Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
Институт математики РАН им.В.А.Стеклова

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XV"

В честь 65-летия академика
Виктора Антоновича Садовничего

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XV"

3-9 МАЯ 2004 г.

ВОРОНЕЖ

УДК 517.94 (92;054;97)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 04-01-10042

Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XV". Воронеж, ВГУ, 2004. — 253 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проведенной Воронежским государственным университетом совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики.

ISBN 5-9273-0505-9

ISBN 5-9273-0505-9

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ А.Н. КОЛМОГОРОВА

Абилов В.А. (Махачкала)
E-mail abilov@mail.dgu.ru

Пусть $C = C(R, e^{-x^2})$ — пространство непрерывных и суммируемых с весом e^{-x^2} функций $f : R \to R$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in R} |f(x)|e^{-x^2};$$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)H_k(x) \quad \left(c_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)H_k(x)dx\right)$$

— ряд Фурье–Эрмита функции $f \in C$,

$$S_N(f; x) = \sum_{0 \leqslant k < N} c_k(f)H_k(x)$$

— его частичные суммы;

$$KW^r \left\{ f \in C : |f^{(r)}(x)| \leqslant K,\ K > 0,\ x \in R \right\}$$

$$(r = 1, 2, \ldots).$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Справедливо асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in KW^r} \|f - S_n(f)\| = \frac{4K}{\pi^2} \frac{\ln N}{N^r} + O\left(\frac{1}{N^r}\right),$$

где $N = [\sqrt{2n}]$ и константа, входящая в $O(1)$, зависит только от r.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ–ЭРМИТА

Абилов М.В. (Махачкала)
E-mail abilov@mail.dgu.ru

Пусть $L_2 = L_2(R; exp(-|x|^2))$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f : R^n \to R$ с весом $exp(-|x|^2)$ и нормой

$$\|f\| = \sqrt{\int_{R^n} f^2(x) \exp(-|x|^2)dx};$$

$$\Omega_k(f;\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\| \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x) \right\|,$$

где $F_h f(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} f(x\sqrt{1-h^2} + ht) exp(-|t|^2)dt$, — обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2$;

$$f(x) = \sum_{k\in Z_+^n} c_k(f) H_k(x) \quad \left(c_k(f) = \int\limits_{R^n} f(x) H_k(x) exp(-|x|^2) dx \right)$$

— n–кратный ряд Фурье–Эрмита функции $f \in L_2$,

$$S_N(f;x) = \sum_{0\leqslant k_1+k_2+\cdots+k_n<N} c_k(f) H_k(x)$$

— его треугольные частичные суммы;

$$D = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - 2\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

— дифференциальный оператор второго порядка.

Теорема. Для любой функции $f \in L_2(D^r f \in L_2)$ справедливо неравенство

$$\|f - S_N(f)\| \leqslant (\gamma(N))^{-k} (2N)^{-r} \left(\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{N}}} h\Omega_k^{\frac{1}{k}}(D^r f; h) dh \right)^k$$

$$(r = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots; N = 2, 3, \ldots),$$

где $\gamma(N) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+2}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{\frac{N+2}{2}}$, причем при каждом фиксированном $N = 2, 3, \ldots$, константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

ОБ УСРЕДНЕНИИ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Амучиева Т.С. (Махачкала)
E-mail tanya@mail.dgu.ru

Рассмотрим квазилинейную систему, зависящую от малого параметра (здесь и ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам)

$$\mathcal{D}_2 u_{1\varepsilon} + a_{1i}(\varepsilon^{-1}x, u_\varepsilon)\mathcal{D}_i u_{2\varepsilon} = f_1(x) \in \mathcal{L}_2(Q),$$

$$-\mathcal{D}_1 u_{1\varepsilon} + a_{2i}(\varepsilon^{-1}x, u_\varepsilon)\mathcal{D}_i u_{2\varepsilon} = f_2(x) \in \mathcal{L}_2(Q),\ Q = \{x : |x| < 1\},\quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 1$; $a_{ij}(x, \eta)$, $i, j = 1, 2$, при любом фиксированном $\eta \in R^2$ являются периодическими функциями по x, удовлетворяющими помимо естественных условий эллиптичности, еще некоторым условиям гладкости, связанным с η.

