to R$ — управление. Допустимы управления из некоторого $D \equiv \{u \in L_s \equiv L_s(\Pi)\colon u(t) \in V$ для п.в. $t \in \Pi\}$, $s \in [1,\infty]$, $V \subset R$. Пусть: $\varphi'_1, \varphi'_2 \in L_p[0,1]$, $p \in (1,\infty)$; $f(t,l,v) \equiv g(t, l_0 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_1 + \varphi'_1(t_1), l_2 + \varphi'_2(t_2), v)$, функция g такова, что формулы $F[y,u](t) \equiv f(t, y(t), u(t))$ и $\Phi[y,u](t) \equiv f'_l(t, y(t), u(t))$ определяют ограниченные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2009 - 2013 годы) (проект НК-13П-13) и АЦВП "Развитие потенциала высшей школы (2009 - 2010 годы) "Минобрнауки РФ (регистрационный номер 2.1.1/3927)

операторы $F[\cdot,\cdot]\colon L_\infty \times L_p^2 \times D \to L_p$ и $\Phi[\cdot,\cdot]\colon\ L_\infty \times L_p^2 \times D \to L_p \times L_\infty^2$. Решение задачи (1), отвечающее управлению u, естественно искать в классе W функций со смешанной производной из L_p. Пусть Ω - та часть D, каждому элементу которой отвечает единственное в классе W глобальное решение x_u задачи (1). В докладе рассматривается задача оптимизации:

$$I[u] = G(x_u(1,1)) \to \max,\ u \in \Omega, \tag{2}$$

$G(\cdot)\colon R \to R$ — непрерывно дифференцируема. Получены необходимые условия оптимальности типа принципа максимума.

Литература

1. Лисаченко И.В., Сумин В.И.// Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2006. Вып.2 (31). С. 64-82

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ ФУНКЦИЙ В MS EXCEL

Листров Е.А., Листрова Л.В. (Воронеж)

Применение компьютеров, оснащенных современным программным обеспечением, позволяет решать математические задачи нетрадиционными способами, а также решать прикладные задачи, которые ранее не рассматривались в силу сложности математического аппарата. Использование электронных таблиц позволяет приближенными методами находить корни нелинейных уравнений, вычислять значения интегралов, решать задачи оптимизации со многими переменными и ограничениями. Причем, это становится доступным и учащимся, недостаточно хорошо владеющим программированием, поскольку главным этапом при решении подобных задач становится не разработка программы, а постановка задачи (запись ограничений, задание точности решения) и исследование полученных результатов. Учащиеся выполняют исследовательскую, творческую работу, а ее рутинную часть выполняет компьютер.

Рассмотрим пример использования возможностей MS Excel для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным (например, cos(x)=x). Для решения это уравнение необходимо представить в виде f(x)=0, т.е. в виде: cos(x)-x=0. После этого в какую-либо ячейку рабочего листа необходимо ввести число, «достаточно близкое» к корню (его можно получить, например, построив в том же MS Excel график функции f(x)). Введём ячейку B2 число 1 (это число «достаточно близкое» к корню этого уравнения). Затем в какую-либо ячейку необходимо ввести формулу для f(x). Введём в ячейку C2 формулу: =COS(B2)-B2. Теперь воспользуемся командой Подбор параметра... меню Сервис. В поле ввода Установить в ячейке диалогового окна Подбор параметра... необходимо ввести адрес ячейки C2, а в поле Значение ввести 0. В поле Изменяя значение ячейки необходимо ввести адрес ячейки B2.

Изменяя значение ячейки B2 (приближённое значение корня) алгоритм Подбор параметра подберёт в этой ячейке такое число, при котором значение, вычисленное по формуле, находящейся в ячейке C2, станет равным нулю. После нажатия кнопки ОК появится окно Результат подбора параметра, а в ячейке B2 отобразится число, полученное в результате подбора (значение корня). В окне также отобразится цель подбора параметра, т.е. число, которое нужно было получить в результате вычисления по введённой в ячейку C2 формуле (Подбираемое значение:) и то, что реально получено при подборе (Текущее значение:).

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ В ПАКЕТЕ MATHEMATICA МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Лозгачев Г.И., Безрядин М.М. (Воронеж)

maickel@yandex.ru

Проблема построения робастных регуляторов достаточно часто поднимается в современной литературе по теории управления.

В данной статье рассматривается программная реализация метода предложенного в [1] - синтез модального регулятора по передаточной функции замкнутой системы.

Пусть задана передаточная функция объекта $W_{ob} = \frac{P_1}{P_2}$.

Пусть задана передаточная функция в виде частного двух полиномов Q_1 и Q_2: $W_{z.s.} = \frac{Q_1}{Q_2}$.

Полином Q_2 будем считать желаемым полиномом. Введем в рассмотрение полиномы N_1, L_1, N_{ost}, L_{ost}.

$\frac{Q_2 - Q1}{P_2} = N_1 + \frac{N_{ost}}{P_2}$, $\frac{Q_1}{P_1} = L_1 + \frac{L_{ост}}{P_1}$.

В работах [1,2] показано, что если исходная система является управляемой, то всегда найдутся коэффициенты полинома Q_1 при которых полиномы $Q_2 - Q_1$ и Q_1 делятся на полиномы P_2 и P_1 без остатка. При этом передаточная функция регулятора будет иметь вид $W_p = \frac{L_1}{N_1}$

Используя необходимое условие равенства полинома нулю и тот факт, что коэффициенты полиномов N_{ost}, L_{ost} представляют собой линейные комбинации коэффициентов полинома Q_1, можно составить систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома Q_1. Решая данную систему, получаем значения коэффициентов обеспечивающих равенство нулю полиномов N_{ost}, L_{ost}.

Используя данные рассуждения, был составлен алгоритм для реализации которого был выбран пакет Mathematica. Особенностью реализации является то, что она испольхзует параметрическую запись полиномов, получая на выходе параметрическое семейство регуляторов.

Литература

1.Лозгачев Г.И. Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // АиТ. 1995. №5. С.49-55.

2.Лозгачев Г.И. Построение модальных регуляторов для одноконтурных и многосвязных систем // АиТ. 2000 №12. С. 15-21

РАБОТА СТАТИСТИЧЕСКИХ И НЕЙРОСЕТЕВЫХ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ

Ляликова В.Г. (Воронеж)

vikalg@yandex.ru

В настоящее время широко используются технологии искусственных нейронных при решении самых разных задач. В связи с этим представляет интерес использовать преимущества искусственных нейронных сетей и в задачах обнаружения сигналов. Целью работы является проведение сравнительного анализа характеристик обнаружения нейросетевых и статистических алгоритмов применительно к задаче обнаружения сигнала, наблюдаемого на фоне смеси гауссовского шума и хаотической импульсной помехи.

В качестве статистических алгоритмов были использованы алгоритмы Байеса и максимального правдоподобия, а в качестве нейросетевых алгоритмов были выбраны нейронная сеть на основе радиально-базисных функций активации (РБФ) и двухслойный персептрон. Рассматривалаяь следующая задача. Пусть в течение некоторого времени (0,T) на вход системы поступает реализация случайного процесса $x = S + \xi$, которая может быть либо шумом, либо суммой полезного сигнала и шума, где ξ-реализация смеси аддитивной гауссовской помехи и хаотической импульсной помехи, $S = Asin[2\pi * f_0 t + \varphi]$, где А-амплитуда сигнала, f_0-несущая частота сигнала, t-текущий момент времени, φ-начальная фаза сигнала.

В результате проведенного анализа получены следующие результаты. Уровень ложных тревог для двухслойного персептрона находился на уровне 10^{-1}, а для других алгоритмов на уровне 10^{-8}. Средние значения вероятности правильного обнаружения составляют: для алгоритма Байеса-0,930; для алгоритма максимального правдоподобия-0,903; для двухслойного персептрона-0,975; для алгоритма РБФ-0,900. Для задач обнаружения сигналов у алгоритма двухслойного персептрона высокий уровень ложных тревог. Применение статистического критерия χ^2 подтверждает, что алгоритм нейронной сети РБф работает как оптимальный алгоритм Байеса.

Литература

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Радио и связь,1989-656с.

2. Хайкин С. Нейронные сети:полный курс. Издательский дом - "Вильямс 2006 – 1104с.

К ОПИСАНИЮ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ ДРОБНОЙ ГЛАДКОСТИ

Ляхов Л.Н., Половинкина М.В. (Воронеж)

Мы будем рассматривать функции, определенные в части евклидова пространства точек

$$R_N^+ = \{x=(x', x''), x'=(x_1, \ldots, x_n), x''=(x_{n+1}, \ldots, x_N),$$

$$x_1>0, \ldots, x_n>0\}.$$

Пусть $\mathbf{U}_\gamma^\alpha f$ - B-потенциал Рисса от функции $f \in L_p^\gamma(R_N^+)$, $\mathbf{D}_\gamma^\alpha f$ - B-гиперсингулярный интеграл (см. [2]).

Через $W_{r,p}^{\gamma,m}(R_N^+)$ и $\overline{W_{r,p}^{\gamma,m}}(R_N^+)$ будем обозначать классы функций $f(x) \in L_r^\gamma(R_N^+)$, имеющих слабые и, соответственно, сильные B-производные порядка m, принадлежащие весовому пространству $L_p^\gamma(R_N^+)$. Назовем эти классы функций пространствами Киприянова (в случае $n = 1$ эти классы функций введены И.А. Киприяновым [1]).

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \frac{N+|\gamma|}{m}$, $\frac{1}{p} - \frac{m}{N+|\gamma|} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{p}$. *Тогда* $W_{r,p}^{\gamma,m}(R_N^+) = \overline{W_{r,p}^{\gamma,m}}(R_N^+)$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$. *Для того, чтобы* $f \in \mathbf{U}_\gamma^\alpha(L_p^\gamma)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $f \in L_{p_\alpha}^\gamma$, $B_{x'}^{\beta'} D_{x''}^{\beta''} f \in L_{p_{\alpha-|\beta|}}^\gamma$, $|\beta| = 2|\beta'| + |\beta''| = [\alpha]$, $p_\alpha = \frac{(N+|\gamma|)p}{N+|\gamma|-\alpha p}$, т.е. $\left(f \in W_{p_\alpha, p_{\{\alpha\}}}^{\gamma,[\alpha]}(R_N^+)\right)$;

2) $\mathbf{D}_\gamma^{\alpha-[\alpha]} B_{x'}^{\beta'} D_{x''}^{\beta''} f \in L_p^\gamma(R_N^+)$, $|\beta| = 2|\beta'| + |\beta''| = [\alpha]$. *При этом* $\mathbf{U}_\gamma^\alpha(L_p^\gamma) = W_{p_\alpha,p}^{\gamma,[\alpha]}(R_N^+)$.

Литература

[1] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов.— М.: Наука, 1997.—199 с.

[2] Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом / Л.Н. Ляхов.— Воронеж: ВГТА, 1997.— 144 с.

ОБ ε–ПРИБЛИЖЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Максимов В.П., Чадов А.Л. (Пермь)
maksimov@econ.psu.ru, alchadov@yandex.ru

Рассматриваются линейные краевые задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений:

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \beta, \tag{1}$$

где $\mathcal{L} : AC^n[0;T] \to L^n[0;T]$, $l : AC^n[0;T] \to R^m$. Исследованию таких задач и их обобщений посвящена обширная литература (см., например, [1,2] и приводимую там библиографию).

В случае $m > n$ задача (1) не может быть корректно разрешимой (т.е. всюду и однозначно разрешимой), необходимое и достаточное условие разрешимости такой задачи может быть записано как условие ортогональности правой части $\{f, \beta\}$ пространству решений однородной сопряженной задачи ([1], с. 24). Таким образом, свойство существования точного решения переопределенной задачи является «тонким» (не грубым) свойством, которое не может быть установлено в результате вычислительного эксперимента, оперирующего с приближенными данными и/или использующего вычисления с конечной точностью. Поэтому естественной представляется следующая постановка переопределенной краевой задачи (1).

Зафиксируем $\varepsilon = col\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$, $\varepsilon_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. Будем называть ε– приближенным решением краевой задачи (1) такое решение x уравнения $\mathcal{L}x = f$, что

$$|l_i x - \beta_i| \leqslant \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

т.е. краевые условия $lx = \beta$ выполняются приближенно с точностью, определяемой заданным вектором ε.

Для такой постановки сформулированы условия ε– приближенной разрешимости в форме, позволяющей производить их проверку с помощью вычислительного эксперимента в ситуации, когда параметры краевых условий могут быть заданы неточно, с известными оценками погрешностей. Доказательство условий использует известную теорему С.Н.Черникова [3, с.66-70].

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. - М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. - New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007.

3. Черников С.Н. Линейные неравенства. - М.: Наука, 1968.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

Мансурова Е.Р. (Йошкар-Ола)

mansurovka@mail.ru

Для уравнения

$$Lu \equiv \begin{cases} \Delta u + c(x,y)u = 0, & y > 0, \\ u_{xy} + b(x,y)u = 0, & y < 0 \end{cases}$$

в области D, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ простой кривой Жордана Γ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезками $AC: y = -x$, $BC: x = 1$, при $y < 0$ рассматривается

Задача. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

$u(x,y) \in C(\bar{D})\bigcap C^1(D_+\bigcup AB)\bigcap C^2(D_+)$, $u_{xy} \in C(D_-)$; $Lu \equiv 0$; $(x,y) \in D_+\bigcup D_-$; $u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma$; $u(1,y) = \psi(y), y \in [-1;0]$; $u_y(x,+0) = a(x)v_-(x), x \in (0,1)$, где

$$v_-(x) = \Gamma(1-\lambda)[D^\lambda_{ox}u(x,0) + D^{\lambda-1}_{ox}u(t,-x)], 0 < \lambda < 1,$$

$\varphi(x,y)$, $\psi(y)$, $a(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(1,0) = \psi(0)$, $D^\lambda_{ox}u$ и $D^{\lambda-1}_{ox}u$ – соответственно производная и интеграл дробного порядка, $D_\pm = D\bigcap\{y \gtrless 0\}$.

В работе, следуя [1] и используя [2], доказана однозначная разрешимость задачи в классе обобщенных решений без каких-либо ограничений на кривую Г.

Литература

[1] Сабитов К.Б. *Альтернирующий процесс типа Шварца в теории уравнений смешанного типа* // Докл. АН СССР. 1992. Т.322, №3. С.476-480.

[2] Мансурова Е.Р. *К вопросу существования аналога задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с нелокальным интегральным условием сопряжения // Тр. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы посвящ. юбилею акад. В.А. Ильина. Уфа: Гилем, 2008. Т. II. С. 111-117.*

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ БИО – ТЕРЦАГИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

Маслакова Л.Ф. (Белгород)

maslakova@bsu.edu.ru

В настоящей работе рассматривается задача о фильтрации несжимаемой вязкой жидкости в несжимаемом упругом скелете с краевыми условиями третьего рода на части границы. В безразмерных переменных поведение среды на макроскопическом уровне описывается системой дифференциальных уравнений составного типа

$$\mathrm{div}P + \rho^\varepsilon\,\mathbf{F} = 0,\ \mathrm{div}\mathbf{w} = 0,$$

где w-перемещение среды,

$$P = \chi^\varepsilon\alpha_\mu D(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda D(x,\mathbf{w}) - pI,$$

тензор напряжений сплошной среды, равный тензору вязких напряжений в области, занятой жидкостью и тензору упругих напряжений в области, занятой упругим твердым скелетом, χ^{ε} – характеристическая функция области, занятой жидкостью, I – единичный тензор, $D(x, \mathbf{u})$ – симметричная часть градиента вектор-функции $\mathbf{u}$, p – давление в сплошной среде,

$$\rho^{\varepsilon} = \chi^{\varepsilon}\rho_f + (1 - \chi^{\varepsilon})\rho_s, \; \alpha_{\mu} = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}, \; \alpha_{\lambda} = \frac{2\lambda}{L g \rho_0}, \; \varepsilon = \frac{l}{L},$$

μ –вязкость жидкости, λ – постоянная Ламэ, L – характерный размер рассматриваемой области, l – характерный размер пор, τ – характерное время физического процесса, ρ_f и ρ_s– безразмерные плотности жидкости и твердого скелета соответственно, отнесенные к плотности воды ρ_0, $\mathbf{F}$ – заданный вектор внешних массовых сил и g – ускорение силы тяжести.

На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненной системы уравнений в случае, когда

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_{\lambda} = \lambda_0, \; \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_{\mu}}{\varepsilon^2} = \infty, \; 0 < \lambda_0 < \infty.$$

ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ ЕГЭ

Матвеева О.И., Халтанова М.М. (Якутск)
ksumat@mail.ru., mariaose@yandex.ru

Положение дел, сложившееся с преподаванием геометрии в российских школах крайне тяжелое, а положение стереометрии катастрофическое.

Во многих выпускных классах различных регионов в последние несколько лет учащиеся фактически перестали изучать стереометрию, особенно во втором полугодии 11 класса.

Восстанавливать положение дел довольно сложно. Получение оценки на ЕГЭ-2010, как оценки именно по математике является первым необходимым шагом. Следующий шаг состоит в позиционировании стереометрической задачи, как задачи для большинства нормально успевающих учеников, а не только для избранных. Реализация этого положения состоит в том, что в школах надо ввести либо спецкурсы или кружки, либо должны выделяться дополнительные часы на дополнительной изучение геометрии. Программу стереометрии надо пересмотреть, усилить и добавить темы из курса высшей математики. Особо это касается метода координат.

Координатный метод является сильным аппаратом для решения многих геометрических задач хотя бы потому, что он не требует рассмотрения сложных геометрических конфигураций. Одно из важнейших применений метода координат состоит в том, что с помощью геометрической фигуры - линии и поверхности - представляются уравнениями, которые связывают координаты точек этих фигур.

В школьный курс геометрии надо ввести понятие определители и их вычисление; нахождение уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки. Также научить школьников находить угол между плоскостями, как угол между их нормалями; угол между прямой и плоскостью; угол между прямыми, используя формулы аналитической геометрии. А задачи, связанные с нахождением угла между скрещивающимися прямыми, являются одними из самых трудных задач по стереометрии. Часто геометрические способы решения таких задач во многих случаях довольно затруднительны, не многие находят пути решения. Особенно затрудняются те, у кого слабо развито пространственное воображение. Хорошие результаты дает применение элементов векторной алгебры, с помощью которой угол между прямыми можно заменить нахождением угла между векторами.

Также полезно было бы обучить будущих студентов находить расстояние от точки до плоскости; от точки до прямой; расстояние между скрещивающимися прямыми. По определению расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра. Но нахождение длин этого перпендикуляра всегда можно заменить нахождением расстояния от произвольной точки одной из них до плоскости, проходящей через вторую параллельно первой. Следовательно, такие задачи можно свести к задачам на нахождение расстояния от точки до плоскости методом координат.

Пример. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5, AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат с вершиной в точке $B(0;0;0)$. Угол между указанными плоскостями находится как угол между их нормалями. Для плоскости AA_1D_1D нормалью можно считать вектор $\overrightarrow{AB}$, для второй плоскости нормалью служит вектор $\overrightarrow{B_1D}$, так данная плоскость перпендикулярна этому вектору. Следовательно, угол между плоскостями найдем как косинус угла между векторами. Координаты указанных точек равны:$A(5;0;0), B(0;0;0), B_1(0;0;\sqrt{3}), D(5,\sqrt{33},0)$. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}=(5;0;0)$, $\overrightarrow{B_1D}=(5,\sqrt{33},\sqrt{3})$. Тогда угол между векторами равен: $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1D}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{B_1D}|}=\frac{25}{5\cdot\sqrt{25+33+3}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$. Найдем тангенс искомого угла по формуле: $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\sqrt{\frac{61}{25}-1}=\sqrt{\frac{36}{25}}=1,2.$

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha=1,2.$

Литература

1. Математика. ЕГЭ 2010. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. - М.: "Экзамен 2010.

НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Матвийчук Е.Ю.
e.matviychuk@mail.ru

Целью данной работы является разработка такой системы, которая будет построена на основе нечетких множеств и операций между ними. Актуальность темы в разработке экспертной системы в среде MATLAB. Разрабатывается система нечеткого вывода под названием "Оценка знаний"в Fuzzy Logic Toolbox, которая должна помочь преподавателю объективно оценить знания студента. База знаний имеет вид: 1. Если незнание теоретических вопросов или практика "хромает то знания недостаточные. 2. Если теория удовлетворительна, то знания соответственно тоже удовлетворительные. 3. Если теория отличная или практика отличная, то знания отличные.

Качество теоретических и практических знаний оценивается по 5-бальной системе. Предположим, что недостаточные знания составляют менее 50удовлетворительные - около 70для проектирования нечеткой экспертной системы. Такая система будет иметь 2 входа ("теория"и "практика"), один выход ("знания"), три правила типа "если.. то"(в соответствии с тремя приведенными предложениями) и по три значения (соответственно 0баллов, 2,5 баллов, 5 баллов и 0Данная система строится, используя алгоритм вывода Мамдани, проанализированы функции принадлежности согласно описанной задачи, проведено множество операций над нечеткими множествами.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ГЕОГРАФОВ

Матейко О.М., Таныгина А.Н. (Минск)
matseika@bsu.by, anast-minsk@yandex.ru

При изложении курса "Высшая математика" студентам-географам большое внимание необходимо уделять методам моделирования природных и социальных процессов. Рассмотрение прикладных задач демонстрирует студентам востребованность математических объектов в их специальности и закладывает первые навыки построения математических моделей.

Многие процессы, протекающие в природных системах, описываются с помощью дифференциальных уравнений [1]. Однако не все эти уравнения в силу своей сложности могут быть рассмотрены на занятиях. Преподаватель выбирает подходящие задачи и после соответствующей методической обработки предлагает их студентам. Среди таких задач – задача о росте населения [2], динамическая модель осыпного склона [3].

Большое значение в практических вопросах использования земель имеет расчет скорости роста вершины оврага (регрессивная эрозия). Одним из факторов, определяющих скорость роста вершины оврага, является площадь его водосбора. За счет уменьшения этой площади скорость роста вершины оврага имеет тенденцию к затуханию. Построение математической модели данного процесса [3] приводит к составлению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для нахождения длины l оврага, в результате интегрирования которого получаем $l(t) = l_{\max}(1 - e^{-At})$, где $l_{\max}$ — максимальная длина оврага, A — коэффициент. Из этого равенства находим скорость роста вершины оврага $v(t) = v_0 e^{-At}$, где $v_0 = Al_{\max}$ — начальная максимальная скорость роста.

Литература

1. Чертко Н.К. Математические методы в физической географии. Минск, 1987.

2. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. Минск, 1973.

3. Трофимов А.М., Московкин В.М. Математическое моделирование в геоморфологии склонов. Казань, 1983.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФЕ

Махинова О.А. (Воронеж)

moa1002@mail.ru

Граничные задачи с пространственной переменной на графе Г.

Граничная задача теплопроводности с пространственной переменной на графе Г. Обозначим через $u(x,t)$ распределение температур для $(x,t) \in \Gamma \times [0,T]$, где T - фиксированная положительная постоянная. Граничная задача, описывающая процесс распространения тепла на графе Г, задается следующими соотношениями:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}_{\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_k} + q(x)_{\gamma_k}u(x,t)_{\gamma_k}, (k=\overline{1,M}), \quad (1)$$

$$u(1,t)_{\gamma_1} = u(1,t)_{\gamma_2} = u(0,t)_{\gamma_M}, u(0,t)_{\gamma_{M-2}} = u(0,t)_{\gamma_{M-1}} = u(1,t)_{\gamma_M},$$

$$u(0,t)_{\gamma_{2k}} = u(1,t)_{\gamma_{2k+1}} = u(1,t)_{\gamma_{2k+2}}, (k=\overline{1,M/2-2}), \quad (2)$$

$$\left(a(x)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_M} = \left(a(x)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_1} + \left(a(x)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_2},$$

$$\left(a(x)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_{2k}} = \left(a(x)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_{2k+1}} + \left(a(x)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_{2k+2}},$$

$$(k=\overline{1,M/2-2}),$$

$$\left(a(x)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_M} = \left(a(x)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_{M-1}} + \left(a(x)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\right)_{\gamma_{M-2}}, \quad (3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \Gamma, \quad (4)$$

$$\alpha^{2k-1}(0)a(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}_{\gamma_{2k-1}} + \beta^{2k-1}(0)u(0,t)_{\gamma_{2k-1}} = 0, (k=\overline{1,M/2-1}),$$

$$\alpha^{M-1}(1)a(1)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}_{\gamma_{M-1}} + \beta^{M-1}(1)u(1,t)_{\gamma_{M-1}} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (1) означает перенос тепла по ребрам по закону Фурье, соотношения (2)-(3)(условия согласования) устанавливают равенсвто температур и связь тепловых потоков во внутернних узлах графа Г.

Граничная задача о колебаниях с пространственной переменной на графе Γ. Обозначим через $u(x,t)$ функцию, характеризующую изменение амплитуд колебаний струн для $(x,t) \in \Gamma \times [0,T]$, где T - фиксированная положительная постоянная. Для $(x,t) \in \Gamma \times [0,T]$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (6))$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \psi_1(x), u_t'(x,0) = \psi_2(x), x \in \Gamma. \qquad (7)$$

Граничная задача, описывающая колебания системы струн при $(x,t) \in \Gamma \times [0,T]$, определяется соотношениями (6),(2),(3),(7),(5). Теперь соотношения (2)-(3)(условия согласования) устанавливают отсутствие разрыва у амплитуд и равенство скоростей смещений струны (баланс натяжений) во внутренних вершинах графа Γ.

Дифференциальный оператор A. Обозначим через $\Re$ множество функций $y(x) \in C(\Gamma)\bigcap C^2[\Gamma]$, удовлетворяющих соотношениям (3). На функциях $y(x) \in \Re$ определим оператор A: $(Ay)(x) = -\frac{d}{dx}(a(x)\frac{d}{dx}y(x)) + q(x)y(x)$, действующий в пространстве $L^2(\Gamma)$ с областью определения, описываемой соотношениями в граничных узлах:

$$\alpha^{2k-1}(0)a(0)\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}_{\gamma_{2k-1}} + \beta^{2k-1}(0)y(0,t)_{\gamma_{2k-1}} = 0, (k = \overline{1, M/2-1}),$$

$$\alpha^{M-1}(1)a(1)\frac{\partial y(1,t)}{\partial x}_{\gamma_{M-1}} + \beta^{M-1}(1)y(1,t)_{\gamma_{M-1}} = 0.$$

Лемма. Оператор A симметричен и положительно определен в пространствах $L^2(\Gamma)$.

Конечно-разностный оператор A^h. Рассматривается разностный аналог A^h оператора A, который определяется соотношениями:

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}\left[a_{i+1}^k\left(\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k\right) - a_i^k\left(\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k\right)\right],$$

$$a_1^M\frac{u_1^M - u_0^M}{h} - a_N^1\frac{u_N^1 - u_{N-1}^1}{h} - a_N^2\frac{u_N^2 - u_{N-1}^2}{h},$$

$$a_1^{2k}\frac{u_1^{2k}-u_0^{2k}}{h}-a_N^{2k+1}\frac{u_N^{2k+1}-u_{N-1}^{2k+1}}{h}-a_N^{2k+2}\frac{u_N^{2k+2}-u_{N-1}^{2k+2}}{h},$$

$$(k=\overline{1,M/2-2}),$$

$$a_N^M\frac{u_N^M-u_{N-1}^M}{h}-a_1^{M-1}\frac{u_1^{M-1}-u_0^{M-1}}{h}-a_1^{M-2}\frac{u_1^{M-2}-u_0^{M-2}}{h},$$

$$\alpha_0^{2k-1}a_1^{2k-1}\frac{u_1^{2k-1}-u_0^{2k-1}}{h}-\beta_0^{2k-1}u_0^{2k-1},(k=\overline{1,M/2-1}),$$

$$\alpha_N^{M-1}a_N^{M-1}\frac{u_N^{M-1}-u_{N-1}^{M-1}}{h}-\beta_N^{M-1}u_N^{M-1},$$

$$y_N^1=y_N^2=y_0^M,y_0^{2k}=y_N^{2k+1}=y_N^{2k+2},(k=\overline{1,M/2-2}),$$

$$y_0^{M-2}=y_0^{M-1}=y_N^M.$$

Теорема 3. Оператор A^h *симметричен и для любых сеточных функций* u_i^k, w_i^k $(i=\overline{0,N},j=\overline{0,m})$ *из области определения* A *справедливо равенство:*

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}\left[a_{i+1}^k\left(u_{i+1}^k-u_i^k\right)-a_i^k\left(u_i^k-u_{i-1}^k\right)\right]w_i^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}\left[a_{i+1}^k\left(w_{i+1}^k-w_i^k\right)-a_i^k\left(w_i^k-w_{i-1}^k\right)\right]u_i^k.$$

Теорема 4. Оператор A^h *положительно определен и для любых сеточных функций* u_i^k, w_i^k $(i=\overline{0,N},j=\overline{0,m})$ *из области определения* A *справедливо равенство:*

$$-\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}\left[a_{i+1}^k\left(u_{i+1}^k-u_i^k\right)-a_i^k\left(u_i^k-u_{i-1}^k\right)\right]w_i^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\left[a_N^kw_N^k\left(u_N^k-u_{N-1}^k\right)-a_1^kw_1^k\left(u_1^k-u_0^k\right)\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}a_{i+1}^k\left(u_{i+1}^k-u_i^k\right)\left(w_{i+1}^k-w_i^k\right).$$

Для граничных задач (1)-(5) и (6),(2),(3),(7),(5) построены разностные схемы. Изучены вопросы устойчивости и сходимости упомянутых разностных схем [1].

Литература

1. Махинова О.А., Теплоперенос в системах с распределенными параметрами на графе с циклом / Актуальные проблемы математики и информатики, № 4. – 2009. – С.32-50.

ЗАНИМАТЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В ШКОЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ В ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ИКТ

Мациевский С.В. (Калининград)
matsievsky@newmail.ru

Занимательная математика не была представлена в школьной программе, хотя ее можно найти в вузовской программе по искусственному интеллекту. В последние годы в школьную программу по информатике и ИКТ приходится включать разделы из занимательной логики и теории игр, поскольку соответствующие задачи включены в ЕГЭ по информатике и ИКТ. Приведем две задачи из демонстрационного варианта ЕГЭ 2010 года [1; 2].

1. Занимательная логика В6. На одной улице стоят в ряд 4 дома, в которых живут 4 человека: Алексей, Егор, Виктор и Михаил. Известно, что каждый из них владеет ровно одной из следующих профессий: Токарь, Столяр, Хирург и Окулист, но неизвестно, кто какой и неизвестно, кто в каком доме живет. Однако известно, что:
1) Токарь живет левее Столяра; 2) Хирург живет правее Окулиста;
3) Окулист рядом со Столяром; 4) Токарь не рядом со Столяром;
5) Виктор живет правее Окулиста; 6) Михаил не Токарь;
7) Егор живет рядом со Столяром; 8) Виктор живет левее Егора.

Выясните, кто какой профессии.

Эта задача достаточно легко решается перебором вариантов [1]. У Гарднера приведе более сложный метод решения [3, гл. 26].

2. Занимательная теория игр С3. Два игрока играют в игру. На координатной плоскости стоит фишка в точке $(-2,-1)$. Игроки ходят по очереди, перемещая фишку из (x,y) в $(x+3,y)$, $(x,y+4)$ или $(x+2,y+2)$. Выиграет тот, кто походит на расстояние, большее 9, от фишки до $(0,0)$. Кто выиграет при безошибочной игре?

Задача подобна игре ним [3, гл. 14] и легко решается построением дерева всех ходов, как в официальном решении [1; 2]. Имеется более трудоемкий и более мощный метод решения «с конца», в котором все точки плоскости делятся на выигрышные и нет [1].

Литература

1. *Мациевский С. В.* Энциклопедия методов решения задач ЕГЭ по информатике и ИКТ. Калининград: РГУ им. И. Канта, 2010.

2. ФИПИ. [Электрон. ресурс]. URL: http://www.fipi.ru.

3. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1999.

ОБ ОБЩЕМ ПРИНЦИПЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Мейрманов А.М. (Белгород)

meirmanov@bsu.edu.ru

Настоящий доклад является изложением результатов автора [1 – 5] и посвящен единому принципу моделирования физических процессов в упругих пористых средах. Научная и практическая ценность математических моделей, описывающих такие сложные процессы, очевидна. Но не менее важным является их физическая достоверность. А именно, будем говорить, что данная феноменологическая модель *физически корректна*, если она является одной из общепринятых моделей механики сплошных сред (как, например, уравнения Стокса, описывающие медленные движения вязкой жидкости, или уравнения Ламэ, описывающие перемещения упругого твердого тела) или асимптотически близка к какой - либо физически корректной феноменологической модели. Если за основную физически корректную модель, описывающую на микроскопическом уровне совместное движение упругого скелета грунта и флюида, заполняющего поры и трещины грунта, взять широко известную модель Р. Барриджа и Дж. Келлера [6], то все усредненные системы уравнений данной системы (в частности уравнения фильтрации) будут физически корректными.

Литература

1. А. М. Мейрманов, Сибирский Математический Журнал, Май-Июнь, 2007, т. 48, № 3, стр. 645-667.

2. А. М. Мейрманов, Математический сборник, 2008, т.199, №3, стр.202-225.

3. A. Meirmanov, Euro Journal of Applied Mathematics, 2008, v. 19, pp. 259-284.

4. A. Meirmanov, SIAM J. MATH. ANAL. - 2008. - Vol. 40. - No. 3. - pp. 1272-1289.

5. A. Meirmanov, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 20, No. 4 (2010) 1-24.

6. R. Burridge and J. B. Keller, Poroelasticity equations derived from microstructure, Journal of Acoustic Society of America **70**, No.**4**, (1981) 1140–1146.

К СВОЙСТВАМ РЕШЕНИЙ СВЕРТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мешков В.З., Половинкин И. П. (Воронеж)

Пусть $a \in E'(R^n)$. Решение сверточного уравнения

$$a * u = 0 \tag{1}$$

вида $f(x)e^{-ix\cdot\xi}$, где $f(x)$ – многочлен, называется экспоненциальным решением.

