Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской зимней математической школы

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской зимней математической школы

Воронежский государственный университет
2007

УДК 517.53 (97;98)
ББК 22.16
С 56

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 07-01-06000

Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы конференции. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2007. – 255 с.

С 56

ISBN 978-5-9273-1117-0

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским государственным университетом совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем теории функций, оптимального управления, теории игр, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

УДК 517.53 (97;98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-1117-0

ON THE GENERALIZED KRATZEL OPERATOR

Virchenko N. (Kyiv)

Let us consider the following integral operator:

$$\left(\tilde{K}^{\nu}_{\rho} f\right)(x) = \int\limits_0^{\infty} \tilde{Z}^{\nu}_{\rho}(xt) f(t) dt, \tag{1}$$

$$\tilde{Z}^{\nu}_{\rho}(u) = \int\limits_0^{\infty} r^{\nu-1} e^{-r^{\rho}} \ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{tu}{r^{\gamma}}\right) dr, \tag{2}$$

where $\rho > 0, \nu \in \mathbf{C}$, $Re c > Re a > 0$, $\tau \in R$, $\tau > 0$, $\beta \in R$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $u > 0$, $f(t)$ is locally integrable function on $(0, \infty)$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ is (τ,β)–generalized confluent hypergeometric function

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \ {}_1\Psi_1 \begin{bmatrix} (c,\tau); & zt^{\tau} \\ (c,\beta); & \end{bmatrix} dt, \tag{3}$$

here ${}_1\Psi_1$ is Fox-Wright function [1]. As $\beta = \tau = 1$ in (3) we have classical confluent hypergeometric function $\Phi(a; c; z)$ [2]. When $a = c$ in (2) we get Kratzel operator [3].

For studying and application of (1) some properties and relations for ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ and $\tilde{K}^{\nu}_{\rho}$ are established. For example,

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a+\tau; c+\beta; z) = \frac{\Gamma(c+\beta)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\tau)\Gamma(c)\tau z} \ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a+1; c; z) - \tag{4}$$

$$-\frac{\Gamma(c+\beta)}{\Gamma(a+\tau)} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(c)\tau z} \ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z),$$

$$\left(I^{\alpha}_{-} \tilde{K}^{\nu}_{\rho} f\right)(x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-\tau\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau\alpha)} \tilde{K}^{\nu+\gamma\alpha}_{\rho} x^{-\alpha} f \tag{5}$$

(I^{α}_{-} is the right-hand sided fractional integration operator).

For application of (1) to the solving of value problems it is useful the next composition relation:

$$L_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \ x^2 \tilde{K}^{\nu}_{\rho} x^{\delta-2} \psi = \tilde{K}^{\nu}_{\rho} \ x^{\delta} L_{\alpha,\beta} \ \psi, \tag{6}$$

where

$$L_{\alpha,\beta} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha}{x}\frac{d}{dx} + \frac{\beta}{x^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}. \tag{7}$$

Let us to note, that (6) coincides with (16) from [4].

Литература

[1.] *C.Fox,* The G and H-functions as symmetrical Fourier kernels// Frans. Amer. Math. Soc. **98**(1961), p. 395-429.

[2.] *A.Erdélyi, W.Magnus, F.Oberhettinger and F.G.Fricomi,* Higher Franscendental Functions, **1**, McGraw-Hill, New York-Toronto- London (1953).

[3.] *E.Kratzel,* General functions and operational calculus. Varna (1975), P.148-155.

[4.] *А.А.Килбас, С.А.Шлапаков,* Об интегральном преобразовании типа Бесселя и его композиции с интегральными и дифференциальными операторами// ДАН Беларуси, **37**, N4.-C.10-14.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА.

Абрашина–Жадаева Н.Г., Романова Н.С. (Минск)

natalaromanova@yahoo.com

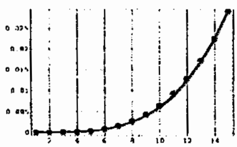


Рис. 1: $\tau = 0.01, h = 0.1$.

Дробные пространственные производные присутствуют в моделях аномальных дисперсии и диффузии, несовместимых с классической моделью Броуновского движения. Значимость их заключается в использовании для многих задач физики, финансов и т.д. [1] Мы предлагаем практический численный алгоритм для решения многомерных дробных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с использованием векторно–аддитивного метода и показываем возможность использования этого метода при смещенной версии традиционной конечно разностной аппроксимации Грюнвальда.

Справедлива следующая

Теорема. *Каждая одномерная неявная система, определяемая линейными дифференциальными уравнениями вида [3] безусловно устойчива для всех* $1 < \alpha < 2$, $1 < \beta < 2$.

При проведении численного эксперимента решалось двумерное уравнение диффузии с переменными коэффициентами с производными дробного порядка по пространству ($\alpha = 1.8, \beta = 1.6$). Исследовались характерные особенности векторно–аддитивных методов при решении задачи с использованием смещенной аппроксимации Грюнвальда. На Рис.1 представлены точное (—) и приближенное (• • •) решения задачи при пространственном шаге 0.1 и временном 0.01.

Литература

1. А.М.Нахушев. Элементы дробного исчисления и их применение.Нальчик.2000.
2. С.Г.Самко, А.А.Килбас, О.И.Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения.Минск.1987.
3. Н.Г.Абрашина–Жадаева, Н.С.Романова. Многокомпонентные схемы векторного расщепления для решения многомерных задач математической физики. Дифф.уравнения.2006.Т.42.N7.С.883–894.

ИЗ ОПЫТА ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СО СТУДЕНТАМИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Абрашина–Жадаева Н.Г., Чупригин О.А., Филиппова Н.К.
(Минск)
zhadaeva@bsu.by

Важнейшим элементом в организации учебного процесса в ВУЗе является наличие, кроме зачетов и экзаменов, реальных систематических контрольных мероприятий, стимулирующих самостоятельную работу студентов в течение семестра. На кафедре высшей математики и математической физики физического факультета БГУ контроль самостоятельной работы студентов базируются на регулярном тестировании. Такой метод апробирован в течение 15 лет на кафедре. За это время составлен сборник тестов, включающий 9 частей (более 2000 вопросов) и охватывающий все разделы математического анализа [4-10].

Эффективность метода заключается в том, что: тестирование проводится регулярно по всем темам изучаемых дисциплин; каждый студент выполняет индивидуальное задание; текущую оценку в баллах получает каждый студент. Методика тестирования подробно изложена в [1-3]. По курсу "Математического анализа"тестовые задания сформулированы преимущественно таким образом, что требуют ответа "да"или "нет". Для ответа на большинство вопросов требуется не просто знание формулировок основных теорем и определений, а умение логически мыслить. По курсу "Аналитическая геометрия и высшая алгебра"тесты составлены иным образом. Из нескольких ответов студентам требуется выбрать правильный. Эти тесты [12] служат подготовкой для проведения устного коллоквиума.

Литература

1. О.А. Чупригин, Н.Г. Жадаева Главные этапы обучения - систематизация самостоятельной работы. //Тезисы докладов межд. матем. конф. "Еругинские чтения Гродно, 2001. С. 230-231.

2. О.А. Чупригин, Н.Г. Жадаева, Н.И. Ильинкова О контроле самостоятельной работы студентов по математическому анализу. //Тезисы докладов межд. конф. "Актуальные вопросы научно-методической работы: многоуровневая система подготовки специалистов 2003, г.Гомель.

3. О.А. Чупригин, Н.Г. Жадаева, Н.И. Ильинкова Тестирование как эффективный метод стимулирования самостоятельной работы студентов (из опыта работы кафедры высшей математики и математической физики Белгосуниверситета) //Тезисы докладов Межд. матем. конф. "Еругинские чтения IX г.Витебск, 2003.

4. О.А. Чупригин Методические указания по разделу "Введение в анализ"курса "Математический анализ"часть 1-2, 1992.

5. А.А. Чупрыгін Матэматычны аналіз: лікавыя шэрагі,-Мн.: БДУ, 1997.

6. А.А. Чупрыгін Матэматычны аналіз: функцыйныя шэрагі, -Мн.: БДУ, 1998.

7. О.А. Чупригин Математический анализ задания коллоквиумов часть 1 (ознакомительная), часть 2 (числовые последовательности), часть 3 (предел функции и непрерывность), часть 4 (дифференциальное исчисление функций одной переменной), -Мн.: БГУ, 2000.

8. Н.Г. Жадаева, О.А. Чупригин Математический анализ. Задания коллоквиумов часть 5 (неопределенный интеграл), часть 6 (определенный интеграл), -Мн.: БГУ, 2001.

9. О.А. Чупригин, Н.Г. Жадаева, Н.И. Ильинкова Математический анализ. Задания коллоквиумов (функции многих переменных), -Мн.: БГУ, 2003

10. О.А. Чупригин, А.О. Булахова Формула Тейлора и исследование функции. Задания коллоквиума по курсу "Математический

анализ -Мн.: БГУ, 2004.

11. В.Н. Русак, Н.К. Филиппова Задачи по математической физике и их решения -Мн.: БГУ, 2006 (в печати).

12. Н.Г. А.-Жадаева, Н.К. Филиппова Тесты по аналитической геометрии (электронная версия).

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ ПО СИСТЕМЕ ХААРА ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА[1]

Алферова Е.Д. (Москва)

elena.alferova@gmail.com

Равенство Парсеваля для рядов Фурье-Стилтьеса-Римана по системе Хаара:

$$(R-S)\int\limits_{[0,1]^*} f(x)\,d\overline{G(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{dG}(k)},$$

верно для комплекснозначных функций f и G на $[0,1]^*$ при условии интегрируемости f в смысле широкого интеграла Данжуа на $[0,1]^*$ и в смысле Римана-Стилтьеса по функции G(см [1]).

Как и в случае тригонометрической системы аналогичный результат для интеграла Лебега-Стилтьеса получить нельзя (см [2]). Более того: для рядов Фурье по системе Хаара удалось построить пример, показывающий,что существуют интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функции f и g такие, что интеграл $(L)\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ существует, но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \infty$. Т.е.$(L)\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \neq$ $\neq \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$.

Однако при дополнительных ограничениях на функции f и G для интеграла Лебега получено достаточное условие справедливости равенства Парсеваля для рядов Фурье-Стильтеса-Лебега.

Теорема. *Пусть функция f интегрируема по Лебегу на $[0,1]$, функция G — неубывающая функция ограниченной вариации. Если существует $(L-S)\int \mathfrak{M}f\,dG$, где $Mf(x) = \sup\limits_{h\neq 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|$, и выполнено одно из двух условий: 1)мера $\int_E \mathfrak{M}f(t)\,dG(t)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, 2)существует*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00192).

$(L)\int_0^1 f M_G\,dx$, *где* $M_G(x) = \sup\limits_{h\neq 0}\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\right|$ *; то выполнено равенство Парсеваля.*

Литература

1.Алферова Е.Д. *Равенство Парсеваля для рядов Фурье-Стилтьеса по системе Хаара* Вестн. Моск.ун-та. 2003. N6 с.47-50

2. Горячева В.С. *О равенстве Парсеваля для рядов Фурье-Стилтьеса* Вестн. Моск. ун-та. 2002. N1 с. 32-36

О ДИАГОНАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ МЕР

Алякин В.А., Клепнёв Д.Э. (Самара)

aval@ssu.samara.ru, dekl@ssu.samara.ru

Пусть R — кольцо подмножеств множества T. Мерой будем называть конечно-аддитивную функцию множества $\mu\colon R \to (-\infty, +\infty]$ с условием $\mu(\varnothing) = 0$. Монотонную полуаддитивную функцию множества $\varphi\colon R \to [0, +\infty]$, $\varphi(\varnothing) = 0$, будем называть субмерой. Субмеру $\tilde{\mu}\colon R \to [0, +\infty]$, $\tilde{\mu}(E) = \sup\{|\mu(F)| : F \in R,\ F \subset E\}$ назовём супремацией меры μ.

Определение. Последовательность мер $(\varphi_n)_n$ называется диагонально управляемой, если существует такая субмера φ, что

$$(1)\quad \forall (E_n)_n \subset R : \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n(E_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = 0;$$

$$(2)\quad \forall E \in R : \varphi(E) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n(E) = 0.$$

Теорема. Пусть R — δ-кольцо, $(\mu_n)_n$ — равномерно исчерпывающая последовательность конечных σ-аддитивных мер, $(\varphi_n)_n$ — диагонально управляемая последовательность мер. Если для всякого n мера μ_n абсолютно непрерывна относительно меры φ_n, то для равностепенной абсолютной непрерывности последовательности $(\mu_n)_n$ относительно последовательности $(\varphi_n)_n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall E \in R : \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n(E) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}_n(E) = 0.$$

Эта теорема усиливает теорему 5 работы [1], в которой меры φ_n неотрицательны и

$$\forall E \in R\ \varphi(E) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(E).$$

Литература

[1] Алякин В.А. Теорема Витали-Хана-Сакса для двух последовательностей мер // Вопросы функционального анализа. Мера и интеграл. — Куйбышев, 1984, — С. 8–13.

ЗАДАЧА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБОБЩЁННОЙ ФУНКЦИИ ШУРА В ОКРЕСТНОСТИ ЕДИНИЦЫ[1]

Андреищева Е.Н. (Воронеж)

anda_el@mail.ru

В данной работе рассматривается особый класс функций — обобщённый класс Шура и исследуется вопрос аппроксимации функций Шура в области $\Lambda_\theta \subset \mathbb{D}$, где $\mathbb{D} = \{\xi : |\xi| < 1\}$. Интерес представляет случай $s(0) = 0$, для которого была доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть* $s(\lambda) = \lambda^k s_k(\lambda)$, $s_k(0) \neq 0$, $k \leqslant n$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда следующие свойства:*

1. $s \in S_\varkappa$, *где* $S_\varkappa$ *— обобщённый класс Шура;*

2. *для некоторого натурального числа* $n > 0$, *существуют* $2n$ *чисел* $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ *таких, что имеет место разложение:*

$$s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu (\lambda - 1)^\nu + O((\lambda - 1)^{2n+1}), \ \lambda \to 1, \ \lambda \in \Lambda_\theta$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$ *, сжимающий оператор* T *в* $\Pi_\varkappa$ *и порождающий для оператора* T *элемент* $u \in dom(I - T)^{-(n+1)}$ *такие, что справедливо представление:*

$$s(\lambda) = \lambda^k - \frac{1}{s_k(0)} \lambda^k (\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1} T^{k+1} u, T^k u],$$

где $\lambda \in \mathbb{D}$, $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T)$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а.

В этом случае:

$$c_\nu = \begin{cases} \frac{1}{s_k(0)} \sum\limits_{i=1}^{\nu} C_{k-i}^{\nu-i}[(I-T)^{-(i+1)}T^{k+1}u, T^k u] - C_k^\nu, \\ \hfill 1 \leqslant \nu < k+1; \\ \frac{1}{s_k(0)}[(I-T)^{-(\nu+1)}T^\nu u, T^k u], \ k+1 \leqslant \nu \leqslant n; \\ \frac{1}{s_k(0)}[(I-T)^{-(n+1)}T^n u, (I-T^c)^{-(\nu-n)}T^{c(\nu-n)}T^k u], \\ \hfill n+1 \leqslant \nu \leqslant 2n; \end{cases}$$

Литература

1. M.G.Krein, H.Langer, Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhängen, Teil I:Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen, Math. Nachr. 77 (1977), 187-236.

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Андрианова Ю.В. (Москва)
yandrianova@mail.ru

В данной работе рассматриваются графические приемы для исследования алгебраических уравнений (в частности, приближенного нахождения одного из корней уравнения). Материал предлагается для изучения учащимися восьмых классов на математических кружках и состоит из нестандартных графических методов решения уравнений.

1) Нахождение корней квадратного уравнения $x^2+pq+q=0$ как абсцисс точек пересечения окружности

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{(q-1)^2}{4}$$

с осью Ox. При этом достаточно вычислить только координаты центра окружности, радиус же определяется автоматически, как расстояние между центром этой окружности и точкой с координатами $(0;1)$.

2) Использование замены $z=\frac{y}{x}$, где x и y связаны соотношением $x^2=y^3$, для нахождения корней кубического уравнения $z^3+pz+q=0$. Тогда решение уравнения сводится к отысканию точек пересечения кривой $x^2=y^3$ и прямой $py+qx+1=0$.

3) Решение уравнений четвертой степени можно в некоторых случаях свести к отысканию точек пересечения параболы и окружности. При этом центр окружности и ее радиус определяются только по коэффициентам рассматриваемого уравнения.

4) Метод Лилля — графический метод для нахождения значения многочлена произвольной степени в любой точке с использованием ломаной. Метод Лилля является геометрическим аналогом хорошо известной схемы Горнера.

На занятиях рекомендуется использовать современные компьютерные образовательные продукты (например, [1]), которые позволяют сделать процесс обучения наглядным и интересным.

Литература

1. Образовательный компьютерный комплекс "Математика. 5–11 классы. Практикум." (под редакцией В.Н. Дубровского) // М.: ЗАО "1С", 2004–2005.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 5-ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Анохин П.Н., Гордон В.А. (Орел)

gordon@ostu.ru

В докладе рассматривается аналитическое решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения 5-го порядка с переменными коэффициентами. Для приближенного решения применяется матричный вариант метода ВКБ. В процессе нахождения приближенного решения возникает необходимость находить корни характеристического уравнения пятой степени. По теореме Абель-Руффини корни уравнения 5-й степени в общем виде не представимы в радикалах, однако их можно представить через обобщенную гипергеометрическую функцию одной переменной, предварительно приведя уравнение 5-й степени в Бринг-Джеррад нормальную форму при помощи преобразования Чирнгауза. Найдя корни характеристического уравнения можно, затем, найти приближенное решение исходного дифференциального уравнения 5-го порядка. Для построения строгого решения, общее решение исходного дифференциального уравнения представляется в виде суммы произведений приближенных решений на произвольные функции D_i. Связав эти функции пятью соотношениями и решив получившуюся систему, находятся функции D_i, и, следовательно, строгое решение исходного линейного обыкновенного дифференциального уравнения 5-го порядка.

Литература

1. Гордон В.А. Метод решения задач механики неоднородных тел: монография / В.А. Гордон, В.С. Шоркин, М.И. Борзенков - Орел: ОрелГТУ, 2005. — 161 с.

2. Хединг, Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) / Дж. Хединг. - М.: Мир, 1965 – 120 с.

3. Drociuk R. J. On the Complete Solution to the Most General Fifth Degree Polynomial. – Burnaby: Simon Fraser University [Electronic resource]: arXiv:math.GM/0005026v1, 2000.

4. Adamchik V.S. Polynomial Transformations of Tschirnhaus, Bring and Jerrard // ACM SIGSAM Bulletin. – 2003, September. – Vol. 37. - №3.

О КЛАССАХ Lip(α, p) ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Антонов А.П. (Москва)
alt@land.ru

Определение. *Последовательность* $a_{n_1,\ \dots,\ n_m}$ *монотонно убывает по каждому направлению, если для любых* $n_1, \ \dots, \ n_m \geqslant 1$ *и любых* $j_1, \ \dots, \ j_m \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$a_{n_1,\ \dots,\ n_m} \geqslant a_{n_1+j_1,\ \dots,\ n_m+j_m}.$$

Был получен следующий результат.

Теорема. *Пусть* $m \geqslant 2$, $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$, *функция* $f(\mathbf{x}) \in$ $\in \mathbf{L}_p([-\pi,\ \pi]^m)$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$ *— её ряд Фурье, коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению,* $0 < \alpha < 1$. *Тогда для того, чтобы* $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{Lip}\,(\alpha,\ p)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная с такая, что для любого* $i = 1, \ \dots, \ m$ *выполняются условия : для любого* n_i *:*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{\infty} \sum_{k_{i+1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a^p_{k_1,\ \dots,\ k_{i-1},\ n_i,\ k_{i+1},\ \dots,\ k_m} \times$$

$$\times \prod_{j=1,\ j\neq i}^{m} k_j^{p-2} \leqslant \frac{c}{n_i^{\alpha p+p-1}}.$$

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

Арутюнян Г.В., Марчевская Е.В. (Москва)
IliaMarchevsky@mail.ru

Реализация идей профильного обучения на старшей ступени школы поставила перед учителями задачу об определении содержания математического образования в классах различных профилей.

В настоящее время не существует единых требований к программам по математике для профильных классов, не определены требования к математической подготовке учащихся. Содержание учебных комплектов для 10 профильных классов разных авторов (Г.В. Дорофеева, А.Г. Мордковича), безусловно, направлено на развитие математической культуры учащихся, расширяет круг изучаемых понятий, знакомит с новыми подходами к решению задач. Однако учебники «нового поколения» значительно отличаются друг от друга по структуре и содержанию учебного материала. При выборе учебника учителю необходимо учитывать такие факторы как: а) количество часов в учебном плане школы для данного профиля; б) форма проведения выпускного экзамена; в) специфика «вступительной математики» вузов данного профиля; г) уровень подготовки и мотивации учащихся; д) наличие элективных курсов и др.

Не секрет, что даже у учащихся профильных классов вызывают затруднения задания с модулем и параметром; огромное количество ошибок допускается при решении различных типов уравнений и неравенств. Опыт работы в профильных классах позволяет сделать вывод, что увеличение количества часов (на 1 час в неделю) необходимо направить не на расширение перечня изучаемых разделов, а на формирование навыков решения задач, включая задачи различной степени сложности, задачи вступительных экзаменов и ЕГЭ. Расширение курса можно обеспечить путём введения различных элективных курсов, таких как: «Элементы линейной алгебры», «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств», «Методы построения и преобразования графиков» и др. В классах физико-математического профиля целесообразно изучать углублённый курс математики в объёме 8 часов в неделю, позволяющий подготовить учащихся к продолжению образования в вузах, в которых математика является профильным предметом.

Успешное решение проблем преподавания математики в профильных классах во многом зависит от опыта учителя, его профессиональной компетентности и педагогического мастерства.

О ЛОКАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ АТТРАКТОРОВ IFS

Асеев В.В. (Новосибирск)

btp@math.nsc.ru

Для конечного набора $\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ $(N \geqslant 2)$ сжимающих отображений в полном метрическом пространстве X существует единственное компактное множество $K(\mathbf{S}) \subset X$, являющееся решением уравнения Хатчинсона $K = S_1(K) \cup ... \cup S_N(K)$ [1, §3.1, стр. 724]. Этот компакт и называется аттрактором системы $\mathbf{S}$. Известно [2, Theorem 1.6.2, p.33], что из связности аттрактора $K(\mathbf{S})$ следует его локальная связность. Используя известный критерий локальной связности [3, 6.3.6, стр. 548], мы получаем следующее усиление этой теоремы:

Теорема 1. Аттрактор $K(\mathbf{S})$ локально связен тогда и только тогда, когда он имеет конечное число компонент.

Заслуживает внимания следующий любопытный факт:

Теорема 2. Аттрактор $K(\mathbf{S})$ системы $\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ инъективных сжимающих отображений полного метрического пространства при $2 \leqslant N \leqslant 3$ либо имеет бесконечное число компонент, либо является локально связным континуумом.

Построен пример, показывающий, что теорему 2 нельзя распространить на случай $N > 3$.

Литература

1. *Hutchinson J.*: Fractals and self-similarity. – Indiana Math. J., v.30, No 5, 1981, pp. 713-747.

2. *Kigami J.*: Analysis on fractals. – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 226 p.

3. *Энгелькинг Р.*: Общая топология. – М.: Мир, 1986.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Астахов А.Т. (Воронеж)
E-mail:АСТАХОВ@yandex.ru

Пусть $K_\alpha = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n : \|x'\| = \alpha x_1\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат и раствором α. Обозначим пересечение конуса K_α и сферы S_1^{n-1} радиуса 1 размерности $n-1$ с центром в начале координат из $\mathbb{R}^n$ через S_r^{n-2} - сфера радиуса r размерности $n-2$.

В настоящей работе рассмотрены свойства сферических гармоник на сферах S_r^{n-2}. Одно из свойств сформулировано в следующей теореме.

Теорема. *Для существования ненулевой сферической гармоники порядка κ, равной нулю на сфере S_r^{n-2}, необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен Гегенбауэра из последовательности*

$$P_{\kappa-i}^{\beta+i}(\cos\vartheta_1), \qquad \beta = \frac{(n-2)}{2}, \qquad i = 0, 1, \ldots, \kappa.$$

$$\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \mathrm{tg}\,(\vartheta_1) = \alpha,$$

для которого $\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}$ является нулем. При этом $r = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ КЕЛЛЕРОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Атанов А.В., Лобода А.В. (Воронеж)
lob@vgasu.vrn.ru

Везде ниже *келлеровым* отображением пространства $\mathbb{C}^2_{(z,w)}$ в себя мы называем пару многочленов $f = (P(z,w), Q(z,w))$, удовлетворяющих условию

$$J_f = \begin{vmatrix} P_z & P_w \\ Q_z & Q_w \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

К таким отображениям относятся, например, аффинные невырожденные преобразования и т.н. треугольные отображения вида $z^* = z + P(w), w^* = w$.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00630)

Известная гипотеза о якобиане [1], доказанная пока лишь для некоторых пар степеней (n, m) многочленов P и Q, сводится в обсуждаемом 2-мерном случае к утверждению о представимости любого келлерова отображения суперпозициями аффинных и треугольных преобразований.

Приравнивая все (кроме нулевой) степенные компоненты якобиана J_f к нулю, можно свести свойство (1) к системе квадратичных уравнений относительно коэффициентов многочленов $P(z, w)$ и $Q(z, w)$.

В [2] предложен алгоритм изучения такой системы для случая $(2n, 2)$-отображений $(n > 1)$, подтверждена справедливость гипотезы Келлера в этом случае и установлено, что однородная составляющая Q_2 младшей компоненты $Q(z, w)$ келлерова отображения является точным квадратом.

Также алгоритмическим путем устанавливаются следующие факты.

Предложение 1. С точностью до аффинных преобразований келлерово $(6, 3)$-отображение сводится к суперпозиции двух треугольных отображений. При этом однородная составляющая Q_3 младшей компоненты $Q(z, w)$ келлерова отображения является точным кубом.

Предложение 2. С точностью до аффинных преобразований келлерово $(8, 4)$-отображение сводится к суперпозиции двух или трех треугольных отображений.

Замечание. При доказательстве первого предложения возникает система из 36 квадратичных уравнений относительно 34 неизвестных коэффициентов; во втором случае имеем 66 уравнений относительно 55 неизвестных.

Литература

1. Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture.Progress in Mathematics, V.190. 2000, 328 P.

2. Лобода А.В. Квадратичные системы уравнений и композиции полиномиальных отображений // ВЗМШ-2006, Воронеж, Тезисы докл., С. 59-60.

О ПОТОЧЕЧНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТУРАНА, СВЯЗЫВАЮЩЕМ МОДУЛИ МНОГОЧЛЕНА И ЕГО ПРОИЗВОДНОЙ В ТОЧКАХ ОКРУЖНОСТИ[1]

Бадков В.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\mathbb{P}_n$ — множество всех алгебраических многочленов степени $\leqslant n$ с комплексными коэффициентами, $D := \{z : |z| < 1\}$.

П. Туран в [1] привел без доказательства следующий результат: *если $Q_n \in \mathbb{P}_n$ и все нули Q_n принадлежат $\overline{D}$, то выполняется неравенство* $|Q_n'(e^{i\tau})| \geqslant 2^{-1}n|Q_n(e^{i\tau})|$ $(n \in \mathbb{N}, \tau \in \mathbb{R})$, *знак равенства в котором достигается при* $Q_n(z) = (1+z)^n$ *и* $\tau = 0$. В [2] с помощью формулы типа Кристоффеля–Дарбу для многочленов, ортогональных на окружности, доказано более общее неравенство $|Q_n^{(j)}(e^{i\tau})| \geqslant 2^{-j}n(n-1)\cdots(n-j+1)|Q_n(e^{i\tau})|$ $(n \geqslant j \geqslant 1, \tau \in \mathbb{R})$ при тех же предположениях о нулях Q_n, также обращающееся в равенство при $Q_n(z) = (1+z)^n$ и $\tau = 0$.

Основным результатом сообщения является следующая

Теорема. *Пусть нули $z_1, \dots, z_n$ многочлена*

$$Q_n(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n) \quad (c \neq 0, \ n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

принадлежат $\overline{D}$. Тогда имеет место неравенство

$$|Q_n'(e^{i\tau})| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+|z_k|}|Q_n(e^{i\tau})| \quad (\tau \in \mathbb{R}), \tag{2}$$

знак равенства в котором достигается при $\tau = 0$ на многочлене $Q_n(z) = (z+|z_1|)\cdots(z+|z_n|)$ с теми же, что и у (1), модулями нулей.

В силу неравенств $(1+|z_k|)^{-1} \geqslant 1/2$ $(k = 1, \dots, n)$ из (2) следует сформулированный выше результат П. Турана.

Литература

1. Turan P. *Über die Ableitung von Polynomen* // Compos. math. – 1939/1940. – V. 7. – P. 89-95.

2. Бадков В.М. *Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса* // Тр. МИРАН. – 1992. – Т. 198. – С. 41-88.

[1]Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (НШ-5120.2006.01) и грантом РФФИ (05-01-00233)

ТЕОРЕМА О КОММУТАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Баев А.Д. (Воронеж)

Пусть функция $\alpha(t)$ такая, что $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$; $\alpha(t) > 0$ — постоянная при $t \geqslant d > 0$, где d — некоторое число. Предполагается, что функция $\alpha(t)$ достаточно гладкая при $t \geqslant 0$. На функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ рассмотрим интегральное преобразование вида

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование переводит оператор "весового" дифференцирования $D_{\alpha,t} = \sqrt{-\alpha(t)}\frac{d}{dt}\sqrt{\alpha(t)}$ в оператор умножения на η. Следуя [1] , преобразование F_α можно рассмотреть на обобщенных функциях, а также построить весовой псевдодифференциальный оператор вида

$$K^\sigma(x,t,D_k,D_{\alpha,t}v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(x,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]],$$

где F_α^{-1} - обратное к F_α преобразование, $F^{-1}_{x\to\xi}(F^{-1}_{\xi\to x})$- прямое (обратное) преобразование Фурье.

Будем говорить, что символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ принадлежит классу S^σ_α , если $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in C^\infty(R^{n-1} \times R^1_+ \times R^{n-1} \times R^1)$ и справедливы оценки $|D^\tau_x \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell} D^p_\xi \frac{\partial^k}{\partial \eta^k}\lambda(x,t,\xi,\eta)| \leqslant C_{\tau\ell pk}(1+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-|p|-k}$ при всех мультииндексах τ, p и $\ell, k \in N$.

Пусть $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ пространство функций $v(x,t)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha} = \|F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}(1+|\xi|+|\eta|)^s F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]\|_{L_2(R^n_+)}.$$

Доказано следующее утверждение

Теорема. Пусть символ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S^\sigma_\alpha, \sigma \in R^1$. Пусть $v(x,t) \in H_{s+\sigma,\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $\frac{\partial^j v(x,t)}{\partial t^j} \in H_{s+\sigma,\sigma,\alpha}(R^n_+)$ $j = 1,2,...,\ell$, $\ell \in N, s \in R^1$.

Тогда для оператора

$$M_{\ell,\sigma}v = \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t})v - K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\frac{\partial^\ell v}{\partial^\ell t}$$

справедлива оценка

$$\|M_{\ell,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leqslant c(\sum_{j=0}^{\ell}\|\frac{\partial^j v}{\partial^j t}\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{\ell-1}\|\frac{\partial^j v}{\partial^j t}\|_{s+\sigma,\alpha})$$

с константой $c > 0$, не зависящей от функции $v(x,t)$.

Литература

1. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы. Доклады АН СССР, т.265, №5, с.1044-1046.

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Байзаев С. (Худжанд), Мухамадиев Э.М. (Вологда)
emuhamadiev@rambler.ru

В докладе рассматриваются вопросы разрешимости гиперболических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами в пространствах непрерывных и ограниченных на всей плоскости функций, почти периодических функций.

Для простоты рассмотрим гиперболическое уравнение в канонической форме

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x,y). \qquad (1)$$

Пусть $C = C(R^2)$ и $C(\Pi)$-пространства непрерывных и ограниченных соответственно на всей плоскости R^2 и полуплоскости $\Pi = \{(x,y) : y \geqslant 0\}$ функций с равномерной метрикой. Уравнение (1) заменяется на эквивалентную систему уравнений с частными производными 1-го порядка и последняя исследуется как ОДУ в банаховом пространстве $C(R)$. Сформулируем ряд полученных результатов.

Теорема 1. *Для того, чтобы неоднородное уравнение (1) для всех $f \in C$ имело решение $u = u(x,y)$, принадлежащее пространству C вместе со всеми частными производными u_x, u_y, u_{xy}, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$|ab - c| < |\Re(\bar{a}b + c)|. \qquad (2)$$

Теорема 2. *Для того чтобы неоднородное уравнение (1) для всех почти периодических функций $f \in C$ имело решение $u = u(x, y)$, почти периодическое вместе со всеми частными производными u_x, u_y, u_{xy}, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2).*

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (2) и $\Re a > 0$. Тогда для всех $f \in C(\Pi)$ и непрерывных и ограниченных вместе с производной первого поряка функций $\varphi(x)$ уравнение (1) с условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ в полуплоскости Π имеет единственное решение u, принадлежащее пространству $C(\Pi)$ вместе со всеми частными производными u_x, u_y, u_{xy}.*

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Балашова Г.С. (Москва)
balashovags@mpei.ru, balashovil@mail.ru

В теории вложения функциональных пространств решающую роль играют оценки норм производных. Такого типа оценки установлены для функций из пространств, рассматриваемых на различных одномерных областях. Кроме того, для функциональных пространств, рассматриваемых на многомерных областях получены оценки норм смешанных производных через нормы производных по каждой переменной в отдельности в Лебеговом пространстве. Полученные неравенства позволяют сравнивать между собой пространства Соболева бесконечного порядка, т.е. получить достаточные условия вложения пространств, а в частных случаях и критерии вложения и компактности вложения таких пространств.

ОБ ОБРАТНОМ ОПЕРАТОРЕ ГЕНЕРАТОРА C_0-ПОЛУГРУППЫ[1]

Барсуков А.И. (Воронеж)

Полугруппа ограниченных операторов $\{U(t)\}_{t>0}$, действующих на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ принадлежит классу C_0, если выполнено равенство $\lim_{t\to 0} U(t)x = x$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Оператор A,

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-05-01-00203-а.

определенный равенством

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{U(t) - I}{t} x,$$

для всех $x \in \mathcal{H}$, для которых этот предел существует, называется генератором полугруппы $\{U(t)\}_{t>0}$.

Теорема. Пусть ограниченный оператор A является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы, $0 \notin \sigma_p(A)$ и $\overline{ran}(A) = \mathcal{H}$. Тогда A^{-1}является генератором некоторой равномерно ограниченной C_0-полугруппы.

Теорема дает частичный ответ на проблему, сформулированную в работе [1]: для генератора A равномерно ограниченной C_0-полугруппы ($0 \notin \sigma_p(A)$ и $\overline{ran}(A) = \mathcal{H}$) является ли оператор A^{-1} генератором некоторой равномерно ограниченной C_0-полугруппы?

Литература

[1]*deLaubenfels R.* Inverse of generators // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V.104. No.2. p. 443-448.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ И СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ КЛАССОВ ВАТЕРМАНА[1]

Бахвалов А.Н. (Москва)

anbakh@rol.ru

Пусть $T = [-\pi, \pi]$, $m \geqslant 2$, $f(t)$ — интегрируемая по Лебегу на T^m 2π-периодическая по каждому переменному функция m переменных, а $\Lambda BV(T^m)$ — класс функций ограниченной Λ-вариации на T^m. Для $k = 1, \dots, m$ обозначим через $\bar{V}_\Lambda^k(f; (x^k, T^{m-1}))$ полную Λ-вариацию f как функции $(m-1)$ переменной на T^{m-1} при фиксированном значении $t^k = x^k$ (подробные определения см. в [1]).

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ такова, что

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) / \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \right) = 0.$$

Теорема 1. Если $m \geqslant 3$ и $f \in \Lambda BV(T^m)$, то ее ряд Фурье сходится по прямоугольникам в каждой регулярной точке.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00052) и программ государственной поддержки молодых ученых (проект МК-6085.2006.1) и ведущих научных школ (проект НШ-4681.2006.1).

Теорема 2. Если $m \geqslant 4$, непрерывная функция f равна нулю в окрестности нуля $(-\delta_0, \delta_0)^m$ и при $k = 1, \ldots, m$ выполнено условие

$$\int\limits_T \bar{V}_\Lambda^{\bar{k}}(f; (x^k, T))\, dx^k < \infty,$$

то кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции равномерно сходится к нулю по прямоугольникам на $[-\delta, \delta]^m$ при любом $\delta \in (0, \delta_0)$.

Теорема 1 усиливает результаты автора[1], а теорема 2 — результаты А.И.Саблина[2].

Литература

1. Бахвалов А.Н. *О локальном поведении многомерной гармонической вариации.* Известия РАН, Сер. матем. – 2006. – Т.70, 4. – С. 3–20.

2. Саблин А.И. *Функции ограниченной Λ-вариации и ряды Фурье.* – Дисс. ...к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1987.

О КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ВБЛИЗИ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ КОНЕЧНЫЙ ПОРЯДОК И НОРМАЛЬНЫЙ ТИП

Беднаж В.А. (Брянск)

E-mail: verabednazh@rambler.ru

Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости. Через X_ρ^∞ обозначим пространство аналитических в D функций, имеющих вблизи единичной окружности конечный порядок ρ и нормальный тип, то есть существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, такие что

$$|f(z)| \leqslant c_1 \exp \frac{c_2}{(1-|z|)^\rho}.$$

Пусть $\{\alpha_k\}_1^{+\infty}$, $\alpha_k \in D$ и $\{\omega_k\}_1^{+\infty}$ - произвольные последовательности комплексных чисел; s_j, $j \geqslant 1$, - кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$; p_j, $j \geqslant 1$, - кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^{+\infty}$ и $\sup\limits_{j\geqslant 1}\{p_j\} = p$. Требуется найти функцию $f \in X_\rho^\infty$, удовлетворяющую интерполяционным условиям

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \omega_k, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Задача кратной интерполяции в классах H^p, $0 < p < +\infty$, Харди была впервые поставлена в работах [1], [2], причем узлы интерполяции удовлетворяют условию Л.Карлесона. В работе построено решение интерполяционной задачи, не используя данное условие. Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Пусть последовательность* $\{\alpha_k\}_1^{+\infty}$, $\alpha_k \in D$, *удовлетворяет условию* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|) < +\infty$; *точки* α_k, $k = 1,2,\ldots$, *находятся в конечном числе некасательных к единичной окружности углов;* $\prod\limits_{j\neq k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_j\alpha_k}\right| \geqslant \exp -\frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)^\rho}$, $\delta > 0$, $k = 1,2,\ldots$, *тогда для произвольной последовательности* $\{\omega_k\}_1^{+\infty}$, *такой что* $|\omega_k| \leqslant c\exp\frac{c(\omega)}{(1-|\alpha_k|)^\rho}$, *можно построить в явном виде функцию* $f \in X_p^\infty$, *удовлетворяющую условию* $f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \omega_k$, $k = 1,2,\ldots$.

Литература

1. Джрбашян М.М. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2. Изв. АН Арм.ССР, 1974, матем., т.9, No 5.

2. Джрбашян М.М. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости. Изв. АН СССР, матем., 1978, т.43, No 6.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАНКЛЯ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

Белкина Е.С. (Петрозаводск)

elena.belkina@gmail.com

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty,\infty), \alpha \geqslant -\frac{1}{2}, d\mu(t) = |t|^{2\alpha+1}dt$ — мера на $\mathbb{R}$, $L_{2,\alpha} := L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ — норма в гильбертовом пространстве $L_{2,\alpha}$, $Df(x) = f'(x) + (\alpha+\frac{1}{2})\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ — оператор Данкля, $e_\alpha(x) := j_\alpha(x) + i\,c_\alpha\, x\, j_{\alpha+1}(x)$ — обобщенная экспоненциальная функция, где $c_\alpha = (2\alpha+2)^{-1}$, $i = \sqrt{-1}$, $j_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя первого рода.

Преобразованием Данкля называется следующее интегральное преобразование

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e_\alpha(\lambda x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Для любой функции $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ обобщенный сдвиг (ОС) Данкля $u(x,y) = T^y f(x)$ $x, y \in \mathbb{R}$ определяется как решение следующей задачи Коши (см. [2]):

$$D_x u(x,y) = D_y u(x,y); \qquad u(x,0) = f(x).$$

ОС Данкля можно продолжить до непрерывного оператора в $L_{2,\alpha}$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица $Lip_\alpha(\gamma, 2)$, $0 < \gamma < 1$, если $f(x) \in L_{2,\alpha}$ и $\|T^h f(x) - f(x)\|_{2,\alpha} = O(h^\gamma)$ при $h \to 0$.

Теорема. *Если $f(x) \in L_{2,\alpha}$ и $\widehat{f}(\lambda)$ — ее преобразование Данкля, то условия*

$$f(x) \in Lip_\alpha(\gamma, 2)$$

и

$$\int\limits_X^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda = O(X^{-2\gamma-2\alpha-1})$$

при $X \to +\infty$ эквивалентны.

Литература

[1] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье* – М.: Гостехиздат, 1948. – 480 с.

[2] *Salem N.B., Kallel S.*, Mean-periodic functions associated with the Dunkl operators // Integral Transforms Spec. Funct. - 2004. - V. 15. - N2. - P. 155-179.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УЧЕТЕ ОРИЕНТАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Белов К.Л., Еремеев В.А. (Ростов-на-Дону)
eremeyev@math.rsu.ru

Исследованы некоторые линейные краевые задачи, возникающие в гидродинамике тяжелой жидкости со свободной поверхностью при учете ориентационных эффектов в приповерхностном слое, которые описывались в рамках модели микрополярной жидкости [1, 2]. С физической точки зрения интерес к микроструктурным жидкостям связан с возможностью учета влияния поверхностно-активных веществ на реологию жидкости в поверхностном слое и распространение капиллярных волн.

В работе рассмотрены следующие две задачи о распространении волн, локализованных в поверхностном слое жидкости:

1. Капиллярных волн в идеальной несжимаемой жидкости, покрытой микрополярной пленкой.

2. Волны в двухслойной жидкости, верхний слой которой представляет собой упругую микрополярную жидкость.

Общим для краевых задач 1, 2 является наличие одной или двух свободных поверхностей. Неизвестными являются давление, потенциал скорости и функции, описывающих отклонение свободной поверхности от горизонтальной плоскости. Кроме того, для микрополярной жидкости неизвестным является функция, описывающая изменение ориентации частиц жидкости.

При помощи преобразования Фурье построены решения краевых задач 1, 2 вида $e^{i(kX-\Omega t)}$, где k – волновое число, Ω – частота и получены соответствующие дисперсионные уравнения. Для краевой задачи 2 проведен асимптотический анализ при стремлении толщины слоя микрополяной жидкости к нулю. Показано, что для обеих краевых задач возможно введение эквивалентного "поверхностного натяжения" (поверхностной энергии), зависящего от ориентации частиц жидкости в приповерхностном слое.

Литература

1. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 801–815.

2. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. II. Fluent Media. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 2001. 325 pp.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Белоусов Ф.А. (Москва)

e-mail: fbelousov@nes.ru

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+h_1), \ldots, x(t+h_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где функция $g \in C^{(0)}(\mathbb{R}^{1+n\times s}; \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по t.

Этот класс функционально-дифференциальных уравнений точечного типа хорошо изучен в [1], где сформулированы условия, при которых обеспечивается существование и единственность решения из определенного класса функций.

В докладе будут сформулированны условия, обеспечивающие существование периодических решений, аналоги которых существуют в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2] и [3]). Как правило такие условия трудно проверяемы на практике. Поэтому, предпринята попытка получения более жестких, но легко проверяемых на практике условий, гарантирующих существование периодических решений. Получен результат, в котором приводится достаточное условие существования периодических решений для линейных функционально - дифференциальных уравнений точечного типа. В ней гарантируется не только существование, но и единственность периодического решения. Более того, справедливость такого достаточного условия легко проверяема в случае, когда у нас имеется возможность численного построения решений. Как частный случай, эти результаты могут быть применены и к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Литература

[1] *Бекларян Л.А.*, Введение в теорию функционально - дифференциальных уравнений и их приложения. Групповой подход.//Современная математика. Фундаментальные направления. Т8 (2004)

[2] *Yoshizawa, T.*, Stability Theory and Existance of Periodic Solutions and Almost periodic Solutions. New York. Springer, 1975.

[3] *Massara,* J., The existence of periodic solutions of differential equations, Duke Math. J. 17 (1950), 457-475.

О ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНУСОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА[1]

Бережной Е.И. (Ярославль)

ber@uniyar.ac.ru

Для важнейших конусов в пространствах Лебега предлагается редукция задачи оценки оператора на конусе к задаче об оценке оператора на новом пространстве, которое строится конструктивно. Такая редукция позволяет применить известную технику получения оценок на весовых пространствах Лебега к получению точных оценок операторов на конусах.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 05-01-00206.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $K(\downarrow)$ конус в $S(\mu)$, состоящий из неотрицательных невозрастающих функций. Пусть фиксировано число $p \in (1, \infty)$ и весовая функция w такая, что $\int_1^\infty w^p(s)ds = \infty$ и $\forall t > 0$ выполнено неравенство $\int_0^t w^p(s)ds < \infty$. Пусть оператор Q определен равенством: $Qx(t) = \int_t^\infty x(\tau)d\tau$.*

Определим новую функцию v из равенства

$$\|\kappa(0,t)w|L^p\| \cdot \|\kappa(t,\infty)\frac{1}{v}|L^{p'}\| \equiv 1,$$

($\kappa(D)$ - характеристическая функция множества D.)

Тогда справедливы соотношения:

оператор Q действует и ограничен в паре

$$Q : (L^p{}_v)_+ \to K(\downarrow) \cap L^p{}_w;$$

существует константа $c > 0$ такая, что $\forall y \in K(\downarrow) \cap L^p{}_w$ с $\|y|L^p{}_w\| = 1$ найдется функция $x \in L^p{}_v$ с $\|x|L^p{}_v\| = 1$, для которой при всех $t \in (0, \infty)$ выполнено неравенство $(Qx)(t) \geqslant cy(t)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Пусть Y — некоторое идеальное банахово пространство в $S(\mu)$.*

Для того, что бы позитивный оператор T действовал и был ограничен как оператор из $K(\downarrow) \cap L^p{}_w$ в Y необходимо и достаточно, чтобы оператор суперпозиции TQ действовал и был ограничен как оператор из $L^p{}_v$ в Y.

Аналогичные теоремы справедливы и для конуса $K(\downarrow, \uparrow)$, состоящего из неотрицательных вогнутых функций, каждая из которых удовлетворяет дополнительным условиям:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} t^{-1}x(t) = 0.$$

О РАЗЛИЧЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ БАЗИСАМИ[1]

Бережной Е.И. (Ярославль), Перфильев А.А. (Москва)

ber@uniyar.ac.ru, alex0304@mail.ru

Пусть задан единичный квадрат Q на плоскости и дифференциальный базис $B \subset Q$. Верхняя и нижняя производные интеграла

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 05-01-00206.

от локально интегрируемой функции f в точке $t \in Q$ относительно базиса B определяются с помощью равенств

$$\overline{D_B(f,t)} = \sup\{\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|B_k|} \int\limits_{B_k} f ds : t \in B_k \in B, \quad diam B_k \to 0\},$$

$$\underline{D_B(f,t)} = \inf\{\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|B_k|} \int\limits_{B_k} f ds : t \in B_k \in B, \quad diam B_k \to 0\}.$$

Говорят, что базис B дифференцирует интеграл от f , если почти всюду выполнены равенства

$$\overline{D_B(f,t)} = \underline{D_B(f,t)} = f(t).$$

Если B дифференцирует интеграл от любой функции f из пространства X, то говорят, что базис B дифференцирует пространство X. Как обычно, через $\Lambda(\varphi)$ обозначим пространство Лоренца, построенное по вогнутой функции φ, а через L_h обозначим пространство Орлича, построенное по N - функции h.

Теорема 1. *Пусть заданы пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и пространство Орлича L_h, причем при $t \geqslant 1$ справедливо равенство $h^{-1}(t) = \frac{1}{\varphi(t^{-1})}$. Пусть функция φ удовлетворяет условиям*

$$\sup_{0<t<1} \frac{\varphi(t/2)}{\varphi(t)} < 1, \qquad \sup_{0<t<0.5} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < 2, \qquad \lim_{\alpha\to 0} \alpha \sup_{0<t<\alpha} \frac{\varphi^{-1}(\alpha^{-1}t)}{\varphi^{-1}(t)} = 0.$$

Тогда существует дифференциальный $BF-$ базис, который дифференцирует пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и не дифференцирует пространство Орлича L_h.

Теорема 2. *Пусть задано пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и функция φ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда существует дифференциальный $BF-$ базис, который дифференцирует пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и не дифференцирует любое пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ такое, что $\Lambda(\varphi) \subset \Lambda(\varphi)$, $\Lambda(\varphi) \neq \Lambda(\varphi)$.*

ИЗОМОРФНЫЕ СТРУКТУРЫ ДВОИЧНОГО АНАЛИЗА[1]

Беспалов М.С. (Владимир)
bespalov@vpti.vladimir.ru

Двоичный анализ [1] базируется на системах Уолша и Хаара, которые взаимосвязаны [2, с.25] через матрицы W дискретного преобразования Уолша. Пусть n – фиксировано, $N = 2^n$, векторы и матрицы порядка N, где нумерация с нуля. Определим Λ_n класс $\frac{1}{N}$-ступенчатых функций φ со значениями, указанными в вектор-столбце f, и коэффициентами Уолша c. Обозначим $\dot{+}$ групповую операцию [1, с.13; 2, с.12-13] над натуральными числами и на модифицированном отрезке. Определим двоичную свертку: функций $(\varphi \times \psi)(x) = \int_0^1 \varphi(x \dot{+} t)\psi(t)\,dt$ и векторов $c \times d$ как вектор с координатами $b_k = \sum_{m=0}^{2^n-1} c_{m \dot{+} k} d_m$. Пусть $\bullet$ есть операция покоординатного умножения, а $F \in D(N)$ есть изображение произвольного вектора $f \in \mathbb{R}^N$ в виде диагональной матрицы.

Введем матрицы $M[f]$ (класс CM_n двоично циркулянтных матриц (ср. [3, с.40])), произвольный элемент которых $m_{ik} = f_{i \dot{+} k}$.

Укажем семь изоморфных алгебраических структур, одна из которых $\varphi \in \Lambda_n(+ \ \cdot \ \times)$, с тремя операциями:

$$B = M[f] \in CM_n @ = f \in \mathbb{R}^N @ = F \in D(N),$$

$$@AC = \frac{1}{N} WBWAB = \frac{1}{N} WCWA@Vc =$$

$$= \frac{1}{N} WfVf = WcV@VB = \frac{1}{N} WFWVF = \frac{1}{N} WBWV,$$

$$C \in D(N)@ = c \in \mathbb{R}^N @ = B = M[c] \in CM_n.$$

Укажем операции, отметив, что относительно первой и второй (а также первой и третьей) операции каждая структура есть коммутативное кольцо с единицей. На диаграмме – схема доказательства.

$M[f](+ \bullet \odot)$ $f(+ \bullet \otimes)$ $F(+ \cdot \otimes)$ $C(+ \times \cdot)$ $c(+ \times \bullet)$ $M[c](+ \cdot \bullet)$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-01-00717)

Операции $\odot$ и $\otimes$ есть соответственно композиция операций умножения $\cdot$ и двоичной свертки $\times$ (векторов или диагональных элементов) с операцией деления на N.

В докладе предполагается распространить данную конструкцию на бесконечномерный случай.

Литература

1. Голубов Б.И. Элементы двоичного анализа, М.(2005), 2. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша, М.(1987), 3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ, М.(1989).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОСОЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВИДЕ КОНЕЧНЫХ СУММ КОММУТАТОРОВ ПРОЕКТОРОВ[1]

Бикчентаев А.М. (Казань)

Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим *-алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Оператор $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *идемпотентом*, если $x = x^2$; *проектором*, если $x = x^2 = x^*$.

В [1] доказано неулучшаемое (по числу сомножителей) утверждение: если алгебра фон Неймана (далее афН) $\mathcal{M}$ не имеет прямого абелева слагаемого (соответственно, собственно бесконечна), то каждый оператор $x \in \mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более, чем трех (соответственно, двух) проекторов из $\mathcal{M}$. В [2] дано второе доказательство этого факта с равномерной оценкой количества слагаемых. Наименьшая верхняя граница (=3) связана с существованием нетривиального конечного следа на этих алгебрах. Для афН без прямого абелева слагаемого доказательство опирается на новое представление операторов в виде конечных сумм попарных произведений проекторов и идемпотентов.

Будет показано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной афН представляется в виде конечной суммы коммутаторов ее проекторов. При $2 \leqslant \dim \mathcal{H} < \infty$ в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов будут описаны множество операторов с нулевым каноническим следом; а область положительности канони-

[1]Работа поддержана РФФИ, проект 05-01-00799.

ческого следа – в терминах конечных сумм попарных произведений проекторов (сответственно, йордановых произведений) на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (соответственно, на эрмитовой части $\mathcal{B}(\mathcal{H})$).

Получены аналогичные результаты и для равномерно гиперфинитных C^*-алгебр. В докладе также будут представлены новые условия коммутативности проекторов и дана характеризация следов в классе всех весов на афН без прямого слагаемого типа I_{fin}.

Литература

1. Бикчентаев А.М., СМЖ, 46, 2005, N 1, 32–45.

2. Bikchentacv A.M., In: Theta Series in Advanced Mathematics. V. 6. Proc. Inter. Conf. Operator Theory'20. – Bukharest, Theta, 2006, 15–23.

БЛИЗКИЕ БАЗИСЫ ИЗ ПРОСТРАНСТВ

Билалов Б.Т., Еминов М.С. (Баку)

Пусть B банахово пространство, $\{B_n\}_{n\in N} \subset B$ некоторая последовательность его подпространств.

Определение 1. $\{T_n\}_{n\in N} \subset Z(B)$*(*$Z(B)$*−алгебра ограниченных операторов из* B *в* B*) назовем порождающей для* $\{B_n\}_{n\in N}$ *если* $\overline{T_n(B)} = B_n$, $\forall n \in N$ *(*$\overline{M}$*− замыкание* M *в* B*).*

Определение 2. $\{T_n\}_{n\in N} \subset Z(B)$ *назовем базисом в* B*, если* $\left\{\overline{T_n(B)}\right\}_{n\in N}$ *базис в* B.

Определение 3. $\{T_n\}_{n\in N} \subset Z(B)$ *назовем* qs*-системой (в случае базисности* qs*-базисом), если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x\|^q \leqslant M^q \|x\|^q, \; x \in B.$$

Определение 4. $\left\{T_n^i\right\}_{n\in N} \subset Z(B)$, $i = 1, 2$, *назовем* p*− близкими, если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|T_n^{\prime} - T_n^2\right\|^p < +\infty.$$

Определение 5. $\{T_n\}_{n\in N} \subset Z(B)$ *назовем* dB_n*−инвариантным, если* $\dim T_n B_n = \dim B_n$, $\forall n \in N$.

Верна следующая

Теорема. *Пусть последовательность проекторов* $\{p_n\}_{n\in N} \subset Z(B)$ *образует* ps*-базис в* B, $\{T_n\}_{n\in N} \subset Z(B)$; q *−*

близка к $\{p_n\}_{n\in N}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p\in(1,+\infty)\right)$ *и* $\{p_n\}_{n\in N}\subset\mathcal{R}(B)$ *либо*

$$\{T_n\}_{n\in N}\subset\mathcal{R}(B)\ (\mathcal{R}(B)\subset Z(B)$$

класс всех конечномерных операторов). Если $\{T_np_n\}_{n\in N}$ *полна (минимальна и* dB_n*-инвариантна), то* $\{T_n\}_{n\in N}$ *тоже образует базис в* B *изоморфный к* $\{p_n\}_{n\in N}$.

Эта теорема обобщает многие результаты относительно систем в B.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ[1]

Блошанский И.Л. (Москва)

i.bloshn@g23.relcom.ru

1. Пусть $\mathcal{A}=\mathcal{A}(I^N)$, $I^N=[0,1)^N\subset\mathbf{R}^N$, $N\geqslant 1$, некоторое подпространство $L_1(I^N)$, и пусть E, $E\subset I^N$– произвольное множество, $\mu E>0$ (μ – мера Лебега). Для кратных разложений Фурье функций $f\in\mathcal{A}$ (в частности, для интегралов Фурье, тригонометрических рядов Фурье и рядов Фурье-Уолша, суммируемых по прямоугольникам при $N\geqslant 2$) мы исследуем следующие задачи.

2. (A) Первая ("базовая") задача - это вопрос о сходимости на множестве E всюду или почти всюду (п.в.) кратных разложений Фурье функции f, $f\in\mathcal{A}$, $f(x)=0$ на E, в зависимости от гладкости функции f (т.е. в зависимости от вида (определения) пространства $\mathcal{A}$) и от *структурных и геометрических характеристик* множества E ($СГХ(E)$). Таким образом, наша цель состоит в описании пар ($\mathcal{A}$, $СГХ(E)$). Результаты, полученные при решении базовой задачи, позволяют нам исследовать еще две задачи.

(B) Найти $СГХ$ множества E, $E\subset I^N$, и ("минимальные") условия на гладкость функции f (определенной, в частности, на E), которые "могли бы гарантировать" сходимость на E или на некоторых его подмножествах $E_1\subset E$, $\mu E_1>0$, кратных разложений Фурье функции f.

(C) Выяснить: как изменяются (если изменяются) множества сходимости и расходимости всюду или п.в. разложений Фурье функции $(f\circ m)(x)=f(m(x))$, $f\in\mathcal{A}$, $f(x)=0$ на E, $m\in\Psi\subset\mathcal{M}$ (где $\mathcal{M}$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00206)

- класс линейных преобразований $\mathbf{R}^N$) в зависимости от гладкости функции f (т.е. в зависимости от вида пространства A), а также от преобразования m (т.е. в зависимости от вида Ψ). Таким образом, при решении этой задачи, наша цель охарактиризовать пары (A, Ψ).

3. Нами найден (широкий) класс пространств A и $СГХ$ множеств E, для которых мы получили решения задач (A) и (B) (см. [1]), и, кроме того, мы определили системы классов (невырожденных преобразований) $\Psi = \Psi_k$, $\Psi_k \subset \mathcal{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$, которые "изменяют" множества сходимости и расходимости всюду и п.в. указанных разложений Фурье (см. [2]).

Литература

[1] Bloshanskii, I. L., Structural and Geometric Characteristics of Sets of Convergence and Divergence of Multiple Fourier Series of Functions which Equal Zero on Some Set. *Intern. J. of Wavelets, Multiresolution and Inform. Processing.* 2 (2004), 187–195.

[2] Bloshanskii, I. L., Linear Transformations of $\mathbf{R}^N$ and Problems of Convergence of Fourier Series of Functions which Equal Zero on Some Set. *Applied and Numerical Harmonic Analysis.* Springer Book Series (SCI). Volume "Wavelet Analysis and Applications"(2006), 13–24.

ИДЕМПОТЕНТИФИКАЦИЯ КОЛЬЦОИДОВ

Блюмин С.Л. (Липецк)
slb@stu.lipetsk.su

Бигруппоид $B\Gamma = < S, +, \times >$ (без каких-либо законов для операций $+, \times$) : (i) (+)-идемпотентен, если $a + a = a$; (ii) право-дистрибутивен (правый кольцоид R_r), если $(a+b)\times c = (a\times c)+(b\times c)$; (iii) лево-дистрибутивен (левый кольцоид R_l), если $a \times (b+c) = (a\times b)+(a\times c)$; (iv) дистрибутивен (кольцоид R), если выполнены (ii) и (iii); (v) является полукольцом (SR), если выполнено (iv) и операции $+, \times$ ассоциативны. Не-(+)-идемпотентный правый кольцоид с единицей $R_{r,1} = < S, +, \times, 1 >$, $1 \times a = a$, $(\oplus)$-идемпотентифицируется введением операции $a \oplus_{\alpha,\beta} b = (\alpha \times a) + (\beta \times b)$, где $\alpha + \beta = 1$: $a \oplus_{\alpha,\beta} a = (\alpha \times a) + (\beta \times a) = (\alpha + \beta) \times a = 1 \times a = a$. Если в полукольце с единицей $SR_1 = < S, +, \times, 1 >$ операция $+$ коммутативна, то его идемпотентификация $I(SR_1)_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = < S, \oplus_{\alpha,\beta}, \otimes_{\gamma,\delta} >$, где $a \otimes_{\gamma,\delta} b = (\gamma \times a) + (\delta \times b)$, причем $\gamma \times \alpha = \alpha \times \gamma$, $\gamma \times \beta = \beta \times \gamma, \delta \times \alpha = \alpha \times \delta, \delta \times \beta = \beta \times \delta$, является идемпотентным кольцоидом: $(a \oplus_{\alpha,\beta} b) \otimes_{\gamma,\delta} c = (\gamma \times ((\alpha \times a) + (\beta \times b))) + (1 \times (\delta \times c)) =$

$(\gamma\times\alpha\times a)+(\gamma\times\beta\times b)+((\alpha+\beta)\times\delta\times c)=(\alpha\times\gamma\times a)+(\beta\times\gamma\times b)+(\alpha\times\delta\times c)+(\beta\times\delta\times c)=(\alpha\times\gamma\times a)+(\alpha\times\delta\times c)+(\beta\times\gamma\times b)+(\beta\times\delta\times c)=(\alpha\times((\gamma\times a)+(\delta\times c)))+(\beta\times((\gamma\times b)+(\delta\times c)))=(a\otimes_{\gamma,\delta}c)\oplus_{\alpha,\beta}(b\otimes_{\gamma,\delta}c)$, аналогично $a\otimes_{\gamma,\delta}(b\oplus_{\alpha,\beta}c)=(a\otimes_{\gamma,\delta}b)\oplus_{\alpha,\beta}(a\otimes_{\gamma,\delta}c)$.