Рассмотрим для (1) краевую задачу

$$u_{1\varepsilon} \in W_p^1(Q),\ \int_{|x|=1} u_{2\varepsilon}(x)ds = 0,\ u_\varepsilon = (u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in W_p^1(Q). \quad (2)$$

(Множество векторов, удовлетворяющих (2), обозначим $\mathcal{W}$.) Согласно [1] получим, что задача (1), (2) однозначно разрешима, причем имеет место оценка $||u_\varepsilon||_{W_p^1(Q)} \leqslant C$, где $C > 0$ — константа, зависящая только от постоянных эллиптичности.

Теорема. Для любых фиксированных f_1, $f_2 \in \mathcal{L}_2(Q)$ решение u_ε краевой задачи (1), (2) равномерно в $\overline{Q} = \{x : |x| \leqslant 1\}$ сходится к решению краевой задачи

$$\mathcal{D}_2 u_1 + \hat{a}_{1i}(u)\mathcal{D}_i u_2 = f_1(x),\ -\mathcal{D}_1 u_1 + \hat{a}_{2i}(u)\mathcal{D}_i u_2 = f_2(x),\ u \in \mathcal{W},$$

где $\hat{a}_{ij}(\eta)$ – функции, удовлетворяющие условиям эллиптичности и зависящие только от $\eta \in R^2$. Причем $\hat{a}_{ij}(\eta) = \langle a_{kj}(x, \eta)\mathcal{P}_{ki}(x, \eta)\rangle_x$, где $\langle u \rangle$ — среднее значение периодической функции, $\mathcal{P}_{ki}(x, \eta)$ — решения одной вспомогательной периодической задачи [2].

Литература

1. Виноградов В.С. Об ограниченности решений кравеых задач для линейных эллиптических систем первого порядка на плоскости // ДАН СССР. Т.121, 3. 1958. С. 399–402.

2. Сиражудинов М.М. О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка//Матем. заметки. Т.48, вып.5. 1990. С. 153–155.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ[1]

Андреев А.С., Черников С.В. (Ульяновск)
E-mail AndreevAS@ulsu.ru

Рассматривается дискретная система, описываемая уравнениями

$$x(k+1) = X(k, x(k), u(k)), \quad X(k,0,0) \equiv 0 \tag{1}$$

$x \in R^n$, $u \in R^m$, $X : Z^+ \times R^n \times R^m$ – непрерывная при каждом $k \in Z^+$ функция по (x, u).

Исследуется задача об определении уравнения $u = u^0(k,x)$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость невозмущенного состояния $x = 0$ системы (1), минимизирующего при этом по сравнению с другими аналогичными управлениями $u = u(t,x)$ функционал

$$I = \sum_{k=k_0}^{\infty} W(k, x[k], u[k]) \tag{2}$$

$W : Z^+ \times R^n \times R^m \to R^+$ есть некоторая непрерывная при каждом $k \in Z^+$ функция по (x, u).

Получен ряд результатов решения этой задачи на основе применения знакопостоянных функций Ляпунова. Например, следующая теорема, в которой

$$B(V,k,x,u) = V(k+1, X(k,x,u)) - V(k,x) + W(k,x,u),$$

$h(\|x\|)$ – функция типа Хана.

Теорема. Пусть существует функция $V(k,x) \geqslant 0$, $V(k,x) \leqslant h(\|x\|)$, и управление $u = u^0(k,x)$ такие, что:
1) $B(V,k,x,u^0(k,x)) \equiv 0$;
2) множество $\{V(k,x) > 0\} \cap \{W(k,x) = 0\}$ не содержит (строго) движений системы (1) при $u = u^0(k,x)$;
3) состояние $x = 0$ системы (1) при $u = u^0(k,x)$ (строго) равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\{V(k,x) = 0\}$;
4) $B(V,k,x,u(k,x)) \geqslant 0$ для любого другого управления, $u = u(k,x)$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость состояния $x = 0$.