Теорема. Если для некоторого распределения $\Phi \in E'(R^n)$ равенство

$$\langle \Phi, u \rangle = 0$$

имеет место для каждого экспоненциального решения уравнения (1), то

$$\hat{\Phi}(w) = \hat{a}(w)\hat{\psi}(w),$$

где $\hat{\Phi}(w)$, $\hat{a}(w)$ суть целые аналитические образы Фурье распределений Φ, a соответственно, $\hat{\psi}(w)$ – целая аналитическая функция, $w \in \mathbb{C}^n$.

О ТОЧНЫХ РАДИУСАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОБОБЩЕННО-ВЫПУКЛЫМИ РЕГУЛЯРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Микка В.П., Микка К.В. (Йошкар-Ола)
mikkav@marsu.ru

Регулярные в $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ функции из семейства

$$S^{0,a}_{n;1,1} = \Big\{ f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + a_{n+2}\zeta^{n+2} + \ldots :$$

$$\mathrm{Re}\,\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + 1 > -a,\ a > -1,\ n \geqslant 1 \Big\}$$

назовем обобщенно-выпуклыми.

Под радиусом единственности решения уравнения Ф.Д. Гахова [1] будем понимать величину, определяемую соотношением

$$r_e[S^{0,a}_{n;1,1}] = \inf_{f(\zeta)\in S^{0,a}_{n;1,1}} \sup\left\{r_0 > 0 : \frac{\psi''_{r_0}(\zeta)}{\psi'_{r_0}(\zeta)} \equiv r_0\frac{f''(r_0\zeta)}{f'(r_0\zeta)} = \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2} - \right.$$

$$\left.\text{имеет единственное решение}\, \zeta = 0 \in E\right\}.$$

Здесь $\psi_{r_0}(\zeta) = f(r_0\zeta)$. Идея исследования свойств радиуса единственности принадлежит Л.А. Аксентьеву.

Теорема. *Радиус единственности*

$$r_e[S^{0,a}_{n;1,1}] = \begin{cases} \left(\frac{n-2}{2a}\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{na}{(n-2)(1+a)}}, & \text{если}\, n \geqslant 3,\ a > \frac{n-2}{2}, \\ 1, \quad \text{если}\, n \geqslant 3,\ -1 < a \leqslant \frac{n-2}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+a}}, \quad \text{если}\, n = 2,\ a > 0 \end{cases}$$

и эта величина, меньшая единицы, является точной, ибо экстремальные функции

$$f(\zeta) = \int (1-\zeta^n)^{-(1+a)}\, d\zeta$$

при $r_0 > r_e[S^{0,a}_{n;1,1}]$ *и* $a > (n-2)/2$ *порождают более одного решения;*

$r_e[S^{0,a}_{2;1,1}] = 1$, $-1 < a \leqslant 0$, $n = 2$; *при этом, когда* $a = 0$, *из семейства выпуклых нужно исключить экстремальную функцию* $f_0(\zeta) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, *для которой уравнение Ф.Д. Гахова имеет континуум решений* $\zeta \in (-1, 1)$.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - 3-е изд. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

НЕГЛАДКИЕ БИФУРКАЦИИ С ДВУМЕРНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

Михайленко Б.А. (Воронеж)

B_Mikh@mail.ru

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №10-01-93112-НЦНИЛ_а

В настоящей работе рассматривается задача о бифуркации для уравнения следующего вида

$$P(x) + \varepsilon Q(x, \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

в банаховом пространстве E, где $P : E \to E$ и $Q : E \times [0, 1] \to E$, и $\varepsilon > 0$– малый параметр. Пусть $I - P$ является q–уплотняющим оператором относительно меры некомпактности Хаусдорфа с константой $q < 1$. Предполагается существование параметризованной гладкой кривой $\theta \mapsto x_0(\theta), \theta \in [0, 1]$, (и $x'(\theta) \neq 0$) нулей оператора P, т.е. $P(x_0(\theta)) = 0$ при всех $\theta \in [0, 1]$. Пусть P и Q не дифференцируемы по Фреше в точках этой кривой. Предположим, вместо этого, что P и Q имеют две непрерывные производные по Фреше в конечном количестве областей (вообще говоря, различных для P и Q) в окрестности кривой, и эти производные имеют конечные пределы при стремлении аргумента x к кривой из каждой области.

Так как $1 \in \sigma(I - P'(x(\theta)))$ это изолированное собственное значение q–уплотняющего оператора в некоторой области, оно имеет конечную кратность. Мы исследуем, для простоты, случай существования только двух линейно независмых собственных векторов ($e_0(\theta) = x'(\theta)$ и $e_1(\theta)$) оператора $P'(x(\theta))$ в соответствующей области, причем присоединенные векторы отсутствуют. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\pi(\theta) : E \to span(e_0(\theta), e_1(\theta))$, где $span(e_0(\theta), e_1(\theta))$ это линейная оболочка векторов $e_0(\theta)$ и $e_1(\theta)$, есть проектор Рисса. Предположим, что значение θ_0 таково, что $\pi(\theta_0)Q(x_0(\theta_0), 0) = 0$. Предположим, что уравнение $\lambda_1^2 A + \lambda_1 D + \lambda_0 C + R = 0$, где A, C, D, R– двумерные числовые коэффициенты (полученные в явном виде и зависящие от $\pi(\theta_0), P(x_0(\theta_0)), Q(x_0(\theta_0), 0)$ и их производных в соответствующих областях), имеет решение (λ_0, λ_1), удовлетворяющее условию $\det[C, \lambda_1 2A + D] \neq 0$; вектор $\lambda_0 e_0(\theta_0) + \lambda_1 e_1(\theta_0) + y_0$, где y_0 вычисляется явно, принадлежит пересечению соответствующих областей гладкости P и Q. Тогда уравнение (1) имеет решение в рассматриваемой области, и главная часть этого решения в разложении по параметру ε может быть вычислена в явном виде.

Литература

[1] *Каменский М.И.* О бифуркации в теореме о неявной функции с негладкими условиями /М.И. Каменский, О.Ю. Макаренков, Б.А.

Михайленко// Современные методы теории краевых задач/ Воронеж. гос. ун-т. - 2009. - С. 79-80.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Михайлов А.П. (Старый Оскол)
mikhailovap@mail.ru

Вопросу о существовании гомоклинических решений для различных классов гамильтоновых систем посвящено много различных работ. В данной работе рассматривается уравнение вида

$$\ddot{x} - A(t)x + G_x(t,x) = 0 \tag{1}$$

где $x \in R^N$, $G \in C^1(R, R^N)$, $A(t)$ – положительно определенная симметричная матрица для всех $t \in R$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) существуют положительные числа a_1, a_0 такие, что

$$a_1 |x|^2 \geqslant (A(t)x, x) \geqslant a_0 |x|^2, \; x \in R^N \tag{2}$$

2) существует $\lim\limits_{t\to\pm\infty} A(t) = A_*$

3) для всех $x \in R^N \setminus \{0\}$ и $t \in R$ выполняется неравенство:

$$0 < \alpha G(t,x) \leqslant (G_x(t,x), x), \tag{3}$$

где $\alpha > 2$

4) $G_x(t,x) = o(|x|)$ при $x \to 0$ равномерно по $t \in R$.

Доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1) - 4). Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно гомоклиническое решение.*

Литература

1. Q.Zhang, C.Liu; *Infinitely many homoclinic solutions for second order Hamiltonian systems*, Nonlinear Anal., 72 (2010), 894-903.

О НЕНУЛЕВЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. (Вологда)
emuhamadiev@rambler.ru , *nan67@rambler.ru*

Некоторые модели, используемые в теории элементарных частиц, приводят к рассмотрению нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$-\psi''(x) + \left(1 + \frac{c}{x^2}\right)\psi = \frac{1}{x^\alpha}|\psi(x)|^{k-1}\psi(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

где c, k, α - постоянные, $k > 1$, $\alpha > 0$. Рассмотрим вопрос о поведении ненулевых решений уравнения (1) при $x \to \infty$ и $x \to 0$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) определено и ограничено на промежутке $(x_0, +\infty)$, то для него справедливы асимптотические формулы*

$$\psi(x) = e^{-x}(\psi_\infty + o(1)), \quad \psi'(x) = e^{-x}(-\psi_\infty + o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to \infty,$$

где ψ_∞ - ненулевое число, зависящее от ψ.

Теорема 2. *Пусть $c > 1/4$, $k + 3 - 2\alpha > -(k-1)\sqrt{1+4c}$. Тогда для любого ненулевого решения $\psi(x)$ уравнения (1), определенного на промежутке $(0, x_0)$ и удовлетворяющего условию*

$$\sup_{0<x<x_0} x^{-\beta}|\psi(x)| < \infty$$

с показателем $\beta = (1 + \sqrt{1+4c})/2$, справедливы асимптотические формулы

$$\psi(x) = x^\beta(\psi_0 + o(1)), \quad \psi'(x) = x^{\beta-1}(\beta\psi_0 + o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to 0,$$

где ψ_0 - ненулевое число, зависящее от ψ.

УПРАВЛЕНИЕ В ФОРМЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО - КВАДРАТИЧНОЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Нгуен Тхи Хоай (Воронеж)
nthoai0682@yahoo.com

Рассматривается задача P, состоящая в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u,z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \overset{(j)}{z}, \overset{(j)}{\mathbb{W}}(t)\overset{(j)}{z}\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{u}, \overset{(j)}{R}(t)\overset{(j)}{u}\right\rangle\right\}dt, \tag{1}$$

на траекториях системы

$$E\overset{(j)}{\dot{z}} = \overset{(j)}{\mathbb{A}}(t)\overset{(j)}{z} + \overset{(j)}{\mathbb{B}}(t)\overset{(j)}{u}, \tag{2}$$

$$\overset{(1)}{z}(0) = z^0, \tag{3}$$

здесь $z = (x', y')'$; $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$, значения $t_j (j = 0, 1, 2)$ фиксированы; $\overset{(j)}{x} = \overset{(j)}{x}(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $\overset{(j)}{y} = \overset{(j)}{y}(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, $\overset{(j)}{u} = \overset{(j)}{u}(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, штрих означает транспонирование, угловые скобки означают скалярное произведение в соответствующих пространствах, $\varepsilon \geqslant 0$ - малый параметр, точка сверху означает дифференцирование по t; $E = diag(I, \varepsilon I)$, $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t) = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{W}_1(t) & \overset{(j)}{W}_2(t) \\ \overset{(j)}{W}_2(t)' & \overset{(j)}{W}_3(t) \end{pmatrix}$, $\overset{(j)}{\mathbb{A}}(t) = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{A}_1(t) & \overset{(j)}{A}_2(t) \\ \overset{(j)}{A}_3(t) & \overset{(j)}{A}_4(t) \end{pmatrix}$, $\overset{(j)}{\mathbb{B}}(t) = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{B}_1(t) \\ \overset{(j)}{B}_2(t) \end{pmatrix}$, соответствующих размеров матрицы $\overset{(j)}{W}_i(t) (i = \overline{1,3})$, $\overset{(j)}{R}(t), \overset{(j)}{A}_i(t) (i = \overline{1,4})$, $\overset{(j)}{B}_i(t) (i = 1, 2)$, $j = 1, 2$, являются достаточно гладкими при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, матрицы $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t)$ и $\overset{(j)}{R}(t)$ симметричны, кроме этого, матрицы $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t)$ неотрицательно определены а матрицы $\overset{(j)}{R}(t)$ положительно определены при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$, все собственные значения матриц $\overset{(j)}{A}_4(t)$ имеют отрицательные действительные части при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$.

В качестве допустимых управлений $u(t, \varepsilon) = \begin{cases} \overset{(1)}{u}(t, \varepsilon), t \in [t_0, t_1], \\ \overset{(2)}{u}(t, \varepsilon), t \in [t_1, t_2] \end{cases}$ выбираются кусочно - непрерывные функции. При этом для $\varepsilon > 0$ рассматриваются непрерывные соответствующие траектории

$$z(t, \varepsilon) = \begin{cases} \overset{(1)}{z}(t, \varepsilon), & t \in [t_0, t_1], \\ \overset{(2)}{z}(t, \varepsilon), & t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

- решение задачи (2) - (3). В точках $t = 0$ и $t = T$ предполагается непрерывность справа и слева соответственно.

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ траектория $y(t,\varepsilon)$ будет иметь разрыв при $t = t_1$.

Теорема 1. *Пусть* $\overset{(j)}{\mathbb{K}}(\cdot,\varepsilon)$ *- решение задачи*

$$E'\dot{\overset{(j)}{\mathbb{K}}} = -\overset{(j)}{\mathbb{K}}{}'\overset{(j)}{\mathbb{A}}(t) - \overset{(j)}{\mathbb{A}}(t)'\overset{(j)}{\mathbb{K}} + \overset{(j)}{\mathbb{K}}{}'\overset{(j)}{\mathbb{B}}(t)\overset{(j)}{R}(t)^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}(t)'\overset{(j)}{\mathbb{K}} - \overset{(j)}{\mathbb{W}}(t), \quad t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j, \quad j = 1,2, \tag{4}$$

$$\overset{(2)}{\mathbb{K}}(T,\varepsilon) = 0, \quad \overset{(1)}{\mathbb{K}}(t_1,\varepsilon) = \overset{(2)}{\mathbb{K}}(t_1,\varepsilon), \tag{5}$$

где $\overset{(j)}{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{K}_1 & \overset{(j)}{K}_2 \\ \overset{(j)}{K}_3 & \overset{(j)}{K}_4 \end{pmatrix}$ *а* $\overset{(j)}{K}_2 = \varepsilon \overset{(j)}{K}{}'_3$,

$\overset{(j)}{z}_*(\cdot,\varepsilon)$ *- решение задачи*

$$E\dot{\overset{(j)}{z}}_* = \left(\overset{(j)}{\mathbb{A}}(t) - \overset{(j)}{\mathbb{B}}(t)\overset{(j)}{R}(t)^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}(t)'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\right)\overset{(j)}{z}_*, \tag{6}$$

тогда управление, задаваемое формулой

$$\overset{(j)}{u}_*(t,\varepsilon) = -\overset{(j)}{R}(t)^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}(t)'\overset{(j)}{\mathbb{K}}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{z}_*(t,\varepsilon) \tag{7}$$

определяет оптимальное управление в виде обратной связи для задачи (1)-(3) *и минимальное значение критерия качества* (1) *равно*

$$J_\varepsilon(u_*, z_*) = \frac{1}{2}\left\langle z^0, \overset{(1)}{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)z^0 \right\rangle,$$

Решение задачи (4) - (6), (3), (7) можно искать в виде рядов по целым неотрицательным степеням ε

$$\overset{(j)}{K}_m(t,\varepsilon) = \sum_{i\geqslant 0}\varepsilon^i\left(\overset{(j)}{\overline{K}}_{mi}(t) + \overset{(j)}{\Pi}_i K_m(\tau_{j-1}) + \overset{(j)}{Q}_i K_m(\tau_j)\right), \quad m = \overline{1,4}, \tag{8}$$

$$\overset{(j)}{z}(t,\varepsilon) = \sum_{i\geqslant 0}\varepsilon^i\left(\overset{(j)}{\overline{z}}_i(t) + \overset{(j)}{\Pi}_i z(\tau_{j-1}) + \overset{(j)}{Q}_i z(\tau_j)\right), \; j = 1,2, \tag{9}$$

Оптимальное управление $u_{j*}(\cdot,\varepsilon)$ представится в виде

$$\overset{(j)}{u}(t,\varepsilon) = \sum_{i\geqslant 0}\varepsilon^i\left(\overset{(j)}{\bar{u}}_i(t) + \overset{(j)}{\Pi}_i u(\tau_{j-1}) + \overset{(j)}{Q}_i u(\tau_j)\right), \qquad (10)$$

где П означает пограничные функции вблизи левых концов промежутков $[0,t_1]$ и $[t_1,T]$, а Q - вблизи правых концов этих же промежутков.

Подставляя (8) в (4) и (5); (8), (9) - в (6), (3); (8), (9), (10) - в (7) и сравнивая обе части полученных равенств при одинаковых степенях ε, получаем задачи для определения коэффициентов разложений (8)–(10).

Ранее рассматривалась задача (1)–(3) в случае гладких коэффициентов (см. [1]).

Литература

1. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в линейной задаче управления с квадратичным функционалом. Дифференц. уравнения. 1975, 11, № 11, 1915 - 1921.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Некрасова И.В. (Белгород)
Nekrasova_I@bsu.edu.ru

В настоящей работе рассматривается задача о совместном движении деформируемого упругого тела, перфорированного периодической системой каналов (пор), заполненных жидкостью. Представленная модель описывает быстропротекающие физические явления такие как гидравлический удар, когда длительность процесса исчисляется долями секунд. В безразмерных переменных дифференциальные уравнения модели для безразмерного вектора перемещений $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ имеют вид:

$$\rho^\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \mathrm{div}\mathbf{P} + \rho^\varepsilon \boldsymbol{F},$$

$$\mathbf{P} = \chi^\varepsilon\alpha_\mu D\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda D(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon\mathbf{I},$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}^\varepsilon = 0,$$

$$p^\varepsilon = \chi^\varepsilon p^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon.$$

Рассматриваемая модель содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру области L. Нашей основной целью является вывод предельного режима при стремлении малого параметра ε к нулю, в случае когда

$$0 < \mu_0 < \infty, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \infty,$$

где

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon), \quad \lambda_1 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2}.$$

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Нестеров А.В. (Москва)

andrenesterov@yandex.ru

Строится формальное асимптотическое представление (ФАП) решения начально-краевой задачи для слабонелинейной системы уравнений

$$\varepsilon^2(U_t + DU_x) = AU + \varepsilon^2 F(U), \tag{1}$$

$$U(x,0) = U^0(x),\ U(0,t) = \Phi^0(t), \tag{2}$$

где $U(x,t) = \{u_i(x,t)\}$, $(i = \overline{1,n})$ - вектор решений, $0 < t < T, 0 < x < X, 0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, $D = diag\|d_{ii}\|_1^n$ – диагональная матрица, $d_{ii} > 0$, среди элементов d_{ii} есть хотя бы два не равных, $rang A = n-1$, $F(U) = \{f_i(U), i = \overline{1,n}\}$.

ФАП решения с точностью $O(\varepsilon)$ строится вне малой окрестности точки $(0,0)$ в виде суммы сглаженой регулярной части $\tilde U$, пограничных функций P, Q и функции переходного слоя S:

$$U = \tilde U_0 + P_0 + Q_0 + S_0 + r = U_0 + r, \tag{3}$$

здесь $U_0 = \tilde U_0(x,t,\zeta) + P_0(x,\tau) + Q_0(\xi,t) + S_0(\zeta,t)$ – ФАП решения, $r(x,t,\varepsilon)$ – остаточный член. Особенностью задачи является разрыв

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-06-00302, 09-01-12166)

вырожденного решениия на "псевдохарактеристике "системы, что приводит к появлению внутреннего переходного слоя $S_0(\zeta, t)$, который описывается нелинейным параболическим уравнением.

Литература

1. Нестеров А.В., Шулико О.В. Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с малой нелинейностью в критическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007, Т. 47, №3, С. 438-444.

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОРИЕНТИРОВАННОСТЬ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ ОДАРЕННЫХ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ ДЕТЕЙ

Никитина Н.И., Комарова Е.В. (Москва)
evkomarova@mail.ru

С развитием форм дистанционного обучения математике одаренных детей возникла потребность в содержательном распределении материала по трем уровням: пропедевтическому, базовому, профильному. Для реализации принципа профессиональной ориентированности дистанционного обучения математике одаренных детей преподавателями РГСУ был разработан оригинальный интернет-продукт "Математика в мире профессий"(для учащихся 10-11 классов), включающий модули: математика в социально-гуманитарных профессиях; математика в экономических профессиях; математика в инженерно-технических профессиях. Каждый модуль Интернет-продукта включал разделы: материал по использованию математических методов в конкретной профессиональной сфере; классификацию математических методов, с учетом профессиональной сферы; примеры практико-ориентированных задач; комментарии о связи математического содержания задач с разделами школьного курса, заданий единого государственного экзамена по математике; образцы решений профессионально-ориентированных задач; список рекомендуемой литературы.

При проектировании модулей дистанционного профессионально-ориентированного обучения математике одаренных детей необходимо: учитывать психовозрастные особенности детей; обеспечить взаимосвязь содержательного наполнения модулей образовательно-математического ресурса для одаренных детей с заданиями уровня В и С единого государственного экзамена по математике (ЕГЭ); реализовать эргономический подход к компоновке и временным интервалам подачи учебной информации; осуществлять раннюю профессионально-пропедевтическую специализацию математического материала; осуществлять уровневую дифференциацию материалов; обеспечить интерактивное взаимодействие между преподавателем и обучаемыми.

Литература

1. Никитина Н.И. Методика работы социального педагога с одаренными детьми // Никитина Н.И., Глухова М.Ф. Методика и техно-

логия работы социального педагога: Учеб. пособ. - М.: Владос, 2007.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА УРЫСОНА

Нурмагомедов А.М. (Махачкала)

nurmagomedov bk.ru

Рассматриваются нелинейные сингулярные интегральные уравнения общего вида

$$u(t) + \lambda \cdot \int_L \frac{f[t,\tau;u(\tau)]}{\tau - t} d\tau = g(t) \tag{1}$$

без ограничений на параметр λ, методом сведения их к нелинейной краевой задаче Римана. Здесь Г - линия на комплексной плоскости, которую, без потери общности, можно считать единичной окружностью :$|t| = |\tau| = 1$. При исследовании задачи существенным образом используются обобщенные формулы Племеля-Сохоцкого; если $F(t,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t,\tau}{\tau - z} d\tau$, то $F^+(t,t) - F^-(t,t) = f(t,t)$, $F^+(t,t) + F^-(t,t) = 2F(t,t)$. Вообще говоря, функции $F^\pm$ не будут аналитическими, соответственно, внутри и вне рассматриваемого контура. Ниже используются очевидные факты о том, что $||\Phi^+ \pm \Phi^-||^2_{L_2} = ||\Phi^+||^2_{L_2} + ||\Phi^-||^2_{L_2}$, $||\Phi^+ + \Phi^-, \Phi^+ - \Phi^-||^2_{L_2} = ||\Phi^+||^2_{L_2} - ||\Phi^-||^2_{L_2}$, когда $\Phi^\pm$ являются предельными значениями аналитической внутри и вне контура функции.

Теорема 1. Пусть комплекснозначная функция $f(t,\tau,z)$ определенная при$|t| = |\tau| = 1$, удовлетворяет известным условиям Каратеодори при комплексных z и неравенству $|f(t,\tau,z)| \leqslant M(\tau).|z|^\alpha + |g_1(\tau)|$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Тогда при $g_1(\tau) \in L_2, g(\tau) \in L_p(p \geqslant 2\alpha p > 1), M(\tau) \in L_{p_1}(p_1 > \frac{2}{1-\alpha})$ уравнение (1) имеет решение в пространстве $L_\gamma(\gamma = min(2,p))$.

Если, кроме того, функция f удовлетворяет условию Лифшица по z с некоторым коэффициентом, зависящим от t, то решение задачи единственно.

Для доказательства теоремы зафиксируем $t = t_0$ и, пользуясь приведенными выше формулами Племеля-Сохоцкого, сведем уравнение (1) к краевой задаче вида

$$\Psi(\Phi^+, \Phi^-) \equiv$$

$$\equiv \Phi^+(t_0,t) - \Phi^-(t_0,t) + \lambda f[t_0,t;\Phi^+(t_0,t) + \Phi^-(t_0,t)] - g(t) = 0 \quad (2)$$

Введем обозначения: $\nu(t_0,t) = \Phi^+ - \Phi^-, \nu' = \frac{d\nu}{ds}, t = e^{is}$. С учетом того, что $\nu(t_0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0(t_0)\cdot t^n$, имеем: $Re(\nu',\nu) = 0$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\Psi_1 \equiv \varepsilon\cdot \nu' + \Psi(\Phi^+,\Phi^-) = 0.$$

Оператор Ψ является коэрцитивным в L_2 относительно аргумента ν. Поэтому операторΨ_1 также является коэрцитивным. Поскольку последние уравнение можно свести к уравнению Вольтеровского типа, то оно имеет решение ν_ε, причем это решение единственно при выполнении условий теоремы.

Так как множество$\{\nu_\varepsilon\}$ равномерно ограниченно в L_2 и можем перейти к пределу при$\varepsilon \uparrow 0$ в метрикеL_2, то существует функция $\nu_0(t_0,t)$, являющаяся решением уравнения $\Psi = 0$. Тем самым, найдены соответствующие решения $\Phi_0^{\pm}(t_0,t)$. В условиях теоремы интегрируемость функции f не зависит от t_0. Поэтому t_0 можно считать переменной и функция $u(t,t) = \Phi^+(t,t) + \Phi^-(t,t) - g(t)$ является решением уравнения (1). При выполнении условии теоремы это решение является единственным в L_γ. Ограничение $\alpha < 1$ не является существенным. Это условие можно заменить ограничением снизу на функцию f. Без потери общности, можно считать, что $g(t) \equiv 0$.

Теорема 2. Пусть функция f или $-f$ удовлетворяет условиям

$$|g_1(\tau)\cdot|z|| - m\cdot|z|^p \leqslant Re[f(t,\tau,z)\cdot \bar{z}]; |f| \leqslant \varphi(|z|) + |g_2(\tau)|,$$

где $p > 2$, $g_1 \in L_2$, $g_2 \in L_q$, $m > 0$, функция φ — монотонно возрастающая. Тогда при произвольном положительном значении λ уравнение (1) имеет решение $u_0 \in L_q$.

Доказательство. Как и в теореме 1, сведем уравнение (1) к краевой задаче (2). На этот раз обозначим $v(t_0,t) = \Phi^+ + \Phi^-$. С учетом того, что $(v,\Phi^+ - \Phi^-) = ||\Phi^+||^2 - ||\Phi^-||^2, p > 2, g_1 \in L_2$, получаем коэрцитивность по v_n оператора Ψ в Lp в каждом n-мерном подпространстве вида $P_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k\cdot t^k$. Обозначим через $[*]_n$ проекцию элементов из L_p в L_q на подпространство вышеуказанных многочленов P_n. Тогда получаем, что при каждом фиксированном натуральном n имеем функцию $v_{n\varepsilon}$, являющуюся решением уравнения $[\Psi_1]_n = 0$. Множество $v_{n\varepsilon}$ ограниченно равномерно относительно n и ε в L_p. Тогда и множество $[f]_{n\varepsilon}$ равномерно ограниченно в L_q. Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему случаю.

Замечание. Доказаны разрешимость уравнения (1) в пространствах типа L_γ. При дополнительных ограничениях на функцию $f(t,\tau,z)$ можно показать, что эти решения принадлежат гельдеровским классам H_δ. Иными словами, если функция $f(t,\tau,z)$ по аргументам t и τ при каждом фиксированном комплексном z и удовлетворяет условию Лифшица по z с коэффициентом Лифшица, монотонно зависящем от $|z|$, то полученные выше решения принадлежат $H_{\delta'}(0 < \delta' < \delta)$. При малых λ это доказана (см., например, [2]). Наше утверждение доказывается методом продолжения.

Литература

1.Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, с.640.

2.Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980, с.414.

О НЕВОЗМОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ПОЛИНОМАМИ

Обгадзе Т.А. (Тбилиси)

tamaz@mail.ru

В работе доказывается теорема о том, что невозможно представить множество простых чисел в виде полинома $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{n-i}$. Для доказательства этой теоремы применяется теорема Эйлера о конечных разностях от полиномов $\Delta^n P_n(x) = a_0 \cdot n!$, проверяя, для последовательности простых чисел это условие, приходим к выводу, что последовательность простых чисел невозможно представить в виде многочлена конечной степени.

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОРТОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Огарков В.Б., Бугаков В.М. (Воронеж)

В работе [1] дано решение задачи плоской деформации $\varepsilon_z = 0$ ортотропного цилиндра в перемещениях. В данной статье приведено решение этой задачи в напряжениях.

Определяющая система уравнений полярно-симметричного плоского деформирования ортотропного цилиндра имеет следующий вид:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \frac{d\varepsilon_z}{dr} = 0 \qquad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \qquad (3)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{r\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\mu_{rz}}{E_z}\sigma_z \qquad (4)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\mu_{\theta r}}{E_r}\sigma_r + \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\mu_{\theta z}}{E_z}\sigma_z \qquad (5)$$

$$\varepsilon_z = 0 = -\frac{\mu_{zr}}{E_r}\sigma_r - \frac{\mu_{r\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{\sigma_z}{E_z} \qquad (6)$$

Для ортотропного материала [2]:

$$\frac{\mu_{r\theta}}{E_\theta} = \frac{\mu_{\theta r}}{E_r}; \frac{\sigma_{rz}}{E_z} = \frac{\mu_{zr}}{E_r}; \frac{\mu_{\theta z}}{E_z} = \frac{\mu_{z\theta}}{E_\theta} \qquad (7)$$

В случае плоской деформации имеем:

$$\sigma_z = E_z(\frac{\mu_{zr}}{E_r}\sigma_r + \frac{\mu_{z\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta) \qquad (8)$$

$$\varepsilon_r = A_1\sigma_r + A_2\sigma_\theta; \varepsilon_\theta = A_3\sigma_r + A_4\sigma_\theta; \qquad (9)$$

$$A_1 = \frac{(1-\mu_{rz}\mu_{zr})}{E_r}; A_2 = \frac{-(\mu_r\theta + \mu_{rz}\mu_{z\theta})}{E_\theta} \qquad (10)$$

$$A_3 = \frac{-(\mu_{\theta r} + \mu_{\theta z}\mu_{zr})}{E_r}; A_4 = \frac{(1-\mu_{\theta z}\mu_{z\theta})}{E_\theta} \qquad (11)$$

Уравнение совместности деформаций (2) можно привести к частному виду:

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \qquad (12)$$

Введем в рассмотрение потенциал напряжений:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}; \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr}; \qquad (13)$$

Подставим формулы (13) в закон Гука (9) и в уравнение совместности деформаций (18):

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{(A_3 + A_4 - A_2)}{A_4 r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{A_1}{A_4 r^2}\varphi = 0 \qquad (14)$$

Решение уравнение (14) имеет вид:

$$\varphi(r) = B_1 r^{\lambda_1} + B_2 r^{\lambda_2} \tag{15}$$

$$\lambda^2 + \frac{(A_3 - A_2)}{A_4}\lambda - \frac{A_1}{A_4} = 0 \tag{16}$$

$$\lambda_1 = \frac{(A_2 - A_3)}{2A_4} + \frac{1}{2A_4}\sqrt{(A_2 - A_3)^2 + 4A_1A_4} \tag{17}$$

$$\lambda_2 = \frac{(A_2 - A_3)}{2A_4} - \frac{1}{2A_4}\sqrt{(A_2 - A_3)^2 + 4A_1A_4} \tag{18}$$

Имеет место соотношение:

$$(A_2 - A_3)^2 > 0; 4A_1A_4 = 4\frac{(1 - \mu_{rz}\mu_{zr})(1 - \mu_{\theta z}\mu_{z\theta})}{E_r E_\theta} \tag{19}$$

Поскольку все коэффициенты Пуассона имеет величину, меньшую единицы, то коэффициент $4A_1A_2$ всегда больше нуля. Подкоренное выражение в формулах (17) и (18) всегда больше нуля, и корни λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, что соответствует физическому смыслу.

Деформации ε_r и ε_θ определяются по закону Гука:

$$\varepsilon_r = B_1(A_1 + \lambda_1 A_2)r^{(\lambda_1 - 1)} + B_2(A_1 + \lambda_2 A_2)r^{(\lambda_2 - 1)} \tag{20}$$

$$\varepsilon_\theta = B_1(A_3 + \lambda_1 A_4)r^{(\lambda_1 - 1)} + B_2(A_3 + \lambda_2 A_4)r^{(\lambda_2 - 1)} \tag{21}$$

В соответствии с формулами Коши (3) мы получим два разных перемещения. Авторами получена следующая формула для определения однозначного радиального перемещения:

$$u(r) = \frac{1}{2}(r\varepsilon_\theta + \int \varepsilon_r dr). \tag{22}$$

Литература

1. Огарков, В.Б. Расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической заготовки из древесного материала [Текст] Сб. научн. трудов ВГЛТА "Технология и оборудование деревообработки в XXI веке"/ В.Б. Огарков. - Воронеж: ВГЛТА, 2001.- с25-28.

2. Ашкенази, Е.К. Анизотропия механических свойств конструкционных материалов [Текст]: Справочник/ Ашкенази, Е.К., Э.К.Ганов.-Л.: Машиностроение, 1970.-200с

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Огарков В.Б., Мильцин А.Н. (Воронеж)

Изучена задача полярно-симметричного деформирования изотропного упругого цилиндра из несжимаемого материала. Закон Гука в условиях плоской деформации имеет следующий вид [1]:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \tag{1}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] \tag{2}$$

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \tag{3}$$

Соотношение (1)-(3) можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_r = \frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] \tag{4}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_k] \tag{5}$$

Разрешим соотношение (4)-(5) относительно напряжений:

$$\sigma_r = \frac{E_1}{(1-\mu_1^2)}(\varepsilon_r + \mu_1\varepsilon_\theta); \sigma_\theta = \frac{E_1}{(1-\mu_1^2)}(\varepsilon_\theta + \mu_1\varepsilon_r); \tag{6}$$

Коэффициенты E_1 и μ_1 имеют такой вид [1]:

$$E_1 = \frac{E_1}{(1-\mu_1^2)}; \mu_1 = \frac{\mu}{(1-\mu)} \tag{7}$$

$$\frac{E_1}{(1-\mu_1^2)} = \frac{E}{(1-\mu^2)[1-\frac{\mu^2}{(1-\mu)^2}]} = \frac{E(1+\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)} \tag{8}$$

В случае температурно-влажностного воздействия закон Гука имеет следующий вид [2]:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha T(r)] \tag{9}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r - (1+\mu)\alpha T(r)] \tag{10}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[\mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha T(r)] \tag{11}$$

В случае упругого несжимаемого материала при $\mu = 0{,}5$ коэффициенты в законе Гука (9)-(11) становятся равными бесконечности, что приводит к бесконечным значениям напряжений. Это противоречит здравому смыслу. Предположена следующая методика расчета цилиндра.