Если $\alpha\times\alpha=\alpha,\alpha\times\beta=\beta\times\alpha,\beta\times\beta=\beta,\gamma\times\gamma=\gamma,\gamma\times\delta=\delta\times\gamma,\delta\times\delta=\delta$, то операции $a\oplus_{\alpha,\beta}b$ и $a\otimes_{\gamma,\delta}b$ ассоциативны, $(a\oplus_{\alpha,\beta}b)\oplus_{\alpha,\beta}c=(\alpha\times((\alpha\times a)+(\beta\times b)))+(\beta\times c)=(\alpha\times\alpha\times a)+(\alpha\times\beta\times b)+(\beta\times c)=(\alpha\times a)+(\beta\times\alpha\times b)+(\beta\times\beta\times c)=(\alpha\times a)+(\beta\times((\alpha\times b+(\beta\times c)))=a\oplus_{\alpha,\beta}(b\oplus_{\alpha,\beta}c)$, аналогично $(a\otimes_{\gamma,\delta}b)\otimes_{\gamma,\delta}c=a\otimes_{\gamma,\delta}(b\otimes_{\gamma,\delta}c)$, и идемпотентификация $I(SR_1)_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ является идемпотентным полукольцом.

Изложенное верно, в частности, для $I(SR_1)_{\alpha,\beta,1,1}$, когда $a\otimes_{1,1}b=a\otimes b=a+b$, как и при используемой в идемпотентной математике [1] идемпотентификации поля $\mathbf{R}$ действительных чисел, где вместо $a\oplus_{\alpha,\beta}b$ используется идемпотентная операция $a\oplus b=\max(a,b)$, что приводит к идемпотентному полуполю $\mathbf{R}_{\max}$.

Литература

1. Litvinov G.L., Maslov V.P. (eds) Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. Providence: AMS, 2005. 370 p.

ТЕНЗОРНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОКРЕСТНОСТНЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Блюмин С.Л., Шмырин А.М. (Липецк)
slb@stu.lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Окрестностная полилинейная (m-линейная $(n_1+\cdots+n_m)$ — аргументная) система определяется следующим образом[1]:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}\in O_{u_i}[a]} w_i[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}]\cdot u_i[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}]+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}\in O_{u_i}[a]}\cdots\sum_{\alpha_{n_1+1},\ldots,\alpha_{n_1+n_2}\in O_{\gamma_i}[a]} w_i[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1+n_2}]\cdot$$

$$u_i[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}]\cdot\gamma_i[\alpha_{n_1+1},\ldots,\alpha_{n_1+n_2}]+\ldots+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}\in O_{u_i}[a]}\cdots$$

$$\cdots\sum_{\alpha_{n_1+\cdots+n_{m-1}+1},\ldots,\alpha_{n_1+\cdots+n_m}\in O_{\gamma_i}[a]} w_i[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1+\cdots+n_m}]\cdot$$

$$\cdot u_i[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}]\cdot\ldots\cdot\gamma_i[\alpha_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1},\ldots,\alpha_{n_1+\ldots+n_m}]=0. \qquad (1)$$

Решению задачи параметрической идентификации полилинейных окрестностных систем предшествует решение задачи тензорной линеаризации, при которой m-линейный член окрестностной системы преобразовывается к виду

$$w_i[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1+\cdots+n_m}]u_i[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}]\ldots\gamma_i[\alpha_{n_1+\cdots+n_{m-1}+1},\ldots,$$
$$\alpha_{n_1+\cdots+n_m}]=w_i[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1+\cdots+n_m}]u_i[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}]\otimes\ldots\otimes$$
$$\otimes\gamma_i[\alpha_{n_1+..+n_{m-1}+1},\ldots,\alpha_{n_1+..+n_m}]=\sum_{k_{n_1+..+n_{m-1}+1}=1}^{n_m}\ldots\sum_{k_{n_1+..+n_m}=1}^{n_m}$$
$$(\ldots(\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_{n_1}=1}^{n_1}w^{(k_1\ldots k_{n_1+\cdots+n_m})}\cdot\cdot[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1+\cdots+n_m}]\cdot$$
$$\cdot u^{(k_1)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}])\ldots)\cdot\gamma^{(k_m)}[\alpha_{n_1+\cdots+n_{m-1}+1},\ldots,\alpha_{n_1+\cdots+n_m}]. \qquad (2)$$

Полилинейная система представляется в координатной форме.

Литература

1. Блюмин С.Л. Окрестностные системы / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин. - Липецк: ЛЭГИ,2005. -132 с.

ОЦЕНКИ РАССТОЯНИЙ ДО ПРЯМОЙ ОТ ПОЛЮСОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПО НОРМЕ L_p НА ЭТОЙ ПРЯМОЙ[1]

Бородин П.А. (Москва)

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида

$$r_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-a_k}=\frac{P'(z)}{P(z)},$$

где $\{a_k\}_{k=1}^n\subset\mathbf{C}$, $P(z)=(z-a_1)\cdot\dots\cdot(z-a_n)$.

В работе [1] В.И. Данченко поставил задачу об оценке снизу величины

$$d(n,p)=\inf\left\{\min|\operatorname{Im}a_k|:\|r_n\|_{L_p(\mathbf{R})}\leqslant 1\right\},$$

где $1<p<\infty$, а $\mathbf{R}$ — действительная ось комплексной плоскости. Сам В.И. Данченко получил оценку

$$d(n,p)\geqslant\frac{1}{p}\left(\sin\frac{\pi}{p}\right)^q 2^{q-1},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00962).

справедливую при любых $1 < p < \infty$ и натуральном n.

Теорема. *Для любых* $1 < p < \infty$ *и* $n \in \mathbf{N}$ *имеет место неравенство*

$$d(n,p) \geqslant \frac{2^{2q-2}\pi^{q-1}}{p^q} \cdot B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right),$$

где $B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dt$ *– бета-функция Эйлера.*

Эта оценка лучше приведенной выше оценки В.И. Данченко при всех p, а при $p = 2$ она точна: $d(n,2) = \pi$ при любом n.

Из такого рода оценок следует, например, что наипростейшие дроби не плотны в пространстве $L_p(\mathbf{R})$ ни при каком $p \in (1;\infty)$.

Литература

1. *Данченко В.И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных до прямых и окружностей // Матем.сб. 1994. **185**, № 8. 63–80.

ОБ ОЦЕНКАХ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДА ДИРИХЛЕ

Брайчев Г.Г., Катаева В.В. (Москва)

Braichev@mail.ru

Пусть λ_n — возрастающая к бесконечности последовательность положительных чисел, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z}$ — абсолютно сходящийся во всей плоскости ряд Дирихле, не сводящийся к экспоненциальному полиному, $\mu_f(x) = \max_n\{|f_n|e^{\lambda_n x}\}$ — максимальный член. Пусть далее F_n — регуляризация Ньютона–Адамара коэффициентов ряда f_n (т.е. $F_n = e^{-G(\lambda_n)}$, где $y = G(x)$, $x \in R$ — уравнение границы выпуклой оболочки точек $(\lambda_n; -ln|f_n|)$.

Индекс лакунарности последовательности λ_n (см. [1]) определяется равенством $l(\lambda_n) := \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$.Если $l(\lambda_n) = 1$, последовательность λ_n называется слабо лакунарной.

Как обычно, $\tilde{\varphi}(\xi) = \sup_x\{x\xi - \varphi(x)\}$ — сопряженная по Юнгу к $\varphi(x)$ функция.

Теорема._Пусть функция_ $\varphi(x)$ _удовлетворяет условию_ $x = o(\varphi(x))$, $x \to \infty$.

A) Условие $\ln\mu(x) \leqslant \varphi(x)$ *для* $x \geqslant x_0$, *выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\ln|f_n| \leqslant -\tilde{\varphi}(\lambda_n)$ *при* $n \geqslant n_0$, *или когда* $\ln F_n \leqslant -\tilde{\varphi}(\lambda_n)$ *при* $n \geqslant n_0$

B) Если $\ln\mu(x) \geqslant \varphi(x)$ *для* $x \geqslant x_0$ *то* $\ln F_n \geqslant -\tilde{\varphi}(\lambda_n)$ *при* $n \geqslant n_0$

C) Обратно, из условия $\ln F_n \geqslant -\tilde{\varphi}(\lambda_n)$, $n \geqslant n_0$, *следует условие* $\ln \mu(x) \geqslant \varphi(x)(1 - o(1))$,

если выполнено одно из следующих условий:

а) $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant h < \infty$, *а функция* $\varphi(x)$ *выпукла,*

б) последовательность λ_n *слабо лакунарна, а функция* $\varphi(x)$ — *дважды дифференцируема и логарифмически выпукла,*

в) последовательность λ_n *слабо лакунарна, а функция* $\varphi(x)$ — *дважды дифференцируема, а выпуклыми являются функции* $\varphi'(x)$ *и* $\varphi^{\gamma}(x)$ *при некотором* $\gamma \in (0;1)$.

Замечание. Утверждение C теоремы уточняет некоторые оценки из [2]. Это утверждение может оказаться неверным, если отбросить условие слабой лакунарности последовательности λ_n.

Литература

[1] Брайчев Г.Г. Индекс лакунарности. Мат. заметки. - 1993.- т. 53.- в. 6.- с. 3–10.

[2] Сумык О.Н., Шеремета М.Н. Оценки максимального члена ряда Дирихле снизу. Изв. ВУЗов. Математика. 2001.- № 4(467).

О ПРОСТРАНСТВЕ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОТНОШЕНИЯ, ПОРОЖДЕННОГО ВЫРАЖЕНИЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Брук В.М. (Саратов)

bruk@san.ru

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство; $A(t)$ - сильно измеримая на отрезке $[0, b]$ операторная функция, значениями которой являются ограниченные неотрицательные операторы в H. Предполагается, что $\|A(t)\|$ суммируема на $[0, b]$. Введем обозначения: $\mathrm{B} = L_2(H, A(t); 0, b)$; $l[y] = -y'' + A_1 y$, где $A_1 = A_1^*$ - положительно определенный оператор в H; $A_1^+ : H \to H_{-1}$ - расширение по непрерывности $A_1 : H_{+1} \to H$; $l^+[y] = -y'' + A_1^+ y$; $G(t) = \ker A(t)$; $H(t) = H \ominus G(t)$; $A_0(t)$ — сужение $A(t)$ на $H(t)$; $\tilde{A}_0(t)$ - расширение по непрерывности $A_0(t)$ на $H_{-\alpha}(t)$ $(\alpha > 0)$; $\tilde{A}(t)$ — оператор, определенный на $H_{-\alpha}(t) \oplus G(t)$, равный $\tilde{A}_0(t)$ на $H_{-\alpha}(t)$ и нулю на $G(t)$ ($\{H_\tau\}$, $\{H_\xi(t)\}$ -гильбертовы шкалы пространств, порожденные операторами A_1 и $A_0^{-1}(t)$ соответственно). Пусть D' - множество функций $y(t) \in \mathrm{B}$ со свойствами: $y(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0, b]$ в H и $y'(t)$ абсолютно непрерывна в H_{-1}; $l^+[y](t) \in H_{1/2}(t)$ при почти всех t и $\tilde{A}_0^{-1}(t) l^+[y] \in \mathrm{B}$. Поставив в соответствие каждой функции $y \in D'$ функцию $\tilde{A}_0^{-1}(t)l^+[y]$, получим линейное отношение $L' \subset \mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$, замыкание которого обозначим L.

Пусть $U(t) = (e^{-\sqrt{A_1^+}t}, e^{\sqrt{A_1^+}(t-b)})$ — операторная однострочная матрица; Q_0 - множество таких $x \in H \oplus H$, что $A(t)U(t)x=0$ почти всюду; $Q = (H \oplus H) \ominus Q_0$; Q_- - пополнение Q по норме $\|A(t)U(t)x\|_{\mathrm{B}}$; Q_+ - позитивное пространство относительно Q, Q_-. Отношение L состоит из таких пар $\{y, f\}$, что $y = U(t)c + F(t)$, где $c \in Q_-$, $F(t) = (1/2)A_1^{-1/2}\int_0^b e^{-\sqrt{A_1}|t-s|}\tilde{A}(s)f(s)ds$. Для пары $\{y, f\} \in L$ пара граничных значений $\{Y, Y'\} \in Q_- \oplus Q_+$ определяется по формулам $Y = (1/2)c + \{F(0), F(b)\}$, $Y' = \{F'(0), -F'(b)\}$. Положим $\Gamma\{y, f\} = \{Y, Y'\}$.

Теорема. *Область значений* Γ *совпадает с* $Q_- \oplus Q_+$ *и справедлива "формула Грина":* $(f_1, y_2)_{\mathrm{B}} - (y_1, f_2)_{\mathrm{B}} = (Y_1', Y_2) - (Y_1, Y_2')$, *где* $\{y_i, f_i\} \in L$, $\Gamma\{y_i, f_i\} = \{Y_i, Y_i'\}$ $(i = 1, 2)$.

Таким образом, тройка (Q_-, Q_+, Γ) является пространством граничных значений в смысле работ В.М.Брука, А.Н.Кочубея (см. [1]). Это позволяет получить описание различных классов сужений L.

Литература

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Наукова Думка, Киев, 1984.

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩИХ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ ЭКСПОНЕНТ

Буланов А.П. (Обнинск)

Рассмотрим систему из $l+m$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_l, y_1, y_2, \ldots, y_m), i = 1, 2, \ldots, l, \\ \dot{y}_k &= \psi_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_m,), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{1}$$

причем φ_i и ψ_k есть рациональные функции вида

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{P_{l+m,i}(t, x_1, x_2, \ldots x_l, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{1 - t^m \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_m \cdot y_1, y_2, \ldots, y_m}, \\ \psi_k &= \frac{P_{m,k}(t, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{1 - t^m \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_m \cdot y_1, y_2, \ldots, y_m}, \end{aligned} \tag{2}$$

где$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ отличны от нуля. Степени полиномов $P_{l+m,i}$ не выше $l+m$ по независимой переменной t, не выше l по переменным x_j, $j = 1, 2, \ldots, l$ и не выше m по переменным y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$;

а степени полиномов $P_{m,k}$ (как и знаменателей рациональных функций (2)) не выше m по независимой переменной t и по переменным y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Решением системы (1) может быть система из $l + m$ бесконечных цепных экспонент с последовательностью коэффициентов$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида

$$f(t) = e^{a_1 \cdot t \cdot e^{a_2 \cdot t \cdot e^{\cdots}}} = \{def\} =< e^t; a_1, a_2, \ldots >=$$

$$=< e^t; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \lambda_1, \lambda_2, \ldots >, \qquad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$,–некоторые числа, отличные от нуля.

У каждой такой экспоненты последовательность коэффициентов, начиная с некоторого номера, является (как видно) периодической (циклической) последовательностью. В связи с этим назовем такие бесконечные экспоненты циклическими или периодическими периода m с произвольными первыми коэффициентами.

По теореме 1 работы [3] (см. там стр. 5 и стр. 9) сходимость цепных экспонент (3) гарантирована в интервале $(-\frac{1}{e \cdot \overline{\lambda}}, \frac{1}{e \cdot \overline{\lambda}})$, а на комплексной плоскости в круге $\{z : |z| < \frac{1}{e \cdot \overline{\lambda}}\}$, где $\overline{\lambda} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k|$. Фигурирующая в ряде Тейлора $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot H^{(n)} \cdot z^n$ форма $H^{(n)}$ степени n от коэффициентов $\lambda_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ с одним лишь произвольным первым коэффициентом дается в работе [4] (стр.25 формула (6)). Есть работы (см.[1], [2]), в которых доказывается возможность продолжения функции, задаваемой циклической экспонентой, на неограниченную область, причем это продолжение единственно в классе непрерывно дифференцируемых функций и является предельной функцией последовательности цепных экспонент. В работе [1] доказательство таких утверждений опирается на лемму о функциях, имеющих отрицательную производную Шварца $(def : Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}(\frac{f''}{f'})^2)$, а в работе [2] при доказательстве существенно используются свойства рациональной функции вида (2).

В качестве примера приведем систему из 6 уравнений ($l = 3, m = 3$).

$$\dot{x}_1 = \alpha \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (1 - t^3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)^{-1} \cdot \left[1 + t \cdot \beta \cdot x_3 + t^2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot x_3 \cdot y_1 + \right.$$

$$+ t^3 \cdot (\beta \cdot \gamma \cdot x_3 - \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot y_3) \cdot \lambda_1 \cdot y_1 \cdot y_2 +$$

$$+t^4\beta\cdot(\gamma-\lambda_3)\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot x_3\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3\big], \tag{4}$$

$$\dot{x}_2=\beta\cdot x_2\cdot x_3\cdot(1-t^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3)^{-1}\cdot\big[1+t\cdot\gamma\cdot y_1+t^2\cdot\gamma\cdot\lambda_1\cdot y_1\cdot y_2+$$
$$+t^3\cdot(\gamma-\lambda_3)\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3\big], \tag{5}$$

$$\dot{x}_3=\gamma\cdot x_3\cdot y_1(1-t^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3)^{-1}\cdot\big[1+t\cdot\lambda_1\cdot y_2+t^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot y_2\cdot y_3\big], \tag{6}$$

$$\dot{y}_1=\lambda_1\cdot y_1\cdot y_2\cdot(1-t^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3)^{-1}\cdot\big[1+t\cdot\lambda_2\cdot y_3+t^2\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot y_3\cdot y_1\big], \tag{7}$$

$$\dot{y}_2=\lambda_2\cdot y_2\cdot y_3\cdot(1-t^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3)^{-1}\cdot\big[1+t\cdot\lambda_3\cdot y_1+t^2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_1\cdot y_1\cdot y_2\big], \tag{8}$$

$$\dot{y}_3=\lambda_3\cdot y_3\cdot y_1\cdot(1-t^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3)^{-1}\cdot\big[1+t\cdot\lambda_1\cdot y_2+t^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot y_2\cdot y_3\big], \tag{9}$$

с начальными условиями $x_k(0)=1, \quad k=1,2,3; \qquad y_i(0)=1, \quad i=1,2,3$. Эта система имеет решение, представимое системой циклических экспонент

$$x_1(t)=\langle e^t;\alpha,\beta,\gamma,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\ldots\rangle,$$
$$x_2(t)=\langle e^t;\beta,\gamma,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\ldots\rangle,$$
$$x_3(t)=\langle e^t;\gamma,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\ldots\rangle,$$
$$y_1(t)=\langle e^t;\lambda_1\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\ldots\rangle,$$
$$y_2(t)=\langle e^t;\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\ldots\rangle,$$
$$y_3(t)=\langle e^t;\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2,\ldots\rangle.$$

В случае, если γ не будет произвольным, а будет фиксировано $\gamma=\lambda_3$, то третье уравнение (6) и шестое (9) тождественны и будет равенство решений $x_3=y_3$. Если, к тому же, окажется еще $\beta=\lambda_2$, то в этой системе будет лишь четыре уравнения. Если же произвольных первых коэффициентов вовсе нет (и окажется: $\alpha=\lambda_1,\beta=\lambda_2,\gamma=\lambda_3$), то система будет из трех уравнений такого сорта, о котором шла речь в работе [3] (см. стр. 8 и 9).

Литература

1. Baker I.N.,Rippon P.J. Iterating exponential functions with cyclic exponents//Math. Proc. Camb. Soc.-1989.-105.-P. 357-375.

2. Амбарцумян Г.А., Буробин А.В. Продолжение функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности с чередующимися

показателями.//Математические заметки.-2003.- Т.73, выпуск 2.- С. 163-172.

3. Буланов А.П. Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Матем. сб. Т.192.- №11.- 2001.- С. 3-34.

4. Буланов А.П. Форма периодической цепной экспоненты с произвольным первым коэффициентом. Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань. – 2005. – Т.30. – С. 23–26.

ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ[1]

Булгаков А.И., Полянский А.И. (Тамбов)

E-mail: aib@tsu.tmb.ru, uaa@nnn.tstu.ru

Пусть $R^{n\times n}$– n - мерное пространство вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $C^n[a,b]$ ($D^n[a,b]$) – пространство непрерывных (абсолютно непрерывных) функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]} = \max\{|x(t)| \ : \ t\in[a,b]\}$ ($\|x\|_{D^n[a,b]} = |x(a)| + \int_a^b |\dot{x}(s)|\,ds$). Пусть $\mathcal{U}\subset[a,b]$ – измеримое множество, $\mu(\mathcal{U})>0$ (μ - мера Лебега), обозначим $L^n(\mathcal{U})$ – пространство суммируемых функций $x:\mathcal{U}\to R^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)|\,ds$. Далее, пусть $Cl(L^n[a,b])$ – множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $L^n[a,b]$. По аналогии с [1,2], если $\Phi\subset L^n[a,b]$, то через $\overline{\mathrm{sw}}\Phi$ обозначим замкнутую выпуклую по переключению оболочку множества Φ.

Рассмотрим краевую задачу для функционально – дифференциального включения

$$\mathcal{L}x\in\overline{\mathrm{sw}}\Phi(x), \quad lx\in\varphi(x), \tag{1}$$

где $\mathcal{L}:D^n[a,b]\to L^n[a,b]$ – линейный непрерывный оператор, $l:D^n[a,b]\to R^n$ – линейный непрерывный вектор - функционал, $\Phi:C^n[a,b]\to Cl(L^n[a,b])$, $\varphi:C^n[a,b]\to \mathrm{comp}[R^n]$ – непрерывные отображения.

По аналогии с [1], решение задачи (1) назовем *обобщенным.* В докладе получены оценки близости обобщенных решений задачи (1) к наперед заданной непрерывной функции, аналогичные оценкам в [2].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04 - 01 - 00324) и Норвежского фонда NUFU (research programme PRO 06/02).

Литература

1. *Булгаков А.И., Полянский А.И.* Обобщенные квазирешения краевых задач функционально – дифференциальных включений. // XI Научн. конф. ТГТУ. Фундамент. и прикл. исслед., инновац. технологии, проф. образование. Часть I. Сборник трудов. Тамбов. Изд - во ТГТУ. 2006. С. 28 - 32.

2. *Булгаков А.И., Панасенко Е.А.* Квазилинейные краевые задачи для функционально – дифференциальных включений. // Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. 2(36). С. 13 - 16.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ ИЗ ДВУХ РЕБЕР, СОДЕРЖАЩЕМ ЦИКЛ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж), Хромов А.П. (Саратов)

bums@kma.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Пусть Г — связный геометрический граф, состоящий из двух ребер, одно из которых образует цикл.

Рассмотрим на Г функционально-дифференциальный оператор, который в соответствии с векторным подходом [1] имеет вид $Ly = (l_1(y_1), l_2(y_2))^T$, $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $y_1(0) = y_1(1) = y_2(0)$, где

$$l_k(y_k) = \alpha_k y_k'(x) + \beta_k y_k'(1-x) + p_{k1}(x)y_k(x) + p_{k2}(x)y_k(1-x),$$

$x \in [0,1]$, $\alpha_k^2 \neq \beta_k^2$, $\beta_k \neq 0$, $k = 1,2$, $p_{ij}(x) \in C^1[0,1]$. Операторы $l_k(y_k)$ замечательны тем, что квадрат их частей при производных есть $y_k''(x)$, а сами они сводятся к операторам Дирака.

Теорема. *Для любой вектор-функции* $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_i(x) \in L[0,1]$, *и любого* $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \Sigma_r(f,x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье функции* $f(x)$ *по собственным и присоединенным функциям оператора* L *для собственных чисел* λ_k *таких, что* $|\lambda_k| < r$; $\Sigma_r(f,x) = (\sigma_{r_1}(f_1,x), \sigma_{r_2}(f_2,x))^T$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 04-01-00049, № 06-01-00003, № 04-01-00697

$r_j = r/\sqrt{\beta_j^2 - \alpha_j^2}$, *и* $\sigma_{r_j}(f_j, x)$ — *частичная сумма ряда Фурье функции* f_j *по тригонометрической системе* $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *для тех* k, *для которых* $|2\pi k| < r_j$.

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах// М.:Физматлит, 2004. - 272 с.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ-ЦИКЛЕ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж), Хромов А.П. (Саратов)

bums@kma.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривается связный геометрический граф Г, состоящий из трех ребер, образующих цикл.

Пусть в соответствии с векторным подходом [1], на Г задан следующий функционально-дифференциальный оператор:

$$Ly = (l_1(y_1), l_2(y_2), l_3(y_3))^T, \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0),$$

где $l_k(y_k) = \alpha_k y_k'(x) + \beta_k y_k'(1-x) + p_{k1}(x)y_k(x) + p_{k2}(x)y_k(1-x)$, $x \in [0,1]$, $\alpha_k^2 \neq \beta_k^2$, $\beta_k \neq 0$, $k = 1,2$; $\beta_3 = 0$, $p_{32}(x) \equiv 0$, $\alpha_3 = 1$, $p_{ij}(x) \in C^1[0,1]$ (T — знак транспонирования).

Теорема. *Для любой вектор-функции* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$, $f_i(x) \in L[0,1]$, *и любого* $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \Sigma_r(f,x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — *частичная сумма ряда Фурье функции* $f(x)$ *по собственным и присоединенным функциям оператора* L *для собственных чисел* λ_k *таких, что* $|\lambda_k| < r$; $\Sigma_r(f,x) = (\sigma_{r_1}(f_1,x), \sigma_{r_2}(f_2,x), \sigma_{r_3}(f_3,x))^T$, $r_j = r/\sqrt{\beta_j^2 - \alpha_j^2}$, $(j = 1,2)$, $r_3 = r$, *а* $\sigma_{r_j}(f_j,x)$ — *частичная сумма ряда Фурье функции* f_j *по тригонометрической системе* $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, *включающая слагаемые, для которых* $|2\pi k| < r_j$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 04-01-00049, № 06-01-00003, № 04-01-00697

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах// М.:Физматлит, 2004. - 272 с.

ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Буробин А.В. (Обнинск)

E-mail: burobin@iate.obninsk.ru

Рассматривается кинетическое уравнение больцмановского типа (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}f + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}f = St(f,f), \tag{1}$$

$$t > 0, \quad \mathbf{v} \in R^n, \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (n \geqslant 1),$$

с начальным условием

$$f|_{t=0} = f_0(\mathbf{v},\mathbf{x}). \tag{2}$$

Изучается нелокальная разрешимость задачи Коши (1), (2) без предположения о суммируемости начальной функции $f_0(\mathbf{v},\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$ в R^n. Исследуются локальные законы сохранения уравнения, связанные с инвариантами столкновений оператора St.

Литература

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.

О ПОСТРОЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ, СОПРЯЖЕННОЙ К ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С АЛГЕБРОИДНЫМ ПРОФИЛЕМ

Валюхов С.Г., Ковалева М.И., Костин В.А., Сапронов Ю.И. (Воронеж)

Многофазные турбовинтовые насосные станции (МТНС) активно создаются и используются в последние десятилетия в мировой инженерной практике. Они успешно эксплуатируются нефтегазодобывающими компаниями, в том числе и российскими. Отличительными признаками турбовинтового насоса являются внешняя герметичность и симметричность схемы силовых нагрузок на главный рабочий орган — винтовую пару. Минимальные зазоры позволяют такому насосу устойчиво работать в разных режимах. Важнейший элемент конструирования МТНС — оптимизация шестеренчатого зацепления пары винтовых поверхностей [1]. Кинематические характеристики насосов определяются геометрическими свойствами и особенностями поперечных сечений винтов. Их профили задаются в виде замкнутых контуров (гладких или кусочно гладких) посредством профильных функций (например, при решении задачи построения профиля, сопряженного к заданному). Кинематику винтового насоса можно исследовать, опираясь на геометрию гладких винтовых поверхностей, основу которой составляет анализ однопараметрических семейств гладких плоских кривых и, следовательно, теория гладких отображений двумерных торов в координатную плоскость. Имеется трактовка огибающих в виде дискриминантных кривых.

Пусть l — линия нулевого уровня гладкой функции $V(z)$, $z \in \mathbf{C}$. После "прокручивания" l вокруг базовой окружности (см. [1]) получим t–семейство кривых в виде нулевых уровней функций из семейства (деформации)

$$V(z,t) = V(e^{-2it}z - 2e^{-it}), \ z \in \mathbf{C}. \tag{1}$$

Через $\mathcal{L}$ обозначим дискриминантную кривую z–семейства (1). Непосредственной проверкой легко устанавливается следующее утверждение: *если гладкая функция* $V(z)$, $z \in \mathbf{C}$, *обладает поворотной симметрией (инвариантна относительно поворота плоскости* $z \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{n}} z$), то соответствующая z–семейству (1) дискриминантная кривая $\mathcal{L}$ также обладает поворотной симметрией. Доклад посвящен изучению особенностей дискриминантных кривых семейства (1) и их компьютерной визуализации в случае полиномиальной функции V.

Литература

1. Валюхов С. Г., Костин В. А., Сапронов Ю. И., Семенов С. М. Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей. - Воронеж: ВорГУ. 2005. - 177 с.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ: ЭВОЛЮЦИЯ КОНЦЕПЦИИ ЭЙЛЕРА

Ванько В.И. (Москва)

vvanko@mail.ru

Приводится краткий обзор исследований продольного изгиба стержней от Эйлера (1744 г.), [1], до Шэнли (1946 г.), [2] .

На примере поведения стержневой модели Шэнли, нагружаемой продольной силой, демонстрируются особенности различных подходов к означенной проблеме в рамках концепции Эйлера (бифуркация): Энгессер, Ясинский, Карман, Шэнли, Работнов, Ильюшин.

При учете эффекта ползучести материала конструкции существуют различные критерии "потери устойчивости"в терминах критического времени (время жизни конструкции). В зависимости от уровня нагружения критическое время можно трактовать как: 1) момент, когда прогибы стремятся к бесконечности; 2) время, когда скорость прогиба интенсивно возрастает при конечном прогибе; 3) момент, когда приращение прогиба (при конечном значении прогиба) становится отрицательным, что говорит о нарушении равновесия квазистатического процесса [3].

Показано, что процесс продольного изгиба в условиях ползучести при значении силы, равном касательно-модульной нагрузке, неустойчив по отношению к вариациям внешней силы: при отрицательном приращении нагрузки критическое время трактуется в смысле стремления прогиба к бесконечности; при положительном приращении — критическое время есть время, когда приращение прогиба меняет знак при конечном значении прогиба.

Литература

1. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума.- М.-Л.: ГТТИ.- 1934.

2. Shanley F. The column paradox //Journal of Aeronautical Sci. - 1946, N 12.

3. Ванько В.И О критериях выпучивания в условиях ползучести //Ж-л прикладной механики и технической физики.- 1965, N 1.

МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СО ВТОРЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ[1]

Васильева А.А. (Москва)

vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть M_1, M_2 — подмножества метрического пространства (X, ρ). Обозначим

$$d(M_1, M_2) = \sup_{x\in M_1} \inf_{y\in M_2} \rho(x, y),$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-00160-а.

$$h(M_1, M_2) = \max(d(M_1, M_2), d(M_2, M_1)).$$

Пусть X_1, X_2 — банаховы пространства, $A \subset X_1$ — выпуклое подмножество. Отображение $F : A \to 2^{X_2}$ удовлетворяет условию (1) (соответственно (2)), если оно имеет замкнутый график и существуют $c > 0$ и $\alpha > 1$ такие, что для любых различных $x, y \in A$ выполнено

$$d\left(F(x) + F(y), 2F\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leqslant c\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1}^{\alpha} \tag{1}$$

или соответственно

$$h\left(F(x) + F(y), 2F\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leqslant c\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1}^{\alpha}. \tag{2}$$

Теорема 1 *Пусть множество A не является одноточечным и отображение F удовлетворяет условию* (1). *Тогда для любого $x \in A$ множество $F(x)$ выпукло.*

Теорема 2 *Пусть X — банахово пространство, $F : [a, b] \to 2^X$ равномерно ограничено и удовлетворяет условию* (1). *Тогда для любых $a < \tilde{a} < \tilde{b} < b$ отображение $F|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}$ липшицево в хаусдорфовой метрике.*

Теорема 3 *Пусть X — банахово пространство, $F : [a, b] \to 2^X$ равномерно ограниченное отображение, удовлетворяющее условию* (2). *Тогда оно липшицево в хаусдорфовой метрике с константой* $\frac{h(F(a), F(b))}{b-a} + c(b-a)^{\alpha-1}\frac{1}{2^{\alpha-1}-1}$.

Теорема 4 *Пусть K — d-мерный куб, X — банахово пространство, $F : K \to 2^X$ удовлетворяет условию* (1). *Тогда существует липшицева выборка из отображения F.*

БАЗИСЫ ИЗ ЧАСТЕЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Велиев С.Г.

Пусть $\nu(t)$ некоторый вес на $(-\pi, \pi)$ и

$$\|f\|_{p,\nu} \equiv \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, \nu(t) dt\right)^{1/p}.$$

Обозначим через H_p^+; ${}_mH_p^-$ – обычные классы Харди аналитических функций внутри и вне единичного круга, соответственно, где m-порядок главной части разложения в ряд Лорана на бесконечности функции из H_p^-. Пусть L_p^+ и ${}_mL_p^-$ сужения функций из H_p^+; и ${}_mH_p^-$, соответственно, на единичный круг. Введем

$$L^+_{p,\nu^+} \equiv \left\{ f \in L_1^+ : \|f\|_{p,\nu} < +\infty \right\},$$

$${}_mL_p^- \equiv \left\{ f \in {}_mL_1^- : \|f\|_{p,\nu^-} < +\infty \right\},$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\nu^{\pm}(t) \equiv \prod\limits_{k=0}^{N^{\pm}} \left|t - t_k^{\pm}\right|^{\alpha_i^{\pm}}$, *где* $-\pi \leqslant t_0^{\pm} < t_1^{\pm} < \ldots < t_{N^{\pm}}^{\pm} < \pi$. *Тогда, если выполнены неравенства* $-1 < \alpha_k^{\pm} < p-1$, $\forall k = \overline{0, N^{\pm}}$, *то система* $\left\{e^{int}\right\}_{n\geqslant 0}$ $\left(\left\{e^{-int}\right\}_{n\geqslant m}\right)$ *образует базис в* L^+_{p,ν^+} $\left(b_m L^-_{p,\nu^-}\right)$, *где* $p \in (1, +\infty)$*-некоторое число.*

ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Виноградова П.В. (Хабаровск)

vpolina17@hotmail.com

В R^3 рассмотрим область D, ограниченную поверхностью $x^2 + y^2 = \Phi^2(t)$ и плоскостями $t = 0$, $t = T$, где $\Phi(t)$ - непрерывная функция, такая, что $\Phi(t) \geqslant r > 0$, $T < \infty$.

В области D исследуем начально - краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{2} b_i(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \tag{1}$$

$$+c(x_1, x_2, t)u = f(x_1, x_2, t),$$

$$u(x_1, x_2, t) = 0 \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 = \Phi^2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = 0 \qquad \text{при} \qquad x_1^2 + x_2^2 = \Phi^2(0). \tag{3}$$

Для задачи (1)-(3) изучается проекционно-разностный метод. В качестве координатных функций выбираются собственные функции следующей спектральной задачи в единичном круге S

$$-\Delta e(\xi,\eta) = \lambda e(\xi,\eta), \quad e(\xi,\eta)|_{\partial S} = 0.$$

Данный проекционно-разностный метод приводит на каждом временном слое к решению системы линейных алгебраических уравнений. При определенных условиях гладкости входных данных получены оценки скорости сходимости приближенных решений к точному решению порядка $O(\tau^2 + n^{-1})$. Данная работа является непосредственным продолжением [1]-[3].

Литература

1. Виноградова П.В., Зарубин А.Г. О методе Галеркина для квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрической области // Дальневост. мат. журнал. 2002. Т.3, N 1. С. 3-17.

2. Виноградова П.В., Зарубин А.Г. О скорости сходимости метода Ротэ для параболического уравнения в нецилиндрической области // Дальневост. мат. журнал. 2004. Т.5, N 1. С. 5-11.

3. Виноградова П.В. Об одной трехслойной схеме для параболического уравнения в области с подвижной границей // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т.9. N 2(26). С. 12-19.

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДИЗАЙНЕРОВ: ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Воронкина Н.А. (Минск)

E-mail:natalivoronkina@mail.ru

Одной из тенденций XXI века является глобальная информатизация общества, характеризующаяся повышенным интересом к проблемам качества образования и активным использованием информационных технологий в процессе обучения.

В настоящее время компьютер на лекционных и лабораторных занятиях используется достаточно широко и разнообразно. Это и чтение лекций с использованием средств мультимедиа (создание компьютерных презентаций в программе Power Point), и проведение лабораторных занятий с применением различных программных продуктов (например, пакета программ Microsoft Office - MS Word, MS Excel, MS Access и др.). Практические занятия же по математике проводятся в основном традиционным способом "мел-доска-ручка-тетрадь"[1].

Хочется очертить ряд проблем, которые, на наш взгляд, кажутся наиболее актуальными при преподавании дисциплины "Основы высшей математики читаемой для специальности "Дизайн"на гуманитарном факультете БГУ:

1) разноуровневость студентов (разный уровень знаний, умений и навыков, с которыми студенты поступают на первый курс);

2) недостаток часов, отводимых на практические занятия;

3) отсутствие понимания у студентов значимости данной дисциплины для их профессиональной подготовки, и, как следствие, отсутствие положительной мотивации.

На наш взгляд, решение третьей проблемы возможно при использовании в учебном процессе интегрированного курса математики, ориентированного на использование компьютерных информационных технологий в профессиональной деятельности будущего дизайнера.

Литература

1. Самодуров А.А., Воронкина Н.А. Аналитическое и компьютерное решение дифференциальных и разностных уравнений Ферхюльста // Материалы междун. науч. конф. "Информатизация обучения математике и информатике: педагогические аспекты 25-28 октября 2006 года, Минск, Беларусь. - Мн.: БГУ, 2006, с.406-411.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТИТОВА-ГАЛАКТИОНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Вязьмина Е.А. (Москва)
vyazmina@list.ru

В настоящее время наиболее распространенными и эффективными методами, применяемыми для поиска решений нелинейных уравнений математической физики, являются методы теории групп [1] и обобщенного и функционального разделения переменных [2]. Одним из методов разделения переменных является метод Титова-Галактионова.

Рассмотрим нелинейное уравнение фильтрации, где коэффициент фильтрации является функцией градиента концентрации дисперсной фазы в фильтруемой суспензии

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(w'_x)w''_{xx}, \tag{1}$$

где w – неизвестная функция (концентрация дисперсной фазы в фильтруемой суспензии), t – время, x – координата, f – коэффициент фильтрации. Уравнения такого типа широко используются при описании микропористых систем.

Уравнение (1) может быть переписано в виде $w'_t = F[w]$, где $F[w] = f(w'_x)w''_{xx}$ – нелинейный оператор.

Строим двумерное линейное подпространство $L_2 = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$, для простоты рассмотрения в качестве первой базисной функций взята $\varphi_1(x) = 1$, а $\varphi_2(x)$ находится в процессе решения. Это пространство инвариантно относительно нелинейного оператора $F[w]$, что означает выполнение условия $F[C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)] = f_1(C_1, C_2)\varphi_1(x) + f_2(C_1, C_2)\varphi_2(x)$. В этом случае уравнение (1) имеет решение вида $w(x,t) = \psi_1(t)\varphi_1(x) + \psi_2(t)\varphi_2(x)$, где функции $\psi_i(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\psi'_i(t) = f_i(\psi_1, \psi_2)$, $i = 1, 2$, здесь штрих означает производную по времени, а функции f_i находятся из условия инвариантности пространства L_2.

Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М: Наука, 1978.

2. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of nonlinear partial differential equations. Boca Raton: Chapman and Hall / CRC Press, 2004.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ГАМБУРГЕРА НА ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ В C МЕТОДОМ ОРТОПРОЕКЦИИИ НА ПОДРОСТРАНСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Вячеславов Н.С., Мочалина Е.П. (Москва)

mochalina77@yandex.ru

Пусть μ — положительная борелевская мера с носителем $supp\ \mu \subset \mathbb{R}\backslash(-1;1)$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{supp\ \mu} \frac{d\mu(x)}{|x|-1} < \infty. \tag{1}$$

Функция $\hat{\mu}(z) = \int\limits_{supp\ \mu} \frac{d\mu(x)}{x-z}$, $z \in D = \{\zeta : |\zeta| \leqslant 1\}$ принадлежит пространству непрерывных функций в круге D и голоморфных внутри с равномерной нормой $\|\cdot\|$. Это же множество функций F можно рассматривать как предгильбертово пространство со скалярным произведением $(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} f(z)\overline{g(z)}|dz|$. Через F_n обозначим ортопроектор из F на каждое R_n — линейное подпространство рациональных функций с фиксированным знаменателем степени $\leqslant n$. Для каждой допустимой меры μ рассмотрим две последовательности $\Lambda_n(\hat{\mu})=\inf\limits_{R_n}\|\hat{\mu}-F_n(\hat{\mu})\|$ и $S_n(\mu)=\inf\limits_{\mathbf{a}}\int\limits_{supp\ \mu}\prod\limits_{j=1}^{n}\left|\frac{1-\bar{a}_j x}{x-a_j}\right|^2\frac{d\mu(x)}{|x|(|x|-1)}$, где $\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)$, $a_j\in int\ D$ при $j=1,\cdots,n$.

Теорема 1. *При условии* (1) *верны неравенства* $\Lambda_n(\hat{\mu})\leqslant S_n(\mu)$.

Пусть $\Omega_n(\mu)=\inf\limits_{t_1,\cdots,t_n\in(-1;0]}\int\limits_{supp\ \mu}\left|\frac{1-\bar{t}_j x}{x-t_j}\right|^2\frac{d\mu(x)}{|x|(|x|-1)}$.

Теорема 2. *Если фиксировано натуральное число n, а μ — положительная борелевская мера с носителем $supp\ \mu\subset(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ и удовлетворяющая условию* (1), *то* $\Lambda_n(\hat{\mu})\leqslant\Omega_n(\mu)$, $n\in\mathbf{N}$.

Теорема 3. *Если $supp\ \mu$ — компакт, $\mu'(x)\asymp|x-1|^\alpha|x+1|^\beta$ когда $x\to\pm1$ при некоторых положительных α и β, то $C_1\leqslant\Lambda_n(\hat{\mu})e^{\pi\sqrt{\sigma n}}\leqslant C_2$, $C_1\leqslant S_n(\mu)e^{\pi\sqrt{\sigma n}}\leqslant C_2$, для $n\in\mathbf{N}$, $\sigma=2/(1/\alpha+1/\beta)$ и не зависящих от n положительных величинах C_1, C_2.*

Литература

1. Пекарский А.А., Ровба Е.А. *Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций.* Матем. зам., 1999, Т. 65, выпуск 3, с. 362–368.

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМАМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Галатенко В.В. (Москва)
vvgalatenko@yahoo.com

Пусть $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность определенных на отрезке

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00192), программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ–4681.2006.1) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых (МК–4936.2006.1).

$[0,1]$ действительнозначных нормированных в L^2 неотрицательных липшицевых функций с равномерно ограниченными константами Липшица. Доопределим $\widetilde{\varphi}_n$ на дополнении $[0,1]$ нулем и положим $\varphi_n(x) = 2^{k/2}\widetilde{\varphi}(2^k x - j)$ $(n = 2^k + j,\ k = 0,1,2,\dots,\ j = 1,2,\dots,2^k - 1)$. Рассмотрим орторекурсивное разложение (см. [1]) определенной на отрезке $[0,1]$ непрерывной функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$: положим $r_0(x) = f(x)$; если определен остаток $r_n(x)$, положим $\hat{f}_{n+1} = \int_0^1 r_n(x)\varphi_{n+1}(x)\,dx$, $r_{n+1}(x) = r_n(x) - \hat{f}_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$.

Теорема *Орторекурсивное разложение $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n\varphi_n(x)$ непрерывной функции f по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на отрезке* $[0,1]$.

Легко видеть, что сходимость почти всюду в теореме нельзя заменить на сходимость всюду.

Систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно рассматривать как систему двоичных сжатий и сдвигов, порожденную несколькими липшицевыми функциями: в случае, когда все $\widetilde{\varphi}_n$ совпадают с фиксированной функцией $\widetilde{\varphi}$, система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в точности совпадает с системой двоичных сжатий и сдвигов, порожденной функцией $\widetilde{\varphi}$ (результаты о сходимости в L^2 орторекурсивных разложениях по системам сжатий и сдвигов, порожденных одной функцией, см. в [2]).

Литература

1. Лукашенко Т.П. *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестн. Моск. ун-та. Серия I. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 3–16.

2. Кудрявцев А.Ю. *Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов* // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы. — Саратов, Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2002. С. 106–108.

О СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА, МОДИФИЦИРУЮЩЕГО СЛОВАРЬ[1]

Галатенко В.В., Лившиц Е.Д. (Москва)

E-mail: vvgalatenko@yahoo.com, livshitz@rambler.ru

Пусть задано действительное сепарабельное гильбертово про-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00062 и 06-01-00160), программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-4681.2006.1) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых (МК-4936.2006.1).

странство H и множество D, являющееся подмножеством единичной сферы H и удовлетворяющее условию $\overline{\mathrm{span}} D = H$ (такие множества будем называть *словарями*). Рассматривается задача приближения заданного элемента $f \in H$ n-членными линейными комбинациями элементов словаря D. Для решения этой задачи в последние годы активно используются различные модификации жадных алгоритмов [1], в частности, модификации ортогонального жадного алгоритма (ОЖА) [2]. В настоящей работе мы рассматриваем новую разновидность ортогонального жадного алгоритма, модифицирующую словарь (ОЖАМ).

Пусть дано t, $0 < t \leqslant 1$. Положим $r_0 = r_0(f, D, t) = f$, $D_0 = D$. Если уже определены r_n и D_n, то выберем $g_{n+1} = g_{n+1}(f, D, t) \in D_n$, удовлетворяющий неравенству $|(r_n, g_{n+1})| \geqslant t \sup_{g \in D_n} |(r_n, g)|$ и определим $r_{n+1} = r_{n+1}(f, D, t) = r_n - (r_n, g_{n+1}) g_{n+1}$, $D_{n+1} = \left\{ \frac{g - (g, g_{n+1})}{\|g - (g, g_{n+1})\|} \mid g \in D_n,\ g \neq \pm g_{n+1} \right\}$.

Теорема 1. *Для произвольного словаря D, $f \in H$ и $0 < t \leqslant 1$ имеют место равенства*

$$\lim_{n \to \infty} \|r_n(f, D, t)\| = \lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{k=0}^{n-1} (r_k, g_{k+1}) g_{k+1}\| = 0.$$

Теорема 2. *Существует такое $C > 0$, что для произвольного словаря D, $f \in A_1(D)$ и $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $\|r_n(f, D, t)\| \leqslant C|f|_{A_1(D)} n^{-1/2}$.*

Литература

1. Галатенко В. В., Лившиц Е. Д. *Обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы* // Математические заметки. 2005. Т. 78. № 2. С. 186–201.

2. DeVore R. A., Temlyakov V. N. *Some remarks on Greedy Algorithms* // Advances in Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 173–187.

ВЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Галеев Э.М. (Москва)

elfat@galeev.mccme.ru

В теории приближений важное место занимают теоремы вложе-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №05-01-00261), Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ-5813.2006.1).

ния функциональных классов и множеств. Мы будем изучать вложения пересечений конечномерных множеств.

Обозначим $B_p^r = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\|_{l_p} \leqslant n^{-r}\}$ — шар радиуса n^{-r} в пространстве l_p, $0 < p \leqslant \infty$, $r \in \mathbf{R}$. Пусть $B_{\bar p}^{\bar r} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} B_{p^i}^{r^i}$, $i = 1, \dots, m$, — пересечение шаров в различных метриках. Поставим задачу о вложении $B_{\bar p}^{\bar r} \subset B_q^\gamma$. То есть надо найти минимальный радиус шара в пространстве l_q, для которого выполняется вложение заданного пересечения. Ранее было доказано следующее условие вложения.

Теорема А [1]. *Пусть* $B_{\bar p}^{\bar r} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} B_{p^i}^{r^i}$, $1 \leqslant p^i, q \leqslant \infty$, $G = \operatorname{conv}\{(\frac{1}{p^i}, r^i),\ i = 1, \dots, m\} + \operatorname{cone}\{(-1, 0), (1, -1)\}$. *Тогда* $B_{\bar p}^{\bar r} \subset B_q^\gamma$, *если* $(\frac{1}{q}, \gamma) \in G$.

Полученное условие вложения является достаточным, но не необходимым. Задачу вложения пересечений множеств будем сводить к экстремальной задаче. Одной из наиболее важных является задача о вложении пересечения двух шаров. Задача о вложении пересечения октаэдра и куба в шар в пространстве l_q формулируется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q \longrightarrow \sup; \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant n^{-\alpha}; \ |x_k| \leqslant 1, \ k = 1, \dots, n,$$

где $0 < -\alpha < 1$, $1 < q < \infty$.

В докладе будут приведены полученные результаты о необходимых и достаточных условиях вложений, вытекающих из решения соответствующих экстремальных задач.

Литература

1. Галеев Э.М. Поперечники по Колмогорову пересечения классов периодических функций и конечномерных множеств. - Матем. заметки, 1981, т.29, в.5, с.749-760.

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ В КЛАССИЧЕСКОМ ВАРИЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Гараев К.Г. (Казань)

strezh@yandex.ru

Речь пойдет о задаче на условный экстремум: требуется найти экстремум условного функционала

$$I = \int\limits_D L\left(x, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx, \tag{1}$$

где $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ – независимые, $\varphi = \left(\varphi^1, \ldots, \varphi^m\right)$ – зависимые переменные, через $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ обозначена совокупность частных производных первого порядка $\varphi_i^k = \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}$ $\left(i = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,m} \right)$ при наличии дифференциальных связей (К системе (2) могут выставляться краевые условия различного рода.)

$$F^s\left(x, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0 \quad \left(s = \overline{1,p}, \quad p < m \right). \tag{2}$$

Как известно, с помощью формализма Лагранжа эта задача сводится к задаче на безусловный экстремум вспомогательного функционала $V = \int\limits_D \left(L + \lambda_S F^S\right) dx$, где λ_S – множители Лагранжа. Интегрирование возникающей при этом системы дифференциальных уравнений относительно множителей Лагранжа, вообще говоря, является весьма сложной проблемой. Допустим теперь, что уравнения (2) допускакют вариационную формулировку, т.е. являются уравнениями Эйлера для вариационного интеграла

$$W = \int\limits_D \varphi\left(x, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx. \tag{3}$$

Тогда мы имеем функционал (1) (назначаемый человеком) и вариационный интеграл (3) (диктуемый природой). Как теперь ставить вариационную задачу?

Так как не всякая система дифференциальных уравнений допускает вариационную формулировку, то автор *предполагает*, что в этом случае не нужно будет использовать формализм Лагранжа в его классической форме, а нужно будет интегрировать только ситему (2) при *модифицированных краевых условиях*, либо непосредственно использовать прямые методы вариационного исчисления. Но как это сделать?...

О СУЩЕСТВОВАНИИ K-НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Гельман А.Б. (Воронеж)

Пусть E – банахово пространство, множество $X \subset E$, $f : X \to E$ – непрерывное отображение, K – выпуклое замкнутое подмножество в E.

Определение 1. *Точка $x_* \in X$ называется неподвижной точкой отображения f относительно множества K (K-неподвижной точкой) если $x_* \in f(x_*) + K$.*

Первым утверждением о существовании K-неподвижной точки (без введения этого термина) была лемма Иохвидова [1], некоторые теоремы в этом направлении были получены в работах [2], [3].

В докладе будут рассмотрены некоторые новые результаты.

Теорема 1. *Пусть $U \subset E$ - ограниченное открытое подмножество, $f : \overline{U} \to E$ - непрерывное компактное отображение. Если существует такое открытое множество $V \subset \overline{V} \subset U$, что для любого $x \in \overline{U}$ пересечение $(f(x) + K)\bigcap V \neq \emptyset$, то множество $Fix(f, K) \neq \emptyset$.*

Для изучения K-неподвижных точек может быть построена топологическая степень, однако, она не является эффективной в случае неограниченного множества K.

Если отображение f не имеет K-неподвижных точек на границе ∂U, то по любой точке $u \in K$ определено невырожденное вполне непрерывное векторное поле $\varphi(x) = x - f(x) - u$. Следовательно, определена топологическая степень (вращение) $deg(\varphi, \overline{U})$, которая не зависит от выбора точки u. Эту степень $deg(\Phi, \overline{U})$ назовем топологической степенью многозначного векторного поля $\Phi(x) = x - f(x) - K$.

Теорема 2. *Пусть $f : \overline{U} \to E$ - вполне непрерывное отображение, $K \subset E$ - неограниченное выпуклое замкнутое множество. Тогда справедливо одно из следующих двух условий: 1) отображение f имеет K-неподвижные точки на границе ∂U; 2) $deg(\Phi, \overline{U}) = 0$.*

Литература

1. Иохвидов И.С. О лемме Ки-Фаня, обобщающей принцип неподвижной точки А.Н. Тихонова// ДАН СССР, 1964, т.159, с.501-504.

2. Гельман А.Б. Об одной проблеме С. Улама// Труды матем. ф-та ВГУ, 2005, N 9, с.32-39.

3. Гельман А.Б. О неравенствах в банаховых пространствах// Труды матем. ф-та ВГУ, 2006, N 10, с.42-48.

О БИФУРКАЦИИ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА С 3-КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Гнездилов А.В. (Воронеж)

gnezdilo@mail.ru

Рассмотрим задачу определения в окрестности первой критической нагрузки bif-расклада заданного на $\mathcal{M} \subset W_2^2(\Omega)$ функционала:

$$V(u,\lambda) = \iiint\limits_{\Omega} \left[\frac{(\nabla u)^2}{2} - \frac{\lambda\, u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \right] dx_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

если $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\; 0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi,\;\; j = 1,2,3\}$, а $\mathcal{M}$ определяется условиями периодичности $u(x_1, x_2, x_3)$ по каждой переменной:

$$u(x_1 + 2\pi k, x_2 + 2\pi n, x_3 + 2\pi m) = u(x_1, x_2, x_3) \;\; \forall\, k, m, n \in \mathbb{Z},$$

и интегральным ограничением

$$\iiint\limits_{\Omega} u(x_1, x_2, x_3)\;\; dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0.$$

При данной постановке задачи первой критической нагрузкой будет $\lambda = 1$. В окрестности данного значения параметра λ и окрестности в $\mathcal{M}$ функции $u(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$ функционал $V(u,\lambda)$ будет обладать 3-круговой симметрией.

Применяя к данному функционалу схему, использованную в [1] для получения списка допустимых bif-раскладов критических орбит функционала общего вида с 3-круговой симметрией (RF-схему), задача сводится к определению bif-расклада условно критических точек квадратичной формы $U_2(\zeta_1, \zeta_2) = -\zeta_1^2 - \zeta_2^2$ на плоском треугольном симплексе Δ:

$$\Delta = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\; \zeta_1 \leqslant \frac{\sqrt{2\pi^3}}{4},\, \zeta_1 \geqslant \zeta_2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2\pi^3}}{2},\, \zeta_1 \geqslant -\zeta_2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2\pi^3}}{2} \right\}.$$

В результате получаем требуемый bif-расклад в виде матрицы $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где m_{ji} — количество j-мерных критических торов обобщенного индекса Морса $i-1$.

Литература

Гнездилов А.В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34, вып.1. С. 83-86.

НЕКОТОРЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Головко Н.И., Каретник В.О. (Владивосток)

cdo@mail.psue.ru

В настоящее время в связи с развитием информационных технологий актуальными являются некоторые качественные задачи исследования информационных сетей (ИС), например, определение загруженности ИС, надежности и т.д., которые решаются с помощью моделирования ИС. При моделировании актуальными являются следующие модели СМО.

Рассматривается СМО типа $M/M/1$ с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ, с входным дважды стохастическим пуассоновским потоком заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, изменяющийся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства, распределенными по экспоненциальному закону. Предполагаем, что выполняется условие отсутствия перегрузок в стационарном режиме $b < \mu$. Вводится совместное стационарное распределение числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме, которые удовлетворяют бесконечной системе уравнений типа Колмогорова-Чепмена с интегральной добавкой. В работе предлагается переход от системы однородных интегральных уравнений типа Колмогорова-Чепмена с неоднородным условием нормировки к неоднородной системе интегральных уравнений типа Колмогорова-Чепмена. Последняя система для краткости называется 2-й моделью СМО [1]. Для решения 2-й модели СМО в работе предлагается метод производящих функций. Производящая функция системы находится в явном виде. Затем с помощью обратного преобразования Лорана находятся коэффициенты производящей функции, т.е. искомое распределение заявок.

Литература

1. Катрахов В.В., Головко Н.И., Рыжков Д.Е. Введение в теорию марковских дважды стохастических систем массового обслуживания. Владивосток, изд-во ДВГУ, 2005, 212 стр.

ФРЕЙМЫ ИЗ СДВИГОВ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Голубева Е.С. (Самара)

golubeva@samaramail.ru

Пусть $\{f_k\}_{k=0}^{M-1}$— набор элементов из пространства ℓ_2^N над полем $\mathbb{C}$, $M \geqslant N$. Бесселевой границей $B\left(\{f_k\}_{k=0}^{M-1}\right)$ набора $\{f_k\}_{k=0}^{M-1}$ назовём наименьшее из чисел B в неравенстве:

$$\sum_{i=0}^{M-1} |< f, f_i >|^2 \leqslant B\|f\|^2, \quad f \in \ell_2^N,$$

Легко заметить, что из неравенства

$$B\left(\{f_k\}_{k=0}^{M-1}\right) \leqslant 1$$

и $\|f_k\| \geqslant 1$, $k = 0, \dots, M-1$ следует попарная ортогональность векторов f_k и, следовательно, $M \leqslant N$. Это замечание приводит к эквивалентности следующих условий:

Предложение. *Пусть* f=$(f(0), ...f(N-1)) \in \ell_2^N$, $\|f\| = 1$ *и* $f_k(n) = f(n-k)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $\quad k = 0, \dots, N-1$ *обозначает набор сдвигов вектора* f. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Бесселева граница $B\left(\{f_k\}_{k=0}^{N-1}\right) \leqslant 1$.

2) Векторы $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$ *образуют ортонормированный базис пространства* l_2^N.

3) Дискретное преобразование Фурье $\hat{f}$ *вектора* f *удовлетворяет равенствам:*

$$|\hat{f}(n)| = 1, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Если $M \geqslant N$ и $f \in \ell_2^M$, $|\hat{f}(m)| = 1, m = 0, 1, \dots, M-1$, то, записывая сдвиги вектора f в виде столбцов матрицы, получаем унитарную $M \times M$ матрицу. Если из полученной таким образом матрицы удалить любые $M - N$ столбцов, то строки оставшейся $M \times N$ матрицы образуют жёсткий фрейм пространства ℓ_2^N с границей 1 (фрейм Парсеваля).

ОБ ОПЕРАТОРАХ СВЕРТКИ И БАЗИСАХ ИЗ СДВИГОВ ФУНКЦИИ[1]

Голубов Б.И. (Москва)

golubov@mail.mipt.ru

Рассмотрим свертку

$$(f * d\sigma)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\, d\sigma(t) \tag{1}$$

2π-периодических комплекснозначных функций $f \in L^p(T)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $\sigma \in BV(T)$, где $BV(T)$ класс функций ограниченной вариации на периоде $T = [0, 2\pi]$. Если функция $\sigma \in BV(T)$ фиксирована, то линейный оператор $f * d\sigma$: $L^p(T) \to L^p(T)$ ограничен.

Теорема 1. *Пусть функция $\sigma \in BV(T)$ фиксирована. Тогда множество значений оператора (1) плотно в пространстве $L^p(T)$, $1 \leqslant p < \infty$, тогда и только тогда, когда $\hat{\sigma}(n) \neq 0$ для всех $n \in Z$, где $\hat{\sigma}(n)$ — коэффициенты Фурье-Стилтьеса функции σ, т.е.*

$$\hat{\sigma}(n) = \int_0^{2\pi} \exp(-i\, nt)\, d\sigma(t).$$

Если функция $\sigma \in BV(T)$ абсолютно непрерывна, то $d\sigma(t) = g(t)\, dt$ почти всюду на T, где $g \in L(T)$.

Следствие. *Пусть функция $g \in L(T)$ фиксирована. Тогда множество значений оператора $f * g$: $L^p(T) \to L^p(T)$, где*

$$(f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\, g(t)\, dt,$$

плотно в пространстве $L^p(T)$, $1 \leqslant p < \infty$, тогда и только тогда, когда $\hat{g}(n) \neq 0$ для всех $n \in Z$, где $\hat{g}(n)$ — тригонометрические коэффициенты Фурье функции g.

Подобные результаты справедливы и для двоичных сверток.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 05-01-00206.

Отметим, что результаты, аналогичные теореме 1 получены ранее в [1] для сверток

$$(f * d\sigma)(x) = \int\limits_0^x f(x-t)\,d\sigma(t) \quad \text{и} \quad (f * g)(x) = \int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

непериодических функций, а в книге [2] (с. 489) доказано, что в пространстве $L(R)$ не существует базиса вида $\{f(\circ - \lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$, где $f \in L(R)$, а $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \subset R = (-\infty, +\infty)$.

Пусть $X(T)$ обозначает либо пространство $L^p(T)$, $1 \leqslant p < \infty$, либо $C(T)$, т.е. пространство непрерывных 2π-периодических функций.

Теорема 2. *В пространстве $X(T)$ не существует базиса из сдвигов одной функции, т.е. базиса вида $\{f(\circ - \lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$, где $f \in X(T)$, а $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \subset R = (-\infty, +\infty)$.*

Пусть Δ — одно из множеств $[0,1]$, $[0,+\infty)$ или $[0,1]^*$, где $[0,1]^*$ — модифицированный двоичный отрезок (см. [3], гл. 1). Обозначим символом $\oplus$ операцию двоичного сложения на множестве Δ (см. [3], гл. 1). Символом $X(\Delta)$ обозначим одно из пространств $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, $L[0,+\infty)$ или $C[0,\,1]^*$ (определение пространства $C[0,\,1]^*$ см. в [3], гл. 1).

Теорема 3. *Если $f \in X(\Delta)$ и $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \Delta$, то система $\{f(\circ \oplus \lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ не может быть базисом пространства $X(\Delta)$.*

Литература

1. А.М. Седлецкий. Аппроксимация свертками и первообразными // Мат. заметки, 79, № 5 (2006), с. 756-766.

2. А.М. Седлецкий. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.

3. Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВ ПЕРВОГО РОДА[1]

Голубь А.В., Хромов А.П. (Саратов)

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt,$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in (\frac{1}{2}, 1]$. Функция $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$ и является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) \equiv x$. Справедлив следующий результат

Теорема. *Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\{\max_{\varepsilon\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}-\varepsilon}|S_r(x,f)-\sigma_r(x,f_1)|+ \\ + \max_{\frac{1}{2}+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon}|S_r(x,f)-\sigma_r(x-\tfrac{1}{2},f_2)|\Big\}=0,$$

где $S_r(x,f)$ - частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(x,g)$ - частичная сумма ряда Фурье по системе $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\exp 4k\pi i x\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in [0, \frac{1}{2}]$; $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(\frac{1}{2}+x)$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

О ДИАГОНАЛИЗАЦИИ КРОСС-ОПЕРАТОРОВ[2]

Гриднева И.В. (Воронеж)

giv@kma.vsu.ru

В работах [2]-[3] было доказано, что при $\dim H < \infty$ для каждой J-неотрицательной матрицы $A = JB$, где B - кросс-матрица, существует такая J-унитарная кросс-матрица U, что матрица $U^{-1}AU$ имеет квазидиагональный вид. В нашей работе приводится новый метод доказательства данного результата.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-01-00003.

[2] Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

В гильбертовом пространстве $H = H^+ \oplus H^-$ введем операторы $J: J(x \oplus y) = x \oplus (-y)$ и $j: j(x \oplus y) = y \oplus x$. Тогда в H определена индефинитная метрика $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, причем система $\{e_\alpha^+\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \cup \{e_\alpha^-\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ является J-ортонормированным базисом. Назовем оператор A кросс-оператором, если $jAj = \bar{A}$. Пусть B - такой неотрицательный самосопряженный кросс-оператор, что для J-неотрицательного оператора $A = JB: \quad \rho(A) \neq \varnothing$.

Скажем, что оператор A имеет квазидиагональный вид относительно рассмотренного базиса, если существует такое разбиение множества $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{A}_3$ на непересекающиеся подмножества, что подпространства $H_i^\pm =$ з.л.о.$\{e_\alpha^\pm\}_{\alpha \in \mathfrak{A}_i}, (i = 1, 2, 3)$ инвариантны относительно A, причем $A_1 = A|H_1^+ = -jAj|H_1^+$ - положительный вещественный диагональный оператор, $H_2^\pm \subset \ker A$ и относительно разложения $H_3 = H_3^+ \oplus H_3^-$ оператор $A|H_3$ представляется матрицей $A|H_3 = \begin{pmatrix} A_3 & J_3 A_3 \\ -J_3 A_3 & -A_3 \end{pmatrix}$, где A_3 — положительный вещественный диагональный оператор, $J_3 A_3 = A_3 J_3$ и $J_3 e_\alpha = \pm e_\alpha \quad (\alpha \in \mathfrak{A}_3)$. Пусть $L_+ =$ з.л.о.$\{(I - E_\lambda)H | \lambda > 0\}$, где E_λ — J-спектральная функция оператора A.

ТЕОРЕМА *Для того чтобы для J-неотрицательного оператора $A = JB$, где B - кросс-оператор с $\rho(B) \neq \varnothing$ существовал такой J-унитарный кросс-оператор U, что оператор $U^{-1}AU$ квазидиагонального вида, необходимо и достаточно, чтобы подпространство L_+ было равномерно положительным.*

Литература

1. Colpa J.H.P. Diagonalization of the quadratic boson Hamiltonian with zero modes// I. Mathematical Physica – 1986. – V. A134, №2. – P. 377–419.

2. Икрамов Х.Д. Теорема о диагонализации одного типа гамильтонианов с точи зрения теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой // Ж. вычислительной математики и мат. физики – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 3–14.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ[1]

Губкина Е.В. (Горно-Алтайск)
office@gasu.ru

В работе формулируются общие плоские задачи гидродинамики , в которых искомый комплексный потенциал потока жидкости на границе области течения удовлетворяет нелинейным граничным условиям. Найдены условия корректности таких задач.

Течения жидкости со свободными (неизвестными) границами представляют собой широкий класс нелинейных задач гидродинамики даже в том случае, когда они описываются аналитическими функциями комплексного переменного (потенциальные течения идеальной жидкости).

Исследованию корректности струйных задач идеальной жидкости и дозвуковой газовой динамики посвящено большое количество работ, обзор и библиографию можно найти в [1], [2]. Задачи фильтрации жидкости со свободными границами в пористых средах описаны в монографиях [2], [3].

Литература

[1]. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны, М., Мир, 1964 с.

[2]. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, СО Новосибирск, Наука, 1977с.

[3].Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод, М., Гостехтеоретиздат, 1977, 660 с.

СУЩЕСТВЕННО РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СПЕКТРА

Гулина О.В. (Минск)
gulina_o@mail.ru

Пусть $T : X \longrightarrow X$ – линейный ограниченный оператор, действующий на X — бесконечномерном банаховом пространстве над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Введем обозначения: $L(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих из X в

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (МК- 5083.2006.01)

X, т.е. рассматривается $T \in L(X)$, $N(T)$ – ядро оператора T, $R(T)$ – область значений оператора T, $R^\infty(T) := \cap\{R(T^k) : k = 1,2,...\}$ – обобщенная область значений оператора T. Оператор $T : X \longrightarrow X$ имеет обобщенный обратный, если существует оператор $S : X \longrightarrow X$ такой, что выполняется равенство $TST = T$ [1].

О п р е д е л е н и е. Оператор $T \in L(X)$ называется существенно регулярным, если он имеет обобщенный обратный и выполняется включение $N(T) \overset{e}{\subset} R^\infty(T)$, т.е. размерность выступа нулей оператора T на обобщенной области значений конечна, $dim[N(T) \setminus (N(T) \cap R^\infty(T))] < \infty$. Множество всех существенно регулярных операторов, действующих на X, обозначим через $S_e(X)$.

Существенно регулярные операторы порождают соответствующий спектр, который называется существенным спектром Сафара оператора T и определяется формулой $\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin S_e\}$.

Существенный спектр Сафара занимает промежуточное положение между существенным спектром Голдберга $\sigma_{eg}(T)$ и существенным спектром Фредгольма $\sigma_{ef}(T)$, т.е. $\sigma_{eg}(T) \subset \sigma_{es}(T) \subset \sigma_{ef}(T)$. Подробная информация о различных существенных спектрах и их свойствах содержится в книге [2].

Для существенного спектра Сафара линейного ограниченного оператора справедлива теорема об отображении [3]. Также рассматриваются свойства устойчивости существенного спектра Сафара относительно различных возмущений.

Литература

1. Caradus S.R. Generalised inverses and operator theory. — Kingston: Queen's University, 1978. — 209p.

2. Еровенко В.А. Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов. — Минск: БГУ, 2002.— 145с.

3. Гулина О.В. Теорема об отображении существенного спектра Сафара // Тез. докл. междунар. мат. конф. "Еругинские чтения –X". – 2005. – с.106-107.

О ДЛИНЕ ЛЕМНИСКАТЫ[1]

Данченко В.И. (Владимир)

danch@vpti.vladimir.ru

При натуральном n, комплексных числах $c_0, \ldots, c_{n-1}$ и положительном $r > 0$ положим

$$P_n(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \quad L(P_n, r) = \{z : |P_n(z)| = r^n\}.$$

Линии $L(P_n, r)$ обычно называют лемнискатами. Каждая линия $L(P_n, r)$ состоит не более чем из n замкнутых жордановых кривых σ_k ($k = 1, \ldots, m \leqslant n$), внутренности которых не имеют общих точек. Кривые σ_k могут иметь общие точки в нулях производной многочлена $P_n(z)$ (это угловые точки кривых σ_k, в остальных же точках они локально аналитичны).

В 1958 г. в работе P.Erdös, F.Herzog, G.Piranian [1] была поставлена задача об оценке сверху длины $|L(P_n, r)| = |\sigma_1| + \ldots + |\sigma_m|$. Независимо эта задача в 1960 г. возникла в связи с оценками производных рациональных функций в диссертации Е.П. Долженко [2], где получено неравенство

$$|L(P_n, r)| \leqslant 4\pi n r. \tag{1}$$

Этот результат опубликован также в 1963 г. в его работе [3] (сдана в печать 14.01.1961). В 1961 г. Ch.Pommerenke [4] опубликовал неравенство $|L(P_n, 1)| \leqslant 74n^2$. Результат (1) был неизвестен авторам последующих работ. В 1995 году вышла статья P.Borwein [5] с оценкой $|L(P_n, 1)| \leqslant 8\pi e n$. В 1999 году A.Eremenko и W.Hayman [6] получили уточнение оценки (1) при $r = 1$: $|L(P_n, 1)| \leqslant 9.173n$. Нами получено следующее уточнение оценки (1).

Теорема. *Имеет место неравенство* $|L(P_n, r)| \leqslant 2\pi n r$.

Литература

[1] Erdös P., Herzog F. and Piranian G. "Metric properties of polynomials J.Analyse Math., **6** (1958), 125-148.

[2] Долженко Е.П. "Дифференциальные свойства функций и некоторые вопросы теории приближений Дисс... канд. физ.-мат. наук. М.: Библ. МГУ, 1960.

[1] Работа поддержана РФФИ (гранты 04-01-00717, 05-01-00962).

[3] Долженко Е.П. "Некоторые метрические свойства алгебраических гиперповерхностей Известия АН СССР, сер. матем., **27**:2(1963), 241-252.

[4] Pommerenke Gh. "On metric properties of complex polynomials Michigan Math. J., **8**(1961), 97-115.

[5] Borwein P. "The arc length of the lemniscate $\{|p(z)| = 1\}$ Proc. Amer. Math. Soc., **123**(1995), 797-799.

[6] Eremenko A. and Hayman W. "On the length of lemniscates Michigan Math.J., **46**(1999), 409-415.

О НЕРАВЕНСТВЕ БЕРНШТЕЙНА- НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ПО РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ

Дарбаева Д., Сарыбекова Л.О., Тлеуханова Н.Т. (Астана, Казахстан)

slo1983@inbox.ru

Данная работа посвящена исследованию мультипликаторов рядов Фурье в пространствах Лебега. Ортонормированная система $\varphi_k(x)$, определенных на $[0,1]$ функций, называется регулярной, если существует $B > 0$, такое, что

1. для любого отрезка e из $[0,1], \forall k \in N |\int\limits_e \varphi_k(x)dx| \leqslant Bmin\left(\mu e, \frac{1}{k}\right)$,

2. для любого отрезка ω из $N, \forall t \in (0,1] \left(\sum\limits_{k\in\omega} \varphi_k(\cdot)\right)^* (t) \leqslant$ $\leqslant Bmin\left(|\omega|, \frac{1}{t}\right)$, где $|\omega|$-количество элементов в ω.

Заметим, что все тригонометрические, мультипликативные системы с ограниченными образующими будут регулярными.

Пусть $0 < p, q < +\infty$, и $f \in L_p$ с рядом Фурье $\sum\limits_{k\in Z} \widehat{f}(k)\varphi_k(x)$, $\widehat{f}(k) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\varphi_k}(x)dx$.

Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in Z}$ является мультипликатором рядов Фурье по регулярной системе из L_p в L_q если найдется функция $f_\lambda \in L_q$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum\limits_{k\in Z} \lambda_k \widehat{f}(k)\varphi_k(x)$. Множество всех мультипликаторов m_p^q является нормированным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{m_p^q} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|f_\lambda\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}.$$

Теорема 1. Пусть $0 < p \leqslant q < +\infty$. Если $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in Z}$ удовлетворяет следующим условиям

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k|\lambda_k - \lambda_{k+1}| \cdot k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})^{p'}}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant B,$$

$$\sup |\lambda_k| k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leqslant B,$$

тогда $\lambda \in m_p^q$ и верно $\|\lambda\|_{m_p^q} \leqslant cB$.

Теорема 2. Пусть $0 < p \leqslant q < +\infty, T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x), T_n^\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha a_k \varphi_k(x)$, тогда

при $\alpha > -\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$

$$\|T_n^\alpha\|_q \leqslant cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\alpha} \|T_n\|_p,$$

при $\alpha = -\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$

$$\|T_n^\alpha\|_q \leqslant c(\ln(n+1))^{\frac{1}{p'}} \|T_n\|_p,$$

при $\alpha < -\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$

$$\|T_n^\alpha\|_q \leqslant c\|T_n\|_p.$$

Теорема 2 - это неравенство типа Бернштейна-Никольского для регулярной системы.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Денисов М.С. (Воронеж)
den_i_sov@rambler.ru

Пусть $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$ — гильбертово пространство. $G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный и непрерывный оператор, $G = G^*$ и $0 \notin \sigma_p(G)$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с формой $[x, y] := (Gx, y)$ называется сингулярным G-пространством, если $0 \in \sigma_c(G)$.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Линейный непрерывный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется G- самосопряженным, если $[Ax, y] = [x, Ay]$ для любого $x, y \in \mathcal{H}$.

Пусть E — гомоморфизм, отображающий кольцо $\mathfrak{R}$, порожденное некоторыми интервалами вещественной оси, и содержащее интервал $(-\infty, +\infty)$, в множество G-самосопряженных проекторов $E(\Delta) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, причем :

- $E(\varnothing) = 0$, $E((-\infty, +\infty)) = I$.
- $E(\Delta \cap \Delta') = E(\Delta)E(\Delta')$.
- $E(\Delta \cup \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta')$ при $\Delta \cap \Delta' = \varnothing$, где $\Delta, \Delta' \in \mathfrak{R}$.

Гомоморфизм E определенный на $\mathfrak{R}(s)$, называется G- спектральной функцией с множеством $s = s(E)$ критических точек, если при $\lambda_0, \mu_0 \notin s(E)$,
$\mu_0 < \lambda_0$ и $\mu \downarrow \mu_0$ в сильной операторной топологии существует предел операторов $E((\mu, \lambda_0])$, и он совпадает с $E((\mu_0, \lambda_0])$.

В работе исследуется вопрос существования спектральной функции для специального вида G-самосопряженных непрерывных операторов.

Литература

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С *Теория линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. М. Наука 1986. 352стр.*

2. J.Bognar *A proof of the spectral theorem for J-positive operators. Acta sci. math., 1983, 15, 1-2, p.75-80.*

3. Langer.H *Specrtralfunctionen einer Klasse J-selbstadjungierter Operatoren. — Math. Nachr., 1967, 33, 1-2, S. 107-120.*

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ–УОЛША

Драбкова Е.С. (Самара)

kadra82@mail.ru

Пусть заданы натуральные числа M и N, $M \geqslant N$.

Определение. Набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R}^N$ называется фреймом Парсеваля, если для каждого $f \in \mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle f, f_i \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Если $\|f_1\| = \|f_2\| = \ldots = \|f_M\|$, то $\|f_i\|^2 = \frac{N}{M}$, $i = 1, \ldots M$.
Фреймы Парсеваля с одинаковыми нормами представляют большой интерес для прикладных исследований. В работе [2] доказано существование фреймов Парсеваля с одинаковыми нормами для любого $M \geqslant N$ и предложены (довольно сложные) алгоритмы их построения.

Предлагается простой способ построения фреймов Парсеваля с одинаковыми нормами, основанный на матрице Уолша. Матрицы Уолша $\widetilde{W}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, могут быть построены индуктивно, начиная с

$$\widetilde{W}_0 = (1),\ \widetilde{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \widetilde{W}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots \quad [1]$$

Матрица $\widetilde{W}_k$– это квадратная $2^k \times 2^k$ матрица, столбцы (строки) которой образуют ортогональную систему векторов пространства $\mathbb{R}^{2^k}$. Матрица $W_k := 2^{-k/2}\widetilde{W}_k$ является основой для построения фрейма Парсеваля-Уолша $\{w_i\}_{i=1}^{2^k}$ с одинаковыми нормами в каждом из пространств $\mathbb{R}^N$ с $N \leqslant 2^k$: удаляем из матрицы W_k любые $2^k - N$ столбцов, строки оставшейся после этого удаления $2^k \times N$–матрицы образуют фрейм $\{w_i\}_{i=1}^{2^k}$.

Литература

1. Голубцов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.. Ряды и преобразование Уолша. М.: Наука, 1987.

2. Casazza P. G. Modern tools for Weyl-Heisenberg (Gabor) frame theory. Advances in Imaging and Electron Physics 115 (2000), 1–127.

ЛЕММА ШВАРЦА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Дубинин В.Н. (Владивосток)

dubinin@iam.dvo.ru

Классическая лемма Шварца и ее обобщения играют существенную роль в геометрической теории функций комплексного переменного [1]. В данном сообщении рассматриваются новые версии леммы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-9004.2006.1) и РФФИ (грант 05-01-00099).

Шварца и приложения, полученные в работах автора [2–4]. Показывается, что прямое применение леммы Шварца и ее обобщений к специально построенным произведениям Бляшке приводит к новым неравенствам для некоторых классов целых функций. В частности, для целых функций экспоненциального типа с нулями в замкнутой нижней полуплоскости имеют место теоремы искажения, включая двуточечную теорему искажения на вещественной оси. Аналогичные теоремы устанавливаются для полиномов с нулями в замкнутом единичном круге. Уточняются классические теоремы Турана и Энксни-Ривлина. Кроме того, доказывается теорема о взаимном расположении нулей и критических точек полиномов. Далее, классическое неравенство Шварца на границе круга для регулярных в круге функций уточняется в различных направлениях. Приводятся неравенства с учетом нулей функций, неравенства для точек, переходящих в симметричные точки окружности, и обратная оценки для однолистных функций. Наконец, используя достаточное условие однолистности и известные свойства конформных отображений, получены новые версии неравенств Шварца, а также их уточнения и дополнения для регулярных функций со свободной областью определения. Обсуждаются перспективы указанного подхода.

Литература

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.

2. Дубинин В.Н. К неравенству Шварца на границе для регулярных в круге функций// Зап. научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 286. С. 74–84.

3. Дубинин В.Н. Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения// Матем. сб. 196 (2005), №11, 53–74.

4. Дубинин В.Н. О применении леммы Шварца к неравенствам для целых функций с ограничениями на нули// Зап. научн. семин. ПОМИ. 2006. (в печати).

СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ ПОДХОДОВ В МЕТОДИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Дубровская А.П., Глушко Е.Г., Провоторова Е.Н.
(Воронеж)

Важнейшим фактором повышения эффективности обучения математике в техническом вузе является наличие современного комплексного методического обеспечения дисциплин.

Наш опыт показывает, на начальных этапах обучения многие студенты не обладают необходимым набором учебных навыков, позволяющих им быстро адаптироваться в новой учебной среде, где подчас они не могут с определенностью знать, что, как и когда им надо учить. Как следствие этого, успешность обучения в высшем учебном заведении зависит от способностей и возможностей студентов вписаться в предлагаемую им специфическую учебную среду, приняв соответствующую стратегию обучения.

Исходя из этих общих положений, на кафедре ВМ ФММ внедряется в практику использование определенного набора методических материалов, главным из которых является единое методическое руководство по изучению дисциплин для каждого семестра. Оно позволяет студенту уже в начале семестра четко видеть цель, которую он должен достичь, пути достижения этой цели, рационально распределять баланс времени. Единое методическое руководство содержит следующие разделы:

Программу курса, включающую содержание дисциплины, перечень тем лекционных и практических занятий, темы разделов, вынесенных на самостоятельное изучение, перечень контрольных мероприятий, список литературы и планы-графики самостоятельной работы.

Вопросы для подготовки к коллоквиумам, зачетам, экзаменам.

Образцы вариантов контрольных работ с разобранными типовыми примерами, образцы экзаменационных заданий.

Руководство по выполнению и форме отчета типовых расчетов.

Примерную тематику и структуру выполнения курсовых работ с указанием рекомендуемой литературы.

Проведенный анализ расходования времени студентами на самостоятельную работу показал крайнюю неравномерность такой работы. Для ритмичности занятий разработаны и включены в программу курса планы-графики, которые содержат распределение времени по каждому виду занятий исходя из расчета общего недельного бюджета времени студента, отведенного на изучение дисциплины, также сроки подготовки и сдачи всех контрольных мероприятий.

Единое методическое руководство позволяет студентам увидеть структуру курса, взаимосвязь отдельных разделов, логическую последовательность изложения, уровень сложности контрольных заданий, стимулирует и корректирует систематическую равномерную самостоятельную работу студентов в различных ее формах.

О СТОХАСТИЧЕСКИХ ПФАФФОВЫХ ИДЕАЛАХ

Думачев В.Н. (Воронеж)

В работе рассматривается задача исследования поведения модели объекта управления, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений как подмногообразие Σ в расслоении джетов $J^n(\pi)$: $E \to M$, определяемое уравнениями $F(x, w, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}) = 0$, где $x, w \in M \subset R$, $u = p_0 \in U \subset R$, $p_i \in J^i(\pi) \subset R^n$, $E = M \times U$. Как и любое дифференциальное уравнение оно описывает струю в пространстве джетов $J^1(2,1)$, с локальными координатами $(x, w, u, u_t, u_w, u_{ww})$, где расширение расслоения до вторых производных (u_{ww}) является следствием корреляционых соотношений для средних Винеровского процесса

$$< dw >= 0, \quad < dw^2 >=< dx > .$$

Последние соотношения позволяют ввести распределение Картана для СДУ в виде

$$\theta = du - \left(u_x + \frac{1}{2}u_{ww}\right)dx - u_w dw.$$

Градуированный идеал $I = \oplus_{q\geqslant 0} I^q$ во внешней алгебре $\Lambda^*(X) = \oplus_{q\geqslant 0}\Lambda^q(X)$ форм класса C^∞ на многообразии X, обладающий свойствами $dI \subset I$ будем называть дифференциальным идеалом. Таким образом, для любых $\omega = \sum \omega^k \in I$, $\omega^k \in \Lambda^k(X)$ и $\nu \in \Lambda^*(X)$ будем иметь $\omega^k \in I$, $\omega \wedge \nu \in I$, $d\omega \in I$. Если $d\Sigma$ - множество форм $d\omega$ для $\omega \in \Sigma$, то дифференциальный идеал, порожденный Σ, - это $\{\Sigma, d\Sigma\}$.

Тогда для 1-форм распределения Картана $I = \{\Sigma, d\Sigma\} = \{\theta, d\theta\}$ называется пфаффовым дифференциальным идеалом. На многообразии X найдем пфаффову систему (J, ω), интегральные многообразия которой находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с интегральными многообразиями системы (I, ω), удовлетворяющими уравнениям Эйлера-Лагранжа для функционала $\Phi = \int f\varphi$, где $\varphi \in \Lambda^n(X)$. В работе получены стохастические уравнения Якоби - как уравнения в вариациях вдоль решений уравнений Эйлера-Лагранжа.

ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ КЛАССОВ ВАТЕРМАНА[1]

Дьяченко М.И. (Москва)

dyach@mail.ru

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ такова, что $\lambda_j = o(j^{\frac{3}{4}})$ при $j \to \infty$. Пусть, также, измеримая функция двух переменных $f(x, y)$ принадлежит классу Ватермана $\Lambda BV(\mathbf{R}^2)$ (определение непериодических классов Ватермана см. в [1]) и, для некоторых $0 < \delta < r < \infty$, функция $f(x, y) = 0$ при

$$(x, y) \in ((-\delta, \delta) \times \mathbf{R}) \bigcup (\mathbf{R} \times (-\delta, \delta)) \bigcup \{(s, t) : t^2 + s^2 > r^2\},$$

(т.е. $f(x, y)$ равна нулю в некоторой крестообразной окрестности нуля и вне некоторого круга). Тогда частичные интегралы Фурье функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$, взятые по гиперболическим крестам:

$$A_R = \left\{(s, t) : |s| \leqslant R^2 \quad \text{и} \quad |t| \leqslant \min\left(R^2, \frac{R^2}{|s|}\right)\right\},$$

сходятся к нулю при $R \to \infty$.

Литература

1. А.Н.Бахвалов. О представлении непериодических функций ограниченной Λ-вариации интегралом Фурье. Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех., 1998, N 3, с. 6 - 12.

---

[1]Исследования, описанные в данной работе, выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект 05-01-00052.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОНЯТИЙ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ

Егармина Н.Н. (Липецк)
E-mail egarmina.nelli@mail.ru

В традиционных курсах математического анализа раздел "Введение в анализ"понятия предела и непрерывности функции одной переменной излагаются в соответствии с правилами формальной логики. Для студентов первого курса такой подход часто является трудным для восприятия и понимания. Геометрическая интерпретация понятия предела также достаточно формализована. Студенты первого курса, как правило, еще не владеют достаточной математической культурой для свободного и осознанного оперирования формальными понятиями. Поэтому параллельно с традиционным подходом на наш взгляд было бы методически целесообразным рассматривать понятие предела как вытекающим из понятия непрерывности функции в точке. При этом понятие непрерывности функции в точке следует формулировать через систему двойных неравенств, а не через неравенства с модулями, так как действия с модулем тоже не совсем привычны для подавляющего большинства студентов. Тогда переход к понятию предела функции в точке представляет собой способ естественного доопределения функции до непрервной в данной точке. При таком подходе естественным и обоснованным является способ вычисления предела в точке с использованием непрерывности функции, а не свойств пределов. В этом случае понятие предела опирается на ранее известное студентам понятие значения непрерывной функции в точке. Таким образом, понятие предела функции в точке как бы обобщает понятие значения непрерывной функции в точке.

Конечно, такой подход имеет логический изъян, который заключается в том, что при вычислении пределов предполагается непрерывность элементарных функций в области определения. Но этот факт студентам интуитивно понятен и является убедительным, так как они достаточно хорошо представляют себе элементарные функции вместе с их графиками. А строгие доказательства можно отнести на более позднее время, когда студенты приобретут достаточную математическую культуру.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СИСТЕМЕ СИГНУМОВ НА СИГМА-КОНЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Егоров А.В. (Москва)

egorovsasa@bk.ru

В работе [1] рассматривалось обобщение разложения по системе сигнумов на случай сигма-конечной меры. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — сигма-конечное измеримое пространство, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание X (то есть $E_k \subset E_{k+1}$, $\mu E_k < \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = X$). Пусть действительнозначная функция f такова, что $|f| \in L_{1,loc}(X)$. Положим

$$r_0(x) = f(x);$$

$$e_{n+1}(x) = \operatorname{sign}(r_n(x))\chi_{E_{n+1}}(x), \quad c_{n+1} = \frac{\int\limits_{E_{n+1}} r_n(x)\,dx}{\mu E_{n+1}},$$

$$r_{n+1}(x) = r_n(x) - c_{n+1}e_{n+1}(x),$$

где $\operatorname{sign}(0)$ считается равным 1.

Определение. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x)$ *называется орторекурсивным разложением* f *по системе сигнумов с исчерпанием* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu E_k} = \infty$, $2 < p < \infty$. *Тогда орторекурсивное разложение функции* $f \in L_p(X)$ *по системе сигнумов сходится к* $f(x)$ *почти всюду, причем коэффициенты разложения удовлетворяют неравенству* $c_n \leqslant \frac{\|f\|_p}{(\mu E_n)^{1/p}}$.

Результаты для случая $p = \infty$ были приведены в работе [1].

Литература

1. Егоров А.В. *Разложение по системе сигнумов на сигма-конечном пространстве.* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы. — Саратов, 2006. — С. 66–67.

[1] Работа поддержана РФФИ (проект №05-01-00192) и Фондом Президента РФ для гос. поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4681.2006.1).

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ершова Е.М. (Тверь)
elersh@list.ru

В 1960 г. в статье [1] П. П. Коровкин ввел и исследовал операторы, ставшие в настоящее время классическими и называемые операторами Фейера-Коровкина

$$K_n(f,x) = \frac{1}{2\pi A_n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left|\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)e^{ikt}\right|^2 dt, \qquad (1)$$

где $A_n = \sum_{s=0}^{n}\varphi^2(\frac{s}{n}) \neq 0$.

Им было показано, что оператор (1) можно привести к виду

$$K_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\cos(kt)\right] dt,$$

где $\lambda_{k,n} = \frac{A_{k,n}}{A_n}$, $\;A_{k,n} = \sum_{s=0}^{n-k}\varphi(\frac{s}{n})\varphi(\frac{s+k}{n})$.

Рассмотрим конструкцию подобных операторов, беря в (1) для удобства вычислений $2n$ вместо n. Пусть

$$\varphi_n(x) = 4(\alpha_n - 1)x^2 + 4(1-\alpha_n)x + \alpha_n.$$

При $\alpha_n = 1$ из этой конструкции получаются операторы Фейера.

Заметим, что порядок приближения дифференцируемых функций операторами (1) зависит от порядка разности $1 - \lambda_{1,n}$.

В нашем случае

$$1 - \lambda_{1,n} = \begin{cases} O(1), \text{ если } \alpha_n < -1 \text{ или } \alpha_n > 1, \\ O(\frac{1}{n^\alpha}), 0 < \alpha \leqslant 1, \text{если } -1 < \alpha_n \leqslant -\frac{1}{n} \text{ или } \frac{1}{n} \leqslant \alpha_n < 1, \\ O(\frac{1}{n}), \text{ если } \alpha_n = \pm 1 \text{ или } -\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Таким образом, имеет смысл рассматривать данное семейство операторов только при $-1 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, т.к. в остальных случаях они не будут сходиться к приближаемой функции.

Литература

1. Коровкин П.П. *Асимптотические свойства положительных методов суммирования рядов Фурье.*// Успехи математических наук. т.XV, вып.1(91) 1960 г.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ[1]

Жеребьёва Т.А. (Москва)

tanya@zhereby.mccme.ru

В работе [1] (см. также [2]) изложен метод сведения двойного тригонометрического ряда к повторному. Применение данного метода к двойным рядам по мультипликативной системе функций позволяет получить новый класс множеств единственности для сходимости по прямоугольникам, обобщающий полученные ранее результаты для кратных рядов Уолша (см. [3]).

Говорят, что ряд $\sum_{m,n} c_{mn}$ *сходится по прямоугольникам*, если его прямоугольные частичные суммы $S_{kl} = \sum_{m=0}^{k} \sum_{n=0}^{l} c_{mn}$ сходятся при $\min(k,l) \to \infty$.

Будем обозначать через $\{\chi_m(x)\}_{m=0}^{+\infty}$ мультипликативную систему функций, построенную по последовательности $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j=1}^{+\infty}$, а через $\{g_n(y)\}_{n=0}^{+\infty}$ — произвольную ортогональную систему функций, для которой справедлива теорема единственности.

Теорема. *Пусть U — множество единственности для системы функций $\{g_n(y)\}_{n=0}^{+\infty}$ и в каждой точке $y \notin U$ ряд*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}\chi_m(x)g_n(y) \qquad (1)$$

сходится по прямоугольникам к нулю при $x \notin U_y$, где $\{U_y\}_{y\notin U}$ — семейство множеств единственности для мультипликативной системы $\{\chi_m(x)\}_{m=0}^{+\infty}$. Тогда все коэффициенты ряда (1) нулевые.

Литература

1. Ш.Т. Тетунашвили, *О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригономет-*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00192), и программы государственной поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4681.2006.1).

рических рядов для сходимоти по Прингсхейму // Математический сборник. – 1991. – Т.182 №8 – С. 1158–1176.

2. D. Rinne, *Rectangular and iterated convergence of multiple trigonometric series* // Real Analysis Exchange. – 1993/94. – V. 19(2). – P. 644–650.

3. С.Ф. Лукомский, *О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша* // Математический сборник. – 1989. – Т.180 №7 – С. 937–945.

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ШАРОВОМ СЛОЕ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Жидков А.А., Калинин А.В. (Нижний Новгород)
Artem.Zhidkov@telma.ru

Широкий класс физических задач приводит к изучению электромагнитных полей в квазистационарном электрическом приближении, в частности, такие задачи возникают при моделировании электромагнитных процессов в атмосфере [1]. В рассматриваемом приближении, система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\begin{cases} rot\vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}(x,t)}{\partial t}, \\ rot\vec{E}(x,t) = 0, \\ div\vec{B}(x,t) = 0, \\ div\vec{D}(x,t) = 4\pi\rho(x,t), \end{cases}$$

причем выполняются материальные соотношения (см. [2])

$$\vec{J}(x,t) = \sigma(x)(\vec{E}(x,t) + \vec{E}^{\text{ст}}(x,t)),$$

$$\vec{B}(x,t) = \mu(x)\vec{H}(x,t), \quad \vec{D}(x,t) = \varepsilon(x)\vec{E}(x,t).$$

Решение ищется в области $\Omega_T = \{(x,t) : x \in \Omega \subset R^3,\ t \in [0,T]\}$. Предполагается, что область $\Omega \subset R^3$ гомеоморфна шаровому слою с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Γ_1, Γ_2 – две компоненты связности границы, каждая из которых гомеоморфна сфере в R^3).

Рассматриваемая система дополняется граничными условиями $\vec{E}_\tau = 0$, $B_n = 0$, $x \in \Gamma$.

В работе показано, что в этом случае задача определения электрических полей может решаться независимо от магнитных полей.

Также показано, что рассматриваемая задача допускает замкнутую формулировку в терминах электрического потенциала, которая эквивалентна абстрактной задаче Коши при соответствующем выборе функционального пространства.

В работе доказывается теорема существования и единственности решения исследуемой задачи и приводятся некоторые результаты численного анализа.

Литература

1. Мареев Е.А., Трахтенгерц В.Ю. *О проблеме электрического динамо* // Известия вузов. Сер. Радиофизика -1996. Т.39, №6 -С.797-814.

2. Тамм И.Е. *Основы теории электричества* -М.: Наука -1976.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ШТУРМА О СРАВНЕНИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Забабонова Н.Ю., Прядиев В.Л. (Воронеж)

pryad@mail.ru

Рассматривается пара функционально-дифференциальных уравнений:

$$u''(x) + q_i(x)\frac{1}{\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x} u(s)\,ds = 0,\ x \in [a;b),\ i = 1,\ 2, \qquad (1_i)$$

где $u(x)$ – некоторая вещественнозначная функция, которая предполагается определённой и непрерывной на $[a-\delta;b)$ и дважды непрерывно дифференцируемой на $[a;b)$; q_i вещественнозначна и непрерывна на $[a;b)$, $\delta > 0$. Решение (1_i) понимается в классическом смысле.

Множество решений уравнения (1_i) непусто, поскольку начальная задача вида

$$\begin{aligned} &u(x) = \varphi(x),\ x \in [a-\delta;a],\\ &u'(a) = \varphi'(a) \end{aligned}$$

для этого уравнения имеет единственное решение при любой φ из

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (04-01-00049).

$C[a-\delta;a]$ и такой, что

$$\varphi''(a)+q_i(a)\frac{1}{\delta}\int\limits_{a-\delta}^{a}\varphi(s)\,ds=0\,.$$

(это доказывается стандартно).

Теорема. Пусть $u_i(x)$, $i=1,\,2$, есть решение уравнения (1_i), причём $q_2(x)\geqslant q_1(x)>0$. Пусть x_1,x_2 – соседние нули $u_1(x)$, причём $a\leqslant x_1<x_2$. Пусть $u_2(x)>0>u_1(x)$ на $[x_1-\delta;x_1)$. Тогда $u_2(x)$ меняет знак на $(x_1;\,x_2)$.

ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРА ВОЛН РЭЛЕЯ ПРИ НАЛОЖЕНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Задорожный А.И., Новгородова В.С. (Ростов-на-Дону)
simon@rsu.ru

Плоские линейные свободные колебания магнитоупругой среды бесконечной электрической проводимости, заполняющей нижнее полупространство $z>0$ и находящейся в стационарном магнитном поле $\overline{H}=(0,0,H)$, $H=const$, описываются следующей краевой задачей на собственные значения в безразмерных переменных

$$\begin{gathered}(1+A)U''(z)-(2+\gamma-\omega^2)U(z)+i(1+\gamma)W'(z)=0,\\ (2+\gamma)W''(z)-(1-\omega^2)W(z)+i(1+\gamma)U'(z)=0\end{gathered}\qquad(1)$$

с граничными условиями отсутствия напряжений на плоскости раздела среды и вакуума

$$(1-\frac{A}{2})U'(0)+iW(0)=0,\quad (2+\gamma)W'(0)+i(\gamma-\frac{A}{2})U(0)=0.\quad (2$$

Здесь функции перемещений представлены в виде $(u_x,u_z)=e^{i(x+\omega t)}(U,W)$, где $\omega>0$ - искомый спектральный параметр; A - число Альфвена; $\gamma=\frac{2\nu}{1-2\nu}$, - коэффициент Пуассона $(0<\nu<0.5)$.

Разыскивая решения в форме $U(z)=A_1e^{-s_1z}+A_2e^{-s_2z}$, $W(z)=B_1e^{-s_1z}+B_2e^{-s_2z}$, где $s_{1,2}(\omega,A,\gamma)$ - корни биквадратного характеристического уравнения системы (1), удовлетворяющие условию затухания $Re(s_{1,2})>0$, приходим к дисперсионному уравнению

$\Delta(\omega, A, \gamma) = 0$:

$$\sqrt{D}\{\left(1-\tfrac{A}{2}\right)\left(\gamma-\tfrac{A}{2}\right)+(2+\gamma)M_1M_2 - \left[\left(\gamma-\tfrac{A}{2}\right)+\left(1-\tfrac{A}{2}\right)(2+\gamma)s_1s_2\right]\tfrac{(2+\gamma-\omega^2)(3+\gamma-\omega^2)}{(1+\gamma)(2+\gamma)s_1s_2}\}=0,$$

в котором обозначено: $D = R^2 - \frac{(1-\omega^2)\,(2+\gamma-\omega^2)}{(1+A)\,(2+\gamma)}$, причем $R = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-\omega^2)}{(1+A)} + \frac{(2+\gamma-\omega^2)}{(2+\gamma)} - \frac{A(1+\gamma)}{(1+A)(2+\gamma)}\right)$, а $s_{1,2} = \sqrt{R \pm \sqrt{D}}$ и, наконец, $M_{1,2} = \frac{(1+A)s_{1,2}^2-(2+\gamma-\omega^2)}{(1+\gamma)s_1s_2}$.

Аналитическое и численное исследование частотного уравнения позволяст сформулировать следующие результаты.

В случае $D \neq 0$ существует единственный с точностью до симметрии корень $|\omega(A,\gamma)| < 1$, значение которого при $A = 0$ совпадает с известным классическим [1]. Интересный эффект наблюдается с ростом параметра A, а именно: при каждом γ имеется такое значение $A^*(\gamma)$, при котором появляется кратный нулевой корень дисперсионного уравнения и возникает монотонная неустойчивость вида $u_x = [U_c(z) + tU_n(z)]\,e^{ix}$. Значение A^* определяется с любой точностью из решения системы уравнений разветвления $\Delta = 0 \wedge \Delta'_\omega = 0$. При $A > A^*$ уравнение имеет два комплексно сопряженных мнимых корня, что, очевидно, ведет к экспоненциальной неустойчивости. В случае $D = 0$ у характеристического уравнения корень будет кратным, а собственная функция запишется в виде $U(z) = (A_1+A_2z)e^{-sz}$. Дисперсионное уравнение естественно изменит свой вид, но при этом доказано, что его корень и корень уравнения $D = 0$ совпадают при конкретных значениях $\widetilde{A}(\gamma)$, определяемых и условия обращения в нуль результанта [2].

Постановка задачи заимствована нами из [3], где детальный анализ частотного уравнения не приводится.

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: "Мир 1975. 872 с.

2. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра.СМБ. М.: "Наука 1965. 300с.

3. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М.: Едиториал УРСС, 2003. 336 с.

ТРАНСОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ[1]

Захарова А.А. (Москва)
nastya.zakharova@ru.net

Известно, что разложение по обобщенному фрейму (обобщенной ортоподобной системе) в гильбертовом пространстве порождает ограниченный линейный оператор с ограниченным обратным (унитарный оператор), действующий из H в $L_2(\Omega)$ (см. [1], [2]).

Для случая сепарабельного гильбертова пространства было доказано, что и обратно, любой ограниченный линейный оператор с ограниченным обратным, действующий из H в $L_2(\Omega)$, может быть описан некоторым обобщенным фреймом с константами a, b (см. [3]). Как следствие, любой унитарный линейный оператор, действующий из H в $L_2(\Omega)$ может быть описан некоторой обобщенной ортоподобной системой (см. [4]). В настоящей работе автор показывает, что подобным образом могут быть охарактеризованы и операторы, действующие в произвольном (возможно, несепарабельном) гильбертовом пространстве. Для этого вводится понятие трансобобщенной системы в гильбертовом пространстве. Именно, вместо счетной системы подпространств пространства H рассматривается система, индексированная порядковыми числами, меньшими некоторого порядкового числа.

Литература

1. Лукашенко Т.П. *О свойствах обобщенных систем разложения, подобных ортогональным*// Известия высших учебных заведений. Математика. – 2000. – №10(461). – С. 33-48.

2. Захарова А.А. *Экстремальное свойство обобщенных фреймов*// Материалы Седьмой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – 2005. – С. 77-78.

3. Захарова А.А. *О существовании обобщенных фреймов*// Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". – 2006. – С. 71-72.

4. Семенова Т.Ю. *О существовании и эквивалентности обобщенных ортоподобных систем*// Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ. – 2001. – №3. – С. 10-15.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00192).

О СЖАТИЯХ ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ[1]

Зверева М.Б., Покорный Ю.В. (Воронеж)
pokorny@kma.vsu.ru

Следуя Курепе, Коллацу, Перову А.И., мы называем множество M псевдометрическим пространством, если на нем определена метрика $\rho(x,y)$, значения которой берутся из множества положительных элементов некоего линейного полуупорядоченного пространства E, Нам удобно считать, что E — банахово пространство, полуупорядоченное конусом (в смысле М. Крейна – М. Красносельского). Мы называем, как это принято, отображение $A : M \to M$ обобщенным сжатием, если существует положительный непрерывный линейный оператор Q такой, что его спектральный радиус $r(Q)$ меньше единицы и, кроме того, если $\rho(Ax, Ay) \leqslant Q\rho(x,y)$ для любых $x, y \in M$.

Назовем пространство E структурно K – нормируемым, если в E существует такая норма $\|\cdot\|_0$, которая эквивалентна исходной в E и, главное, монотонна на K, т.е. $[0 \leqslant u \leqslant v] \to \|u\|_0 \leqslant \|v\|_0$.

Так как монотонной является любая u_0 – норма, то E оказывается структурно нормируемым, если конус K телесен, что очевидно при $E = R^n$ и $K = (R^n)^+$.

Теорема. *Если E структурно K нормируемо, то оператор обобщенного сжатия наверняка является обычным сжимающим оператором в некоторой метрике $\mu(x,y)$, т.е. $\mu(Ax, Ay) \leqslant \gamma\mu(x,y)$ при $\gamma < 1$ и любых $x, y \in M$.*

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зернов А.Е., Чайчук О.Р., Чайчук О.Р. (Одесса)
zernov@ukr.net

Рассматриваются задачи Коши

$$\begin{aligned} \alpha_1(t)x_1'(t) &= F_1(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \\ x_2'(t) &= F_2(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \qquad (1) \\ x_1(0) = 0, &\quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-01-00049)

и

$$\begin{aligned} \alpha_1(t)x_1'(t) &= F_1(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \\ \alpha_2(t)x_2'(t) &= F_2(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \\ x_1(0) = 0, &\quad x_2(0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x_i : (0,\tau) \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$ — неизвестные функции, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $\alpha_i : (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $i \in \{1,2\}$, $g : (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h : (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $F_i : D \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$ — непрерывные функции,

$$D \subset (0,\tau) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

$\lim\limits_{t\to+0} \alpha_i(t) = 0$, $i \in \{1,2\}$, $0 < g(t) \leqslant t$, $0 < h(t) \leqslant t$, $t \in (0,\tau)$.

Решением задачи (1) (соответственно, решением задачи (2)) называется пара непрерывно дифференцируемых функций $x_i : (0,\rho) \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$ $(0 < \rho < \tau)$, удовлетворяющих уравнениям (1) (соответственно, уравнениям (2)) при всех $t \in (0,\rho)$ и удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to+0} x_i(t) = 0, \quad i \in \{1,2\}.$$

Исследуются линейные, возмущенные линейные, нелинейные задачи указанного вида. Приводятся достаточные условия существования непустых множеств решений с требуемыми асимптотическими свойствами при $t \to +0$. Рассматривается вопрос о количестве решений указанного вида. Используются рассуждения качественного характера.

НАХОЖДЕНИЕ ВХОДНОЙ ФУНКЦИИ В СИСТЕМЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Зубова С.П., Раецкая Е.В. (Воронеж)

raetskaya@inbox.ru

Рассматривается динамическая система, описываемая соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Bx(t) + F(t) & t \in [0,\infty) \\ Ax(t) = f(t) \end{cases}$$

где известны $B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и выходная (наблюдаемая) функция $f(t) \in \mathbf{R}^m$.

Требуется найти входную функцию $F(t) \in \mathbf{R}^n$ в случае необратимой матрицы A так, чтобы система была наблюдаемой, то есть состояние $x(t)$ системы было единственным.

Используется метод расщепления уравнений системы на уравнения в подпространствах с помощью разложений
$\mathbf{R}^n = coim\ A \oplus ker\ A$, $\mathbf{R}^m = im\ A \oplus coker\ A$ и проекторов P на $ker\ A$ и Q на $coker\ A$.

Из второго соотношения системы находится:
$x(t) = A^+ f(t) + Px(t)$. После подстановки этого соотношения в первое уравнение исходной системы и расщепления получаемого соотношения на уравнения в подпространствах $ker\ A$ и $coim\ A$ получается система

$$\begin{cases} \dfrac{dPx(t)}{dt} = B_1 Px(t) + PBA^+ f(t) + PF(t) \\ A_1 Px(t) = \dfrac{d}{dt} A^+ f(t) - (I-P)BA^+ f(t) - (I-P)F(t), \end{cases}$$

где $B_1 = PBP$, $A_1 = (I-P)BP$.

В случае обратимости A_1 по произвольно взятой составляющей $(I-P)F(t)$ определяется из второго соотношения последней системы единственное значение $Px(t)$, и из первого соотношения находится $PF(t)$, то есть строятся функции $x(t)$ и $F(t)$. В случае произвольно заданных функции $PF(t)$ и значения $(I-P)F(0)$ однозначно определяются составляющие $(I-P)F(t)$ и $Px(t)$, следовательно, находятся полностью $F(t)$ и $x(t)$.

В случае необратимого A_1 следует расщепить второе уравнение последней системы на уравнения в подпространствах $ker\ A_1$ и $coim\ A_1$, и добавить условие разрешимости второго уравнения, то есть уравнение в $coker\ A_1$. Из полученной системы по некоторым произвольно заданным компонентам $F(t)$ находятся остальные компоненты $F(t)$ и $x(t)$.

Литература

Раецкая Е.В. О полной наблюдаемости одной системы с малым параметром /Е.В.Раецкая // Математические методы и приложения. Труды десятых математических чтений МГСУ. Москва, 2003. – с.80 – 85.

ЗАДАЧИ ТУРАНА И ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Иванов В.И. (Тула)
ivaleryi@mail.ru

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — одномерный тор, $0 < h < 1/2$, $K_T(h)$ ($K_D(h)$) — класс 1-периодических непрерывных четных положительно определенных функций $f(x)$, для которых $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ ($f(x) \leqslant 0$) при $h \leqslant |x| \leqslant 1/2$.

Задачи Турана и Дельсарта состоят в вычислении величин

$$A_T(h) = \sup\left\{\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)dx : f \in K_T(h)\right\},$$

$$A_D(h) = \sup\left\{\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)dx : f \in K_D(h)\right\}$$

соответственно.

Положим

$$g_h(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{z}{[k/h]}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{z}{[k/h]+1}\right)^2\right),$$

$$\Lambda(h) = \left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} g_h(\nu)\right)^{-1}, \quad G_h(z) = \Lambda(h)g_h(z),$$

$$\varphi_h(x) = G_h(0) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} G_h(\nu)\cos 2\pi\nu x.$$

Теорема 1. Если $h \in (0, 1/2)$, то

$$A_T(h) = A_D(h) = \Lambda(h).$$

Функция $\varphi_h(x)$ является экстремальной.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 05-01-39005, № 06-01-00372).

Пусть $E^+_{2\pi h}$ — класс четных целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $2\pi h$, для которых

$$F(\nu) \geqslant 0 \ (\nu \in \mathbb{Z}), \quad F(0) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) = \int_{\mathbb{R}} F(x)dx = 1.$$

Теорема 2. Если $h \in (0, 1/2)$, то

$$\Lambda(h) = \sup\left\{F(0) : F(z) \in E^+_{2\pi h}\right\}.$$

Функция $G_h(z)$ является экстремальной.

ПРОСТРАНСТВА МАКСВЕЛЛА С НУЛЕВЫМ ТОКОМ

Иванова А.С., Паринов М.А. (Иваново)
sk_ivanov@list.ru, map1951.ivgu@mail.ru

На основе групповой классификации пространств Максвелла [8] получена классификация электромагнитных волн по подгруппам группы Пуанкаре [1–7]. Для завершения классификации пространств Максвелла с нулевым током, мы дополняем ее классами статических пространств Максвелла, удовлетворяющих уравнению Максвелла $\nabla_k F^{ik} = 0$ (и не являющихся электромагнитными волнами).

Литература

[1] Иванова А.С. Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 1999. – Вып. 2. – С. 50–62.

[2] Иванова А. С. Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты // Матем. и ее прилож.: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2004. – № 1. – С. 51–62.

[3] Иванова А. С. Электромагнитные волны, допускающие трансляции в изотропном направлении // ФПМ. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 49–56.

[4] Иванова А. С. Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих гиперболические винты // Матем. и ее прилож.: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2005. – № 2. – С. 61–72.

[5] Иванова А. С. Шесть классов электромагнитных волн, допускающих параболические винты // Матем. и ее прилож.: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2006. – Вып 1 (3) – С. 17–22.

[6] Иванова А. С., Паринов М. А. Некоторые классы электромагнитных волн, допускающих параболические винты // ФПМ. – 2006. – Т. 12. – № 3–4. – С. 63–74.

[7] Иванова А. С., Паринов М. А. Классы электромагнитных волн, допускающих пропорциональные бивращения // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 2. –

[8] Паринов М. А. Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // ФПМ. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОБОБЩЁННОЙ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Исламов Г.Г. (Ижевск)

gislamov@udm.ru

Мы продолжаем исследования, посвящённные методам и алгоритмам вычисления геометрической кратности собственных значений матриц большой размерности (см.[1,2] и указанные там работы). Вычислительные эксперименты в пакете Mathematica показывают, что для решения указанной задачи оказывается полезной операция PseudoInverse[L] построения псевдообратной матрицы для заданной матрицы L порядка $n \sim 2^{10}$. Заметим, что псевдообратная матрица является одним из представителей класса обобщённых обратных матриц. Напомним, что всякая матрица L^- порядка n, удовлетворяющая матричному равенству $L = LL^-L$, называется обобщённой обратной матрицей. Пусть E - единичная матрица порядка n. Хорошо известно, что линейная оболочка столбцов матрицы $E - L^-L$ порождает подпространство решений однородной системы $Lx = 0$, где x - вектор-столбец длины n. Мы нашли простое доказательство следующего факта: Квадрат евклидовой нормы матрицы $E - LL^-$ даёт нам размерность этого подпространства. Отсюда, в частности, получаем результат для геометрической кратности собственного значения λ матрицы M, если взять $L = M - \lambda E$.

Литература

1. Islamov G.G. On the exact formula for eigenvalue geometric multiplicity // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конф. Воронеж: ВГУ, 2005. - с. 7.

2. Исламов Г.Г. Итерационная схема вычисления геометрической кратности ненулевых собственных значений оператора Гильберта-

Шмидта // Современные методы теории краевых задач: Материалы воронежской весенней математ. школы "Понтрягинские чтения - XVII".- Воронеж: ОАО "Центрально-Черноземное книжное издательство 2006. - с. 75.

О ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Ищенко А.С. (Белгород)
science@bupk.ru

Изучается задача об экстремуме функционала

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu'^2}{2}\,dx + \int_0^l \frac{u^2}{2}\,dQ + \int_0^l uu'\,dK + \int_0^l u\,dF + \int_0^l u'\,dG,$$

где интегралы понимаются по Стилтьесу, и, соответственно, функции Q, K, F, G предполагаются принадлежащими BV.

Эта задача расширяет классическую постановку, соответствующую гладким Q, K, F, G и изучалась ранее автором при $K = const$, т.е. $K' = 0$, $G = const$, т.е. $G' = 0$.

Естественным аналогом первой вариации является следующий функционал

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^l pu'h'\,dx + \int_0^l uh\,dQ + \int_0^l [uh' + u'h]dK + \int_0^l hdF + \int_0^l h'dG,$$

обычным образом определяющий необходимое условие в форме типа уравнения Эйлера.

При анализе условий экстремума, связанных со второй вариацией, возникает уравнение

$$p\omega' + \int_0^x \omega\,dQ + K' = const$$

или в дифференциалах (в смысле Ю.В. Покорного)

$$d(p\omega') + \omega\,dQ + dK = 0.$$

Условия Якоби, описываемые с помощью этого уравнения в терминах сопряженных точек, или, по другому, неосцилляции, позволяют гарантировать и существование поля экстремалей $u(x,\lambda)$, описываемого совершенно в стандартных терминах, с одной коррективой: гладкая зависимость $u(x,\lambda)$ по λ подразумевает опору на метрику пространства E функций, обладающих свойством абсолютной непрерывности и производными из BV.

ОБ ОДНОМ ОБОЩЕННОМ УРАВНЕНИИ АБЕЛЯ СО СДВИГОМ НА ОТРЕЗКЕ

Калина И.А., Лысенко З.М. (Одесса)

Рассматривается обощенное уравнение Абеля со сдвигом β отрезка $[a,b]$, где $\beta(t) \neq t$ для всех $t \in (a,b)$:

$$u(x)\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(t)\int\limits_{\beta(x)}^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-\beta(x))^{1-\alpha}} = f(x), \qquad (1)$$

$a < x < b$, $0 < \alpha < 1$. Здесь u, v, β – кусочно-непрерывные на $[a,b]$ функции, допускающие разрывы на концах $x=a$ и $x=b$.

Предполагается, что $\varphi \in H^*$, $f \in H^*_\alpha$ (определение классов H^* и H^*_α см. в [1]).

Используя связь [1] интегралов I^α_{a+}, I^α_{b-} дробного порядка α и сингулярного интегрального оператора $(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{v.p.}\int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x}dt$, уравнение (1) сводится к уравнению

$$KF = \Phi,$$

где $K \overset{def}{=} a_1(x)I + a_2(x)W_\beta + a_3(x)W_\beta S$ a_1, a_2 и a_3 — кусочно-непрерывные на $[a,b]$ функции, $(I\psi)(x) = \psi(x)$, $(W_\beta\psi)(t) = \psi[\beta(t)]$, $\Phi(x) = \Gamma(\alpha)(b-x)^{-\alpha} I^\alpha_{a+}\varphi(x)$.

Имеет место:

Теорема: Если уравнение (1) нётерово (см. [2]), то нётеров оператор K.

Отметим, что исследование на нётеровость оператора K можно проводить по схеме, предложенной, например, в [3].

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.– Минск: Наука

и техника, 1987.

2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М.: Наука, 1977.

3. Карлович Ю.И. Сингулярные интегральные операторы со сдвигом контура интегрирования в область и их приложения.– Дис. канд. физ.-мат. наук, Одесса, 1974.

О СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С. (Липецк)

kalitvin@mail.ru

К частным случаям системы интегральных уравнений

$$x_i(t,s)=\sum_{j=1}^{k}\Big[\int_T a_{ij}(t,s,\tau,x_j(\tau,s))d\tau+\int_S b_{ij}(t,s,\sigma,x_j(t,\sigma))d\sigma+$$

$$+\iint_D c_{ij}(t,s,\tau,\sigma,x_j(\tau,\sigma))d\tau d\sigma\Big]\equiv\sum_{j=1}^{k}(A_{ij}+B_{ij}+C_{ij})x_j(t,s), \qquad (1)$$

$i=1,...,k$, приводятся некоторые задачи теории систем с существенно распределенными параметрами. В (1) $T\subset R^n$ и $S\subset R^m$ — компактные множества положительной лебеговой меры, $D=T\times S, t\in T, s\in S, a_{ij}, b_{ij}$ и c_{ij} $(i,j=1,...,k)$ — заданные ядра Вольтерра, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Напомним, что вещественная измеримая функция a_{ij} $(i,j=1,...,k)$ называется ядром Вольтерра, если в T задано семейство замкнутых множеств $T(t)$ $t\in T$, причем $t\in T(t)$, при $\bar t\in T(t)$ $T(\bar t)\subset T(t)$ и выполнены свойства: $\forall\,\delta>0\ \exists\ T(\delta)=\{t_1,...,t_p\}$ такое, что $mes(T(t_{r-1})\Delta T(t_r))<\delta$ $(r=1,...,p)$, $T(0)=\oslash$, $\bigcup_{r=1}^{p}T(t_r)=T$, где Δ обозначает симметрическую разность множеств; $a_{ij}(t,s,\tau,u)=0$ при $\tau\notin T(t)$. Аналогично определяется ядро Вольтерра b_{ij} $(i,j=1,...,k)$ с семейством замкнутых множеств $S(s)$ $(s\in S)$, а вещественная измеримая функция c_{ij} $(i,j=1,...,k)$ называется ядром Вольтерра, если $c_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u)=0$ при $\tau\notin T(t)$ $(i,j=1,...,k)$ или $c_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u)=0$ при $\sigma\notin S(s)$ $(i,j=1,...,k)$.

Измеримую функцию $a : D \times \Omega \to R$, где Ω — одно из множеств T, S, D, будем называть интегрально ограниченной, если $\int_\Omega |a(t,s,w)|dw \leqslant A < \infty$, и непрерывной в целом, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t-t'| < \delta$ и $|s-s'| < \delta$ $\int_\Omega |a(t,s,w) - a(t',s',w)|dw < \epsilon$.

Теорема. *Если операторы A_{ij}, B_{ij} и C_{ij} действуют в пространстве $C(D)$, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $(i,j = 1,...,k)$ — ядра Вольтерра и:*

$$|a_{ij}(t,s,\tau,u) - a_{ij}(t,s,\tau,v)| \leqslant l_{ij}(t,s,\tau)|u-v|,$$

$$|b_{ij}(t,s,\sigma,u) - b_{ij}(t,s,\sigma,v)| \leqslant m_{ij}(t,s,\sigma)|u-v|,$$

$$|c_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u) - c_{ij}(t,s,\tau,\sigma,v)| \leqslant n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)|u-v|,$$

где l_{ij}, m_{ij} и n_{ij} — непрерывные в целом и интегрально ограниченные ядра Вольтерра с теми же семействами множеств, что и у a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} соответственно, то система (1) имеет единственное решение в пространстве непрерывных на D вектор-функций со значениями в R^k, и оно может быть найдено методом итераций.

Литература

1. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177с.

ВИХРЕВАЯ СТРУКТУРА И ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Калугина Ю.Н. (Томск), Чернов В.Е. (Воронеж)

E-mail: amora@list.ru, E-mail: slava@niif.vsu.ru

Квазипериодической функцией (КПФ) будем называть гладкую комплекснозначную функцию $F(x,y)$ двух вещественных переменных x и y, которая периодична по ним с точностью до фазового множителя:

$$\begin{aligned} F(x+1,y) &= \exp[\mathrm{i}\alpha(x,y)]F(x,y) \\ F(x,y+1) &= \exp[\mathrm{i}\beta(x,y)]F(x,y), \end{aligned}$$

где α и β — гладкие вещественные функции, а точка (x,y) лежит в элементарной ячейке квазипериодичности (единичном торе). КПФ возникают, например, при описании движения квантовых частиц в периодическом потенциале, волновых полей в Фурье-оптике и др. (см. [1] и цитированную. там литературу).

Показано, что основные свойства КПФ характеризуются вихревой структурой, под которой будем понимать геометрию поверхностей уровня $|F(x,y)|$ вблизи вихрей — точек сингулярности фазы $F(x,y)$ [2]. Такое описание гораздо более информативно, чем топологическое (основанное на индексе Черна). Доказано существование КПФ с заданной структурой вихрей путем явного построения такой 'эталонной' КПФ. Две КПФ с одинаковой структурой вихрей эквиваленты в том смысле, что их отношение является строго периодической и как минимум непрерывной функцией. На основе этого принципа эквивалентности произвольная КПФ с любой заданной структурой вихрей может быть аппроксимирована с помощью эталонных КПФ с точностью, достаточной для физических приложений. В качестве другого приложения принципа эквивалентности предложен метод вычисления квазипериодических собственных векторов периодических матриц. Обсуждены возможные приложения к проблемам квантового хаоса в системах, фазовым пространством которых является тор.

Литература

[1] I. Dana and V. Chernov / J. Phys. A **35**, 10101 (2002).

[2] M.V.Berry and M.R.Dennis / Proc. R. Soc. A **456**, 2059 (2000).

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА КЛЮЧЕВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФРЕДГОЛЬМОВА ОТОБРАЖЕНИЯ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ С РЕЗОНАНСОМ 1:2

Карпова А.П., Сапронов Ю.И. (Воронеж)

Известно, что многие вопросы задачи о бифуркации циклов (периодических решений ОДУ) можно весьма эффективно решать методами функционального анализа — на основе дискриминантного анализа параметрического семейства гладких фредгольмовых уравнений

$$f(x,\lambda) = 0, \qquad x \in E, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m$$

(в банаховом пространстве E) с круговой симметрией. При некоторых естественных условиях исследование такого семейства можно осуществить, перейдя к конечномерному (ключевому) уравнению [1]

$$\theta(\xi,\lambda)=0, \qquad \xi=(\xi_1,\,\dots\,,\xi_n)^{\top}\in\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Если f эквивариантно относительно линейного слабо гладкого действия окружности на E и на пространстве образа F и если при $\lambda=0$ отображение f имеет в нуле 4–мерное вырождение с резонансом 1:2, то в подходящих локальных координатах отображение θ приобретает следующий вид:

$$\theta(\xi,\lambda)=(\alpha_1 z_1,\ \alpha_2 z_2)^{\top}+\left(\beta_1\overline{z}_1 z_2,\ \beta_2 z_1^2\right)^{\top}+$$

$$+\left((\gamma_{11}|z_1|^2+\gamma_{12}|z_2|^2)z_1,\ (\gamma_{21}|z_1|^2+\gamma_{22}|z_2|^2)z_2\right)^{\top}+o(|\xi|^3),$$

где $\alpha_j,\beta_k,\gamma_{pq}\in\mathbb{C}$, $z_1=\xi_1+i\xi_2$, $z_2=\xi_3+i\xi_4$. Доклад посвящен задаче вычисления главных коэффициентов уравнения (1) и приложению к дифференциальному уравнению гидродинамического типа [2] (на некоторой 4–мерной алгебре Ли)

$$\dot{u}=[Ju,u]+A(\lambda)u$$

($[\cdot,\cdot]$ — коммутатор (скобка Ли)).

Литература

1. Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж, ВГУ. 2002. – 185 с.