Тогда управление $u = u^0(k,x)$ решает исследуемую задачу.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00877) и программы "Университеты России" (проект УР-04.01.053).

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ЭПИДЕМИИ В НЕОДНОРОДНОМ СООБЩЕСТВЕ С УЧЕТОМ ЛАТЕНТНОГО ПЕРИОДА ЗАБОЛЕВАНИЯ

Андреева Е.А. (Тверь)

E-mail Elena.Andreeva@tversu.ru

Рассматривается задача, в которой заболевание контролируется с помощью вакцинации и карантина. Модель учитывает латентный период болезни и описывается системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с заданными начальными условиями.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\beta_{11}x_1(t)y_1(t) - \beta_{12}x_1(t)y_2(t) - v_1(t),\\
\dot{y}_1(t) &= \int\limits_{t-r}^{t} [\beta_{11}x_1(s)y_1(s) + \beta_{12}x_1(s)y_2(s)]G_1(t-s)ds-\\
&\quad -\gamma_1 y_1(t) - u_1(t)y_1(t),\\
\dot{x}_2(t) &= -\beta_{21}x_2(t)y_1(t) - \beta_{22}x_2(t)y_2(t) - v_2(t),\\
\dot{y}_2(t) &= \int\limits_{t-r}^{t} [\beta_{21}x_2(s)y_1(s) + \beta_{22}x_2(s)y_2(s)]G_2(t-s)ds-\\
&\quad -\gamma_2 y_2(t) - u_2(t)y_2(t),
\end{aligned}
$$

Цель управления состоит в отыскании минимума функционала $J(u,v)$, выражающего стоимость эпидемии при заданных ограничениях на управление

$$
\begin{aligned}
J(u,v) = \int\limits_0^T e^{\mu t} \sum_{i=1}^{2} [y_i(t) + c_i u_i(t) y_i(t) + d_i v_i(t)]dt+\\
+\sum_{i=1}^{2} \alpha_i y_i(T) \to \inf .
\end{aligned}
$$

Литература

Андреева Е. А. Оптимальное управление динамическими системами. Тверь: ТвГУ, 1999.

НЕПОЛНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ МАКСИМУМА В ПАРАМЕТРИЗОВАННОМ МЕТОДЕ ЦЕНТРОВ

Андрианова А.А. (Казань)

E-mail aandr@mi.ru

Требуется найти приближенное с заданной точностью $\varepsilon > 0$ решение задачи $\min\{f(x), x \in D\}$, $D = \{x : x \in R_n, g(x) \leqslant 0\}$, где

$g(x) = \max\{f_i(x), i = 1..m\}$, $D' = \{x : x \in R_n, g(x) < 0\}$, $\overline{D'} = D$, $f(x)$ - непрерывная выпуклая функция, которая удовлетворяет на D условию Липшица с константой L, $g(x)$- сильно выпуклая функция с постоянной сильной выпуклости μ.

Пусть $f^* = \min\{f(x), x \in D\} > -\infty$, $Y \cap D = \emptyset$, где $Y = Argmin\{f(x), x \in R_n\}$, для $\varepsilon > 0$ множество $X_\varepsilon^* = \{x : x \in D, f(x) \leqslant f^* + \varepsilon\}$ ограничено, $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$.

Для $\delta > 0, \rho > 0, t, \gamma$ положим $F(x,t,\gamma,\rho) = \max\{f(x) - t, \rho g(x) - \gamma\}$, $Z(t,\gamma,\rho,\delta) = \{x : x \in R_n, F(x,t,\gamma,\rho) \leqslant F^*(t,\gamma,\rho) + \delta\}$, где $F^*(t,\gamma,\rho) = \min\{F(x,t,\gamma,\rho), x \in R_n\}$, $D(\rho,\delta) = \{x : x \in R_n, \rho g(x) - \delta \leqslant 0\}$, $D'(\rho,\delta) = \{x : x \in R_n, \rho g(x) - \delta < 0\}$.

Пусть известны числа f_1, f_2, для которых $f_1 \leqslant f^* \leqslant f_2$.