Сложим и вычтем соотношения (4) и (5):

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \tag{12}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta) \tag{13}$$

Легко доказать, что если выполняются соотношения (12) и (13), то автоматически удовлетворяются соотношения закона Гука (4) и (5). Для несжимаемого цилиндра при плоской деформации:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0; \varepsilon_z = 0 \tag{14}$$

Уравнение совместимости деформаций имеет следующий вид [3]:

$$\frac{d}{dr}[r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}] - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \frac{d}{dr}[r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}] + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0; \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{C_1}{r^3}; \varepsilon_\theta = \frac{C_1}{2r^2} + C_2 \tag{16}$$

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = \frac{C_1}{2r^2} - C_2 \tag{17}$$

Радиальное перемещение $u(r)$:

$$u(r) = -\frac{C_1}{2r} + C_2 r \tag{18}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = \frac{2E}{3}(\frac{C_1}{r^2} - 2C_2) \tag{19}$$

Воспользуемся уравнением равновесия:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \tag{20}$$

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2E}{3}(2C_2 - \frac{C_1}{r^2}) \tag{21}$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2E}{3}(\frac{2C_2}{r} - \frac{C_1}{r^3}) \tag{22}$$

$$\sigma_r = \frac{4}{3}EC_2 lnr + \frac{EC_1}{3r^2} + C_3 \tag{23}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \frac{2E}{3}(\frac{C_1}{r^2} - 2C_2) = \frac{4}{3}EC_2 lnr - \frac{EC_1}{3r^2} + C_3 + \frac{4}{3}EC_2 \tag{24}$$

Полученное аналитическое решение легко обобщается на неоднородный цилиндр, на тепловую задачу, на равномерно вращающийся цилиндр и на задачу вибрации цилиндра.

Литература

1. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов [Текст]: учеб. для вузов/ Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М.Атаров, А.А.Горшков. - М., 1995-568с.

2. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов [Текст]: учеб. для вузов/ Г.С. Писаренко. - Киев, 1974.-672с.

3. Огарков, В.Б. Полярно-симметрическое деформирование упругого цилиндра [Текст] Зимняя математическая школа/ В.Б. Огарков, В.М.Бугаков. - Воронеж: ВГУ, 2009.- с61-63.

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Огарков В.Б., Петков А., Дронов А.И. (Воронеж)

Рассмотрена полярно-симметричная задача колебания упругого цилиндра из несжимаемого материала в условиях плоской деформации. Определяющая система уравнений имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho\frac{(\partial^2\mu)}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta] \tag{2}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)}{E}[(1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_k] \tag{3}$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}[\sigma_r + \sigma_\theta] \tag{4}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{(1+\mu))}{E}[\sigma_r - \sigma_\theta] \qquad (5)$$

Для несжимаемого упругого материала:

$$\mu = 0,5; \varepsilon_z = 0; \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0 \qquad (6)$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{3}{2E}[\sigma_r - \sigma_\theta] \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dr}[r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}] - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dr}[r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}] + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{C_1}{r^3}; \varepsilon_\theta = -\frac{C_1}{2r^2} + C_2 \qquad (11)$$

$$u(r) = -\frac{C_1}{2r} + C_2 r \qquad (12)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2E}{3}(\frac{C_1}{r^2} - 2C_2) \qquad (13)$$

Подставим формулы (12) и (13) в уравнение движения (1):

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \rho[r\frac{d^2C_2}{dt^2} - \frac{1}{2r}\frac{d^2C_1}{dt^2}] + \frac{2E}{3}[\frac{2C_2}{r} - \frac{C_1}{r^3}] \qquad (14)$$

$$\sigma_r(r,t) = \frac{\rho r^2}{2}\frac{d^2C_2}{dt^2} + [\frac{4}{3}EC_2 - \frac{\rho}{2}\frac{d^2C_1}{dt^2}]lnr + \frac{2E}{3}\frac{C_1}{2r^2} + C_3(t) \qquad (15)$$

$$\sigma_\theta(r,t) = \frac{\rho r^2}{2}\frac{d^2C_2}{dt^2} + C_3(t) + [\frac{4}{3}EC_2 - \frac{\rho}{2}\frac{d^2C_1}{dt^2}]lnr + \frac{4}{3}EC_2 - \frac{EC_1}{3r^2} \qquad (16)$$

Необходимо использовать следующие граничные условия:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p(t); \sigma_r(r = r_2) = -q(t) \qquad (17)$$

Для цилиндра со свободным торцом [2]:

$$2\pi\int_{r_1}^{r_2} r\sigma_z dr = 0 \qquad (18)$$

Для цилиндра с днищем:

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} r\sigma_z dr = N(t) \tag{19}$$

где $N(t)$ — заданная осевая сила.

Функция $C_1(t), C_2(t)$ и $C_3(t)$ определяется из системы алгебраических уравнений (17)-(19).

Полученное решение может быть обобщено на задачу вибрации неоднородного упругого цилиндра.

Литература

1. Огарков, В.Б. Полярно-симметрическое деформирование упругого цилиндра [Текст] Зимняя математическая школа/ В.Б. Огарков, В.М.Бугаков. - Воронеж: ВГУ, 2009.- с61-63.

2. Ломакин, В.А. Теория упругости неоднородных тел [Текст]: учеб.для вузов/ В.А. Ломакин. - Москва: МГУ, 1976. -368 с.

ПРОБЛЕМА АБСОЛЮТНОГО ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Орёл Е.Н., Орёл О.Е. (Москва)

Oryol-EN@list.ru

В вариационном исчислении известен ряд необходимых условий локального экстремума. При некотором их усилении получается достаточное условие абсолютного (глобального) экстремума Вейерштрасса для поля экстремалей семейства кривых, однократно покрывающих исследуемую область.

В теории оптимального управления необходимым условием локального экстремума является принцип максимума Понтрягина [1].

В вариационном исчислении решение задачи на локальный экстремум представляет самостоятельный интерес, например, для классической механики. В противовес этому, оптимальное управление, по определению, есть управление, обеспечивающее абсолютный экстремум. Поэтому в теории оптимального управления исследование на абсолютный экстремум имеет решающее значение. Тем не менее, проблемы абсолютного экстремума здесь мало изучены - имеются продвижения при решении отдельных задач; из общих результатов можно отметить доказательство достаточности для линейных задач оптимального управления [2].

Исследуя на абсолютный экстремум задачи оптимального управления по аналогии с вариационным исчислением, надо рассматривать центральное поле экстремалей Понтрягина. В каждой точке x поля определено число $S(x)$ – значение функционала на экстремали, ведущей в x. Приведем простое необходимое и достаточное условие абсолютного экстремума: для любой траектории γ выполнено неравенство $S(x) + l(\gamma) \geqslant S(y)$, где $l(\gamma)$ – значение функционала на траекторииии γ; x, y – соответственно начальная и конечная точки траектории. Это – своеобразное неравенство треугольника, из которого можно аналитически вывести более эффективные достаточные условия абсолютного экстремума, в которых используется аналог функции Вейерштрасса $E = H(t, x, p, \dot{x}) - H(t, x, p, \xi)$, отличный от того, который приведен в [1, с. 277].

Литература

1. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1969, 384 с. Второе издание.

2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969, 408 с.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Павлова Н.Г. (Москва)

natasharussia@mail.ru

Исследуется задача оптимального управления

$$\dot{x} = f(x, u, t); \; t \in [t_1, t_2]; \quad u(t) \in U \; \forall t; \tag{1}$$

$$k^1(p) \leqslant 0; \; k^2(p) = 0; \; p = (t_1, t_2, x_1, x_2); \tag{2}$$

$$x_i = x(t_i), \; i = 1, 2;$$

$$G(x, t) \leqslant 0; \tag{3}$$

$$J = J(p, u) = k^0(p) + \int_{t_1}^{t_2} f^0(x, u, t)dt \to min. \tag{4}$$

Здесь x — фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — управление, f^0 — скалярная функция, а векторные функции f, G,

k^1 и k^2 принимают значения в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^{d_1}$ и $\mathbb{R}^{d_2}$ соответственно, где n, m, d, d_1, d_2 — заданные натуральные числа. Неравенства $k^1(p) \leqslant 0$ и $G(x,t) \leqslant 0$ понимаются как выполняющиеся покоординатно.

Для любых фиксированных (x,t) вектор-функция f линейна по переменной u, а функция f^0 выпукла по u.

Все функции, определяющие задачу, достаточно гладкие.

Допустимое управление — измеримая и существенно ограниченная функция $u(t), t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, для которой $u(t) \in U$ $\forall t$ (для п.в. t). Здесь U — выпуклый компакт.

Концевые и фазовые ограничения регулярны.

Минимум в рассматриваемой задаче ищется среди всевозможных, определенных каждое на своем конечном отрезке времени, решений (1), удовлетворяющих концевым и фазовым ограничениям (2), (3).

Для задачи (1) - (4) получены необходимые условия оптимальности при различных предположениях управляемости в концевых точках.

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Плаксина И.М. (Пермь)

impl @ list.ru

Пусть L^p — пространство суммируемых с p-ой степенью функций с нормой $\|\cdot\|_{L^p}$, $p \geqslant 1$; D^p — пространство абсолютно непрерывных функций, у которых производная принадлежит пространству L^p.

Предлагаемое исследование посвящено изучению свойств полуоднородной задачи Коши

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x} + h(t)x + (Tx)(t) = f(t), x(0) = 0. \qquad (1)$$

Правая часть $f(t)$ является элементом пространства L^p. В качестве решения задачи (1) рассматриваются функции из пространства D^p.

Функция $h(t)$ ограничена в существенном на каждом отрезке $[\epsilon; b]$, $\epsilon \in (0; b)$, и выполнено предельное условие $limits_{t \to +0} t * h(t) = k$. Таким образом, коэффициент $h(t)$ определяет сингулярность, сосредоточенную в точке $t = 0$, порядок которой совпадает с порядком сингулярности функции $frackt$. Оператор T вполне непрерывен.

Задачи, аналогичные (1), появляются, например, при изучении химических реакций. В этом случае $k <> 0$ означает порядок реакции. Доказано, что число k определяет существенные характеристики задачи (1). **Теорема 1.** Задача (1) в пространстве D_0^p нетерова тогда и только тогда, когда $k <> -(p-1)/p$, причем при $k < -(p-1)/p$ его индекс равен 1. Задача (1) фредгольмова тогда и только тогда, когда $k > -(p-1)/p$. На этом пути получены условия разрешимости задачи (1) при $k < -(p-1)/p$ и условия однозначной разрешимости задачи (1) при $k > -(p-1)/p$. Эти условия сформулированы в терминах оценки спектрального радиуса вспомогательных операторов, представляющих собой произведение оператора T и операторов, определяющих решение модельной задачи. При $k - (p-1)/p$ определено понятие квазирешения задачи (1). Получены эффективные признаки разрешимости (однозначной разрешимости) задачи (1).

Литература

Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Плотникова Ю.А. (Вологда)
japlotnikova@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$u_{xyz} - \lambda u = 0, \quad \lambda \in R, \tag{1}$$

в области G, ограниченной плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $y = x$, $z = h - y$, $z = x - y + h$, $h > 0$. Обозначим $G_- = G \cap \{(x, y, z) : x < 0\}$, $G_+ = G \cap \{(x, y, z) : x > 0\}$.

Задача V. Найти функцию $u(x, y, z) \in C(\overline{G})$, являющуюся решением уравнения (1) в областях G_- и G_+, и удовлетворяющую условиям:

$$u(x, x, z) = \Psi_1(x, z), \ (x, z) \in \{0 \leqslant x \leqslant h, \ 0 \leqslant z \leqslant h - x\},$$

$$u(x, 0, z) = \Psi_2(x, z), \ (x, z) \in \{-h \leqslant x \leqslant 0, \ 0 \leqslant z \leqslant x + h\},$$

$$u(x,y,0) = \omega_1(x,y),\ (x,y) \in \{0 \leqslant x \leqslant h,\ x \leqslant y \leqslant h\},$$

$$u(x,y,0) = \omega_2(x,y),\ (x,y) \in \{-h \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x+h\},$$

$$\lim_{x\to -0} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{y+z-h}^{x} u(t,y,z)(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}dt =$$

$$= \lim_{x\to +0} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{x}^{y} u(t,y,z)(t-x)^{-\lambda_2}t^{r_2}dt,$$

$(y,z) \in \{0 < y < h,\ 0 < z < h-y\}$, $0 < \lambda_i < 1$, $\lambda_i < r_i$, $\omega_i(x,y)$ и $\Psi_i(x,z)$ — заданные достаточно гладкие функции, $i = 1,2$.

Вопрос существования и единственности решения задачи V редуцируется к вопросу разрешимости двумерного интегрального уравнения Вольтерра II рода ([1], с. 161).

Теорема. *Если функции $\omega_i(x,y)$ и $\Psi_i(x,z)$ дважды непрерывно дифференцируемы в своих областях определения, $r_i - \lambda_i \geqslant 2$, $i = 1,2$, то существует единственное решение задачи V.*

Литература

1. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения*, Т. 1. - Л.:ГТТИ, 1934.

ПРОФЕССИОНАЛЬНО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ В СФЕРЕ СОЦИАЛЬНОЙ КВАЛИМЕТРИИ

Подзорова М.И., Галкина Т.Э. (Москва)
rgsukvm@mail.ru

Квалиметрию рассматривают как часть квалитологии, ориентированную на выявление закономерностей измеренческих практик, количественную и качественную оценку сущностных характеристик явлений и процессов (С.И.Григорьев, В.Н.Фомин и др.). Для формирования профессиональной подготовленности будущих социологов к работе в сфере социальной квалиметрии была разработана комплексная программа поэтапной подготовки в вузе социологов по специализации "Социальная квалитология".

Содержательный блок программы включает: вопросы универсальной ценности математических знаний; формализованные языки и их роль в математизации науки: язык исчисления высказываний;

множественная логика; описание теории предметной области; основы теории алгоритмов; математические модели, этапы моделирования, концептуальные модели социологии, функциональные и стохастические модели; проблемы моделирования социальных явлений и систем; взаимосвязи социальных факторов и математических моделей; математические модели совокупностей элементов и отношений между ними: операции над множествами, упорядоченное множество; элементы дифференциального и интегрального исчислений; модели абстрактных математических структур и отношений: алгебраические структуры, топологические структуры, структуры порядка; прикладные модели: неметрические модели, ситуационные модели, графовые модели процессов и явлений; вероятностные модели случайных событий и др.

При подготовке студентов к квалиметрической работе в образовательных учреждениях будущие социологи овладевали математической технологией вычисления коэффициента качества обучения.

Литература

1. Андреенков В.Т., Аргунова К.Д. Математические методы анализа и интерпретация социологических данных. - М.: Наука, 1989.

2. Григорьев С.И. Социальная квалиметрия: единство задач и многообразие методов их решения в современной социологии. - М.: МГСУ, 2004.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НА ТАЙМ-ШКАЛАХ rd-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И. (Воронеж)

Достаточно обильное по количеству работ научное направление в основном зарубежных авторов (см. [1]-[8]) посвящено построению теории дифференциальных уравнений на тайм-шкалах, где под тайм-шкалой (time Scales, временная шкала) понимается произвольное замкнутое множество из вещественной оси $\mathbb{R}$. Основные трудности здесь порождены отсутствием связности тайм-шкалы $\mathbb{T}$, когда $\mathbb{T}$ может оказаться весьма "дырявым" множеством даже типа канторовского. В отмеченном цикле работ создается весьма вычурный аналог дифференциального и интегрального исчисления, приводящий к слабой копии классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Нами показано, что вся их наука может быть вложена в развитую недавно воронежцами теорию импульсных задач в рамках классических представлений обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем пример модернизации их результатов.

Функция $f(x) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ названа в [1] rd-непрерывной, если она непрерывна в каждой точке $t = inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ и имеет ограниченный предел в точке $t = sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$. Базисным результатом всей этой тематики является теорема о Δ-интегрируемости каждой rd-непрерывной на $\mathbb{T}$ функции, где интеграл определен совершенно непонятным для обыденного уха образом.

Обозначим через $\hat{u}(t)$ константное продолжение с $\mathbb{T}$ на все $\mathbb{R}$ rd-непрерывной функции $u(t)$. Более точно: дополнение $\mathbb{T}$ до $\mathbb{R}$ есть открытое множество, являющееся объединением непересекающихся интервалов. Каждый такой интервал для наглядности назовем "дыркой" в $\mathbb{T}$, его концы - краями дырки. На каждом таком интервале $u(t)$ определена как константа, совпадающая на левом краю этой дырки со значением $u(t)$ в этой точке.

Теорема. *Для каждой rd-непрерывной функции $u(t) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ его константное продолжение $\hat{u}(t)$ на всю ось $\mathbb{R}$ локально интегрируемо по Лебегу, т.е. для любого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ существует и конечен*

$$(L)\int_a^b \hat{u}(t)dt.$$

Этот факт может служить основой для создания разумного дифференцирования на тайм-шкалах, полностью поглощающего их науку.

Литература

[1] *S.Hilger*// Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math. 18 (1990), 18-56.

[2] *M.Bohner, A.Peterson*// Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Birkh user Boston, MA, 2001.

[3] *M.Bohner, A.Peterson*// Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications/ Birkhäuser Boston, MA, 2001.

[4] *M. Bohner, A. Peterson*// ed. Advances in Dynamic Equations on Time Scales, BirkhËauser, Boston, 2003.

[5] *M.Bohner, R.Hering*// Perturbations of dynamic equations/ J.Difference Eqns Appl. - 2002. - 8, № 4. - P. 295-305.

[6] *М.Бохнер, А.А.Мартынюк*// Элементы теории устойчивости А.М.Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале/ Прикладная механика. - 2007. - 43. №9. - С. 3-27.

[7] *M.Bohner*// Some oscillation criteria for first order delay dynamic equations/ Far East J. Appl. Math. - 2005. - 18, №3. - P. 289-304.

[8] *A.Peterson, Y.N.Raffoul*// Exponential stabilitiof Dynamic equations on time scales/ Advances in Difference Equations. - 2005. - 2005:2. - P.133 - 144. [DOI: 10.1155/ADE.2005.133]

О DS-УРАВНЕНИЯХ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Бахтина Ж.И. (Воронеж)

Пусть Γ - геометрический граф, являющийся связным объединением некоторой совокупности $\{\nu\}$ прямолинейных интервалов из $\mathbb{R}^{\kappa}$ и некоторого множества $I(\Gamma)$ их смежных вершин (узлов). Пусть $C(\bar{\Gamma})$ - совокупность функций, непрерывных на замыкании $\bar{\Gamma}$ исходного графа Γ. Мы считаем, что пространство $C(\bar{\Gamma})$ наделено обычной чебышевской нормой, в которой оно оказывается банаховым пространством. Любой линейный и непрерывный на $C(\bar{\Gamma})$ функционал наверняка допускает аналогичное классической теореме Рисса представление в виде

$$l(u) = \int\limits_{\Gamma} udG,$$

где G - функция ограниченной вариации, определенная на множестве Γ-интервалов. Этот функционал мы называем *дифференциалом Стилтьеса* от функции G, что соответствует коренному смыслу дифференциала dx из обычного анализа.

Под DS-*уравнением* мы понимаем соотношение

$$-\int\limits_{\Gamma_\nu} d(pu') + \int\limits_{\Gamma_\nu} udQ - \int\limits_{\Gamma_\nu} dF = 0, \qquad (1)$$

где интегралы понимаются по Стилтьесу. Решения этого уравнения ищутся среди скалярнозначных на Γ функций, абсолютно непрерывных на каждом ребре и непрерывных в целом на Γ, производные которых имеют на Γ ограниченные вариации. Для такого уравнения естественно введение краевой задачи с условиями типа Дирихле

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \qquad (2)$$

Для задачи (1), (2) естественно и понятие функции влияния, аналог функции Грина G, позволяющей представлять решение задачи (1), (2) в виде

$$y(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x,s)f(s)ds.$$

Теорема. *Если мера, порождаемая функцией Q, неотрицательна, то функция Грина задачи (1), (2) строго положительна внутри* Γ.

Описанный факт дополняет результаты работы [1].

Литература

[1] *Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б.*// О дифференциалах Стилтьеса на геометрических графах. Доклады Академии Наук. 2008, Т. 423, №4, С. 452-454

О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ ВЫЗВАННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ КОРЫ МОЗГА[1]

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

anpokr@petrodvorets.spb.ru

В коре мозга есть крупные "пирамидные" нейроны с толстым "апикальным" дендритом, направленным поперёк коры. Вызванные потенциалы (ВП) коры создаются в основном токами через синапсы апикальных дендритов. При стимуляции нервные импульсы приходят "залпами" от нескольких систем нейронов в разные моменты времени и с разным распределением по глубине коры, вызывая синаптические токи, состоящие из нескольких компонентов. ВП могут содержать и потенциалы импульсов.

Модель сводится к обратной задаче для уравнения параболического типа. Используется кусочно-линейная аппроксимация тока через синапсы. В задаче выделения компонентов имеется много параметров, которые невозможно измерить при записи ВП. Поэтому был использован метод подбора решения некорректно поставленных задач [1]. Рассчитано несколько примеров, в том числе примеры разделения потенциала импульса аксона и синаптического ВП, а также разделения компонентов синаптических ВП.

Всякое уточнение математической модели приводит к увеличению числа подбираемых параметров. Поэтому для систематического использования метода подбора решения необходима разработка специализированной системы программ и соответствующие вычислительные мощности. Только после этого можно будет обеспечить как анализ уже известных из литературы вызванных потенциалов, так и математическое обеспечение новых экспериментальных работ.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. Гл. 1.

---

[1] Работа поддержана РФФИ, проекты 09-01-00473-а, 07-04-92167-а.

О НЕОБХОДИМОСТИ РАСШИРЕНИЯ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ГРАФА[2]

Покровский А.Н., Чижов А.В., Смирнова Е.Ю.
(Санкт-Петербург)
anpokr@petrodvorets.spb.ru

Геометрический граф определяется как связная совокупность рёбер и узлов, то-есть линий и точек; в каждом узле сходятся несколько рёбер. Связанная совокупность нескольких графов (подграфов) тоже граф; его подграфы имеют либо общие вершины, либо общие рёбра. На рёбрах задаются дифференциальные уравнения, в узлах - условия сопряжения или граничные условия. Примеры - водопроводные или электрические сети и нервные клетки (нейроны).

В случае нейронов известно, что их ветви (рёбра графов) могут быть связаны "порами дырочками в стенках соседних трубочек (ветвей). (Для водопровода это аварийный случай, для нейронов - нет.) Размеры пор различные и не зависят от толщины ветвей. На ветвях задаются системы уравнений параболического типа, в узлах - условия сопряжения. Для поры, чтобы остаться в рамках теории уравнений на графах, можно заменить пору короткой трубочкой (ветвью) с тем же поперечным сечением, как у поры, и после решения задачи устремить длину этой ветви к нулю. Получим предельный случай теории уравнений на графах.

В случае, когда пора между параллельными ветвями имеет значительную длину вдоль ветвей, неясно, как включить эту задачу в существующую теорию уравнений на графах. Но такая задача уже решалась численно и была доложена на конференции [1].

Литература

1. Смирнова Е. Ю., Чижов А. В. Синхронизация нейронов за счёт аксон-аксональных электрических контактов. "Нейроинформатика-2010 XII Всероссийская научно-техническая конференция, сборник научных трудов, часть 1. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. С. 86-94.

[2]Работа поддержана РФФИ, проекты 09-01-00473-а, 07-04-92167-а

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ С ФИНИТНЫМИ ОБРАЗАМИ ЯДЕР

Полосин А.А. (Москва)
alexei-polosin@mail.ru

Рассматривается уравнение $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x)$, где $k(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-l}^{l} e^{-ipx} K(p)\,dp$, $K(x) = K(-x) \in C^{\alpha}(-l,l)$, $\lim\limits_{x\to\pm l}(l^2-x^2)^{\beta}K(x) = 1$, $\beta \in [0,1)$. Показано, что уравнение может быть сведено к регулярному уравнению относительно образа Фурье искомой функции. В случае $K(x) \equiv 1$ доказано, что спектр соответствующего однородного уравнения состоит из двух перемежающихся последовательностей вида $\lambda_n^+ = \exp(\pi l^{-1}(\pi n/4 + \theta_+ + \ldots)^2)$, $n = 1, 3, \ldots$, и $\lambda_n^- = \exp(\pi l^{-1}(\pi n/4 + \theta_- + \ldots)^2)$, $n = 2, 4, \ldots$, где $\theta_\pm$ - некоторые постоянные.

Литература

1. Ukai S. Asymptotic Distribution of Eigenvalues of the Kernel in the Kirkwood-Riseman Integral Equation.// Journal of Math. Physics, 1971, 12:1, 83–92.

2. Пальцев Б.В. Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами.//Изв. РАН, Сер. матем., 2003, 67:4, 67–154.

3. Полосин А.А. Об асимптотике спектра интегрального оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией//Дифф. уравнения, 2010, 46:10 (в печати).

К ЗАДАЧЕ О КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Поносов Д.А. (Пермь)
dponosov@gmail.com

Рассматривается неавтономная динамичекская система

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A(t,i)x(i) + f(t+1), \quad t = 0,1,\ldots,T-1, \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $A(t,i)$ - $n \times n$-матрицы. В частном случае $A(t,i) = A(i), \forall t$ коэффициенты системы (1) могут быть результатом стандартных процедур эконометрического моделирования.

К динамической системе (1) добавляются статические ограничения вида:

$$\sum_{t=0}^{T}(B_t x(t)) \leqslant d, \qquad (2)$$

где B_t - $m \times n$-матрицы, d - $m \times 1$-вектор. Ограничения подобного типа охватывают, например, балансовые ограничения, точечные условия, в т.ч. начальные $x(0) = \alpha$, и др.

В общем случае система (1)-(2) может оказаться несовместной. Тогда возникает задача коррекции построенной модели. Систематическая теория коррекции статических систем изложена в [1-3].

Основанием для коррекции системы (1) может служить то, что она является результатом эконометрического моделирования, поэтому коэффициенты данной системы имеют погрешность. Тогда задачу коррекции естественно поставить в форме отыскания таких поправок коэффициентов h, которые приведут к совместности (1)-(2).

Коэффициенты системы (2) определены строго, поэтому коррекция осуществляться в виде штрафа за нарушение отдельного неравенства.

При переобозначении $X = col(x^T(0), \ldots, x^T(T))$ система (1)-(2) приобретает вид:

$$KX = F, \; BX \leqslant d. \qquad (3)$$

К системе (3) применяется метод параметризации, разработанный И.И. Ереминым и А.А. Ватолиным [2-3]. Параметризованная система запишется в виде:

$$(K + H)X = F - h_1, \; BX \leqslant d - h_2. \qquad (4)$$

Для системы (4) ставится задача аппроксимации

$$inf\left\{\Phi(h) | h \in M \cap S\right\},$$

где h - вектор параметров системы (4), S - допустимое множество параметров, M - множество параметров, для которых параметризованная система (4) имеет решение, $\Phi(h)$ - функция качества аппроксимации. Решение этой задачи дает оптимальный, с точки зрения критерия $\Phi(h)$, вектор коррекции h.

Литература

1. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983, 336 с.

2. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988, 160 с.

3. Ватолин А.А. О симметрической аппроксимации несобственных задач линейного программирования // Несобственные задачи оптимизации. Свердловск, 1982. С. 67-74.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ СТУПЕНЧАТОЙ СТРУКТУРЫ В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Простокишин В.М., Лещенко Ю.М. (Москва)
vmp@ocean.ru

Обсуждаются результаты численного моделирования устойчиво стратифицированного плоского сдвигового турбулентного потока. Рассматривается модель плоского турбулентного сдвигового потока несжимаемой жидкости. Устойчивая стратификация жидкости подавлят турбулентность и поэтому уменьшает эффективность турбулентного массообмена. При построении модели сделаны два допущения: (a) стационарный поток масс как функция от градиента её солености в устойчиво стратифицированном турбулентном потоке не является монотонным: при малых градиентах солёности поток возрастает с нуля и опять уменьшается до нуля после достижения им некоторого критического значения; и (b) локальная турбулентная диффузия соответствует равновесному градиенту солёности $\partial_z C$ в момент времени $(t-\tau)$, при этом время задержки τ постоянно и мало по сравнению с характерными временами турбулентного движения. Тогда из баланса масс турбулентных потоков следует следующее уравнение для средней солёности [1]:

$$\partial_t C = \partial_z(\Phi(\partial_z C)) + \tau\partial_{tz}(\Psi(\partial_z C)).$$

Здесь z и t вертикальная координата и время; для функций Φ и Ψ имеем следующие выражения (при $c = \partial_z C$):

$$\Phi(c) = ck_0(c)\ ,\ \Psi(c) = -\Phi(c) + \int\limits_0^c sk_0(s)ds \quad \text{для} \quad c \geqslant 0.$$

Выбор $k_0(c) = Ac/(1 + Bc^2)$ базируется на экспериментальных данных. Вычислительные эксперименты показали существование промежуточно асимптотического решения с формированием ступенчатого распределения солёности при превышении начальным градиентом солёности некоторого критического значения. Скорость формирования слоёв и их количество существенным образом зависило от величины времени релаксации τ турбулентного потока и увеличивалось с его ростом.

Литература

[1] G.I.Barenblatt et.al. A mathematical model of turbulent heat and mass transfer in stable stratified shear flow. J.Fluid Mech., 253, p.341.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Пучкова А.И. (Москва)
apuchkova@gmail.com

В работе рассматривается модель распределения инвестиций, которая приводит к следующей задаче оптимального управления на бесконечном горизонте времени

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \\ x(0) = x_0, \\ J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t}\ F(x(t))dt\ \to \min\limits_{u(\cdot)}, \\ 0 \leqslant u(t) \leqslant 1. \end{cases}$$

Здесь x и u – одномерные фазовая переменная и управление соответственно, $\rho > 0$, $x_0 > 0$ – заданные константы. $F(x)$ – непрерывная функция, определённая при всех $x \in R$, у которой имеется единственная точка минимума $a > 0$, причём она убывает при $x < a$ и возрастает при $x > a$. Класс допустимых управлений состоит из всех измеримых на $t \in [0, +\infty)$ функций $u(t)$ со значениями из отрезка $[0, 1]$, таких, что несобственный интеграл J сходится.

Решение задачи зависит от того, может ли управляемая система стоять в точке a, то есть поддерживать режим $(u = a, x = a)$. Сначала рассматривается случай $0 < a \leqslant 1$, в котором возможен особый режим. Для этого случая строится решение, оптимальность которого проверяется непосредственной оценкой приращения функционала.

Далее задача исследуется при $a > 1$. В этом случае особого режима нет. С помощью принципа максимума Понтрягина, исследуя поведение сопряжённой переменной и траекторий системы, строится пара $(u(t), x(t))$ — претендент на роль оптимального решения. В работе показано, что оптимальное управление не может иметь более одной точки переключения. Функционал параметризуется с помощью этой точки переключения, и проводится анализ полученной функции на минимум. Оптимальность построенной пары доказывается с помощью теоремы о существовании оптимального управления.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕСКОЛЬКИМИ ОПЕРАТОРАМИ СУПЕРПОЗИЦИИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ. 3

Ратыни А.К. (Иваново)

akratyni@isuct.ru

Предлагается обобщение результатов, опубликованных автором в сборниках "Современные методы теории краевых задач-, Воронеж: ВГУ, 2008 и 2009.

Напомним, что для уравнения второго порядка, эллиптического в ограниченной области $D \subset R^n$ (уравнения (1)), изучается классическая разрешимость задачи с нелокальным краевым условием

$$u(x) - \sum_{j=1}^{k} \beta_j(x) u(\sigma_j x) = \psi(x) \quad (x \in S \equiv \partial D); \tag{2}$$

здесь σ_j - однозначные непрерывные отображения $\bar{D}$ в $\bar{D}$ ($j = 1, ..., k$; $k \geqslant 2$).

Кроме определённых ранее множеств

$$\hat{\Omega} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \hat{\omega}_i, \quad \text{где } \hat{\omega}_i = \bigcup_{j=1}^{k} \hat{\omega}_{ij}, \ \hat{\omega}_{ij} = \{x \in S : \sigma_j x \in \hat{\omega}_{i-1}\}, \ \hat{\omega}_{-1} \equiv S,$$

введём в рассмотрение множества

$$\hat{\Omega}_j = \bigcap_{i=0}^{\infty} \hat{\omega}_{ij}, \quad j = 1, ..., k.$$

Нетрудно показать, что

$$\hat{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{k} \hat{\Omega}_j.$$

Обозначим через $\kappa_j(x)$ характеристическую функцию множества $\hat{\Omega}_j$
(т.е. $\kappa_j(x) = 1$ при $x \in \hat{\Omega}_j$, $\kappa_j(x) = 0$ при $x \in R^n \setminus \hat{\Omega}_j$).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (L),(B), $\hat{\Omega} \neq \varnothing$. *Пусть существуют число* a_0 *и функция* $\nu_0(x)$ *такие, что:* $a_0 \in (0,1)$, $\nu_0(x) \in C(\hat{\Omega})$, $\nu_0(x) > 0$ *для* $x \in \hat{\Omega}$, $\nu_0(x) = 0$ *для* $x \in \bar{D} \setminus \hat{\Omega}$,

$$\sum_{j=1}^{k} |\beta_j(x)| \kappa_j(x) \nu_0(\sigma_j x) \leqslant a_0 \nu_0(x), \ \ x \in \hat{\Omega}.$$

Тогда справедливы все утверждения теорем 1,2 (*задача* (1),(2) *фредгольмова в* $C_{2+\alpha}(D)$).

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Редькина Т.В., Новикова О.В. (Ставрополь)
oly-novikova@yandex.ru

Для нелинейного уравнения, полученного в [1] доказано свойство Пенлеве и получены частные решения.