О ЦПТ ДЛЯ РЯДОВ ПО ПМОНС С МАЛЫМИ ЛАКУНАМИ

Карпова А.П., Сапронов Ю.И. (Владимир)
sl@vpti.vladimir.ru

Рассматривается ПМОНС (система Виленкина) $\varphi_n(x)\}$, $n=0,1,2,\dots$; $x\in[0,1]$, построенная с помощью последовательности чисел $\{p_k\}$ (подробное определение см., например, в [1]). Пусть $\{n_k\}$ — последовательность номеров, подчиненная условию: $(n_{k+1}/n_k)\sim\omega(k)$ (при $k\to\infty$), где величина $\omega(k)$ монотонно убывает к нулю, но не быстрее некоторой степени k^{α}, $-1<\alpha<0$ (так называемая регулярная лакунарность порядка $\omega(k)$); $\{a_k\}$ — невозрастающая последовательность коэффициентов такая, что величина

$$A_N=\left(\sum\nolimits_{k=1}^{N}a_k^2\right)^{1/2}\to\infty \text{ при } N\to\infty.$$

Сумма вида $T_N(x) = (1/A_N)\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_{n_k}(x)$ трактуется как двумерный случайный вектор с компонентами $\mathrm{Re}\,\{T_N(x)\}$ и $\mathrm{Im}\,\{T_N(x)\}$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, F — борелевская σ-алгебра на Ω и P — мера Лебега на F.

Введем обозначения: $m_0 = 1$, $m_{k+1} = m_k \cdot p_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$; $q_k = \max\{p_i :\ i \leqslant k\}$ для $k = 1,2,\ldots$; $f(0) = 0$; для $k = 0,1,\ldots$ полагаем $f(k+1) = \max\{i : n_i < m_k\}$; $B(k) = A_{f(k+1)}$.

Определим операцию $(\oplus)$ на множестве натуральных чисел согласно правилу:

$$n = k \oplus l, \text{ если } \varphi_n(x) = \varphi_k(x)\cdot\varphi_l(x).$$

Величину $\Phi(N)$ определим как количество решений уравнения $n_k \oplus n_l = 0$, где $0 < n_k,\ n_l < m_{N+1}$; $\Psi(N,j)$ — количество решений неравенства $0 < n_k \oplus n_l < m_j$, где $m_N \leqslant n_k,\ n_l < m_{N+1}$; $N = 0,1,\ldots$; $j = 0,1,\ldots N$.

В этих обозначениях справедливо утверждение: *при выполнении условий*

а) $\ln q_k = o(B_k\cdot\omega(B_k^2)$ *при* $k\to\infty$;

б) существует предел ρ: $\rho = \lim_{k\to\infty}\Phi(k)/B_k^2, \quad 0\leqslant\rho\leqslant 1$;

в) $\sum_{j=0}^{k}\Psi(k,j) = o(B_k^2)$ *при* $k\to\infty$,

последовательность $\{a_k\varphi_{n_k}(x)\}$ *подчинена центральной предельной теореме (т.е. последовательность* $\{T_N(x)\}$ *слабо сходится к некоторому гауссовскому случайному вектору* $T(x)$*).*

Отметим, что для случая, когда все $a_k = 1$, аналогичный результат получен в [2].

Литература

1. Виленкин Н.Я. Дополнения к книге С.Качмажа и Г.Штейнгауза "Теория ортогональных рядов". М.: Физматгиз, 1958.

2. Левизов С.В. О ЦПТ для ПМОНС в случае неограниченного роста последовательности $\{p_k\}$ // Труды МЦ НИИММ, Казань, 2001 г., Т.8. С. 149-150.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Карюк А.И., Редькина Т.В. (Ставрополь)
karyuk@mail.ru

В работе [1] получено уравнение

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}\right)u_z-\frac{k}{2}\left(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\right)u_x+\frac{1}{k}(\ln u)_{zz}- \\ -\alpha_{11}^2 k(\ln u)_{xx}-\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2}u\ln u=0, \qquad (1)$$

которое имеет пару Лакса. Выполняя преобразования координат $\tilde{x}=z+x, \tilde{z}=z-x, u(\tilde{x},\tilde{z})=e^{w(\tilde{x},\tilde{z})}$, исходное уравнение сводится к виду

$$\alpha_{21}\alpha_{32}e^w(w_{\tilde{x}}+5w_{\tilde{z}}-w)+2w_{\tilde{x}\tilde{z}}=0, \qquad (2)$$

где α_{ij} — постоянные коэффициенты. Используя подстановку $\xi=\tilde{x}+\alpha\tilde{z}$, приводим (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$e^w(Aw-Bw')=w$$

где $A=\dfrac{1}{2\alpha\alpha_{21}\alpha_{32}}$, $B=(5\alpha+1)A$. Это уравнение не содержит независимой переменной ξ, поэтому оно допускает алгебру L_1 с базисом $X_1=\frac{\partial}{\partial\xi}$.

Интересен частный случай уравнения (1), когда $\alpha_{32}=0$:

$$\frac{\alpha_{31}}{2}ku_x-\frac{\gamma\alpha_{21}+2\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}u_z-\frac{1}{k}(\ln u)_{zz}+\alpha_{11}^2k(\ln u)_{xx}=0,\ \gamma-const.$$

С помощью линейных преобразований

$$z=a\tilde{z}-\frac{\gamma\alpha_{21}+2\alpha_{31}}{\alpha_{11}\alpha_{31}}\tilde{x},\ x=\frac{\gamma\alpha_{21}+2\alpha_{31}}{k\alpha_{11}\alpha_{31}}\tilde{x}-\frac{a}{k}\tilde{z}$$

и замены функции $u=e^w$ при условии $a\neq 0$ (a - некоторый параметр) получим уравнение

$$w_{\tilde{x}\tilde{z}}=Ce^w w_{\tilde{z}},$$

где $C=-\frac{k}{4}\frac{\alpha_{31}\left((2+\alpha_{11})\alpha_{31}+\gamma\alpha_{21}\right)}{(1+\alpha_{11}^2)(\gamma\alpha_{21}+2\alpha_{31})}$. Для этого уравнения найдено преобразование Беклунда следующего вида $w_{\tilde{x}}-\tilde{w}_{\tilde{x}}=-Ce^{-w}$, $w_{\tilde{z}}=$

$e^{\tilde{w}-w}$, которое переводит исходное уравнение к простейшему однородному гиперболическому уравнению $\tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{z}} = 0$.

Литература

[1]. Карюк А.И., Редькина Т.В. Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка // Труды международной конференции "Современные методы физико-математических наук 9-14 октября 2006г., г. Орел. Том 1.

ВЛИЯНИЕ СООТНОШЕНИЯ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ НА ПРОЦЕСС ДОСТИЖЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛЯХ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Кетова К.В., Сабирова О.Р. (Ижевск)

primat@istu.ru

Рассматривается нелинейная оптимизационная динамическая модель в непрерывном времени ($t \geqslant 0$) в n-мерном фазовом пространстве $\mathbf{X} \geqslant 0$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, с заданной производственной функцией $Y = F(\mathbf{X})$. Каждый год произведенный продукт Y распределяется на потребление и инвестиции в различные факторы производства, причем величина каждого из вложений определяется как $s_i Y$, где s_i - координаты вектора управления.

Будем рассматривать задачу с n управляющими переменными, основанную на классической постановке задачи оптимального управления для макроэкономических моделей [1]. Динамика каждого фактора, входящего в производственную функцию, описывается уравнением вида $\dot{X}_i = \bar{s}F(\mathbf{X}) - \eta_i X_i$, $i = \overline{1,n}$, $t \in [0,T]$; $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_T$, $\mathbf{X} \geqslant 0$; $\bar{s} \in \Omega_n = \{\bar{s} = (s_1, s_2, ..., s_n) : s_i \in [0,1]$, $i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} s_i \leqslant 1\}$; $\mathbf{X}_T = \mathbf{X}^*(T)$, где $\mathbf{X}^*$ - параметры квазистационарной траектории.

Конкуренция за инвестиционные ресурсы $s_i Y$ возникает в зависимости от соотношения между факторами производства и их оптимальными значениями в начальный момент времени. В результате выделяются три этапа движения экономической системы. Например, для случая $X_{i0} < X_{i0}^*$, $i = \overline{1,n}$ первый этап характеризуется тем, что средства будут инвестироваться в те факторы, которые наиболее удалены от своих фазовых траекторий, до тех пор, пока все фазовые координаты не окажутся равноудаленными от квазистационара. Второй этап заключается в равномерном наращивании факторов производства. Третий этап - движение экономической системы по квазистационарной траектории.

Таким образом, возможность достижения оптимальной траектории за заданный период времени, скорость достижения, момент достижения зависят от соотношения факторов, учитываемых производственной функцией.

Литература

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд-во "Прогресс 1975.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ СИСТЕМ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Кинзебулатов Д.М. (Ижевск)

damir@math.ucalgary.ca

В работе [1] в рассмотрение вводится пространство $\mathcal{T}'$ обобщенных функций, допускающих умножение на разрывные функции. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал; $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ открыто, $D \neq \varnothing$. В пространстве векторно-значных о.ф. $\mathcal{T}'(I, \mathbb{R}^n)$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)v, \tag{1}$$

где $(t_0, x_0) \in D$, функции f, $g : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывны по t и локально-липшицевы по x, обобщенная функция

$$v = w + \sum_{k=1}^{\infty} \langle c_k, \delta_{\tau_k}^{\alpha_k} \rangle, \text{ где } w \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n), \ c_k \in \mathbb{R}^n, \ \delta_{\tau_k}^{\alpha_k} \in \mathcal{T}'(I, \mathbb{R}^n),$$

$\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \subset I$, $J = [-1/2, 1/2]$, $\alpha_k \in \mathbb{C}(J, \mathbb{R}^n)$ – формы дельта-функций $\delta_{\tau_k}^{\alpha_k}$ (см. [1]), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — покомпонентное произведение. Решением (1) на интервале $\Omega \subset I$, $t_0 \in \Omega$, называется $x \in s\mathbb{BV}^{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (см. [1]), $x : \Omega \times J \mapsto \mathbb{R}^n$, такое, что $x(t)(s) \in D$ для всех $t \in \Omega$, $s \in J$ и уравнение (1) обращается в равенство в $\mathcal{T}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Пусть

$$M = \{y \in \mathbb{R}^n : \eta_i(y) \leqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

где $\eta_i \in \mathbb{C}^{(1)}(D, \mathbb{R})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$; M положительно инвариантно относительно (1), если для любого решения x такого, что для некоторого $t_0 \in I$ $x(t_0-) \in M$, выполнено $x(t)(s) \in M$ $(t \geqslant t_0, \ s \in J)$. Если

$v = 0$, то (1) – система с обычной правой частью, определение положительной инвариантности совпадает с классическим. Следующее обобщает теорему Нагумо для систем с обычной правой частью [3]:

Теорема 1. Пусть $\nabla\eta_i(y)$ линейно-независимы для каждого $y \in \partial M$ $(i \in L_y)$. Если $(\nabla_y\eta_i(t,y), f(t,y)+g(t,y)v) \leqslant 0$ $(i \in L_y)$ в $T'(I,\mathbb{R})$ для всех $y \in \partial M$, то множество M является положительно инвариантным относительно системы (1).

Литература

1. V. Derr, D. Kinzebulatov. Distributions with dynamic test functions and multiplication by discontinuous functions. // Preprint, arXiv:math. CA/0603351 (2006).

2. D. Kinzebulatov. Systems with distributions and viability theorem. // J. Math. Anal. Appl. (в печати).

3. M. Nagumo. Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen. // Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24, 1942.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИНВАРИАНТАМИ ВАСИЛЬЕВА МАЛЫХ ПОРЯДКОВ

Кирин Н.А. (Коломна)

Как известно, каждая коса из n нитей представляет собой пространственно-временную диаграмму движения n материальных точек на плоскости $\mathbb{C}$. Теорема, согласно которой, полный набор инвариантов Васильева различает любые косы, позволяет различать такие динамические системы. В свою очередь, динамическую систему на конфигурационном пространстве $X_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | z_i \neq z_j, i \neq j\}$ можно определить гамильтонианом, который связан с инвариантами Васильева.

В качестве гамильтониана таких систем можно выбрать мнимую часть некоторого итерированного интеграла Чена от замкнутой дифференциальной формы $\widetilde{\omega} = \sum_{i<j} X_{ij} \otimes \omega_{ij}$, составленную из логарифмических дифференциальных форм $\omega_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$, определенных на конфигурационном пространстве. Построенный, таким образом гамильтониан будет являться динамическим инвариантом кос. Сам же итерированный интеграл, являясь их топологическим инвариантом, будет представлять инвариант Васильева некоторого конечного порядка, если выполнены условия интегрируемости универсальной связности, отвечающей логарифмической дифференциальной форме

$\widetilde{\omega}$.

Показано, что гамильтонова система, отвечающая инварианту Васильева первого порядка, совпадает с уравнениями движения n точечных вихрей на плоскости. Обсуждаются свойства построенных динамических систем, обусловленные выбором того или иного инварианта Васильева. Приводятся примеры динамических систем, связанных с инвариантами Васильева второго порядка, обладающими ограниченными траекториями в фазовом пространстве. Анализируются условия некоторых конфигураций вихрей на плоскости.

Литература

[1] Berger M A Hamiltonian dynamics generated by Vassiliev invariants J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 1363-1374

[2] Kohno T. Vassiliev Invariants of Braids and Iterated Integrals Advanced Studies in Pure Mathematics 27, 2000

[3] Козлов В.В. Общая теория вихрей. - Ижевск. Издательский дом "Удмуртский университет 1998 (24-34).

[4] Борисов А.М., Мамаев И.С. Математические методы динамики вихревых структур.- Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.- 368с.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЬЮТОНА В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Кирьяцкий Э.Г. (Вильнюс)

E-mail:eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Пусть E – круг $|z| < 1$. Разделенную разность n-порядка голоморфной в E функции $f(z)$ определим формулой

$$[f(z); z_0, ..., z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)...(\xi - z_n)},$$

где Γ – простой замкнутый контур, охватывающий все точки $z_0, ..., z_n \in E$.

Если $z_0 = ... = z_n = 0$, то разделенная разность превращается в коэффициент Маклорена. Пусть S класс однолистных в E функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Л. де Бранжем были даны точные оценки коэффициентов Маклорена функций из класса S и тем самым положительно решены известные гипотезы Л.

Бибербаха и И. Милина (см. [1]). Доказано, что если $f(z) \in S$, то

$$\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(0)\right| \leqslant n, \quad n = 2, 3, 4, ..., \tag{1}$$

со знаком равенства для функции

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{-i\alpha}z)^2}, 0 \leqslant \alpha < 2\pi. \tag{2}$$

Используя (1) установлена следующая

Теорема (Э.Г. Кирьяцкий). *Если $f(z) \in S$, то*

$$|[f(z); z_0, ..., z_n]| \leqslant \Big(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1 - |z_m|}\Big) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1 - |z_m|},$$
$$n = 0, 1, 2, ..., \ \forall z_0, ..., z_n \in E. \tag{3}$$

Знаки равенства в (3) *имеют место тогда и только тогда, когда $z_m = |z_m|e^{i\alpha}$, $m = 0, 1, ..., n$ (т.е. все точки $z_0, ..., z_n$ принадлежат радиусу круга E), а функция $f(z)$ имеет вид* (2).

Литература

1. Александров И. А. Доказательство Л. де Бранжем гипотезы И.И. Милина и гипотезы Л. Бибербаха // Сибирский мат. журнал, 1987, **27**(2), с. 7-20.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ И АВТОВОЛН В СЛОЖНЫХ БИОФИЗИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Киселева Т.В. (Ставрополь)

polet65@mail.ru

Автоколебания и связанные с ними автоволновые процессы характерны для самых различных явлений в достаточно разнообразных физических, биологических, химических и других средах. Уже более полувека это направление является одним из наиболее актуальных для исследований тех же биоритмов. Наиболее трудной здесь является проблемы построения математических моделей, адекватных исследуемым системам. Трудность усугубляется тем, что весьма типичные для естественнонаучной практики автоволновые процессы плохо наблюдаемы, так как они либо происходят почти мгновенно, когда практически не возможно распознать и сепарировать поведение ключевых параметров, либо происходят слишком медленно, что еще хуже для анализа.

Изучаемая система привлекла наше внимание из-за достаточно удобного временного режима (порядка 1 минуты). Таким образом, приэлектродный слой магнитной жидкости может служить модельной средой для изучения автоколебательных и автоволновых процессов.

Адекватным математическим языком для описания автоволновых процессов является язык дифференциальных уравнений в частных производных. В системах, описывающих реальные среды, уравнений может быть несколько десятков. Однако основные закономерности распространения автоволн хорошо моделируются в рамках двухкомпонентной системы. Поэтому практический интерес в области автоволновых процессов в возбудимых средах, представляют задачи, решаемые в двумерной постановке. Математическая модель исследуемого процесса представлена в виде двумерного уравнения параболического типа [1].

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + D\left(\frac{\partial^2 \rho_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial y^2}\right) = j(t), \quad x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0, \quad (1)$$

где ρ_s – –максимальный заряд, отнесенный к единице поверхности; D– коэффициент диффузии; $j(t)$ – вектор плотности тока направлен перпендикулярно расчетной поверхности.

Проведенный на базе математических пакетов MatLab и COMSOL Multiphysics численный анализ решения соответствующей математической модели, позволил оптимизировать проблему главного параметра, определяющего эволюцию исследуемой системы. Полученные значения искомой величины ρ_s, качественно согласующиеся с данными лабораторных экспериментов, показали достаточно высокую эффективность подобранной модели [2, 3, 4].

Литература

1. Чеканов В.В., Кандаурова Н.В., Бондаренко Е.А. Динамическая модель приэлектродного слоя магнитной жидкости как электроактивная среда // 10-я Международная конференция по магнитным жидкостям: Сб. научных трудов. – Плес, 2002. – С. 86-89.

2. Вегера Ж.Г., Диканский Ю.И. Эффекты структурообразования и особенности переноса заряда в тонких слоях магнитной жидкости // Материалы 50 научно-методической конференции преподавателей и студентов "Университетская наука – региону". – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2005. – С. 11-15.

3. Чеканов В.В., Бондаренко Е.А., Кандаурова Н.В. Накопление заряда в электрофоретической ячейке с магнитной жидкостью // Проблемы физико-математических наук: Материалы XLIII научно-методической конференции преподавателей и студентов "Университетская наука - региону". – Ставрополь: Изд-во СГУ, 1998. – С. 3-4.

4. Падалка В.В., Ерин К.В. Изучение приэлектродных процессов в диэлектриках с магнитными коллоидными частицами // VII Международная конференция "Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей". – С.-Перербург, 2003. – С. 208-210.

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Климов А.В., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

artkl@rambler.ru, msumin@sinn.ru

Доклад посвящен изложению результатов исследования возможностей алгоритма двойственной регуляризации [1] для решения линейного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве

$$A^0 z = h^0, \; z \in D \subset Z, \tag{1}$$

где Z и H – гильбертовы пространства $A^0 : Z \to H$ – линейный непрерывный оператор, $h^0 \in H$ – фиксированный элемент, $D \subset Z$ – выпуклое замкнутое множество. Пусть вместо точных исходных данных A^0 и h^0 имеются их приближения: $A^\delta : Z \to H$ – линейный ограниченный оператор, $h^\delta \in H$, $\|A^\delta - A^0\| \leqslant \delta$, $\|h^\delta - h^0\| \leqslant \delta$. Тогда рассмотрим при $\alpha > 0$ регуляризованную возмущенную двойственную задачу

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2 \to \max, \quad \lambda \in H,$$

где $V^\delta(\lambda) \equiv \min\limits_{z \in D} L^\delta(z,\lambda)$, $L^\delta(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta \rangle$ и вве-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04-01-00460.

дем обозначения: $z^\delta[\lambda] = \operatorname*{argmin}_{z\in D} L^\delta(z,\lambda)$, $\lambda^\alpha \equiv \operatorname*{argmax}_{\lambda\in H} R^{\delta,\alpha}(\lambda)$. В докладе показывается, что при выполнении условия согласования $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ регуляризованное решение $z^\delta[\lambda^\alpha]$ сильно в Z сходится к нормальному решению z^0 задачи (1). Эта сильная сходимость будет иметь место вне зависимости от того, разрешима или нет невозмущенная двойственная к исходной задаче (1) задача максимизации $V^0(\lambda) \to \sup$, $\lambda \in H$. В работе рассматривается проблема итеративной регуляризации изложенного выше двойственного алгоритма и регуляризирующее правило его останова в случае конечной фиксированной отличной от нуля ошибки задания исходных данных δ. Приводятся иллюстративные примеры.

Литература

1. Сумин М.И. *Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – том 44. № 11. – С. 2011–2019.

К ВОПРОСУ О МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Климович Г.А., Гайшун Л.Н., Глушанкова Л.Я., Широканова Н.И. (Минск)

Ведущей формой обучения студентов высших учебных заведений является, безусловно, лекция. Но в качественном усвоении материала, эффективном его использовании и в познании нового не менее важную роль играет практическое занятие.

В отличие от лекции на практических занятиях преобладает самостоятельная работа, направляемая преподавателем познавательная деятельность студентов.

Как и все виды учебных занятий в современном высшем учебном заведении, практические занятия претерпевают изменения. Они призваны активировать обучаемых, учат самостоятельно и логически мыслить, анализировать явления, обобщать факты. Способствуют регулярной и планомерной работе студентов в ходе изучения данного курса. А это способствует решению основной задачи современного обучения, заключающейся не только в том, чтобы дать широкое образование, но и в том, чтобы научить будущего специалиста самостоятельно приобретать и углублять свои знания, сформировать у него стойкие познавательные мотивы и умение быстро ориентироваться в стремительном потоке научной информации.

И если в работе [1] главное внимание уделено двухуровнему методу обучения и соответствующей литературе, то здесь мы хотим остановиться на вопросах увеличения доли творческого труда студентов на занятиях.

Литература

1. Гайшун Л.Н., Глушанкова Л.Я., Климович Г.А., Широканова Н.И. О методике проведения практических занятий: материалы междунар. междисциплинарной научно-практической конф. "Современные проблемы науки и образования Ялта, 1-10 мая 2003 г.

О НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

Кокорева В.В. (Ставрополь)

В работе обсуждаются условия существования и единственности неотрицательного нетривиального решения нелинейной спектральной задачи

$$\begin{cases} -pu'(x) + pu'(0) + \int\limits_0^x u\,dQ = \lambda \int\limits_0^x f(u(s))\,d\sigma(s), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

при следующих условиях: $p(x)$ — функция конечного на $[0;1]$ изменения, причем $\inf p > 0$; $\sigma(x)$ и $Q(x)$ — возрастающие функции; $f(u)$ — непрерывная при $u \geqslant 0$, $f(0) = 0$ и линейно-вогнута; интегралы в (1) понимаются по Риману–Стилтьесу.

Используя свойства (типа положительности) функции влияния задачи

$$\begin{cases} -pu'(x) + pu'(0) + \int\limits_0^x u\,dQ = F(x) - F(0), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

удается доказать, что спектр Λ задачи (1) совпадает с некоторым интервалом $(\lambda_0, \lambda_\infty) \subset (0, +\infty)$; каждому $\lambda \in \Lambda$ соответствует единственное неотрицательное нетривиальное решение $u_\lambda(x)$ задачи (1), при этом $\max u_\lambda(x) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$ и $\max u_\lambda(x) \to +\infty$ при $\lambda \to \lambda_\infty$.

О ПЛОХО ПРИБЛИЖАЕМЫХ ФУНКЦИЯХ ИЗ КЛАССА[1]

Колесников С.В. (Иваново)
kolesn@ivanovo.ac.ru

Пусть $f(z)$ — функция, ограниченная на единичной окружности Γ, L^{∞} — пространство всех функций, ограниченных на Γ с нормой, равной существенному супремуму $|f(z)|$, H^{∞} — подпространство пространства L^{∞}, состоящее из граничных значений функций, ограниченных и аналитических в единичном круге.

Функция $f(z) \in L^{\infty}$ называется плохо приближаемой функцией, если для любой функции $g \in H^{\infty}$ выполняется неравенство $||f-g|| \geqslant ||f||$. В 1972 г. С.Поредой (см. [1], С. 178) было доказано, что, если функция $f(z)$ непрерывна на Γ и ее модуль равен постоянной, то она тогда и только тогда плохо приближаема, когда ее число вращений отрицательно. Под числом вращений функции f понимается деленное на 2π приращение $\arg f(z)$, когда z обходит единичную окружность в положительном направлении.

Для функций класса VMO на Γ также можно определить число вращений. Для этого рассмотрим функцию

$$f_{\theta}(z) = \frac{1}{2\theta} \int\limits_{-\theta}^{\theta} f(ze^{it})dt.$$

Можно показать, что число вращений функции $f_{\theta}(z)$ для достаточно малых θ является постоянной величиной. Эту постоянную назовем вращением функции f. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы функция $f(z)$, $z \in \Gamma$, из класса VMO, модуль которой равен постоянной почти всюду на Γ, была плохо приближаемой, необходимо и достаточно, чтобы она имела на окружности отрицательное число вращений.

Литература

1. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции*// –М.: Мир, 1984.

---

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-00962).

О НЕКОТОРОМ ПОДХОДЕ К СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ОРГАНИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Кондратьева Н.А., Леонтьева В.В. (Запорожье)
nat@ukros.zssm.zp.ua, nat@.zsu.zp.ua

Интенсификация процесса обучения, связанная с интеграцией нашей системы образования в европейскую и мировую, направленная на реализацию Болонской декларации, определяет не только изменения в содержании, формах и методах проведения учебного процесса, но и в системе оценивания получаемых знаний в рамках кредитно-модульной системы [1]. Учитывая изменения, вносимые в объем и содержание математических курсов, выбор глубины и строгости изложения материала на фоне сокращения аудиторной нагрузки и существенного увеличения роли самостоятельной работы студентов, система итогового модульного контроля, определяемого в тестовом варианте, а также выбор балльной шкалы оценивания знаний является весьма проблематичной [2,3]. Проблема сложности оценивания знаний лежит в плоскости самой специфики получения математических знаний. Известно, что никакой тест по математическим дисциплинам не в состоянии оценить уровень и глубину математического мышления обучаемого так, как это может и делает опытный лектор. В этой связи целесообразно введение тестового контроля исключительно на промежуточных (модульных) этапах обучения, в то время как итоговый контроль знаний должен осуществляться лектором с учетом результатов модульных оценок.

Литература

[1] Борисов Е., Кимстач Г. *О методике СРС*//Высшее образование в России.-2001,№6.-С.139-140.. - М.: Госстатиздат, 1958. - 640 с.

[2] Кудрявцев Л.Д. *Мысли о современной математике и ее изучении.* – М.: Наука, 1977. – 112 с.

[3] Кондратьева Н.А., Леонтьева В.В. *О некотором подходе к совершенствованию организации самостоятельной работы студентов* // Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы"(27 января-2 февраля 2005 г., г.Воронеж). Материалы конференции. - Воронеж: ВГУ, 2005. - С. 118-119.

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Корнев В.В. (Саратов)

E-mail: KornevVV@info.sgu.ru

В работе [1] был впервые рассмотрен следующий класс интегральных операторов

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $A(x,t)$ непрерывна дифференцируема n раз по x и один раз по t, $\frac{\partial^s}{\partial x^s} A(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{s,n-1}$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$, $\delta_{s,n-1}$ — символ Кронекера.

Было установлено, что ряд Фурье любой функции $f(x) \in L[0,1]$ по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) таких операторов на любом отрезке из интервала (0,1) равносходится с тригонометрическим рядом Фурье этой функции.

Следующий результат также свидетельствует о глубокой связи поведения разложений по с.п.ф. операторов вида (1) с поведением тригонометрических рядов Фурье.

Теорема. *Пусть* α *— одно из чисел* $0, 1, \ldots, n-1$. *Тогда для любой* $f(x) \in C^{\alpha}[0,1]$, *у которой* $f^{(\alpha)}(x)$ *имеет на* $[0,1]$ *ограниченную вариацию и которая удовлетворяет условиям* $f^{(k)}(1) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, \alpha)$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} ||f(x) - S_r(f,x)||_{C^{\alpha}[0,1]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* A, *соответствующим характеристическим значениям, которые лежат в круге* $|\lambda| < r$.

Замечание. Наличие условий $f^{(k)}(1) = 0$ вызвано тем, что этим условиям удовлетворяют с.п.ф. оператора A.

Литература

1. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменным

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-01-00003.

пределом интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции. Информац. бюллетень, 2001 — Т. 2, № 1. — С. 60-72.

ДВАЖДЫ ГЛАДКИЕ САМОАФФИННЫЕ КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

Кравченко А.С. (Новосибирск)
kravch@math.nsc.ru

Непрерывной кривой Γ на плоскости R^2 называется образ непрерывного сюръективного отображения $f : [0,1] \to \Gamma \subset \mathrm{R}^2$. Кривая Γ называется *самоаффинной*, если существует конечный набор аффинных отображений $S_k : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $k = 1, \ldots, n$ такой, что $\Gamma = S_1(\Gamma) \cup \ldots \cup S_n(\Gamma)$. Кривая Γ называется *дважды гладкой*, если её параметризация $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема по параметру t.

Теорема. Любая дважды гладкая самоаффинная кривая на плоскости R^2 является отрезком или дугой параболы.

Литература

1. Асеев В. В., Тетенов А. В., Кравченко А. С. *О самоподобных жордановых кривых на плоскости* // Сиб.Мат.Журнал Новосибирск: ИМ СО РАН, 2003. Том 44. №3. С. 481–492.

2. Кравченко А.С. *Гладкие самоаффинные кривые* // Препринт № 161, Новосибирск: ИМ СО РАН, 2005. 26 с.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ $\{e^{-\lambda_n t} | \mathrm{Re}\,\lambda_n > 0\}$ В ПРОСТРАНСТВАХ $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$ И $C_0(\mathbb{R}_+)$[1]

Краснобаев И.О. (Москва)
botamsu@mail.ru

Как хорошо известно, условие

$$\sum_n \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty$$

не является необходимым для полноты системы

$$\left\{e^{-\lambda_n t} \mid \mathrm{Re}\,\lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}\right\} \qquad (1)]$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №06-01-00326

в пространстве $C_0(\mathbb{R}_+)$. Для этого пространства было известно необходимое условие Саса. Оно было усилено Левинсоном, и являлось более содержательным в случае, когда последовательность λ_n стремилась к бесконечности. Это условие было обобщено А.М. Седлецким для последовательности λ_n, содержащей конечное число предельных точек на мнимой оси и, может быть, содержащей подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В данной работе рассматривается случай, когда последовательность λ_n имеет счетное число предельных точек на мнимой оси, отделимых друг от друга.

Теорема *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ *имеет вид*

$$\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2 \cup \ldots \cup \Lambda^k \cup \ldots,$$

где $\Lambda^k = \{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\lambda_{n,k} \to i\gamma_k$, $n \to \infty$, *а* $\gamma_k \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\inf\limits_{n\neq m} |\gamma_n - \gamma_m| = \rho > 0$. *Пусть* $\theta(x)$ *— неотрицательная, неубывающая при* $x \geqslant 0$ *функция, что* $\int\limits^{\infty} \frac{\theta(x)}{x^2}\,dx < \infty$. *Тогда, если система* (1) *неполна в* $L^p(\mathbb{R}_+), p > 2$ *и* $C_0(\mathbb{R}_+)$, *то для всякой последовательности* $\{a_k \geqslant 0\}$ *такой, что ряд* $\sum\limits_k a_k$ *сходится, выполняется условие*

$$\sum_k \sum_n \left(\operatorname{Re}\lambda_{n,k} + \exp\left(-a_k\theta\left(\frac{1}{|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|}\right)\right)\right) = \infty.$$

МНОГОЧЛЕНЫ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В НЕКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Крейн М.Н. (Липецк)

travkin@lipetsk.ru

По аналогии с отображениями первой степени, то есть отображениями вида $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x b_i$, введенными автором ранее [1], в некоммутативной алгебре A определяются отображения (или однородные многочлены) n-й степени (n>1):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_{i1} x a_{i2} x a_{i3} \cdots a_{in} x a_{i,n+1}$$

Здесь в каждом слагаемом x встречается в качестве сомножителя n раз; a_{ij} - элементы алгебры, среди которых могут быть единицы. Количество слагаемых k не связано с n. Отображением нулевой степени естественно назвать отображение, тождественно равное некоторому ненулевому элементу алгебры. Сумму конечного числа однородных многочленов назовем многочленом степени n, где n - максимальная из степеней слагаемых. Эту сумму можно рассматривать и как формальную сумму, и как сумму отображений. Если алгебра имеет единицу, то множество таких многочленов включает в себя множество классических многочленов с коэффициентами из поля, над которым определена алгебра. Определив обычным образом операции сложения и умножения многочленов и умножения многочленов на элементы поля так, чтобы выполнялись привычные правила раскрытия скобок, получим градуированную алгебру $P(\mathcal{A}) = \oplus_{n=1}^{\infty} P_n(\mathcal{A})$, где $P_n(\mathcal{A})$ — множество многочленов (отображений) n-й степени. Очевидно, „приращение" отображения из $P(\mathcal{A})$, возникающее при „приращении" аргумента, является многочленом от „приращения" аргумента, где слагаемое первой степени оказывается „производной" исходного отображения. Сопоставление многочлену его „производной" задает дифференцирование алгебры $P(\mathcal{A})$.

В нормированной алгебре можно определить аналитическую функцию как ряд однородных многочленов $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)$. Формулируются некоторые достаточные условия сходимости такого ряда, приводятся формулы для нахождения радиуса сходимости.

Литература

1. Krein M.N. The Mappings of Degree 1.
www.hindawi.com/GetArticle.aspx?doi=10.1155/AAA/2006/90837

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Кремлев А.Г., Гребенникова И.В. (Екатеринбург)

kremlev001@mail.ru

Рассматривается минимаксная задача управления [1] для сингулярно возмущенных систем ($\mu > 0$ — малый параметр) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию) следующего вида:

$$M(\mu)dz(t)/dt = A(t)z(t) + G(t)z(t-h) + B(t)u(t),$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, матрица $M(\mu) = diag(E_n, \mu E_m)$, где E_k — единичная $k \times k$- матрица. Начальное состояние системы $z(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $z_0 = z(t_0)$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $z_0 \in \mathrm{Z}_0$, Z_0 — выпуклый компакт (в R^{n+m}); $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0]$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $\mathbf{L}_2^r(\mathrm{T})$. Предполагается выполненным условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Как и в [2], фундаментальная матрица системы $Z[t, \tau]$ представлена в блочном виде соответственно размерностям быстрых и медленных переменных. Для блоков получены рекуррентные формулы их вычисления, асимптотические оценки (по параметру μ). На основе полученных представлений исследованы асимптотические свойства ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы, множества достижимости, найдены аппроксимации их опорных функций.

Указана предельная задача, конструкция которой представляет собой некоторое расширение вырожденной задачи, включающее систему уравнений в вариациях (для быстрых переменных) при возмущении управления в правом пограничном слое. Решение предельной задачи позволяет сформировать управляющее воздействие, аппроксимирующее с точностью $O(\mu)$ оптимальное значение в исходной задаче управления.

Литература

1. А.Б.Куржанский. Управление и наблюдение в условиях неопределенности // М.: Наука. 1977.

2. А.Г.Кремлёв. Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной системы // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. №11. С. 1892-1904.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА НА ОБЛАСТИ

Крепкогорский В.Л. (Казань)

Рассматривается интерполяция пространств Бесова $(B^{s_0}_{p_0}(G), B^{s_1}_{p_1}(G))_{\theta,q}$ в «недиагональном» случае, на области $G \subset R^n$ с сильным условием конуса [1].

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

При $x, y \in R_n, a \in R_n, h \in R_1, E \subset G \subset R_n, m \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\Delta^m(y, E)f(x) := \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-1} \frac{m!}{j!(m-j)!} f(x + jy)$$

при $[x, x+my] \subset E$ и $\Delta^m(y,E)f(x) := 0$, если это не так;

$$\Delta_i^m(h,E)f(x) := \Delta^m(he^i,E)f(x), \ i = 1,2,3,\dots,n;$$

e^i – единичный вектор, i-ая координата которого равна 1, а остальные 0.

Пусть $Q_0 = (-1;1)^n$, при $t > 0$ рассмотрим множество $G_t := \{x : x + tQ_0 \subset G\}$.

При $m > 0$ через $\delta_i^{(m)}(f,x,t) = \int\limits_{-1}^{1} |\Delta_i^m(tu,G_t)f(x)|du$ обозначим модуль непрерывности.

При $1 < p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, -\infty < s < \infty, -\infty < k < \infty$ определим норму интерполяционного пространства

$$||f|BL_{p,q}^{s,k}(G)|| = ||f|L_{p,q}(G)||+$$

$$+\left(\int\limits_0^\infty \left(t^{1/p} \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\delta_i^{(m)}\left(f,x,d^{-j}\right)\right) \cdot d^{j(s-k/p)}\right)^*_{d^{jk}\eta\otimes\mu}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Теорема. *Если для* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. *Числа* k *и* b – *коэффициенты из уравнения прямой, проходящей через точки* $(1/p_i, s_i)$, *то*

$$(B_{p_0}^{s_0}(G), B_{p_1}^{s_1}(G))_{\theta,q} = (F_{p_0,p_0}^{s_0}(G), F_{p_1,p_1}^{s_1}(G))_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}(G).$$

Литература

1. Бесов О.В. О пространствах Соболева-Лиувилля и Лизоркина-Трибеля на области. // Тр. Матем. ин-та РАН имени Стеклова. 1990. Т.192. С.20-34.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ТИПА[1]

Крученов М.Б. (Москва)

E-mail: mbk2003@bk.ru

Рассматривается скалярное линейное однородное

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант №03-01-00174-а

функционально-дифференциальное уравнение (ФДУ) точечного типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j x(t + n_j), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, s}$, с начальным условием

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Определим банахово пространство функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathcal{L}_\mu^1 C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \max_{0 \leqslant r \leqslant k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| x^{(r)}(t) \mu^{|t|} \right| < +\infty \right\},$$

в котором будут строиться решения задачи Коши (1)–(2).

Теорема ([2]). *Если для заданного $\mu \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\left(-\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \mu^{n_j} - \ln \mu^{-1} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \mu^{-n_j} - \ln \mu^{-1} \right) > 0,$$

то для любого $\bar{x} \in \mathbb{R}$ существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$ задачи Коши (1)–(2). Более того, $x(\cdot) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_\mu^1 C^{(k)}(\mathbb{R})$. □

Исследование базируется на формализме, основанном на групповых особенностях ФДУ точечного типа [1]. Такой подход, в отличие от стандартного метода изучения линейных задач с помощью аналогов теоремы Нетер, позволяет обойтись без изучения свойств импульсных решений сопряженного уравнения (т.е. имеющих разрывы первого рода в точке $\bar{t}$).

Литература

[1] Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений и их приложений. Групповой подход.// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ, 2004, Том 8, с.3-147.

[2] Бекларян Л.А., Крученов М.Б. О разрешимости линейного однородного функционально-дифференциального уравнения точечного типа.// Дифференциальные уравнения (в печати).

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Кувардина Л.П., Хромов А.П. (Саратов)
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Пусть вещественная трижды непрерывно дифференцируемая функция $\theta(x)$ монотонно убывает, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$ и $\theta(\theta(x)) \equiv 1$. Тогда $\theta'(x) < 0$. Таким образом, $\theta(x)$ является инволюцией и она порождает оператор отражения: $Sf(x) = f(\theta(x))$. Рассмотрим интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x),t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(x,t)$ непрерывна по x и t вместе с производными A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2} $\left(A_{x^st^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j}A(x,t)\right)$ и $A(x,x) \equiv 1$. Дифференциальные операторы с операторами отражения имеют давнюю историю и интенсивно исследуются в настоящее время. Оператор (1) при $\theta(x) = 1 - x$ и $\theta(x) = (1-x)/(ax+1)$ $(a > -1)$ изучались в [1] и [2].

Теорема. *Если $f(x) \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to 0}\max_{0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon}|S_r(f,x) - \sigma_r(f_1,\xi)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)}| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ - частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ - частичная сумма ряда Фурье по тригонометрической системе $\{\exp 2k\pi\beta^{-1}ix\}_{-\infty}^{+\infty}$ для тех k, для которых $|2k\pi| < \beta r$; $f_1(\xi) = f(\varphi(\xi))$, $\int\limits_0^{\varphi(\xi)} d(\tau)\,d\tau = \xi$, $d(x) = \sqrt{-\theta'(x)}$, $\beta = \int\limits_0^1 d(t)\,dt$.

Литература

1. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях// Матем. заметки. 1998. Т. 64, N6. С. 932-949.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-01-00003.

2. Белоусова Л.П. Теорема о равносходимости спектральных разложений двух интегральных операторов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 10-й Саратов. зимн. школы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С.17.

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В R^n

Кузнецова Т.Б., Тюрин В.М. (Липецк)
tuvm@stu.lipetsk.ru

В докладе приняты стандартные обозначения: X - гильбертово (или конечномерное пространство со скалярным произведением) $C = C(R^n, X)$ - пространство непрерывных ограниченных функций $u : R^n \to X$ с sup-нормой ($n \in N$); $C^m = C^m(R^n, X)$ - пространство функций $u : R^n \to X$, непрерывных ограниченных вместе с производными $D^\alpha u$ до порядка m включительно ($m \in N$); $M^p = M^p(R^n, X)$ - пространство Степанова измеримых (по Бохнеру) функций $u : R^n \to X$ с нормой

$$\|u\|_{M^p} = \sup_{x \in R^n} \left(\int\limits_{K(x)} \|u(x)\|^p \right)^{1/p} \quad (p > 1),$$

$\|\cdot\|$ - норма в X, где $K(X)$ - единичный куб в R^n; $H^m = H^m(R^n, X)$ - пространство Соболева функций $u : R^n \to X$ с нормой $\|u\|_m$ ($m \in N$); $L^p = L^p(R^n, X)$ - пространство Лебега измеримых функций $u : R^n \to X$ с обычной нормой $\|u\|_0$.

Рассмотрим дифференциальное выражение в частных производных

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha(x) D^\alpha \ (m \in N),$$

в котором коэффициенты $A_\alpha(x)$ являются непрерывными функциями $A_\alpha : R^n \to Hom(X, X)$ и $\sup \|A_\alpha(x)\| \, (x \in R^n) < \infty$. очевидно, определен линейный ограниченный оператор $P : H^m \to L^p$, действующий по формуле $P_u = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha(x) D^\alpha n(x)$.

Оператор $P : H^m \to L^p$ назовем Φ_+ - оператором, если его область значений $Jm(P : H^m \to L^p)$ замкнута и ядро $ker(P : H^m \to L^p)$ конечномерно.

Обозначим $\|u\|_{M^p(O,R)} = \sup\limits_{|x|\leqslant R}\left(\int\limits_{K(x)}\|u(x)\|^p\,dx\right)^{1/p}$.

Основной результат доклада это

Теорема. Для того чтобы оператор $P : H^m \to L^p$ был Φ_+ - оператором, необходимо, а при конечномерном X и достаточно, чтобы существовали такие постоянные $K > 0$ и $R > 0$, что для всех функций $u \in H^m$ выполнялось неравенство $\|u\|_m \leqslant K\|Pu\|_0 + K\|u\|_{M^p(O,R)}$.

Приводятся другие предложения о Φ_+ - операторах, вытекающих из основной теоремы, являющейся обобщением известных результатов.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСЛОВИИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПОРОГОВОГО ТИПА[1]

Кузьмин М.Ю. (Воронеж)

kuzmin@math.vsu.ru

Доказано существование решений вариационного неравенства порожденного краевой задачей следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(x) = F_i(x), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u(x) = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(x) = -p(x)\delta_{ij} + \varphi(I(u(x)))\varepsilon_{ij}(u(x)), \quad (3)$$

при $x \in \Omega, i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

$$u^\eta(s) = 0 \quad \text{если } \|f^\tau(s)\|_{R^n} \leqslant g(s),$$

$$f^\tau(s) = -\left(g(s) + h(\|f^\eta(s)\|_{R^n}, \|u^\eta(s)\|_{R^n})\right)\frac{u^\eta(s)}{\|u^\eta(s)\|_{R^n}}$$

$$\text{если } \|f^\tau(s)\|_{R^n} > g(s), \quad (4)$$

при $s \in \partial\Omega$. В соотношениях (1)-(4) Ω – ограниченная область евклидова пространства $R^n (n = 2, 3)$ с липшицевой границей $\partial\Omega$; $u = (u_1, \ldots, u_n)$ – поле скоростей жидкости; $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ – тензор напряжений; $\delta = \{\delta_{ij}\}$ – тензор Кронекера; $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$;

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 04-01-00081) и Минобрнауки РФ.

$I(u) = \sum_{i,j=1}^{n}(\varepsilon_{ij}(u))^2$; $f = (f_1, \ldots, f_n), F = (F_1, \ldots, F_n)$ - поверхностные и объемные силы соответственно; φ, g, h – некоторые известные функции;$f^\tau, u^\tau, f^\eta, u^\eta$ – касательные и нормальные составляющие векторов силы и скорости соответственно.

Задача (1)-(4) описывает движение некоторого класса нелинейно-вязких жидкостей при краевом условии проскальзывания порогового типа. В частном случае, когда g и h – константы, соответствующий результат для системы Навье-Стокса получен в [*].

Литература

[*] H. Fugita, "A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions Suricaisekikenkiusho Kokyuroko 888, 199-216(1994).

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА ПО НАПРАВЛЕНИЯМ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Куприянова Ю.В. (Саратов)

KupriyanovaJulia@rambler.ru

Пусть $\overline{T} = (A_1A_2A_3)$ — замкнутый невырожденный треугольник на плоскости с диаметром d, функция $f \in C^4(\overline{T})$, $\mathbf{e}_{i,k}$ — единичные векторы, коллинеарные сторонам $\overrightarrow{A_iA_k}$ треугольника T, $P_{12} = \frac{A_1+A_2}{2}$. Строим полином Q степени три, интерполирующий функцию f вместе с ее производными по направлению сторон T в вершинах $A_i, i = \overline{1,3}$. В качестве условия, окончательно определяющего полином Q, выбираем условие

$$\frac{\partial Q(P_{12})}{\partial \mathbf{e}_{13}} = \frac{\partial f(P_{12})}{\partial \mathbf{e}_{13}}.$$

В работе [1] рассмотрен случай, когда A_1A_3 — наибольшая, A_1A_2 — наименьшая стороны и получены оценки аппроксимации всех частных производных до третьего порядка включительно в терминах синуса наибольшего угла. Ранее в [2] были получены оценки аппроксимации первых частных производных в терминах синуса среднего угла. Мы получим оценки аппроксимации не частных производных, а производных по направлениям сторон треугольника.

Теорема. *Пусть функция $f \in C^4(\overline{T})$, d - диаметр T,*

$$M_4 = \max\left\{\left|\frac{\partial^4 f}{\partial \mathbf{e}_1^k \mathbf{e}_2^{4-k}}\right|\right\}, k = \overline{0,4},$$

и пусть $Q(\mathbf{x})$ — интерполяционный полином. Тогда справедливы следующие оценки

$$\left|\frac{\partial^n (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^k \partial \mathbf{e}_{13}^{n-k}}\right| \leqslant CM_4 d^{4-n}, 1 \leqslant n \leqslant 3, 0 \leqslant k \leqslant n.$$

При $n = 1$ аналогичный результат получен в [3].

Литература

1. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Труды института математики и механики УрО РАН. 2005. Т.11. №2.

2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type // Math. Comp. 1995. V. 64. № 211. P. 929-941

3. Куприянова Ю.В. Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов. 2006. Вып. 8. С. 59-61.

О ЦПТ ДЛЯ РЯДОВ ПО ПМОНС С МАЛЫМИ ЛАКУНАМИ

Курбыко И.Ф., Левизов С.В. (Владимир)

sl@vpti.vladimir.ru

Рассматривается ПМОНС (система Виленкина) $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x \in [0, 1]$, построенная с помощью последовательности чисел $\{p_k\}$ (подробное определение см., например, в [1]). Пусть $\{n_k\}$ — последовательность номеров, подчиненная условию: $(n_{k+1}/n_k) \sim \omega(k)$ (при $k \to \infty$), где величина $\omega(k)$ монотонно убывает к нулю, но не быстрее некоторой степени k^α, $-1 < \alpha < 0$ (так называемая регулярная лакунарность порядка $\omega(k)$); $\{a_k\}$ — невозрастающая последовательность коэффициентов такая, что величина

$$A_N = \left(\sum\nolimits_{k=1}^{N} a_k^2\right)^{1/2} \to \infty \text{ при } N \to \infty.$$

Сумма вида $T_N(x) = (1/A_N) \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_{n_k}(x)$ трактуется как двумерный случайный вектор с компонентами $\mathrm{Re}\{T_N(x)\}$ и $\mathrm{Im}\{T_N(x)\}$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, F — борелевская σ-алгебра на Ω и P — мера Лебега на F.

Введем обозначения: $m_0 = 1$, $m_{k+1} = m_k \cdot p_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$; $q_k = \max\{p_i : \ i \leqslant k\}$ для $k = 1, 2, \ldots$; $f(0) = 0$; для $k = 0, 1, \ldots$ полагаем $f(k+1) = \max\{i : n_i < m_k\}$; $B(k) = A_{f(k+1)}$.

Определим операцию ($\oplus$) на множестве натуральных чисел согласно правилу:

$$n = k \oplus l, \text{ если } \varphi_n(x) = \varphi_k(x) \cdot \varphi_l(x).$$

Величину $\Phi(N)$ определим как количество решений уравнения $n_k \oplus n_l = 0$, где $0 < n_k,\ n_l < m_{N+1}$; $\Psi(N, j)$ — количество решений неравенства $0 < n_k \oplus n_l < m_j$, где $m_N \leqslant n_k,\ n_l < m_{N+1}$; $N = 0, 1, \ldots$; $j = 0, 1, \ldots N$.

В этих обозначениях справедливо утверждение: *при выполнении условий*

а) $\ln q_k = o(B_k \cdot \omega(B_k^2))$ *при* $k \to \infty$;

б) существует предел ρ: $\rho = \lim_{k\to\infty} \Phi(k)/B_k^2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$;

в) $\sum_{j=0}^{k} \Psi(k, j) = o(B_k^2)$ *при* $k \to \infty$,

последовательность $\{a_k \varphi_{n_k}(x)\}$ *подчинена центральной предельной теореме (т.е. последовательность* $\{T_N(x)\}$ *слабо сходится к некоторому гауссовскому случайному вектору* $T(x)$*).*

Отметим, что для случая, когда все $a_k = 1$, аналогичный результат получен в [2].

О БАЗИСАХ РИССА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА n –ГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО ОПЕРАТОР ОТРАЖЕНИЯ[1]

Курдюмов В.П. (Саратов)

Обозначим через L оператор

$$ay^{(n)}(x) + y^{(n)}(1 - x), \quad x \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 y^{(k_i)}(t)\, d\sigma_i(t) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \quad 0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n \leqslant n - 1.$$

Предположим, что $\sigma_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ – линейно независимые функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1, $a^2 \neq 1$ и выполняется некоторое условие регулярности.

Пусть λ_k — собственные значения оператора L. Зафиксируем некоторую ветвь функции $\lambda^{1/n}$ и обозначим $\rho_k = \lambda^{1/n}$. Тогда числа ρ_k расположены в некоторых полуполосах $P_i = \Big\{\rho : |\mathrm{Re}\, \rho q_i| \leqslant h,$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-01-00003.

$\operatorname{Im}\rho q_i \geqslant 0\}$ $(i = 1, 2)$, h и q_i — константы. Каждую полуполосу P_i представим в виде объединения конечного числа различных групп прямоугольников $\Pi_{k,i}$, границы которых $\Gamma_{k,i}$ состоят из отрезков: $\operatorname{Re}\rho q_i = \pm h$, $C_{k,i} \leqslant \operatorname{Im}\rho q_i \leqslant C_{k+1,i}$; $\operatorname{Im}\rho q_i = C_{k,i}$; $\operatorname{Im}\rho q_i = C_{k+1,i}$, $|\operatorname{Re}\rho q_i| \leqslant h$; так, что в некоторой δ–окрестности $\Gamma_{k,i}$ нет чисел ρ_k. Каждая группа состоит из равных между собой прямоугольников и для каждого прямоугольника конкретной группы существует натуральное $t_{k,i}$, что $\Gamma_{k,i} = \Gamma_i + i \cdot t_{k,i}$, где Γ_i — некоторый фиксированный контур этой группы. Пусть Π_0 — ограниченная односвязанная область, содержащая $P_1 \cap P_2$ и в δ–окрестности Π_0 нет чисел ρ_k.

Теорема. *Система корневых функций оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0, 1]$. При этом в скобки нужно объединять те корневые функции, которые соответствуют собственным значениям, для которых числа ρ_k попали в $\Pi_0, \Pi_{k,i}$.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ[1]

Кутерин Ф.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

xredor@yandex.ru msumin@sinn.ru

Данная работа посвящена применению регуляризованного двойственного алгоритма [1] с целью решения обратной задачи финального наблюдения для абстрактного параболического уравнения.

Пусть H - гильбертово пространство, $U_1 \subset L^2(0, T; H)$, $U_2 \subset H$ — выпуклые замкнутые множества, $\mathcal{D} \equiv U_1 \times U_2$ — множество допустимых управлений.

Обратная задача состоит в нахождении минимального по норме элемента $\pi = (u, v) \in \mathcal{D}$ по приближенно известному в финальный момент времени наблюдению $y(T) \in H$ для абстрактной задачи Коши

$$y'(t) + Ay(t) = u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad y(0) = v, \tag{1}$$

где A — энергетическое расширение линейного неограниченного симметричного положительно определенного оператора, $A \in L(V \to V^*)$, V — гильбертово пространство, и имеют место плотные и непрерывные вложения $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$. Решение задачи (1) понимается в обобщенном смысле (см., например, [2]).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04-01-00460.

Обсуждается проблема согласования ошибки финального наблюдения и параметра регуляризации двойственного алгоритма [1] для обеспечения сходимости приближенного решения к точному решению исходной задачи. Рассматривается вопрос итеративной регуляризации двойственного алгоритма, проблема его останова при заданной фиксированной ошибке финального наблюдения. Обсуждается также возможность приложения двойственного алгоритма к решению одной задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с обратным временем.

Литература

1. Сумин М.И. *Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44. №11. - С. 2011-2019.

2. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. *Основы метода динамической регуляризации.* Изд-во Московского университета, 1990.

КРИТЕРИЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Лабскер Л.Г. (Москва)

llabsker@mail.ru, mmep@mail.ru

Рассмотрим игру с природой [1], в которой $S_A^C = \{A_i : i = \overline{1,m}\}$, и $S_A = \{P = (p_1, \ldots, p_m) : p_i \geqslant 0, i = \overline{1,m}; p_1 + \ldots + p_m = 1\}$ - множества соответственно чистых и смешанных стратегий статистика A; $S \subset S_A$, $S \neq \varnothing$; $\Pi_j, j = \overline{1,n}$, — состояния природы с известными положительными вероятностями; $(a_{ij})_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ - матрица выигрышей статистика A. М.Эддоус и Р.Стэнсфилд [2] на конкретном примере предложили "правило максимальной вероятности" выбора в игре с природой чистых оптимальных стратегий. Цель настоящего сообщения — определить основные понятия критерия максимальной вероятности для оптимальности смешанных стратегий, который будем называть Q^p-критерием, и провести его детальный анализ. Пусть $\Pi_{j_\sigma}, \sigma = \overline{1,l}, 1 \leqslant l \leqslant n$, — состояния природы с максимальной вероятностью; $Q^p(P) = \max\{\sum_{i=1}^m p_i a_{ij_\sigma} : \sigma = \overline{1,l}\}$ — *показатель эффективности стратегии* $P = (p_1, \ldots, p_m)$ *по* Q^p*-критерию*; $Q_S^p \equiv \sup\{Q^p(P) : P \in S\}$*-цена игры в стратегиях множества* S *по* Q^p*-критерию. Оптимальной во множестве* S *по* Q^p*-критерию* назовём стратегию $P^O \in S$, для которой $Q^p(P^O) = Q_S^p$; множество всех таких стратегий обозначим $S^{O(Q^p)}$. Пусть k — целое число такое, что $1 \leqslant k \leqslant m$, и $I \equiv \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$. Состояние Π_l назовём (IQ^p) — *состоянием*, если $a_{i_\tau l} = Q^p(A_{i_\tau})$, $\tau = \overline{1,k}$. Пусть supp $P \equiv \{i \in \{1, \ldots, m\} : p_i > 0\}$ — спектр стратегии $P = (p_1, \ldots, p_m)$; $S_A^{CO(Q^p)}(j_\sigma)$, $\sigma = \overline{1,l}$, — совокупность всех чистых стратегий из множества $S_A^{CO(Q^p)}$, при каждой из которых наибольший выигрыш $Q^p_{S_A^C}$ достигается при состоянии природы Π_{j_σ}.

Доказано: в любой игре с природой $S_A^{CO(Q^p)} \neq \emptyset$; $Q^p_{S_A} = Q^p_{S_A^C}$; $S_A^{O(Q^p)} = \cup_{\sigma=1}^{l} \mathrm{conv} S_A^{CO(Q^p)}(j_\sigma)$; принадлежность $P = (p_1, \ldots, p_m) \in S_A^{O(Q^p)}$ любой стратегии P со спектром supp$P = I$ эквивалентна существованию у природы (IQ^p)-состояния с максимальной вероятностью и равенствам $Q^p(A_{i_\tau}) = Q^p_{S_A^C}$, $\tau = \overline{1,k}$

Литература

1. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. – М.: ДЕЛО, 2001

2. *Эддоус М., Стэнсфилд Р.,* Методы принятия решения. - М., "Аудит ЮНИТИ, 1997.

СЕМЕЙСТВО ВСПЛЕСКОВ С РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫМИ КОНСТАНТАМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лебедева Е.А. (Курск)

ealebedeva2004@mail.ru

В работе [1] для широкого класса ортогональных всплесков (например, всплески Добеши и Баттла-Лемарье) доказано, что константы неопределенности стремятся к бесконечности с ростом гладкости. В работах [2] и [3] построено семейство модифицированных всплесков Добеши, имеющих компактный носитель и сохраняющих локализованность по времени и частоте с возрастанием гладкости. В данной работе построено семейство всплесков, масштабирующие функции которых имеют как и сплайн-всплески экспоненциальное убывание на бесконечности и убывание порядка $O(\omega^{-l})$ при $\omega \longrightarrow \infty$ в частотной области, но константы неопределенности равномерно ограничены по параметру l, определяющему гладкость.

Семейство строится, начиная с маски m_l для стабильной, но неортонормированной масштабирующей функции φ_l:

$$m_l(w) := (\cos 0,5w)^{2l} V_{K(l)}(m_l^M, w) \left(V_{K(l)}(m_l^M, 0)\right)^{-1},$$

где $V_{K(l)}(m_l^M, w)$ — среднее Валле-Пуссена для функции m_l^M, $m_l^M(w) := m^M(w)(\cos 0,5w)^{-2l}$, m^M — маска всплеска Мейера. Масштабирующая функция φ_l определяется соотношением $\widehat{\varphi}_l(w) := \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)$. Ортонормированная масштабирующая функция $\varphi_l^{\perp}$ определяется соотношением $\widehat{\varphi_l^{\perp}}(w) := \varphi_l(w)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k)|^2\right)^{-0,5}$.

Литература

1. Chui C.K., Wang J. High-order orthonormal scaling functions and wavelets give poor time-frequency localization //The Journal of Fourier Analysis and Applications,Vol. 2,5,1996,p.415-426.

2. Novikov I. Ya. Modified Daubechies wavelets preserving localization with growth of smoothness //East J. Approximation. 1995. V.1,N 3.P.314-348.

3. Новиков И. Я. Константы неопределенности для модифицированных всплесков Добеши. // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Тула: ТулГУ, 1998. Т.4, вып.1.С.107-111.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ n-ОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ В.В. ЛЕОНТЬЕВА

Леонтьева В.В. (Запорожье)

victoria@ukros.zssm.zp.ua, nat@zsu.zp.ua

Исследованиям сложных систем управления процессами произвольной природы в настоящее время уделяется достаточно большое внимание [1,2,3]. Необходимость управлять процессом оптимально, то есть наилучшим в определенном смысле образом, возникает в системах, характеристики которых меняются во времени под влиянием управлений. К такому классу систем относится и сложная экономическая система [1,2,3,4,5] имеющая n конечных элементов с различными взаимосвязями между ними, представляемая в векторной форме в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{C}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{C}(\mathbf{t}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-мерный вектор состояния системы (1); $\mathbf{C}(\mathbf{t}) = (C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t))$ – n-мерный вектор управления; $A = \{\gamma_{ij}\}$, $B = \{\lambda_{ij}\}$- матрицы коэффициентов γ_{ij} и λ_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, содержащие основные показатели функционирования макроэкономической системы.

В задаче при помощи принципа максимума Понтрягина определяются такие значения $x_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$, при которых достигается максимум целевого функционала, оценивающего качество исследуемого процесса при следующих краевых условиях на левом конце:

$$x_i(0) = D_i^0, i = \overline{1, n}.$$

Литература

[1] Леонтьев В.В.*Исследование структуры американской экономики.* - М.: Госстатиздат, 1958. - 640 с.

[2] Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. *Опыт математического моделирования экономики.* - М.: Энергоатомиздат, 1996. - 544 с.

[3] Ляшенко І.М. *Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку.* - К.: Вища школа, 1999. - 236 с.

[4] Грищак В.З., Леонтьева В.В. *О динамической модели многоотраслевой экономики.* // Зб. наук. праць. Вісник ЗДУ. - Запоріжжя, 2003, - №1. - С.32-36.

[5] Грищак В.З., Леонтьева В.В. *Об устойчивости некоторого класса динамических моделей экономических систем* // Зб. наук. праць. Вісник ЗДУ. - Запоріжжя. - 2004, №3 - С.60-66.

ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ[1]

Лесных А.А. (Москва)

andrey_les@mail.ru

Рассматривается следующая краевая задача

$$l(y,\lambda) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x,\lambda)y = 0 \qquad (1)$$

$$U_j(y,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\lambda)y^{(k-1)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k-1)}(1) = 0, \qquad j = 1,\dots,n, \qquad (2)$$

где $p_s(x,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{s} p_{\nu s}(x)\lambda^{\nu}$, $p_{\nu s}(x) \in C^{\infty}[0,1]$, $p_{ss}(x) = \mathrm{const}, s = 1,\dots,n$, $p_{nn} \neq 0$, $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ – полиномы. Краевые условия (2) предполагаем нормированными, а их суммарный порядок равен $\varkappa$.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\omega^n + p_{11}\omega^{n-1} + \dots + p_{n-1,n-1}\omega + p_{nn} = 0$$

и обозначим через $\omega_1,\dots,\omega_n$ его корни. Введем числа $\mu_{J_k} = \sum\limits_{\alpha\in J_k} \omega_\alpha$, где $J_k, k = 1,\dots,n$ – произвольное k-элементное подмножество множества $\{1,\dots,n\}$, $\mu_{J_0} = 0$. Предположим, что все корни простые и вещественные. Тогда комплексная плоскость разбивается на объединение $2h$ секторов $S_1,\dots,S_{2h}$, $h \leqslant n$. В каждом секторе имеется фундаментальная система решений $y_1(x,\lambda),\dots,y_n(x,\lambda)$, причем эти решения и их производные имеют при $|\lambda| \to \infty$ асимптотику

$$y_k^{(s-1)}(x,\lambda) = \omega_k^{s-1}\lambda^{s-1}e^{\omega_k x\lambda}[\eta_{ks}(x)] \qquad k,s = 1,\dots,n, \qquad (3)$$

где использовано обозначение $[a] = a_0 + O(\lambda^{-1})$. Для характеристического определителя $\Delta(\lambda) = \det\big(U_i(y_j)\big)_{i,j=1}^{n}$ из асимптотики (3), получаем представление

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\varkappa}\sum_{J_k}[F^{J_k}]e^{\lambda\mu_{J_k}}. \qquad (4)$$

[1]Работа поддержана РФФИ, грант № 04-01-00712, и фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-5247.2006.1.

Пусть отрезок $M = [M_0, M_1]$ есть выпуклая оболочка всех точек μ_{J_k}.

Определение. *Краевая задача (1), (2) называется полурегулярной в правой полуплоскости, если* $F_0^{M_1} \neq 0$, *и полурегулярной в левой полуплоскости, если* $F_0^{M_0} \neq 0$.

Замечание. *Краевая задача (1), (2) регулярна в смысле [4] тогда и только тогда, когда она полурегулярна и в правой, и в левой полуплоскостях.*

Введем аналогично [4] пространство $W^r_{p,U} \oplus \mathbb{C}^N$ и оператор $\mathcal{H}_r$ в этом пространстве, линеаризующий краевую задачу (1), (2).

Теорема. *Оператор $\mathcal{H}_r$ является генератором C_0-полугруппы в том и только том случае, когда задача (1), (2) полурегулярна в правой полуплоскости.*

Следствие. *Оператор $\mathcal{H}_r$ генерирует C_0-группу в том и только том случае, когда задача (1), (2) полурегулярна и в правой, и в левой полуплоскостях.*

Полученные результаты используются для доказательства теорем устойчивости и в теории управления. Например, они позволяют существенно усилить результаты работ [1], [2], [3]. Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова.

Литература

[1] Chen G., Krantz S.G., Ma D.W., Wayne C.E., West H.H. "The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation" in Ed. Sung J. Lee "Operator Methods for Optimal Control Problems" // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1987, 108, 67-96. New York Marcel Dekker Inc.

[2] Grabowski P. "Well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems using Shkalikov's theory" // Opuscula Mathematica, 2006, v.26, N1, 45-97

[3] Guo B.-Z., Yu R. "The Riesz basis property of discrete operators and application to Euler-Bernoulli beam equation with boundary linear feedback control" // IMA J. of Mathematical Control and Information, 2001, v.18, 241-251

[4] Шкаликов А.А. "Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях" // Труды семинара им. И.Г.Петровского, 1983, вып.9, с.190-229

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ЧИСТО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ[1]

Лившиц Е.Д. (Москва)
livshitz@rambler.ru

В настоящей работе работе мы продолжаем исследования скорости сходимости чисто жадного алгоритма (ЧЖА), развивая технику из работ [1] и [3]. Как известно [2], ЧЖА не обеспечивает оптимальную скорость сходимости для функция из класса $A_1(D)$. Мы рассматриваем скорость сходимости ЧЖА на расширениях класса $A_1(D)$. Пусть заданы словарь D, $\gamma \geqslant 0$, $M \geqslant 0$. Рассмотрим множества $\widehat{A}_\gamma(D, M) = \{f \in H \mid \ \forall m \geqslant 1 \ \exists$ конечное Λ, $c_\lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda \in D$, $\lambda \in \Lambda$: $\|f - \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda g_\lambda\| \leqslant \frac{M}{m}$, $\sum_{\lambda\in\Lambda} |c_\lambda| \leqslant Mm^\gamma\}$. Далее определим $\widehat{A}_\gamma(D)$ и норму $|f|_{\widehat{A}_\gamma(D)}$ на нем: $\widehat{A}_\gamma(D) = \bigcup_{M\geqslant 0} \widehat{A}_\gamma(D, M)$, $|f|_{\widehat{A}_\gamma(D)} = \inf\{M \geqslant 0 \mid f \in \widehat{A}_\gamma(D, M)\}$, $f \in \widehat{A}_\gamma(D)$.

Легко видеть, что $\widehat{A}_0(D) = A_1(D)$ и $|f|_{\widehat{A}_0(D)} = |f|_{A_1(D)}$, для всех $f \in A_1(D)$. Имеет место следующая оценка сверху на скорость сходимости ЧЖА в классах $\widehat{A}_\gamma(D)$.

Теорема 1. *Пусть даны $\gamma \geqslant 0$ и ϵ, $0 < \epsilon < \frac{1}{2(1+\gamma)}$. Тогда существует такое $C > 0$, что для всех $f \in \widehat{A}_\gamma(D)$ и $m \geqslant 1$ выполняется неравенство*

$$\|f - G_m(f, D)\| \leqslant C|f|_{\widehat{A}_\gamma(D)} m^{-\min(\frac{1}{6}, \frac{1}{2(1+\gamma)} - \epsilon)}.$$

Для $\gamma > 2$ теорема 1 дает оценку точную по порядку.

Теорема 2. *Пусть D ортонормированный словарь. Для произвольного $\gamma > 0$ существуют такие $C > 0$ и элемент $f \in \widehat{A}_\gamma(D)$, что для всех $m \geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\sigma(f, D) > C|f|_{\widehat{A}_\gamma(D)} m^{-\frac{1}{2(1+\gamma)}}.$$

Литература

1. DeVore R. A., Temlyakov V. N. *Some remarks on Greedy Algorithms* // Advances in Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 173–187.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00160)

2. Livshitz E. D., Temlyakov V. N *Two lower estimates in greedy approximation* // Constructive Approximation. 2003. V. 19. P. 509–524.
3. Лившиц Е.Д. *О скорости сходимости чисто жадного алгоритма* // Математические заметки 2004. Т. 76. № 4. С. 539–552.

ОЦЕНКИ ДЛЯ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $W_p^l(\mathbb{R}^n)$

Лиманский Д.В. (Донецк)
lim3@skif.net; lim@univ.donetsk.ua

Пусть $l := (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \cdots + \alpha_n/l_n$, $D_j := -i\partial/\partial x_j$, $D := (D_1, \ldots, D_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $P(D)$ — дифференциальный полином

$$P(D) = \sum\nolimits_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_\alpha D^\alpha, \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$P^l(D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha D^\alpha$ — его l-главная часть.

Определение 1. Оператор $P(D)$ вида (1) называется l-квазиэллиптическим, если $P^l(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Определение 2. Оператор $P(D)$ вида (1) называется слабо коэрцитивным в (анизотропном) пространстве Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если справедлива оценка

$$\sum\nolimits_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1\|P(D)f\|_p + C_2\|f\|_p \tag{1}$$

с константами $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Де Лю и Миркил [2] показали, что оператор $P(D)$ порядка $l \geqslant 2$ от $n \geqslant 3$ переменных слабо коэрцитивен в изотропном пространстве $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ (т.е. при $l = l_1 = \cdots = l_n$) в точности тогда, когда он эллиптичен. В [1] получен аналог этого критерия для анизотропного случая при теоретико-числовых ограничениях на компоненты вектора l.

Мы указываем широкие классы слабо коэрцитивных в $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, но не l-квазиэллиптических операторов для почти всех l, компоненты которых не удовлетворяют упомянутым выше ограничениям.

Литература

1. Лиманский Д.В., Маламуд М.М. ДАН, **397** (2004), no.4, 453-458.

2. De Leeuw K., Mirkil H. Illinois J.Math., 8 (1964), 112-124.

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

Лисаченко М.И., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

E-mail: lismisha@yandex.ru

Доклад посвящен обсуждению алгоритма двойственной регуляризации [1] для приближенного решения задачи оптимального управления с поточечным фазовым ограничением и с выпуклым целевым функционалом

$$I_0(u) \to \min, \ g(t, x[u](t)) \leqslant 0, \ t \in [0,T], \ u \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

где $g(t,\cdot) : R^n \to R^1$ – выпуклая при всех $t \in [0,T]$ функция,

$$I_0(u) \equiv \int_0^T F(t, x[u](t), u(t))\,dt + G(x[u](T)),$$

$\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,T) : u(t) \in U$ п.в. на $(0,T)\}$, $U \subset R^m$ - выпуклый компакт, $x[u](t)$, $t \in [0,T]$ — решение линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \ x(0) = x_0, \ x \in R^n.$$

Показывается, что алгоритм двойственной регуляризации приводит к сильной сходимости в метрике $L_2(0,T)$ регуляризованных решений к решению исходной (невозмущенной) задачи (1) с фазовым ограничением вне зависимости от того разрешима или нет двойственная к (1) задача. Рассматривается вопрос итеративной регуляризации обсуждаемого двойственного алгоритма, а также вопрос останова итерационного процесса в случае конечной фиксированной ошибки задания исходных данных δ.

Показывается также, что одновременно с конструированием минимизирующей последовательности с помощью алгоритма двойственной регуляризации получаются и необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для исходной задачи (1) с фазовым ограничением.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460).

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризованный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. № 11. С.2001-2019.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Листров Е.А., Рыжкова Н.А. (Воронеж), Шуринов Ю.А.(Москва)

Используя методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1], [2], можно установить причину возникновения эффектов "биения" в экономике на примере модели "Склад–рыночная цена товара" [3]. Математическая модель [3] в наших обозначениях имеет вид:

$$\frac{d(z_0 - z(t))}{dt} = D(t) - S(t), \frac{d(P(t) - P_e)}{dt} = k(z_0 - z(t)),$$

$$D(t) = P_e - d(P(t) - P_e), S(t) = P_e + f(P(t) - P_e). \qquad (1)$$

Модель [3] - пример "жесткой"модели, так как z_0, d, f, k, P_e - положительные постоянные параметры [2]. В [3] система (1) описывает в фазовом пространстве свободные гармонические колебания цены $P(t)$ около равновесной цены в P_e. Рассмотрим вместо "жесткой" модели (1) вариант "мягкой" модели [2], положив в (1) вместо $P_e = const$ вариацию $P_m = P_e + \varepsilon F_1(t)$. Получим при $F_1(t) = P_e sin(w_1 t + \varphi_1)$

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \omega_e^2 P = H_m sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad H_m = \varepsilon P_e(\omega_e^2 - \omega_1^2). \qquad (2)$$

Из (2) видно, что при $\omega_1 \equiv \omega_e$ резонанса не произойдет, так как в этом случае $H_m \equiv 0$, но при $\omega_1 \cong \omega_e$ возникнут "биения"$P(t)$. Биения описываются в решении уравнения (3) слагаемым [4]

$$P_\delta = 2\varepsilon P_e sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_e}{2} t\right) cos(\omega_1 t + \varphi_1). \qquad (3)$$

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями./Пер. с англ. Под ред. Розова Н.Х. - М.: Мир, 1986, - 240 с.

2. Арнольд В.И. "Жесткие"и "мягкие"математические модели.- М.: МЦНМО, - 32 с. ил.

3. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое и компьютерное моделирование экономики.- М.: НВТ - Дизайн, 2002, с. - 114-116.

4. Кузнецов А.А. Акустика музыкальных инструментов. Справочник -М.: Легпромбытиздат, 1989, 368 с.

О ПРОДОЛЖЕНИИ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ[1]

Лобода А.В. (Воронеж)

lob @ vgasu.vrn.ru

Рассмотрим вещественную гиперповерхность в пространстве $\mathbb{C}^3$, заданную каноническим уравнением ($\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$)

$$Imz_3 = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k \geqslant 3} F_k(z, \bar{z}). \quad (1)$$

Задача описания транзитивных действий аффинных подгрупп на таких поверхностях сводится, как показано в [1], к изучению действий этих подгрупп в комплексном касательном пространстве к однородной поверхности. В этом пространстве возникает вещественная подалгебра Ли алгебры $M(2, \mathbb{C})$ комплексных квадратных матриц второго порядка. "Продолжение" такой алгебры до некоторой подалгебры $M(4, \mathbb{C})$ порождает группу аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$, орбитой которой является однородная поверхность.

В работе [1] показано отсутствие нетривиальных продолжений для 1-мерных вещественных подалгебр алгебры Ли $M(2, \mathbb{C})$, а в [2] получены предварительные результаты о продолжениях в более трудной ситуации 2-мерных алгебр. Отметим, что в списке ([3]) всех вещественных 2-мерных подалгебр $M(2, \mathbb{C})$ содержится 4-параметрическое семейство диагонализируемых (не сводимых друг к другу подобиями) алгебр Ли, а также семь типов недиагонализируемых алгебр.

[1] Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00630).

ТЕОРЕМА 1. Пусть M - аффинно-однородная поверхность вида (1), удовлетворяющая условию общности положения $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(2\varepsilon_1-1)(2\varepsilon_2-1)\neq 0$, а действие транзитивной подгруппы в комплексном касательном пространстве к M описывается 2-мерной вещественной подалгеброй. Тогда эта алгебра диагонализируема.

ТЕОРЕМА 2. При произвольных положительных $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, удовлетворяющих условию $\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$, существует продолжение трехмерной недиагонализируемой алгебры $\mathfrak{g}$ с базисом

$$e_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} -i & i \\ -i & i \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

до подалгебры $M(4,\mathbb{C})$, отвечающей некоторой однородной поверхности вида (1).

Литература

[1] Лобода А.В. Об одном семействе алгебр Ли, связанных с однородными поверхностями // Труды МИАН, 2006, Т. 253, С. 111-126.

[2] Болдырева О.А. О продолжении 2-мерных матричных алгебр // Тезисы докл. зимней матем. школы, Воронеж, 2006, С. 25.

[3] Пушмина Н.С., Черных С.С., Седаев А.А. Классификация двумерных вещественных подалгебр алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$ //Вестник ВГУ. Серия "Физика. Математика N 1, 2006, С. 182 - 186.

ТЕОРЕМА ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ломакин Д.Е. (Орел)

denislomakin@rambler.ru

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ пространство целых в $\mathbb{C}^n$ функций в стандартной топологии, S^{2n-1} — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$. Через $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство функций $f(s,w)$, $(s,w)\in\mathbb{C}\times S^{2n-1}$, непрерывных по совокупности переменных и целых по s в $\mathbb{C}$, с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{C}\times S^{2n-1}$.

Преобразованием Радона функционала $\mu\in H'(\mathbb{C}^n)$ называется линейный функционал, заданный на $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, и определяемый соотношением

$$\langle \mathcal{R}_\mu,\varphi\rangle=\langle\mu,\mathcal{R}^*\varphi\rangle,$$

где $\varphi \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, $\mathcal{R}^*$ — оператор дуального преобразования Радона (см.[1]).

Определяющим множеством функционала $l \in H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ называется такое компактное подмножество K в $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$, что для любой окрестности ω множества K существует такая постоянная C_ω, что

$$|l(f)| \leqslant C_\omega \sup_\omega |f(s,w)|, \ \forall\, f(s,w) \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}).$$

Следующая теорема является аналогом теоремы о носителе для преобразования Радона функций и распределений (см. работы Д. Людвига [3], С. Хелгасона [2], А.Б. Секерина [4]).

Теорема. *Пусть $\mu \in H'(\mathbb{C}^n), \mathcal{R}_\mu \in H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ — его преобразование Радона. Пусть $\hat{K} = \{|s| \leqslant R\} \times S^{2n-1}$ — определяющее множество функционала $\mathcal{R}_\mu$. Тогда $K = \{|z| \leqslant R\}$ — определяющее множество функционала μ.*

Литература

1. Секерин А.Б., Ломакин, Д.Е. Комплексное преобразование Радона распределений и функционалов // Владикавказский мат. журнал. 2005. Т7. Вып.3. С. 56-63.

2. Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. — 152 С.

3. Ludwig D. The Radon transform on Euclidean space // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V.19. P. 49—81.

4. Sekerin A.B. The support theorem for the complex Radon transform of distributions // Collectanea mathematica. — 2004. V.55. No 3. — P. 243-251

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛИОНСА НА МАКСИМАЛЬНО АККРЕТИВНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ломовцев Ф.Е. (Минск)

lomovcev@bsu.by

Обобщена теорема 1.1 Ж.-Л. Лионса [1, р. 129] для операторов $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, где по сути $A_1(t)$ — самосопряженные операторы и $A_2(t)$ — подчинены квадратному корню $A_1^{1/2}(t)$, на случай максимально аккретивных операторов $A(t) + \tilde{c}_0 I$ при некотором $\tilde{c}_0 > 0$.

В гильбертовом пространстве (г.п.) H исследована задача Коши:

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t),\ t \in]0,T[,\ (1)\quad u(0) = u_0,\ (2)$$

где $A(t)$ — линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, $t \in [0,T]$.

I. Для операторов $A(t)$ и их сопряженных операторов $A^*(t)$ в H с зависящими от t областями определения $D(A^*(t))$ при всех $t\in[0,T]$

$$[u]^2_{(t)} \equiv Re(A(t)u + c_0u, u)_H \geqslant c_1|u|^2_H,\ \exists c_0 \geqslant 0,\ \exists c_1 > 0,\ \forall u\in D(A(t)),$$

$$\langle v\rangle^2_{(t)} \equiv Re(A^*(t)v + c_0v, v)_H \geqslant c_1|v|^2_H\ \forall\ v\in D(A^*(t)).$$

II. Обратные операторы $A_0^{-1}(t) = (A(t) + c_0I)^{-1}$ сильно непрерывны по $t\in[0,T]$ в H и при почти всех $t\in]0,T[$ имеют в H слабую производную по t $dA_0^{-1}(t)/dt\in L_\infty(]0,T[, \mathfrak{L}(H))$, такую, что

$$|((dA_0^{-1}(t)/dt)g, h)_H| \leqslant c_2[A_0^{-1}(t)g]_{(t)}|h|_H,\ \exists c_2 \geqslant 0,\ \forall g,\ h\in H.$$

Определение. Функция $u\in\mathcal{H} = L_2(]0,T[, H)$ называется *слабым решением* задачи Коши (1), (2) для $f\in\mathcal{H}^{*-}$ и $u_0\in H$, если $\int_0^T(u, A^*(t)\varphi - d\varphi/dt)_H dt = \int_0^T\langle f,\varphi\rangle_{(t)}dt + (u_0, \varphi(0))_H$ для всех $\varphi\in\mathcal{H}$ таких, что $\varphi(t)\in D(A^*(t))$ $\forall t\in[0,T]$, слабая производная $d\varphi/dt$, $A^*(t)\varphi\in\mathcal{H}$ и $\varphi(T) = 0$, где $\mathcal{H}^{*-} = L_2(]0,T[, H_t^{*-})$, H_t^{*-} — антидвойственные к г.п. H_t^{*+} — пополнениям $D(A^*(t))$ по нормам $\langle\cdot\rangle_{(t)}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t)}$ — форма антидвойственности между H_t^{*+} и H_t^{*-}.

Теорема. *Если выполняются условия I-II, то для каждых $f \in \mathcal{H}^{*-}$ и $u_0 \in H$ слабое решение $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1), (2) существует, единственно и непрерывно зависит от f и u_0.*

Литература

1. Lions J.-L. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961.

АЛГОРИТМ ШУРА ДЛЯ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ[1]

Лопушанская Е.В. (Воронеж)
kate_lopushanskaya@yahoo.com

Цель доклада — определить алгоритм, аналогичный алгоритму Шура для функций Каратеодори и исследовать его свойства.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Определение. Аналитическое отображение $w = f(z)$ единичного круга $|z| < 1$ на правую полуплоскость $R(w) \geqslant 0$ называется функцией Каратеодори или функцией класса C.

Алгоритм Шура.

Зафиксируем функцию $f \in C$ и определим:

$$f_0(z) = f(z), \quad \xi_n = f_n(0), \quad n \geqslant 0$$

$$f_{n+1}(z) = \frac{f_n(z) + \bar{\xi}_n + \frac{f_n(z)-\xi_n}{z}\frac{1+\bar{\xi}_n}{1+\xi_n}}{f_n(z) + \bar{\xi}_n - \frac{f_n(z)-\xi_n}{z}\frac{1+\bar{\xi}_n}{1+\xi_n}}$$

Параметры $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ в данном алгоритме называются параметрами Шура функции f.

Теорема. Алгоритм Шура осуществляет взаимно-однозначное соответствие между множеством функций Каратеодори C и множеством комплексных чисел $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ со свойствами: $Re\ \xi_n \geqslant 0$, для $n \geqslant 0$ и, если существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что $Re\xi_{n_0} = 0$, то $\xi_n = 1$, для $n > n_0$. Если существует такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $Re\ \xi_{n_0} = 0$, то функция к которой применяется алгоритм Шура имеет вид $f(z) = \frac{1-s(z)}{1+s(z)}$, где $s(z)$ — конечное произведение Бляшке степени n_0.

Литература

1. Bakonyi M., Constantinescu T. Schur's algorithm and several applications, Pitman research Notes in Mathematics series, 1991.

О ФРЕЙМАХ И ЖЁСТКИХ ФРЕЙМАХ[1]

Лукашенко Т.П. (Москва)

Не более чем счетная система элементов $\{\varphi_j\}$ гильбертова пространства H называется **фреймом**, если существуют постоянные $A > 0$ и $B < \infty$, называемые **границами** фрейма, что для любого $x \in H$ верны оценки

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_j |\widehat{x}_j|^2 \leqslant B\|x\|^2,$$

где $\widehat{x}_j = (x, \varphi_j)$ (см. [1, с. 99-108], [2, с. 74-79]). Если $A = B$, то такой фрейм называется **жёстким**. Если $A = B = 1$, то это **фрейм Парсеваля** или **ортоподобная система**.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00192) и программы "Научные школы" НШ-4681.2006.1.

Любой фрейм с верхней границей B можно дополнить до жёсткого фрейма с равными B границами. Любой фрейм с верхней границей $B = 1$ является ортогональной проекцией ортонормированной системы из более широкого гильбертова пространства $\mathfrak{H} \supset H$, причем жёсткий фрейм является ортогональной проекцией полной ортонормированной системы в $\mathfrak{H}$. Если полную ортонормированную систему $\{e_j\}$ в гильбертовом пространстве H, подпространстве гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, ортогонально спроектировать на замкнутое подпространство $\mathcal{H} \subset \mathfrak{H}$, то проекция системы будет фреймом с границами $A \leqslant B \leqslant 1$ в замыкании своей линейной оболочки тогда и только тогда, когда любой вектор y из линейной оболочки $\{e_j\}$ ортогонально проектируется на пространство $H^\perp$, ортогональное дополнение к H, с оценкой нормы проекции $(1 - B)\|y\|^2 \leqslant \left\|P^\perp y\right\|^2 \leqslant (1 - A)\|y\|^2$.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

2. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

СРЕДНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА ДВУХ ОТРЕЗКАХ[1]

Лукашов А.Л. (Саратов, Стамбул)

LukashovAL@info.sgu.ru

Пусть $\{p_n\}$ — последовательность ортогональных многочленов с единичным старшим коэффициентом относительно меры

$$\frac{R}{\rho_\nu h}dx + \sum_{k=1}^{\nu^*} \frac{1-\varepsilon_k}{2} \frac{R}{\rho'_\nu \sqrt{X}} \delta_{w_k},$$

где $X(x) = (x^2 - 1)(x - \alpha)(x - \beta)$, $h(x) = (-1)^j \chi_{E_j}(x)/\pi\sqrt{-X(x)}$, $j = 1, 2$; $E_1 = [-1, \alpha]$, $E_2 = [\beta, 1]$, $X(x) = R(x)S(x)$ — разложение многочлена на множители с единичным старшим коэффициентом, $\rho_\nu(x) = \prod_{k=1}^{\nu^*}(x - w_k)^{\nu_k}$ — действительный многочлен; $\varepsilon_k = \pm 1$, причем ε_k может быть равно -1 только тогда, когда $w_k \in (\alpha, \beta)$ и $\nu_k = 1$; δ_w - мера, сосредотачивающая единичную массу в точке w.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N04-01-00060)

Theorem 1 *Для многочленов описанного вида для всех* $x \in (-\infty,-1] \cup [\alpha,\beta] \cup [1,\infty)$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \frac{p_j(x)}{c_j\Phi^j(x)} = F(x)$, *причем нормирующие константы* c_j *таковы, что* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \frac{C^j(E)}{c_j} = F(\infty)$. *Здесь* $\Phi(x) = \exp G(x)$, $G(x)$ *— комплексная функция Грина области* $\mathbb{C}\backslash E$, $C(E)$ *- (логарифмическая) емкость* $E = E_1 \cup E_2$,

$$F(x) = \frac{2e^{l\pi u/K}}{H(a-u)} \prod_{k=1}^{\nu^*} \frac{H(v_k+\varepsilon_k u)^{\nu_k}}{H^{\nu_k}(a-u)} \prod_{k=1}^{\partial R} \frac{H(a-u)}{H(u_k-u)},$$

$x = \varphi(u)$ *— отображение прямоугольника периодов* $-K < \Re u < 0, -iK' < \Im u \leqslant iK'$ *на* $\mathbb{C}\backslash E$, v_j, a *и* $u_k, k = 1,\ldots,\partial R$ *- прообразы точек* $w_j, j = 1,\ldots,\nu^*$, ∞ *и нулей многочлена* R *соответственно при этом отображении,* H *- тэта-функция Якоби,*

$$l = \left[\sum_{j=1}^{\nu^*} \varepsilon_j \nu_j \frac{\Im v_j}{2K'} + \sum_{k=1}^{\partial R} \frac{\Im u_k}{2K'}\right]$$

и $[x]$ *обозначает целую часть числа* x.

РЯДЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С НЕСУММИРУЕМОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Лукомский С.Ф. (Саратов)
Lukomskiisf@info.sgu.ru

Пусть $S_n(f)$ частичные суммы ряда Фурье функции f. Хорошо известно, что если f абсолютно непрерывна, то $S_n(f)$ сходятся к f равномерно. В эквивалентной форме это утверждение можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 1. *Если* f *непрерывна и* $f' \in L(0,2\pi)$, *то* $S_n(f) \to f$ *равномерно.*

В этой связи возникает вопрос: что происходит с рядом Фурье, если производная $f' \notin L(0,2\pi)$? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть 1)* ψ *- функция Орлича такая, что* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\psi(x)}{x} = +\infty$ *и* $L(\psi)$ *соответствующее пространство Орлича; 2)* $\varphi(x)$ *возрастающая, непрерывная, вогнутая на* $[0,+\infty)$ *функция* *такая, что $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$ и пусть $\varphi(L)$ класс функций, для которых: $\varphi(|f|) \in L(0, 2\pi)$. Тогда существует непрерывная функция f, дифференцируемая всюду, кроме точек $x = 2k\pi$ такая, что 1) $f' \in \varphi(L)$; 2) $||S_n(f) - f||_{L(\psi)} \not\to 0$ $(n \to \infty)$*

Таким образом, нельзя получить условие на функцию f в терминах принадлежности ее к некоторому пространству Орлича $L(\psi)$, при котором ряд Фурье функции f сходился бы к f по норме пространства Орлича $L(\psi_1)$, для которого $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\psi_1(x)}{x} = +\infty$. Поэтому встает задача о нахождении условий на функцию f, при которых ее ряд Фурье сходился бы в пространствах Орлича $L(\psi)$ с условием $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\psi(x)}{x} = +\infty$.

Для ограниченной функции f определим локальный модуль непрерывности равенством

$$\omega_\delta(f, x) = \sup_{y:\,|x-y|\leqslant\delta} |f(x) - f(y)|.$$

Теорема 3. *Если $\lim\limits_{\delta\to 0} \log\frac{1}{\delta}||\omega_\delta(f, \cdot)||_{L(\psi)} = 0$, то ряд Фурье функции f сходится к f по норме пространства $L(\psi)$.*

Литература

1). Н.К. Бари Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

2). Б. Сендов, В. Попов Усредненные модули гладкости. М.: Мир, 1998.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Луконина А.С. (Саратов)

Lukonina_Anna@mail.ru

Рассмотрим оператор L:

$$\beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) + \int_0^1 N(x,t)\,y'(t)\,dt,$$

$$U(y) = \int_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}\, y(t)\,dt = 0,\ \alpha \in (0,1),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003)

где $\beta^2 \neq 1$, $p_i(x) \in C^1[0,1]$ $(i = 1,2)$, $N(x,t)$ непрерывна и ограничена при $t < x$ и $t > x$, $N'_t(x,t)$ непрерывна при $t \leqslant x$ и $t \geqslant x$, на функцию $k(t)$ накладываются условия:

1) $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$,

2) $k^2(1) - \gamma^2 k^2(0) \neq 0, \quad k^2(0) - \gamma^2 k^2(1) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$.

Теорема. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и для любого $\delta \in (0,1/2)$ имеет место соотношение:

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta \leqslant x \leqslant 1-\delta} |S_r(f,x) - \sigma_{r|d|}(f,x)| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ – частная сумма ряда Фурье по собственным функциям оператора L для собственных значений, попавших в круг $|\lambda| < r$, $\sigma_r(f,x)$ – частная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{exp\, 2k\pi i x\}$, для $k \in Z$, удовлетворяющих $2|k|\pi < r$, $d = \left(\beta^2 - 1\right)^{-1/2}$.

Литература

1. Хромов А.П. *Об аналоге теоремы Жордана-Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием* // Доклады РАЕН. – 2004. – № 4. – С. 80–87.

2. Хромов А.П. *Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов* // Математический сборник. – 1981. – Т. 114(156), № 43. – С. 378–405.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СИСТЕМЕ ВСПЛЕСКОВ КУБИЧЕСКОГО B-СПЛАЙНА[1]

Лыткин С.М. (Москва)

sergeml@rambler.ru

В [1] и [2] описаны методы разложения по системам всплесков B-сплайнов первого и второго порядка. Аналогичная конструкция применима и к кубическим сплайнам.

Пусть φ — B-сплайн третьего порядка:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & \text{если } |x| \leqslant 1; \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3, & \text{если } 1 < |x| \leqslant 2; \\ 0, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$

[1]Работа поддержана РФФИ, проект 05-01-00192.

Зафиксируем натруральное число $N > 3$ и обозначим $h = 1/N$. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ систему сдвигов функции φ: $\varphi_k(x) = \varphi(Nx-k)$, $k = -1, \dots, N+1$. Произвольной функции f сопоставим линейный оператор вида $S_N[f](x) = \sum\limits_{k=-1}^{N+1} c_k(f)\varphi_k(x)$. Коэффициенты c_k при $k = 1, \dots, N-1$ будем вычислять следующим образом:

$$c_k = N \int\limits_{(k-1)h}^{(k+1)h} f(t)\alpha(Nt-k)dt, \text{ где } \alpha(x) = (210x^4 - 195x^2 + 25)/4.$$

Аналогичные формулы используются для вычисления коэффициентов $c_{-1}, c_0, c_N, c_{N+1}$.

Теорема 1. *Если f — кубический сплайн дефекта 1 с узлами в точках kh, $k = 0, \dots, N$, то $f(x) = S_N[f](x)$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in C^3[0,1]$. Тогда*

$$\|f^{(r)} - S_N^{(r)}[f]\|_{C[0,1]} \leqslant C_r h^{(3-r)}\omega_{f'''}(h), \ r = 0,1,2;$$
$$\|f''' - S_N'''[f]\|_{C((kh,(k+1)h))} \leqslant C_3\omega_{f'''}(h), \ k = 0, \dots, N-1.$$

Литература

1. Лыткин С.М. *Разложение по системе всплесков B-сплайна первого порядка* // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы. – Саратов, 2006. – С. 111-112.

2. Лыткин С.М. *Разложение по системе всплесков в пространстве сплайнов второго порядка* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы 7-й международной Казанской летней научной школы-конференции. – Казань, 2005. – С. 99-100.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Львов А.В. (Москва)
Lvov-alex@yandex.ru, Lvov@nbd.ru

В работе исследуется система уравнений:

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} C_i x[h_i(t)] = f(t), \quad t \geqslant 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \leqslant 0 \tag{2}$$

$$x(\mu) = B_j x(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, ... \tag{3}$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть от числа.

а) $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — фиксированные точки $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_j = \infty$;

б) A — матрица коэффициентов размерности $n \times n$, C_i — матрицы коэффициентов размерности $n \times n$, где $i = 1, .., m$, $\quad f[0;\infty] \to \mathbb{R}^n$ на любом конечном интервале [0,b] измеримы по Лебегу функции;

в) $h_i\ :\ [0;\infty) \to \mathbb{R}$ измеримые по Лебегу функции такие что $h_i(t) = t - l_i$ (постоянное запаздывание)

г) $\varphi : (-\infty; 0) \to \mathbb{R}^n$ измеримые по Борелю ограниченные функции;

д) $B = \sup\limits_j ||B_j|| \leqslant \infty$, $\quad B_j$ невырожденные матрицы;

Сформулированы условия на матрицы A, $\quad C_i$, $\quad i = 1, ..., m$ и функцию запаздывания h, при которых решение системы однородных уравнений $f \equiv 0$ экспоненциально устойчиво.

Устойчивость дифференциальных уравнений с запаздыванием (ДУЗ) давно вызывала определенный интерес. Тем не менее, устойчивость импульсивных ДУЗ является новой областью исследований, и в этой области существует лишь несколько публикаций. В монографиях Gopalsamy, Lakshmikantham и исследованиях Gopalsamy и Zhang рассматриваются импульсные уравнения с постоянным запаздыванием и постоянными коэффициентами. Там показано, что если уравнение без импульса устойчиво, то, ограничив значение абсолютной величины импульса и наложив некоторые добавочные условия, тогда соответствующее импульсное уравнение также устойчиво. В данной работе рассматривается система неавтономных импульсных уравнений без предположений об устойчивости аналогичных уравнений без импульсов. Результат, полученный здесь, обобщает хорошо известную теорему для уравнений без импульсов. Кроме того, аналогично методу предложенному Анохиным для исследования устойчивости решения импульсного уравнения, разработан метод для исследования устойчивости решений неавтономных систем импульсных уравнений. Результат основан на теореме типа Бола-Перрона для уравнений с импульсивным запаздыванием, представленной у Анохина, Березанского и Бравермана.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОМ СКОЛЬЖЕНИИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ БОЗЕ-ГАЗОВ

Любимова Н.Н. (Елец)
E-mail: natlove@inbox.ru

В настоящей работе получено точное решение граничной задачи для кинетического уравнения, описывающее поведение бозе-газов в задаче о тепловом скольжении вдоль плоской поверхности (начатое в [1], [2]).

Точное решение задачи о тепловом скольжении получено в виде разложения по собственным сингулярным обобщенным функциям дискретного и непрерывного спектров соответствующего характеристического уравнения. Это разложение сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Последнее приводится к краевой задаче Римана теории функций комплексного переменного. Сначала решается соответствующая однородная краевая задача, затем - неоднородная. Решение последней находится в классе мероморфных функций. Условия разрешимости и формулы Сохоцкого позволяют найти все неизвестные коэффициенты разложения решения исходной граничной задачи.

Литература

1. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Теоретическая и математическая физика. 1997. Т.111. №3. С. 462-472.

2. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Известия вузов. Серия Физика. 2002. №6.С. 51-56.

ОБ ОСОБОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Магомедов Г.М., Лугуева А.С. (Махачкала)

Рассматриваем разрешимость задачи Коши для уравнений типа

$$\lambda u' + a(x)u + \mu A \circ Fu = g \tag{1}$$

где A – линейные сингулярные интегральные операторы A_k:

$$A_0 u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(s) ctg\frac{s-x}{2}ds; \quad A_1 u = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u(s)}{s-x}ds;$$

$$A_2 u = \rho A_1(u\rho^{-1}); \quad A_3 u = \rho^{-1}A_1(u\rho); \quad A_4 u = A_1(u\rho^{-1});$$

$\rho = \sqrt{(1-x^2)}$

Нелинейный оператор F имеет вид функционального оператора типа Урысона или Гаммерштейна.

Уравнения типа (1) обычно исследуются в предположении разрешимости соответствующего вырожденного ($\lambda = 0$) уравнения, применяя сложный метод малой вязкости λ. В нашей работе мы, пользуясь методом априорных оценок непосредственно доказываем однозначную разрешимость задачи Коши в пространствах $W_p^{(1)}$ при любых действительных параметрах $\lambda \neq 0$ и μ. Коэффициент $a(x) \geqslant 0$, $a^{\pm 1} \in L_{p_1}$ $(p_1 = \frac{p}{2-p})$. При $(Fu)(x,s) = f[x,s;u(s)]$ требуется,чтобы рост функции $f(x,s;r)$ на бесконечности по $|r|$ был строго меньше 1 и f удовлетворяла условию Гельдера с коэффициентом Гельдера вида $k = M(|r|^{p-1}+1)$.

При $(Fu)(x) = f[x,u(s)]$ от f требуется некоторая коэрцитивность по аргументу r без ограничений роста f по $|r|$ на бесконечности.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЕДЕНИЕМ ИХ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА

Магомедов Г.М., Нурмагомедов А.М. (Махачкала)

nurmagomedov@bk.ru

Исследуется НСИУ вида:

$$v(t) = \frac{\lambda}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f[t,\tau;v(\tau)]}{\tau - t}d\tau + g(t), t \in \Gamma \qquad (1)$$

Показано, что ядро линейного сингулярного интегрального оператора инвариантно относительно отображения области на единичный круг. Поэтому можно считать, что Γ- единичная окружность на комплексной плоскости.

Уравнение вида (1) ранее исследовались лишь при малых значениях λ. Такие уравнения, когда функция f не содержит параметра t и имеет вид $f(\tau, z)$, исследовались без ограничения на $|\lambda|$ работах одного из авторов[1]

Рассмотрим в начале уравнение вида :

$$v(t_0, t) = \frac{\lambda}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f[t_0, \tau; v(\tau, \tau)]}{\tau - t} d\tau + g(t) \tag{2}$$

Уравнение (2) сводится к краевой задаче Римана :

$$\Phi^+(t_0, t) - \Phi^-(t_0, t) = f[t_0, t; v(t, t)] + \overline{g}(t), \overline{g}(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau \tag{3}$$

В задаче (3) t_0 и t меняются независимо друг от друга. Но если считать , что $t_0 = t$, то задача эквивалентна уравнению (1) . Примем $\Phi^{\pm}(t_0, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{\pm}(t) \cdot t_0^k$

В таком общем виде $\Phi^{\pm}(t_0, t)$ не является предельным значением аналитических внутри, и соответственно, вне области функциями. Но нами найден такой подбор $\alpha_k^{\pm}(t)$,что $\Phi^{\pm}(z, z)$ является функциями аналитическими внутри и, соответственно, вне области.

Если $Re[f(t, \tau, z)] \cdot \overline{z} \geqslant |z|^p \cdot m - N, p > 2$, то при некоторых естественных ограничениях на f по t и τ ,и $g \in L_q(\Gamma)$ нами доказано, что уравнение (1) имеет решение в L_q при любом действительном λ.

Утверждения, подобные вышеприведенным, важно получить и при условии $|f(t, \tau, z)| \leqslant M \cdot |z|^{p-1} + N, p \in (1, 2)$.

Литература

1. Магомедов Г.М. Кадиев Р.И. Диф. ур-я, т.39, №6, 2003, с. 829-834.

ЗАДАЧИ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММ КРЕДИТОВАНИЯ[1]

Максимов П.В. (Пермь)
maksimov@econ.psu.ru

В работе [1]дается подробное описание дифференциальных моделей, описывающих динамику развития малых предприятий в за-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (04-06-96002).

висимости от выбора инвестиционных программ, включая самофинансирование, государственную поддержку и кредитование. Результаты анализа моделей и содержательные выводы основаны на возможности интегрирования в квадратурах уравнений динамики. Как замечено в [2], удобным и естественным инструментом моделирования рассматриваемого класса задач являются динамические модели в виде функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. Общий подход, использующий такие модели, применительно к задачам кредитования изложен в [3]. Отсутствие возможности интегрирования уравнений динамики в общем случае восполняется технологией *доказательного вычислительного эксперимента* (ДВЭ) с использованием современных средств вычислений (систем компьютерной алгебры). В докладе обсуждаются вопросы целесообразного выбора пространства решений и некоторые детали реализации ДВЭ применительно к различным условиям предоставления кредитов предприятиям в реальной экономической практике, включая проанализированные в [1] типовые схемы ("равномерное погашение "кредитные каникулы"и др.).

Литература

1. Егорова Н.Е., Хачатрян С.Р. Применение дифференциальных уравнений для анализа динамики развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционные ресурсы// Экономика и математические методы, 2006, N 1, с. 50-67.

2. Максимов В.П., Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике// Известия вузов. Математика, 1993, N 5, с.56-71.

3. Максимов П.В. Моделирование и вычислительный эксперимент в задаче банковского кредитования программы развития многоотраслевой производственной системы //Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы конференции. - Воронеж: ВГТА, 2005. с. 139.

ПРОБЛЕМЫ МОТИВАЦИИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-НЕМАТЕМАТИКОВ

Максимович Е.П. (Минск)

maksimovichep@bsu.by

Проблемы мотивации обучения математике нематематков можно классифицировать по трём группам: содержательного, процессуального и обеспечивающего характера. Содержательный аспект обучения математике (проблема чему учить) требует весьма квалифицированного и своевременного вмешательства в формирование методологической, идейной, предметной сторон преподавания математических дисциплин. Решение этих задач — прерогатива ведущих научных центров, классических университетов и авторитетных научных школ (см. например, учебное пособие [1]). Но, как правило, отсутствует механизм передачи наработок указанных центров на исполнительный уровень, т.е. на реализацию их на практике через учебные планы и программы, учебники и учебные пособия и т.д. для вузов и колледжей.

Проблемы процессуального характера (вопросы как учить) решаются учеными, практикующими в университетах и вузах, но, к сожалению, не всегда успешно. Преподавание математики не должно проходить у обучающихся по правилу: "записал — вызубрил — сдал — забыл". Математика не должна быть только абстрактным и формализированным предметом для нематематических специальностей. Гуманизация обучения математике и ориентация на широкий показ применения математики в выбранной области, требует от преподавателя доступного, популярного изложения, разнообразных приёмов, форм и методов обучения, включая, например, элементы историзма. Математику для нематематиков надо рассматривать не как систему истин, которые надо заучивать, а как систему рассуждений, требующую творческого мышления. Творческая активность студентов — это залог успеха лекций и практических занятий. Для развития творческого подхода при изучении математики желательно, чтобы все виды памяти работали одновременно, а излагаемый материал был доступен для понимания, хорошо мотивирован и интересен.

Непомерный рост знаковой информации, которую необходимо усвоить, создаёт угрозу для баланса между восприятием знаково-цифровой и образной информации. Поэтому, необходимо сочетать математическое и естественнонаучное образование с гуманитарным. Для лучшего усвоения знаковой информации, которую несут предметы математического цикла, нужно учить студентов усваивать образную информацию и изыскивать дидактические возможности для показа применения математики в искусстве и других гуманитарных сферах деятельности человека.

Современная практика обучения математике нематематиков часто свидетельствует о случайном подходе к фундаментальным проблемам подготовки методического обеспечения. Эти проблемы не менее сложны, т.к. подготовка реальных для исполнения учебных планов, учебных программ, учебников и учебных пособий, отвечающих конкретным задачам мотивации преподавания математики для нематематиков, существенно зависит от степени решения вопросов процессуального и содержательного характера.

Литература

1. Ровенко В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций. — Минск: БГУ, 2006. — 175 с.

КОНКУРЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ В СЕТЕВЫХ МОДЕЛЯХ МНОГОАГЕНТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ[1]

Малафеев О.А., Парфенов А.П. (Санкт-Петербург)
malafeyevoa@mail.ru, parf@bk.ru

Рассматривается модель сетевой игры, в которой стратегия игрока заключается в выборе игроков, с которыми собирается образовывать входящие и исходящие связи. Связь между двумя игроками образуется, если оба игрока согласны на ее образование. Каждой ситуации в игре соответствует ориентированный граф ("сеть"), вершины которого — игроки, а дуги — связи между игроками. На множестве сетей определена функция выигрыша. Рассматриваются игры с произвольными ограничениями на множества стратегий игроков и на структуру сети. Рассмотрена задача нахождения решений для различных принципов оптимальности в сетевой игре. Построены алгоритмы, позволяющие находить как оптимальные решения в бескоалиционных сетевых играх: равновесия по Нэшу, максиминные (осторожные) стратегии, попарные и гибридные равновесия, так и оптимальные решения в коалиционных сетевых играх: сильные равновесия, коалиционные равновесия (с произвольной структурой коалиций), C-ядро и компромиссную точку. Рассматривается частный класс сетевых игр — игры без принуждения, характеризующиеся тем, что игрок может не соглашаться на образование связи произвольным игроком. Доказаны утверждения, согласно которым в играх без принуждения максиминные стратегии как для игроков, так и для коалиций изолируют этих игроков (коалиции) от остальных

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №06-06-80509.

игроков, в результате чего сеть распадается на компоненты связности. Показано, что в общем случае решения в сетевой игре можно найти только с помощью неэффективных переборных алгоритмов. В то же время, в частных случаях, связанных, например, с функциями выигрыша, зависящими от локальных свойств сети, от возможных потоков в сети, от путей, проходящих через вершину игрока, возможны аналитические решения.

Литература

1. *Jackson M.O., Wolinsky A.*A Strategic Model of Social and Economics Networks. //J. Econom. Theory. 1996. №71 P.44–74.

2. *Малафеев О.А.* Управляемые конфликтные системы. СПб: Издательство СПбГУ, 2000. — 275 с.

ШКАЛЫ ПРОСТРАНСТВ L_p И ИХ СВЯЗЬ С ПРОСТРАНСТВАМИ ОРЛИЧА

Мамонтов А.Е. (Новосибирск)

E-mail: relic@hydro.nsc.ru

Рассмотрим класс $L_{\omega,\beta}$ ($\beta \in (1,+\infty]$), состоящий из измеримых функций, удовлетворяющих оценке

$$\|u\|_{L_p} \leqslant C\omega(p), \quad \forall p \in (\alpha, \beta).$$

Для некоторых простейших функций ω при $\beta = +\infty$ известно, что класс $L_{\omega,\beta}$ вложен в определенное пространство Орлича L_Φ. Нами изучается связь между $L_{\omega,\beta}$ и другими симметричными пространствами (Лоренца, Марцинкевича и Орлича) при любых ω, α и β. Ожидаемое, на первый взгляд, совпадение $L_{\omega,\beta}$ с каким-либо из классических симметричных пространств имеет место не всегда. Удается указать конструктивно интегральный оператор, сопоставляющий друг другу функции ω и Φ (в случае совпадения $L_{\omega,\beta} = L_\Phi$) или функции ω, Φ, ω_i и Φ_i в двусторонних вложениях

$$L_{\omega_1,\beta} \subset L_\Phi \subset L_{\omega_2,\beta}, \quad L_{\Phi_1} \subset L_{\omega,\beta} \subset L_{\Phi_2},$$

причем используемые методы позволяют указать это соответствие более точно, чем это можно сделать с помощью простого вычисления фундаментальных функций рассматриваемых пространств.

Описанная проблема тесно связана с приближенным обращением преобразований Меллина и Лапласа на неаналитических функциях, заданных на вещественной оси (с точностью до эквивалентностей, диктуемых порядками на N-функциях, без выхода в комплексную плоскость). При этом в качестве определяющей информации об образе берется его асимптотика вблизи точки β. В результате такого обращения вычисляется ядро интегрального оператора, упомянутого выше.

Описанные результаты опубликованы в [1–3].

Литература

[1] Мамонтов А.Е. Шкалы пространств L_p и их связь с пространствами Орлича. Вестник НГУ, серия "математика, механика, информатика 2006, Т. 6, вып. 2, стр. 34-57.

[2] Мамонтов А.Е. Интегральные представления и преобразования N-функций. I. Сиб. мат. журн., 2006, Т. 47, N 1, стр. 123-145.

[3] Мамонтов А.Е. Интегральные представления и преобразования N-функций. II. Сиб. мат. журн., 2006, Т. 47, N 4, стр. 811-830.

О ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Медведев Ю.А. (Смоленск)

postboxmy@yandex.ru

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром класса Ляпунова L, а $T^- = \overline{C}\backslash(T^+ \cup L)$. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все кусочно-бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ *класса* $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L условиям:*

$$A_{11}(t)F^+(t) + A_{12}(t)\overline{F^+(t)} = G_{11}(t)F^-(t) + G_{12}(t)\overline{F^-(t)} + g_1(t), \quad (1)$$

$$A_{21}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} - A_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}} =$$

$$= G_{21}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} - G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-}} + ig_2(t), \quad (2)$$

где $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ $(k=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$ – *заданные на контуре* L *функции, причём* $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$, $\frac{\partial}{\partial n_+}$ $\left(\frac{\partial}{\partial n_-}\right)$ – *производная по внутренней (внешней) нормали к* L.

Используя представление бианалитических функций в виде (см., например, [1], с. 26): $F^{\pm}(z) = \varphi_0^{\pm}(z) + \bar{z}\varphi_1^{\pm}(z)$, $z \in T^{\pm}$, где $\varphi_k^{+}(z)$, $\varphi_k^{-}(z)$ $(k=0,1)$ – аналитические соответственно в областях T^+ и T^- функции, удаётся получить следующий результат.

Теорема. *Если на контуре* L *выполняются условия*

$$A_{11}(t) \neq 0, G_{11}(t) \neq 0, \overline{A_{11}(t)}G_{11}(t) - A_{12}(t)\overline{G_{12}(t)} \neq 0, \quad t \in L,$$

то решение задачи (1)-(2) в классе кусочно-бианалитических функций сводится к последовательному решению двух обобщённых задач типа Римана относительно исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций $\varphi_0(z) = \left\{\varphi_0^{+}(z),\ \varphi_0^{-}(z)\right\}$ *и* $\varphi_1(z) = \left\{\varphi_1^{+}(z),\ \varphi_1^{-}(z)\right\}$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ОПЕРАТОРАМИ ДУНКЛА

Мещеряков В.В. (Коломна)
metcherykov@mail.ru

Многие специальные функции возникают при изучении линейных представлений соответствующих групп. Другой способ получения специальных функций был предложен английским математиком Ч. Дунклом, который создал теорию дифференциально-разностных операторов, связанных с группами Кокстера. Частным случаем групп Кокстера являются группы Вейля, для которых рассматривается аналог оператора Лапласа. При рассмотрении ядра этого оператора возникают некоторые специальные функции.

В докладе будут представлены в явном виде функции, ассоциированные с системой корней типа G_2. Также будет указана их связь с многочленами Якоби и гипергеометрической функцией.

Литература

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и систе-

мы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М: Мир, 1972.

2. Dunkl C.F. Orthogonal polynomials on the sphere with octahedral symmetry. Trans. Am. Math. Soc. 282, 1984.

3. Dunkl C.F. Orthogonal with symmetry of order three. Can. J. Math. Soc. 36, 1984.

К ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Минюк С.А., Панасик О.А. (Гродно)

zhuk@grsu.by

Рассмотрим систему управления

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t),\ t \in T\ = [0, t_1], \tag{1}$$

$$x(0) = q,\ q \in R^n, \tag{2}$$

где A_0, A, B – постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, причем выполняется условие регулярности: существует комплексное λ, при котором $\det(A_0\lambda - A) \neq 0$; x – n-вектор фазовых переменных, u – r-вектор управления из класса U_{A_0}. Класс допустимых управлений U_{A_0} состоит из согласованных с начальным условием (2) кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T$, для которых решение задачи (1)-(2) $x(t)$, $t \in T$ – непрерывно, а функция $A_0x(t)$, $t \in T$ непрерывно дифференцируема. Если $A_0 = E$, то U_E совпадает с множеством всех кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T$. В случае $\det A_0 = 0$, множество U_{A_0} может включать только достаточно гладкие управления, и тогда условие согласования имеет вид:

$$(E - C_0A_0)q = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}[C_iBu(t)]\Big|_{t=0}, \tag{3}$$

где $k = index(A_0, A)$, C_i, $i = 0, 1, 2, ...$ – базовые матрицы [1, с. 26].

Определение. Система (1)-(2) называется управляемой в пространстве R^n если для любого начального состояния (2), удовлетворяющего (3), и любого n – вектора $c \in R^n$ существует допустимое управление $u(t)$, $t \in T$ такое, что выполняется условие: $x(t_1) = c$.

Теорема. Система (1)-(2) управляема в пространстве R^n в том и только том случае, если

1) $rank(A_0, B) = n$,

2) $rank(A_0\lambda - A, B) = n$ для всех комплексных λ.

Литература

1.Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000. – 223 с.

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В ФОРМАТЕ КОНЦЕПЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Михалева М.Ю. (Москва)

E-mails: mmy.06@mail.ru, mmep@mail.ru

Разработанная автором модель портфеля проектов базируется на концепции комплексного инвестиционного проектирования, предложенной в [1]. В рамках этой концепции портфель инвестиционных проектов предлагается рассматривать как систему, элементами которой являются проекты, объединённые единой стратегией предприятия и направленные на решение различных долго-, средне- и краткосрочных задач.

Один из критериев оптимальности обобщённого портфеля построен на основе показателя чистого приведённого дохода

$$NPV^P = \sum_{t=0}^{T}\{\sum_{k=1}^{l_t}(S_t^{M_k} - \sum_{j=1}^{n_t} I_t^{M_k\to A_j} - I_t^{F\to M_k})DN_t^{M_k} + \sum_{j=1}^{l_t} S_t^{A_j} DN_t^{A_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n_t}(S_t^{D_i} - \sum_{k=1}^{l_t} I_t^{D_i\to M_k} - \sum_{j=1}^{m_t} I_t^{D_i\to A_j} - I_t^{F\to D_i})DN_t^{D_i}\} \to \max$$

NPV^P - чистый приведенный доход портфеля проектов; $S_t^{M_k}$, $S_t^{A_j}$, $S_t^{D_i}$ - сальдо соответственно основного проекта M_k, проекта-акцептора A_j, проекта-донора D_i в период t; $I_t^{F\to M_k}$, $I_t^{F\to D_i}$ — инвестиции, выделяемые из чистого дохода соответственно основного проекта M_k, проекта-донора D_i, на реализацию проекта-акцептора A_j в период t; DN^{M_k}, DN^{D_i}, DN^{A_j} - норма прибыли соответственно для основного проекта M_k, проекта-донора D_i, проекта-акцептора A_j, $k = 1, 2, \ldots, l_t$, $j = 1, 2, \ldots, m_t$, $i = 1, 2, \ldots, n_t$, $t = \overline{0, T}$.

Основные результаты работы заключаются в развитии концепции комплексного инвестиционного проектирования, опубликованной в [1], построении обобщённой модели портфеля инвестиционных проектов, постановке задачи оптимизации, формализации показателей эффективности и критериев оптимальности портфеля.

Литература

1. Чернов В.Б. Оценка финансовой реализуемости и коммерческой эффективности комплексного инвестиционного проекта. // Экономика и математические методы, 2005, том 41, №2, с.29-37.

ЯВНЫЙ ВИД СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Мокейчев В.С. (Казань)
Valery.Mokeychev@ksu.ru

Через $A^1(2\pi)$ обозначается множество всех абсолютно непрерывных в $[-\pi, \pi]$ функций $z(t)$, удовлетворяющих условию $z(-\pi) = z(\pi)$. Рассматривается 2π — периодическая задача

$$(y^{(1)}(t) - g(t,\mu)y(t))^{(1)} = (\frac{f^{(1)}(t,\mu)}{f(t,\mu)} + g(s(t),\mu))(y^{(1)}(t) - g(t,\mu)y(t)) +$$

$$+ f(t,\mu)f(s(t),\mu)y(t), \ t \in [-\pi, \ \pi], \qquad (1)$$

$$y(t) \in A^1(2\pi), \ (y^{(1)}(t) - g(t,\mu)y(t)) \in A^1(2\pi), \qquad (2)$$

где $g(t,\mu) \in L^1([-\pi, \ \pi])$, $f(t,\mu) \in A^1(2\pi)$ при каждом $\mu \in C$, $(f^{(1)}(t_0,\mu)/f(t_0,\mu)) = 0$, если $f(t_0,\mu) = 0$, $s(t) = t - \pi$ при $t \in [0, \ \pi]$, $s(t) = t + \pi$ при $t \in [-\pi, \ 0]$, $v^{(k)}(t)-$ производная порядка k.

Значение $\mu-$ собственное, если задача (1),(2) имеет ненулевое решение. Через $v_{(2)}(t)$, $v_{(1)}(t)$ обозначаются $\pi-$ периодическая и анти $\pi-$ периодическая части функции $v(t)$. Итак, $v(t) = v_{(2)}(t) + v_{(1)}(t)$, $v_{(2)}(t) = v_{(2)}(s(t))$, $v_{(1)}(t) = -v_{(1)}(s(t))$ при $t \in [-\pi, \ \pi]$.

Теорема 1. *Пусть* $f_{(1)}(t,\mu) = g_{(1)}(t,\mu)$ *(либо* $f_{(1)}(t,\mu) = -g_{(1)}(t,\mu)$*).*

Если задача (1),(2) имеет ненулевое решение, и $f(t,\mu)$ *не обраща-*

ется в нуль, то хотя бы одно из чисел

$$a = i(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t,\mu)+g(t,\mu))dt,\ b = i(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t,\mu)-g(t,\mu))dt$$

является целым (i — мнимая единица). Если хотя бы одно из чисел a, b — целое, и $f(-\pi,\mu)=f(t,\mu)$, то задача (1),(2) имеет ненулевое решение.

Теорема 2. *Пусть$f_{(2)}(t,\mu)+ig_{(1)}(t,\mu)=0$ (соответственно $f_{(2)}(t,\mu)-ig_{(1)}(t,\mu)=0$) при $t\in[-\pi,\ 0]$. Если $f(-\pi,\mu)=f(\pi,\mu)$, и при $\gamma=1$ или $\gamma=-1$ выполняется равенство*

$$exp(\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(t,\mu)dt) =$$

$$= 1+2\gamma\int\limits_{0}^{\pi}f_{(2)}(x,\mu)exp(\int\limits_{0}^{x-\pi}(g_{(2)}(t,\mu)+if_{(1)}(t,\mu))dt)dx, \qquad (3)$$

(соответственно

$$exp(\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(t,\mu)dt) =$$

$$= 1+2\gamma\int\limits_{0}^{\pi}f_{(2)}(x,\mu)exp(\int\limits_{0}^{x-\pi}(g_{(2)}(t,\mu)-if_{(1)}(t,\mu))dt)dx\ ), \qquad (4)$$

то задача (1),(2) имеет ненулевое решение. Если $f(t,\mu)$ не обращается в нуль, и задача (1),(2) имеет ненулевое решение, то при $\gamma=1$ или при $\gamma=-1$ выполняется (3) (соответственно (4)).

В зависимости от четности и нечетности a, b либо от того, сколько раз выполняется (3) (соответственно (4)), решается вопрос о кратности собственного значения.

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ ТРАЕКТОРИЯХ ОДНОГО КЛАССА АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ[1]

Наимов А.Н. (Вологда)
nan67@rambler.ru

Доклад посвящен исследованию нестационарных ограниченных траекторий систем вида

$$z' = \overline{(z-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-a_k)^{m_k}}, \quad z = x + iy \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

где $\mathbf{C}$ - комплексная плоскость, $a_1, \ldots, a_k$ - попарно различные комплексные числа, $k, m_1, \ldots, m_k$ - натуральные числа, $k > 1$, верхняя черта означает комплексное сопряжение. Системы вида (1) возникают при исследовании априорной оценки и существования периодических решений системы $w'' = \overline{Q(w, w')} + f(t, w, w')$, $\quad w \in \mathbf{C}$, где главная нелинейность Q - многочлен степени n.

Пусть N_+ и N_- - число полуограниченных по возрастания и убывания времени траекторий системы (1), N — число нестационарных ограниченных траекторий системы (1), $n = m_1 + \ldots + m_k$, $V(z) = Im(F(z))$, $U(z) = Re(F(z))$, где $F(z) = \int_{a_1}^{z} (\zeta - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\zeta - a_k)^{m_k} d\zeta$. Справедливы следующие утверждения.

1. Вдоль траекторий системы (1) функция $U(z)$ возрастает, а функция $V(z)$ постоянна.

2. Для N_+, N_-, N верны соотношения: $N_+ = N_-$, $n + 1 \leqslant N_+ \leqslant n + k$, $N = n + k - N_+$, следовательно, $0 \leqslant N \leqslant k - 1$.

3. Если числа $V(a_j)$, $j = \overline{1,k}$ попарно различны, то $N = 0$. А если $V(a_j) = 0$, $j = \overline{1,k}$, то $N = k - 1$; например, точки $a_2 - a_1, \ldots, a_k - a_1$ лежат на одной прямой $(\sin\psi_0)x - (\cos\psi_0)y = 0$, для которой $\sin(n+1)\psi_0 = 0$.

4. Если $V(a_{j_1}) = \ldots = V(a_{j_p})$, где $2 \leqslant p \leqslant k$, то $N \geqslant (m_{j_1} + \ldots + m_{j_p} + p) - (n + 1)$. В частности, при $p = k$ имеем $N = k - 1$, а при $k = 2$ равносильны условия $N = 1$ и $V(a_1) = V(a_2)$.

5. При $k > 2$, если не выполнены условия, указанные в пункте 3, система (1) может иметь или не иметь нестационарных ограниченных траекторий. Например, система $z' = \overline{z(z-b)(z-c)}$ при $b = \exp(i\pi/8)$, $c = b/2$ не имеет нестационарных ограниченных тра-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МД-2828.2005.1 Президента Российской Федерации.