Получены правила фиксации параметров, при которых имеет место $Z(t,\gamma,\rho,\delta) \subset X_\varepsilon^*$. В отличие от [1] функция максимума минимизируется до выполнения заданной точности $\delta > 0$.

Теорема 1. Если параметры $0 < \delta < \varepsilon$, $\rho \geqslant 1$, t, γ зафиксированы так, что $D'(\rho,\delta) \neq \emptyset$ и выполняются неравенства $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, $t \geqslant f^* + L\sqrt{\frac{\delta}{\mu}} + \delta$, $\rho \geqslant -\frac{L^2(\varepsilon - \delta + \gamma_0 + f_1 - t)}{\mu(\varepsilon-\delta)^2}$, то $Z(t,\gamma,\rho,\delta) \subset X_\varepsilon^*$.

Теорема 2. Если параметры $\delta > 0$, $\rho' \geqslant 1$, t, γ зафиксированы так, что $D'(1,\delta) \neq \emptyset$, $\overline{D'(1,\delta)} = D(1,\delta)$, $\varepsilon > 2\delta + L\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta - L\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$ и имеют место $t \leqslant f^* + L\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$, $\rho' \geqslant -\frac{L^2\sqrt{\mu}(\varepsilon_1 - 2\delta - f_2 + t) - L^3\sqrt{\delta}}{\sqrt{\mu}(\mu\varepsilon_1^2 + L^2\delta)}$, $\gamma = -\rho'(\frac{\mu\varepsilon_1^2}{L^2} + \delta) - \varepsilon_1 + \delta$, то $Z(t,\gamma,\rho,\delta) \subset X_\varepsilon^*$ для любых $\rho \geqslant \rho'$.

Литература.

1. Андрианова А.А., Заботин Я.И. Управление процессом минимизации в параметризованном методе центров. Изв.вузов. Математика. 12, 2002. - с.3-10.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЧАТЫХ НОМОГРАММ ПРИ РЕШЕНИИ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Андрианова Ю.В. (Москва)
E-mail yandrianova@mail.ru

Тема "Квадратный трехчлен" занимает в курсе алгебры одно из центральных мест. Задачи по этой теме — непременный атрибут любого вступительного экзамена по математике в ВУЗ. Но, как показывает практика, многие школьники усваивают этот материал формально и неглубоко. Цель работы — расширить знания учащихся по теме "Квадратный трехчлен", используя графический подход к решению задач — построение сетчатых номограмм.

В [1] изложен принцип построения сетчатых номограмм. Каждому квадратному трехчлену x^2+px+q ставится в соответствие точка на плоскости с координатами p и q. При каждом x уравнение $x^2+px+q=0$ задает прямую на этой плоскости, называемую корневой. Огибающей семейства корневых прямых является парабола $q=\frac{1}{4}p^2$, соответствующая трехчленам, имеющим кратные корни.

Такой подход позволяет наглядно описать все уравнения с заданными свойствами корней и решать задачи на распределение корней квадратного трехчлена, не проводя длинных алгебраических выкладок. Учащихся математических классов полезно ознакомить с обобщением этой задачи на случай комплексных корней (p и q — действительные). В [2] получены условия на коэффициенты трехчлена x^2+px+q, один из корней которого находится в прямоугольнике, стороны которого параллельны действительной и мнимой осям.

В данной работе рассматривается наиболее естественная в комплексной области задача, когда один из корней принадлежит заданному кругу.

Аналогичные сетчатые номограммы могут быть использованы для исследования уравнений третьей и четвертой степеней.

Литература

[1] Колмогоров А. Н. и др. Летняя школа на Рубском озере. М.: Просвещение, 1971.

[2] Вавилов В. В. Сетчатые номограммы. Квант, 1978, № 9.