ТЕОРЕМА. Дифференициальное уравнение

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \overline{p}^2) = 0 \tag{1}$$

имеет частные решения в виде

$$p(x,t) = \mathrm{sh}(\alpha x - (4+\alpha^2)t + \delta) + i\,\mathrm{ch}(\alpha x - (4+\alpha^2)t + \delta),$$

$$p(x,t) = \mathrm{ch}(\alpha x + (4-\alpha^2)t + \delta) + i\,\mathrm{sh}(\alpha x + (4-\alpha^2)t + \delta).$$

Доказательство. Представив $p = u + iv$, $\overline{p} = u - iv$, где $i^2 = -1$, $u, v \in Re$ и выделив в разложении (1) действительную и мнимую части, получим, что уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_t + v_{xx} - 4v(u^2 - v^2) & = & 0, \\ v_t + u_{xx} - 4u(u^2 - v^2) & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Рассмотрим первый случай. Положим $u = \operatorname{sh} f(x,t)$, $v = \operatorname{ch} f(x,t)$. Подставив функции u и v и их частные производные в систему (2), получим

$$\begin{cases} (f_t' + (f_x')^2 + 4)\operatorname{ch} f + f_{xx}'' \operatorname{sh} f & = & 0, \\ (f_t' + (f_x')^2 + 4)\operatorname{sh} f + f_{xx}'' \operatorname{ch} f & = & 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) совместна, если выполняется условие

$$f(x,t) = \alpha x + \beta t + \delta,$$

где $\beta = -4 - \alpha^2$.

Аналогично теорема доказывается и для второго случая.

Литература

1. Редькина Т.В., Карюк А.И., Лушникова Г.А. Нелинейные уравнения в частных производных, имеющие операторную структуру изоспектральной деформации // Системы обработки информации. - Вып.2 (69). - Харьков, 2008. - С.18-28.

ОЦЕНКИ РАВНОМЕРНО УСТОЙЧИВОЙ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Романова М.Ю. (Воронеж)

maria.romanovaru@mail.ru

Пусть $\mathcal{H}$ - комплексное гильбертово пространство, $End\mathcal{H}$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - генератор сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\mathcal{H}$ и полугруппа T является равномерно устойчивой, т.е. $\|T(t)\| \leqslant Me^{-\gamma t}, t \geqslant 0$ для некоторых постоянных $M, \gamma > 0$. Условие равномерной устойчивости полугруппы гарантирует, что спектр $\sigma(A)$ оператора A лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\gamma(A) = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\|$ конечна [1], где $R(\cdot, A)$ резольвента оператора A.

Рассмотрим уравнение Ляпунова $A^*W + WA = -I$, решением которого является оператор $W \in End\mathcal{H}$. Обозначим через $\nu(A)$ величину $\nu(A) = \|W\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \|R(i\xi, A)x\|^2 d\xi$.

Для двух введённых констант, верно неравенство $\gamma(A) \leqslant 2\nu(A)$ [2].

Наряду с величинами $\gamma(A)$ и $\nu(A)$ также будет использоваться постоянная $K(T) = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T(t)\|$.

Теорема 1. Пусть $T : \mathbb{R}_+ \to End\mathcal{H}$ - равномерно устойчивая полугруппа операторов и и $\alpha > 0$, удовлетворяющее условию $\alpha < \frac{1}{\gamma(A)}$, то

$$\|T(t)\| \leqslant \begin{cases} K(T), & 0 \leqslant t < 1; \\ \frac{1}{t}\frac{\nu(A)}{(1-\alpha\gamma(A))^2}e^{-\alpha t}, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Для оценки величины $K(T)$ можно использовать числовую область оператора A, т.е. подмножество $\Theta(A)$ из $\mathbb{C}$ вида $\Theta(A) = \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$. Введём в рассмотрение величину $\beta(A) = \sup\limits_{\lambda \in \Theta(A)} Re\lambda$.

Если $\beta(A) < \infty$, то из монографии [3] следует оценка $\|T(t)\| \leqslant e^{\beta t}, t \geqslant 0$. Таким образом, $K(T) \leqslant e^{\beta(A)}$. Поэтому имеет место

Теорема 2. Если $\beta(A) < \infty$ и $T : \mathbb{R}_+ \to End\mathcal{H}$ - равномерно устойчивая полугруппа операторов и $\alpha > 0$, удовлетворяющее условию $\alpha < \frac{1}{\gamma(A)}$, то

$$\|T(t)\| \leqslant \begin{cases} e^{\beta(A)}, & 0 \leqslant t < 1; \\ \frac{1}{t}\frac{\nu(A)}{(1-\alpha\gamma(A))^2}e^{-\alpha t}, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Литература

1. Баскаков А.Г., Синтяев Ю.Н. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений. - Дифференциальные уравнения, 2010. - Т. 46. №2. С.1-10. 2. Chicone C., Latushkin Y. Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations. - Amer. Math. Soc. 1999. 3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.:Мир, 1972.

ТВОРЧЕСКИЕ, ОДАРЁННЫЕ ДЕТИ... ФОРМЫ РАБОТЫ, ПОИСКИ, РЕШЕНИЯ, ПЛАНЫ

Рубцова Г.Р. (Воронеж)

Одна из приоритетных задач современного общества - это создание условий, обеспечивающих выявление и развитие творческих, одарённых детей, реализация их потенциальных возможностей. Эту задачу частично решает школа, которая пытается инновационную образовательную систему адаптировать к потребностям каждого ребёнка, индивидуализировать обучение и воспитание.

В своей педагогической деятельности я отвожу большое место для работы с творческими одаренными детьми, которые проявляют интерес к моему предмету.

Какие бы новации ни вводились, в основном, на уроке, как и сотню лет назад, встречаются участники образовательного процесса: учитель-ученик. На уроке, а часто урок превращается в диспут, творчески одаренные дети лидируют на всех этапах. Учителю обязательно нужно выслушать их мнение, похвалить. Они ждут позитивную оценку собственной деятельности, часто остаются поспорить на переменах. Сложные задачи им скучно решать в одиночестве, они рвутся к доске, пытаясь вовлечь в диспут весь класс и меня. Это мои любимые моменты урока.

Совместная внеурочная деятельность с этими детьми разнообразна:

- очные олимпиады различного уровня;
- заочные олимпиады («Авангард», «Шаг в будущее», олимпиады МФТИ...)
- Киселевские чтения;
- НОУ школы и ВГУ;
- университетская конференция;
- конкурс «Что? Где? Когда?»

В этом году результаты деятельности порадовали всех: из 32 призовых мест на областных олимпиадах 3 места заняты математиками. Особая гордость - второе командное место. Эти достижения стали возможными только при огромном желании быть первыми, победить. Творческий и интеллектуальный союз учитель-ученик дает результат не первый год, но надо идти вперед. А что дальше?

В этом году в МОКе №2 создана «Математическая школа» для учащихся 9-10-11 классов, которая поставила и старается реализовать важнейшие цели и задачи:

- усилить интерес к предмету;
- развить у учащихся математический кругозор, логическое мышление, геометрически-интуивные навыки и т.д.;
- научить учащихся приемам дружеского общения при обсуждении и решении общих проблем и задач;
- показать красоту окружающего мира посредством предмета;

– сформировать у учащихся чувство уважения к мнению другого человека;

Эти цели мы стараемся реализовать различными способами:

– еженедельные занятия с учащимися;- индивидуальные занятия;

– работа с командой (12 человек);

– участие в ЗМШ;

– участие в сезонных мат. школах, проводимых на каникулах. А в наших планах создание летней математической школы на базе математического факультета ВГУ. Мы очень хотим учиться, отдыхать, общаться! И, по-моему, совместить все это возможно!

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассмотрим пучок $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ вида

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk}\in \mathbf{C}, \quad p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{s+k=\kappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0)=0,\ i=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\sum_{s+k\leqslant\kappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0)+\sum_{s+k\leqslant\kappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1)=0,\ i=\overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda,\alpha_{isk},\beta_{isk}\in\mathbf{C}$, $\kappa_{i0},\kappa_{i1}\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $1\leqslant l\leqslant n-1$. Пусть корни $\omega_1,\ldots,\omega_n$ характеристического уравнения $\sum_{s+k=n}p_{sk}\omega^k=0$ различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n. \tag{4}$$

Введем обозначения: $a_{ij}=\sum\limits_{s+k=\kappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k$, $b_{ij}=\sum\limits_{s+k=\kappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_j^k$; $\kappa_i=\min\{\kappa_{i0},\kappa_{i1}\}$, $i=\overline{l+1,n}$; $[n]_+=\begin{cases} n, & \text{если } n\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } n<0.\end{cases}$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1)

Отметим, что краевые условия (2)–(3) при $2l < n$ уже не являются полураспадающимися. Тем не менее, удалось распространить теорему автора о кратной полноте и на этот случай.

Теорема 1. *Если верно (4), $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{l} \neq 0$, $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0$, $\det(b_{ij})_{i,j=l+1}^{n} \neq 0$, то система корневых функций пучка (1)–(3) m-кратно полна в $L_2[0,1]$ при $m \leqslant n-l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=l+1}^{n}[m-1-\kappa_i]_+$.*

В случае $l = 1$ из теоремы 1 получаем $(n-1)$-кратную полноту корневых функций в $L_2[0,1]$. Что же касается n-кратной полноты, то оказывается справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Если выполняется условие (4), $l = 1$ и $a_{11} \neq 0$, то система корневых функций пучка (1)–(3) n-кратно неполна в $L_2[0,1]$ с бесконечным дефектом.*

БИФУРКАЦИИ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ОДНОМ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕВА[1]

Рябов П.Е. (Москва)

orelryabov@mail.ru

Интерес к оригинальной работе Д.Н. Горячева [1] вызван статьей А.В. Цыганова [2], в которой предложены квадратурные формулы для разделения переменных одного частного случая интегрируемости уравнений Эйлера в динамике твердого тела. Систему уравнений можно представить в гамильтоновой форме $\dot{s}_i = \{s_i, H\}$, $\dot{r}_i = \{r_i, H\}$ относительно стандартной скобки Ли-Пуассона на R^6 с гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(c(r_1^2 - r_2^2) + \tfrac{b}{r_3^2}\right).$$

Дополнительные интегралы, указанные в [1] и [2], имеют вид

$$F = \left(s_1^2 - s_2^2 + cr_3^2 - \tfrac{b(r_1^2 - r_2^2)}{r_3^2}\right)^2 + 4\left(s_1 s_2 - \tfrac{br_1 r_2}{r_3^2}\right)^2,$$
$$K = \left(s_1^2 + s_2^2 + \tfrac{b}{r_3^2}\right)^2 + 2cr_3^2(s_1^2 - s_2^2) + c^2 r_3^4.$$

Интеграл K связан функциональной зависимостью с F на симплектическом многообразии $P^4 = \{F_1 = f_1, F_2 = 0\}$, где $F_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $F_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ – функции Казимира относительно стандартной скобки Ли-Пуассона. Бифуркации первых интегралов при $b = 0$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00043-а)

(интегрируемый случай Чаплыгина [3]) исследованы в [4]. В докладе приводится анализ бифуркаций первых интегралов при $b \neq 0$. В основе исследования лежит построение бифуркационного множества и классификация особенностей ранга 0 и 1 отображения момента.

Литература

1. *Горячев Д.Н.* Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшавские Университетские Известия. 1916. Кн.3. С. 1-13. **2.** *Tsiganov A.V.* On the generalized integrable Chaplygin system // Preprint: arXiv:1001.1507, 2010. **3.** *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о движении твердого твердого тела в жидкости // Полн. собр. соч., т.1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. с. 151-158. **4.** *Orel O.E., Ryabov P.E.* Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem // Regul. Chaotic Dyn., 1998, 3 (2), с. 82-91.

СВОЙСТВО СОПРЯЖЕННОСТИ НОВОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Садчиков П.В. (Воронеж)

Введем интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp\left(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, где $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Функция $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$ такая, что $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}\, u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$.

Определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]$, где $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$.

Будем говорить, что символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов

$S^{\sigma}_{\alpha,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \overline{R}^1_+$, $\sigma \in R^1$, $0 \leqslant \delta < 1$, если функция $\lambda(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы оценки $\left|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial^l_\eta \lambda(t,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - l + \delta j}$ с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок.

Определение. Сопряженным оператором к весовому псевдодифференциальному оператору $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ назовем оператор $P^*(t, D_x, D_{\alpha,t})$, удовлетворяющий равенству

$$(P(t, D_x, D_{\alpha,t})u(x,t), v(x,t))_{L_2(R^n_+)} = \\ = (u(x,t), P^*(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t))_{L_2(R^n_+)}$$

для всех $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, $u(x,t) \in L_2(R^n_+)$ таких, что $P(t, D_x, D_{\alpha,t})u(x,t) \in L_2(R^n_+)$. Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(R^n_+)$.

Теорема. Пусть $p(t,\xi,\eta) \in S^m_{\alpha,\sigma}(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{R}^1_+$, $m \in R^1$, $\delta \in [0;1)$. Тогда оператор $P^*(t, D_x, D_{\alpha,t})$, сопряженный к весовому псевдодифференциальному оператору $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ с символом $p(t,\xi,\eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $p^*(t,\xi,\eta) \in S^m_{\alpha,\delta}(\Omega)$. Причём справедливо соотношение $p^*(t,\xi,\eta) - \sum\limits_{j=1}^{N-1} \frac{(i)^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j \partial^j_\eta \overline{p}(t,\xi,\eta) \in S^{m-N}_{\alpha,\delta}(\Omega)$ для любых $N = 1, 2, \ldots$.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ НАЧАЛАМ АНАЛИЗА В ШКОЛЕ И ВУЗЕ В ЕЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ

Салахов А.З. (Махачкала)

agamet-s@yandex.ru

Проблема преемственности школьного и вузовского математического образования находится под пристальным вниманием не только школьных учителей и вузовских преподавателей математики, но и ученых. Одним из существенных результатов ее исследования, полученных в последние годы, является выделение в ее структуре методологического аспекта [1]. Данный аспект М. В. Шабановой характеризуется как разрыв связей при переходе от метаэмпирической формы учебного познания с элементами дедукции (характерной для процесса изучения математики в 7-11 классах средней общеобразовательной школы) к квазиэмпирической форме (составляющей основы развертывания содержания базовых вузовских курсов математики).

Опыт преподавания высшей математики в вузе показывает, что наиболее ярко проблема преемственности в ее методологическом аспекте проявляется при изучении студентами тех разделов, которые содержательно связаны со школьным курсом математики. К числу таких разделов относятся и начала математического анализа.

Ознакомление с фундаментальными понятиями математического анализа учащихся старших классов общеобразовательной школы осуществляется с использованием методов изложения (интерпретация, математический эксперимент, индукция, аналогия и др.), которые существенно отличаются от вузовских подходов (дедукция, формализация и др.).

Эти различия, усугубляющиеся "кажущейся известностью" материала, делают проблему преемственности трудно преодолимой. Несмотря на большое внимание, которое уделяют вузовские преподаватели теоретическим построениям и строгости выводов, большинство студентов не могут самостоятельно отказаться от привычных и "субъективно эффективных" представлений и способов рассуждения.

Признавая свое бессилие, вузовские преподаватели часто требуют исключения из программы общеобразовательной школы начал математического анализа. Однако, такое решение, на наш взгляд, принесло бы больше вреда, чем пользы математическому образованию. Прикладная и мировоззренческая значимость данного материала является на сегодняшний день неоспоримой.

Мы предлагаем другой путь - построение обучения математическому анализу в вузе с учетом и на основе предварительных знаний учащихся, накопленного ими опыта решения прикладных и математических задач средствами математического анализа. Практическая реализация этого подхода требует построения обучения на основе использования следующей методической схемы:

1) актуализация имеющихся у учащихся знаний и опыта математической деятельности;

2) подведение учащихся к осознанию ограниченности, неоднозначности или несовершенства этих знаний и опыта;

3) вовлечение учащихся в учебно-познавательную деятельность, направленную на переосмысление и совершенствование их знаний

и опыта (доказательство эквивалентности известных определений; уточнение в определениях понятий, смысловое значение которых казалось интуитивно ясным; уточнение и обобщение известных способов решения задач и др.).

По своей структуре данная методическая схема сходна со схемой развития математических знаний в период обоснования математического анализа (XVIII - XIX века) [2], [3]. Это позволяет не только привлекать историко-научные данные, относящиеся к этому периоду развития математического анализа к процессу обучения, но и вовлекать студентов в деятельность переосмысления собственного опыта, знаний и испытываемых затруднений через сопоставление с уровнем научных знаний и затруднениями ученых, возникавших в тот исторический период.

Литература

1. Шабанова М.В. Формирование методологических знаний при изучении математики в системе "школа-вуз": Диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук - М., 2005 - 422 с.

2. Петрова С.С., Демидов С.С. Развитие математического анализа /Очерки по истории математики .- Под ред. Б.В. Гнеденко. - М.: Изд-во МГУ, 1997 -С.7-93

3. Рыбников К.А. История математики. - М.: МГУ, 1994 - 496с.

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НАКЛОННЫМ ДНОМ

Свиридова Е.А. (Воронеж)

formytravel@yandex.ru

Рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} - gu_3 \cos\alpha = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + gu_3 \sin\alpha + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - N^2 g^{-1}(u_2 \sin\alpha - u_1 \cos\alpha) = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0;$$

$$x_1 \in \mathbf{R}, \;\; x_2 \geqslant 0, \;\; x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2_+, \;\; t > 0,$$

$$u_1(t,x)|_{t=+0} = u_2(t,x)|_{t=+0} = u_3(t,x)|_{t=+0} = 0;$$

$$u_2(t, x_1, x_2)|_{x_2=+0} = w(x_1, t) = \frac{\partial \psi(x_1, t)}{\partial x_1},$$

описывающая в полупространстве с наклонным дном, то есть, когда сила тяжести отклонена от нормали к границе полупространства на угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$, малые гравитационные колебания идеальной несжимаемой жидкости. Краевое условие может быть записано через функцию $\psi(x_1, t)$ в силу соленоидальности вектора (u_1, u_2). Построено классическое решение данной начально-краевой задачи, компоненты которого оценены в шкале пространств С. Л. Соболева. Выделен класс единственности решения. Определены достаточные условия принадлежности решения построенному классу единственности. В случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$построены асимптотические разложения компонент решения при $t \to \infty$. Приведем одно из них:

$$u_1(x_1, x_2, t) = \frac{-2\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi^2\sqrt{N}}(\cos(tN) + \sin(tN))t^{-\frac{3}{2}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^\infty \frac{\cos(x_1\lambda)}{(1+\lambda^2)^2}\lambda d\lambda \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty (1 - \frac{\partial^2}{\partial y_1{}^2})\psi(y_1, \tau)dy_1 d\tau +$$

$$+\frac{1 + |x_2|^3 + |x_1|^3}{|x_2|^3}O(t^{-2}).$$

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА В.Л. ЛЕОНТЬЕВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ФРИЗА

Северин Г.Ю. (Воронеж)

Функции, используемые в МКЭ, должны обладать рядом свойств, чтобы получить достаточную точность и, по возможности, максимально сократить количество арифметических операций. Эти функции должны быть финитными, или, хотя бы иметь хорошую локализованность. Гладкость таких функций должна быть адекватна предполагаемой гладкости точного решения. Слишком хорошая гладкость аппроксимирующих функций, как, например, у атомарных ир-функций Рвачёва, вредна для аппроксимации решений, у которых гладкость нарушается (например - на границе области). Система функций, используемая в МКЭ, должна обладать хорошими аппроксимационными свойствами. Полученная после применения

МКЭ система обыкновенных дифференциальных уравнений должна быть максимально простой, т.е. линейной, с ленточной матрицей, желательно, - с диагональным преобладанием.

Предлагается развитие идеи В.Л. Леонтьева - непосредственного построения систем ортогональных финитных функций вида $\left\{f\left(\frac{x-x_j}{h}\right)\right\}_{j=0}^{m}$ на основе сдвигов одной функции

$$f(x) = \begin{cases} a_l x^{2l} + a_{l-1}x^{2l-2} + \ldots + a_1 x^2 + 1, & x \in [-1,1], \\ 0, \quad x \in (-\infty,-1)\bigcup(1,\infty). \end{cases}$$

Описывается алгоритм построения системы ортогональных финитных функций, адаптированной для решения уравнения Кортевега-де-Фриза. На этом примере видно, как строить такие системы ОФФ для достаточно широкого класса задач с частными производными. Функция $f(x)$ чётная, что сильно упрощает её синтез. Построенная система функций будет трижды непрерывно дифференцируемой и удовлетворять четырём специальным условиям ортогональности в $L_2(\mathbb{R})$, благодаря чему в результате проектирования на соответствующее конечномерное подпространство для функций-амплитуд матрица системы будет иметь диагональный вид.

Некоторую вычислительную трудность при таком подходе имеет синтез функции $f(x)$. Она строится приближённо (один раз приближённо решается нелинейная алгебраическая система), так как в предлагаемой конструкции точное выполнение условия Стренга-Фикса невозможно.

ОБ ОДНОЙ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Сенчилов В.В. (Смоленск)

vvsok@yandex.ru

Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{t : |t| < 1\}$, $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \bigcup L)$.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все метааналитические в области T^+ функции $F^+(z)$, удовлетворяющие на L, за исключением, быть может, конечного числа точек $\alpha_1, ..., \alpha_\mu$ и $\beta_1, ..., \beta_\nu$, следующему краевому условию:*

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial n_+^2} + G(t)\overline{F^+(t)} = g(t), \tag{1}$$

где $G(t) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}} G_1(t)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ *и* $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ *- некоторые точки окружности* L, m_k *и* p_j *- целые положительные числа,* $G_1(t), g(t) \in H(L)$, *причем* $G_1(t) \neq 0$ *при* $t \in L$, $\frac{\partial}{\partial n_+}$ *- производная по внутренней нормали к* L.

В случае, когда $G(t) \neq 0, t \in L$, задача (1) была исследована в работе [2].

Используя представление метааналитических функций через аналитические (см. [1], с.139) в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, устанавливается следующий основной результат.

Теорема. *Решение задачи (1) сводится к решению скалярной задачи Римана (в исключительном случае) вида:*

$$\Phi^+(t) = G_2(t)\Phi^-(t) + g_2(t), \ t \in L, \tag{2}$$

где $G_2(t) = -G(t)t^3 e^{\overline{\lambda_0}t - \lambda_0 \bar{t}}, g_2(t) = t^2 g(t) e^{-\lambda_0 \bar{t}}$, *а функции* $\Phi^+(z)$ *и* $\Phi^-(z)$ *определенным образом выражаются через аналитические компоненты искомой метааналитической функции* $F^+(z)$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск, 1998.

2. Сенчилов В.В. О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Неймана для метааналитических функций в круге //Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы.-Воронеж: ВГУ, 2009.-С. 159-160.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОПЕРЕЖАЮЩИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сергеев С.М. (С.-Петербург)

sergeevsm@yandex.ru

Основные характеристики деятельности предприятия, в том числе торгового оцениваются на основе финансовых показателей. При этом можно рассчитать рентабельность, составить бухгалтерские отчеты и пр. Однако все эти данные относятся к категории так называемых "запаздывающих показателей то есть они фиксируют уже прошедший период деятельности и сами по себе не позволяют вмешаться в торговый процесс. Кроме того, финансовые показатели, как правило, уже являются интегрированными и выделить роль отдельных звеньев процессов происходящих в торговом предприятии не представляется возможным. Поэтому обычно при современном ведении торгового бизнеса их используют только как одну из итоговых составляющих для принятия решений по управлению предприятием, или как один из факторов в процессе анализа работы отдельных подразделений. В настоящее время экономисты делают упор на так называемые "опережающие показатели что позволяет прогнозировать итоги деятельности торгового предприятия за отчетный период и корректировать работу отдельных подразделений для достижения более высоких результатов общей работы.

Основой временной деятельности любого предприятия является этапность и, как следствие, возможность определения времени прохождения между этапами, а также эффективность работы торговой службы на каждом этапе. Введем обозначения характеристик для функций распределения показателей каждого этапа: T_i – время перехода i-го этапа, m_i – математическое ожидание функции распределения времени i-го этапа, D_i – дисперсия функции распределения времени, i-го этапа H_i – количество клиентов на i-м этапе, $\tilde{m}_i$ – математическое ожидание функции распределения эффективности i-го этапа, $\tilde{D}_i$ – дисперсия функции распределения эффективности i-го этапа. Кроме того из самого определения показателя эффективности каждого этапа следует, что его значения заключены в пределах от 0 до 1.

Теорема. *Для того, чтобы суммарная функция распределения была близка к нормальному закону необходимо и достаточно выполнение следующего условия ("условие Линдеберга"):*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-m_k|>\tau B_n} (x-m_k)^2 g_k(t)dt = 0$$

при любом $\tau > 0$, *где* $g_k(x)$ – *плотность распределения,*

$$B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_k}.$$

На практике это условие означает, что влияние отдельных случайных величин T_i, H_i на результат равномерно и среди них нет явно преобладающих. В реальности это условие обычно выполняется [1]. Действительно, если, например обработка заказа очень сильно затягивается из-за того, что нет квалифицированных сотрудников или просто не работает связь, то этот этап явно будет оказывать преобладающее влияние и не надо строить математические модели чтобы выявить это слабое место в торговой службе.

Литература

1. Кениг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания: Пер. с нем. /Под. ред. Г.П.Климова. М.: «Мир».– 1981.– 385 с.

2. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: Пер. с англ. /Под. ред. И.Н. Коваленко, Изд. 2. М.: «Мир».– 1971.– 352 с.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

Сергеев С.М., Провоторов В.В. (С.-Петербург, Воронеж)

sergeev2@yandex.ru

Широкий класс задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на ограниченном компактном графе Г сводится к соответствующей ℓ-проблеме моментов. При этом задачам, связанными с управлением такими системами, соответствуют бесконечное число моментных равенств. Естественное дальнейшее движение на пути решения поставленных задач – замена бесконечной системы конечной, «усеченной». Решение «усеченной» задачи при конечном N в большинстве случаев можно рассматривать как приближенное решение исходной задачи. Следует отметить, что метод моментов дает единую вычислительную процедуру вне зависимости от сложности и порядка линейного управляемого объекта и числа управляющих воздействий. Требуется лишь знание собственных функций управляемой дифференциальной системы. Отметим также, что метод пригоден и в том случае, когда ограничения наложены не только на управления, но и на фазовые координаты системы, в этом случае вычислительная процедура значительно усложняется.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти такую функцию $u(t) \in L_2(0,T)$, $\|u(t)\|_{L_2} \leqslant \ell$, чтобы система

$$Q(x,t) = \int_0^t K(x,t,\tau)u(\tau)d\tau, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

($K(x,t,\tau)$ – импульсная переходная функция дифференциальной системы) перешла из нулевого состояния (при $t = 0$) в состояние $Q_0(x) = \int\limits_0^T K(x,T,\tau)u(\tau)d\tau$, $x \in \Gamma$ за минимальное время $T = T_0$.

Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ $x \in \Gamma$ полную в $L_2(\Gamma)$ систему собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, соответствующей системе (1). Разлагая по этой системе функции $g(x)$ и $K(x,T,\tau)$ и учитывая (1), получим бесконечную систему моментных равенств для функции $u(t)$:

$$\alpha_n = \int\limits_0^T g_n(T,\tau)u(\tau)d\tau, \quad n = 1,2,... \tag{2}$$

(α_n, $g_n(T,\tau)$ – коэффициенты Фурье в разложениях функций $Q_0(x)$, $K(x,T,\tau)$, соответственно. «Усеченной» системой для (2) будет система вида:

$$\alpha_n = \int\limits_0^T g_n(T,\tau)u(\tau)d\tau, \quad n = 1,2,...,N. \tag{3}$$

Рассмотрены вопросы построения решения $u_n(t)$ «усеченной» системы (3), оценки погрешности в терминах норм $\|u(t) - u_n(t)\|_{L_2}$.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОДНОГО СИЛЬНОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА[1]

Серебряков И.Н. (Казань)

zilshat@mail.ru

В данной работе предложена методика построения квадратурных формул (к.ф) для сингулярного интеграла (с.и.) вида :

$$I(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)ctg^2\left(\frac{\tau - t}{2}\right)dt, \tag{1}$$

где $\tau \in (0,2\pi)$, $g(t) \in C^1H(0,2\pi)$, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агенства по науке и инновациям (госконтракт №02.740.11.0193)

Идея построения заключается в сведении (1) к с.и. Адамара первой степени. Применяя метод интегрирования по частям, получаем

$$I(\tau) = A(\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g'(t)ctg\left(\frac{\tau - t}{2}\right)dt,$$

где $A(\tau) \in C_{2\pi}(0, 2\pi)$.Следовательно, задача сводится к построению к.ф. для с.и. $S(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g'(t)ctg\left(\frac{\tau-t}{2}\right)dt$.

Общий способ построения к.ф. для $S(\tau)$ указан в [2]. Применяя результаты из [3], получаем к.ф. $G(P_n f; s_j) = \frac{1}{2N}\sum\limits_{i=1}^{N} f(s_i)\alpha_{ji}$, где $s_j = \frac{2\pi j}{N}, (j = \overline{0, N})$, $P_n f$ тригонометрический полином степени $n = \left[\frac{N}{2}\right]$ по узлам s_j, а α_{ji} вычисляется точно.

В частности, при $N = 2n + 1$,

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} sec^2\frac{s_j - s_i}{4}, & \text{если } j - i - \text{ четно}, \\ cosec^2\frac{s_j - s_i}{4}, & \text{если } j - i - \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Литература

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. — 353 с.

2. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. — 232 с.

3. *Ашур С., Шарипов Р.Н.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов Адамара // Конструктивная теория функций и функц. анализ. Казань, 1992. — вып. 8. – С. 15–23.

ОБ УТОЧНЕНИИ ОДНОГО НЕРАВЕНСТВА[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Пусть $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha > \theta, 1 < p < q < \infty$.

Рассмотрим функцию

$f_1(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{q}+\alpha-\theta}(\ln(\nu+1))^{\frac{1}{p}}} \cos\nu x.$

Для этой функции

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00302) и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-3252.2010.1

$$\omega_{\alpha-\theta}(f_1,\delta)_q \asymp \delta^{\alpha-\theta} \ll \delta^{\alpha-\theta}\left(\int\limits_{\delta}^{1} t^{-p(\alpha-\theta)}\omega_\alpha^p(f_1,t)_q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \delta^{\alpha-\theta}(\ln\ln\tfrac{1}{\delta})^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\int\limits_0^{\delta} t^{-q\theta}\omega_\alpha^q(f_1,t)_p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пусть $2 < p < q < \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha > 2\theta$.

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu(\alpha-\theta)}(\nu+1)^{\frac{1}{2}}}\cos 2^\nu x.$$

Для этой функции

$$\delta^{\alpha-\theta}\left(\int\limits_{\delta}^{1} t^{-p(\alpha-\theta)}\omega_\alpha^p(f_2,t)_q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp \delta^{\alpha-\theta} \ll \omega_{\alpha-\theta}(f_2,\delta)_q \asymp$$

$$\asymp \delta^{\alpha-\theta}(\ln\ln\tfrac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}} \ll \left(\int\limits_0^{\delta} t^{-q\theta}\omega_\alpha^q(f_2,t)_p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^{(\alpha-\theta)}\delta^{-\theta}(\ln\tfrac{1}{\delta})^{-\frac{1}{2}}.$$

Данные примеры показывают, что уточненное неравенство П.Л. Ульянова с учетом неравенств, доказанных в [1] и [2] имеет вид.

Утверждение. Если $f(x) \in L_p, 1 < p < q < \infty$, то

$$\omega_{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}(f,\delta)_q + \delta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left\{\int\limits_{\delta}^{1}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\omega_1(f,t)_q\right)^p\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \left\{\int\limits_0^{\delta}\left(t^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\omega_1(f,t)_p\right)^q\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Литература

[1] Коляда В.И. О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Труды Матем. ин-та АН СССР, 1988, Т. 181, с. 117 - 136.

[2] М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов, О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках, Вестник МГУ, сер. матем-мех., N 3, 31 - 43, 2009.

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Пусть $L_p(1 \leqslant p < \infty)$– пространство 2π– периодических, измеримых функций $f(x)$ с конечной нормой $\| f \|_p = (\int\limits_0^{2\pi} | f(x) |^p$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00302) и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-3252.2010.1

$dx)^{1/p}$; L_∞– пространство непрерывных 2π– периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_\infty = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)|$.

$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!} f(x+(\alpha-\nu)h)$ - разность порядка $\alpha > 0$ функции $f(x)$ (при целых α это будет α–ая разность, например, при $\alpha = 1$ имеем $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$); $\omega_\alpha(f,t)_p = \sup\limits_{|h|\leqslant t} \| \Delta_h^\alpha f(x) \|_p$ – модуль гладкости порядка $\alpha > 0$.

Неравенство П.Л. Ульянова для модулей гладкости 1-го порядка в разных метриках в случае $1 < p < q \leqslant \infty$ было усилено в [1].

В [2] в случае $1 < p < 2 < 1 + \frac{1}{p-1}$, или $2 \leqslant p < q < \infty$ неравенство из [1] было распространено на случай модулей гладкости любого порядка $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Утверждение.

1. Пусть $f(x) \in L_p, p$ и q таковы, что $1 < p < q = \infty, \alpha > \frac{1}{p}$. Тогда для любого $\delta \in (0,1]$

$$\delta^{\alpha-\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_\delta^1\left(t^{\frac{1}{p}-\alpha}\omega_\alpha(f,t)_q\right)^p\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c_1\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p}}\omega_\alpha(f,t)_p\frac{dt}{t}.$$

2. В случае $1 = p < q < \infty, \alpha > 1 - \frac{1}{q}$ неравенство

$$\delta^{\alpha-1+\frac{1}{q}}\int\limits_\delta^1\left(t^{1-\frac{1}{q}-\alpha}\omega_\alpha(f,t)_q\frac{dt}{t} \leqslant c_2\left(\int\limits_0^\delta \left(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_\alpha(f,t)_p\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

теряет силу.

Литература

[1] Коляда В.И. О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Труды Матем. ин-та АН СССР, 1988, Т. 181, с. 117 - 136.

[2] М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов, О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках, Вестник МГУ, сер. матем-мех., N 3, 31 - 43, 2009.