екторий, а при $b = \exp(i\pi/8)$, $c = 1/(b\sqrt{2})$ имеет, хотя в обоих случаях $V(0) = V(b) = 0$, $V(c) \neq 0$.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ПУТЕМ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Насырова Е.В. (Казань)
strezh@yandex.ru

Согласно подписанному в 1999 году Болонскому соглашению, по которому на сегодняшний день 40 стран Центральной и Восточной Европы приняли решение о введении у себя единой системы образовательных стандартов, перед преподвателями высшей школы встала задача совершенствования учебного процесса. Самостоятельная работа студентов (СРС), как известно, является основой образовательного процесса. Следовательно, совершенствование СРС является ключевой проблемой в повышении эффективности всего учебно-воспитательного процесса, необходимость которого обусловлена развитием науки и техники, которые выдвинули повышенные требования к подготовке выпускников вузов, к их творческому потенциалу, к их умению познавать, к их мобильности в профессиональной деятельности.

В условиях ориентации на активные методы овладения знаниями, перехода от репродуктивного к творчески-продуктивному обучению роль и значение СРС резко возросли.

В докладе рассматривается совершенствование СРС как педагогическая проблема; обсуждается ряд предложений, практическая реализация которых потребует дополнительно от преподавателя и студента совместных действий, направленных на совершенствование СРС. Наиболее эффективными из них являются :

– осуществление комплексного методического обеспечения и компьютерной поддержки;

– формирование у студентов стимулов, побуждающих потребности к активной познавательной деятельности;

– проведение преподавателями текущих консультаций по всем видам заданий ;

– проведение коллоквиумов с оценкой по отдельным темам (они позволяют не включать в экзамен часть учебного материала, что облегчает экзамен);

– реферирование теоретического материала, выносимого на СРС (оно приучает студента работать с учебно-методической литературой, развивать способности учиться самостоятельно);

При этом вся организация СРС осуществляется таким образом, чтобы студент постоянно был поставлен перед необходимостью систематически работать.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Нгуен Тхи Хоай, Нгуен Ван Лой (Воронеж)
nthoai0682@yahoo.com, loitroc@yahoo.com

Пусть вещественное $n-$ мерное пространство $\mathbb{R}^n$ полуупорядочено при помощи конуса [1] точек с неотрицательными координатами $\mathbb{R}^n_+$: пишут $x \preceq y$ ($x \prec y$), если $y-x \in \mathbb{R}^n_+$ (соответственно, $y-x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus 0$); $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ $[L^1([a,b];\mathbb{R}^n)]$ обозначает совокупность всех непрерывных [соотвественно, суммируемых] функций, определенных на отрезке $[a,b]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Пусть функция $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

(f_1) для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot,x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ измерима;

(f_2) для почти всех $t \in [a,b]$ отображение $f(t,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно;

(f_3) для любого непустого ограниченного подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует такая функция $\vartheta_\Omega \in L^1_+[a,b]$, что:

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \vartheta_\Omega(t),$$

для всех $x \in \Omega$ и п.в. $t \in [a,b]$.

Применяя Теорему 1.5.22, Следствие 1.5.31 [2] и тот факт, что любая однозначная функция может рассматриваться как мультиотображение, мы получим, что при выполнении этих условий функция $f(s,u(s))$ суммируема на $[a,b]$ для любой непрерывной функции $u \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ и отображение

$$\wp_f\colon C([a,b];\mathbb{R}^n) \to L^1([a,b];\mathbb{R}^n)),$$

$$\wp_f(u)(s) = f(s,u(s)),$$

замкнуто (т.е. имеет замкнутый график).

Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$A\colon L^1([a,b];\mathbb{R}^n) \to C([a,b];\mathbb{R}^n),$$

$$A(g)(t) = \int_a^b K(t,s)g(s)ds,$$

где $K\colon [a,b]\times[a,b] \to L^+(\mathbb{R}^n)$, а $L^+(\mathbb{R}^n)$ обозначает множество всех линейных положительных операторов ([3],[4]) в $\mathbb{R}^n$. Нетрудно проверить следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть ядро K удовлетворяет следующим условиям:*

(K_1) существует такое число $K > 0$, что $\|K(t,s)\| \leqslant K$ для любого $t \in [a,b]$ и п.в. $s \in [a,b]$;

(K_2) для каждого $t \in [a,b]$ функция $s \mapsto K(t,s)x$ суммируема, $\forall x \in \mathbb{R}^n$;

(K_3) существует функция $\alpha(\cdot) \in L^1_+[a,b]$ такая, что:

$$\|K(t_1,s) - K(t_2,s)\| \leqslant \alpha(s)|t_1 - t_2|,$$

для любых $t_1, t_2 \in [a,b]$ и п.в. $s \in [a,b]$.

Тогда оператор A вполне непрерывен.

Применяя Теорему 1.5.30, Теорему 1.2.48(см. [2]) и Теорему 1, мы получаем

Теорема 2. *При выполнении условий $(f_1) - (f_3)$ и $(K_1) - (K_3)$ оператор $\Gamma = A \circ \wp_f$ вполне непрерывен.*

Нас будет интересовать задача о существовании положительных решений интегрального уравнения

$$u(t) = \int_a^b K(t,s)f(s,u(s))ds \tag{1}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть ядро $K\colon [a,b]\times[a,b] \to L^+(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $(K_1)-(K_3)$, отображение $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(f_1) - (f_3)$ и*

(f_3') $\forall x \in \mathbb{R}^n$ из $0 \preceq x$ следует $0 \prec f(t,x) \preceq f(t,0)$, для п.в. $t \in [a,b]$.

Тогда интегральное уравнение (1) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство заключается в том, что в силу (f_3') вполне непрерывный оператор Γ отображает отрезок $[\theta, \Gamma\theta]$ в себя, где θ обозначает нулевую функцию в $C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Применяя Теорему Шаудера [5] мы заключаем, что оператор Γ имеет неподвижную точку $u^* \in (\theta, \Gamma\theta]$, u^* - является положительным решением уравнения (1) ■

Теорема 4. *Пусть ядро* $K\colon [a,b] \times [a,b] \to L^+(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям* $(K_1) - (K_3)$, *отображение* $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* $(f_1) - (f_2)$. *Дополнительно будем предполагать, что:*

(f_4) $f(t,x) \succ 0$, *для всех* $\forall x \succeq 0$ *и п.в.* $t \in [a,b]$;

(f_5) *существует такая функция* $\omega \in L^1_+[a,b]$, *что*

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \omega(t)(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}),$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$ *и п.в.* $t \in [a,b]$;

(f_6) $K \int_a^b \omega(s)ds < 1$, *где* K *- константа из условия* (K_1).

Тогда интегральное уравнение (1) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство этой теоремы снова применяет Теорему Шаудера. Из (f_5) и (f_6) следует существование некоторого шара $T(\|u\|_C \leqslant \rho)$, что оператор Γ отображает шар T в себя. Пусть $S = T \cap K_c$, где $K_c = \{u \in C([a,b];\mathbb{R}^n) : u(s) \succeq 0\}$. В силу линейности, положительности $K(t,s)$ и условия (f_4) следует, что вполне непрерывный оператор Γ отображает S в себя. Положительным решением (1) является неподвижная точка оператора Γ в S ■

Литература

[1] Бахтин И.А. *Конусы в пространствах Банаха*.-Воронеж: ВГПИ, 1975-ч.I.-183с.

[2] Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, -М.: КомКнига, 2005. -216с.

[3] Крейн М.Г., Рутман М.А. *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха*.-Успехи матем. наук, 1948, т.3., №1, с.3-95.

[4] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа*.-М.: Наука, 1975.

[5] В. Хатсон, Дж. Пим *Приложения функциального анализа и теории операторов*. Пер. с англ. -М.: Мир, 1983, 482с., ил.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛАБОУПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Некрасова Н.В. (Воронеж)

E-mail nekrasovanv@mail.ru

В виде ряда по целым неотрицательным степеням малого параметра ε строится асимптотическое решение дискретной задачи оптимального управления вида

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \sum_{k=0}^{N} F_k(x(k)) + \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} G_k(x(k), u(k)) \to \min_u,$$

$$x(k+1) = f_k(x(k)) + \varepsilon^p g_k(x(k), u(k)), k = \overline{0, N-1},$$

$$x(0) = x^0,$$

здесь $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R^r$, F_k, G_k - скалярные функции, f_k, g_k - функции со значениями в R^n, число шагов N фиксировано, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, натуральное число $p \geqslant 2$ - дополнительный параметр. Функции F_k, G_k, f_k, g_k предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

Для нахождения приближенного решения $\tilde{x}_{p+n} = \sum\limits_{i=0}^{p+n} \varepsilon^i x_i$, $\tilde{u}_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i u_i$ определены задачи P_j, $j = \overline{-p, n}$. Задача P_j при $j = \overline{-p, -1}$ является начальной задачей для нахождения x_{j+p} , задача P_j при $j = \overline{0, p-2}$ сводится к задаче безусловной минимизации для нахождения u_j и к начальной задаче для нахождения x_{j+p} , задача P_j при $j = \overline{p-1, n}$ является задачей оптимального управления для отыскания управления u_j и траектории x_{j+p}.

При некоторых условиях и достаточно мылых $\varepsilon > 0$ доказана однозначная разрешимость возмущенной задачи P_ε в окрестности управления u_0 и для ее точного решения u^*, x^* доказаны следующие оценки $u^*(k) - \tilde{u}_n(k) = O(\varepsilon^{n+1})$, $x^*(k) - \tilde{x}_{n+p}(k) = O(\varepsilon^{n+p+1})$, $J_\varepsilon(\tilde{u}_n) - J_\varepsilon(u^*) = O(\varepsilon^{2n+3})$.

Также доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим асимптотическим приближением оптимального управления.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БАРНЕТТОВСКОМ СКОЛЬЖЕНИИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ МАКСВЕЛЛА

Нефедов А.Г. (Подольск)
itbrains@gmail.com

Получено точное решение полупространственной задача о барнеттовском скольжении с зеркально – диффузными граничными условиями Максвелла. Приводится сравнение с аналитическим решением задачи о барнеттовском скольжении с полностью диффузным отражением молекул от границы полупространства [2].

Метод решения граничных задач кинетической теории развитый в [1] применен к решению задачи о барнеттовском скольжении с зеркально — диффузными граничными условиями. Метод основан на разложении решения по обобщенным сингулярным собственным функциям соответствующего характеристического уравнения и теории краевых задач аналитических функций. Полученный результат необходим в теории термофореза при постановке граничных условий на поверхности аэрозольной частицы, обтекаемой потоком неоднородного по температуре разряженного газа.

Литература

1. Латышев А.В., Юшканов А.А. Метод решения граничных задач для кинетических уравнений // ЖВММФ. 2004. Т. 44. № 6. С. 1107-1118.

2. Гайдуков М.Н., Попов В.Н. О зависимости коэффициента барнеттовского сколь жения от выбора модели интеграла столкновений // Вестник математического факультета. В 1., Архангельск. 1997. С. 26-31.

БЕССЕЛЕВЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФРЕЙМЫ КАК ПРОЕКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Новиков С.Я. (Самара)
nvksya@самара.ru

Доказаны две теоремы, уточняющие и обобщающие известные теоремы Шура и Олевского [1] о продолжении систем функций до ортогональных систем.

Теорема 1. *Пусть I и J — открытые интервалы на числовой прямой $\mathbb{R}$, причем $I \subset J$. Функции $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют бесселеву последовательность в пространстве $L^2(I)$ с границей B тогда и только тогда, когда в пространстве $L^2(J)$ существует ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\|\varphi_k(x)\| = \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \ldots$ и $f_k(x) = \varphi_k(x)$, $x \in I$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Теорема 2. *Пусть I и J — открытые интервалы на числовой прямой $\mathbb{R}$, причем $I \subset J$ и пусть $B > 0$. Функции $\mathcal{F} = \{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(I)$ могут быть продолжены до элементов* **полной** *ортогональной системы $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(J)$*
с $\|\varphi_k(x)\| = \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \ldots$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) последовательность $\mathcal{F}$ образует жесткий фрейм пространства $L^2(I)$ с границей B;

2) для матрицы Грама $G_{\mathcal{F}}$ выполняется равенство $B\,G_{\mathcal{F}} = G_{\mathcal{F}}^2$;

3) матрица $B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}}$ имеет бесконечный ранг.

Определение 1. *Последовательность $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется* **бесселевой** *, если существует константа $B > 0$ такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Определение 2. *Последовательность $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется* **фреймом** *для $\mathcal{H}$, если существуют постоянные $A > 0$, $B > 0$ такие, что*

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Числа A и B называются *границами фрейма*. Если возможен выбор границ $A = B$, то фрейм называется *жестким*.

Литература

1. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва: АФЦ, 1999.

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Новикова Л.В. (Ростов-на-Дону)

znanie@aaanet.ru

В статье исследуется приведение к канонической нормальной форме нелинейного отображения

$$\mathcal{N} : u \mapsto Au + \Phi(u), \tag{1}$$

некоторой окрестности S банахова пространства U в себя.

В отображении (1) через A обозначен линейный оператор: A: $U \to U$; через $\Phi(u)$ — аналитическая по Фреше в окрестности S нелинейная составляющая отображения $\mathcal{N}$.

Ищется замена переменных

$$u = H(v), \tag{2}$$

где H: $U \to U$ — аналитический по Фреше оператор с тождественной в нуле производной Фреше: $H'(u)\big|_0 = I$.

Показывается, что если спектр линейного оператора A удовлетворяет условиям:

$$\left|\lambda_h - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{p_k}\right| \geqslant h^{-s}, \quad (s \geqslant 1),$$

то замена переменных (2) приводит отображение (1) к линейному

$$v \mapsto Av,$$

если окрестность S достаточно мала.

Таким образом выполняется функциональное тождество

$$H^{-1} \circ (A + \Phi) \circ H(v) \equiv Av$$

для всех $v \in S$, при этом сепарабельности банахова пространства U не требуется.

Схема доказательства состоит в последовательном применении метода нормальных форм Пуанкаре.

Для обоснования сходимости аналитической по Фреше замены переменных (2) используется метод ускоренной сходимости Колмогорова–Арнольда–Мозера.

ОБ ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Нурсултанов Е.Д., Тихонов С.Ю.
er-nurs@yandex.ru

Рассмотрим интегральный оператор свертки

$$(Af)(x) = \int\limits_G K(x-y)f(x)dx$$

действующий из L_p в L_q, где $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$ – пространство Лебега.

При $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, согласно неравенству Юнга имеем, что $\|A\|_{L_p \to L_q} \leqslant \|K\|_{L_r}$, где $1/r = 1 - 1/p + 1/q$. Но данное достаточное условие невозможно применить для операторов со степенным ядром $K(x) = |x|^{-\gamma}$, $\gamma > 0$.

Согласно неравенству Харди – Литтлвуда [1], оператор $Af = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\gamma}$ является ограниченным тогда и только тогда, когда $\gamma/n = 1 - 1/p + 1/q$.

Впоследствии О'Нейлом [2] было доказано неравенство $\|A\|_{L_p \to L_q} \leqslant C \cdot \|K\|_{r\infty}$ $(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, $1/r = 1 - 1/p + 1/q$, $L_{r\infty}$ – пространство Марцинкевича), которое дает более тонкое, чем неравенство Юнга, достаточное условие ограниченности интегральных операторов свертки и охватывающее неравенство Харди-Литтлвуда.

В данной работе изучается вопрос об ограничености оператора свертки в пространствах с мерой.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$*,* μ, ν *меры определенные на измеримых множествах* D, Ω *из* $\mathbb{R}^n$ *. Если для функции* K *определенной на множестве* $G - \Omega$ *имеет место*

$$\sup_{0<\mu(e)<\infty} \frac{1}{(\mu(e))^{1/p-1/q}} \left| \int\limits_e K(x-y)d\mu_y \right| \leqslant B,$$

$$\sup_{0<\nu(w)<\infty} \frac{1}{(\nu(w))^{1/p-1/q}} \left| \int\limits_w K(x-y)d\nu_x \right| \leqslant B,$$

то оператор свертки

$$Tf(y) = \int_G K(x-y)f(x)d\nu_x$$

ограничен из $L_{p,h}(G,\nu)$ *в* $L_{q,h}(\Omega,\mu)$ *и верно*

$$\|T\|_{L_{p,h}(G,\nu)\to L_{q,h}(\Omega,\mu)} \leqslant cB.$$

Пусть положительные локально интегрируемые в $\mathbb{R}$ функции $\nu(x),\mu(x)$ определяют соответственно меры

$$\mu(e) = \int_e \mu(y)dy, \nu(w) = \int_w \nu(x)dx \tag{1}$$

Пусть $e = [a,b]$ отрезок, тогда через $[e]_1,[e]_2,[e]_3$ обозначим соответственно первую, вторую, третью части отрезка, $[e]_1 = [a,a+\frac{b-a}{3}]$, $[e]_2 = [a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3}]$, $[e]_3 = [b-\frac{b-a}{3}, b]$. Для функции $\mu(x) > 0$ заданной в $\mathbb{R}$ определим сеть

$$M_\mu = \{[a,b] : \frac{1}{2}\mu(y) \leqslant \mu(x) \leqslant 2\mu(y)\}, \forall x,y \in [a,b]\}.$$

Пример. Пусть $\mu(x) = \frac{1}{|x|^\beta}$, тогда $M_\mu = \{[a,b] : 0 < a < b \leqslant 2^{\frac{1}{\beta}}a < \infty\}\bigcup\{[a,b] : -\infty < 2^{\frac{1}{\beta}}b \leqslant a < b < 0\}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < q < \infty, h_1 \leqslant h_2$, μ,ν *меры определенные соотношениями (1) . Если функции* $\nu(x),\mu(x)$ *таковы, что*

$$\mu([0,|w|/3]) \geqslant c_1\nu(w) \quad \forall w \in M_\nu,$$

$$\nu([0,|e|/3]) \geqslant c_2\mu(e) \quad \forall e \in M_\mu, \tag{2}$$

$K(x) > 0$ *и оператор свертки*

$$Ag(y) = \int_D K(x-y)g(x)d\nu_x$$

ограничен из $L_{p,h_1}(\mathbb{R},\nu)$ *в* $L_{q,h_2}(\mathbb{R},\mu)$, *тогда*

$$\sup_{e\in M_\mu}\sup_{0<y<\frac{|e|}{3}} \frac{1}{(\mu([e]_2+y))^{1/p-1/q}} \int_{[e]_2} K(z)\mu(z+y)dz \leqslant$$

$$\leqslant c\|A\|_{L_{p,h_1}(\mathbb{R},\nu)\to L_{q,h_2}(\mathbb{R},\mu)},$$

$$\sup_{w\in M_\nu}\sup_{0<x<\frac{|w|}{3}}\frac{1}{(\nu(x-[w]_2))^{1/p-1/q}}\int\limits_{[w]_2}K(z)\mu(x-z)dz\leqslant$$

$$\leqslant c\|A\|_{L_{p,h_1}(\mathbb{R},\nu)\to L_{q,h_2}(\mathbb{R},\mu)},$$

Обратно, если $M_1=\{e:0<\mu(e)<\infty\}, M_2=\{w:0<\nu(w)<\infty\}$,

$$\sup_{e\in M_1}\sup_{y\in\mathbb{R}}\frac{1}{(\mu(e+y))^{1/p-1/q}}\int\limits_{e}K(z)\mu(y+z)dz\leqslant B,$$

$$\sup_{w\in M_2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{(\nu(x-w))^{1/p-1/q}}\int\limits_{w}K(z)\mu(x-z)dz\leqslant B,$$

то оператор A *ограничен из* $L_{p,h_1}(\mathbb{R},\nu)$ *в* $L_{q,h_2}(\mathbb{R},\mu)$ *и верно*

$$\|A\|_{L_{p,h_1}(\mathbb{R},\nu)\to L_{q,h_2}(\mathbb{R},\mu)}\leqslant cB.$$

Замечание. Условию (2) удовлетворяют степеные функции $\mu(x)=\frac{1}{|x|^\beta}, \nu(x)=\frac{1}{|x|^\alpha}, \beta\geqslant 0, \alpha\geqslant 0$

Литература

1.Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* - 1950.- Л.: ЛГУ,- С. 255.

2.O'Neil R.O. *Convolution operators and L_{pq} spaces.* // Duke Math. J.- 1963.- V. 30.- P.129-142.

О ПРЕПОДАВАНИИ КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Огарков В.Б., Бугаков В.А. (Воронеж)

В курсах теоретической механики и теории механизмов и машин при кинематических расчетах основное внимание уделяется графическим методам. Эти методы обладают существенным недостатком, заключающимся в том, что нельзя определить степень точности результатов графического построения. Более целесообразно, когда в нашем распоряжении имеются вычислительные машины, пользоваться аналитическими методами. В настоящее время расчет механизмов с помощью аналитических методов громоздок.

Авторами обобщены некоторые формулы и теоремы кинематики плоско-параллельного движения, позволяющие вести расчеты по готовым формулам [1].

Эти формулы полностью определяют величину и направление векторов скоростей и ускорений точек плоского механизма при плоско-параллельном движении. В качестве примеров рассматриваются кинематические расчеты кривошино-шатунного механизма и дисковых пар. Проведены два типа расчетов: по заданному закону движения и по заданной траектории.

При решении задач статики успешно применяются обобщенные функции Хевисайда, позволяющие в общем виде описать систему внешних сил, которые всегда имеют определенную точку приложения и направление. Получены общие формулы для определения реакций опор статически определяемых и многопролетных балок [2].

При изучении раздела "Динамика материальной точки"авторами впервые использованы комплексные функции перемещения, позволяющие привести уравнение движения Ньютона к уравнению первого порядка. Это позволило эффективно проанализировать задачу бифуркации решения в зависимости от сочетания значений коэффициентов уравнения (три основных случая) [3].

Полученные формулы могут быть обобщены на систему дифференциальных уравнений динамики с использованием матричной формы.

Литература

[1] В.Б. Огарков. Аналитический способ определения скоростей и ускорений точек плоского механизма, Известия вузов "Машиностроение"№1, 1974, с. 60-64.

[2] В.Б. Огарков, А.С. Бабкин. Расчет напряженного состояния бруса ступенчато-переменного сечения с использованием обобщенных функций. Сб. "Лес. Наука. Молодежь". – 2003. ВГЛТА, 2003, с. 296-298.

[3] В.Б. Огарков, А.С. Аленин. Абсолютный гистерезис в задаче свободного колебания материальной точки в среде с сопротивлением. Сб. "Математическое моделирование, компьютерная оптимизация параметров оборудования", ВГЛТА, 2006, с. 128-132.

ЗАДАЧА ЛАМЕ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОГО ДИСКА

Огарков В.Б., Мильцин А.Н. (Воронеж)

Для вращающегося диска постоянной толщины при воздействии температурного поля имеем дифференциальное уравнение для определения радиальных перемещений $u(r)$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{(1-M^2)}{E}\frac{\gamma}{g}w^2 r + (1+M)\frac{dQ}{dr} \tag{1}$$

В частном случае, когда функцию теплопроводности $Q(r)$ можно приближенно заменить линейной зависимостью:

$$\theta = \theta_1 + \lambda(r - r_1); \ \lambda = \frac{\theta_2 - \theta_1}{r_2 - r_1}; \ \frac{d\theta}{dr} = \lambda \tag{2}$$

В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-m^2}{E}\frac{\gamma}{g}w^2 r + (1+m)\lambda \tag{3}$$

После замены переменной будем иметь:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = \Omega_1 e^{3x} + \Omega_2 e^x; \ r = e^x \tag{4}$$

Решение неоднородного уравнения (4) найдено в следующем виде:

$$u(x) = C_1 e^x C_2 e^{-x} + C_3\Omega_1 \int\limits_{x_1}^{x} e^{(x-\tau)} e^{3\tau} d\tau + C_4\Omega_1 \int\limits_{x_1}^{x} e^{-(x-\tau)} e^{3\tau} d\tau +$$

$$+C_5\Omega_2 \int\limits_{x_1}^{x} e^{(x-\tau)} e^{\tau} d\tau + C_6\Omega_2 \int\limits_{x_1}^{x} e^{-(x-\tau)} e^{\tau} d\tau \tag{5}$$

$$\Omega_1 = -\frac{(1-m^2)w^2}{Eg}; \ \Omega_2 = (1+m)\lambda \tag{6}$$

Для определения констант получено:

$$C_5 = \frac{1}{2}; \ 4C_3 + 2C_4 = 1 \tag{7}$$

Остальные константы определяются из граничных условий на свободных поверхностях диска:

$$\sigma_r(r = r_1) = \sigma_r(r = r_2) = 0 \tag{8}$$

Формула (5) позволяет определить радиальное перемещение точек круглого упругого диска при любом вынужденном воздействии.

ВРЕМЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА «RD-ЭФФЕКТА» В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛИТИЧЕСКОГО НАСИЛИЯ

Орлик Л.К. (Москва)

В [1] на основе качественных идей общей теории относительной депривации (Relative Deprivation) нами разработана математическая модель «RD - эффекта», позволяющая прогнозировать вероятность проявления эффектов массового насилия не менее фиксированного уровня, индуцированных относительной депривацией в коллективности.

Базовым концептом этой теории является RD – относительная депривация, определяемая как восприятие актором расхождения между его ценностными экспектациями и ценностными возможностями [2].

Зависимость между вероятностью проявления эффектов массового насилия и временем τ, прошедшим с момента их индуцирования заданным уровнем интенсивности RD в коллективности, назовем временным законом «RD - эффекта».

Получено аналитическое представление этого закона:

$$P = 0,5\left(1 + erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\ln\tau}}\ln\frac{\tau}{\tau_{50}}\right)\right),$$

где при заданном уровне интенсивности RD, τ_{50} — медианное время проявления фиксируемого «RD - эффекта»; $\sigma_{\ln\tau}$ — среднее квадратическое отклонение натурального логарифма времени проявления указанного «RD - эффекта».

Литература

1. Новикова Г.В., Орлик Л.К. Математическое моделирование процессов проявления массового насилия в обществе/Социальная модернизация России: итоги, уроки, перспективы: Материалы VI

Международного социального конгресса, ноябрь 2006. – М.: Издательство РГСУ «Союз», 2006.

2. Гарр Т.Р. Почему люди бунтуют. – СПб.: Питер, 2005.

ПРОПЕДЕВТИКА СОВРЕМЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Орлик Л.К. (Москва)

Современный подход к моделированию нелинейных явлений основан на постклассических теориях хаотической динамики, фрактальной геометрии, теории катастроф, теории возможностей и др. «Язык» нелинейной науки включает такие понятия, как самоподобие, бифуркации, странные аттракторы, нечеткие множества и события.

В рамках базовых курсов высшей математики нами осуществляется пропедевтика новых понятий и теорий. Так, при изучении числовых последовательностей рассматривается самоподобная геометрическая прогрессия $\ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots$ с коэффициентом Скейлинга 2. Качественный анализ геометрической прогрессии приводит к понятию бифуркации.

Исходя из стартового понятия множества, приходим к понятию нечеткого множества, вводя функцию принадлежности; знакомим с интервальными числами. Канторово множество интерпретируем как конструктивный фрактал. Логистическую функцию увязываем с разностным логистическим уравнением и бифуркацией удвоения периода.

При повторении элементарных функций подчеркиваем самоподобие однородных степенных законов. Эту тему продолжаем при изучении преобразования Фурье, квадраты амплитуд которого являются спектрами мощности и пропорциональны $f^{-\beta}$. Имеем при $\beta = 0$ белый шум, при $\beta = 2$ — коричневый, при $\beta = 1$ — розовый, при $\beta \geqslant 2$ - черный шум. Приводим примеры соответствующих физических, химических и биологических систем.

Новые понятия вводятся в связи с профессионально ориентированными математическими моделями, в которых демонстрируется широчайший диапазон масштабной инвариантности.

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Ощепкова С.Н. (Белгород)
oshepkova@bsu.edu.ru

Рассмотрим связное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа относительно открытых выпуклых многогранников (стратов), примыкающих друг к другу по типу симплициального комплекса.

Выделим в Ω открытое связное (в топологии, индуцированной на Ω из $\mathbb{R}^n$) подмножество Ω_0 , составленное из стратов множества Ω и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$.

На Ω_0 определяется аналог оператора Лапласа. Для этого сначала вводится дивергенция $\nabla\vec{F}$ на достаточно гладком векторном поле как плотность его потока по специальной (стратифицированной) мере. Затем полагается $\Delta u = \nabla(\nabla u)$, где внутренний оператор ∇ интерпретируется как взятие градиента функции u.

Имеет место следующий аналог сильного принципа максимума.

Теорема. *Достаточно гладкие функции, являющиеся решением неравенства $\Delta u \geqslant 0$ на Ω_0, не могут иметь в Ω_0 точек нетривиального локального максимума.*

Доказательство этого факта основывается на следующей лемме.

Лемма. *Пусть $X \in \Omega_0$ - точка нетривиального максимума функции $u \in C^1(\Omega_0)$. Тогда найдутся сколь угодно малые допустимые $r > 0$ такие, что*

$$\int\limits_{S_r(X)} \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0. \tag{1}$$

В двумерном случае принцип максимума был ранее доказан в цитированной ниже работе

Литература

А.А. Гаврилов, О.М. Пенкин. Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве// Дифференц. уравнения, 2000, Т. 36, №2, С. 226-232.

---

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 04-01-00697

ТЕНЗОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ РАЗРУШАЮЩЕЙСЯ СЕТЕВОЙ СИСТЕМЫ

Павлов Ю.С. (Воронеж)

Основа тензорной модели M_s сплошной системы S, имеющей сетевую структуру, выражается матрицей A коэффициентов передачи ветвей N-го порядка, где $N \gg 1$ – количество ветвей в составе S. Если S построена идеально, то $A = diag(a_{ii})$, $\quad i = 1, 2, \ldots, N$.

Для S в стационарном режиме $N = const$ и поэтому $M_s = const$. Но в реальных условиях существует динамика эволюции S. Следовательно, $N = N(t) \neq const$ и $M_s = M_s(t)$. При поражении S имеем

$$N(t_i) > N(t_j),\ i < j, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{1}$$

При любом законе эволюции $N(t_i) \to N(t_j)$ синергетика выражает $M_s(t)$ всеобъемлющим уравнением

$$\frac{dU}{dt} = -D \cdot div\, U \cdot grad\, U - U(B - CU) = 0, \tag{2}$$

где U – плотность элементов внутри S; B, C, D – коэффициенты варианта закона $N(t_i) \to N(t_j)$.

Для частных случаев такой подход к получению $M_s(t)$ неоправданно сложен. Это вынуждает к отказу от метода сведения решаемой задачи к уже известному решению (2) и к поиску альтернативы $M_s(t)$.

При тензорном моделировании динамики эволюции S альтернативная $M_s(t)$ имеет вид цепи

$$A(t_0) \underset{E_0}{\to} A(t_1) \underset{E_1}{\to} A(t_2) \underset{E_2}{\to} \ldots \underset{E_{k-1}}{\to} A(t_k) \underset{E_k}{\to} \ldots, \tag{3}$$

где $E_i = E(t_i \to t_{i+1})$ – тензор преобразования S при переходе от i-го шага цепи к $(i+1)$ шагу, $i = 0, 1, \ldots,$

$A(t_0)$ – исходное состояние A перед началом разрушения S,

$A(t_i)$ – состояние A на i-м, $i = 1, 2, \ldots,$ шаге процесса разрушения S. При этом $A(t_i)$ сохраняет общую структуру: $A(t_i) = diag(a_{jj})$, $\quad j = 1, 2, \ldots, N(t_i)$.

В сквозном отображении (3) порядок $A(t_i), i = 1, 2, \ldots$ убывает по закону деградации (1). Наиболее простой из них задается макромоделью Осипова-Ланчестера [1].

$$\frac{d \cdot N(t)}{dt} = -\lambda \cdot P(t), \quad P(t) \gg 1, \ \lambda = const,$$

где λ – коэффициент, выражающий возможность разрушения S, P – количество элементов, разрушающих S.

Кроме базовой модели (4), закон (1) может выражаться и ее вариантами, учитывающими кроме λ наличие и особенности механизма восстановления N и ненадежность отдельных элементов в S.

Литература

1. Павлов Ю.С. Выбор характеристики, оценивающей динамику взаимодействия сплошных систем // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции – Воронеж: ВГУ, 2005. – с. 175, 176.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ОЦЕНКИ СПЛОШНЫХ СИСТЕМ

Павлов Ю.С. (Воронеж)

Оценка сложной системы S при оптимизационном подходе очень трудна из-за многокритериального характера операции и принципиальной разнородности одновременно применяемых критериев в векторе $\{k_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ выражающем оценку S. Это практически исключает использование традиционных методов построения для S интегрального числового критерия $K_э \sim \{k_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Но оценка S легко выполняется при тензорном подходе [1] к варианту лексико-графического выбора из [2]. Он основан на понятии N-мерного пространства R^N критериальных оценок S, где $k_m \in \{k_i\}$, $m \in \{1, 2, \dots, N\}$ играют роль независимых координат. Тогда значения $k_i(t_*)$, $i = 1, 2, \dots, N$, для текущего момента t_* оценки S задают внутри R^N координаты $(k_1^*; k_2^*, \dots, k_N^*)$ конца вектора A, исходящего из точки $(k_1^0; k_2^0, \dots, k_N^0)$, где $k_i^0 = min\ k_i$. Поэтому наиболее естественно принять для $K_э$ метрическую форму:

$$K_э = \| \overrightarrow{A} \|, \tag{1}$$

которая теоретически безупречна, т.к.

– исключает возможность даже минимального произвола в выборе весовых коэффициентов, характерных для всех вариантов аддитивной формы $K_э$.

– полностью устраняет субъективизм оценки S, для экспортных форм $K_э$.

При таком выборе формы $K_э$, если R^N – евклидово метрическое пространство с определенными в нем прямоугольными декартовыми координатами, то (1) имеет наиболее простой вид:

$$K_э = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(k_i^* - k_i^0)^2}. \qquad (2)$$

$K_э$ в форме (2) резко упрощает оценку S, сводя ее путем сложения ортонормированных векторов k_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, к однокритериально-экстремальному варианту, имеющему только ясный геометрический смысл, но не имеющему физического смысла в связи с геометризацией задачи и абстрактным характером R^N. При этом $\forall k_i \in R^N$ в отдельности имеют ясный физический смысл.

Литература

1. Павлов Ю.С. Математический характер семейства критериев оценки сложной системы "Воронежская математическая школа – 2002 – Воронеж: ВГУ, 2002. – с. 64-66.

2. Павлов Ю.С. Многокритериальная оценка эффективности систем методом последовательного принятия решений 8-я МНТК "Радиолокация, навигация, связь". Материалы НТК, т.2. – с. 1042 – 1048.

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ОДНОМ ЛУЧЕ[1]

Парфилова О.В. (Саратов)

kaf_inf@sgap.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим квадратичный пучок второго порядка $L(\lambda)$, определенный дифференциальным выражением и двухточечными краевыми условиями

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y,$$

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$
$$\left(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\right) + \left(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\right) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 06-01-00003)

где $p_j, \alpha_{\nu s}, \beta_{\nu s} \in \mathbf{C}$. Пусть ω_1, ω_2 есть корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$. Предположим, что они различны и отличны от нуля. Тогда система функций $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$ является ф.с.р. уравнения $l(y,\lambda) = 0$. Считая для определенности $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$, обозначим

$$v_{\nu j}(\lambda) := \frac{U_{\nu 0}(y_j,\lambda)}{\lambda}, \quad w_{\nu j}(\lambda) := \frac{e^{-\lambda\omega_j} U_{\nu 1}(y_j,\lambda)}{\lambda}, \quad \nu, j = 1, 2,$$

и $V_j(\lambda) := [v_{1j}, v_{2j}]^T$, $W_j(\lambda) := [w_{1j}, w_{2j}]^T$, $j = 1, 2$.
$\tau := \omega_2/\omega_1 > 1$, $\Delta_0 := \det[V_1, V_2]$, $\Delta_1 := \det[W_1, V_2]$, $\Delta_2 := \det[V_1, W_2]$, $\Delta_{12} := \det[W_1, W_2]$, $\Delta_{01} := \det[V_1, W_1]$, $c_0 = -\dfrac{\Delta_0}{\Delta_2}$, $c_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ есть множество ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$. $Y = \{y(x,\lambda_k) := \exp(\lambda_k\omega_1 x) + b_2 \exp(\lambda_k\omega_2 x),\ k \in \mathbf{Z}\}$, где $b_2 = \dfrac{\Delta_{01}}{\Delta_1}$ – это множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям. Основными предположениями являются:

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \quad \Delta_{12} = 0, \qquad (1)$$

Теорема. *Пусть числа ω_1 и ω_2 лежат на одном луче, выходящем из начала координат, и $1 < \sigma \leqslant 2 - \dfrac{1}{\tau}$. Тогда если выполняется условие $\dfrac{|b_2|}{\tau}(1 + |c_0| + |c_1|) < 1$, то система Y однократно полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$.*

О КОМПЛЕКСНОМ МЕТОДЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТРАДИЦИОННОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ И ГУМАНИТАРНЫХ ВУЗАХ МОСКВЫ

Переходцева Э.В. (Москва)

Цель настоящего доклада — привлечь внимание к представленному комплексному методу, использующему традиционное и дистанционное преподавание некоторых математических дисциплин, включенных в курс высшей математики в современных технических университетах (таких, как Московский Институт Радиоэлектроники или

Высшее Техническое Училище им. Баумана и др.) и в появившихся в последнее десятилетие многочисленных гуманитарных университетах (таких, как Современная Гуманитарная Академия, Высшая Школа Экономики и др.).

Особенности комплексного метода автором демонстрируются на преподавании теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов, для преподавания которых в вузах отводится гораздо меньше часов, чем на факультетах прикладной математики или на математических факультетах, что вполне естественно. Однако основными понятиями и знаниями предметов студенты этих вузов все-таки должны владеть, что совершенно необходимо им для дальнейшей практики.

Технические университеты тяготеют больше к традиционным методам преподавания, когда при проведении лекционных и семинарских занятий студенты находятся в непосредственном контакте с преподавателем. Однако ограничение программ по теории вероятностей в часовом объеме не позволяет охватить некоторые даже самые необходимые темы по математической статистике, как критерии согласия, множественную регрессию, многомерный статистический анализ. Вместе с тем, имея в настоящее время современное телекоммуникационное оборудование, можно часть лекций и по теории вероятностей, и по математической статистике (и таким же образом расширить курс случайных процессов) записать в качестве телелекций или слайд-лекций, содержащих значительно больший объем материала, к которым студенты могут неоднократно обращаться при подготовке к экзаменам.

Современные гуманитарные вузы оказались более технически оснащенными и раньше начали применять дистанционное преподавание многих предметов, полностью отказавшись от традиционного преподавания. К сожалению, опыт преподавания автора в таких вузах показывает, что студенты, не имеющие непосредственного общения с лектором, не имеющие возможности выяснить возникающие у них вопросы, практически не усваивают заданный хорошей программой объем учебного материала, несмотря на имеющиеся хорошие методические разработки курсов как теории вероятностей, так и математической статистики. Однако выпускаемые этими вузами специалисты по менеджменту и экономике, и даже по структурной лингвистике, не смогут в дальнейшем обойтись полученными поверхностными знаниями. Поэтому и в этих вузах необходим комплексный подход к преподаванию не только теории вероятностей и математической статистики, но и других математических дисциплин с целью насыщения народного хозяйства настоящими квалифицированными специалистами, без которых трудно ожидать значительного улучшения в нашей экономике.

О МОДУЛЯХ ГЛАДКОСТИ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ОБОБЩЕННЫМ СДВИГАМ ДАНКЛЯ

Платонов С.С., Белкина Е.С. (Петрозаводск)

platonov@psu.karelia.ru

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, \infty), \alpha \geqslant -\frac{1}{2}, d\mu(t) = |t|^{2\alpha+1}dt$ — мера на $\mathbb{R}$, $L_{2,\alpha} := L_2(\mathbb{R}, d\mu), \|\cdot\|_{2,\alpha}$ — норма в гильбертовом пространстве $L_{2,\alpha}$, $Df(x) = f'(x) + (\alpha + \frac{1}{2})\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ — дифференциально-разностный оператор Данкля.

Для любой функции $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ обобщенный сдвиг (ОС) Данкля $u(x, y) = T^y f(x)$ $x, y \in \mathbb{R}$ определяется как решение следующей задачи Коши (см. [1]):

$$D_x u(x, y) = D_y u(x, y); \qquad u(x, 0) = f(x).$$

ОС Данкля можно продолжить до непрерывного оператора в $L_{2,\alpha}$.

Для любой функции $f \in L_{2,\alpha}$ разности $\Delta_h^k f(t)$ порядка r ($r = 1, 2, \dots$) с шагом $h > 0$ и модуль гладкости $\omega_r(f, \delta)_{2,\alpha}$ порядка r определяются формулами

$$\Delta_h^1 f(t) = \Delta_h f(t) := f(t) - T^h f(t), \dots, \Delta_h^r f(t) := \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(t));$$

$$\omega_r(f, \delta)_{2,\alpha} := \sup_{0<h\leqslant\delta} \|\Delta_h^r f\|_{2,\alpha}, \quad \delta > 0.$$

Пусть $W_{2,\alpha}^r$ — пространство Соболева, построенное по оператору D, т. е.

$$W_{2,\alpha}^r := \{f \in L_{2,\alpha} : D^j f \in L_{2,\alpha}, j = 1, 2, \dots, r\},$$

где действие оператора D на функцию f понимается в смысле теории обобщенных функций. K-функционал определяется равенством

$$K(t, f; L_{2,\alpha}, W_{2,\alpha}^r) = \inf\{\|f - g\|_{2,\alpha} + t\|D^r g\|_{2,\alpha} : g \in W_{2,\alpha}^r\},$$

где $f \in L_{2,\alpha}$, $t > 0$.

Теорема. Существует постоянная $C = C(\alpha, r) > 0$ такая, что

$$\frac{1}{C}\omega_r(f,\delta)_{2,\alpha} \leqslant K(\delta, f; L_{2,\alpha}, W^r_{2,\alpha}) \leqslant C\omega_r(f,\delta)_{2,\alpha},$$

где $f \in L_{2,\alpha}$, $\delta > 0$.

Литература

[1] *Salem N.B., Kallel S.*, Mean-periodic functions associated with the Dunkl operators // Integral Transforms Spec. Funct. - 2004. - V. 15. - N2. - P. 155-179.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ КВАЗИМЕР, ПОРОЖДЕННЫХ КРАТНЫМИ РЯДАМИ УОЛША[1]

Плотников М.Г. (Вологда)

mgplotnikov@mail.ru

Пусть G — двоичная группа ([1]), а $\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ — N-мерная функция Уолша, определенная на G^N ($N = 2, 3, \ldots$). Поведение кратных рядов Уолша $(WS) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ зависит от свойств так называемых квазимер τ, которые получаются в результате формального интегрирования данных рядов, т.е. следующим образом:

$$\tau(\Delta) = \sum_{\mathbf{n}} \int_{\Delta} a_{\mathbf{n}}\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), \quad \Delta \text{ — двоичный интервал.}$$

Из результатов [2] вытекает следующий факт.

Теорема А. *Если ряд (WS) сходится по прямоугольникам на некотором 'кресте' (см. [2]) к конечной сумме, то порождаемая данным рядом квазимера является непрерывной по Саксу. Это означает, что $\tau(\Delta) \to 0$ при $|\Delta| \to 0$.*

Теорема А не переносится на случай λ-сходимости рядов (WS).

Теорема 1. *Для любого $\lambda \geqslant 1$ существует ряд (WS), всюду на G^N λ-сходящийся к конечной сумме, такой, что порождаемая данным рядом квазимера не является непрерывной по Саксу.*

Однако, можно рассмотреть достаточно слабую непрерывность ([3]), относительно которой является непрерывной любая квазимера, порожденная рядом (WS), λ-регулярно сходящимся при $\lambda \geqslant 2$ лишь

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 05-01-00206) и государственными программами по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4681.2006.1) и молодых российских ученых (проект МК-1214.2005.1).

в одной точке. Эта непрерывность применяется в [3] для изучения вопросов представления функций кратными рядами Уолша.

Результаты данной работы переносятся с некоторыми изменениями на кратные ряды Хаара.

Литература

[1] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применение.* М.: Наука, 1987. 344 с.

[2] Скворцов В.А. *О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша* // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, математика. 1973. No 6. С. 77–79.

[3] Плотников М.Г. *О множествах единственности для кратных рядов Уолша* // Матем. заметки (в печати).

О ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ СТИЛЬТЬЕСА[1]

Покорный Ю.В. (Воронеж)
pokorny@kma.vsu.ru

Символ dg при $g(\cdot) \in BV[a,b]$ органично вплетается в понятие интеграла Стильтьеса. В то же время в последние годы этот символ стал гулять по страницам публикаций с весьма своеобразными комментариями. Так, в проблематике импульсных управлений в так называемых "уравнениях в мерах" символ dg интерпретируется, как производная от меры, порождаемой функцией $g(x)$ по обычной схеме Лебега – Стильтьеса. Какой смысл вкладывается при этом в "производную от меры читателю необходимо догадываться. Ясно однако, что это не стандартная производная Радона – Никодима. Нами этот символ так же использовался ранее для перезаписи уравнения

$$-\frac{d}{d\mu}(pu') + \frac{dQ}{d\mu}u = \lambda\frac{dM}{d\mu}u \tag{1}$$

с производными именно по Радону – Никодиму в более наглядной форме

$$-d(pu') + udQ = udM. \tag{2}$$

Поэтому возникла необходимость дать точное определение этому символу dg.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-01-00049)

Под dg (при $g \in BV[a,b]$) понимается функционал, порождаемый на $C[a,b]$ выражением вида

$$l(u) = \int\limits_a^b u dg.$$

Линейность такого дифференциала очевидна. Теорема о преобразовании меры позволяет утверждать, что для любой $\varphi(x)$ из $C[a,b]$ выражение φdg так же есть дифференциал Стильтьеса, т.е. $\varphi dg = dh$ при некоторой $h(x)$ из $BV[a,b]$. Тем самым запись (2) приобретает точный смысл. В таких терминах оказывается возможным перенести на "дифференциальную процедуру" $Du = -d(pu') + udQ$ классическое разложение Пойа – Маммана

$$Du = \varphi_0 d\left(\varphi_1 \frac{d}{dx}(\varphi_2 u)\right),$$

справедливое при строго возрастающей функции $Q(x)$, что открывает дорогу для анализа распределения нулей непрерывных (с производными из BV) решений дифференциального неравенства вида $Du \geqslant 0$.

О СПЕКТРЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ[1]

Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)
pokorny@kma.vsu.ru

На множестве абсолютно непрерывных на отрезке $[0,l]$ функций производные которых имеют на $[0,l]$ ограниченную вариацию, т.е. принадлежат пространству $BV[0,l]$, рассматривается уравнение

$$-\int\limits_0^x d(pu') + \int\limits_0^x udQ = \lambda \int\limits_0^x udM, \tag{1}$$

где $p(\cdot) \gg 0$, и $p \in BV[0,l]$, а функции $Q(\cdot)$ и $M(\cdot)$ строго возрастают. Интегралы понимаются по Стильтьесу.

Теорема. *При условиях*

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-01-00049)

спектр задачи (1)-(2) состоит из неограниченной последовательности вещественных строго положительных простых собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$. При этом соответствующая λ_k собственная функция $\varphi_k(x)$ имеет в $(0,l)$ точно k нулей, в каждом из которых она меняет знак; нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются.

Уравнение (1) при достаточно гладких p, Q, M эквивалентно обыкновенному

$$-(pu')' + qu = \lambda mu, \tag{3}$$

где $q(x) = Q'(x)$, $m(x) = M'(x)$. Поэтому сформулированная теорема распространяет на случай (1) классические осцилляционные свойства теории Штурма – Лиувилля. Для негладких p, Q, M уравнение (1) оказывается поточечной (т.е. обыкновенной) версией уравнения (3), где коэффициенты $q = Q'$, $m = M'$ являются обобщенными (по Шварцу – Соболеву) производными от функций, которые могут иметь сингулярные компоненты (в том числе скачки).

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, ОБОБЩЕННЫМИ СРЕДНИМИ РИССА-БОХНЕРА

Прибегин С.Г. (Одесса)
ivanpribegin@rambler.ru

Пусть $D^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \ldots, n\}$ — единичный полидиск, функция $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) \in H^p(D^n)$, $f(e^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n})$ — угловые граничные значения функции f, $Q^n = [-\pi, \pi]^n$, $d\varphi = d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$,

$\left\|f(e^{i\varphi})\right\|_p = \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q^n} |f(e^{i\varphi})|^p d\varphi\right)^{1/p}$, $l > 0$, $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$,

$\binom{l}{m} = \dfrac{\Gamma(l+1)}{m!\,\Gamma(l-m+1)}$ — биномиальные коэффициенты,

$h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_h^l f\left(e^{i\varphi}\right) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(e^{i(\varphi+h)})$ — дробная разность, которая определена почти всюду при $(l \in \mathbb{N}) \bigvee \left(\left(l \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}\right) \bigwedge \left(l > \left(\frac{1}{p} - 1\right)_+\right)\right)$,

$\omega_l(f,\delta)_p = \sup\limits_{\substack{|h_j| \leqslant \delta \\ j=1,\ldots,n}} \left\|\Delta_h^l f(e^{i\varphi})\right\|_p$ и $\widetilde{\omega}_l(f,\delta)_p = \sup\limits_{|h| \leqslant \delta} \left\|\Delta_{\widetilde{h}}^l f(e^{i\varphi})\right\|_p$ (здесь $\widetilde{h} = (h, \ldots, h)$, $h \in \mathbb{R}$) — модули гладкости дробного порядка. Далее,

$k = (k_1, \dots, k_n)$, где k_j — неотрицательные целые числа, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{k_1,\dots,k_n}$ — коэффициенты ряда Тейлора функции f, $\langle k, \varphi \rangle = k_1\varphi_1 + \dots + k_n\varphi_n$, $\varepsilon > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{i\varphi}) = \sum\limits_k \left(1 - (\varepsilon|k|)^l\right)^\alpha \widehat{f}_k e^{i\langle k,\varphi\rangle}$ — обобщенные средние Рисса-Бохнера.

Теорема. Пусть $f \in H^p(D^n)$. Тогда если $\Big(\big((0 < p < 1) \bigwedge \big((l \in \mathbb{N}) \bigvee \big((l \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}) \bigwedge \big(l > \frac{1}{p} - 1\big)\big)\big) \bigwedge$ $\big(\alpha > \frac{n}{p} - 1\big)\Big) \bigvee \big((p \geqslant 1) \bigwedge (l > 0) \bigwedge (\alpha > n - 1)\big)$, то имеет место следующая оценка:

$C_1(l, \alpha_p)\widetilde{\omega}_l(f, \delta)_p \leqslant \left\| f(e^{i\varphi} - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{i\varphi} \right\|_p \leqslant C_2(l, \alpha, p)\omega_l(f, \delta)_p$.

При $n = 1$ и $0 < p \leqslant 1$ этот результат опубликован в [1].

Литература

1. Прибегин С.Г. Приближение функций из H^p, $0 < p \leqslant 1$, обобщенными средними Рисса с дробными показателями. Матем. сб., Т. 197, № 7, 2006 г., с. 76–86.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА, ОПИСЫВАЕМОГО ЛИНЕАРИЗОВАННЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Прибыль М.А. (Москва)

zcd043@sectorb.msk.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная связная область с границей $\Gamma \in C^\infty$, $(\overline{u}(x), \overline{v}(x))$ – решение стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, где $\overline{u}(x) = (\overline{u}_1(x), \overline{u}_2(x))$ – скорость жидкости, а $\overline{v}(x) > 0$ – удельный объем. Рассмотрим линеаризацию этих уравнений на указанном решении и для полученной системы исследуем спектральную задачу:

$$\frac{1}{\overline{v}(x)}\Delta u_i(x) + a_{i1}(x)\partial_{x_1}v(x) + a_{i2}(x)\partial_{x_2}v(x) = \lambda u_i,\ i = 1, 2, \tag{1}$$

$$\mathrm{div} u(x) = \lambda v(x), \tag{2}$$

$$u_i(x)|_\Gamma = 0,\ i = 1, 2. \tag{3}$$

$$a_{ii}(x) = -\frac{1}{\overline{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \overline{u}_i(x)}{\partial x_i} - p'(\overline{v}),\ a_{ij}(x) = -\frac{1}{\overline{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \overline{u}_i(x)}{\partial x_j},\ i, j = 1, 2,$$

$p(v) \in C^1(0,\infty)$ – давление, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ – лагранжевы координаты, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр.

Введем пространства $M = \mathbb{L}_2(\Omega) \times \mathbb{L}_2(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$ и $N = (\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \times (\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$. Оператор $A(x,D) : M \to M$ с областью определения $D(A(x,D)) = N$ и областью значений $R(A(x,D)) \subset M$ определяется левыми частями уравнений (1), (2). Перепишем систему (1)–(3) в абстрактной форме

$$(A(x,D) - \lambda E)U(x) = 0, \; x \in \Omega.$$

Определение. Замкнутый оператор $A(x,D)$ называется секториальным, если существуют $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $a \in \mathbb{R}$ такие, что сектор $S_{a,\varphi} = \{\lambda : 0 \leqslant |\arg(\lambda - a)| \leqslant \varphi, \; \lambda \neq a\}$ лежит резольвентном множестве оператора $A(x,D)$.

Теорема. Оператор $A(x,D)$ секториален и имеет спектр, состоящий из дискретного множества точек.

В случае периодических кравевых условий результат, аналогичный теореме 1, получен в [1].

Литература

[1] Прибыль М.А.,Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, Мат. сборник, 2007(в печати).

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Провоторов В.В. (Воронеж)

Рассматривается обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля, имеющего особенность на конечном интервале: в конечном числе точек интервала производной от решения предписаны скачки, пропорциональные значениям решения в этих точках.

Пусть $\xi_k = k\frac{\pi}{m}$, $k = 0,1,2,...,m$. Обозначим $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$, где $\gamma_k = (\xi_{k-1}, \xi_k)$, $k = 1,2,...,m$; очевидно $\bar{\Gamma} = [0,\pi]$. Пусть $\Im$ — множество функций $y(x) \in C[0,\pi] \cap C^2(\Gamma)$, производная которых $y'(x)$ имеет скачки в точках ξ_k пропорциональные значениям $y(\xi_k)$:

$$y'(\xi_k - 0) - y'(\xi_k + 0) = \alpha_k y(\xi_k), \quad k = 1,2,...,m-1 \qquad (1)$$

(здесь α_k — фиксированные постоянные). На множестве $\Im$ рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y, \tag{2}$$

$$U(y) \equiv y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) \equiv y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{3}$$

где λ — спектральный параметр; $q(x)$, h, H — вещественные; $q(x) \in C(\bar{\gamma}_k)$, $k = 1, 2, ..., m-1$.

Обратная задача. По информации о спектральных данных (собственные числа λ_n, нормировочные числа ω_n) краевой задачи (2),(3) восстановить потенциал $q(x)$ и коэффициенты α_k $(k = 1, 2, ..., m-1)$, h, H.

Целью работы является отыскание достаточных условий однозначной разрешимости обратной задачи, доказательство соответствующих утверждений опирается на метод контурного интеграла.

Пусть $L(q(x), \alpha_k, h, H)$ — краевая задача (2), (3). Условимся, что наряду с краевой задачей $L(q(x), \alpha_k, h, H)$ рассматривается краевая задача $L\left(\tilde{q}(x), \tilde{\alpha}_k, \tilde{h}, \tilde{H}\right)$ того же вида, но с другими коэффициентами. Если некоторый символ ω обозначает объект, относящийся к задаче $L(q(x), \alpha_k, h, H)$, то символ $\tilde{\omega}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $L\left(\tilde{q}(x), \tilde{\alpha}_k, \tilde{h}, \tilde{H}\right)$.

Теорема 8. *Если* $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\omega_n = \tilde{\omega}_n$, $n \geqslant 0$, *то* $L(q(x), \alpha_k, h, H) = = L(\tilde{q}(x), \tilde{\alpha}_k, \tilde{h}, \tilde{H})$, *т.е.* $q(x) = \tilde{q}(x)$ *п.в. на* Γ, $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k$ $(k = 1, 2, ..., m-1)$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ-ПУЧКЕ

Провоторова Е.Н. (Воронеж)

Пусть $\gamma_k = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\gamma_m = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Обозначим $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$; очевидно $\bar{\Gamma} = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \bar{\gamma}_k$. Множество $\bar{\Gamma}$ представляет собой граф-пучок с узлом $\frac{\pi}{2}$. На графе $\bar{\Gamma}$ рассмотрим множество $\Im$ функций $y(x) \in C\left(\bar{\Gamma}\right) \cap C^2(\Gamma)$ (непрерывность в узле $\frac{\pi}{2}$ означает выполнение соотношений $y(x)_{x=\frac{\pi}{2} \in \bar{\gamma}_1} = y(x)_{x=\frac{\pi}{2} \in \bar{\gamma}_2} = \ldots = y(x)_{x=\frac{\pi}{2} \in \bar{\gamma}_m}$), производные которых в точках $\frac{\pi}{2} \in \bar{\gamma}_k$ $\left(k = \overline{1, m}\right)$ (т.е. в узле $\frac{\pi}{2}$)

удовлетворяют условиям взаимодействия (условия трансмиссии [1]):

$$\sum_{k=1}^{m-1} y'(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_k} = y'(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_m} \tag{1}$$

На функциях $y(x) \in \Im$ рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$\ell(y) \equiv -y'' + q(x)\,y = \lambda y, \tag{2}$$

$$U_k(y) \equiv \left(y'(x) - hy(x)\right)_{x=0\in\bar{\gamma}_k} = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \tag{3}$$

$$V(y) \equiv \left(y'(x) + hy(x)\right)_{x=\pi\in\bar{\gamma}_m} = 0, \tag{4}$$

здесь λ — спектральный параметр; $q(x)$, $h > 0$ — вещественные; $q(x) \in C(\bar{\gamma}_k)$ $(k = \overline{1,m})$.

Определим функцию Грина $G(x,t,\lambda)$ соотношением

$$G(x,t,\lambda) = G_0(x,t,\lambda) + g(x,\lambda),$$

где

$$\underset{(i=\overline{1,m})}{G_0(x,t,\lambda)} =$$

$$= \frac{\delta_{ik}}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} \begin{cases} \varphi_k(x,\lambda)\,\varphi_m(t,\lambda), & x \leqslant t, \\ \varphi_k(t,\lambda)\,\varphi_m(x,\lambda), & t \leqslant x, \end{cases} & x \in \bar{\gamma}_k,\ t \in \bar{\gamma}_i,\ k = \overline{1, m-1} \\ \begin{cases} \varphi_1(x,\lambda)\,\varphi_m(t,\lambda), & x \leqslant t, \\ \varphi_1(t,\lambda)\,\varphi_m(x,\lambda), & t \leqslant x, \end{cases} & x \in \bar{\gamma}_k,\ t \in \bar{\gamma}_i, k = m \end{cases}$$

$$g(x,\lambda) = c_k \varphi_k(x,\lambda), \quad x \in \bar{\gamma}_k \ (k = \overline{1,m}),$$

c_k, $(k = \overline{1,m})$ определяются как решение системы m линейных алгебраических уравнений, порожденной условиями непрерывности решения $y(x,\lambda)$ в узле $\frac{\pi}{2}$ и условиями взаимодействия (1) $(t \in \bar{\Gamma})$. Показана непрерывность, симметричность $G(x,t,\lambda)$ на $\Gamma \times \Gamma$, а также установлена асимптотическая формула $(\sqrt{\lambda} = \rho = \varsigma + i\tau)$: $G(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau| x)\right)$, $\rho \in G_\delta$, $G_\delta(\delta > 0)$ - правая полуплоскость λ-плоскости с вырезанными δ-окрестностями собственных значений λ_n.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Протасов Д.Н. (Тамбов)
E-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Обозначим comp $[R^n]$ множество всех непустых компактов пространства R^n; $\rho[\cdot,\cdot]$ – расстояние между точкой и множеством и $h[\cdot,\cdot]$ – расстояние между множествами пространства R^n.

Рассмотрим дифференциальное включение с импульсными воздействиями

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),\ t \in [a,b] \setminus \{t_0\}.(t_0 \in (a,b)),$$

$$x(a) = x_0,\ \Delta x(t_0) = \beta,\ (x_0, \beta \in R^n), \tag{1}$$

где $\Delta x(t_0) = x(t_0^+) - x(t_0^-)$, $x(t_0^+) = \lim\limits_{h\to 0_+} x(t_0+h)$, $x(t_0^-) = \lim\limits_{h\to 0_+} x(t_0-h)$.

Будем предполагать, что отображение $F : [a,b] \times R^n \to \text{comp}[R^n]$ удовлетворяет следующим условиям: при всех $x \in R^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо; существует суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$, что для любых $x, y \in R^n$ при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется равенство

$$h[F(t,x); F(t,y)] \leqslant l(t)|x-y|;$$

функция $||F(t,0)|| : [a,b] \to [0,\infty)$, определенная равенством

$$||F(t,0)|| = \sup_{y \in F(t,0)} |y|,$$

суммируема.

Под *решением задачи* (1) понимаем функцию $x : [a,b] \to R^n$ абсолютно непрерывную на каждом из отрезков $[a,t_0]$, $(t_0,b]$, для которой существует такая суммируемая функция $q : [a,b] \to R^n$, что при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо включение $q(t) \in F(t,x(t))$ и всюду на отрезке $[a,b]$ выполняется равенство

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \chi([t_0,b])\beta, \tag{2}$$

где $\chi([\cdot])$ – характеристическая функция отрезка.

В данном докладе исследуется вопрос существования решений задачи (1), изучаются некоторые свойства этих решений. Получены оценки решений, аналогичные оценкам в [1].