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СТОУНОВСКИХ КОМПАКТОВ, СОХРАНЯЮЩИХ КАТЕГОРИЮ[1]

Симонов П.М., Чистяков А.В. (Пермь, Ижевск)

simonov@econ.psu.ru

Цель доклада – рассказать о мотивах, приложениях и доказательстве следующего утверждения:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Пермского края (грант № 10-01-00448-р-урал-а), и ЗАО "ПРОГНОЗ"

Теорема. *Открытое непрерывное отображение экстремально несвязного компакта с условием Суслина в хаусдорфово топологическое пространство является локальным гомеоморфизмом на открытом всюду плотном подпространстве тогда и только тогда, когда оно переводит в тощие множества (первой категории) все тощие множества, за исключением, быть может, подмножеств одного замкнутого нигде не плотного множества.*

В доказательстве проверяется, что неприводимое сужение отображения экстремально несвязного компакта, сохраняющего тощие множества, определено на открыто-замкнутом множестве. Если область значений экстремально несвязна, то условие открытости можно заменить на сохранение идеала тощих множеств в сторону прообраза.

Теорема близка к теоремам Колмогорова и Пасынкова о счетнократных открытых отображениях. Имеются также явные аналогии с теоремами Лузина и Хана о непрерывных счетнократных отображениях польских пространств и теоремой Новикова об униформизации борелевских счетнозначных множеств.

По теореме Стоуна о представлении, примененной к σ-алгебрам пространств с мерой, можно сформулировать (но без автоматического сохранения истинности!) интересную метрическую версию теоремы:

Теорема ?. *Измеримое отображение, сохраняющее идеал множеств меры нуль в сторону прообраза, является локальным метрическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда его сужение на множество полной меры обладает N свойством Лузина.*

Знак "?" снимается, если пространства с мерой стандартны. Доказательство в существенном основано на тонкой теореме Мазуркевича, согласно которой каждое непрерывное отображение, определенное на борелевском множестве польского пространства, имеет не уменьшающее область значений взаимно однозначное сужение на коаналитическое множество.

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ УТОЧНЕНИЯХ НЕРАВЕНСТВА В. ЯНГА

Синегубов С.В., Ситник С.М., Телкова С.А. (Воронеж)
mathsms@yandex.ru

В 1912 г. английский математик Вильям Генри Янг, фамилию которого почему-то в русском языке принято онемечивать и искажать, опубликовал два своих знаменитых неравенства. Первое их них оценивает норму свёртки и получило впоследствии имена Янга и Хаусдорфа. Второе — это неравенство для пары взаимно обратных функций [1], которое обычно приводится в частном случае степенных функций в виде

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, x \geqslant 0, y \geqslant 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Этот результат, например, используется для вывода так называемого неравенства Гёльдера, которое также исторически справедливо было бы называть неравенством Роджерса-Гёльдера-Рисса [2-3].

В работах одного из авторов ранее было замечено, что так как левая часть (1) не изменяется при перестановке $x \leftrightarrow y$, то имеет смысл сделать ту же перестановку и для несимметричной правой части (1) и сравнить получившиеся результаты. Таким образом, неожиданно оказывается, что неравенств Янга для двух чисел не одно, а два (а для нескольких чисел ещё больше)! Второе из них имеет вид

$$xy \leqslant \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}. \tag{2}$$

Тогда возникает задача о сравнении приведённой пары неравенств.

Теорема 1 [3-4].

1. Если $y \geqslant x \geqslant 1$, то оценка (1) лучше, чем (2).
2. Если $1 \geqslant y \geqslant x \geqslant 0$, то оценка (2) лучше, чем (1).
3. Если $y \geqslant 1 \geqslant x \geqslant 0$, то при данном x существует единственное критическое значение $y = y_{cr}$, которое является решением трансцендентного уравнения

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} = \frac{y^p}{p} - \frac{y^q}{q}.$$

В этом случае при $1 \leqslant y \leqslant y_{cr}$ оценка (2) лучше, чем (1), а при $y \geqslant y_{cr}$ оценка (1) лучше, чем (2).

Иначе говоря, если два числа лежат с одной стороны от единицы, то лучше одно из неравенств, с другой стороны—лучше другое, а если единица разделяет два числа, то реализуются оба случая.

Приведём численные примеры на все эти случаи.

Пример 1: $x = 5, y = 130, p = 4, q = 4/3$;
$xy = 650, \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 650,16502, \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 71402508$.
В этом случае неравенство (1) лучше (на пять порядков!).

Пример 2: $x = 0,2, y = 0,5, p = 4, q = 4/3$;
$xy = 0,1, \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 0.29803, \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 0,10334$.
А в этом случае неравенство (2) лучше (примерно в три раза).

Пример 3: $x = 0,5, p = 4, q = 4/3$. Тогда расчет, который мы опускаем (см. [3–4]), дает критическое значение $y_{cr} \approx 1,35485$. Выберем $x = 0,5, y = 1,3 < y_{cr}$; тогда получаем $xy = 0,65$,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 1,07973, \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 1,01166.$$

Как и следует из теоремы 1, в этом случае лучше оценка (2).
А теперь пусть $x = 0,5,\ y = 1,4 > y_{cr}$; тогда получаем $xy = 0,7$,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 1.19025, \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 1.25804.$$

Как и следует из теоремы 1, в этом случае лучше оценка (1).

Понятно, что (1) — это по существу неравенство между весовыми арифметическим и геометрическим средними. Последнее время стали изучаться его обобщения в терминах так называемого отношения Шпехта [5–6]. Оказывается, что это другие формы известных ранее неравенств типа Серпинского для произведения средних.

Теорема 2. Оценки из работ [5–6] эквивалентны неравенствам для средних

$$\frac{L(x,y)I(x,y)}{G^2(x,y)} \geqslant \frac{A_{u,v}(x,y)}{G_{u,v}(x,y)} \geqslant \frac{L(x^r,y^r)I(x^r,y^r)}{G^2(x^r,y^r)}, \tag{3}$$

где L—логарифмическое, I—идентрическое или многоэтажное, G—геометрическое, $G_{u,v}$—весовое геометрическое, $A_{u,v}$—весовое арифметическое средние [7], $u \geqslant 0, v \geqslant 0,\ u + v = 1,\ r = \min(u,v)$.

Теорема 3. Справедливо следующее уточнение дискретного неравенства Роджерса–Гёльдера–Рисса, следующее из теоремы 1:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{[\max(\frac{a_k}{A}, \frac{b_k}{B})]^p}{p} + \frac{[\min(\frac{a_k}{A}, \frac{b_k}{B})]^q}{q} \right) \leqslant 1. \tag{4}$$

Аналогично может быть обобщено и соответствующее интегральное неравенство. Разумеется, любые уточнения неравенства Р-Г-Р в дискретном или интегральном случаях приводят к соответствующим уточнениям неравенства Минковского. В [4] рассмотрены обобщения неравенства Янга для пары взаимно дополнительных функций, а также для некоторых случаев преобразования Лежандра.

Отметим, что при заменах $x \to \frac{1}{x}, y \to \frac{1}{y}$ обычное неравенство Янга переходит в обратное, на что редко обращают внимание. Таким образом, из теоремы 1 следует обобщение и этого неравенства.

Существует разработанная А. Г. Кусраевым техника перенесения результатов для числовых неравенств на гораздо более общий случай векторных решёток и билинейных операторов в них. Например, подобное распространение для неравенства Р-Г-Р проведено в [8].

Литература

1. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Classical and new inequalities in analysis. Kluwer, 1993. 740 p.

2. Maligranda L. Why Holder's inequality should be called Roger's inequality//Math. Inequal. Appl. 1998. № 1. P. 69–83.

3. Анциферова Г. А., Ситник С. М. Некоторые обобщения неравенства Юнга //Вестник Воронежского института МВД России. Воронеж, 1999. № 2(4). С. 161–164.

4. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств В.кн.: Итоги науки. Южный федеральный округ. Серия "Математический форум". Том 3. Исследования по математическому анализу. Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО Алания, Владикавказ: 2009. С. 221–266.

5. Specht W. Zer Theorie der elementaren Mittel// Math.Z., 1960, Vol.74, P. 91–98.

6. Furuichi Sh. Refined Young inequalities with Specht's ratio// arXiv:1004.0581v2 [math.FA], 2010, 6 P.

7. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения //Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". 2005, №1 (1). С. 3–42.

8. Kusraev A. G. Hölder type inequalities for orthosymmetric bilinear operators //Владикавказский математический журнал. 2007. Т. 9, № 3. С. 3–37.

ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОГО ТРАНСФУЗИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЛЕЧЕБНЫХ ПРОФИЛАКТИЧЕСКИХ

УЧРЕЖДЕНИЙ

Сирота Е.А. (Воронеж)
atoris@list.ru

На сегодняшний день вопрос об оптимизации процессов управления в столь актуальной отрасли здравоохранения как производственная и клиническая трансфузиология, объединенных общим названием «Служба крови», стоит особенно остро.

Государственная целевая программа по реформированию «Службы крови» делает внедрение в практическую медицину программ по оптимизации процессов управления на всех этапах работы (от заготовки донорской крови, переработки ее на компоненты и препараты, проведения специальной программы «карантинизация плазмы» и до обеспечения трансфузионного пособия пациентам больниц) особенной актуальной. Таким образом, существующая проблема заключаются в следующем

- управление запасами крови региональными «Службами крови» автоматизировано на низком уровне;
- невозможность прогнозирования объемов цельной крови, а также компонентов крови, необходимых для своевременного обеспечения больниц;
- существующая стихийность в процессе управления региональными «Службами крови»;
- потеря запасов крови.

Решением является создание информационно-аналитической системы, а также разработка программного комплекса, обеспечивающего

- обработку информации о потребностях в гемокомпонентах из лечебной сети;
- прогнозирование объемов заготовки цельной крови и плазмы, необходимых для своевременного обеспечения больниц компонентами крови на заданный период.

В соответствие с поставленной целью решались следующие задачи

1. разработка математической модели процесса управления запасами крови региональной «Службой крови» на основе оптимального трансфузионного обеспечения лечебных профилактических учреждений. Описание математической модели представлено в [1]. Рассматриваемая модель является линейно-квадратичной задачей управления для стохастической системы, а функционал - классическим функционалом в задаче Больца.

2. разработка алгоритмов и методов решения задачи, на базе методов теории оптимальной фильтрации [2], а также использовании нейросетевого прогнозирования;

3. разработка программного комплекса, обеспечивающего сбор, хранение, обработку информации о потребностях в гемокомпонентах из лечебной сети и в соответствии с этим прогнозирование объемов заготовки цельной крови и плазмы, необходимых для своевременного обеспечения больниц компонентами крови на текущий период.

Проведение работы и практическая апробация ведется на базе Государственного учреждения здравоохранения Воронежская областная станция переливания крови с перспективой распространения в Службу крови на всей территории РФ.

Таким образом, создание математической модели процесса управления запасами крови на каждом этапе, непосредственно разрабатываемый программный комплекс, в конечном счете, позволят перейти от рутинного способа управления к адекватной, математически выверенной модели. Результаты внедрения данной информационно-аналитической системы позволяют также уйти от существующей стихийности в трансфузиологии к научно-обоснованной, управляемой, прогнозируемой системе, обеспечивая медицинский персонал «Службы крови» знанием принципиально нового подхода к управлению производства, что, безусловно, в свою очередь оптимизирует все его этапы.

Литература

1. Сирота Е.А. Об одной математической модели оптимального трансфузионного обеспечения лечебных профилактических учреждений региональной «Службой крови» / Е.А. Сирота // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механи-

ки. Ч. 2: сборник трудов Международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2009. – 286 с.

2. Десятирикова Е.Н. Основы теории и информационные технологии управления в простых и сложных системах / Е.Н. Десятирикова, А.А. Сирота // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2007. - 229 с.

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Солдатов А.П. (Белгород)

soldatov@bsu.edu.ru

Предлагается подход к исследованию краевых задач на двумерном стратифицированном множестве для гармонических функций [1], основанный на редукции к нелокальным краевым задачам теории функций в семействе плоских областей. Двумерную стратифицированную область G можно отождествить с семейством $D_1, \ldots, D_n$ кусочно- гладких областей комплексной плоскости в результате склеивания нескольких групп их граничных дуг. Ситуация здесь аналогична случаю римановых поверхностей [2] с той разницей, что одновременно могут склеиваться более, чем две дуги.

Под гармонической в G функцией понимается семейство $u = (u_r)_1^n$ функций, гармонических в областях D_r. Кроме того, граничные значения этих функций в склеиваемых точках совпадают и выполнены соответствующие контактные условия в этих точках для нормальных производных. Граничные дуги областей D_r, не участвующих в склеивании, составляют границу стратифицированной области G, на ней задаются обычные краевые условия.

При подобном подходе данная краевая задача сводится к нелокальной задаче для семейства аналитических функций $\varphi_r = u_r + iv_r$, $1 \leqslant r \leqslant n$, постановка которой восходит к Риману [3] и теория фредгольмовой разрешимости которой развита в [4]. В частности, на этом пути можно получить критерий ее фредгольмовости в пространствах Гельдера с весом, формулу индекса, а также изучить вопросы гладкости решения $\varphi = (\varphi_r)_1^n$, и его асимптотики в угловых точках областей D_r.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., и др., Дифференциальные уравнения на геометрических графах, М.: Физматлит,

2004, 272с.

2. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИЛ, 1960.

3. Риман Б. Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948.

4. Солдатов А.П. , Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно- гладкий случай //Изв. АН СССР. 1992. Т.56, No 3. С.566-604.

ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Сотников Д.С. (Воронеж)

dssotnikov@rambler.ru

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' - двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$ на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных, симметричных форм $a(t,u,v)$. Предполагается, что для всех $u, v \in V$ функции $t \to a(t,u,v)$ измеримы на $[0,T]$ и выполнены оценки:

$$|a(t,u,v)| \leqslant M_1 \|u\|_V \|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(t,u,u) \geqslant \delta \|u\|_V^2,$$

где $\delta > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = \big(A(t)u,\, v\big)$. Форма $a(t,u,v)$ предполагается абсолютно непрерывной по $t \in [0,T]$ и для $u, v \in V$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\, a(t,u,v)\right| \leqslant M_2 \|u\|_V \|v\|_V.$$

Предположим также, что на $[0,T] \times H$ задана функция $f(t,u)$, со значениями в V' такая, что $f(t,u) \in L_2(0,T;V')$ при каждом фиксированном $u \in H$ и для всех $u_1, u_2 \in H$

$$\|(f(t,u_1) - f(t,u_2)\|_{V'} \leqslant M_3 \|u_1 - u_2\|_H.$$

Кроме того, для $u \in V$ функция $f(t,u) \in H$ и справедлива оценка

$$\|f(t,u)\|_H \leqslant M_4(t) + M_5 \|u\|_V.$$

В пространстве V' рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u^0 \in H. \tag{1}$$

Предполагается, что задача (1) имеет обобщенное решение $u(t)$ такое, что: $u(t) \in C([0,T];V); u'(t), A(t)u(t) \in L_2(0,T;H)$. Это решение ищется приближенно проекционно-разностным методом.

Опишем приближенную задачу. Пусть V_h - конечномерное подпространство V. Пусть N - натуральное число, $N\tau = T, t_k = k\tau (k = \overline{1,N})$. Набор элементов $(u_1^h, u_2^h, ..., u_N^h)$, где $u_k^h \in V_h$, назовём приближённым решением точной задачи, найденным проекционно-разностным методом, если для всех $v_h \in V_h$

$$\left(\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}, v_h\right) + a(t_k, u_k^h, v_h) = \left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t, u_{k-1}^h)\,dt, v_h\right) (k = \overline{1,N}).$$

В условиях существования обобщенного решения точной задачи установлена оценка погрешности в энергетической норма

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right)\right\|_H^2.$$

Для предельно плотной в V при $h \to 0$ последовательности подпространств $\{V_h\}$ получена сходимость этой погрешности к нулю при $h \to 0$ и $\tau \to 0$. Для подпространств V_h типа конечных элементов найдена скорость сходимости к нулю, точная по порядку аппроксимации как по времени так и по пространству.

П-САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ SH–CH СО СМЕШАННЫМ СПЕКТРОМ

Старинец В.В. (Москва)
vstarinets@mail.ru

В π-пространстве $\Pi_\sigma = L_{2\{\sigma\}}(0, \infty)$ с метрикой $[y, z] = \operatorname{Reg}\int_0^\infty y\bar{z}\,dx$ $(\sigma \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})$ ранга индефинитности $r = [(|\sigma| - \sigma)/2] - [(|\sigma| - \sigma)/4]$ рассматриваются π-самосопряженные расширения Λ сингулярного π-эрмитового оператора, порождаемого дифференциальным выражением $l(y) = -y''(x) + \left(\frac{(\nu^2-1/4)}{\operatorname{sh}^2 x} + \frac{\beta+1/2}{\operatorname{ch}^2 x}\right)y(x)$, с помощью краевого условия $\xi_y^0 \sin\alpha - 2\nu\varphi_y(0)\cos\alpha = 0$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ $(\xi_y^0$, $\varphi_y(0)$ –

граничные значения в сингулярной точке $x = 0$; $\beta \in \mathbf{R}, \nu = |\sigma|$). Установлено, что для всех значений параметров α, σ и β имеется непрерывный спектр $S_c = [0, \infty)$. Исследуется эволюция дискретного спектра с изменением одного из параметров α, либо β при фиксированном значении другого. Выяснен процесс рождения (поглощения) параболических собственных значений непрерывным спектром. Исследовано возникновение гиперболического спектра в результате столкновения пар (эллиптического и параболического) собственных значений с возникновением двукратных параболических собственных чисел (двумерных жордановых клеток) и последующим рассеянием в комплексную плоскость.

Литература

1. Старинец В. В. Обобщенно-классические ортогональные многочлены. — М.: Изд. МГУП. 2000.

2. Старинец В. В. Симметрические операторы Штурма–Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Изд. МГУП. 2004.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕРМОУПРУГОСТИ ПЛАСТИНЫ

Сурова Е.И. (Воронеж)

eisu86@mail.ru

Смещение пластины от положения равновесия при нагревании её с боков описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{1.1}$$

$$T(x, y, 0) = \varphi(x, y), \tag{1.2}$$

$$T(x, 0, t) = p_1(x, t), T(x, b, t) = p_2(x, t), \tag{1.3}$$

$$T(0, y, t) = p_3(y, t), T(a, y, t) = p_4(y, t), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \gamma\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{2.1}$$

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y), \tag{2.2}$$

$$U_t'(x, y, 0) = \psi(x, y), \tag{2.3}$$

$$U(x,0,t) = U(x,b,t) = U(0,y,t) = U(a,y,t) = 0. \tag{2.4}$$

Система уравнений (1) задает изменение температуры в пластине. Уравнение (1.1) - это уравнение распространения тепла в пластине, уравнение (1.2) определяет начальную температуру стержня, граничные условия (1.3) - (1.4) задают температуры на сторонах пластины при любой температуре.

Решение поставленной задачи реализуется методом конечных разностей. При замене входящих в уравнения производных разностями, система уравнений (1) примет вид:

$$\frac{T_{i,j,k+1} - T_{ijk}}{\Delta t} = a^2 \left(\frac{T_{i+1,j,k} - 2T_{ijk} + T_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{ijk} + T_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \right), \tag{3.1}$$

$$T_{ij0} = \varphi(i\Delta x, j\Delta y), \tag{3.2}$$

$$T_{i0k} = p_1(i\Delta x, k\Delta t), T_{imk} = p_2(i\Delta x, k\Delta t), \tag{3.3}$$

$$T_{0jk} = p_3(j\Delta y, k\Delta t), T_{njk} = p_4(j\Delta y, k\Delta t), \tag{3.4}$$

Заменим входящие в уравнения производные разностями, учитывая, что Т - это температура в данной точке, вычисляемая по разностной системе (3), тогда разностная схема для системы уравнений (2) примет вид:

$$\frac{U_{i,j,k+1} - 2U_{ijk} + U_{i,j,k-1}}{\Delta t^2} = k\frac{U_{i+1,j,k} - 2U_{ijk} + U_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} +$$

$$\frac{k}{2}\frac{U_{i,j+1,k} - 2U_{ijk} + U_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} - \gamma\frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{\Delta x}, \tag{4.1}$$

$$U_{ij0} = \varphi(i\Delta x, j\Delta y), \tag{4.2}$$

$$\frac{U_{i,j,k+1} - U_{ijk}}{\Delta t} = \psi(i\Delta x, j\Delta y), \tag{4.3}$$

$$U_{i0k} = U_{imk} = U_{0jk} = U_{njk} = 0, \tag{4.4}$$

Полученными формулами можно пользоваться для программного исследования положения пластины в определенный момент времени.

Литература

1. Волков Е.А. Численные методы: Учебное издание. - СПб.: Издательство "Лань 2004.

2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Тедеев А.Ф. (Воронеж)

Рассматривается нелинейное параболическое уравнение второго порядка вида

$$u_t - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(u^{m-1}|Du|^{p-2}u_{x_j}) = 0. \tag{1}$$

Как известно асимптотическое поведение решения данного уравнения существенно зависит от параметров m, p и N. Причем наиболее изученными являются решения соответствующие значениям параметров m и p, удовлетворяющие условиям $m + p > 3, p > 1$ и $m + p \leqslant 3$, $p > 1$. Предлагаемый здесь метод позволяет определить асимптотику решения $u(x,t)$ при $p = 1$ для довольно широкого класса решений. При этом для параметра m определены точные границы, при которых сохраняется свойство локальной ограниченности решения.

При $p = 1$ уравнение (1) перепишется в виде

$$u_t - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u^{m-1}\frac{u_{x_j}}{|Du|}\right) = 0. \tag{2}$$

Неотрицательную измеримую функцию $u(x,t)$ будем называть локальным решением уравнения (1) в $Q = R^N \times (t > 0)$, если $u^{m-1}\frac{Du}{|Du|} \in L_{2,loc}(0,T; W^1_{2,loc}(R^N)), u_t \in L_{1,loc}(Q)$ и равенство (2) для функции $u(x,t)$ выполняется почти всюду.

Если вдобавок к этому

$$u(x,t) \to u_0(x) \quad \text{в} \quad L_{1,loc}(R^N), \quad \text{при} \quad t \to 0, \tag{3}$$

то $u(x,t)$ считаем решением задачи Коши (2), (3) с начальной функцией $u_0(x)$.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть $u(x,t)$ — локальное решение уравнения (2), тогда для всех $\rho > 0,_t > 0$ и $m > 2$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{\infty,Q_\infty} = \sup_{x\in Q_\infty} u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{\rho^N} \iint\limits_{Q_0} u(x,\tau)dxd\tau + \gamma\left(\frac{\rho}{t}\right)^{\frac{1}{m-2}},$$

где $Q_\infty = B_\rho \times \left(\frac{1}{2}t, t\right)$; $Q_0 = B_{(1+\sigma)\rho} \times \left(\frac{1}{2}t(1-\sigma), t\right)$; $0 < \sigma < 1$; $B_\rho = \{x : |x| < \rho\}$; γ - константа зависящая только от $m,_N$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1, при $2 - \frac{1}{N} < m < 2$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{\infty,Q_\infty} = \sup_{x\in Q_\infty} u(x,t) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma t^{-\frac{N}{N(m-2)+1}} \left(\iint\limits_{Q_0} u(x,\tau)dxd\tau\right)^{\frac{1}{N(m-2)+1}} + \gamma\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\frac{1}{2-m}}.$$

Теорема 3. Если $u(x,t)$ - решение задачи Коши с начальной функцией $u_0(x) \in L_{1,loc}(R^N)$, тогда для всех $m < 2, t > 0, \rho > 0$ справедлива оценка

$$\sup_{\tau\leqslant t} \int\limits_{B_\rho} u(x,\tau)dx \leqslant \int\limits_{B_{2\rho}} u_0(x)dx + \gamma\left(\frac{t}{\rho^{N(m-2)+1}}\right)^{\frac{1}{2-m}}.$$

В особых точках параметра m, а именно при $m = 2$ и $m = 2 - \frac{1}{N}$, оценки приведенные выше вообще могут не выполнятся. Это подтверждается частными решениями уравнения (2).

Литература

1. Кондратьев В.А. Об асимптотических свойствах решений нелинейного уравнения теплопроводности //Дифференциальные уравнения. -1998. -т.34, №2. -С.246-255.

2. Adams R.A. //Trans. Amer. Math. Sol. 1973. Vol.173. P.401-429.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ[1]

Теляковский Д.С. (Москва)
dtelyakov@mail.ru

Пусть функция $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в окрестности точки x^0. Пусть, далее, найдутся множество $E(x^0)$, у которого x^0 является точкой плотности (относительно n-мерной меры Лебега), число $L(x^0) > 0$, линейная форма $du(x^0, x)$ и квадратичная форма $d^2u(x^0, x)$, для которых при $x \to x^0$, $x \in E(x^0)$, выполнены оценки

$$\begin{gathered} u(x) \leqslant L(x^0)\|x - x^0\|, \\ \min\{u(x), u(x^0) + du(x^0, x) + d^2u(x^0, x)\} = o(\|x - x^0\|^2). \end{gathered} \tag{1}$$

Ясно, что если в точке x^0 функция $u(x)$ имеет второй дифференциал в смысле Пеано, то в этой точке $u(x)$ удовлетворяет и условиям (1), причём формы $du(x^0, x)$ и $d^2u(x^0, x)$ являются соответственно первым и вторым пеановским дифференциалом $u(x)$ в x^0.

Если субгармоническая функция $u(x)$ имеет в точке x^0 второй дифференциал d^2u, то след матрицы его квадратичной формы неотрицателен. Будем поэтому говорить, что функция $u(x)$ является асимптотически субгармонической в точке x^0, если она удовлетворяет условиям (1) и след матрицы квадратичной формы $d^2u(x^0, x)$ неотрицателен.

Теорема. *Суммируемая функция, асимптотически субгармоническая в каждой точке области является субгармонической в этой области.*

Эта теорема является аналогом теорем о голоморфности асимптотически моногенных функций и о гармоничности асимптотически гармонических функций.

БАНАХОВЫ ФРЕЙМЫ В ЗАДАЧЕ АФФИННОГО СИНТЕЗА[1]

Терехин П.А. (Саратов)
terekhinpa@info.sgu.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта АВЦП 2.1.1/6827 и гос. контрактов с Рособразованием П268 и П943

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00097, грантов Президента РФ для ведущих научных школ и для молодых ученых, проекты НШ-4383.2010.1 и МК-346.2009.1.

Банахово пространство X, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, назовем *модельным пространством*, если система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X. Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F является *фреймом* в F относительно X, если существуют постоянные $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in F^*$ его коэффициенты Фурье $\{(\varphi_n, g)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют неравенствам

$$A\|g\|_{F^*} \leqslant \|\{(\varphi_n, g)\}_{n=1}^{\infty}\|_{X^*} \leqslant B\|g\|_{F^*}.$$

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. Тогда для каждого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, принадлежащая пространству X и такая, что*

$$f = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Теорема 2. *Пусть функция $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, такая, что $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(t)\, dt \neq 0$ и*

$$\Big\|\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k \psi(\cdot - bk)\Big\|_p \leqslant C\Big(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Тогда аффинная система функций

$$\psi_{j,k}(t) = |\det a_j|^{1/p}\psi(a_j t - bk), \qquad j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

образует фрейм в $L^p(\mathbb{R}^d)$ относительно $l^1(l^p)$.

Литература

[1] П. А. Терехин, “Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза”, *Матем. сборник*, **200**:9 (2009), 127-146.

УРАВНЕНИЕ ЛИППМАНА – ШВИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВЫХ ПРОВОЛОК

Тинюкова Т.С. (Ижевск)

TAshih@mail.ru

В пространстве $l^2(\Gamma)$, где $\Gamma = (\mathbf{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{Z})$, рассматривается ограниченный самосопряженный оператор $H_V = H + V$, где H действует в $l^2(\Gamma)$ следующим образом:

$$(H\psi)(0,0) = \psi(1,0) + \psi(-1,0) + \psi(0,1) + \psi(0,-1),$$

$$(H\psi)(n,0) = \psi(n+1,0) + \psi(n-1,0),\ n \neq 0,$$
$$(H\psi)(0,m) = \psi(0,m+1) + \psi(0,m-1),\ m \neq 0,$$

а $V(n,m) = \begin{cases} V_0(\delta_{n,N} + \delta_{n,-N}),\ m = 0 \\ 0,\ n = 0 \end{cases}$, где $N \in \mathbf{N}$.

Данный оператор является гамильтонианом электрона вблизи пересечения двух квантовых проволок, при этом потенциал V описывает влияние примесей. Существенный спектр оператора H_V представляет собой отрезок $[-2,2]$.

Уравнение Липпмана – Швингера для оператора H_V имеет вид:

$$\begin{cases} \psi_1(n) = e^{i\theta n} - (R_0(\lambda)V_1\psi_1)(n) - \frac{f(V_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}(R_0\delta)(n), n \in \mathbf{Z}, \\ \psi_2(m) = \frac{f(V_1\psi_1)}{1-f^2(\delta)}(R_0\delta)(m), m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Здесь $\lambda \in (-2,2)$, θ определяется равенствами $cos\theta = \frac{\lambda}{2}$, $sin\theta = = -\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2})^2}$, $\psi(n,m) = \begin{cases} \psi_1(n), m = 0 \\ \psi_2(m), n = 0 \end{cases} \in l^2(\Gamma)$, $R_0(\lambda)$ – резольвента оператора H_0, который действует в $l^2(\Gamma)$ по формуле

$$(H_0\varphi)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1),\ n \in \mathbf{Z}.$$

Обозначим через $P_-(\lambda)$ вероятность отражения в точке λ.

Теорема. Предположим, что N четно. Тогда в достаточно малой окрестности нуля для всех достаточно больших V_0 существует единственное

$$\lambda = \lambda(V_0) = -\frac{2}{NV_0} + o(\frac{1}{V_0})$$

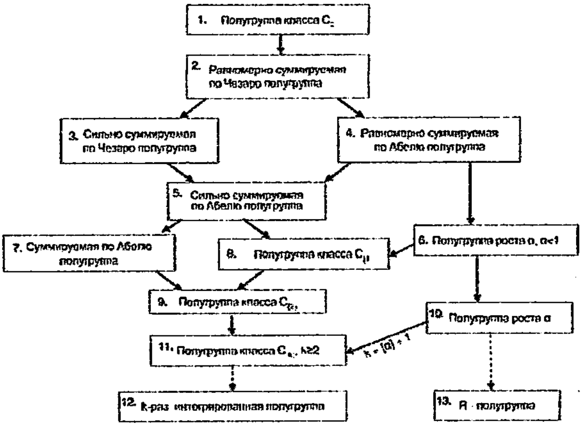
такое, что $P_-(\lambda) = 0$.

О КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Тихановцева В.С. (Екатеринбург)

vika8887@el.ru

Работа посвящена исследованию полугрупп операторов решений абстрактной задачи Коши $u'(t) = Au(t)$, $t \in [0,\infty)$, $u(0) = x$, в банаховых пространствах. Эти исследования приводят к необходимости классификации различных полугрупп и их генераторов. В продолжение работы [1], где основное внимание было уделено связи между полугруппами класса C_0 и современными полугруппами в настоящей работе получена следующая диаграмма, отражающая свойства полугрупп, сильно непрерывных при $t > 0$:



Знак следования $A \to B$ означает, что если полугруппа операторов решений является полугруппой класса A, то она является полугруппой класса B. Знак $A\text{-}\,\text{-}\!\to B$ означает вложение через генераторы. Указанные в диаграмме полугруппы не удается линейно упорядочить, так как они отражают разные особенности поведения операторов решений.

Литература

1. I. V. Melnikova, M. A. Alshansky Well-posedness of the Cauclry problem in a Banach space: regular and degenerate cases // J.Math.Sci. (New York), 87(4) 3732-3780, 1990, Analysis, 9.

ОБ ОЦЕНКЕ ОДНОЙ РАЗНИЦЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Тюрин В.М. (Липецк)

tuvm@stu.lipetsk.ru

Рассмотрим пространство Соболева-Бесова $B_p^m(R^n, L^p(R^n, X)) = B_p^m$ с нормой

$$\|u\|_{mp} = \|u\|_m + \langle u \rangle_1 mp \quad (n \in N, m \in Z_+, 1 < p < \infty), u \in B_p^m,$$

X — банахово пространство, $\|\cdot\|_m$ — норма в пространстве Соболева $H^m = H^m(R^n, L^p(R^n, X))$, величина $(0 < \sigma < 1)$.

$$\langle u \rangle_{1mp} =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m} \left\| D^\alpha u(x) - 2D^\alpha u\left(\frac{x\_y}{2}\right) + D^\alpha u(y)|x-y|^{-np^{-1}-\delta} \right\|_{00} < \infty,$$

Пространство Соболева-Степанова-Бесова $SB_p^m(R^n, M^p(R^n, X))b = SB_p^m$ определяется нормой

$$\|u\|_{mps} = \|u\|_{ms} + \langle u\rangle_{2mp}$$

$$\langle u\rangle_{2mp} =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m} \left\| D^\alpha u(x) - 2D^\alpha u\left(\frac{x\_y}{2}\right) + D^\alpha u(y)|x-y|^{-np^{-1}-\delta} \right\|_{00S} < \infty.$$

Обозначим одно из пространств B_p^m, SB_p^m через $W_p^m(F)$, при этом $F = L^p, M^p$. Пусть $P : W_p^m(F) \to F$ линейный дифференциальный оператор в частных производных, действующий по формуле

$$Pu = \sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x), A_\alpha \in C^m(R^n, X).$$

Теорема. Пусть $\varphi = \varphi(x, \xi, T) : R^n \to [0,1]$ — гладкая финитная функция, при этом $|D^\alpha \varphi| \leqslant b_0 T^{-1}(\alpha \neq 0, T^{-1} > max(n,2))$. Тогда справедливы следующие оценки

$$\langle P(\varphi u) - \varphi Pu\rangle_{10p} \leqslant a_1 T^{-1}\langle u\rangle_{1mp} + a_2 T\|u\|_m, u \in B_p^m,$$

$$\langle P(\varphi u) - \varphi Pu\rangle_{20p} \leqslant a_3 T^{-1}\langle u\rangle_{2mp} + a_4 T^{-1}\|u\|_{ms}, u \in SB_p^m.$$

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ ВОРОНЕЖСКОГО УНИВЕРСИТЕТА В ГОДЫ ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ

Удоденко Н.Н. (Воронеж)

В предвоенные годы физико-математический факультет Воронежского университета бурно развивался. В это время на факультете работали такие ученые как Г. М. Баженов, М. М. Тринблюм, Н.В. Ефимов, Б. А. Фукс, в. И. Блинов, А. И. Защенгин, М. А. Невижская, М. Ф. Широков. В Воронежский университет приезжали московские математики Л. А. Люстерник, Л. С. Понтрягин, В. В. Степанов, А. Н. Тихонов, С. А. Яновская, которые в лекциях по различным разделам математики рассказывали о современных достижениях.

В 1941 году на дневном отделении физико-математического факультета училось 343 студента.

Когда началась Великая Отечественная война многие преподаватели, студенты и аспиранты ушли на фронт. В докладе будет рассказано о судьбе некоторых выпускников физико-математического факультета. Осенью 1941 года было принято решение об эвакуации университета в г. Сталинск и ряд сотрудников покинул университет. Некоторые математики, механики и физики перешли на работу в Воронежский авиационный институт и были эвакуированы с институтом в Ташкент.

Летом 1942 года началось наступление немецко-фашистких войск, целью которых был захват южных районов СССР, богатых нефтью.

6 июля 1942 года правобережные районы Воронежа были заняты немецкими войсками. Вскоре в городе начались ожесточенные бои, продолжавшиеся до 25 января 1943 года,когда город был освобожден.

За несколько дней до захвата города университет был эвакуирован в г. Елабугу Татарской ССР. На 1 октября 1942 года в университете обучалось 192 человека, из которых 30 человек училось на физмате.

В августе 1943 года было принято решение о реэвакуации университета в Воронеж. Сначала в Воронеж прибыл химический факультет и первые курсы биолого-почвенного факультета. Остальные факультеты возвратились в Воронеж 1 октября 1944 года. Из довоенного преподавательского состава математического отделения физмата остались доцент М. В. Федосев и Е. П. Воскресенский. В марте 1944 года на физико-математическом факультете обучалось 40 человек.

Вскоре на физико-математическом факультете начали работать В. И. Соболев, А. С. Джанумянц и В. А. Тихонов. Началось послевоенное восстановление факультета.

Литература

1.*Карпачев М. Д.* Воронежский университет. Вехи истории. // Воронеж. — Изд. ВГУ. — 2003. — 472 с.

2. Рожденный революцией. Документы. Воспоминания. // Воронеж. — Изд. ВГУ. — 1988. — 448 с.

3. *Соболев В. И.* От "Адама" до Красносельского. // В сб. "Материалы к истории математического факультета ВГУ Воронеж.-Изд.

ВГУ. — 1998. — С. 3-12.

4. *Удоденко Н. Н.* Из истории физико-математического факультета Воронежского университета. // В сб. "Актуальные проблемы мтематики и информатики (Тр математического факультета) вып. 3, Воронеж. — 2009. — С. 73-77.

5. Университет в солдатской шинели. Документы. Воспоминания. Очерки. // Воронеж. — Изд. ВГУ. — 1985. — 352с.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОЦЕНКЕ ПРОЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ[1]

Ульянова Е.Л. (Воронеж)

ulhelen@mail.ru

В гильбертовом пространстве H рассматривается операторL : $D(L) \subset H \to H$, представимый в виде

$$L = A - B$$

,

$$D(L) = D(A)$$

Оператор А является самосопряженным, его спектр состоит из собственных значений

$$\lambda_0 = 1, \lambda_{2k-1} = ak^2 + b, \lambda_{2k} = ak^2 + b, k = 1, 2, ...,$$

а

$$e_0, e_{2k-1}, e_{2k}, k = 1, 2, ...$$

соответствующие собственные векторы, образующие ортонормированный базис. в H.

Для изучения спектральных свойств этого оператора применяется вариант метода подобных операторов, позволяющий исследовать спектральные свойства операторов, возмущенных относительно конечномерными.

В спектре оператора А выделяются две непересекающиеся части: Δ_1 — компактное множество, состоящее из $\lambda_n = an^2 + b$, и Δ_2 — замкнутое множество, причем

$$\sigma(A) = \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N08-01-00-192

Приводится условие при котором оператор А-В подобен оператору более простой структуры относительно невозмущенного оператора: у него те же инвариантные подпространства , что и у невозмущенного, и

$$\sigma(A - B) = \sigma_1 \cup \sigma_2,$$

причем σ_1 состоит из двух собственных значений исследуемого оператора.

В работе получена оценка нормы разности проекторов Рисса невозмущенного оператора, построенного по с пектральному множеству Δ_1 и возмущенного оператора, построенного по спетральному множествуσ_1

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов: Учеб. пособие. -Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1987. -164 с.

2. Баскаков А.Г. Спектральный анализ относительно конечномерных возмущений спектральных операторов // Изв. ВУЗов. Сер. Матем.-1991. $N^0$1. -С.3-11.

3. Кахан Е.П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.-М.: Мир, 1976.-204с.

4. Ульянова Е.Л. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. — Воронеж — 1998.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Ускова О.Ф., Волгина В.В. (Воронеж)

zdislava@bk.ru

В модулярной объектно-ориентированной динамической обучающее среде Moodle [1] разработан программный комплекс, назначение которого – автоматизированный контроль знаний по информатике. База заданий программного комплекса включает тесты материалов ЕГЭ по информатике и ИКТ [2], тесты контроля знаний, разработанные Федеральным агентством по образованию, авторские тесты контроля знаний по информатике [3] для студентов первого курса факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Все тесты базы данных предусматривают два вида вариантов ответа: выборочный и результативный и имеют свойства: два режима прохождения (обучение и контроль знаний); разрешена самостоятельная регистрация учащихся для участия в тестировании, ограничено количество обращений к одному и тому же тесту; ограничено время, которое испытуемый может затратить на тест.

Учебно-методический материал создан в виде Web-страниц, тестовые задания работают на сервере учебных курсов (http:/www.moodle.vsu.ru). Тесты по информатике для контроля знаний студентов 1 курса предусматривают вопросы нескольких типов: 1)испытуемому предоставляется возможность выбора одного из нескольких вариантов ответа, к каждому из которых преподаватель может указать комментарий, который отобразится ученику после ответа; 2) числовой ответ; 3) альтернативный ответ: текст вопроса содержит поля, в которые учащийся вводит ответ.

Использование в учебном процессе факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета разработанного программного комплекса помогает

- повысить интерес студентов к информатике;
- сместить акценты от теоретических знаний к практическим;
- повысить наглядность учебного материала;
- индивидуализировать учебный процесс;
- развить творческую активность студентов.

Литература

1. Сайт http://docs.moodle.org

2. Единый государственный экзамен по информатике и ИКТ для составления контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена 2010 г. [электронный ресурс]. Электронный текст дан.- Москва: ФИПИ.-2009.- Режим доступа: www.fipi.ru, свободный

3. Программирование на языке Паскаль: задачник/ под ред. Усковой О.Ф. – СПб.: Питер, 2005-336с.:ил

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ГРАФА

Ушаков С.А. (Воронеж)
Stan.US@mail.ru

Рассмотрим задачу нахождения независимых подмножеств графа методом генетических алгоритмов. Рассмотрим 2 варианта кодирования хромосом, генетические операторы и снижение роли целевой функции как критерия оптимальности решения.

В данной задаче удобно использовать либо двоичное, либо числовое кодирование хромосом. При первом способе кодирования хромосома представляет собой массив двоичных значений, длина которого равна количеству вершин графа. Если данная вершина входит в подмножество, то на соответствующем месте в массиве стоит 1, иначе 0. При числовом кодировании хромосома является массивом чисел, представляющих собой номера вершин графа, входящих в данное подмножество, оставшиеся места в массиве заполнены нулями. Кодирование хромосом диктует вид применяемых генетических операторов. При двоичном кодировании можно применять операторы одноточечного и многоточечного кроссинговера, одноточечной и многоточечной мутации, инверсии отдельных генов. При числовом кодировании приходится применять упорядочивающие операторы кроссинговера и мутации, во избежание появления одинаковых вершин в одном и том же подмножестве. Все генетические операторы реализованы таким образом, что в результате их применения никогда не получается множество, не являющееся внутренне устойчивым. Этого можно достигнуть двумя способами: в случае, если получается не внутренне устойчивое множество, или оставлять хромосому без изменений, или возвращать новую, сгенерированную случайным образом. Последний способ может помочь притоку нового генетического материала и расширения области поиска решения. Также можно предложить следующий вариант: попробовать применить оператор к одной и той же хромосоме некоторое (небольшое) число раз и только в случае неудачи всех попыток использовать один из двух описанных выше способов. Учитывая, что начальная популяция формируется таким образом, что все множества являются внутренне устойчивыми, любое множество на каждой итерации является внутренне устойчивым и для того, чтобы оно было независимым, необходимо и достаточно, чтобы каждая вершина, не входящая в данное множество, была смежна хотя бы одной вершине, входящей в множество (при условии связности графа).

Применяемые операторы селекции и редукции не зависят от способа кодирования хромосом и могут представлять собой любые операторы, применяемые в различных генетических алгоритмах.

Плюсом двоичного кодирования являются более легкие в реализации и более быстрые по времени, по сравнению с числовым кодированием, операторы кроссинговера и мутации. Преимуществами же числового кодирования перед двоичным являются более быстрая проверка множества на внутреннюю устойчивость и независимость, а также нахождение значения целевой функции. Это связано с тем, что при числовом кодировании мы работаем только с ненулевыми числами, стоящими в начале массива, при двоичном же нам приходится просматривать весь массив.

Целевая функция в данной задаче представляет собой количество вершин, входящих в множество, закодированное в хромосоме. Нашей конечной задачей является нахождение не экстремума данной функции, а множества хромосом (следовательно, и множеств вершин графа, закодированных в этих хромосомах), удовлетворяющих определенному условию. В данной задаче этим условием является принадлежность множества вершин к классу независимых (максимальных внутренне устойчивых) подмножеств вершин графа. Заметим, что по значению целевой функции нельзя определить, является ли данное подмножество независимым или нет. Поэтому после каждой итерации алгоритма необходимо проверять все хромосомы (т.е. подмножества вершин графа) текущей популяции на независимость и независимые заносить в отдельный список. Отсюда следует возможный критерий останова – если в течение достаточно большого числа итераций новые независимые подмножества найдены не были, то можно останавливать поиск. В качестве альтернативы при условии, что допустимое число итераций не было произведено, можно предложить заменить часть популяции вновь сгенерированными хромосомами и продолжить работу алгоритма. В этом случае велика возможность расширить границы области поиска решений. Таким образом, целевая функция применяется только в операторах селекции, редукции и репродукции, использующих ее значение.

Если найти все независимые подмножества графа, то легко заметить, что многие из них различаются лишь одной или двумя вершинами. То есть, одно подмножество может быть получено из другого путем исключения одной вершины и добавления другой. Очевидно, что именно такое действие и оказывает оператор мутации. При решении данной задачи оказалось эффективным повысить вероятность мутации каждой хромосомы до 70-80%, так как большинство новых решений получается именно благодаря оператору мутации. Также для этого применять оператор инверсии.

Вывод: при правильном выборе способа кодирования хромосом, применяемых генетических операторов генетический алгоритм даже для такой несколько нетипичной задачи показывает хорошие результаты. В качестве его сильной стороны можно отметить, что найденные им решения достаточно равномерно покрывают всю область решений и задействуют все вершины. На основе найденных независимых подмножеств можно решать задачу раскраски графа, в этом случае одноцветные классы строятся на их основе.

Программная реализация решения данной задачи была осуществлена на языке программирования C# в среде Microsoft Visual Studio 2008. Были спроектированы классы, представляющие двоичные и числовые хромосомы, в которых были определены операторы мутации и кроссинговера, а также функция проверки множества на внутреннюю устойчивость и независимость. Сам алгоритм реализован в виде цикла последовательного применения операторов селекции, кроссинговера, мутации и редукции. После каждой итерации хромосомы проверяются на независимость, и независимые заносятся в отдельный массив, содержащий все решения задачи. После того, как алгоритм совершит заданное число итераций (введенное перед началом работы), он останавливается и выводит все найденные независимые подмножества.

ОБ УЧЕТЕ НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ В КАНАЛАХ ВОДОИСПАРИТЕЛЬНЫХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ

Федулова Л.И., Швырева О.В., Грицких О.И. (Воронеж)
mathem@vsau.ru

Водоиспарительный принцип охлаждения перспективен в силу своей экономичности и экологической безвредности. Различают два основных типа водоиспарительного охлаждения: прямое и косвенное. Преимущество косвенного в том, что поток воздуха, поступающий в охлаждаемый объем, проходит по каналам испарительной насадки, не меняя своего влагосодержания, что важно для зон с повышенной влажностью. Одной из задач является улучшение характеристик охладителей данного типа путем рационального выбора длины насадки в зависимости от сечения каналов, соотношения между основным и вспомогательным потоками воздуха. Решение можно осуществить путем моделирования процессов тепло-массопереноса вдоль каналов испарительной насадки, прослеживая динамику изменения температуры и влажности в процессе прохождения, как основного, так и вспомогательного потоков воздуха [1].

Уравнение для определения скорости в используемой модели:

$$V = 1.5V_{cp}\left[1 - \frac{(y-h)^2}{h^2}\right]$$

где V_{cp} – средняя скорость парогазовой смеси, определяемая через расход и «живое» сечение насадки, h- половина сечения канала. Это скорость потока воздуха в плоских каналах при ламинарном течении [2]. Но при больших расходах воздуха в начале движения возникает начальный участок, где скорость имеет другой профиль. Это в имеющихся моделях не учитывается. Предлагается использовать более точную формулу для скорости, с учетом нач. участка:

$$v = v_{\text{вх}}\left(1,5 - \frac{1,5y^2}{h^2} - 2 \cdot S,\right) \quad \text{где} \quad S = \sum \frac{\left(1 - \frac{\cos\left(\frac{g_n y}{h}\right)}{\cos(g_n)}\right) e^{-4\frac{g_n^2 vx}{v_{\text{вх}} h^2}}}{g_n^2}.$$

Литература

1. Шацкий В. П., Федулова Л. И., Шалиткина А.Н. Алгоритм расчета модели тепломассопереноса для косвенных теплообменников водоиспарительных охладителей// Соврем. проблемы мех. и приклад. математики: Сб. тр. междунар. школы-семинара. – Воронеж: ВГУ, 2004. – Ч. 1, Т. 2. – С. 531-533. 2. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах.-М.: Энергия, 1967.-411с.

ОПЕРАТОР ВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

Феоктистов В.В., Мякинник О.О. (Москва)
pfeoktis@mail.ru, olga.mknk@ipmtel.ru

Системе уравнений

$$[I\cdot\partial_t - A]\,\vec{B}(t,x)=0,\quad A=\sum_{k=1}^{s}A_k\cdot\partial_{x_k},\quad x=(x_1,\ldots,x_s),\tag{1}$$

где $\vec{B}(t,x)$ – неизвестная n-мерная вектор-функция, A_k – квадратные числовые матрицы, I — единичная матрица, поставлено в соответствие множество V_s,

$$A_k^{\alpha_k}\in V_s,\quad X_k^{\alpha_k}\in V_s,\quad X_k=(Ix_k+tA_k),\quad \alpha_k\in N_0,\ k=\overline{1,s},\tag{2}$$

где бегущие волны X_k обладают свойством коммутативности по сумме

$$A_kX_i+A_iX_k=X_iA_k+X_kA_i,\qquad k\neq i,\quad k,i=\overline{1,s}.\tag{3}$$

На элементах V_s введено действие операторов волнового взаимодействия W_p^α по мультииндексу α размерности p, где $p=\overline{1,s}$:

$$W_1^{(0,\ldots,\alpha_k,\ldots,0)} = W(X_k^{\alpha_k})=X_k^{\alpha_k},\quad W_p^{(0,\ldots,0)}=I,\quad k=\overline{1,p},\tag{4}$$

$$W_p^{(1,\ldots,1)} = \sum_{k=1}^{p}X_kW(X_1,\ldots,X_{k-1},X_{k+1},\ldots,X_p),\tag{5}$$

$$W_p^{\alpha} = \sum_{k=1}^{p}X_kW(X_1^{\alpha_1},\ldots,X_k^{(\alpha_k-1)},\ldots,X_p^{\alpha_p}).\tag{6}$$

Рассмотрены операции дифференцирования W_s^α, доказан вид

$$\vec{B}(t,x)=\sum_{\alpha,\,\|\alpha\|=0}^{\infty}W_s^\alpha\cdot\vec{\gamma}_\alpha\tag{7}$$

решения (1). Решение задачи Коши с аналитическими данными $\vec{\varphi}(x)$ представлено в виде

$$\exp(At)\,\vec{\varphi}(x) \equiv \exp(At)\sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty}\frac{1}{\|\alpha\|!}W_0^\alpha(x)\cdot\partial_\alpha\,\vec{\varphi}(x)\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty}\frac{1}{\|\alpha\|!}W_s^\alpha\cdot\partial_\alpha\,\vec{\varphi}(x)\Big|_{x=x_0},\tag{8}$$

где $W_0^\alpha(x)$ — начальное состояние оператора W_s^α.

ОБ ОДНОМ ОБОЗНАЧЕНИИ СУММЫ РЯДА

Фомин В.И. (Тамбов)
kulikov@apmath.tstu.ru

В учебных пособиях числовой ряд и его сумму (в случае сходимости этого ряда) обозначают одним и тем же выражением

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

подразумевая, что смысл этого выражения ясен из контекста. Однако, при изложении некоторых вопросов удобно для ряда и суммы ряда применять различные обозначения: для ряда - обознаяение (1), для суммы ряда - обозначение вида

$$(s)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; .$$

Пусть, например, требуется ввести понятие показательной функции комплексного переменного и доказать ее основное свойство. Это делается так:

1. С помощью признака Даламбера доказывается, что при каждом $z \in \mathbb{C}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

сходится абсолютно (случай z=0 рассматривается отдельно).

2. Полагают, по определению,

$$e^z = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \; \forall z \in \mathbb{C} \; . \tag{2}$$

3. Доказывают, что

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \, e^{z_2}, \; \forall z_1, \; z_2 \; \in \mathbb{C} \quad , \tag{3}$$

следующим образом. Пусть $z_1, \; z_2 \in \mathbb{C}$; $z_1, \; z_2$ фиксированы. В силу пункта 1 ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \;\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \tag{4}$$

сходятся абсолютно. Запишем произведение рядов (4) в форме Коши:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+k=n}\frac{z_1^l}{l!}\frac{z_2^k}{k!}\right). \tag{5}$$

Используя бином Ньютона для комплексных чисел и формулу для биноминальных коэффициентов, получаем

$$\sum_{l+k=n}\frac{z_1^l}{l!}\frac{z_2^k}{k!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,z_1^{n-k}z_2^k=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,z_1^{n-k}z_2^k=$$

$$=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \tag{6}$$

В силу (5), (6)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \tag{7}$$

Известно [1, с. 453], что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению сумм перемножаемых рядов. В нашем случае

$$(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}\right). \tag{8}$$

В силу (2)

$$(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2},\ (s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}=e^{z_1},\ (s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=e^{z_2}. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует, в силу произвольности выбора z_1, z_2, формула (3).

Если в данном доказательстве убрать символ (s) в обозначении суммы ряда, то, например, запись (8) совпадет с записью (7) (лишь правая и левая части равенства поменяются местами). В этом случае для того, чтобы учащиеся понимали различное смысловое содержание одинаковых по виду записей (7) и (8), потребуются дополнительные разъяснения.

Естественно, что во всех случаях, когда из контекста действительно видно, о чем идет речь (о ряде или сумме ряда), какие-либо дополнительные значки для идентификации суммы ряда не нужны.

Литература

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 648с.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТЕРМИНАХ ПОЛУГРУПП

Фомин В.И. (Тамбов)

kulikov@apmath.tstu.ru

В банаховом пространстве E изучается уравнение

$$t^2x''(t) + tAx'(t) + Bx(t) = f(t), \quad 0 < t < \infty, \tag{1}$$

где $f(t) \in C(\ [0,\infty];\ E\ )$; $A, B \in N(E)$, $N(E)$ - множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E, с плотными в E областями определения.

Рассматривается стабилизирующее возмущение уравнения (1) малым параметром $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = const$:

$$(t+\varepsilon)^2\ x''_\varepsilon(t) + (t+\varepsilon)\ Ax'_\varepsilon(t) + Bx_\varepsilon(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \quad x'_\varepsilon(0) = x'_{\varepsilon,0}. \tag{3}$$

Пусть выполняются следующие условия:

1) операторный дискриминант $D = (A-I)^2 - 4B$ представим в виде $D = F^2$, где F - некоторый оператор из $N(E)$;

2) характеристические операторы $\Lambda_{1,2} = (1/2)(I - A \mp F)$ являются производящими операторами полугрупп $U_1(t)$, $U_2(t)$ класса C_0;

3) $AFx = FAx$, $x \in D(\Lambda^2)$, где $D(\Lambda^2) ::= D(\Lambda_1^2) = D(\Lambda_2^2) =$ $= D(\Lambda_1\Lambda_2) = D(\Lambda_2\Lambda_1) = D(A^2) \cap D(B) \cap D(AF) \cap D(FA)$;

4) $f(t) \in D(\Lambda^2)$ при каждом $t \in [0,\infty)$;

5) $Af(t),\ Ff(t),\ A^2f(t),\ AFf(t),\ Bf(t) \in C(\ [0,\infty); E\ )$;

6) $x_{\varepsilon,0} \in D_1$, $x'_{\varepsilon,0} \in D(\Lambda^2)$, где $D_1 = D(A^2) \cap D(AB) \cap D(AF) \cap$ $\cap D(FA) \cap D(FB)$;

7) типы ω_1, ω_2 полугруппы $U_1(t)$, $U_2(t)$ удовлетворяют условию $\omega = max\{\omega_1,\ \omega_2\} < -1$;

8) начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условиям $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon^{-\omega_{1\delta}}\|x_{\varepsilon,0}\|\ ] = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon^{-\omega_\delta}\|\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\|\ ] = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon^{1-\omega_\delta}\|x'_{\varepsilon,0}\|\ ] = 0$, где $\omega_{1\delta} = \omega_1 + \delta$, $\omega_\delta = \omega + \delta$, δ - произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число, удовлетворяющее условию $\omega + \delta < -1$.

Теорема 1. При выполнении условий 1) – 6) задача (2), (3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = U_1\left(ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0}+$$

$$+\int\limits_0^t U_2\left(ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)U_1\left(ln\frac{\tau+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right)\frac{d\tau}{\tau+\varepsilon}+$$

$$+\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^{t-\tau} U_2\left(ln\frac{t+\varepsilon}{\nu+\tau+\varepsilon}\right)U_1\left(ln\frac{\nu+\tau+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)f(\tau)\frac{d\nu}{\nu+\tau+\varepsilon}\right]\frac{d\tau}{\tau+\varepsilon}.$$

При выполнении условий 7), 8) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t), \quad t \in (0, \infty),$$

где

$$x_0(t) = \int\limits_0^t\left[\int\limits_0^{t-\tau} U_2\left(ln\frac{t}{\nu+\tau}\right)U_1\left(ln\frac{\nu+\tau}{\tau}\right)f(\tau)\frac{d\nu}{\nu+\tau}\right]\frac{d\tau}{\tau}. \qquad (4)$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1); это решение ограничено при $t \to +0$; если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

В работе [1] решение уравнения (1) найдено в виде

$$x_0(t) = F^{-1}\int\limits_0^t\left[U_2\left(ln\frac{t}{\tau}\right) - U_1\left(ln\frac{t}{\tau}\right)\right]\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau. \qquad (5)$$

Если ставится вопрос об оценке сверху решения $x_0(t)$ по норме, то для этих целей удобнее представление (4), нежели представление

(5), ибо в этом случае можно воспользоваться известным неравенством $\|A_1 A_2\| \leqslant \|A_1\| \, \|A_2\|$, $\forall A_1, \ A_2 \in L(E)$.

Утверждение, аналогичное теореме 1, получено также в случае $D = 0$.

Литература

1. Фомин В. И. // Сб. матер. шк. "Современные методы теории фукций и смежные проблемы". 27 января - 4 февраля 2001 г. Воронеж, 2001. С. 265-266.

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Халова В.А. (Саратов)

Рассматривается оператор вида

$$Af(x) = \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} (f, v_k) g_k(x), \qquad (1)$$

где $(f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t)\,dt$, $v_k(t) \in C^n[0,1]$, $g_k(x) \in C^n[0,1]$, системы функций $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$ и $\{v_k^{(n)}(t)\}_1^m$ линейно независимы.

В [1] была доказана теорема о базисности Рисса в пространстве $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций интегрального оператора вида

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t) f(t)\,dt,$$

некоторая производная ядра которого терпит разрыв на линии $t = 1 - x$.

В настоящей работе получен аналогичный результат для оператора (1).

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций оператора A образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,1]$.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270-а) и гранта Президента для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1)

Литература

1. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Математические заметки. 2004. Т. 76, вып. 1. С. 97–110.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ РАЗДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ И БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ[1]

Харламов М.П. (Волгоград)

mharlamov@vags.ru

Пусть в гамильтоновой вполне интегрируемой системе получено разделение переменных вида

$$ds_i/d\tau = \sqrt{P_i(s_i, \mathbf{h})}, \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^k, \quad \mathbf{h} \in \mathbf{R}^m,$$

где $\tau(t)$ – некоторая монотонная функция, P_i – многочлены от одной переменной, зависящие от постоянных интегрирования $\mathbf{h}$. Если при этом все исходные фазовые переменные $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ выражены как рациональные функции от радикалов вида $\sqrt{s_i - c_{ij}}$, где c_{ij} – корни многочленов P_i, то систему назовем алгебраически разделимой. Системами такого рода являются классические решения в динамике твердого тела (случаи Эйлера, Горячева–Чаплыгина и Ковалевской) и открытые недавно разделения переменных в критических подсистемах волчка Ковалевской в двойном поле [1]. При заданных $\mathbf{h}$ переменные $\mathbf{s}$ осциллируют в достижимой области $A(\mathbf{h})$. Многозначные зависимости $\mathbf{x}(\mathbf{s}; \mathbf{h})$ назовем надстройкой над $A(\mathbf{h})$. Соответствие между количеством связных компонент $A(\mathbf{h})$ и интегрального многообразия $J(\mathbf{h}) \subset \mathbf{R}^n$ (состоящего в компактном случае из лиувиллевых торов) можно описать в терминах классов эквивалентности булевых векторов относительно некоторых булевых вектор-функций специального вида, названных алгебраическими. В связи с этим проблема описания фазовой топологии алгебраически разделимой системы формализуется и может быть решена на компьютере конечными алгоритмами. Доказан ряд утверждений об алгебраических булевых вектор-функциях, позволяющих существенно понижать размерности пространств аргументов и значений и получать результаты в наглядном виде аналитически. Рассмотрены примеры – от простейших одномерных задач до задач с высокой кратностью накрытия плоскости вспомогательных переменных.

Литература

1. Kharlamov M.P. Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class. II. Real solutions // Regular and Chaotic Dynamics. 2009. 14(6). P. 621-634.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-01-97001, 10-01-00043)

ГЕОМЕТРИЯ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ[2]

Харламова И.И., Харламов М.П. (Волгоград)

irinah@vags.ru

Вполне интегрируемых гамильтоновых систем сегодня известно достаточно много. Этого удалось достичь благодаря существенным продвижениям в алгебраических методах исследования задач динамики. Однако разделения переменных, ведущие к построению явных решений, остаются уникальными явлениями. Успех в их нахождении, как указывал еще Якоби, всегда оказывается связан с некоторыми особыми системами локальных координат, какими были, например, эллиптические координаты Якоби (задачи о геодезических на эллипсоиде, случаи Эйлера и Клебша в динамике твердого тела).

В задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в двойном поле сил (поле с линейным несимметричным потенциалом) можно ввести комплексную систему координат, обобщающую первую замену С.В. Ковалевской. Запись условия ортогональности матрицы ориентации (геометрические интегралы) приводит к уравнению эллипсоида, которому удовлетворяют модули новых комплексных переменных $x^2+y^2+2z^2 = 2(a^2+b^2)$ (a, b – напряженности двух постоянных силовых полей). На этом эллипсоиде можно ввести систему локальных координат:

$$s_1 = \frac{x^2+z^2+a^2-b^2}{2x}, \qquad s_2 = \frac{x^2+z^2-a^2+b^2}{2x}.$$

С ее помощью к настоящему времени удалось проинтегрировать два семейства систем с двумя степенями свободы – критические подсистемы обобщенного волчка Ковалевской, указанные в [1]. Изучена геометрия переменных s_1, s_2, выписаны соответствующие ограничения. Записаны уравнения динамики в этих переменных. Демонстрируются применения этой системы к исследованию геометрии движения волчка.

Литература

1. Харламов М.П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. 2004. Вып. 34. С. 47-58.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00043)

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМ СЕМЕЙСТВОМ РАЗРЫВНЫХ[1]

Хромов А.А. (Саратов)

Рассматривается семейство операторов с разрывными образами:

$$\Omega_r u = \begin{cases} r\int\limits_x^1 e^{r(x-t)}u(t)dt, & x \in [0,1/2], \\ r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt, & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Известно [1], что для любой непрерывной функции $u(x)$ выполняется сходимость: $\|\Omega_r u - u\|_\infty \to 0$ при $r \to \infty$, где

$$\|\cdot\|_\infty = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}.$$

Теорема. *Справедлива оценка:*

$$|\Omega_r u - u| \leqslant \omega(h) + 2\|u\|_{C[0,1]} r^{-rh} + |u(x)|e^{-r/2},$$

где $\omega(h)$ - модуль непрерывности функции $u(x)$, $0 < h \leqslant 1/2$.

Литература

1. Хромов А. А. *Приближающие свойства степеней резольвенты оператора дифференцирования* // Изв. Сарат. Ун-та. Сер. Матем. Мех. Информ.2009. Т. 9. Вып. 3. С. 75-78.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОЛМОГОРОВА — НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ТИХОНОВА[1]

Хромова Г.В., Шаталина О.И. (Саратов)
olja@mail.ru

Рассмотрим семейство операторов T_α, соответствующих методу регуляризации А.Н. Тихонова при $r = 1$ [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1) и гранта РФФИ (проект 10-01-00270)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ - 4383, 2010.1) и гранта РФФИ (проект 10-01-00270)

В [2] показано, что для любой непрерывной функции $u(x)$ имеет место сходимость $\| T_\alpha u - u\|_{C_{[a,b]}} \to 0$, при $\alpha \to 0$. Рассматривается класс функций

$$M_B = \{u \in C[0,1] : u(x) = \int_0^1 B(x,t)v(t)dt, \ \|v\|_{L_2} \leqslant 1\}$$

и величина

$$\Delta_1(T_\alpha, M_B) = sup\{\| T_\alpha u - u\|_{C_{[0,1]}} : u \in M_B\}$$

Теорема. Если $B(x,t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant x, \\ 0, & t > x \end{cases}$, то при достаточно малых α выполняется двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}} - \Psi_2(\alpha) \leqslant \Delta_1(T_\alpha, M_B) \leqslant \sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{4}} + \Psi_1(\alpha),$$

где $\Psi_1(\alpha) = O(\alpha^{\frac{5}{4}})$, $\Psi_2(\alpha) = O(\alpha^{\frac{5}{4}})$

Литература

1. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. //ДАН СССР, 1963, т.153, №1, с.49-52.

2. Хромова Г.В. О тихоновской регуляризации //Изв. Сарат. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информатика, 2001, т. 1, вып.2, с. 75-78.

3. Хромова Г.В. О модулях непрерывности неограниченных операторов. //Изв. вузов Математика, 2006, №9(532), с.71-78.

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО КУРСА ЯХТЫ

Цеунова И.В. (Челябинск)

iriska-cat@mail.ru

В задаче выбора наилучшего курса яхты скорость яхты зависит от угла, который образует курс яхты и направление ветра. В работе [1] при постоянном ветре показано, что выгоднее идти галсами.

В докладе рассматривается игровая задача управления яхтой

$$\dot{z} = -u, \quad z \in R^n, \quad u \in U(v) \subset R^n, \quad v \in V, \qquad (1)$$

в которой скорость ветра v выбирает второй игрок. Первый игрок, выбирая управление $u \in U(v)$, стремится побыстрее осуществить встречу вектора $z(t)$ с заданным выпуклым замкнутым множеством $Z \subset R^n$. Управление u в каждый момент времени t строится в зависимости от t, $z(t)$ и скорости ветра $v(t)$. Движение системы (1) определяется с помощью ломаных. Вводится оператор

$$D_\sigma(X) = \bigcap\nolimits_{v\in V} \bigcup\nolimits_{0\leqslant\tau\leqslant 1}(X + \sigma\tau coU(v)),$$

с помощью которого строится функция

$$T(z) = \min \sigma, \quad \sigma \geqslant 0, \quad z \in D_\sigma(Z).$$

Используя схему из работы [2], построено управление первого игрока, обеспечивающее встречу с Z из начального состояния $z(0) = z_0$ к моменту $T(z_0)$. Показано, что для любого времени $T < T(z_0)$ существует постоянное значение скорости v ветра такое, что $z(t) \notin Z$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ при любом управлении u.

Литература

1. Крэггс, Дж.У. Задачи управления движением. /Дж.У. Крэгсс //Математическое моделирование – М., 1979.– с.21– 34.

2. Ухоботов, В.И. Непрерывная игра в пространстве с неполной линейной структурой / В.И. Ухоботов // Теория и системы управления. – 1997.– № 2. – С. 107 – 109.

ЗАДАЧА КОШИ В ЛОКАЛЬНО-НЕЛОКАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО МЕЖДУПРЕДЕЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВЫБРАННОМ КЛАССЕ

Чадаев В.А. (Грозный)

chadaev53@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} y(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k D_{0x}^{\alpha_k} y(t) = f\left(x, D_{0x}^{\gamma} y(t)\right), \qquad (1)$$

где $n-1 \leqslant \gamma < \alpha \leqslant n$; $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_m$; $n, m \in \mathbf{N}$, $\alpha_k \in \mathbf{R}$, $f(x,z) \in Lip[0,\ell]$ по переменной z.

Обозначим через D_{0x}^{δ} оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка δ с началом в точке 0 и с концом в точке $x \in [0,\ell]$ [1].