Литература

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

ТЕОРЕМА ТИПА ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ[1]

Прошкина А.В. (Москва)

proschkina_a@mail.ru

Пусть $\alpha > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $\eta \in \mathbb{R}$. Предположим, что медленно меняющиеся функции (м.м.ф.) $l(t)$, $\mu(t)$, $t \geqslant 0$ принадлежат классу $C^3[A, +\infty)$ ($\exists A > 0$), ограничены на каждом полуинтервале $[0, B)$, $B \in (0, +\infty)$ и отделены от нуля; пусть

$$t^k\, l^{(k)}(t)/l(t) \to 0, \;\; k = 1, 2, 3, \quad t \to +\infty, \tag{1}$$

$$t^n\, \mu^{(n)}(t)/\mu(t) \to 0, \;\; n = 1, 2, \quad t^3\, \mu^{(3)}(t)/\mu(t) = O(1) \quad t \to +\infty. \tag{2}$$

Тогда при $t \geqslant t_0$ функция $y = t^{\alpha-1} l(t)[\alpha + \sigma(t)]$, где

$$\sigma(t) = \frac{t\, l'(t)}{l(t)} - \frac{2\eta + \alpha/2 - 1}{2} \cdot \frac{1}{t^\alpha l(t)} - \left(\frac{t\, l'(t)}{4\, l(t)} + \frac{t\, \mu'(t)}{\mu(t)}\right) \cdot \frac{1}{t^\alpha l(t)},$$

имеет обратную вида

$$\tau(y) = \; y^{\beta-1}\, M(y), \;\; y \geqslant y_0, \;\; (M(y) \text{– м.м.ф.}) \tag{3}$$

Фиксируем α, η, $l(t)$, $\mu(t)$. Введем пространство $\mathcal{P}^2_{l,\mu,\alpha,\eta}$ целых функций $F(z)$, $z = x + iy$ с нормой:

$$\|F\|_{\mathcal{P}_2} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |y|^{-\frac{2\eta}{\alpha-1} + \frac{\beta}{2} - 1} M(|y|)^{-2\eta - \frac{\alpha}{2} + 1} \mu(\tau(|y|))^{-2} \;\; l(\tau(|y|))^{-\frac{1}{2}} \cdot\right.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00326) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-680.2003.1)

$$\cdot \exp\left(-2\,|y|^{\beta}\,M(|y|)\left[1-\frac{1}{\alpha+\sigma(\tau(|y|))}\right]\right)\times\|F(x+iy)\|_2^2\,dy\right)^{1/2},$$

где норма $\|F(x+iy)\|_2$ есть норма в $L^2(\mathrm{R})$ функции $F(x+iy)$ переменной x при фиксированном y.

Теорема 1. *Пусть $\eta < \frac{\alpha}{4}$; предположим, что м.м.ф. $l(t)$; $\mu(t) \in C^3[A,\ +\infty)(\exists A > 0)$ и удовлетворяют* (1), (2). *Пусть $M(y)$ (см. (3)) - м.м.ф. класса $C^2[B,+\infty)$ $(\exists B > 0)$, и $y^2M''(y)/M(y) \to C_0 \geqslant 0$, $y \to +\infty$. Тогда класс функций $F(z)$, представимых в виде*

$$F(z) = \int\limits_{\mathrm{R}} e^{-itz}\Big(|t|+1\Big)^{\eta}\ \mu(|t|)\ e^{-\,|t|^{\alpha}l(|t|)}\,f(t)\,dt,\quad f\in L^2(\mathrm{R})$$

совпадает с пространством $\mathcal{P}^2_{l,\mu,\alpha,\eta}$; при этом нормы $\|F(z)\|_{\mathcal{P}_2}$ и $\|f\|_2$ эквивалентны.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ N.WIENER[1]

Прошкина Е.В. (Москва)

ckaterina@mail.ru

Пусть f — вещественнозначная 2π-периодическая функция ограниченной вариации без устранимых точек разрыва; a_n, b_n - ее коэффициенты Фурье; $\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$. Тогда необходимое и достаточное условие непрерывности f может быть записано в виде (Теорема Н.Винера, [1, стр.205]):

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2\sin^2\frac{k\pi}{2n} = 0.$$

Определение. Пусть на отрезке I задана функция f и $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$- неубывающая последовательность положительных чисел, таких что $\lambda_n \to \infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Λ-вариацией функции f на I называется величина

$$V_\Lambda(f,I) = \sup_{(\alpha_n,\beta_n)\in I}\sum_n\frac{|f(\beta_n)-f(\alpha_n)|}{\lambda_n},$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 05-01-00192.

где sup берется по всем системам непересекающихся интервалов из I. Функция f называется функцией *ограниченной* Λ-*вариации*, если ее Λ-вариация конечна. Это понятие было введено Даниэлем Уотерманом [2]. В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть f — вещественнозначная 2π-периодическая функция ограниченной Λ-вариации, $\lambda_n = \bar{\bar{o}}(\sqrt{n})$ без устранимых точек разрыва. Тогда для непрерывности f необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = 0.$$

Литература

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.

2. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Stud. math. 1972. 44.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

Прядиев В.Л., Прядиев А.В. (Воронеж)

pryad@mail.ru

Рассмотрим начальную задачу:

$$u_{xx}(x,t) + r(x)u_x(x,t) + q(x)u(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad \big(x \in \mathbb{R}, t > 0\big), \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (2)$$

в которой $r \in C^1(\mathbb{R})$, $q \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$.

Пусть L - обыкновенный дифференциальный оператор, определяемый формулой $(Ly)(x) = p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)$, где p_i непрерывны и p_0 не имеет нулей. Пусть $G(x,s)$ - какое-либо фундаментальное решение уравнения $(Ly)(x) = f(x)$. Пусть $g(x,t,s)$ - функция, которая при любом $s \in \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

1)$g(\,\cdot\,,\,\cdot\,,s)$ непрерывна на $\mathbb{R} \times [0;+\infty)$,

2)на каждой из компонент связности множества

$$\Pi(s) = \big(\mathbb{R} \times [0;+\infty)\big) \setminus \big\{(x,t)\,\big|\,t = |x-s|\big\}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (04-01-00049).

функция $g(\cdot,\cdot,s)$ удовлетворяет уравнению $u_{xx}+ru_x+qu=u_{tt}$,
3) g_{xx}, g_{xt} и g_{tt} непрерывны на каждой из компонент связности множества $\Pi(s)$ и непрерывно доопределяемы с каждой из этих компонент на их замыкание,
4) $g(x,0,s)=G(x,s)$.
Пусть, наконец, функции φ_n, $n=1,2,3,\ldots$, финитны, дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n=\varphi$. При этом будем предполагать, что всякий отрезок $[a;b]$ пересекается лишь с конечным числом носителей функций φ_n.

Теорема. Классическое решение задачи (1),(2) существует и представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x,t,s)(L\varphi_n)(s)\,ds. \tag{3}$$

Доказательство теоремы осуществляется непосредственной проверкой.

Замечание. Для любой точки (x,t) все члены последнего ряда, начиная с некоторого, равны нулю, то есть, на самом деле, сумма в (3) конечна, и суммирование там фактически выполняется только по тем n, для которых $(\operatorname{supp}\varphi_n)\cap[x-t;x+t]\neq\varnothing$.

ОЦЕНКИ K-ФУНКЦИОНАЛОВ ЧЕРЕЗ МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ

Радзиевская Е.И. (Киев)

Пусть $r\in\mathbb{N}$, f – комплекснозначная функция, заданная на отрезке вещественной оси, $\omega^{[r]}(\delta,f)_{L_p[a;b]}$ – r-ый модуль гладкости. В случае $f\in C[a;b]$ полагаем $\omega^{[r]}(\delta,f)_{C[a;b]}:=\omega^{[r]}(\delta,f)_{L_\infty[a;b]}$, а для $r=1$ будем использовать обозначения $\omega(\delta,f)_C:=\omega^{[1]}(\delta,f)_C$.

Рассмотрим конечную систему функционалов $\{U_j\}$ вида

$$U_j(g):=\int\limits_0^1 g^{(K_j)}(\tau)d\sigma_j(\tau)+\sum_{l=0}^{K_j-1}C_{j,l}g^{(l)}(0), \tag{1}$$

где σ_j принадлежит множеству функций ограниченной вариации, заданной на отрезке $[0;1]$. Число K_j называется порядком функционала U_j и обозначается $ord\,U_j$.

Пусть X одно из пространств L_p или l. Тогда для $\delta > 0$ и $f \in X$ зададим два K-функционала

$$K(\delta, f; X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in W_U^r(X)} (\|f - g\|_X + \delta \|g\|_{W^r(X)}),$$

$$K(\delta, f; X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in \widetilde{W}_U^r(X)} (\|f - g\|_X + \delta \|g\|_{W^r(X)}),$$

где $W_U^r(X) := \{g \in W^r(X) : U_j(g) = 0, ord\ U_j \leqslant r\}$ и $\widetilde{W}_U^r(L_p) := W_U^r(L_p)$

$$\widetilde{W}_U^r(l) := \{g \in W^r(l) : U_j(g) = 0, ord\ U_j \leqslant r\}.$$

В введенных обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $\{U_j\}$ – пустая или конечная система функционалов вида (1). Если система $\{U_j\}$ не пуста, то считаем, что функции σ_j из (1) удовлетворяют условию: каждая σ_j имеет хотя бы одну точку скачка, причем всем функционалам U_j, у которых порядки совпадают, можно сопоставить разные точки скачка функции σ_j. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется положительная постоянная $c(n, U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$ и от $r = 1, \ldots, n$, для которой выполнена оценка

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^r(X)) \leqslant c(n, U)\delta^r \|f\|_{W^r(X)},\ 0 < \delta \leqslant 1,\ \delta \in W_U^r(X).$$

Теорема 2. Пусть n, $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant n$ и система функционалов $\{U_j\}$ удовлетворяет условию теоремы 1 и не содержит функционалов, порядки которых меньше r. Тогда найдется положительная постоянная $c(n; U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$, для которой

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^r(X)) \leqslant c(n, U)(\omega^{[r]}(\delta, f)_X + \delta^r \|f\|_X), 0 < \delta \leqslant 1, f \in X.$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА В ВИДЕ ПРЯМОЙ СУММЫ[1]

Рамазанов А.К. (Калуга)
ramazanov@bmstu.kaluga.ru

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ и $W_p^m(D)$ – пространство Соболева с

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00913).

нормой

$$||f|| = \left(\int\limits_D \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha f(z)|^p \, dxdy \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{0}{W}{}_p^m(D), 1 < p < \infty$, обозначим, как обычно, замыкание бесконечно дифференцируемых и финитных в D функций по норме пространства $W_p^m(D)$; $A_n(D)$ – множество всех n-аналитических в D функций и $A_{(n,p)}^m(D) = W_p^m(D) \cap A_n(D)$. Определим еще пространство $\frac{\partial^n}{\partial z^n} \overset{0}{W}{}_p^{n+m}(D)$:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \overset{0}{W}{}_p^{n+m}(D) =$$
$$\left\{ f \in L_p(D) : f(z) = \frac{\partial^n u(z)}{\partial z^n}; u(z) \in \overset{0}{W}{}_p^{n+m}(D) \right\}.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *При* $1 < p < \infty$

$$W_p^m(D) = A_{(n,p)}^m(D) \oplus \frac{\partial^n}{\partial z^n} \overset{0}{W}{}_p^{n+m}(D).$$

Аналогичный результат получен и для полигармонических функций.

Отметим также, что при $p = 2$ подпространства $A_{(n,p)}^m(D)$ и $\frac{\partial^n}{\partial z^n} \overset{0}{W}{}_p^{n+m}(D)$ пространства $W_p^m(D)$ ортогональны.

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Расулов К.М. (Смоленск)

icspgu@sci.smolensk.ru

Постановка задачи. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$. В дальнейшем будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все метааналитические в круге T^+ функции $F^+(z)$, непрерывно продолжаемые на контур L вместе со своими *производными первого порядка и удовлетворяющие на L краевому условию:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} + G(t)\overline{F^+(t)} = g(t), \qquad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ - *дифференциальный оператор Коши-Римана, а $G(t)$ и $g(t)$ - заданные на L функции класса $H(L)$ (Гельдера).*

Сформулированную задачу будем называть *задачей D_M*, соответствующую *однородную задачу* $(g(t) \equiv 0)$ - *задачей D^0_M*.

О нетеревости задачи D_M. Сразу отметим, что в так называемом *вырожденном* случае (т. е. когда $G(t) \equiv 0$) задача (1) *не является нетеровой*. Действительно, для этого достаточно заметить, что все метааналитические в круге T^+ функции вида

$$F^+(z) = \left(\lambda_0 z^{n-1} + z^n - \lambda_0 \bar{z} z^n\right) exp\{\lambda_0 \bar{z}\},$$

где λ_0 - любое комплексное число, отличное от нуля, а n - произвольное натуральное число, большее единицы, являются решениями *однородной задачи типа Дирихле:* $\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = 0,\ t \in L$. Следовательно, число линейно независимых решений рассматриваемой однородной задачи типа Дирихле не является *конечным*, а значит, в случае $G(t) \equiv 0$ задача типа Дирихле (1) для метааналитических в круге T^+ функций *не нетерева.*

В данном сообщении является установливается *нетеревость* задачи D_M в случае: $G(t) \neq 0,\ t \in L$.

Литература

1. Расулов К. М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 345 с.

СХОДИМОСТЬ ДВОЙНОГО СОПРЯЖЕННОГО РЯДА[1]

Редкозубова Е.Ю. (Майкоп)

yel_r@mail.ru

Обозначим $\Omega(I)$-множество всех конечных наборов $\{I_k\}$ неперекрывающихся отрезков $I_k = [a_k, b_k] \subset I$, $\mathbb{L}$ — множество неубывающих последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Пусть

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00192).

$f(x,y)$ функция на $I \times J$. Обозначим $f(I,y_0) = f(b,y_0) - f(a,y_0)$, $f(x_0,J) = f(x_0,d) - f(x_0,c)$, $f(I \times J) = f(b,d) - f(a,c) - f(b,d) + f(a,c)$, где $I = [a,b]$, $J = [c,d]$,

Определение. Функция $f(x,y)$ называется функцией ограниченной Λ-вариации на $\Delta = I \times J$, $(f \in \Lambda BV(\Delta))$, если конечна величина

$$V_\Lambda(f;\Delta) = \sup_{\substack{\{I_n\}\subset\Omega(I)\\ \{J_k\}\subset\Omega(J)}} \sum_{k,n} \frac{|f(I_n \times J_k)|}{\lambda_n \lambda_k} +$$

$$+ \sup_{y_0\in J} \sup_{\{I_n\}\subset\Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n,y_0)|}{\lambda_n} + \sup_{x_0\in I} \sup_{\{J_k\}\subset\Omega(J)} \sum_k \frac{|f(x_0,J_k)|}{\lambda_k}.$$

Как известно, для двойного тригонометрического ряда Фурье (обозн. $S[f]$) функции двух переменных, существует три сопряженных ряда Фурье — сопряженный по переменной x — $\widetilde{S}^1[f]$, сопряженный по переменной y — $\widetilde{S}^2[f]$ и сопряженный по совокупности переменных $\widetilde{S}^3[f]$. Та же ситуация и с сопряженными функциями к $f(x,y)$ — их три $\widetilde{f}^1(x,y)$, $\widetilde{f}^2(x,y)$, и сопряженная по совокупности переменных $\widetilde{f}^3(x,y)$.

Теорема. *Пусть $f(x,y)$, $\widetilde{f^1}(x,y)$, $\widetilde{f^2}(x,y)$ — непрерывные, 2π-периодические по каждому аргументу функции ограниченной гармонической ($\Lambda = \{n\}$) вариации на $T^2 = [-\pi,\pi]^2$. Тогда в каждой точке (x,y)*

$$\widetilde{S}^3_{m,n}(f;x,y) - \widetilde{f^3}_{\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}}(x,y) \to 0 \quad \textit{при} \quad m,n \to \infty.$$

Следствием этой теоремы является двумерный аналог теоремы Юнга ([1], с. 102).

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. М.: Мир, 1965.

О СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ ФРЕЙМАМ[1]

Родионов Т.В. (Москва)
rodionovtv@mail.ru

Назовём *интегральным фреймом* (см. [1]) семейство функций $\Phi = \{\varphi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ из $L^2(X)$, проиндексированное элементами измеримого пространства Ω с мерой μ, если существуют такие константы $B \geqslant A > 0$, что для всех $f \in L^2(X)$ верны неравенства

$$A\|f\|^2 \leqslant \int\limits_\Omega |(f,\varphi_\omega)|^2\,d\mu \leqslant B\|f\|^2.$$

Если $A = B = 1$, то Φ называется *интегральным фреймом Парсеваля* ($\equiv$ *ортоподобной системой*, см. [2]), при этом $f = \int\limits_\Omega (f,\varphi_\omega)\varphi_\omega\,d\mu$.

Возьмём произвольное семейство $\Psi = \{\psi_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset L^2(X)$. Для измеримых множеств $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$, таких что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$ положим $S_k^\Phi = \int_{\Omega_k}(f,\varphi_\omega)\varphi_\omega\,d\mu$ и $S_k^\Psi = \int_{\Omega_k}(f,\psi_\omega)\psi_\omega\,d\mu$.

Теорема. *Пусть Φ — интегральный фрейм Парсеваля в $L^2(X)$, а $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — измеримые подмножества X, такие что $X_m \subset X_{m+1}$ и $\bigcup_{m=1}^\infty X_m = X$.*

Если $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{X_m} |S_k^\Phi(x) - S_k^\Psi(x)|^2\,d\nu(x) = 0$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, то Ψ также будет интегральным фреймом Парсеваля.

Для обычных (дискретных) фреймов результат получен в [3].

Литература

[1] *Zakharova A. A.* Integral Frames and Riesz Bases // Suppl. Rend. Circolo matem. Palermo. Ser.II. – 2005. – v. 76. – p. 665-676.

[2] *Лукашенко Т. П.* Ортоподобные неотрицательные системы разложения // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Мех. – 1997. – N 5. – с. 27-31.

[3] *Rodionov T. V.* On Frame Expansions // Proc. Int. Confer. on Numerical Analysis and Approx. Theory (Ed. by O. Agratini and P. Blaga) — Cluj–Napoca: Casa Cărţii de Ştiinţă, 2006. — p. 365—376.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00192) и грантов Президента РФ для ведущих научных школ и молодых ученых (НШ-4681.2006.1 и МК-486.2007.1).

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ НА ОДНОМ ЛУЧЕ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

Пусть $L(\lambda)$ есть обыкновенный дифференциальный пучок, порожденный в $L_2[0,1]$ следующими дифференциальным выражением и краевыми условиями:

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}(x),$$

$$U_{j0}(y,\lambda) \equiv \sum_{s+k=\kappa_j} \lambda^s \alpha_{jsk} y^{(k)}(0) = 0, \quad j=\overline{1,n-1},$$

$$U_{n0}(y,\lambda)+U_{n1}(y,\lambda) \equiv \sum_{s+k=\kappa_n} \lambda^s(\alpha_{nsk}y^{(k)}(0)+\beta_{nsk}y^{(k)}(1)) = 0,$$

где $p_{sk},\alpha_{jsk},\beta_{nsk} \in \mathbf{C}$, $p_{0n}\neq 0$, $\kappa_j \in \overline{0,n-1}$.

Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ характеристического уравнения $\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$ попарно различны и отличны от нуля. Тогда система функций $y_k(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_k x)$, $k=\overline{1,n}$, есть ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$. Обозначим $\Delta_0 = |V_1V_2\dots V_n|$, $\Delta_k = |V_1\dots V_{k-1}W_kV_{k+1}\dots V_n|$ при $k=\overline{1,n}$, где

$$V_k = (v_{1k},\dots,v_{nk})^T = \left(\lambda^{-\kappa_1}U_{10}(y_k,\lambda),\dots,\lambda^{-\kappa_n}U_{n0}(y_k,\lambda)\right)^T,$$

$$W_k = (w_{1k},\dots,w_{nk})^T = \left(0,\dots,0,\lambda^{-\kappa_n}e^{-\lambda\omega_k}U_{n1}(y_k,\lambda)\right)^T.$$

Пусть $(\Delta_0)_{jk}$ есть алгебраическое дополнение элемента (j,k) в определителе Δ_0.

Теорема. Если числа $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ лежат на одном луче, исходящем из начала координат, $\Delta_0\neq 0$, при некоторых m $(2\leqslant m\leqslant n)$ и l $(1\leqslant l\leqslant m-1)$ справедливы соотношения $(\Delta_0)_{nn}=\dots=(\Delta_0)_{nm+1}=0$, $(\Delta_0)_{nm}\neq 0$, $w_{nm}=(\Delta_0)_{nm-1}w_{nm-1}=\dots=(\Delta_0)_{nl+1}w_{nl+1}=0$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 06-01-00003)

$(\Delta_0)_{nl} w_{nl} \neq 0$ и $\Delta_0 + \cdots + \Delta_l \neq 0$, то система с.п.ф. пучка $L(\lambda)$ однократно полна в $L_2[0, \sigma]$ при $\sigma = \omega_l / \omega_m$. В случае $\Delta_0 + \cdots + + \Delta_l = 0$ указанная полнота имеет место с возможным конечным дефектом.

ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ $t \to \infty$

Рябенко А.С. (Воронеж)

В работе рассматривается следующая задача

$$\frac{\partial v(\overline{x}, t)}{\partial t} - a^2(x_3)\Delta v(\overline{x}, t) = g(\overline{x}, t) \quad v(\overline{x}, t)|_{t=0} = 0;$$

$$v(\overline{x}, t)|_{x_3=0} = v(\overline{x}, t)|_{x_3=\infty} = 0,$$

где $t \geqslant 0$, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, \infty), a^2(x_3) \in C[0, \infty)$.

Будем говорить, что функция $p(\overline{x}, t)$ удовлетворяет условию 1, если для функций вида $\frac{\partial^{i+j+k} p(\overline{x}, t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i}$, где $0 \leqslant i \leqslant 2$, $0 \leqslant j \leqslant 4$, $0 \leqslant k \leqslant 4$ выполнены следующие условия:

1. $\frac{\partial^{i+j+k} p(\overline{x}, t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i}$ непрерывна по совокупности переменных при $x' \in R^2$, $x_3 \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

2. $\frac{\partial^{i+j+k} p(\overline{x}, t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i} e^{\delta t} \in L_1(R_+^3)$, где $\delta > 0$.

3. $\int\limits_{R^2} \int\limits_0^\infty \left| \frac{\partial^{i+j+k} p(\overline{x}, t)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \partial t^i} \right| e^{\delta t} dx_1 dx_2 dt \in L_2(R_+)$ при $0 \leqslant i \leqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant 2$, $0 \leqslant k \leqslant 2$.

4. $p(\overline{x}, t)|_{t=0} = 0$, $\left. \frac{\partial p(\overline{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$.

Теорема 1. Пусть функция $g(\overline{x}, t)$ удовлетворяет условию 1, тогда $v(\overline{x}, t) = O(t^{-7/4})$. Оценка $O(t^{-7/4})$ равномерна по $\overline{x}$ при $x_3 \in [0, d]$, где $d > 0$.

Литература

[1] Рябенко А. С. Оценка асимптотики при $t \to \infty$ решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в полосе / А.С.Рябенко // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весен. мат. шк. "Понтрягинские чтения-XVII"- Воронеж 2006. – С. 157-158.

[2] Глушко А. В. Оценка асимптотики при $t \to \infty$ решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в полупространстве / А.В.Глушко, А.С. Рябенко // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весен. мат. шк. "Понтрягинские чтения-XVII"- Воронеж 2006. – С. 38-39.

ОБ ПОПЕРЕЧНИКАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СФЕР НА ГРАФЕ

Рябцева Н.Н. (Белгород)
science@bupk.ru

Пусть Г геометрический граф из $\mathbb{R}^n$. Мы используем терминологию из [1].

Рассматривается на Г пространство E функций, каждая из которых непрерывно дифференцируема на ребрах Г, непрерывна в целом на Г, т.е. в каждой из внутренних вершин, и удовлетворяет условиям трансмиссии, т.е.

$$\sum_i P_i(a)u_i'(a+0) = 0.$$

Мы предполагаем также, что все функции из E обращаются в нуль на границе Г, т.е. $u|_{\partial\Gamma} = 0$. На этом множестве мы рассмотрим две нормы: $\|u\|_1 = (\int\limits_\Gamma u^2dx)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\|_2 = (\int\limits_\Gamma u'^2dx)^{\frac{1}{2}}$ соответствующих стандартным пространствам типа L^2 и пространства типа Соболева.

Нас интересует вопрос о соотношениях этих норм, а точнее - о взаимосвязи и взаиморасположении сфер, определяемых этими нормами. Мы его формулируем в виде экстремальной задачи о точной верхней грани первой нормы на множестве функций из единичного шара по второй норме. Этот вопрос эквивалентен классической задаче Колмогорова о поперечниках. Также, как и в отправной постановке Колмогорова, на этот вопрос отвечает задача об условном экстремуме, которая, методом Лагранжа, сводится в экстремалям

$$I(u) = \int\limits_\Gamma (u'^2 - \lambda u^2)dx,$$

т.е. $\|u\|_2^2 - \lambda\|u\|_1^2$, что приводит к соответствующему аналогу уравнения Эйлера, а точнее к задаче

$$-\frac{\partial}{\partial\Gamma}(u') = \lambda u, u|_{\partial\Gamma} = 0$$

на множестве функций из E.

Согласно осцилляционной теории развитой в [1], первый диаметри исходной задачи о поперечниках реализуется в направлении, определяемом функцией, строго положительной на всем Γ.

Литература

1. Покорный Ю.В.и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

О ТОЧНОСТИ НЕРАВЕНСТВА ЛЕБЕГА В ОСОБОЙ ТОЧКЕ ВЕСА МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОТРЕЗКЕ[1]

Сандакова С.Л. (Екатеринбург)

ssandakova@yandex.ru

Пусть $\{S_n^{(p)}(f;x)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность сумм Фурье функции f по системе $\{p_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ (алгебраических) многочленов, ортонормированной на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(t)$; $L_n^{(p)}(x)$ — функция Лебега сумм $S_n^{(p)}(f;x)$; $\omega(F;\delta)$ — модуль непрерывности в $C_{2\pi}$ функции F; $E_n(f)$ — наилучшее приближение в $C[-1,1]$ функции f многочленами степени $\leqslant n$; $W^r H_\omega[a,b]$ — класс всех r раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, у которых модуль непрерывности r-й производной $\leqslant$ заданного модуля непрерывности ω. Главным результатом сообщения является следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что вес p имеет вид* $p(t) = H(t)(1-t^2)^{-1/2}w_0(\sqrt{1+t})w_{M+1}(\sqrt{1-t})\prod_{k=1}^{M} w_k(|t-x_k|)$, *где* $-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_M < x_{M+1} = 1$, $w_0(u),\ldots,w_{M+1}(u) \in \in L^1[0,1]$ — *конечные произведения действительных степеней вогнутых модулей непрерывности такие, что*

$$\int_0^\theta w_k(\tau)\,d\tau = O(\theta w_k(\theta)) \quad (\theta \to +0; \quad k = 0,\ldots,M+1);$$

$h(\tau) := H(\cos\tau)$ *и* $1/h(\tau) \in L^\infty[0,\pi]$; $\omega(h,\tau)\tau^{-1} \in L^1[0,\pi]$. *Пусть, кроме того,* $L_n^{(p)}(x_l) = O(|P_n(x_l)| + |P_{n+1}(x_l)|) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$ *при некотором* $l \in \{0,\ldots,M+1\}$. *Тогда для заданных* $r \in \mathbb{Z}_+$ *и модуля*

---

[1] Работа подержана Советом по грантам Президента РФ (НШ-5120.2006.1).

непрерывности $\omega(\delta)$, *удовлетворяющего условию*

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)\,du}{u} + \delta \int\limits_\delta^1 \frac{\omega(u)\,du}{u^2} = O(\omega(\delta)) \quad (\delta \to +0),$$

найдется $f \in W^r H_\omega[-1,1]$ *такая, что* $E_n(f) \asymp n^{-r}\omega(n^{-1})$ *и*

$$|f(x) - S_{n_\nu}^{(p)}(x_l)| \asymp (1 + L_{n_\nu}^{(p)}(x_l))E_{n_\nu}(f) \quad (n_\nu = 2^{(M+2)\nu+l}).$$

Теорема обобщает соответствующие результаты В.М. Бадкова и А.М. Беленького. При ее доказательстве применяются полученные В.М. Бадковым оценки многочленов $p_n(t)$.

КЛАССЫ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ПО ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. СОВМЕСТНОЕ УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ[1]

Седлецкий А.М. (Москва)

sedlet@mail.ru

1. Пусть $\alpha > 1,\ 1/\alpha + 1/\beta = 1,\ a, b > 0$ и пусть $l(t),\ t \geqslant 0$ – медленно меняющаяся функция, ограниченная на каждом полуинтервале вида $[0, h),\ \ 0 < h < \infty$. Через $Z_\alpha = Z_\alpha(l(t); a, b)$ обозначим класс целых функций, для которых $\forall \varepsilon > 0$

$$f(z) = O\left(\exp\Big((a+\varepsilon)l(|y|)|y|^\alpha\Big)\right),$$

$$f(x) = O\left(\exp\Big((-b+\varepsilon)l(|x|)|x|^\alpha\Big)\right)$$

соответственно для $z = x + iy \in \mathrm{C}$ и $x \in \mathrm{R}$, а через $E_\alpha = E_\alpha(l(t); a, b)$ – класс целых функций, для которых $\forall \varepsilon > 0$

$$f(z) = O\left(\exp\Big((-b+\varepsilon)l(|x|)|x|^\alpha + (a+\varepsilon)l(|y|)|y|^\alpha\Big)\right),\ z \in \mathrm{C}.$$

Ранее автором (2005) был найден критерий непустоты классов Z_α и описаны классы соответствующих преобразований Фурье. Теперь это сделано для классов E_α.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант № 06-01-00326.

2. Винер впервые заметил, что функция и ее преобразование Фурье не могут убывать одновременно слишком быстро. Количественно этот факт отражает теорема Моргана (1934), по которой из условий

$$f(x) = O\left(\exp\left(-A|x|^{\alpha}\right)\right), \quad \hat{f}(x) = O\left(\exp\left(-B|x|^{\beta}\right)\right), \quad x \in \mathrm{R}, \quad (1)$$

$A, B > 0$ и $B > \varphi(A)$, где φ имеет явный вид, следует $f = \hat{f} \equiv 0$.

С помощью упомянутых выше результатов о классах Z_α автором получено не только расширение теоремы Моргана (когда в (1) $|x|^\alpha$ и $|x|^\beta$ заменяются соответственно на $|x|^\alpha l(|x|)$ и $|x|^\beta l(|x|)$), но и ее обращение, т.е. в классе соответствующих мажорант для f и $\hat{f}$ найден критерий того, что $f = \hat{f} \equiv 0$.

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Сесекин А.Н. (Екатеринбург)
E-mail: sesekin@imm.uran.ru

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)\dot{v}(t), \quad (1)$$

где $v(t) \in R^m$, $x(t) \in R^n$, $v(t)$ — вектор-функция, имеющая на промежутке $[t_0, \vartheta]$ ограниченную вариацию, производные в (1) понимаются в обобщенном смысле, $f(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, $B(t, x)$ - $n \times m$ -матрица-функция.

Особенностью уравнения (1) является то, что в правой части его содержится некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную.

Обсуждаются различные подходы к формализации понятия решения уравнения (1). Приведено определение разрывного решения, основанное на замыкании множества гладких решений уравнения (1) в пространстве функций ограниченной вариации. Описано множество так формализованных решений.

---

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект №06–01–00445

С помощью этих результатов формализовано понятие решения для системы функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t-\tau)) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \tag{2}$$

где $\tau > 0$ – постоянное запаздывание. Доказана теорема о непрерывной зависимости решения от начальной функции, получена формула Коши для линейной системы с обобщенным воздействием в матрице системы.

Литература

1. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers, 1997. 268 p.

2. Fetisova Yu.V., Sesekin A.N. Discontinuous solutions of differential equations with time delay. Wseas transactions on systems. Issue 5, Volume 4, 2005. P.487-492.

ГРАНИЦА ВЫПУКЛОСТИ В ТОЧКЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Сижук Т.П. (Ставрополь)

e-mail: sv47@mail.ru

Пусть V_k, $k \geqslant 2$, – класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, регулярных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих в нем условиям: $f'(z) \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \left| Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\right| d\theta \leqslant k\pi, z = re^{i\theta},$$

т.е. имеющих в E ограниченное граничное вращение.

Определение. *Границей выпуклости класса V_k в точке $c \in E$ называется точная верхняя граница $r_k(c)$ радиусов кругов $E(c,r) \subset E$, в каждом из которых любая функция из класса V_k является выпуклой, т.е. отображает круг $E(c,r)$ на выпуклую область.*

С учетом установленного в [1] условия выпуклости функции $f(z)$ в круге $E(c,r)$ имеем:

$$r_k(c) := \sup\left\{r : Re\left(1 + \frac{(z-c)f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, z \in E(c,r), \forall f \in V_k\right\}.$$

Теорема. *Граница выпуклости класса V_k в точке $c \in E$ есть число*

$$r_k(c) = \left(k - \sqrt{k^2 - 4(1 - |c|^2)}\right)/2.$$

Следствие [2]. *Каждая функция $f(z)$ из класса V_k отображает круг $|z| < (k - \sqrt{k^2 - 4})/2$ на выпуклую область.*

Литература

1. Александров И.А. *О границах выпуклости и звездообразности для функций, однолистных и регулярных в круге* // ДАН СССР - 1957. - Т. 16. - No 6. - С. 903–905.

2. Robertson M. *Coefficients of functions with bounded boundary rotation* // Can. J. Math. 1969. V.21. No 6. P. 1477-1482.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Пусть s и r –натуральные числа, $[a]$- целая часть числа a, $\Delta^r a_n = a_n + a_{n+r}$, $\Delta_s a_n = a_n - a_{n+s}$, $\Delta_s^r a_n = \Delta_s\left(\Delta^r a_n\right)$.

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (1) \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \quad (2)$$

У т в е р ж д е н и е 1. Если $\Delta_s^r a_n \geqslant 0$ для всех n и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то суммы рядов (1) и (2) сходятся для почти всех x.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть $\Delta_s^r a_n \geqslant 0$ для всех n и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, $f(x)$ – сумма ряда (1), $g(x)$– сумма ряда (2). Тогда а) если s – нечетное число, то

$$\int_0^{2\pi} |f|^p\, dx \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{r-1} |a_i|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + a_{n+r}\right)^p (n+1)^{p-2} \right),$$

$$\int_0^{2\pi} |g|^p\, dx \leqslant c_2 \left(|a_r|^p + \sum_{i=1}^{[(r-1)/2]} |a_i - a_{r-i}|^p + \right.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268).

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+r})^p(n+1)^{p-2}\Bigg).$$

б) если s – четное число и последовательность $\{a_n\}$дополнительно удовлетворяет условию $\Delta_r^r a_{i+2nr} \geqslant 0$ для всех $i=1,...,r$и всех n,то

$$\int_0^{2\pi}|f|^p\,dx \leqslant c_3\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}(i+2nr)^{p-2}a_{i+2nr}^p+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+a_{n+r})^p(n+1)^{p-2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi}|g|^p dx \leqslant c_4\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{i+2nr}^p}{(i+2nr)^{2-p}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}|a_i-a_{r-i}|^p+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_n+a_{n+r})^p}{(n+1)^{2-p}}\right),$$

где постоянные c_1,c_2,c_3,c_4 не зависят от $\{a_n\}$.

О КОСИНУС-РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА[1]

Симонова И.Э., Симонов Б.В. (Волгоград)
htf212@vstu.ru

Пространством Лебега называется множество 2π-периодических измеримых функций f(x), для которых ($p>0$)

$$\|f\|_p=\Big(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Пусть s и r — натуральные числа, $\{a_n\}$— последовательность действительных чисел. Введем следующие обозначения:

$$\Delta^r a_n=a_n+a_{n+r},\quad \Delta_{1,s}a_n=a_n-a_{n+s},\quad \Delta_{2,s}a_n=\Delta_{1,s}(\Delta_{1,s}a_n),$$

$$\Delta_{2,s}^r a_n=\Delta_{2,s}\left(\Delta^r a_n\right).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268).

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (1)$$

Утверждение 1. Если $\Delta^r_{2,s} a_n \geqslant 0$ для всех n и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то сумма ряда (1) сходится для почти всех x.

Утверждение 2. Пусть $\Delta^r_s a_n \geqslant 0$ для всех n и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, $f(x)$ – сумма ряда (1). Тогда

1) при $p > 0$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2r}} |f|^p dx \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{r-1} |a_i|^p + \sum_{i=1}^{r} (a_i + a_{i+r})^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^r_{1,s} a_n)^p (n+1)^{2p-2} \right),$$

2) при $0 < p < 1$

$$\int\limits_0^{2\pi} |f|^p \, dx \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{r-1} |a_i|^p + \sum_{i=1}^{(s+1)r} (a_i + a_{i+r})^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Delta^r_{1,s} a_n\right)^p (n+1)^{2p-2} \right).$$

ОБ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

Смирнова Е.В., Шацких И.С. (Воронеж)

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u,y) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} < y(t_j) - y_j, F_j(y(t_j) - y_j) > +$$

$$+ \int\limits_0^T \left(\frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S^*(t) & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} d(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \rangle \right) dt$$

на траекториях системы

$$d(Ex(t)) \setminus dt = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t),$$

$$Ex(0) = Ex(T),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $t \in [0,T]$; t_j $(0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N < T_{N+1} = T, j = 1,\ldots,N)$ фиксированы; $y_j \in ImC, j = 0,\ldots,N$, заданы; $F_j = F_j^* \geqslant 0, j = 0,\ldots,N$; $\begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S^*(t) & R(t) \end{pmatrix} > 0, W(t) = W^*(t), R(t) = R^*(t)$. Пусть выполнены условия:

1. $ImC^*F_jC \subseteq ImE^* - C^*F_jy_j, j = 0,\ldots,N$;
2. Операторы $QA_i(t)P : \ker E \to \ker E^*, i = 1,2$, где $A_1(t) = A(t)$, $A_2(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)S^*(t)$, имеют обратные при любом $t \in [0,T]$
3. Однозначно разрешимы периодические задачи:

$$dy \setminus dt = E_+(I-Q)(I-A_i(QA_iP)^{-1}Q)A_i(I-P)y, y(0) = y(T), i = 1,2,$$

где P,Q — ортопроекторы на $\ker E, \ker E^*$ соответственно, E_+ — обратный к оператору $(I-Q)E(I-P) : ImE^* \to ImE$.

Доказано, что задача имеет единственное решение, и оптимальное управление определяется соотношением

$$u(t) = R^{-1}(t)(B^*(t)\psi(t) - S^*(t)x(t) - g(t)),$$

$$E^*d\psi(t) \setminus dt = -A^*(t)\psi(t) + W(t)x(t) + S(t)u(t) + d(t), t \neq t_j,$$

$$E^*(\psi(0) - \psi(T)) = C^*F_0(y(0) - y_0),$$

$$E^*(\psi(t_j - 0) - \psi(t_j + 0)) = -C^*F_j(y(t_j) - y_j), j = 1,\ldots,N.$$

О МНОЖИТЕЛЕ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

Солодов А.П. (Москва)

В классической теореме Меньшова-Радемахера установлено, что на классе всех ортонормированных систем последовательность $\omega_n =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00192) и гранта ведущих научных школ НШ-4681.2006.1.

$= \log_2^2(n+1)$ является точным множителем Вейля для сходимости почти всюду. Данная работа посвящена задаче о нахождении множителя Вейля для класса ортонормированных систем специального вида. А именно, рассматриваются системы вида $\{\varphi_n(x)\varphi_n(y)\}$, где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система. Задача о возможности понижения множителя Вейля для такого класса систем представляет интерес в связи с некоторыми вопросами безусловной сходимости ортогональных рядов.

Построение примеров ортонормированных систем, устанавливающих точность множителя $\omega_n = \log_2^2(n+1)$, тесно связана с нахождением $n \times n$ матриц A со свойством $c_1 \log_2(n+1) \leqslant \frac{\|A \circ \Delta_n\|_{l^2}}{\|A\|_{l^2}} \leqslant \leqslant c_2 \log_2(n+1)$, где Δ_n — верхняя треугольная $n \times n$ матрица, $A \circ B$ — произведение Адамара матриц A и B, c_1, c_2 — некоторые постоянные (см. [1] - [3]). Будет ли этот множитель точным для систем $\{\varphi_n(x)\varphi_n(y)\}$ зависит от существования матриц, обладающих приведенным выше свойством вместе со своей окрестностью. Вопрос о существовании таких матриц остается открытым, но при некоторых дополнительных предположениях, охватывающих известные примеры, ответ отрицательный. В качестве следствия получаем достаточное условие на ортонормированную систему, при котором возможно понижение множителя Вейля для систем $\{\varphi_n(x)\varphi_n(y)\}$.

Теорема. Пусть $\{\varphi_n\}$ — такая ортонормированная система, что $\sup_n n^{1/p-1/2}\|\varphi_n\|_{L_p} < +\infty$ для некоторого $p \in (1,2)$. Тогда найдется такая возрастающая последовательность $\omega_n = o\big(\log_2^2(n+1)\big)$, что для любого набора коэффициентов a_n со свойством $\sum a_n^2\omega_n < +\infty$ ряд $\sum \varphi_n(x)\varphi_n(y)$ сходится почти всюду.

Литература

1.Кашин Б.Ф., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1999.

2.Paskiewich A. A new proof of Menshov-Rademaher theorem. Acta Sci. Math.(Szeged), 71(2005), c. 631-642.

3. Солодов А.П. Об одном примере Паскевича. Мат. Заметки. Т.78, №2, 2005, с.286-291.

О ПОРЯДКЕ И ТИПЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Соломатин О.Д. (Орел)
solomatin_od@bk.ru

Пусть H — полное отделимое локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел, топология которого задается системой полунорм $\{\|\cdot\|_p\}, p \in P$. Величина

$$\beta_p(\varphi_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \|\varphi_n\|_p}{n \ln n}$$

называется p—порядком последовательности функций $\{\varphi_n\}, n \geqslant 1$, а число $\beta(\varphi_n) = \sup\limits_p \{\beta_p(\varphi_n)\}$ — порядком $\{\varphi_n\}$.

Если $\beta_p(\varphi_n) \neq 0, \infty$, то p-типом и типом последовательности $\{\varphi_n\}$ называются соответственно величины

$$\alpha_p(\varphi_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{\|\varphi_n\|_p}}{n^{\beta_p(\varphi_n)}}, \alpha(\varphi_n) = \sup_p\{\alpha_p(\varphi_n)\}.$$

Например, в пространстве целых функций, порядок роста которых не превосходит $\rho(\rho > 1)$, а при порядке ρ их тип не превосходит σ, с топологией

$$\|\varphi(z)\|_p = \sup_{r \geqslant 0}\{\max_{|z|\leqslant r} |\varphi(z)| \exp(-(\sigma + p)r^\rho)\},\ \forall\, p > 0$$

для последовательности $\{z^n\}, n \geqslant 0$ находим $\beta_p = \beta = 1/\rho; \alpha_p = (1/((\sigma + p)e\rho))^{1/\rho}, \alpha = (1/(\sigma e\rho))^{1/\rho}, \forall\, p > 0$. Для последовательности $\{\exp(nz)\}, n \geqslant 0$ в этом же пространстве имеем $\beta_p = \beta = \infty, \forall\, p > 0$.

В пространстве $H(\mathbb{C})$ всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах $\|\varphi(z)\|_p = \max\limits_{|z|\leqslant p} |\varphi(z)|, p \geqslant 1$ для последовательностей $\{z^n\}$ и $\{\exp(nz)\}$ находим $\beta_p = \beta = 0, \forall\, p$.

Могут быть рассмотрены также примеры других пространств и последовательностей.

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ДВУМЯ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ НА ГРАНИЦЕ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

Старинец В.В. (Москва)
vstarinets@mail.ru

В π-пространстве Π с метрикой $[y, z] = \lim\limits_{\alpha \to +0} \int_c^b y\,\bar{z}\,\tau_\alpha\,dx$ ранга индефинитности $r = r_\sigma + r_\mu$, где $r_\nu = [(| - \nu| - \nu)/2] - [(| - \nu| - \nu)/4]$ ($\nu = \sigma, \mu$) — парциальный ранг, отвечающий критической точке $x_c(= c, b)$. Регуляризующий множитель равен $\tau_\alpha = \tau_\alpha^{(\sigma)}\tau_\alpha^{(\mu)}$, где $\tau_\alpha^{(\sigma)}(x) = -\sigma n^{-1}\pi\sigma(1 + \alpha/(x - c))^{\sigma+1/2}\cos((2\sigma + 1)\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{(x - c)/\alpha})$, $\tau_\alpha^{(\mu)}(x) = -\sigma n^{-1}\pi\mu(1 + \alpha/(b - x))^{\mu+1/2}\cos((2\mu + 1)\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{(b - x)/\alpha})$. Пространство Π представляет собой прямую сумму $\Pi = \Omega /\!/ \Delta$ некоторого незамкнутого множества Ω классических функций, замыкание которого $\overline{\Omega}$ совпадает с Π, и r-мерного нейтрального линеала Δ специальных обобщенных функций с точечным носителем, сосредоточенным в критических точках. В Π рассматривается сингулярный оператор L с квазирегулярными концами, порождаемый самосопряженным дифференциальным выражением $l(y) = -\Big((x - c)(b - x)p_0(x)y'(x)\Big)' + \Big(\frac{b-c}{4}\big(\frac{p_0(c)\,\sigma^2}{x-c} + \frac{p_0(b)\,\mu^2}{b-x}\big) + q_0(x)\Big)y(x)$. Соответствующий π-эрмитов оператор $L_0 \subset L$ расширяется до π-самосопряженного в Π оператора Λ краевыми условиями $\xi_y^0\,\sigma n\alpha + \sigma(b - c)p_0(c)\varphi_y(c)\cos\alpha = 0$, $\eta_y^0\,\sigma n\beta + \mu(b - c)p_0(b)\psi_y(b)\cos\beta = 0$ ($\alpha, \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$), где ξ_y^0, η_y^0, $\varphi_y(c)$, $\psi_y(b)$ — однозначно отвечающие каждому $y \in D(\Lambda)$ величины. В конкретном случае $c = 0$, $b = 1$, $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ исследуется спектр оператора Λ и его эволюция с изменением параметров $t_\sigma = \frac{\Gamma(1-\sigma)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\sigma\,\Gamma(1+\sigma)}$, $t_\mu = \frac{\Gamma(1-\mu)\,\mathrm{tg}\,\beta}{4\mu\,\Gamma(1+\mu)}$. Спектр оператора может быть представлен в виде $S = S^h \cup S^e \cup S^p$, где S^h, S^e и S^p — соответственно гиперболическая, эллиптическая и параболическая части. В общем случае оператор Λ имеет вид $\Lambda = \Lambda^h\ [\dot{+}]\ (\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,dE_\lambda /\!/ \mathcal{N})$, где Λ^h — гиперболическая часть оператора, $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор ($\mathcal{N}^n = 0$, где $n = 1, 2, 3$ в зависимости от значений параметров t_σ и t_μ), E_λ — спектральная функция точечного (эллиптического и параболического) спектра.

Литература

1. Старинец В. В. Обобщенно-классические ортогональные мно-

гочлены. — М.: Изд. МГУП. 2000.

2. Старинец В. В. Симметрические операторы Штурма—Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Изд. МГУП. 2004.

О ВКЛЮЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ[1]

Степанянц С.А. (Москва)

Изучаются вопросы включения методов суммирования числовых рядов. Используемые обозначения: $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – последовательность действительных чисел; $\sum a_n$ – соответствующий ей ряд; $k, l \in \mathbb{N}$; $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$. Ω и Λ – методы суммирования числовых рядов. $\sum a_n = A(\Omega)$ – суммируемость ряда $\sum a_n$ к числу A методом Ω. Метод Λ включается методом Ω ($\Lambda \subset \Omega$), если из того, что $\sum a_n = A(\Lambda)$ следует, что $\sum a_n = A(\Omega)$; методы Ω и Λ – эквивалентны, если $\Lambda \subset \Omega$ и $\Omega \subset \Lambda$; метод Ω сильнее метода Λ, если $\Lambda \subset \Omega$, но методы Ω и Λ – не эквивалентны.

В качестве Ω и Λ рассматриваются методы суммирования Чезаро (C, α) и методы суммирования дискретными средними Рисса (Rd, α) с различными $\alpha > -1$. Известно, что $(C, \alpha) \subset (C, \beta)$ при $-1 < \alpha < \beta$ и метод (C, β) сильнее, чем метод (C, α).

Связям между методами Чезаро и Рисса одного порядка посвящено довольно много работ. Окончательный результат получен Куттнером в 1962 г. [1]: (Rd, α) эквивалентно (C, α) для $-1 < \alpha < 2$; (Rd, α) сильнее, чем (C, α) для $\alpha \geqslant 2$. Отсюда сразу следует, что если $-1 < \alpha < 2$ и $\alpha < \beta$, то $(Rd, \alpha) \subset (Rd, \beta)$. Для произвольных α и β вопросы включения методов (Rd, α) и (Rd, β) исследованы мало. Изучим этот вопрос для целых значений порядка метода.

Рассмотрим последовательность многочленов $P_n(x)$: $P_0(x) = 1$;

$$P_1(x) = x + 1; \quad P_k(x) = (x+1)P_{k-1}(x) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \binom{k}{\nu} x P_{\nu-1}(x) P_{k-\nu-1}(x)$$

при $k \geqslant 2$. Θ_n — множество всех корней многочлена $P_{n-1}(x)$, отличных от (-1).

Теорема. *Пусть k и l — фиксированные натуральные числа, $k < l$. Включение методов суммирования $(Rd, k) \subset (Rd, l)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\Theta_k \subset \Theta_l$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 06-01-00268.

Следствие 1. $(Rd, 2) \subset (Rd, l)$ для $\forall l \in \mathbb{N}$, $l > 2$.

Следствие 2. $(Rd, k) \not\subset (Rd, k+m)$ для $\forall k \geqslant 3$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m < 10$.

Литература

1. *Kuttner B.* On discontinuous Riesz means of type n // J. London Math. Soc. 1962. **37.** 354-364.

МИНИМИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ С ПРИБЛИЖЕННО ИЗВЕСТНЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ[1]

Сумин М.И., Трушина Е.В. (Нижний Новгород)
m.sumin@mm.unn.ru

В работах, посвященных теории необходимых условий в оптимальном управлении, традиционно рассматриваются задачи с точно известными исходными данными. Однако, потребности приложений неизбежно приводят к необходимости изучения задач оптимального управления в ситуациях, когда их исходные данные известны лишь приближенно, а само понятие классического оптимального управления в значительной степени "теряет смысл т.к. в "возмущенной" задаче оптимального элемента может и не существовать, а в случае его существования не вполне понятно какое "отношение" он имеет к оптимальному элементу невозмущенной задачи. Ситуация кардинально меняется, если в качестве "искомого" объекта теории рассматривать минимизирующие последовательности допустимых управлений, в роли которых выступают так называемые минимизирующие приближенные решения в смысле Дж. Варги, и задействовать при этом их регуляризирующие свойства.

В докладе рассматривается задача оптимального управления

$$I_0(u) \to \inf,\ I_1(u) \leqslant p,\ I_2(u) = q,\ u \in D, \qquad (P_{p,q})$$

где $D \equiv \{u \in L^m_\infty(0,T) : u(t) \in U \text{ п.в. на } (0,T)\}$, $U \subset R^m$ - компакт, $I_0(u) \equiv \varphi_0(x[u](T))$, $I_1(u) \equiv (\varphi_{1,1},(x[u](T)),\ldots,\varphi_{1,k}(x[u](T)))$, $I_2(u) \equiv (\varphi_{2,1},(x[u](T)),\ldots,\varphi_{2,l}(x[u](T)))$, $p \in R^k$, $q \in R^l$ – параметры задачи, $x[u](t),\ t \in [0,T]$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ x(0) = x_0,\ t \in [0,T],\ x \in R^n.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460).

Исходные данные задачи $(P_{p,q})$ удовлетворяют обычным для оптимального управления условиям и считаются известными приближенно. В данной ситуации обсуждаются: 1) необходимые и достаточные условия для минимизирующих последовательностей; 2) регуляризирующие свойства принципа максимума Понтрягина и минимизирующих последовательностей; 3) минимизирующие последовательности при конечно-разностной аппроксимации; 4) минимизирующие последовательности в параметрической оптимизации. Рассматриваются иллюстративные примеры.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ[1]

Танана В.П., Булатова М.Г. (Троицк)
bulatovamg@rambler.ru

Рассмотрена задача

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; x \in [0,1], \quad t \geqslant 0,$$

$$u(x,0) = 0, x \in [0,1],$$

$$u(0,t) = f(t), t \geqslant 0,$$

$$u'_x(0,t) = g(t); \quad t \geqslant 0,$$

граничные значения $u(1,t) = u(t)$ и $u'_x(1,t)$ подлежат определению.

Предположим, что при $f = f_0(t)$ и $g = g_0(t) \in L_2[0,\infty]$ существуют $u_0(t) = u_0(1,t)$ и $v_0(t) = \frac{\partial u_0(1,t)}{\partial x}$, принадлежащие множеству M_r такому, что

$$M_r = \{(u(t), v(t)) : u, v \in W_2^1[0,\infty),$$
$$\|u\|^2_{L_2} + \|v\|^2_{L_2} + \|u'\|^2_{L_2} + \|v'\|^2_{L_2} \leqslant r^2\}$$

где r - известная величина, а u', v' - обобщенные производные от функций $u(t), v(t)$ по t, но функции $f_0(t)$ и $g_0(t)$ нам не известны, а вместо них даны некоторые приближения $f_\delta, g_\delta \in L_2[0,\infty)$ и уровень их погрешности $\delta > 0$ такой, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leqslant \delta \text{ и } \|g_\delta - g_0\| \leqslant \delta$$

[1]Работа поддержана грантом р_урал_а №07-01-96001

Требуется, используя исходные данные задачи M_r, f_δ, g_δ и δ, построить приближенное решение $u_\delta(t), v_\delta(t)$ исходной задачи, которое сходилось бы к точному решению u_0, v_0, а также оценить скорость этой сходимости.

Предложен оптимальный по порядку метод решения поставленной задачи, а также получены точные по порядку оценки погрешности этого метода.

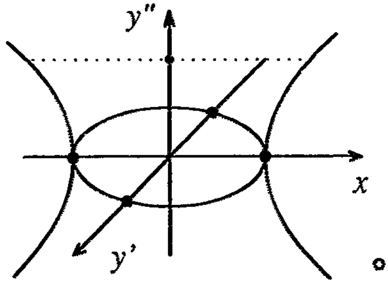
О КОМПЛЕКСНОМ РАСШИРЕНИИ ЭЛЛИПСА

Телкова С.А. (Воронеж)

В работе рассматривается возможность расширения эллипса из R^2 в $R \otimes C$. Пусть K- некоторое поле, а $f_1, ..., f_s$ множество полиномов в $K[x_1, ..., x_n]$. Аффинным многообразием, индуцированным корнями полиномов f_i называется

$$V(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n : f_i(a_1, ..., a_n) = 0 \quad \forall \quad 1 \leqslant i \leqslant s\}$$

Классические методы проективной геометрии реализуют эллипс как $V = U \cap W$, однако наличие точек зацепления не позволяет параметризовать полученное отображение, и как следствие представить его в виде пересечения аффинных многообразий.



На рисунке показан простейший эллипс, полученный вытягиванием следа канонической кривой при изменении параметра x. Особенностью данного случая является то, что кривая расширенного пространства является сопряженной с исходным элипсом - гиперболой. Заметим, что аналогичное моделирование поведения гиперболы приведет к появлению в расширенном пространстве сопряженного ей эллипса.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ[1]

Теляковский Д.С. (Москва)
dtelyakov@mail.ru

Пусть точка $z_0 = x_0 + iy_0$ является точкой плотности (в смысле плоской меры Лебега) множества E. Будем говорить, что действительнозначная функция $u(x, y)$, определенная в окрестности точки z_0, дважды асимптотически дифференцируема в z_0, если найдутся числа p, q, r, s и t для которых выполнено соотношение

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + (p(x-x_0) + q(y-y_0)) +$$
$$+\frac{1}{2!}(r(x-x_0)^2 + 2s(x-x_0)(y-y_0) + t(y-y_0)^2) +$$
$$+o\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right), \quad z \to z_0, \ z \in E.$$

Если $r + t = 0$, то функцию $u(x, y)$ будем называть асимптотически гармонической в точке z_0. Если комплекснозначная функция $f(z)$ имеет в точке z_0 конечную производную вдоль множества E, то функция $f(z)$ называется асимптотически моногенной в точке z_0.

Теорема. Если суммируемая функция $u(x, y)$ асимптотически гармонична в каждой точке области, то функция $u(x, y)$ является в области гармонической.

Эта теорема является аналогом теорем об аналитичности асимптотически моногенных функций [1], [2].

Литература

1. Д. Е. Меньшов. *Об асимптотической моногенности.* Матем. сборник, 1936, т. 1(43), с. 189–210.

2. Д. С. Теляковский. *Обобщение теоремы Д.Е. Меньшова об асимптотически моногенных функциях.* Вестник Московского университета. Математика, механика, 1992, вып. 4, с. 68–71.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00962).

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Титов О.А. (Смоленск)
icspgu@sci.smolensk.ru

Пусть T^+ - конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром $L \in C_\mu^2$, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+.

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу (см. также [1], с. 287):

найти все бианалитические функции $F(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + G_{12}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + g_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = G_{21}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}} + g_2(t), \tag{2}$$

где $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2$) - заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$ (Гельдера), $\alpha(t)$ - прямой или обратный сдвиг контура L, удовлетворяющий условию Карлемана и такой, что $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \in H(L)$.

Следуя [1], задачу (1),(2) будем называть задачей GK_{31}, а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) - задачей GK_{31}^0.

В данном сообщении получен конструктивный алгоритм решения задачи GK_{31}.

А именно, отыскивая решения исходной задачи в виде

$$F(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z),$$

устанавливается, что решение задачи GK_{31} сводится к последовательному решению краевой задачи Гильберта и обобщенной краевой задачи типа Карлемана относительно аналитических в T^+ функций $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$.

Литература

1. Расулов К. М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 345 с.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ткаченко Н.М. (Брянск)

tkachenkonm@yandex.ru

Пусть $S = \{z \in C : |z| < 1\}$, $H(S)$– множество всех аналитических функций в S. Хорошо известна следующая теорема Харди-Литтлвуда (см.[1]):*если* $f \in H(S), 0 < p < +\infty, f(0) = 0$, *то при некоторых положительных* c_1, c_2 *справедливы оценки*

$$c_1 \int\limits_S |f(z)|^p dm_2(z) \leqslant \int\limits_S |f'(z)|^p dm_2(z) \leqslant c_2 \int\limits_S |f(z)|^p dm_2(z). \qquad (1)$$

В [2] установлена оценка (1) для односвязных областей с границей из класса C^1; в [3] – для дополнения выпуклых областей при p=2. Пусть (C) – класс односвязных областей G, (см. [4]), граница каждой состоит из конечного числа гладких дуг, образующих в точках стыка внутренние углы $\dfrac{\pi}{\alpha_j}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., n(G)$.

Теорема. *Пусть* $G \in (C), f \in H(G); f^{(k)}(\omega_0) = 0$, $\omega_0 \in G$, $k = 0, 1, ..., n-1, n \in N$; $\beta > -1$. *Тогда при некоторых положительных* $c_1(n, \beta)$, $c_2(n, \beta)$ *для* $0 < p < +\infty$ *справедливы оценки*

$$c_1(n, \beta) \int\limits_S |f^{(n)}(z)|^p d^{np+\beta}(z, \partial G) dm_2(z) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_S |f(z)|^p d^{\beta}(z, \partial G) dm_2(z) \leqslant$$

$$\leqslant c_2(n, \beta) \int\limits_S |f^{(n)}(z)|^p d^{np+\beta}(z, \partial G) dm_2(z).$$

Литература

1. Duren P. Theory of H^p Spaces.- New York: Academic Press, 1970.

2. Detraz J. Classes de Bergman de functions harmoniques // Bull. Soc. Math. France. 1981. 109. P. 259-268.

3. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Известия РАН. Серия матем. 2004. Т. 68. №1. С. 5-42.

4. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М.: Наука, 1977.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ p - ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ГАРМОНИЧЕСКИЕ

Толпаев В.А., Колесников А.В., Харченко Ю.В.
(Ставрополь)
pm@ncstu.ru

Стационарные плоскопараллельные фильтрационные течения, подчиняющиеся линейному закону Дарси, в изотропной неоднородной среде с проницаемостью $k = p(x, y)$ описываются решениями p - гармонического уравнения

$$L_p[\varphi(x,y)] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0. \qquad (1)$$

В докладе приводится вывод формулы для интегрального представления общего решения $\varphi(x,y)$ через гармоническую функцию $U_0(x,y)$. Для этого в (1) осуществляется переход к новой вспомогательной функции $\Phi(x,y) = \varphi(x,y)\cdot\sqrt{p(x,y)}$, для которой получаем уравнение Гельмгольца

$$l_g[x,y] \equiv \Delta\Phi(x,y) - g(x,y)\cdot\Phi(x,y) = 0. \qquad (2)$$

В (2) через $g(x,y)$ обозначено $\frac{\Delta\left(\sqrt{p(x,y)}\right)}{\sqrt{p(x,y)}}$. Общее решение (2) для частного случая, когда g зависит от одной переменной, например, $g = g(x)$ получено в виде:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{p(x,y)}}\cdot\left\{a_0\cdot U_0(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x} N(x,t)\cdot U_0(t,y)\,dt\right\}, \qquad (3)$$

где через $N(x,t)$ обозначено ядро интегрального оператора

$$N(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x) \cdot (x-t)^{k-1}}{(k-1)!}. \qquad (4)]$$

Переменные коэффициенты $a_k(x)$ в (4) вычисляются через произвольную постоянную a_0 по рекуррентной формуле

$$a_{k+1}(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \left[g(x) \cdot a_k(x) - a_k''(x) \right] dx. \qquad (5)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДЛЯ КОМПЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ МАТЕМАТИКА 4.0: СУЩЕСТВОВАНИЕ ПСЕВДОАСИМПТОТИЧЕСКИХ ПАРАБОЛ

Томова А.В. (Варна, Болгария)

anna_bg_2000@yahoo.com

Резюме. В этой работе мы вводим понятие псевдоасимптотических парабол для функции одной независимой переменной. Анонсируем один критерий, который гарантирует существования двух групп $m+1$ - раза непрерывно дифференцируемых функций: функций без и с псевдоасимптотическими параболами. С помощью системы для компютерной алгебры МАТЕМАТИКА 4.0 мы находим некоторые классы элементарных и специальных функций без и с псевдоасимптотическими параболами и исследуем поведение этих функций по отношению к собственным псевдоасимптотическим параболам, когда независимая переменная устремляется к бесконечности. Подчеркиваем необходимость применения систем комтютерной алгебры во всех уровнях математического образования.

Ключевые слова: критерий существования и графики элементарных и специальных функций без и с псевдоасимптотическими параболами, система для компютерной алгебры МАТЕМАТИКА 4.0.

REMARKS ON THE BEHAVIOURS OF SOME FUNCTIONS WITH AND WITHOUT PSEUDO ASYMPTOTIC PARABOLAS

Anna V. Tomova

E mail: anna_bg_2000@yahoo.com

Abstract. We have defined the idea for pseudo asymptotic parabolas of differentiable functions of $m + 1$ order. We proved one criterion for existence of pseudo asymptotic parabolas for differentiable functions. In this paper we restrict the attention over the behaviors of some functions with and without pseudo asymptotic parabolas. Using the system for computer algebra MATHEMATICA 4.0 we draw the graphics of some ot these functions.