Введем класс $C^{\alpha}_{\beta}[0,\ell]$ функций $\varphi(x)$, имеющих дробную производную порядка α во всех точках $x \in]0,\ell]$ и представимых в виде [2]

$$\varphi(x) = x^{-\beta}\varphi_0(x), \tag{2}$$

где $\varphi_0(x) \in C[0,\ell]$, $\beta = n - \alpha$.

Задача Коши. Найти решение уравнения (1) в классе $C^{\alpha}_{\beta}[0,\ell]$, удовлетворяющее локально-нелокальному условию [3]:

$$\left\{ D^{\alpha-k}_{0x} y(t) \right|_{x=0} = b_k, \quad k = 1,2,...,n-1 \quad \lim_{x\to 0} x^{n-\alpha} y(x) = y_0. \tag{3}$$

Доказана теорема существования и единственности решения уравнения (2) с условием (3) в заданном классе.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. - 272 с.

2. Чадаев В.А. Задача Коши в локальной и нелокальной постановках дляквазилинейных уравнений дробного порядка // Известия КБНЦ РАН, N1 (8), 2002. С. 123-127.

3. Чадаев В.А. Видоизмененная задача Коши для квазилинейного уравнения дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. Т. 8, N1, 2005. С. 64-67.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

chavnn@mail.ru

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbf{N}$; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое (здесь и далее по Лебегу) множество, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ – *банаховы идеальные пространства* (БИП) измеримых на Π функций. Рассмотрим нелинейное уравнение вида:

$$x = \theta + AF[x], \quad x \in \mathcal{X}^{\ell}, \tag{1}$$

где $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^{\ell}$ – *линейный ограниченный оператор* (ЛОО), $F : \mathcal{X}^{\ell} \to \mathcal{Z}^m$ – некоторый оператор. К уравнению (1) сводятся многие начально-краевые задачи мат. физики (см., напр., [1–3]).

[1]Поддержка грантом АЦВП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)" Минобрнауки РФ, рег. № 2.1.1/3927, и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2009-2013), проект НК-13П(9)

Теорема 1. *Пусть* $A \geqslant 0$ *и* $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{Z}_+^m$ *такие, что для* $x^+ = A\varphi$ *и* $x^- = -A\psi$ *выполняются следующие предположения:*

1) $\exists$ *положительный ЛОО* $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ *такой, что:* $|F[x] - F[y]| \leqslant L[|x-y|]$ *для всех* $x, y \in [x^-; x^+]$*; 2)* $\exists$ *ЛОО* $G : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ *такой, что:* $G[x^-] \leqslant F[\theta + x] + G[x] \leqslant G[x^+]$ *для всех* $x, y \in [x^-; x^+]$*; 3) ЛОО A обладает* $\forall \delta > 0$ *вольтерровой* δ*-цепочкой (см. [2,3])* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\delta \in \mathcal{B}(F) \cap \mathcal{B}(G) \cap \mathcal{B}(L)$*; 4) ЛОО* $(I + AG)^{-1}A \geqslant 0$.

Тогда на конусном отрезке $[\theta + x^-; \theta + x^+]$ *уравнение (1) имеет в точности одно решение.*

Теорема 1 обобщает (мы не требуем монотонизируемости правой части) и развивает (используем вольтерровость операторов) достаточные условия разрешимости уравнения вида (1) из [1].

Литература

1. В.П. Политюков. О методе монотонизации нелинейных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. Т.44, № 6.-1988.-С. 814-822.

2. В.И. Сумин, А.В. Чернов. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. Сер. Мат. моделир. и оптим. упр. Вып. 1(26).-2003.-С. 39-49.

3. А.В. Чернов. О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. Сер. Математика. № 3.-2009.-С. 130-137.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА ПРИ НАЛИЧИИ ГОМОГЕННОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Чопчиян А.С. (Старый Оскол), Коржов Е.Н. (Воронеж)

chamst_18@mail.ru

В работе рассматривается процесс стационарной электродиффузии около ионоселективной мембраны с учетом объёмного электрического заряда при наличии гомогенной химической реакции. При построении математической модели использовались законы баланса массы для многокомпонентной среды, уравнение Нернста-Планка для плотности потока электрически заряженных компонентов и уравнение Пуассона для электрического потенциала [1, 2]

$$\frac{dJ_k}{dX} = \omega_k K_k, (k = 1...n), \tag{1}$$

$$J_k = -\frac{\eta z_k}{\beta_k} C_k \frac{d\Phi}{dX} - \frac{1}{\beta_k}\frac{dC_k}{dX}, (k = 1...n), \tag{2}$$

$$\mu^2 \frac{d^2\Phi}{dX^2} = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k C_k; \tag{3}$$

$$X = 0 : C_k(0) = 1 (k = 1...n), \Phi(0) = 0, \tag{4}$$

$$X = 1 : J_k = J (k = 1...n), \Phi(1) = -1. \tag{5}$$

Здесь C_k, D_k, z_k, J_k - безразмерная молярная концентрация, коэффициент диффузии, зарядовое число и безразмерная плотность потока k-го компонента; K_k - функция источника или стока для k-го компонента, возникающего или исчезающего в результате гомогенной химической реакции; Φ - безразмерный электрический потенциал; $\eta \sim 1$ - безразмерный параметр; β_k, γ_k - безразмерные коэффициенты; μ - малый параметр.

В докладе рассматривается частный случай электродиффузионного переноса четырех заряженных компонентов, два из которых имеют противоположные заряды и не вступают в химические реакции, а два других взаимодействующих заряженных компонента образуются в результате диссоциации нейтрального; приводится решение соответствующей краевой задачи, найденное метод пограничных функций А.Б. Васильевой [3].

Литература

1. Заболоцкий В.И., Никоненко В.В. Перенос ионов в мембранах. М.: Наука, 1996.

2. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 460 с.

3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА НА ДОМЕННОЙ СТЕНКЕ

Чубурин Ю.П. (Ижевск)

chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассмотрим оператор в $(L^2(\mathbf{R}))^2$ вида

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - \alpha \mathrm{M}(x) \cdot \sigma, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $\mathrm{M}(x) = (v(x), 0, -\mathrm{sgn} x - w(x))$ - вектор намагниченности, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ - набор матриц Паули. Здесь $v(x), w(x)$ - ненулевые вещественные функции такие, что $v^2(x)+(\mathrm{sgn}x+w(x))^2 = 1$ для всех x. Предполагается, что $v(x) = w(x) = 0$ вне некоторого промежутка $[-d,d]$, $d > 0$, функция $w(x)$ неотрицательна и монотонно возрастает в полуинтервале $[-d,0)$, является нечетной и удовлетворяет оценке $w(x) \leqslant 1$($w(x)$ "сглаживает"функцию $\mathrm{sgn}x$), функция $v(x)$ неотрицательна,. Оператор (1) представляет собой гамильтониан электрона со спином, проходящего через доменную стенку в ферромагнитной квантовой проволоке. Существенный спектр оператора H совпадает с $[-\alpha,\infty)$.

С использованием аналога уравнения Липпмана-Швингера исследуется рассеяние для "налетающей волны" вида $(e^{i\sqrt{\lambda+\alpha}x},0)$. Обозначим через $P_1^+(P_1^-)$ и $P_2^+(P_2^-)$ вероятности прохождения (отражения) по 1-й и 2-й компоненте решения соответственно.

Теорема 1. *Предположим, что* $\lambda \in (-\alpha,\alpha)$. *Тогда* $P_1^- = 1 + O(\alpha), P_2^- = 0$. *Пусть теперь* $\lambda > 0$ *фиксировано. Тогда* $P_1^+ = 1 + O(\alpha), P_2^+ = O(\alpha)$.

Для больших α функции $\alpha v(x)$ и $\alpha w(x)$ при определенных условиях заменяем на соответствующие пределы: $a\delta(x)$ и 0 ($a = \mathrm{const}$).

Теорема 2. *Предположим, что* $\lambda \in (-\alpha,\alpha)$. *Тогда* $P_1^- = 1 + O(1/\alpha)$, $P_2^- = 0$. *Предположим теперь, что* $\lambda = A\alpha^p$, *где* $A > 0, p > 1$. *Тогда* $P_1^+ = 1 + O(1/\alpha^p), P_2^+ = O(\alpha^p)$.

Таким образом, как для достаточно малых, так и для достаточно больших α почти полное отражение для $\lambda \in (-\alpha,\alpha)$ сменяется почти полным прохождением (без переворачивания спина). Почти полное отражение согласуется с экспериментальным физическим эффектом BMR (ballistic magneto-resistance effect - резкое увеличение сопротивления в квантовой проволоке при небольшом увеличении магнитного поля).

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВ СИММЕТРИЙНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Шананин Н.А. (Москва)

nashananin@inbox.ru

Пусть $(v_1(t,x),\ldots,v_n(t,x),p(t,x))$ - $\in C^\infty$-решение системы

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t v_l + \sum_{j=1}^n v_j \partial_{x_j} v_l - \nu\Delta v_l + \partial_{x_l} p & = & f_l(t,x,v) + a_l(t,x)p, \\ & & l = 1,2,\ldots,n, \\ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} v_j = g(t,x), & & (t,x) \in \Omega \end{array}\right. \qquad (1)$$

где Ω - открытое множество в R^{n+1}, $\Delta = \sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j})^2$ - оператор Лапласа, $\nu > 0$, $f_l \in C^\infty(\Omega \times R^n)$, $a_l \in C^\infty(\Omega)$.

Пусть G - группа Ли симметрий системы (1). Говорят, что решение (v, p) *G-инвариантно в точке* (t^0, x^0), если существуют такие открытые окрестности U точки (t^0, x^0) и V единицы группы, что $(g \circ u)(t, x) = u(t, x)$ для всех $(t, x) \in U$ и $g \in V$. Обозначим через V_{sym} подмножество точек, решение инвариантно.

Теорема. *Если $(t^0, x^0) \in V_{\text{sym}}$, то вся связная компонента слоя $\{t = t^0\} \cap \Omega$, содержащая (t^0, x^0), содержится в V_{sym}.*

Аналог утверждения теоремы справедлив для дискретных групп симметрий. Кроме того, утверждение обобщается на негладкие решения системы (1) с негладкими f_l и a_l.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА В ВОДОИСПАРИТЕЛЬНЫХ ТЕПЛООБМЕННИКАХ

Шацкий В.П., Чесноков А.С. (Воронеж)
selches@inbox.ru

Обоснована возможность приведения системы уравнений тепломассопереноса в каналах сечением $H = 2h$ водоиспарительных охладителях, имеющей вид:

$$\rho \cdot V(y) \cdot C \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right), \quad V(y) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(D \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

где ρ, C, λ, t, D — соответственно плотность, теплоемкость, теплопроводность, температура и коэффициент диффузии воздуха, $w(x, y) = \varphi(x, y) \cdot w_{\text{н}}(t)$, где φ — относительная влажность воздуха, w — плотность пара, $w_{\text{н}}$ — плотность насыщенного пара, определяемая по формуле:

$$w_{\text{н}}(t) = 10^{-5}(3{,}5t^2 - 40{,}6t + 1090{,}5).$$

На поверхности пористой пластины $RJ_{\text{п}} = \lambda \frac{\partial t}{\partial y}\big|_{y=0}$, $w|_{y=0} = w_{\text{н}}(t_{\text{пов}})$, где R — удельная теплота парообразования, $t_{\text{пов}}$ — температура поверхности пластины, $J_{\text{п}}$ — плотность потока пара.

На оси симметрии канала выполняется условие четности:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=h} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=h} = 0,$$

а начальными являются условия на входе в канал: $t|_{x=0} = t_{\text{вх}}$, $\varphi|_{x=0} = \varphi_{\text{вх}}$ к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\rho Cvh\frac{dT}{dx} = -J, \quad vh\frac{dW}{dx} = J_{\text{п}},$$

где J — плотность теплового потока, v, T, W — соответственно среднерасходные скорость, температура и плотность пара с теми же начальными условиями. Решение этой системы позволило получить удобную для расчетов аналитическую зависимость для определения температуры в каналах испарительной насадки

$$T(x) = t_{\text{пов}} + 0{,}896(t_{\text{вх}} - t_{\text{пов}})e^{-\frac{-2\lambda}{\rho C v H^2}\left[-L_{\text{нач}}\exp\left(-\frac{13{,}733x}{L_{\text{нач}}}\right)+3{,}777x\right]}$$

где $L_{\text{нач}} = 0{,}055\frac{C\rho vH^2}{\lambda}$ — длина термического начального участка.

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Шигаева О.В. (Саратов)

Oksana_Shigaeva@mail.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок $L(\lambda)$ вида

$$l(y,\lambda) := \sum_{s+k=3} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \; p_{sk} \in \mathbf{C}, \; p_{03} \neq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{s+k=\kappa_{10}} \lambda^s \alpha_{1sk} y^{(k)}(0) = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{s+k\leqslant\kappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k\leqslant\kappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \; i = 2,3, \tag{3}$$

где $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbf{C}$, $\quad \kappa_{i0}, \kappa_{i1} \in \{0,1,2\}$.

Пусть корни $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ характеристического уравнения дифференциального выражения (1) различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, считаем, что

$$\omega_3 < 0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1)

Обозначим: $a_{ij} = \sum\limits_{s+k=\kappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k$, $(i,j = \overline{1,3})$, $b_{ij} = \sum\limits_{s+k=\kappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k$, $(i,j = \overline{2,3})$; $\kappa_i = \min\{\kappa_{i0}, \kappa_{i1}\}$ $(i = 2,3)$; $[n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Если справедливы неравенства (4),* $\det(b_{ij}) \neq 0$, $i = \overline{2,3}$, $j = \overline{1,2}$, $a_{13} \neq 0$ *и выполняется одно из трех следующих условий:*

1) $b_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$ *при* $\kappa_{20} + \kappa_{31} > \kappa_{30} + \kappa_{21}$;
2) $b_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \neq 0$ *при* $\kappa_{20} + \kappa_{31} < \kappa_{30} + \kappa_{21}$;
3) $b_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + b_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \neq 0$ *при* $\kappa_{20} + \kappa_{31} = \kappa_{30} + \kappa_{21}$,

то система корневых функций пучка (1)-(3) m-кратно полна в $L_2[0,1]$ *при* $m \leqslant 2$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=2}^{3}[m - 1 - \kappa_i]_+$.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСКРАСКИ ГРАФА

Шлигровский Е.И. (Воронеж)
omkolpoch@mail.ru

Рассмотрим задачу раскраски графа: требуется раскрасить вершины графа таким образом, чтобы смежные вершины были разных цветов. Необходимо найти такой способ раскраски, чтобы число используемых цветов было наименьшим.

Организация генетического алгоритма для решения задач на графах, в том числе и задачи раскраски, имеет ряд особенностей. Прежде всего, это связано с тем, что в ходе решения подобных задач не требуется найти оптимальное значение какой-либо целевой функции и точку, в которой достигается это значении, как это требуется в задачах оптимизации, для которых, как привило, и применяются генетические алгоритмы. Специфическая конечная цель поставленной задачи, особенности начальных условий и способа их представления (в качестве входных данных имеется граф), наличие, предположительно, достаточно большого множества возможных решений и некоторые другие характерные черты, отличающие задачу раскраски графа от других задач, решаемых с применением генетических алгоритмов, приводят к наличию некоторых особенностей реализации алгоритма по её решению. К таким особенностям относятся: достаточно сложная структура хромосом, необходимость постоянного контроля корректности рассматриваемых вариантов решения, невысокая роль некоторых операторов, применяемых к хромосомам, сложность формирования начальной популяции и выбора её размера, нестандартные критерии отбора. Теперь рассмотрим эти особенности подробнее.

Ввиду того, что в итоге работы алгоритм должен сформировать целый набор множеств, содержащих вершины графа, возникает необходимость в ходе работы алгоритма формировать, изменять и анализировать структуры данных, представляющие собой различные варианты таких наборов. Как следствие этого, возникает и необходимость менять в течение выполнения алгоритма размеры хромосом, а также несколько усложняются принципы действия операторов, применяемых к хромосомам (кроссинговер, мутация, транслокация, сегрегация и т. д.).

В ходе создания потомков путём преобразования хромосом родителей постоянно возникает вероятность формирования такого варианта конечного решения или просто способа объединения вершин графа в одно множества (раскраска их одним цветом), которая окажется недопустимой в рамках данной задачи. Почти всегда сохраняется риск того, что, создав нового потомка, возникнет ситуация, при которой предлагается раскрасить в один цвет вершины, которые являются смежными. Кроме того, часто могут возникать "повторы", когда одна и та же вершина присутствует в предполагаемом варианте раскраски несколько раз. Проверка подобных неподходящих вариантов должна постоянно проводиться в ходе работы алгоритма. В качестве одного из вариантов обеспечения такого контроля предлагается включить процедуру проверки в реализацию операторов кроссинговера, мутации, транслокации, сегрегации, вставки и др., при этом либо сразу уничтожая таких заведомо нежизнеспособных потомков, либо сразу изменяя их генотип таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям задачи (например, удаляя повторяющиеся вершины). В связи с этой особенностью, желательно рационально использовать выше указанные операторы, а также на протяжении всей работы обеспечить быстрый и удобный доступ к представлению исходного графа, например, к его матрице инцидентности. В противном случае, частая проверка потомков может замедлить работу программы.

Ввиду того, что для элементов одного множества (в нашем случае: для вершин графа, раскрашенных в один цвет) порядок элементов внутри множества не имеет значения, можно считать нецелесообразным применение операторов, которые в результате своей работы будут просто менять порядок следования монохромных вершин. Стоит отметить, что по этой причине всё же не следует полностью отказываться от применения операторов, которые меняют лишь внутреннюю структуру хромосом. Например, изменение порядка следования целых строительных блоков способно оказывать влияние на дальнейшую работу алгоритма, так как повлияет на процесс создания потомков путём обмена родителями участков их хромосом. Также заметим, что внутри множеств вершин одного цвета может быть целесообразно поддерживать строгий, заранее определённый порядок следования элементов, например, в порядке возрастания или убывания номеров вершин. Это упростит процесс анализа имеющихся вариантов раскраски.

В рамках данной задачи всегда можно выбрать начальную популяцию так, чтобы первым предполагаемым решением являлся вариант раскраски, когда каждая вершина имеет свой цвет. Однако подобный выбор начальной популяции может быстро привести к получению конечного решения только в случае, когда заданный граф имеет очень большое количество смежных вершин, то есть, близок к полному. Такой случай, особенно в случае графов с большим количеством вершин, маловероятен. Кроме того, при таком способе формирования начальной популяции она будет иметь максимально возможный размер, что может привести к значительному, притом напрасному, замедлению работы алгоритма на начальных этапах. Поэтому следует уже на этапе выбора начальной популяции стоит сформировать некоторые множества, содержащие несмежные вершины графа, то есть сразу окрасить некоторые вершины в один цвет. Однако изначальное объединение большого числа вершин во множества, во-первых, может оказаться медленным и ресурсоёмким процессом из-за необходимости проверки корректности такой раскраски, а во-вторых, может привести к снижению разнообразия возможных вариантов образования потомков. Поэтому возникает вопрос компромиссного решения данной проблемы. В качестве варианта её решения предлагается в начальной популяции сразу раскрасить в одни цветы по несколько вершин. С одной стороны, это уменьшит в несколько раз размер начальной популяции, а с дугой стороны, сохранит большое количество возможностей для формирования разнообразных потомков.

В оптимизационных задачах основным критерием отбора является значение целевой функции. В случае задачи раскраски оцениваются такие параметры, как количество вершин, раскрашенных в один цвет и число цветов в предполагаемой раскраске – чем меньше, тем лучше.

Программная реализация решения данной задачи была осуществлена на языке программирования C# в среде Microsoft Visual Studio 2008. Были описаны классы, представляющие хромосомы, в которых были определены методы, реализующие операторы мутации, вставки, удаления и кроссинговера, в ходе выполнения которых автоматически производится проверка корректности новых хромосом. Сам алгоритм представляет собой цикл последовательного применения операторов селекции, кроссинговера, мутации, вставки. После того, как алгоритм совершит заданное число итераций (введенное перед началом работы), он останавливается и выводит все найденные варианты решения задачи.

ОКРЕСТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОКРЕСТНОСТЯМИ

Шмырин А.М., Седых И.А., Корниенко Н.А., Шмырина Т.А. (Липецк)
amsh@lipetsk.ru

Уравнение динамической линейной окрестностной модели сети Петри, состоящей из m слоев, имеет вид [1]:

$$[W_x^1[t+1]\, W_x^2[t+1]\, W_x^m[t+1]]\, D\, X[t+1] =$$

$$[W_x^1[t]\, W_x^2[t] \ldots W_x^m[t]]\, D\, X[t] + [W_\nu^1[t]\, W_\nu^2[t] \ldots W_\nu^m[t]]\, D\, X[t], \quad (1)$$

где $W_x^k[t+1] \in R^{n\times n}$, $W_x^k[t] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матрицы коэффициентов k-го слоя по состояниям в моменты времени $t+1$ и t, $W_\nu^k[t] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матрица коэффициентов k-го слоя по входам в момент времени t; $X[t+1], X[t] \in \mathbb{R}^n$ - векторы состояний окрестностной системы в моменты времени $t+1$ и t; $V[t] \in \mathbb{R}^n$- вектор входов в момент времени t, $D \in \mathbb{R}^m$ - случайный вектор из нулей и одной единицей в позиции, соответствующей выбираемому в текущий момент слою k

($k = 1, \dots, m$). Время в окрестностной модели сети Петри совпадает с номером такта функционирования модели. В формуле (1)

$$[W^1[t]W^2[t]\dots W^m[t]]\,D = \Sigma_{k=1}^{m} W^k[t]\,d_k$$

Окрестностная модель сети Петри является моделью с переменными окрестностями (слоями). По уравнениям выбранного слоя происходит пересчет состояний узлов окрестностной модели в следующий момент времени. Обобщая (1), рассмотрим модель как с переменными окрестностями системы, так и переменными связями внутри окрестности на каждом такте функционирования системы:

$$[\widehat{W}_x^1[t+1]\,\widehat{W}_x^2[t+1]\,\widehat{W}_x^m[t+1]]\,D\,X[t+1] =$$

$$[\widehat{W}_x^1[t]\,\widehat{W}_x^2[t]\dots\widehat{W}_x^m[t]]\,D\,X[t] + [\widehat{W}_\nu^1[t]\,\widehat{W}_\nu^2[t]\dots\widehat{W}_\nu^m[t]]\,D\,X[t], \quad (2)$$

где $\widehat{W}_x^k[t+1]$, $\widehat{W}_x^k[t], \widehat{W}_\nu^k[t] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - переменные матрицы коэффициентов k-го слоя по состояниям и по входам в моменты $t+1$ и t. Подход допускает применение к другим типам окрестностных моделей.

Литература

1. Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Седых И.А., Филоненко В.Ю. Окрестностное моделирование сетей Петри. - Липецк: ЛЭГИ, 2010. - 124 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА А-ГРАФАХ[1]

Юрко В.А.(Саратов)

yurkova@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный граф G в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_s\}$, множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ и с отображением σ, которое каждому ребру $e_j \in \mathcal{E}$ ставит в соответствие упорядоченную пару (возможно равных) вершин: $\sigma(e_j) := [u_{2j-1}, u_{2j}]$, $u_j \in \mathcal{V}$. Вершины $u_{2j-1} =: \sigma^-(e_j)$ и $u_{2j} =: \sigma^+(e_j)$ называются начальной и конечной вершинами ребра e_j, соответственно. Положим $U := \{u_j\}_{j=\overline{1,2s}}$. Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ порождает класс эквивалентности такой, что $v = u_{j_1} = \dots = u_{j_\nu}$. Пусть $v_1, \dots, v_p$ - граничные вершины, $p > 0$, а l_j - длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка u_{2j-1}

[1]Работа выполнена при поддержке Национального исследовательского фонда Катара (проект NPRP 08-345-1-067)

соответствует $x_j = 0$. Цепочка ребер $b_k = \{b_{k1}, \dots, b_{k,\eta_k}\}$, $b_{kj} \in \mathcal{E}$ называется *циклом*, если она образует замкнутую кривую. Точка $w_k := \sigma^-(b_{k1})$ называется начальной точкой цикла b_k, $B := \{b_k\}_{k=\overline{1,N}}$ – множество циклов. Предположим, что если $b_k, b_j \in B$, $k \neq j$ и $b_k \cap b_j \neq \varnothing$, то $b_k \cap b_j = v \in V$. Такие графы называются А-графами. Возьмем в качестве корня граничную вершину v_p. Условимся, что если $b_k \in B$ - цикл, то начальная точка w_k лежит ближе к корню, чем остальные точки цикла b_k. Интегрируемая функция Y на G может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, l_j]$ определена на ребре e_j. Обозначим $Y_{|u_{2j-1}} := y_j(0)$, $Y_{|u_{2j}} := y_j(l_j)$, $\partial Y_{|u_{2j-1}} := y_j'(0)$, $\partial Y_{|u_{2j}} := -y_j'(l_j)$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,s}}$ – интегрируемая функция на G. Рассмотрим дифференциальное уравнение на G:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, l_j], \quad j = \overline{1,s}, \tag{1}$$

где y_j удовлетворяют условиям склейки (УС) в каждой внутренней вершине v_ξ:

$$Y_{|u_i} = Y_{|u_j} \text{ при всех } u_i,\, u_j \in v_\xi, \qquad \sum_{u_i \in v_\xi} \partial Y_{|u_i} = 0. \tag{2}$$

Зафиксируем цикл $b_k \in B$ с начальной точкой $w_k \in U$. Если (2) выполняется для множества $U \setminus \{w_k\}$, то такие условия называются w_k-УС. Пусть $L_0(G)$ – краевая задача для уравнения (1) с УС (2) и с граничными условиями: $Y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{1,p}$, а $L_k(G)$, $k = \overline{1, p-1}$ – краевые задачи для уравнения (1) при УС (2) и при граничных условиях $\partial Y_{|v_k} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{1,p}\backslash k$. Пусть $L_\nu^\xi(G)$, $\xi = \overline{1,N}$, $\nu = 0,1$ – краевые задачи для уравнения (1) с w_ξ-УС и с краевыми условиями $\partial^\nu Y_{|w_\xi} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{1,p}$, где $\partial^0 Y := Y$, $\partial^1 Y := \partial Y$. Обозначим через $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n\geqslant 1}$ и $\Lambda_\nu^\xi = \{\lambda_{\nu n}^\xi\}_{n\geqslant 1}$ спектры задач $L_k(G)$ и $L_\nu^\xi(G)$, соответственно. Исследуется обратная задача: *даны спектры* Λ_k, $k = \overline{0, p-1}$, *и* Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{1,N}$, $\nu = 0,1$, *построить* q *на* G.

Теорема 1. *Задание спектров* Λ_k, $k = \overline{0, p-1}$, *и* Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{1,N}$, $\nu = 0,1$, *однозначно определяет* q *на* G.

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [1] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Литература

1. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* - М.: Физматлит, 2007.

ПОЛУФРЕДГОЛЬМОВЫ СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОГО СРЕДНЕГО В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ c

Яблонская Н.Б. (Минск)

natsev@tut.by

Пусть A — нижняя треугольная матрица с элементами $a_{nk} = p_k/P_n$, $k \leqslant n$, где $p_k \geqslant 0$, $p_0 > 0$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$, удовлетворяющими условию [1]:

$$\lim p_n/P_n = \delta, \quad 0 < \delta < 1. \tag{1}$$

Рассмотрим подмножество комплексной плоскости C, определяемые полуфредгольмовыми характеристиками:

$$\Delta_1(A) := \{\lambda \in C : \quad R(A - \lambda I) = \overline{R(A - \lambda I)}\};$$
$$\Phi^+(A) := \{\lambda \in \Delta_1(A) : \quad \mathrm{nul}(A - \lambda I) < \infty\};$$
$$\Phi^-(A) := \{\lambda \in \Delta_1(A) : \quad \mathrm{def}(A - \lambda I) < \infty\}.$$

Полуфредгольмовыми существенными спектрами линейного оператора A называются подмножества спектра $\sigma(A)$, определяемые следующим образом [2]:

$$\sigma_{e2}^{\pm}(A) := C \setminus \Phi^{\pm}(A).$$

Теорема 1. *Пусть оператор $A \in \mathbf{B}(\mathbf{c})$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечного числа одинаковых элементов. Тогда для полуфредгольмовых существенных спектров оператора A справедливы формулы:*

$$\sigma_{e2}^{\pm}(A) = \{\lambda \in C : \ |\lambda - 1/(2 - \delta)| = (1 - \delta)/(2 - \delta)\}.$$

Другие существенные спектры для оператора взвешенного среднего в пространстве **c** рассмотрены в [3].

Литература

1. Rhoades B.E. The fine spectra for weighted mean operators // Pacific journal of mathematics. - 1983. - Vol.104, №1. - P.219-230.

2. Еровенко В.А. Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов: Учеб. пособие. - Мн.: БГУ, 2002. - 144 с.

3. Северенчук (Яблонская) Н.Б. Спектральные в фредгольмовы свойства операторов взвешенного среднего в банаховом пространстве c // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. - 1999. - № 4(4). - С.17-20.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Гачаев А. М., Яхьяев С.З. (Грозный)

Пусть: $\gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$ – точка из трехмерного евклидова пространства R^3с координатами $\gamma_j \in \,]0,\,1]\,,\ j = 0,\,1,\,2;\ \sigma_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \gamma_j - 1, \quad \mu_k = \sigma_k + 1,$

$p = 1/\sigma_2 > 0$, $\Gamma\,(z)$– гамма-функция Эйлера; $L\,[0,1]$– пространство абсолютно суммируемых функций; D^{μ}_{0x}– оператор дробного дифференцирования порядка $|\mu|$ с началом в точке 0, который действует на функцию $\varphi\,(x)$ из области его определения $D\,(D^{\mu}_{0x}) \subset L\,[0,1]$ по формуле

$$D^{\mu}_{0x}\varphi\,(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int\limits_0^x \frac{\varphi\,(t)dt}{(x-t)^{1-\mu}}, & \mu < 0, \\ \frac{\partial^{[\mu]+1}}{\partial x^{[\mu]+1}} D^{\mu-[\mu]-1}_{0x}\varphi\,(t)\,, & \mu > 0. \end{cases}$$

Следуя [1], [2], введем дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)}\varphi\,(x) \equiv \frac{d^{\,-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\varphi\,(x) \equiv \frac{1}{\Gamma\,(1-\gamma_0)} \int\limits_0^x \frac{\varphi\,(t)\,dt}{(x-t)^{\gamma_0}};$$

$$D^{(\sigma_1)}\varphi\,(x) \equiv \frac{d^{\,-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\,\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}\varphi\,(x)\,;$$

$$\frac{d^{\,-(\alpha)}}{dx^{-(\alpha)}}\varphi\,(x) = \frac{d^p}{dx^p}\,\frac{d^{\,-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}}\varphi\,(x)\,,$$

где $p - 1 < a \leqslant p = 1,\,2,\ldots;$

$$D^{(\sigma_2)}\varphi\,(x) \equiv \frac{d^{\,-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}}\,\frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}}\,\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}\varphi\,(x)\,.$$

Предполагается, что эти операторы имеют смысл, по крайней мере, почти всюду на $[0,\,1]$.

Легко видеть, что $D^{(\sigma_2)}\varphi\,(x) = D^{\gamma_k-1}_{0x}\varphi\,(t)\,,\ k = 0,\ 1;$

$$\frac{d^{\,-(\alpha)}\varphi\,(x)}{dx^{-(\alpha)}} = D^{\alpha}_{0x}\varphi\,(t)\,,\ \ [\alpha] - 1, < \alpha \leqslant p = [\alpha]\,;$$

$$D^{\sigma_2}\varphi(x) = D_{0x}^{\gamma_2-1} D_{0t}^{\gamma_1} D_{0\xi}^{\gamma_0}\varphi(\eta).$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\partial_{0x}^{\gamma_1} u(t) = [\lambda + q(x)]\, u(x), \tag{1}$$

где $\partial_{0x}^{\gamma_1} = D_{0x}^{\gamma_1-1}\frac{\partial}{\partial x}$-регуляризованный оператор дробного дифференцирования порядка γ_1 с началом в точке 0 и с концом в точке x[1], [2].

Задача Дирихле для уравнения (1) ставится следующим образом.

Задача А. *Найти решение* $u(x)$ *уравнения (1) из класса* $C[0,1] \cap C'(0,1]$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0) = \delta_0, \quad u(1) = \delta_1, \tag{2}$$

где δ_0 и δ_1 – *заданные числа.*

Доказана

Теорема. Пусть $q(x) \in C'[0,1]$ и $q(x) \geqslant 0$, $\lambda \geqslant -q(0)$. *Тогда задача безусловно и однозначно разрешима.*

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. -272с.

2. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представлнения функций комплексной плоскости М.: Наука, 1966, 677 с.

МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Калужина Н.С.

Рассматривается банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R})$ заданных на вещественной оси $\mathbb{R}$ равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций с "supprеmum"-нормой $\|x\|_\infty$. На этом пространстве определена и сильно непрерывна изометрическая группа операторов сдвига функций $(S(t)x)(\tau) = x(t+\tau)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$, $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$. Через $C_0(\mathbb{R})$ обозначим замкнутое подпространство $\{x \in C_{b,u}(\mathbb{R}) : \lim\limits_{|t|\to\infty} |x(t)| = 0\}$.

Будем рассматривать банахову алгебру $L^1(\mathbb{R})$ суммируемых на $\mathbb{R}$ функций со свёрткой в качестве умножения. Через $\hat{f}(\lambda) =$

$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, обозначим преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 1 Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ называется **медленно меняющейся функцией**, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено свойство $S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R})$ или, другими словами, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{|t|\to\infty} |x(t+\alpha) - x(t)| = 0. \tag{1}$$

Множество всех медленно меняющихся функций из $C_{b,u}(\mathbb{R})$ будем обозначать через $C_{sl}(\mathbb{R})$.