Key Words: Definitions for pseudo asymptotic parabolas of differentiable functions of $m + 1$ order, one criterion for existence of pseudo asymptotic parabolas, formulae and graphics of some functions with and without pseudo asymptotic parabolas

ТРИУМФ И ТРАГЕДИЯ Л.А. ЛЕЙФЕРТА

Удоденко Н.Н. (Воронеж)

Основой для данной работы является статья [3], посвященная судьбам ряда советских математиков, ставших жертвами репрессий. В работе идет речь о судьбе Л.А. Лейферта, имя которого упоминается в работах [1-6]. Приведем некоторые факты из его биографии. Л.А. Лейферт родился 3 мая 1892 г. в С.-Петербурге. В 1914 окончил физ.-математический факультет С.-Петербургского университета. С 1919 г. занимался политической и педагогической деятельностью. В этом же году стал членом ВКП(б). До 1932 г. преподавал в Ленинградском педагогическом институте. Принимал активное участие в разгроме Ленинградской математической школы, созданной Н.М. Гюнтером в 1923-м году. В 1930-м г. стал председателем Ленинградского Общества математиков-материалистов, с должности которого был снят в 1932г. С 1932 г. работал в Ростовском пединституте, причем с 1933 г. заведующим кафедрой математики. В 1935 г. исключен из партии, восстановлен в 1936 г. С октября 1936 г. работал в Воронежском пединституте в должности заведующего кафедрой математики. Уволен с этой должности в 1937-м г.

26 января 1938 г. арестован по обвинению в участии в правотроцкистской организации Азовско-Черноморского края, 16 апреля приговорен к расстрелу, приговор приведен в исполнение 22 апреля 1939г. 22 мая 1958 г. был посмертно реабилитирован. В докладе будет освещен "ростовский"и "воронежский"период его жизни на основе его "расстрельного"дела.

Литература

1. Беспамятных Н.Д. Степан Андреевич Боголюбов / Н.Д. Беспамятных. - Л.: Наука. 1989.-120с.

2. Боголюбов А.Н. Опыт "внедрения"диалектики в математику в конце 20-х начале 30-х г.г. / А.Н. Боголюбов, Н.М. Роженко. - Вопросы философии, 1991, № 9, с. 32-49.

3. Виленкин Н.Я. Формулы на фанере / Н.Я. Виленкин. - Природа.1991, № 6. - с. 95-104.

4. Ермолаева Н.С. О так называемом "Ленинградском математическом фронте"/ Н.С. Ермолаева. - ВИЕТ. 1995, № 4. - с. 66-74.

5. На ленинградском математическом фронте.-Л.1931.ГСЭИ.-с.44

6. Успенская Н.В. Д.Д. Иваненко - вне науки и политики. / Н.В. Успенская. - Природа. 2004. № 8. - с.69-73.

АНТИЧЕБЫШЕВСКИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ АБСТРАКТНЫХ ФУНКЦИЙ

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Пусть Z – нормированное пространство, известно, что замкнутое подпространство $E \subset Z$ называется античебышевским (см., например, [1]), если множество $P_E z = \{y \in E : \ \rho(z, E) = \inf\limits_{x \in E} \|z - z\| = \|y - z\|\}$ содержит более одного элемента $\forall\ z \in Z \backslash E$. Ранее в пространствах $C(Q)$ античебышевские конечномерные подпространства рассматривались рядом авторов. Далее решается задача характеризации античебышевских подпространств в банаховых пространствах $C(Q, X)$ непрерывных на компакте Q функций со значениями в банаховом пространстве X, $\|f\| = \sup\limits_{q \in Q} \|f(q)\|$, $f \in C(Q, X)$. Приведем некоторые результаты.

Теорема 1. *Пусть X - нормированное пространство,* $\dim X =$

$d < +\infty$. *Для того, чтобы подпространство* $E \subset C(Q, X)$, $\dim E = n < +\infty$ *было античебышевским, необходимо и достаточно, чтобы в* Q *нашлась изолированная точка* q_0 *и* E *содержало* d *линейно независимых функций* $f_1, f_2, \ldots, f_d$, *обращающихся в* 0 *при* $q_0 \neq q$.

Заметим, что если X строго выпукло, то теорема 1 доказана в [1].

Теорема 2. *Если* $\dim X = +\infty$ *и* X^* *строго выпукло, то пространство* $K(C(Q), X)$ *линейных компактных операторов, отображающих* X *в* $C(Q)$ *не имеет конечномерных античебышевских подпространств.*

Для бесконечномерных античебышевских подпространств получена, в частности, следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* X *– рефлексивное пространство,* $\dim X = +\infty$ *и* X^* *строго выпукло. Для того, чтобы подпространство* $E \subset C(Q, X)$, $\operatorname{codim} E = n < +\infty$ *было античебышевским, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{supp} \mu \neq 0 \ \forall \ \mu \in E^{\perp}$.

Литература

1. Устинов Г.М. О подпространствах единственности в пространствах абстрактных непрерывных функций. Препринт: УНЦ АН СССР – Свердловск, 1987, 76 с.

АНТИЧЕБЫШЕВСКИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В СОПРЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Пусть X – банахово пространство, E – замкнутое подпространство в X. Скажем, что E имеет свойство анти-U, если любой функционал $f \in E^*$ имеет не единственное продолжение с сохранением нормы на все X.

Можно проверить, что если E имеет свойство анти-U, то $E^{\perp} \subset X^*$ есть античебышевское подпространство. Приведем некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. *Пусть* $X = L_1(S, \Sigma, \mu)$ *и подпространство* $E \subset X$ *имеет полную минимальную систему* $(f_i)_{i=1}^{\infty}$. *Для того, чтобы* E *имело свойство анти-*U, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mu\left(X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{supp} f_i\right)\right) > 0$.

Следствие. *Пространства* l^{∞}, L^{∞} *имеют античебышевские* *подпространства любой размерности.*

Теорема 2. $C^*(Q)$ *не имеет античебышевских подпространств* L, $\dim L < +\infty$.

С использованием теоремы 2 выводится

Теорема 3. *Пространство* $K(C(Q_1), C(Q))$ *компактных операторов* $T: C(Q_1) \to C(Q)$ *не имеет конечномерных античебышевских подпространств.*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С НЕМОНОТОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Фахрутдинов В.К. (Москва)
russoul@mail.ru

Мы изучаем спектральную задачу

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + q(x)y,$$
$$y(a) = y(b) = 0,$$

предполагая, что отрезок $[a, b]$ содержит точку ноль внутри себя. Здесь $\varepsilon > 0$ — физический параметр, а $q(x)$ — вещественная аналитическая функция. Говоря о квазиклассическом приближении, мы подразумеваем задачу об описании предельного поведения спектра при $\varepsilon \to 0$.

В работе [4] задача о полном описании спектрального портрета при $\varepsilon \to 0$ решена для строго монотонного потенциала $q(x)$, а в работах [2] и [3] ее решение было получено для функций $q(x) = x^2$ на четном отрезке $[a, b] = [-1, 1]$ и на произвольном отрезке, соответственно.

Очевидно, числовой образ оператора $L(\varepsilon)$, отвечающего поставленной задаче лежит в полуполосе $\Pi = \{\lambda | m < \Re\lambda < M, \Im\lambda < 0\}$, где отрезок $[m, M]$ совпадает с областью значений $q(x)$, когда x пробегает отрезок $[a, b]$. При любом $\varepsilon > 0$ спектр задачи (или оператора $L(\varepsilon)$) дискретный и лежит в полуполосе Π.

Здесь мы изучим ситуацию, когда аналитическая функция q имеет такой же тип поведения, как $q(x) = x^2$. Точнее предположим, что выполнены следующие условия.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант №04-01-00712, и фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-5247.2006.1.

1. $q(x)$ вещественна на отрезке $[a, b]$, имеет минимум в точке 0, монотонно убывает на отрезке $[a, 0]$, монотонно возрастает на отрезке $[0, b]$, причем $m := q(a) < q(b) =: M$. Существует область $G \subset \mathbb{C}$, такая, что $q(z)$ аналитична в G и конформно отображает G на некоторую область, содержащую полуполосу П.

2. $q(x)$ четная.

3. При любом $t \in (m, M)$ прообраз луча $\{\lambda \mid \Im\lambda < 0, \Re\lambda = t\}$ является функцией мнимой оси, т.е. любая прямая $\Im\lambda = const$ пересекает прообраз указанного луча не более одного раза.

Заметим, что при замене $q(x)$ на $q(x) + const$ спектр сдвигается на $const$ вдоль вещественной оси, поэтому, неограничивая общности, рассматриваем случай $q(0) = 0$.

Обозначим через $\xi(\lambda)$ единственный корень уравнения $q(\xi) - \lambda = 0$, лежащий внутри области G.

В полосе П определим следующие кривые:

$$l_0 = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \Re \int\limits_{\xi_\lambda}^{0} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$l_1 = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \Re \int\limits_{b}^{\xi_\lambda} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$l_2 = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \Re \int\limits_{\xi_\lambda}^{-b} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$l_3 = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \Re \int\limits_{a}^{\xi_\lambda} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$l_\infty = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \Re \int\limits_{a}^{b} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

Кривая l_0 проходит через 0 и пересекается с кривыми l_1 и l_2 в точке-узле λ_1, кривые l_2, l_3 и l_∞ пересекаются в точке-узле λ_2. Кривые l_1 и l_3 проходят через точки m и M соответственно.

Пусть γ_0 - часть кривой l_0, лежащей между 0 и точкой-узлом λ_1; γ_1 – часть кривой l_1, лежащей между m и точкой-узлом λ_1. γ_2

– часть кривой l_2, лежащей между точкой-узлом λ_1 и точкой-узлом λ_2; γ_3 – часть кривой l_3, лежащей между M и точкой-узлом λ_2; γ_∞ – часть кривой l_∞, лежащей между λ_2 и $-i\infty$. Обозначим через Γ объединение всех указанных пяти кривых γ_j.

Точку $\lambda \in \Pi$ назовем непредельной, если найдется δ-окрестность этой точки, которая не содержит собственные значения задачи при любых достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$. Множество остальных (предельных) точек в Π назовем предельным спектральным множеством и предельным спектральным графом, если оно состоит из отрезков кривых.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда описанное множество Γ является предельным спектральным графом оператора $L(\varepsilon)$.*

Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова.

Литература

[1] Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. - М.: Наука, 1983.

[2] Туманов С.Н., Шкаликов А.А. *О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с профилем Пуазейля* Изв. РАН. - 2002. - 66, №4. - С.177-204

[3] Туманов С.Н., Шкаликов А.А. *О модельной задаче для уравнения Орра-Зоммерфельда с квадратичным профилем* // Электронная версия: www.arxiv.org/ps/math-ph/0212074

[4] Шкаликов А.А. *Спектральные портреты оператора Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса* // Совр. матем., Фундам. напр. - 2003. - Т.3. С.89-112

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Федоров В.Е. (Челябинск)

kar@csu.ru

Пусть заданы многочлены $P_n(\omega) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant n} c_\alpha \omega^\alpha$, $Q_m(\omega) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} d_\alpha \omega^\alpha$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in \mathbb{R}^s$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{N}_0^s$. Исследуем задачу

$$u(x,0) = u_0(x) \in H^m(\mathbb{R}^s), \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1}$$

$$P_n\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u_t(x,t)=Q_m\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^s\times\overline{\mathbb{R}}_+,\qquad (2)$$

используя результаты теории полугрупп уравнений соболевского типа [1], [2]. Обозначим $\mathcal{P}_0=\{\omega\in\mathbb{R}^s: P_n(\omega)=0\}$, $\mathcal{Q}_0=\{\omega\in\mathbb{R}^s: Q_m(\omega)=0\}$, $\mathcal{P}_\varepsilon$ – ε-окрестность множества $\mathcal{P}_0$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{dist}(\mathcal{P}_0,\mathcal{Q}_0)>0$, $n\leqslant m$,

$$\exists a\in\mathbb{R}\quad\forall\omega\in\mathbb{R}^s\setminus\mathcal{P}_0\quad \mathrm{Re}\frac{Q_m(\omega)}{P_n(\omega)}\leqslant a,$$

при некотором $\varepsilon>0$ $\sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}^s\setminus\mathcal{P}_\varepsilon}\sum\limits_{|\alpha|=n}\left|\frac{\omega^\alpha}{P_n(\omega)}\right|^2<\infty$, *и выполняется одно из двух условий:*

(i) *множество* $\mathcal{P}_0$ *ограничено;*

(ii) $\sup\limits_{\omega\in\mathcal{P}_\varepsilon}\sum\limits_{|\alpha|=n}\left|\frac{\omega^\alpha}{Q_m(\omega)}\right|^2<\infty.$

Тогда существует единственное решение $u\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;H^n(\mathbb{R}^s))$ *задачи* (1), (2).

Условиям теоремы 1 удовлетворяют, например, уравнение типа уравнения волн Россби при $\gamma<0$

$$-\Delta u_t(x_1,x_2,t)=\beta u_{x_2}(x_1,x_2,t)+\gamma u(x_1,x_2,t),\ (x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times\overline{\mathbb{R}}_+,$$

или при $\beta\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$, $(-1)^k\alpha>0$ уравнение

$$\Delta u_t(x_1,x_2,t)=\alpha\frac{\partial^{2k}u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^{2k}}+\beta u(x_1,x_2,t),\quad (x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Литература

1. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

2. Федоров В.Е. Обобщение теоремы Хилле–Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426-448.

ПРИМЕНЕНИЕ БАЗИСОВ ВСПЛЕСКОВ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Феоктистов В.В., Антоненко Е.В. (Москва)

apmath@bmstu.ru

Базисы всплесков имеют ряд преимуществ по сравнению с другими базисами, используемыми в качестве аппарата приближения

функций [1]. Требуется найти приближенное решение уравнения $Au = f$ в области D, где A — линейный оператор, $f \in L_2$. В соответствии с определением кратномасштабного анализа [2], имеем $L_2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus ...$- это означает, что $\forall f \in L_2$ справедливо $f(\bullet) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_{0,k}\varphi_{0,k}(\bullet) + \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j,k}\psi_{j,k}(\bullet)$,
где $\psi_{0,k} = \psi(\bullet - k) \in V_0$, $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j \bullet - k\right) \in W_j$- ортонормированные базисы, построенные на основании масштабирующей функции и базового всплеска (вейвлета), соответственно

$$\varphi(\bullet) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k \varphi(2 \bullet - k),$$

$$\psi(\bullet) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{1-k} \bar{h}_{1-k} \varphi(2 \bullet - k)$$

В часности, в двумерном случае строим базис Φ_n как произведение функций $\varphi_{0,k}(\bullet)$ и $\psi_{j,k}(\bullet)$ зависящих от переменных x или y раздельно. Приближенное решение уравнения ищется в виде: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$, где a_k — неизвестные постоянные. Методом Галеркина эти постоянные определяются из условия $(Au_n - f, \Phi_k) = 0$, $k = 1, 2, ...n$, которые являются основой анализа и построения решения.

Литература

1. Феоктистов В.В., Феоктистова О.П. Декомпозиция и реконструкция дискретного цифрового сигнала на основе базисов всплесков и формирование фильтров с заданными свойствами. Современные методы теории краевых задач: Материалы ВВМШ „Понтрягинские чтения- XVII".-Воронеж.-2006.-с.211-212.

2. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков. УМН. 1998, т.53, вып. 6(324),С.53-127.

О СТРУКТУРЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Фомин В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$u^{(n)}(t)+A_1(t)u^{n-1}(t)+...+A_{n-1}(t)u'(t)+A_n(t)u(t)=f(t), 0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

где $A_i(t) \in C([0,\infty);L(E)), 1 \leqslant i \leqslant n, f(t) \in C([0,\infty);E)$, и соответствующее однородное уравнение

$$u^{(n)}(t)+A_1(t)u^{(n-1)}(t)+...+A_{n-1}(t)u'(t)+A_n(t)u(t)=0, 0 \leqslant t < \infty. \tag{2}$$

Определение 1. Сопутствующим операторным уравнением (СОУ) уравнения (2) называется уравнение вида

$$F^{(n)}(t)+A_1(t)F^{(n-1)}(t)+...+A_{n-1}(t)F'(t)+A_n(t)F(t)=0, 0 \leqslant t < \infty, \tag{3}$$

относительно искомой функции $F(t) \in C^n([0,\infty);L(E))$.

Определение 2. Набор n решений

$$F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t) \tag{4}$$

уравнения (3) называется фундаментальной системой образующих (ФСО) общего решения уравнения (2), если n - параметрическое семейство функций $\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} F_j(t)x_j\right\}$, где x_j - параметры, $x_j \in E\,(1 \leqslant j \leqslant n)$, является общим решением уравнения (2).

Пусть $W(t)$ — операторный определитель Вронского решений (4) уравнения (3).

Теорема 1. Если элементы определителя $W(0)$ попарно коммутативны и существует $[W(0)]^{-1} \in L(E)$, то совокупность решений (4) уравнения (3) является ФСО общего решения уравнения (2), т.е.

$$u_{0.0}(t)=F_1(t)x_1+F_2(t)x_2+...+F_n(t)x_n, \tag{5}$$

где $x_j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ — произвольные элементы из E.

Теорема 2. Если при каждом $t \in [0, \infty)$ элементы определителя $W(t)$ попарно коммутативны и существует $[W(t)]^{-1} \in L(E)$, то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_*(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(t) \int_0^t A_{nj}(\tau) [W(\tau)]^{-1} f(\tau) d\tau, \qquad (6)$$

где $A_{nj}(\tau)$ — операторное алгебраическое дополнение элемента $F_j^{(n-1)}(\tau)$ определителя $W(\tau)(1 \leqslant \mathrm{j} \leqslant \mathrm{n})$.

Общее решение уравнения (1) имеет вид $u(t) = u_{0.0}(t) + u_*(t)$, где $u_{0.0}(t)$ задаётся формулой (5), $u_*(t)$ — формулой (6).

О СЛУЧАЕ КОМПЛЕКСНЫХ ХАРАКТЕРЕСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Фомин В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$u^{(n)} + A_1 u^{(n-1)} + ... + A_{n-1} u' + A_n u = 0, 0 \leqslant t < \infty, \qquad (1)$$

где $A_i \in L(E), 1 \leqslant i \leqslant n$, и соответствующее ему характеристическое операторное уравнение

$$\Lambda^n + A_1 \Lambda^{n-1} + ... + A_{n-1} \Lambda + A_n = O. \qquad (2)$$

Пусть уравнение (2) имеет p действительных операторных корней (3) $\Lambda_1, ..., \Lambda_p$ с кратностями $r_1, ..., r_p$ и q пар комплексно сопряжённых операторных корней (4) $Z_1 = A_1 + JB_1$, $\bar{Z}_1 = A_1 - JB_1, ..., Z_q = A_q + JB_q, \bar{Z}_q = A_q - JB_q$ с кратностями $s_1, ..., s_q$, причём $r_1 + ... + r_p + 2(s_1 + ... + s_q) = n$. Тогда при некоторых условиях на характеристические операторы (3), (4) общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u_{0.0} = \sum_{i=1}^{p} e^{\Lambda_i t} \sum_{k=0}^{r_i - 1} t^k x_{ik} + \sum_{j=1}^{q} e^{A_j t} \cos B_j t \sum_{m=0}^{s_j - 1} t^m y_{jm} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} e^{A_j t} \sin B_j t \sum_{m=0}^{s_j - 1} t^m z_{jm},$$

$$\cos B_j t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(B_j t)^{2k}}{(2k)!}, \sin B_j t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(B_j t)^{2k+1}}{(2k+1)!}, 1 \leqslant j \leqslant q;$$

x_{ik}, y_{jm}, z_{jm} — параметры; $x_{ik}, y_{jm}, z_{jm} \in E$; $1 \leqslant i \leqslant p, 0 \leqslant k \leqslant r_i - 1, 1 \leqslant j \leqslant q, 0 \leqslant m \leqslant s_j - 1$.

О ПРОСТРАНСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Фомин В.И. (Тамбов)

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в E. Комплексным оператором называется выражение вида $Z = A + JB$, где $A, B \in L(E), J = \sqrt{-I}$ — мнимая операторная единица (здесь I– единичный оператор), при этом операторы A и B называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного оператора Z:$ReZ = A, JmZ = B$. Пусть $C_{L(E)} = \{Z = A + JB | A, B \in L(E)\}$. Тогда $L(E) = \{Z \in C_{L(E)} | B = 0\}$, т.е $L(E) \subset C_{L(E)}$. Если $ReZ = 0$, то $Z = JB$- чисто мнимый оператор. Операторы, принадлежащие $L(E)$, условимся назвать действительными операторами. Если $Z = A + JB$, α — число, то $\alpha Z \overset{def}{=} \alpha A + J\alpha B$; если $Z_1 = A_1 + JB_1, Z_2 = A_2 + JB_2$,
то $Z_1 + Z_2 \overset{def}{=} (A_1 + A_2) + J(B_1 + B_2)$. Множество $C_{L(E)}$, наделенное указанными операциями, является линейным пространством. Норму в этом пространстве можно ввести по любой из формул:
$\|Z\| = [\|A\|^p + \|B\|^p]^{\frac{1}{p}}, p \geqslant 1$;
$\|Z\| = \max\{\|A\|, \|B\|\}$ (случай $p = \infty$) (удобно рассмотреть норму при $p = 2$, дабы была аналогия с модулем комплексного числа
$z = x + iy$: $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$). Пространство $C_{L(E)}$, снабжённое любой из указанных норм, является банаховым, ибо $L(E)$- банахово пространство. Если $Z_1 = A_1 + JB_1, Z_2 = A_2 + JB_2$, то $Z_1 Z_2 \overset{def}{=} (A_1 A_2 - B_1 B_2) + J(A_1 B_2 + B_1 A_2)$, в частности, $J^2 = J \cdot J = (O + JI)(O + JI) = (O \cdot O - I \cdot I) +$
$+J(OI + IO) = -I$. Автору комплексные операторы понадобились при построении общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве в случае,

когда соответствующее характеристическое операторное уравнение имеет комплексные операторные корни.

О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ НЕГАТИВНОГО ОПЕРАТОРНОГО ДИСКРИМИНАНТА

Фомин В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$u''(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = f(t), 0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_0', \tag{2}$$

где $A_1, A_2 \in L(E)$. Пусть $A_1A_2 = A_2A_1$; $A_1^2 - 4A_2 = -F^2$, где $F \in GL(E), GL(E) = \{Q \in L(E) | \exists Q^{-1} \in L(E)\}$. Тогда задача (1), (2) имеет решение вида

$$u(t) = e^{At}\left[(\cos Bt)u_0 + (\sin Bt)F^{-1}(A_1u_0 + 2u_0')\right] +$$

$$+2\int\limits_0^t \left[e^{A(t-\tau)} \sin B(t-\tau)\right] F^{-1} f(\tau)d\tau,$$

где $A = \left(-\frac{1}{2}\right)A_1$, $B = \left(\frac{1}{2}\right)F$, $\cos Bt = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(Bt)^{2k}}{(2k)!}$, $\sin Bt = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(Bt)^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Случаи $A_1^2 - 4A_2 = 0, A_1^2 - 4A_2 = F^2$ исследованы в [1].

Литература

1. Фомин В.И. // Дифференц. уравнения. 2002. Т.38. №8. С. 1140-1141.

О ЧИСЛЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Фрянцев А.В. (Владимир)
versionfalex@vpti.vladimir.ru

В работах [2],[3] предложен метод аппроксимаций аналитических функций посредством сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$. В теореме 1 настоящих тезисов этот метод модифицируется применительно к аппроксимации дифференциальных полиномов. Пусть в некоторой замкнутой r-окрестности точки z_0 задана аналитическая функция $f(z)$, $M = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$. Пусть $P(\lambda) = \sum_{s=1}^{q} p_s \lambda^s$ — некоторый многочлен, $p_q \neq 0$.

Теорема 1. *При любом натуральном $n > q$ существует набор чисел $\lambda_k \in \mathbf{C}$, $k = 1, \ldots, Nq$, $N = [n/q]$, для которого имеет место приближенное равенство*

$$\sum_{s=0}^{q-1} p_{q-s} f^{(s)}(z_0)(z - z_0)^s/s! \approx \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) \cdot f(\lambda_k (z - z_0))$$

с абсолютной погрешностью, не превосходящей

$$n \cdot M \cdot \max_{1 \leqslant s \leqslant q} |p_s| \, t^{-q}(1 - t)^{-1} \sum_{m=n+1}^{\infty} (5/(n - q))^{m/q} \cdot t^m,$$

где $t = r^{-1}|z - z_0|$, а значения λ_k определяются из уравнения

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \tau^k / k! = 0, \quad \tau = q^{-1} \lambda^{-q}. \tag{1}$$

В работе [1] доказано, что при $n \geqslant 6/r$ имеем

$$f'(z_0) = -n \cdot f(z_0) + \sum_{k=1}^{n} f\left(z_0 + \tau_k^{-1}\right) + \delta(z_0, n, f) \tag{2}$$

с погрешностью $|\delta(z_0, n, f)| \leqslant nM \cdot 5^{n+1}(r(n-1))^{-n}$, где τ_k — корни уравнения (1) при $q = 1$. Этот результат можно дополнить.

Теорема 2. *Для любого многочлена $P_s(z)$ степени $s \leqslant n$ формула (2) точна, то есть $\delta(z_0, n, P_s) = 0$.*

Литература

[1] Данченко В.И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Матем.сб. 2006. Т. 197. № 4. С. 33-52.

[2] Данченко В.И. Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ //Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 7.07-10.07. 2006. С.86-88.

О ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ НУЛЯМ[1]

Хабибуллин Б.Н. (Уфа)

E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru, Web-site: http://math.bsunet.ru/khb

Пусть $\rho \in (0, +\infty)$. Для последовательности комплексных чисел

[1] Поддержано грантом РФФИ № 06-01-00067а.

$\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to +\infty$, через $\sigma(\Lambda, \rho)$ (соотв. $\sigma^*(\Lambda, \rho)$) обозначим точную нижнюю грань чисел $\sigma > 0$, при которых Λ — последовательность (соотв. подпоследовательность) *нулей* для какой-либо целой функции $f \neq 0$ типа не более σ при порядке ρ. Очевидно, $\sigma^*(\Lambda, \rho) \leqslant \sigma(\Lambda, \rho)$.

Задача — *оценить* $\sigma(\Lambda, \rho)$ *сверху через* $\sigma^*(\Lambda, \rho)$.

Так, $\sigma(\Lambda, \rho) = \sigma^*(\Lambda, \rho)$ *при* $\rho \leqslant 1/2$ [1, Основная Лемма].

Общая ситуация значительно сложнее. Например, используя один результат из [1, Теорема 1], нетрудно показать что при *целом* ρ весьма часты ситуации, когда $\sigma(\Lambda, \rho) = +\infty$, в то время как $\sigma^*(\Lambda, \rho) < +\infty$. Таким образом, задача содержательна лишь *при нецелых* ρ. На данный момент мы можем показать, что *при* $1/2 < \rho < 1$ *справедливы оценки*

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \leqslant \sigma(\Lambda, \rho) \leqslant \min\left\{\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}, \frac{\Gamma\bigl(1/2 - \rho/2\bigr)}{2^\rho\sqrt{\pi}\,\Gamma\bigl(1 - \rho/2\bigr)}\right\}\sigma^*(\Lambda, \rho),$$

где Γ *— это классическая гамма-функция Эйлера.*

Доказательство использует симбиоз классических методов оценок подобного рода со специфическим подходом из [1] и значительно более глубокой версией метода выметания из [2].

Литература

[1] Хабибуллин Б. Н. *О типе целых и мероморфных функций* // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 11. С. 35–44.

[2] Хабибуллин Б. Н. *Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты* // Матем. сб. 41 С. (принято к печати в 2006 г.).

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Халова В.А. (Саратов)

E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

В пространстве $L[0, 1]$ рассматривается оператор

$$Af = (\alpha_1 E + \alpha_2 S)\int_0^x A(x, t) f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k(x), \ x \in [0, 1],$$

где $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $Sf(x) = f(1 - x)$, E – единичный оператор,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-01-00003.

$(f, v_k) = \int_0^1 f(t)v_k(t)\,dt$, $v_k(x), g_k(x) \in C^n[0,1]$, $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$ и $\{v_k(t)\}_1^m$ линейно независимые системы, ядро $A(x,t)$ непрерывно дифференцируемо n раз по x и один раз по t при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, причем $A_{x^s}(x,t)|_{t=x} = 0$ $(s = 0, \ldots, n-2, n)$, $A_{x^{n-1}}(x,t)|_{t=x} = 1$. Обозначим через $R_\lambda f$ резольвенту Фредгольма оператора A, и пусть $g(\lambda, r)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: а) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leqslant r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$; б) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \leqslant C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leqslant r$; в) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ; г) для каждой области $S_{\delta_0,j}$ существуют положительные числа β_j и h_j такие, что при $|\arg \rho\omega_n - \pi/2| \leqslant h_j$ имеет место равномерная по r оценка $g(re^{in\varphi}, r) = O(|\arg \rho\omega_n - \pi/2|^{\beta_j})$. Здесь $S_{\delta_0,j}$ – область, определяемая так же, как и в [1], $\rho^n = \lambda$, ω_n – один из корней n-ой степени из 1 или $(\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)$ такой, что на одной из границ области $\operatorname{Re} \rho\omega_n = 0$. Тогда при некоторых предположениях относительно оператора A справедлива

Теорема. *Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x)\,d\lambda \right\| = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежала множеству всех непрерывных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих всем тем граничным условиям (определяющих A^{-1}), которые после приведения линейных форм к нормированному виду не содержат производных.

Данная работа обобщает результат, приведенный в [1].

Литература

1. Халова В.А. Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 144-146.

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ДИАГРАММ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Харламов М.П., Харламова И.И. (Волгоград)

mharlamov@vags.ru, irinah@vags.ru

Основным источником примеров содержательных гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю является задача о вращении гиростата в потенциальном силовом поле. Однако далеко не все случаи интегрируемости удается явным образом свести к квадратурам. Поэтому на первый план выступает проблема качественного исследования движений – топологический анализ возникающих слоений фазового пространства на торы Лиувилля. Здесь основную роль играет классифицирующее множество – бифуркационная диаграмма интегрального отображения. Для системы с n степенями свободы множество критических точек интегрального отображения является подмножеством фазового пространства, которое почти всюду есть симплектическое многообразие коразмерности 2. В своих гладких частях оно задается двумя неявными уравнениями, которые позволяют найти и уравнения гладких листов $(n-1)$-мерных поверхностей, несущих бифуркационную диаграмму в $\mathbf{R}^n$. Технически более сложной оказывается задача отыскания той части этих листов, которая служит множеством фактических значений интегрального отображения и составляет собственно бифуркационную диаграмму. Накоплен достаточно большой опыт решения подобных задач при $n = 2$ способами, специфическими для каждого отдельного случая. Для систем с тремя степенями свободы (твердое тело при отсутствии симметрий силового поля) технические проблемы оказываются существенно более сложными. Рассматривая бифуркационную диаграмму для $n = 3$ как двумерный клеточный комплекс, получим, что границы 2-клеток должны являться образом множества точек фазового пространства, в которых ранг интегрального отображения меньше двух, то есть неподвижных точек и особых периодических решений исходной системы. Эти решения можно найти непосредственно из системы дифференциальных уравнений или свойств силовых полей. Вычисляя на них фактические значения первых интегралов, находим условия в виде явных неравенств, определяющие бифуркационную диаграмму. Рассмотрен ряд примеров классических задач динамики твердого тела и их обобщений.

К ОБОБЩЕНИЮ ТЕОРЕМЫ ЛЕБЕГА О ПРАВИЛЬНЫХ ТОЧКАХ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

v_sumin@mm.unn.ru

Определение. Систему $\{H[m,\tau] : m \in \mathbf{N}, \tau \in \Pi\}$ измеримых

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04-01-00460.

множеств будем называть *равномерно регулярно сжимаемой* на измеримом ограниченном множестве $\Pi \subset \mathbf{R}^n$, если

1) $\tau \in H[m,\tau]$ $\forall m \in \mathbf{N}$;

2) $\sup\limits_{\tau \in \Pi} \operatorname{diam}(H[m,\tau]) \to 0$ при $m \to +\infty$; 3) $\forall \tau \in \Pi$ $\exists L > 0 : \forall m \in \mathbf{N}$ $\exists$ куб $Q(\tau, r) \supset H[m,\tau] : R^n \leqslant L\operatorname{mes}(H[m,\tau])$.

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) система множеств $\{H[m,\tau] : m \in \mathbf{N},\ \tau \in K(\Pi)\}$, где $K(\Pi)$ – некоторый замкнутый брус, содержащий Π, является равномерно регулярно сжимаемой в любую точку $\tau \in \Pi$; $\operatorname{mes}(H[m,\tau] \backslash H[m,\eta]) \to 0$ при $|\tau - \eta| \to 0$, $\tau, \eta \in K(\Pi)$, $\forall m \in \mathbf{N}$; $\Pi[m,\tau] \equiv H[m,\tau] \cap \Pi$; $\chi[m,\tau](\cdot)$ – характеристическая функция множества $\Pi[m,\tau]$; 2) $f(\cdot) \in L_p(\Pi)$; 3) $F : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$ – положительный интегральный оператор (см.[1]), $q \in [1,\infty)$.

Тогда существуют подпоследовательность $m_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и множества $\Pi_0 \subset \Pi$, $\operatorname{mes}(\Pi_0) = \operatorname{mes}(\Pi)$ такие, что $\forall \tau \in \Pi_0$

$$\frac{1}{\operatorname{mes}(H[m_k,\tau])} \int\limits_{\Pi[m_k,\tau]} |F[\chi[m_k,\tau](\cdot)]\, f(\cdot)|^q\, dt \to 0 \text{ при } k \to +\infty.$$

Данная теорема является следствием теоремы Лебега и леммы о регуляторе сходимости в банаховом идеальном пространстве [1]. Фактически в ней развивается и обобщается конструкция, использованная в [2] при вычислении вариаций функционалов, определенных на решениях начально-краевых задач, описываемых функциональным вольтерровым уравнением в $L^m_\infty(\Pi)$, на случай $L^m_p(\Pi)$, $p \in [1,\infty)$.

Литература

1. Л.В. Кантарович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ. – М.: Наука. 1984.-752 с.

2. В.И. Плотников, В.И. Сумин. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. матем. журн.-1981.-Т.22,N 6.-С.142-161.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ МОДЕЛИ

Чмелева Г.А. (Ставрополь)

Рассмотрим систему Г, состоящую из двух горизонтальных континуумов, расположенных вдоль отрезка $[0,l]$. Нижний континуум состоит из двух стержней γ_1, γ_2, соединенных шарнирно. Верхний континуум — упругий трос. Оба континуума соединены линейной перемычкой ε, которая так же является упругим тросом. Нижний и верхний концы сегмента ε обозначим соответственно через a и b. Отрезки верхнего континуума обозначим через κ_1 и κ_2. Наша система закреплена в четырех концевых вершинах. Отклонение точек системы от положения равновесия опишем функциями $u(x)$ при $x \in \gamma_1, \gamma_2, h(x)$ при $x \in \varepsilon, v(x)$ при $x \in \kappa_1 \cup \kappa_2$.

Пусть функция $p(x)$ определяет жесткость стержней в точках $x \in \gamma_1 \cup \gamma_2$, а $q(x)$ — силы натяжения струн в точках $x \in \varepsilon$, κ_1, κ_2. Удобно считать, что функции $p(x), q(x)$ заданы на всем графе так, что $q(x) \equiv 0$ на нижней паре стержней, а $p(x) \equiv 0$ на вертикальной тяге и верхнем тросе.

Пусть $f : \Gamma \to R$ — плотность распределения внешней нагрузки, действующей на систему.

Функция $u(x)$ — деформация, т.е. отклонение системы в точке x, удовлетворяет уравнению $(pu'')'' = f$ на сегментах γ_1, γ_2, а $v(x)$ и $h(x)$ — уравнениям вида $-(q')' = f, -(qh')' = f$ на сегментах ε и κ_1, κ_2. Кроме того, выполняются условие шарнира

$$p(\pm 0)u''(a \pm 0) = 0,$$

и условия трансмиссии в узлах a и b

$$\Delta\left(pu''\right)'(a) - q(a+0)h'(a+0) = 0,$$

$$\Delta\left(qv'\right)(b) + q(b+0)h'(b+0) = 0.$$

В граничных точках выполняются условия закрепления

$$u(0) = u(l) = 0,\ u''(0) = u''(l) = 0,\ v(0) = v(l) = 0.$$

Если внешняя нагрузка f не зависит от деформации, то при произвольном задании $f(x)$ соответствующая ей деформация может быть представлена в интегральной форме $u(x) = \int\limits_{\Gamma} K(x,s)f(s)ds$. Поэтому, если $f(x)$ зависит от деформации, т.е. $f = f(x,u)$, то деформация системы обязана быть решением уравнения $u(x) = \lambda \int\limits_{\Gamma} K(x,s)f(s)ds$, где дополнительно введенный параметр λ определяется, например, линейной зависимостью натяжения тросов и жесткость стержней от внешнего параметра λ.

Если $f(x,0) = 0$, то нетривиальное решение последнего уравнения, соответствующее форме потери устойчивости, может быть описано с помощью теорем М.А. Красносельского о бифуркациях в уравнениях с вогнутыми операторами, что позволяет использовать установленные автором результаты о строгой положительности $K(x,s)$внутри $\Gamma \times \Gamma$.

О ПОЛУГЛОБАЛЬНОЙ C^∞-РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Шананин Н.А. (Москва)
nashananin@inbox.ru

В открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами

$$(P(x,D)\,u =) \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle\leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f, \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}. \qquad (1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — неотрицательный целочисленный мультииндекс, $\langle\varrho,\alpha\rangle = \varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2 + \ldots + \varrho_n\alpha_n$,- взвешенный порядок D^α, веса ϱ_k - натуральные числа $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\mu = \min_j \varrho_j$. Предположим, что ξ-квазиоднородные порядков $l = m, \ldots, m-\mu+1$ составляющие $p_l(x,\xi) = \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle=l} a_\alpha(x)\ \xi^\alpha$ полного символа оператора P вещественнозначны и пусть K - компакт в Ω. Тогда

Теорема. *Если K не содержит проекции ни одной полной интегральной кривой векторного поля $\sum_{\{j|\varrho_j=\mu\}}\left(\frac{\partial p_m}{\partial x_j}\partial_{\xi_j} - \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\partial_{x_j}\right)$, принадлежащей множеству $\{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0,\ \xi \neq 0\}$, то*

(I) *множество $N(K) = \{v \in \mathcal{E}'(K) \mid P^*v = 0\}$ есть конечномерное подпространство, содержащееся в $C_0^\infty(K)$ и ортогональное образу $P\mathcal{D}'(\Omega)$;*

(II) *для любой функции $f \in C^\infty(\Omega)$, ортогональной $N(K)$, существует функция $u \in C^\infty(\Omega)$, которая является решением уравнения (1) в некоторой окрестности компакта K.*

Литература

[1] Н.А. Шананин, О разрешимости на компактных подмножествах дифференциальных уравнений с вещественнозначным глав-

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00253.

ным пучком символов. Матем. сб., т. 197, вып. 2, 2006, 137-160.

СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА И ТЕОРЕМА ТЕЛЯКОВСКОГО – ГОПЕНГАУЗА

Шарапудинов И.И. (Махачкала)
sharapud@iwt.ru

Пусть функция $f(x)$ $r-$ раз непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$. Положим $f_{r,k} = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)P_k(t)dt$, $k = 0,1,\ldots$, где $P_k(x)$ – полином Лежандра. Смешанный ряд по полиномам Лежандра имеет вид $f(x) = D_{2r-1}(f,x) + \mathcal{F}_r(x)$, где

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{f_{r,k}P_{k-r}^{r,r}(x)}{k(k-1)\cdots(k-r+1)},$$

$P_n^{r,r}(x)$ – полином Якоби, $D_{2r-1}(f,x)$ – единственный алгебраический полином степени $2r-1$, для которого $D_{2r-1}^{(\nu)}(\pm1) = f^{(\nu)}(\pm1)$ $(\nu = 0,1,\ldots r-1)$. Пусть $k^{[r]} = k(k-1)\cdots(k-r+1)$,

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = D_{2r-1}(f,x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{f_{r,k}}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x),$$

$$V_{n+m+2r}(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}\mathcal{Y}_{k+2r}(f,x),$$

— соответственно, частичная сумма и средняя типа Валле-Пуссена для смешанного ряда по полиномам Лежандра. Далее, положим $N = n+m+2r$, $p_N(x) = V_{n+m+2r}(f,x)$. В настоящей работе доказано, что при $0 < a \leqslant \frac{m}{n} \leqslant b$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ справедливы оценки

$$|f^{(\nu)}(x) - p_N^{(\nu)}(x)| \leqslant c(r,a,b)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{N}\right)^{r-\nu}\omega\left(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{N}\right),$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant r$, $\omega\left(f^{(r)},\delta\right)$ – модуль непрерывности функции $f^{(r)}(x)$. Тем самым установлено, что оценки из известной теоремы Теляковского – Гопенгауза дастигаются на средних Валле-Пуссена смешанного ряда по полиномам Лежандра.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В КАНАЛАХ ВОДОИСПАРИТЕЛЬНОГО ОХЛАДИТЕЛЯ

Шацкий В.П., Гулевский В.А., Высоцкая Ж.В. (Воронеж)
fc-fakel@inbox.ru

Математическая модель, описывающая процессы тепло-массопереноса в каналах водоиспарительных охладителей, допускает только численное решение. Она представляет собой следующую систему уравнений:

$$c\rho V h\frac{dt}{dx} = \alpha(t_{п} - t) + c_{п} J_{п} t_{п}; \quad c\rho V h\frac{d\rho_{п}}{dx} = \beta(\rho_{пн}(t_{п}) - \rho_{п}),$$

где α и β — коэффициенты тепло- и массоотдачи; c, ρ, t — коэффициент теплоемкости, плотность и температура воздуха; $c_{п}, J_{п}, \rho_{п}$ — коэффициент теплоемкости, плотность потока пара и плотность пара соответственно; $\rho_{пн}(t_{п})$ — плотность насыщенного пара; V — скорость воздуха в потоке; h — половина сечения канала; $t_{п}$ — температура поверхности пластины.

Начальными условиями являются температура и плотность пара на входе в охладитель: $t|_{x=0} = t_{вх}$; $\rho_{п}|_{x=0} = \varphi\rho_{пн}(t_{вх})$, где φ — относительная влажность воздуха, а на границе тепловой поток обусловлен парообразованием и потоком энтальпии пара

$$RJ_{п} = \alpha(t_{п} - t) + c_{п} J_{п} t_{п},$$

где R — удельная теплота парообразования. Преобразуя последнюю формулу, получим

$$J_{п}(R - c_{п} t_{п}) = \alpha(t_{п} - t).$$

Оценим значения слагаемых, стоящих в скобках левой части уравнения. Как известно, $R = 2400 \cdot 10^3$ Дж/кг; $c_{п} = 1400 - 1800$ Дж/(кгК), а значение температуры поверхности пластины у водоиспарительных охладителей не превышает $20^0 C$. Таким образом, значение $c_{п} t_{п}$ колеблется в пределах 1,5 - 2 процента от значения удельной теплоты парообразования, что позволяет пренебречь этим произведением в указанной математической модели.

В этом случае модель допускает аналитическое решение, позволяющее определить зависимость температуры и относительной влажности охлажденного воздуха от длины охладителя, что в свою очередь позволяет обосновать его наиболее рациональные геометрические параметры.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПОЛУДИСКРЕТНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА

Шепилова Е.В. (Воронеж)
elena_shepilova@mail.ru

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где V' — двойственное к V, а H отождествляется со своим двойственным H'. Вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]\,(T < \infty)$ на $u, v \in V$ определено семейство симметричных полуторалинейных форм $a(t,u,v)$. Для всех $u, v \in V$ функция $t \to a(t,u,v)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и выполнено

$$|a(t,u,v)| \leqslant M_1\|u\|_V\|v\|_V\,,\ a(t,u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2\,,\ \text{где } \alpha > 0\,,\ \text{и}$$

$$|\ \partial a(t,u,v)/\partial t\ | \leqslant M_2\|u\|_V\|v\|_V \text{ почти всюду на } [0,T].$$

Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t): V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = (A(t)u,v)$ и $\|A(t)\|_{V\to V'} \leqslant M_1$.

В пространстве V' рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + i\,A(t)u(t) = f(t), \qquad u(0) = u^0 \in V. \tag{1}$$

Пусть V_h — конечномерное подпространство V. Функцию $u_h(t)$ со значениями в V_h, назовем приближенным решением задачи (1), если для всех $v_h \in V_h$ почти при всех $t \in [0,T]$ выполнено

$$(u_h'(t), v_h) + i\,a(t, u_h(t), v_h) = (f(t), v_h)\,,\ \text{где } u_h(0) = u_h^0 \in V_h\,. \tag{2}$$

Определим пространства $V(t) = \{u, v \in V | (u,v)_{V(t)} = a(t,u,v)\}$. Рассмотрим $Q_h(t)$ — ортогональный проектор в пространстве $V(t)$ на V_h и Q_h — ортогональный проектор в пространстве V на V_h.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(0,T,H)$ и $u(t)$ — решение задачи (1) та-кое, что $u' \in L_2(0,T,V)$. Пусть $u_h(t)$ — решение задачи (2), где $u_h^0 = P_h u^0$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \leqslant c_1 \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|[I - Q_h(t)]u(t)\|_H^2 +$$

$$+c_2\int\limits_0^T \left(\|[I-Q_h]u(t)\|_V^2+\|[I-Q_h(t)]u'(t)\|_H^2\right)dt.$$

Теорема 2. *Пусть $f \in L_2(0,T,H)$ и $f' \in L_2(0,T,V')$. Пусть $u(t)$ — решение задачи (1) такое, что $u'' \in L_2(0,T,V)$, а $u_h(t)$ — решение задачи (2), где $u_h^0 = Q_h u^0$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \leqslant c_1 \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|[I-Q_h(t)]u(t)\|_V^2+$$

$$+c_2\int\limits_0^T\Big(\|[I-Q_h]u(t)\|_V^2+\|[I-Q_h]u'(t)\|_V^2+\|[I-Q_h(t)]u''(t)\|_H^2\Big)dt.$$

РЕГУЛЯРНЫЕ И ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ[1]

Ширяев Е.А. (Москва)

506@rambler.ru

1. Регулярные операторы. Пусть L — оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y)=(-i)^n y^{(n)}(x)+p_2(x)y^{(n-2)}+\dots+p_n(x)y, \qquad (1)$$

и n линейно независимыми нормированными краевыми условиями вида

$$U_j(y):=a_j y^{(k_j)}(0)+b_j y^{(k_j)}(1)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k_j-1}\left(a_{j,s}y^{(s)}(0)+b_{j,s}y^{(s)}(1)\right)=0, j=1,\dots,n. \qquad (2)$$

Предполагаем, что коэффициенты $p_j(x)$, $j=1,\dots,n$, — суммируемые комплексные функции на отрезке $[0,1]$; $n-1\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant\dots\geqslant k_n\geqslant 0$, $k_j>k_{j+2}$. Считаем, что L действует в пространстве $L_2(0,\,1)$ и определен равенством $L(y)=l(y)$ на области

$$D(L)=\{y \mid y^{(s)}\in AC[0,\,1],\ s=0,1,\dots,n-1,$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00712 и программы «Ведущие научные школы», грант № НШ-5247.2006.1.

$$l(y) \in L_2, U_j(y) = 0,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Определение регулярности дифференциального оператора дано Дж. Биркгофом. Его можно найти в известной монографии М. А. Наймарка.

Для формулировки основной теоремы о регулярных операторах удобно ввести дополнительные обозначения. Лучи $\arg \rho = \pm(\pi/2n + \arg(i\varepsilon_k))$ в комплексной ρ–плоскости назовем критическими. Их число равно n и $2n$ в четном и нечетном случаях, соответственно. Вырежем из ρ-плоскости открытые секторы раствора $\varepsilon < \pi/(2n)$, биссектрисами которых служат критические лучи, а оставшиеся n или $2n$ замкнутых секторов обозначим через $\Omega(\varepsilon)$.

Если резольвентное множество оператора L непусто, то можно показать, что спектр L дискретный, т.е. состоит из изолированных собственных значений $\{\lambda_k\}_1^\infty$ конечной алгебраической кратности. Обозначим через $\rho_{k,j}$, $k = 1, \ldots, n$, корни уравнения $\lambda_j = \rho^n$, через $B_{k,j}(\delta)$ — круги радиуса δ в ρ-плоскости с центрами в точках $\rho_{k,j}$, и через $B(\delta)$ — объединение всех таких кругов по обоим индексам k и j. Известно, что резольвента L есть интегральный оператор

$$(L - \rho^n)^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi,$$

где $G(x, \xi, \rho)$ — ядро Грина. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны. 1. Оператор L регулярен по Биркгофу; 2. найдется последовательность точек $\{\rho_k\}$ в одном из секторов множества $\Omega(\varepsilon)$ (в случае нечетного n — две последовательности в двух соседних секторах этого множества), такая, что $\rho_k \to \infty$ и при $\rho = \rho_k$ выполнена оценка*

$$|G(x,\ \xi,\ \rho)| \leqslant M|\rho|^{-n+1};$$

3. найдется последовательность точек $\{\rho_k\}$ в одном из секторов множества $\Omega(\varepsilon)$ (в случае нечетного n — две последовательности в двух соседних секторах этого множества), такая, что $\rho_k \to \infty$ и при $\rho = \rho_k$ выполнена оценка;

$$\|(L - \rho^n)^{-1}\| \leqslant M|\rho|^{-n}, \quad |\rho| \geqslant |\rho_0|; \tag{3}$$

4. система собственных и присоединенных функций оператора L образует безусловный базис со скобками в пространстве L_2, причем в скобки объединяются не более двух собственных функций.

2. **Вполне регулярные операторы**. Здесь будем рассматривать дифференциальные операторы четного порядка $n = 2m$, заданные дифференциальным выражением

$$l(y) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left\{ \left(p_k(x) y^{(k)}\right)^{(k)} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(q_k(x) y^{(k)}\right)^{(k-1)} + \left(r_k(x) y^{(k-1)}\right)^{(k)} \right] \right\}, \tag{4}$$

где $p_m(x) = 1$, $r_0(x) = 0$. Чтобы не осложнять существо дела, предположим, что коэффициенты $p_k(x)$, $q_k(x)$, $r_k(x)$ таковы, что после раскрытия производных дифференциальное выражение приводится к виду (1). Для этого достаточно, чтобы $p_k(x), r_k(x) \in W_1^k[0,1]$, $q_k(x) \in W_1^{k-1}[0,1]$.

Введем квазипроизводные

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, \quad k = 0, \dots, m-1, \\ y^{[m]} &= y^{(m)} - r_m y^{(m-1)}, \\ y^{[m+k]} &= -(y^{[m+k-1]})' + p_{m-k} y^{(m-k)} + \\ &+ \left[q_{m-k+1} y^{(m-k+1)} - r_{m-k} y^{(m-k-1)} \right], \\ & k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Краевые условия можно записать в виде

$$B y^{\wedge} + C y^{\vee} = 0, \tag{5}$$

где B и C — некоторые матрицы, а $y^{\wedge}$ и $y^{\vee}$ — векторы значений квазипроизводных:

$$\begin{aligned} y^{\wedge} &= \left(y(0),\ y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0),\ y(1),\ y'(1), \dots, y^{(m-1)}(1)\right)^t, \\ y^{\vee} &= \left(y^{[2m-1]}(0),\ y^{[2m-2]}(0), \dots, y^{[m]}(0), \right. \\ & \left. -y^{[2m-1]}(1),\ -y^{[2m-2]}(1), \dots, -y^{[m]}(1)\right)^t. \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс t означает транспонирование.

Определение. *Оператор L, порожденный дифференциальным выражением (4) и краевыми условиями (5), назовем вполне регулярным, если выполнено условие $B^{-1}(\operatorname{im} C) = \mathbb{C}^{2m} \ominus \ker C$, где B^{-1} понимается как взятие полного прообраза от $\operatorname{im} C$ при отображении B.*

Теорема 2. *Пусть оператор L задан выражением (4)и краевыми условиями (5). Следующие утверждения эквивалентны . 1. Оператор L является вполне регулярным. 2. Числовой образ оператора L не совпадает со всей комплексной плоскостью. 3. Числовой образ оператора L содержится в некоторой полуплоскости в* $\mathbb{C}$. *4. Квадратичная форма оператора* $(Ly, y)_{L_2}$ *представима в виде*

$$\sum_{k=1}^{m}\left[(p_k y^{(k)}, y^{(k)})_{L_2} + (q_k y^{(k)}, y^{(k-1)})_{L_2} - (r_k y^{(k-1)}, y^{(k)})_{L_2}\right] + \\ + (Ay^{\wedge}, y^{\wedge})_{\mathbb{C}^{2m}}.$$

Замечание. *Всякий вполне регулярный оператор регулярен. Действительно, если L вполне регулярен, то его числовой образ лежит в некоторой полуплоскости, а потому найдется сектор в комплексной плоскости, в котором резольвента* $(L-\rho^m)^{-1}$ *имеет оценку (3). Тогда по теореме 1 оператор L регулярен. Обратное, вообще говоря, неверно. Можно построить контрпример.*

Работа выполнена под руководством проф. А. А. Шкаликова.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Шишкин А.Б., Письменный Р.Е. (Славянск-на-Кубани)
Shishkin-home@mail.ru

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbf{C}$; H — пространство функций, аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах; π — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$; $\pi(D)$ — соответствующий дифференциальный оператор бесконечного порядка. Результат действия $\pi(D)f$ оператора $\pi(D)$ на элемент $f \in H$ лежит в H. Это позволяет рассматривать $\pi(D)$ как линейный непрерывный оператор, действующий из H в H. Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство $W \subset H$ *допускает спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в H линейной оболочки корневых элементов оператора $\pi(D)$, содержащихся в W.

Пусть S — линейный непрерывный функционал на H.

Теорема. *Если функция* π *имеет вполне регулярный рост при некотором уточненном порядке* $\rho(r)$, *удовлетворяющем условиям*

$\rho(r) \to \rho$, $r \to +\infty$, $0 < \rho \leqslant 1$, то замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство $W_S := \{f \in H : \langle S, \pi(D)^k f\rangle = 0, k = 0, 1, \ldots\}$ допускает спектральный синтез.

При $\pi(z) = z$ введенное подпространство W_S совпадает с ядром оператора свертки или, другими словами, с множеством решений однородного уравнения свертки. Теорема в этой ситуации доказана И.Ф. Красичковым-Терновским [1]. Если $\pi(z) = z^q$, то подпространство W_S совпадает с множеством решений однородного уравнения q-свертки. В этой ситуации теорема 2.3.2 доказана С.Г. Мерзляковым [2]. Если π — многочлен, то подпространство W_S совпадает с множеством решений однородного уравнения π-свертки. Аппроксимационная задача для однородного уравнения π-свертки решена И.Ф. Красичковым-Терновским [3]. При дополнительных условиях (положительность индикатора функции π и её обратимость в кругах постоянного радиуса) теорема доказана А.Н Чернышёвым [4].

Литература

1. Красичков-Терновский И.Ф. // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 1. С. 3 – 30. 2. Мерзляков С.Г. // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 635 – 639. 3. Красичков-Терновский И.Ф. // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 6. С. 55 – 86. 4. Чернышёв А.Н. // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Приложение. 2004. № 1.

ПОЛИСКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И (ВН)-НЕРАВЕНСТВО В l_p.

Юргелас В.В. (Воронеж)

pp_center@typ.vsu.ru

Получено обобщение классического неравенства Бёрлинга-Ханнера на случай произвольного (конечного) числа слагаемых пространства l_p.

Пусть имеется набор из r комплексных лебеговых пространств последовательностей $l_{p_1}, l_{p_2}, \ldots, l_{p_r}$ ($p_k \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant r$) и произвольный набор их представителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, так что $\lambda_k = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots) \in l_{p_k}$ и

$$\|\lambda_k\|_{p_k} \equiv \Big(\sum_{j \geqslant 1} |\lambda_j^{(k)}|^{p_k}\Big)^{\frac{1}{p_k}} < +\infty, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение величину

$$\sum_{j\geqslant 1}\lambda_j^{(1)}\lambda_j^2\dots\lambda_j^{(r)}$$

– полискалярное произведение векторов $\lambda_k \in l_{p_k}$, $1 \leqslant k \leqslant r$.

Лемма. *Если числа $p_1, p_2, \dots, p_k$ таковы, что $p_k > 1$, $1 \leqslant k \leqslant r$ и*

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_r}=1,$$

то

$$\sum_{j\geqslant 1}|\lambda_j^{(1)},\lambda_j^2,\dots,\lambda_j^{(r)}| \leqslant \|\lambda_1\|_{p_1}\|\lambda_2\|_{p_2}\cdots\|\lambda_r\|_{p_r}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Для произвольного набора векторов $\zeta = (z_1, \dots, z_r)$ пространства l_p с четным $p \geqslant 2$ ($z_j \in l_p$, $1 \leqslant j \leqslant r$) справедливо неравенство*

$$\sum_{\varepsilon\in\mathcal{K}_r}\|\langle\varepsilon,\zeta\rangle\|_p^p \leqslant \sum_{\varepsilon\in\mathcal{K}_r}|\langle\varepsilon,\|\zeta\|\rangle|^p,$$

где $\langle\varepsilon,\zeta\rangle = \varepsilon 1 z_1 + \dots + \varepsilon_r z_r$, $\|\zeta\| \equiv (\|z_1\|_p, \dots \|z_r\|_p)$, а норма $\|\cdot\|_p$ определяется формулой (1).

КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ К КЛАССУ ФУНКЦИЙ ТИПА СИНУСА[1]

Юхименко А.А. (Москва)
alesandro1985@mail.ru

Обозначим через S_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) класс целых функций экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|F(z)| \asymp |z|^{-\alpha}e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \geqslant h = h(F) > 0.$$

Класс $S_0 = S$ состоит из так называемых функций типа синуса. Их роль в негармоническим анализе демонстрирует теорема Левина-Головина: если $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — множество корней ф.т.с и Λ — простая

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №06-01-00326 и программы "Ведущие научные школы грант №НШ-4564.2006.1

отделимая последовательность, то система функций $e(\Lambda) = \{e^{i\lambda_n t}\}$ есть базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$.

Положительная функция $R(x)$ называется правильно меняющейся на бесконечности, если она измерима и представима в виде $R(x) = x^\lambda l(x)$, где $l(x)$ — медленно меняющаяся функция. Причем α называют показателем функции $R(x)$. Класс правильно меняющихся функций с показателем α обозначают R_α.

Пусть $l(t)$, $t > 0$ — такая функция, что $l(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha < 1$. Рассмотрим бесконечное произведение

$$F_\Lambda(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_n|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n = n + l(|n|),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Теорема 1. [критерий функции типа синуса]*Пусть $l(t)$ — вогнутая положительная функция, такая что $l(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha < 1/2$. Тогда $F_\Lambda \in S$ если и только если $l'(t) \cdot t = O(1)$.*

В случае $1/2 \leqslant \alpha < 1$ эта теорема также имеет место при дополнительных условиях на $l''(t)$.

Теорема 2. *Пусть $l(t)$ — вогнутая положительная функция, такая что $l(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha < 1/2$. Пусть также $L(t) = t \cdot l'(t) \in R_\rho$. Тогда выполнена оценка*

$$|F_\Lambda(z)| \asymp \exp\left(\frac{\pi}{\rho}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\rho\right)\operatorname{sign} x \cdot L(|x|)(1 + o(1))\right), \quad z = x + i. \quad (1)$$

Оценка (1) демонстрирует, что из совокупности классов $\{S_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ единственный, где может лежать $F_\Lambda(z)$ — это S_0.

ПОЛУБРАУДЕРОВЫ СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ КВАЗИГИПОНОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Яблонская Н.Б. (Минск)

natsev@tut.by

Оператор $T \in B(H)$, называется *квазигипонормальным*, если $\|T^*Tx\| \leqslant \|T^2x\|$ для всех $x \in H$. Условия выполнимости теоремы Вейля для полубраудеровых существенных спектров $\sigma_{ab}(T)$ и $\sigma_{db}(T)$ замкнутых операторов в банаховом пространстве, а также их определения и некоторые свойства содержатся в работе [1]. Если T^* – квазигипонормальный оператор, то оператор T удовлетворяет теореме Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра оператора T, то есть $\sigma_{ab}(T) = \sigma(T)\setminus\pi_{00}(T)$. Если $T \in B(H)$ – квазигипонормальный оператор, то он удовлетворяет теореме Вейля для браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра оператора T, то есть $\sigma_{db}(T) = \sigma(T)\setminus\pi_{00}(T)$.

В работе [2] приведена теорема Вейля для полубраудеровых существенных спектров аналитических функций от произвольного ограниченного линейного оператора T в банаховом пространстве X, удовлетворяющего теореме Вейля. В работе [3] доказана справедливость теоремы Вейля для аналитических функций от квазигипонормальных операторов, ее аналог для полубраудеровых существенных спектров приведен в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть H - комплексное гильбертово пространство, $T \in B(H)$ и точка 0 не является изолированной точкой спектра $\sigma(T)$. Если T^* – квазигипонормальный оператор, то оператор $f(T)$, где f – аналитическая функция, определенная в окрестности спектра $\sigma(T)$, удовлетворяет теореме Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра σ_{ab}.*

Теорема 2. *Если $T \in B(H)$ – квазигипонормальный оператор, то оператор $f(T)$, где f – аналитическая функция, определенная в окрестности спектра $\sigma(T)$, удовлетворяет теореме Вейля для браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра σ_{db}.*

Литература

1. *Еровенко В.А., Северенчук Н.Б.* // Доклады НАН Беларуси. (2001). Т. 45. №1. С. 29-33.

2. *Еровенко В.А., Северенчук Н.Б.* // Доклады НАН Беларуси. (2002). Т. 46. №2. С. 40-43.

3. *Еровенко В.А.* // Доклады АН БССР. (1984). Т. 28. №12. С. 1068-1071.

Именной указатель

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской зимней математической школы

Верстка и подготовка оригинала-макета:
Е.А. Турыгина, С.А. Шабров

Подписано в печать 25.12.2006 г.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Объем 16 п.л.
Тираж 280. Заказ № 932.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Отпечатано с готового оригинала-макета в типографии
Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3