Лемма 1 *Имеют место следующие свойства функций из $C_{sl}(\mathbb{R})$.*

1. *$C_{sl}(\mathbb{R})$ - замкнутое линейное подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{R})$, инвариантное относительно оператора сдвига $S(t) : C_{b,u}(\mathbb{R}) \to C_{b,u}(\mathbb{R})$. $t \in \mathbb{R}$.*

2. *Пространство $C_{sl}(\mathbb{R})$ несепарабельно.*

3. *$C_{sl}(\mathbb{R})$ образует алгебру относительно поточечного умножения функций.*

4. *Пространство $C_{sl}(\mathbb{R})$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, структура которого определяется формулой свертки:*

$$f * x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)x d\tau,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in C_{sl}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

5. *Для любой функции $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$ и любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ справедливо свойство $f * x \in C_0(\mathbb{R})$, если $\hat{f}(0) = 0$, и $f * x - x \in C_0(\mathbb{R})$, если $\hat{f}(0) = 1$.*

Пусть X - комплексное банахово пространство, на котором задана структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, ассоциированная с сильно непрерывным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to EndX$ (символом $EndX$ обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X).
Дадим определение спектра Бёрлинга вектора $x \in X$ (см. [1]).

Определение 2. Спектром (Бёрлинга) вектора $x \in X$ называется подмножество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ следующего вида $\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R}$: для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(\lambda) \neq 0$ выполнено $fx \neq 0\}$.

Рассмотрим фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{R})/C_0(\mathbb{R})$. Обозначим класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$, через $\widetilde{x}$, т.е. $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{R})$. Заметим, что $C_{sl}(\mathbb{R})/C_0(\mathbb{R})$ является замкнутым линейным подпространством фактор-пространства $C_{b,u}(\mathbb{R})/C_0(\mathbb{R})$. Получен следующий результат касательно спектральных свойств функций из $C_{sl}(\mathbb{R})$.

Теорема 2 *Функция x принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\tilde{x}) \subset \{0\}$.*

В монографии Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна [2] при исследовании решений линейных дифференциальных уравнений вводится специальный класс функций, называемых стационарными на бесконечности.

Далее через $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ обозначаются соответственно банахово пространство непрерывных и равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ комплексных функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \geqslant 0} |x(t)|$.

Также рассматривается подпространство $C_0(\mathbb{R}_+) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+) : \lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = 0\}$.

Заметим, что существует непрерывное вложение пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+)$ в пространство $C_{sl}(\mathbb{R})$.

Определение 3. (Далецкий-Крейн [2]) Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ называется **стационарной на бесконечности**, если при каком-либо положительном L выполнено (а значит, и при сколь угодно большом L):

$$\lim_{T \to \infty} \sup_{|s-t| \leqslant L \, s,t \geqslant T} |x(s) - x(t)| = 0. \qquad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 *Определения 1 и 3 эквивалентны для функций из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$.*

Литература

[1] *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов./ А. Г. Баскаков. - Воронеж.: Изд-во ВГУ, 1987.

[2] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве/ Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн - М.: "Наука 1970. - 536 с.

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМ ОПЕРАТОРОВ ОБРАТНЫХ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ

Марюшенков С.В.

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A(t) : \{x \in W_p^1(\mathbb{R}_+, H) : x(0) \in E\} \subset L_p \to L_p,$$

действующий в одном из банаховых пространств $L_p = L_p(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in [1, \infty]$ измеримых по Бохнеру функций, определенных на $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$ со значениями в комплексном гильбертовом пространстве H, суммируемых со степенью p (или существенно ограниченных при $p = \infty$). Его областью определения являются функции из пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{R}_+, H) = \{x \in L_p$ абсолютно непрерывная : $\dot{x} \in L_p\}$ такие, что $x(0) \in E$, где E– замкнутое подпространство из H. Операторнозначная функция $A : \mathbb{R}_+ \to EndH$ считается существенно ограниченной, т.е. принадлежащей пространству $L_\infty(\mathbb{R}_+, EndH)$, где $EndH$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Норма в L_p вводится следующим образом: $\|x\|_p = \int\limits_0^\infty (\|x(t)\|^p dt)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\|x\|_\infty =$vrai $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|x(t)\|$. Норма ограниченного оператора $B \in EndL_p$ обозначается через $\|B\|_p$.

Оператор $\mathcal{L}$, обратимый в одном из рассматриваемых пространств, обратим в остальных (теорема 5.1 и следствие 6.3 из [1]). Особый интерес представляют пространства L_∞ и L_2. Первое используется по причине важности оценок ограниченного решения уравнения:

$$\dot{x} = A(t)x + f, \ t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$x(0) \in E, \tag{2}$$

а второе интересно тем, что в ряде важных случаев легко оценить норму $\|\mathcal{L}^{-1}\|_2$ обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ в L_2.

Имеет место:

Лемма 1. Для любых $\beta > 0$ и $x \in W_2^1(\mathbb{R}_+, H)$ верна оценка

$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta\|x\|_2 + \beta^{-1}\|\dot{x}\|_2).$$

Из данной леммы следует:

Теорема вложения Соболева. Для любой $x \in W_2^1(\mathbb{R}_+, H)$ верна оценка

$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_{W_2^1}.$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. Пусть оператор $\mathcal{L} = d/dt - A(t) : \{x \in W_2^1(\mathbb{R}_+, H) : x(0) \in E\} \subset L_2 \to L_2$ обратим. Тогда он обратим в подпространстве L_∞ и верна оценка

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty \leqslant 8\|\mathcal{L}^{-1}\|_2(1 + \|A\|_\infty\|\mathcal{L}^{-1}\|_2).$$

Если задача (1), (2) рассматривается с постоянными коэффициентами, то есть $A(t) \equiv A \in EndH$, то имеет место:

Теорема 2. Пусть оператор $\mathcal{L} = d/dt - A$ обратим в L_2. Тогда оператор $\mathcal{L}$ обратим в L_∞ и имеет место оценка:

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty \leqslant 8\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\|R(i\lambda, A)\|(1 + \|A\|\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\|R(i\lambda, A)\|).$$

Литература

[1] Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений М.: Известия академии наук. 2009. - Т. 73, №2, С.3-68.

[2] Баскаков А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 2003.-Т. 39, №3, С.413-415.

РАЗВИТИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗА ШКВАЛОВ И СИЛЬНОГО ВЕТРА ПО ТЕРРИТОРИИ РОССИИ

Переходцева Э.В. (Москва)

В докладе рассматриваются статистические модели прогноза шквалов и сильного ветра (включая смерчи), и приводятся результаты разработанных на их основе физико-статистического и гидродинамико-статистических прогнозов этих явлений для различных регионов России. Статистические модели разработаны на основе статистической теории классификации на различных обучающих выборках. Для сжатия пространства признаков предлагается эмпирико-статистический метод диагонализации выборочной средней матрицы корреляции и отбора наиболее информативных признаков по критериям минимальной энтропии Вапника-Червоненкиса и максимального расстояния Махаланобиса.

Представлены результаты оперативных независимых испытаний первого физико-статистического метода прогноза шквалов на текущий день и применение его к прогнозу наиболее разрушительных смерчей на Европейской территории России. Метод был рекомендован Центральной Методической Комиссией Росгидромета (ЦМКП) к оперативному использованию.

Автоматизированный гидродинамико-статистический метод прогноза сильных и опасных летних ветров и шквалов на основе данных полусферной модели Гидрометцентра России заблаговременностью 12-36ч был протестирован последовательно для двух классов в течение пяти лет в четырех региональных Управлениях по гидрометеорологии и охране окружающей среды (УГМС) Европейской территории России и был рекомендован Техническими Советами этих УГМС для внедрения в оперативную синоптическую практику. Ошибка первого рода ("пропуска цели") при предупрежденности явлений опасного ветра в среднем составила даже при прогнозе с заблаговременностью 36ч a=17%, и ошибка второго рода ("ложной тревоги") b=8%.

В связи с развитием отечественных гидродинамических моделей прогноза и с повышением успешности гидродинамических прогнозов полей геопотенциала, температуры и влажности на разных уровнях была создана в течение 2007-2009гг. новая гидродинамико-статистическая модель прогноза вышеназванных явлений на выходных данных региональной модели Гидрометцентра России. Оценки авторских испытаний метода прогноза для Европейской территории России оказались выше предыдущих: были получены следующие ошибки первого и второго рода соответственно a=6%, b=3%. Новый метод предложен к оперативным испытаниям в течение 2010-2011гг.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Дуплищева А.Ю. (Воронеж)

Nasyka@yandex.ru

Пусть X — комплексное нормированное конечномерное пространство, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R},X)$-банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных функций, $C_0 = C_0(\mathbb{R},X)$-замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций, $L^1 = L^1(\mathbb{R})$-банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со сверткой функций в качестве умножения, $\hat{f}$- преобразования Фурье функций $f \in L^1$.

Определение 1 *Функция $x \in C_{b,u}$ называется медленно меняющейся (стационарной) на бесконечности, если $(S(\alpha)x - x) \in C_0, x : \mathbb{R} \to \mathbb{X}, \forall\alpha \in \mathbb{R}$, где $(S(\alpha)x)(s) = x(s+\alpha)$-оператор сдвига функций на α.*

Множество таких функций образует банахову алгебру $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 2 *Функцию $x \in C_{b,u}$ назовем периодической на бесконечности периода $\omega > 0$ (относительно подпространства C_0), если $S(\omega)x - x \in C_0$.*

Множество таких функций образует банахову алгебру $C_{sl,\omega}(\mathbb{R}, X) = C_{sl,\omega}$.

Банахово пространство $C_{b,u}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля [1] с помощью свертки: $(f * x)(t) = \int_R f(t-s)x(s)ds = \int_R f(\tau)x(t-\tau)d\tau, f \in L^1, x \in C_{sl}, n \in \mathbb{Z}$. Имеют место следующие свойства:1). f*x $\in C_{sl}$, $\forall$ x$\in C_{sl}$, $\forall$ f$\in L^1$; 2). f*x$-$x $\in C_0$, $\forall$ x$\in C_{sl}$,$\forall$ f$\in L^1$, если $\hat{f}(0) = 1$; 3). f*x $\in C_0$, $\forall$ x$\in C_{sl}$,$\forall$ f$\in L^1$, если $\hat{f}(0) = 0$.

Лемма 2 *Непрерывное ограниченное решение x_0 уравнения $x(t+1) = Ax(t) + f(t)$, где $A \in End(X), f \in C_0, r(A) < 1$ принадлежит пространству C_0, единственно и представимо в виде: $x_0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n S(-n-1)f$.*

Лемма 3 *Непрерывное ограниченное решение уравнения $x(t+1) = Ax(t) + f(t)$, где $A \in End(X), f \in C_0, r(A^{-1}) < 1$ единствен-*

но, принадлежит пространству C_0 *и представимо в виде:* $x_0 = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}S(n)f$.

Теорема 4 *Пусть* $B : X \to X$*-линейный оператор, спектр которого* $\sigma(B)$ *обладает свойством: число 1 является единственной точкой спектра оператора* B *на единичной окружности* $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. *Тогда каждое ограниченное равномерно непрерывное решение* x_0 *уравнения:* $x(t+1) = Bx(t) + f(t), t \in \mathbb{R}, f \in C_0$, *является периодической на бесконечности периода 1 функцией, т.е.* $x_0 \in C_{sl,1}(\mathbb{R})$.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных опреторов. 1987. Воронеж.ВГУ-164с.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛИНОМОВ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Жабко И.А. (С.Петербург)

Zhabko@apmath.spbu.ru

Рассмотрим полином с вещественными коэффициентами $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$, положим $\sigma_j = \frac{a_j a_{j+3}}{a_{j+1}a_{j+2}}$, $j = 0, \ldots, n-3$. Предполагаем выполненными необходимые условия гурвицевости полиномов, поэтому считаем $a_j > 0$, $j = 0, \ldots, n$ и $\sigma_j < 1, j = 0, \ldots, n-3$.

В работе [1] было предложено достаточное условие гурвицевости полиномов, доказанное в работе [2]. Это условие заключается в выполнении неравенства

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-3} < 1. \qquad (1)$$

<u>**Замечание.**</u> При степенях полинома $n = 3, 4$ достаточное условие (1) является и необходимым. При $n > 4$ это условие выполняется не для всех гурвицевых полиномов.

Проф. В. А. Климовым было предложено более широкое достаточное условие устойчивости, которое заключается в проверке неравенств

$$\sigma_0 < 0.75, \sigma_j + 0.75 \cdot \sigma_{j-1} \leqslant 0.75, j = 1, \ldots, n-3. \qquad (2)$$

Основная задача. Пусть q_0, q_1 и q_2- *некоторые положительные числа, а величины σ_s подчинены неравенствам*

$$\sigma_0 < q_0, \sigma_j + q_1 \cdot \sigma_{j-1} \leqslant q_2, j = 1, ..., n-3. \qquad (3)$$

Определить тройки чисел (q_0, q_1, q_2) такие, что при выполнении неравенств (3) рассматриваемый полином будет устойчивым.

Теорема. Семейство полиномов с положительными коэффициентами $S(q_0, q_1, q_2)$ устойчиво, если

$$\left[\begin{array}{l} q_1 \geqslant q_2, q_1 < 1 \\ q_1 > q_2, q_1 = 1 \end{array} \right.$$

и для любого $f(\lambda) \in S$ выполняется неравенство:

$$(1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \sigma_{k-2} \cdot \sigma_{k-1}})(1 + \sqrt{1 - \sigma_{k-1} \cdot \sigma_k}) > 4 \cdot \sigma_{k-1} \qquad (4)$$

на множестве

$$G = \left\{ (\sigma_{k-2}, \sigma_{k-1}, \sigma_k) : \sigma_{k-2} < \max\left\{ q_2, \min\left\{ q_0, \frac{q_2}{q_1} \right\} \right\}, \right.$$

$$\left. \sigma_{k-1} + q_1 \sigma_{k-2} \leqslant q_2, \sigma_k + q_1 \sigma_{k-1} \leqslant q_2 \right\}.$$

Следствие. Если выполнены условия теоремы, то устойчиво семейство полиномов $\tilde{S}(q_0, q_1, q_2) = \{f(\lambda) : \sigma_{n-3} < q_0, \sigma_s + q_1 \sigma_{s+1} \leqslant q_2, s = 0, \ldots, n-4\}$.

Решение сформулированной в теореме оптимизационной задачи приводит к следующим наилучшим значениям параметров: $q_0 = 1, q_1 = q_2 \approx 0.81$.

Литература

1. Масленников В. В. “Гипотеза о существовании простого аналитического достаточного условия устойчивости” // “Автоматика и телемеханика”. - 1984, №2.

2. Корнев В. В. “Простое достаточное условие устойчивости многочленов” // “Вычислительные методы и программирование” (Саратов), 1987, №7.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Завгородний М.Г., Майорова С.П. (Воронеж)

В докладе обсуждаются условия невырожденности краевой задачи, описывающей малые упругие деформации плоской стержневой системы с жестким соединением и закреплением стержней.

Обозначим через Г объединение осевых линий всех стержней системы. Пусть на стержневую систему перпендикулярно ее плоскости расположения действует внешняя сила, вызывающая отклонение точки $x \in \Gamma$ на некоторую величину $u(x)$. Рассмотрим сначала случай, когда учитываются реакции стержней системы на изгиб $p(x) > 0$ и растяжение $g(x) \geqslant 0$. Тогда функция $u(x)$ является (см. [1]) решением краевой задачи, заданной на графе Г, для дифференциального уравнения четвертого порядка.

Теорема 1. Если $g(x) > 0$ на Г, то краевая задача однозначно разрешима.

Если условие $g(x) > 0$ не выполняется, то краевая задача может быть как однозначно разрешима, так и вырождена. При $g(x) \equiv 0$ пример стержневой системы, для которой краевая задача вырождена, приведен на рисунке 1.

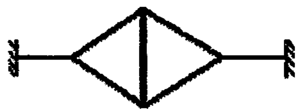


Рис. 3: Стержневая система

Авторами получены условия однозначной разрешимости краевой задачи для произвольной стержневой системы, а в случае нарушения этих условий указан порядок вырождения краевой задачи.

Как мы видим, математическая модель, учитывающая лишь реакции стержней на изгиб и растяжение, недостаточно адекватно описывает реальную стержневую систему. Ситуация меняется, если дополнительно учитывать реакции стержней на кручения. Пусть $\varphi(x)$ - угол поворота соответствующего стержня в точке $x \in \Gamma$. В силу работ [2, 3] функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ являются решением краевой задачи, заданной на графе Г, для системы дифференциальных уравнений четвертого и второго порядков.

Теорема 2. Краевая задача для стержневой системы при строго положительной реакции стержней на кручения однозначно разрешима.

При более жестких условиях теорема 2 доказана в работе [4].

Литература

1. Завгородний М.Г., Майорова С.П. / Исследования по дифференц. ур-ям и математич. моделированию. // Владикавказ: ВНЦ

РАН, 2008. - С. 88-102.

2. Завгородний М.Г. / Математич. моделирование информац. и технологич. систем. // Воронеж: ВГТА, 2000. - Вып. 4. - С. 59-62.

3. Завгородний М.Г., Майорова С.П. / Вестник ТГУ, 2000. - Т. 5, вып. 4. - С. 450-452.

4. Завгородний М.Г., Майорова С.П. / Системы управления и информационные технологии, 2009. - №3.1(37). - С.140-143.

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОДНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Завгородний М.Г., Майорова С.П. (Воронеж)

В докладе изучаются собственные колебания плоской стержневой системы, состоящей из трех однородных стержней единичной длины с равными углами между ними. Стержни жестко соединены в единственном узле a, а их свободные концы жестко закреплены.

Пренебрегая реакциями стержней на растяжение, мы приходим (см. [1]) к краевой задаче на собственные значения для дифференциального уравнения

$$u^{(4)}(x) = \rho^4 u(x), \tag{1}$$

заданного на графе $\Gamma = \cup\gamma_k$, где γ_1, γ_2, γ_3 – осевые линии стержней системы. Решение $u(x)$ уравнения (1) и его вторая производная непрерывны на всем графе Γ. Кроме того, в узле соединения a заданы условия согласования $u_1'(a) + u_2'(a) + u_3'(a) = 0$, $u_1'''(a) + u_2'''(a) + u_3'''(a) = 0$, а в каждой граничной вершине b заданы условия закрепления стержней $u(b) = u'(b) = 0$.

Теорема 1. Множеством собственных частот стержневой системы является последовательность $\rho_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k + O\left(\exp\left\{-\frac{\pi}{2} - \pi k\right\}\right)$, $k = 1, 2, \dots$. Нечетные собственные частоты ρ_{2k-1} простые, а четные ρ_{2k} – двукратные.

В силу теоремы ведущая собственная частота простая, простые и двукратные собственные частоты чередуются.

Введем функции $sn\rho x = sh\rho x - \sin\rho x$, , $sm\rho x = sh\rho x + \sin\rho x$ и $cm\rho x = ch\rho x + \cos\rho x$, образующие фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (1) на каждом ребре графа Γ.

Собственной частоте ρ_{2k-1} отвечает собственное колебание $u_{2k-1}(x)$, имеющее на каждом ребре один и тот же вид: $u_{2k-1}(x) = cn\rho_{2k-1}cn\rho_{2k-1}x - sm\rho_{2k-1}sn\rho_{2k-1}x$. Функция $u_{2k-1}(x)$ на каждом ребре имеет $k-1$ перемен знака и $u'_{2k-1}(a) = 0$. В частности, $u_1(x) > 0$ внутри Г.

Собственной частоте ρ_{2k} отвечают два линейно независимых собственных колебания

$$u_{2k}(x) = \begin{cases} 2h_k(x), & x \in \gamma_1, \\ -h_k(x), & x \in \gamma_2 \cup \gamma_3, \end{cases} v_{2k}(x) = \begin{cases} -h_k(x), & x \in \gamma_1 \cup \gamma_3, \\ 2h_k(x), & x \in \gamma_2, \end{cases}$$

где $h_k(x) = cn\rho_{2k}sn\rho_{2k}x - sn\rho_{2k}cn\rho_{2k}x$. Функции $u_{2k}(x)$ и $v_{2k}(x)$ на каждом ребре имеют $k-1$ перемен знака и $u_{2k}(a) = v_{2k}(a) = 0$. Точку a можно также считать переменой знака. Нули собственных колебаний $u_{2k-1}(x)$ и $u_{2k}(x)$ перемежаются. Аналогично для $v_{2k}(x)$. Таким образом, верно утверждение.

Теорема 2. Краевая задача (1) имеет осцилляционный спектр.

Литература

1. Завгородний М.Г., Майорова С.П. / Вестник ТГУ, 2000. - Т. 5, вып. 4. - С. 450 - 452.

О СПЕКТРЕ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ-ПУЧКЕ

Майорова С.П. (Воронеж)

В докладе рассматривается сингулярная краевая задача, заданная на геометрическом графе-пучке, с сильными особенностями в граничных точках пучка. Пусть Г - граф-пучок, состоящий из n ребер. Пусть a - его единственная внутренняя вершина и $\partial\Gamma$ - множество граничных вершин. На каждом ребре пучка Г рассмотрим сингулярное дифференциальное уравнение вида

$$u^{(4)}(x) = \lambda \frac{q(x)}{\prod\limits_{b\in\partial\Gamma} (b-x)^4} u(x) \qquad (1)$$

со спектральным параметром λ. Под решением уравнения (1) будем понимать непрерывную на всем графе Г функцию $u(x)$, четырежды непрерывно дифференцируемую на каждом ребре. Кроме того, решение $u(x)$ удовлетворяет во внутренней вершине a условиям согласования

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{3} \alpha_{jik} u_{[i]}^{(k)}(a) = 0, \quad j = \overline{1, n+1}, \qquad (2)$$

где α_{jik} – некоторые константы, и в каждой граничной вершине b условиям

$$u(b) = u'(b) = 0. \qquad (3)$$

Полагаем, что функция $q(x)$ непрерывна, строго положительна на Γ и удовлетворяет условиям $q(b) = 0$, $b \in \partial\Gamma$.

Изучаются осцилляционные свойства спектра сингулярной краевой задачи (1)-(3). А именно, обсуждаются условия вещественности, положительности и простоты собственных значений сингулярной краевой задачи (1)-(3). Определяется число нулей (перемен знака) у собственной функции, отвечающей вещественному, положительному и простому собственному значению. А также изучаются свойства перемежаемости нулей двух соседних собственных функций.

В заключение отметим, что в несколько иной постановке сингулярная задача, заданная на геометрическом графе, рассматривалась в работе [1].

Литература

1. Майорова С.П. Об одной сингулярной краевой задаче на графе / Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XX". – Воронеж: ВГУ, 2009. – С.113-114

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

Савченко Ю.Б., Ткачева С.А. (Воронеж)

В полупространстве

$$E_n^+ = \{(x,t)|\ x \in R_{n-1}, 0 < t < \infty\}$$

рассматривается уравнение

$$Lu - \lambda u \equiv Au + Bu - \lambda u = f(x,t), f(x,t) \in C_\alpha^\delta(R_n^+). \qquad (1)$$

Здесь

$$D_{\alpha,t,\delta} = \alpha^{1+\delta}(t)\partial_t\alpha^{-\delta}(t),\ 0 < \delta < 1,$$

$A \equiv A(\partial_t) = \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$; $B \equiv B(D_x, D_{\alpha,t,\delta}) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha,\delta}[b(\xi,\eta)F_{\alpha,\delta}F_{\xi\to x}]$ – ВПДО порядка $\sigma > 1$, $\alpha(t)$ – достаточно гладкая на $\overline{R}_1^+$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$\alpha(0) = 0; \quad \alpha'(0) = 0; \alpha(t) > 0 \text{ при } \quad t > 0; \alpha(t) = c \text{ при } t \geqslant d > 0,$$

(см. [1]).

Символ $b(\xi,\eta)$ дифференциального оператора $B(D_x, D_{\alpha,t,\delta})$ удовлетворяет условиям: $b(\xi,\eta) \in C^\infty(R_n)$; для $j = 0, 1, \ldots$ выполняются оценки $|D^j b(\xi,\eta)| \leqslant c_j(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-j}$; существует Θ_B: $0 < \Theta_B < \pi$ такие, что при всех $(\xi,\eta) \in R_n$, $(\xi,\eta) \neq 0$, $|\theta| < \pi - \Theta_B$, $|b(\xi,\eta) - \lambda| \geqslant C(\Theta_B)(|\lambda|^{1/\sigma} + |\xi| + |\eta|)^\sigma$.

Наряду с известными пространствами Гельдера $C^\delta(R_n)$используются весовые пространства $C^\delta_\alpha(R^+_n)$ функций $u(x,t)$, $(x,t) \in R^+_n$.

При выполнении указанных условий доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $f(x,t) \in C^\delta_\alpha(R^+_n)$. Тогда при $\lambda \geqslant \lambda_0(\theta) > 0$ существует единственное сильное (по Гривару-Да-Прато (см. [2])) решение $u(x,t) \in C^\delta_\alpha(R^+_n)$ уравнения (1), то есть для функции $u(x,t) \in C^\delta_\alpha(R^+_n)$ существует такая последовательность $\{u_j(x,t)\}$ функций $u_j(x,t) \in D(A) \cap D(B)$, такая что $u_j \underset{C^\delta_\alpha}{\to} u$ и $(L - \lambda)u_j \underset{C^\delta_\alpha}{\to} f$.

Литература

1. Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко. - Итоги науки и техники ВИНИТИ - М., 1985. т. 23. - С. 125-218.

2. Da Prato G. Sommes d' operators lineaires et equation differentielles operationelles // G. Da Prato, P. Grisvard. - J. De Math.pures et Appliquees. V. 54, №3, 1975. - P. 305-387.

СМЕШАННАЯ ТЕПЛОВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ СРЕДЫ В РЕЖИМЕ ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ[1]

Чертов Е.Д., Ряжских А.В. (Воронеж)

В технических приложениях успешно применяется модель идеального вытеснения при описания движения сред различной реологической природы в сопряженных задачах явлений переноса, в том

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 10-08-00120-а

числе и теплообменных. Однако возникает вопрос о необходимости учета переноса теплоты по потоку механизмом теплопроводности, что не только меняет тип уравнения с параболического на гиперболический, но и увеличивает размерность задачи и существенно усложняет ее анализ. Если для однотипных граничных условий оценка необходимости учета проведена и найдены соответствующие критерии в зависимости от скорости движения среды, то в случае разнотипных (смешанных) граничных условий такая оценка отсутствует.

Рассматривается модельная задача

$$\partial T/\partial Z = Pe^{-1}\left(\partial^2 T/\partial X^2 + \partial^2 T/\partial Z^2\right) \qquad (1)$$

$$T(X,0) = T(1,Z) = \partial T(X,0)/\partial Z = 0, \quad \partial T(0,Z)/\partial X = -1 \qquad (2)$$

по отысканию температурного $2D$-поля в плоском полуограниченном канале при поршневом движении среды с постоянной скоростью. Система (1), (2) решена аналитически

$$T(X,Z) = 1 - X + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin[0.5\pi(1+2n)(1-X)]}{\left[\mathrm{Pe} - \sqrt{\mathrm{Pe}^2+\pi^2(1+2n)^2}\right]\sqrt{\mathrm{Pe}^2+\pi^2(1+2n)^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Pe} - \sqrt{\mathrm{Pe}^2+\pi^2(1+2n)^2}\right] Z\right\}, \qquad (3)$$

где Pe — число Пекле.

Полученное решение (3) позволило идентифицировать длину начального термического участка и определить условия, накладываемые на значения Pe, при которых отпадает необходимость учета продольного переноса теплоты теплопроводностью по потоку.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОДНОМЕРНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Щербаков А.О. (Воронеж)

shcherbakovAO@list.ru

С помощью метода подобных операторов были получены формулы регуляризованного следа одномерного несамосопряженного оператора Дирака.

Пусть $L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2) = L_2[0,\pi] \times L_2[0,\pi]$ — гильбертово пространство измеримых на $[0,\pi]$ со значениями в $\mathbb{C}^2$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2)$ будем определять формулой $(x,y) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y =$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$, где (x_i, y_i) — скалярное произведение в гильбертовом пространстве комплексных функций $L_2[0,\pi]$, которое для удобства определим как $(x_i, y_i) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi x_i(\tau)\overline{y_i(\tau)}\,d\tau$, $i = 1,2$. Через $W_2^1\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$: y абсолютно непрерывна и $y' \in L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)\}$ со скалярным произведением $< x,y >= (x,y) + (x',y')$, $x,y \in W_2^1\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$. Рассматривается одномерный оператор Дирака $L_{per} : D(L_{per}) \subset L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) \to L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$,

$$L_{per}y = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{dy}{dt} - vy, \qquad y \in D(L_{per}),$$

где $v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0,\pi]$, $P,Q \in L_2[0,\pi]$. Область определения $D(L_{per})$ определяется как $D(L_{per}) = \left\{y \in W_2^1\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) : y(0) = y(\pi)\right\}$.

Символом P_n обозначим ортогональный проектор на собственное подпространство E_n^0, отвечающее собственному значению $\lambda_n = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора L_{per}^0 (оператора с нулевым потенциалом). Через $\widehat{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, обозначим число $\frac{1}{2}Tr(L_{per}|Im\,P_n)$, т.е. половину суммы собственных значений сужения оператора L_{per} на образ проектора P_n (двумерный). Пусть p_m, q_m — коэффициенты Фурье функций P и Q, т.е. $P(x) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} p_m e^{i2mx}$, $Q(x) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} q_m e^{i2mx}$. Обозначим $\omega_n = p_{-n}q_n$.

Теорема 1 *Справедлива следующая формула регуляризованного следа:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\widehat{\lambda}_n - 2n - \sum_{k\neq 0}\frac{\omega_{2n+k}}{2k}\right) = 0.$$

Теорема 2 *Пусть ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{\omega_{2n+k}}{2k}$ *абсолютно сходится. В частности, предположим, что существует число* $a > \frac{1}{2}$ *и конечные константы* $C_1, C_2 > 0$, *такие, что* $|p_n| \leqslant \frac{C_1}{1+|n|^a}$, $|q_n| \leqslant \frac{C_2}{1+|n|^a}$. *Тогда* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\widehat{\lambda}_n - 2n\right) = 0$.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. – Воронеж: изд-во Воронежского государственного университета, 1987. – 165с.

2. Баскаков А.Г. Метод подобных операторов и формулы регуляризованных следов. // Известия Высших Учебных Заведений. – 1984. – №3. – С.3-11.

СТАЦИОНАРНАЯ КОНДУКТИВНО-ЛАМИНАРНАЯ ТЕРМОКОНВЕКЦИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ[1]

Чертов Е.Д., Слюсарев М.И., Поздняков М.В

Пусть прямоугольная полость шириной h_1 и высотой h_2 заполнена вязкой несжимаемой жидкостью с однородной температурой t_c. Ось y направлена вертикально вверх, а ось x – перпендикулярно стенкам полости. Верхняя и нижняя границы области теплоизолированы, а правая боковая стенка поддерживается при постоянной температуре t_c. При изменении температуры правой стенки до постоянного значения t_h в полости возникает свободно-конвективное течение. Для стационарных условий и в пренебрежении конвективными членами в уравнениях движения и энергии, что обосновано кондуктивным режимом термоконвекции, движение среды описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\partial^2\Omega/\partial X^2 + \xi^2\partial^2\Omega/\partial Y^2 + \mathrm{Gr}\partial T/\partial X = 0, \qquad (1)$$

$$\partial^2\Psi/\partial X^2+\xi^2\partial^2\Psi/\partial Y^2 = -\Omega, \qquad (2)$$

$$\partial^2 T/\partial X^2+\xi^2\partial^2 T/\partial Y^2 = 0 \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$\Psi(0,Y) = \Psi(1,Y) = \Psi(X,0) = \Psi(X,1) = 0, \qquad (4)$$

$$\partial\Psi(0,Y)/\partial X = \partial\Psi(1,Y)/\partial X = \partial\Psi(X,0)/\partial Y = \partial\Psi(X,1)/\partial Y = 0, \qquad (5)$$

$$\partial T(X,0)/\partial Y = \partial T(X,1)/\partial Y = 0, \qquad (6)$$

$$T(0,Y) = 1, \quad T(1,Y) = 0. \qquad (7)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 10-08-00120-а

Здесь Ω – функция вихря, Ψ – функция тока, $X = x/h_1$, $Y = y/h_2$, $\xi = h_1/h_2$, $T = (t - t_c)/(t_h - t_c)$, $\mathrm{Gr} = \beta g h_1^3 (t_h - t_c)/v^2$, t – текущая температура, v, β – кинематическая вязкость и коэффициент объемного расширения жидкости, g – ускорение силы тяжести.

В режиме теплопроводности система уравнений (1) – (3) становится несопряженной и решение уравнение (3) есть

$$T(X, Y) = 1 - X. \tag{8}$$

На основании (8) система (1) – (7) может быть переписана в виде

$$\partial^2\Omega/\partial X^2 + \xi^2\partial^2\Omega/\partial Y^2 = \mathrm{Gr}, \tag{9}$$

$$\partial^2\Psi/\partial X^2 + \xi^2\partial^2\Psi/\partial Y^2 = -\Omega, \tag{10}$$

$$\Psi(0, Y) = \Psi(1, Y) = \Psi(X, 0) = \Psi(X, 1) = 0, \tag{11}$$

$$\partial\Psi(0, Y)/\partial X = \partial\Psi(1, Y)/\partial X = \partial\Psi(X, 0)/\partial Y = \partial\Psi(X, 1)/\partial Y = 0. \tag{12}$$

Если из уравнения (10) подставить Ω в уравнение (9), то получим краевую задачу:

$$\partial^4\Psi/\partial X^4 + 2\xi^2\partial^4\Psi/(\partial X^2\partial Y^2) + \xi^4\partial^4\Psi/\partial Y^4 = -\mathrm{Gr}; \tag{13}$$

с граничными условиями (11) – (12).

Последовательным использованием конечного интегрального синус-преобразования Фурье по переменным X и Y получено решение задачи для функции тока

$$\Psi(X, Y) = \\ = -\frac{4}{\pi^6} Gr \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{(-1)^m - 1}{(n^2 + \xi^2 m^2)^2}\sin(\pi m Y)\right]\sin(\pi n X), \tag{14}$$

которое позволяет проанализировать характер течения в прямоугольной полости при кондуктивном режиме термоконвекции и может быть использовано для отладки и тестирования разработанной программной реализации математической модели процесса свободно-конвективного течения среды.

Именной указатель

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения – XXI»

Верстка и подготовка оригинал-макета:
С. А. Шабров

Подписано в печать 21.04.2010. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 15,8.
Тираж 250 экз. Заказ 528.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. (факс) +7 (4732) 598-026
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3