ПОЛНОТА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Андриянов Г.И. (Калуга)

Пусть D — односвязная ограниченная область с односвязным дополнением CD до всей расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$. $W(z)$ — однолистная регулярная функция: $D \to G \equiv W(D)$, причем область G обладает свойством

$$G \cap (-G) = G^* \text{— односвязная область,} \qquad (1)$$

где $(-G) = \{w, -w \in G\}$. Через $A_j(z)$, $j=0,1$ обозначает голоморфные и не имеющие нулей в области D функции. Доказана

Теорема 1 *Система функций*

$$\{[W(z)]^{2n}A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n+1}A_1(z)\}_{n=0}^{\infty} \qquad (2)$$

полна в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда функция

$$\Delta(w) \equiv A_0(Z(w))A_1(Z(-w)) + A_0(Z(-w))A_1(Z(w))$$

не имеет ни одной пары нулей, симметричных друг другу относительно начала координат в области G.

По аналогии с системой функций (2) можно рассматривать и системы функций:

$$\{[W(z)]^{2n}A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n}A_1(z)\}_{n=0}^{\infty};$$

$$\{[W_0(z)]^{2n}A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W_1(z)]^{2n+1}A_1(z)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Теоремы типа теоремы 1 имеют многочисленные приложения: так полнота систем:

$$\{z^{2n}\varphi(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{z^{2n+1}\psi(z)\}_{n=0}^{\infty},$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — регулярные и не имеющие нулей в $|z| < 1$ функции;

$$\{[W(z)]^{2n}A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n+1}A_1(z)\}_{n=0}^{\infty},$$

где $W(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ — автоморфизм единичного круга, и многих других, вполне описывается теоремой 1.

Спрашивается, можно ли отказаться от условия (1) в теореме 1? Оказывается это возможно, но приходится прибегать к дополнительным построениям.

Например, достаточно просто можно получить полноту (при некоторых условиях) системы функций

$$\{e^{nz}A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{e^{nz}A_1(z)\}_{n=0}^{\infty}$$

в полосе $S_0^{4\pi} = \{z : 0 < Im\, z < 4\pi\}$.

Ранее подобного рода системы функций рассматривались в работах Ибрагимова, Альпера, Евграфова, Миролюбова, Казьмина.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ПРЕПОДАВАНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Арутюнян Г.В., Марчевская Е.В. (Москва)

E-mail IliaMarchevsky@mail.ru

В условиях модернизации Российского образования и перехода к профильному обучению опыт преподавания математики в классах с углублённым изучением предмета представляет большой интерес.

Многолетний опыт сотрудничества гимназии В1516 г. Москвы с МГТУ им. Н.Э. Баумана позволяет организовать учебный процесс с учётом способностей и профессиональных намерений учащихся. Преподавание углублённого курса математики ведётся в рамках лекционно-семинарской системы, которая приучает учащихся к систематической самостоятельной учебной деятельности по усвоению содержания образования. Главная задача учителя – развитие мышления и способностей учащихся в ходе решения разнообразных по сложности и по содержанию задач.

Каждый учитель-практик на протяжении многих лет работы по крупицам создаёт собственный банк задач и методических находок, позволяющий реализовать идею развития творческих способностей учащихся. В работе рассмотрены нестандартные приёмы решения иррациональных уравнений, таких как

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)};\qquad \sqrt{5-x}=x^2-5;$$

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2};\qquad x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1};$$

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)-3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Попытки решить эти уравнения традиционными способами обычно оказываются безрезультатными. Применение же тригонометрических подстановок, свойств скалярного произведения векторов, монотонности и обратимости функций и др. позволяет решить их коротко и красиво. Использование учителем подобных приёмов в процессе преподавания позволяет расширить круг изучаемых методов, а также научить учащихся творчески применять уже имеющиеся знания из других разделов курса. Творческий потенциал учителя – залог интеллектуального развития учащихся!

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Асташова И.В. (Москва)
E-mail ast@diffiety.ac.ru

Исследуется асимптотическое поведение всех решений уравнения

$$u'' + \frac{a}{x^2}u - u|u|^{k-1} = 0, \quad k > 1,$$

возникающего при изучении квазилинейных эллиптических уравнений. Ниже c обозначает произвольную ненулевую константу. Для любого $c \neq 0$ при выполнении условий соответствующей теоремы существуют решения с приводимыми в этой теореме асимптотиками. Пусть $\beta = \frac{2}{k-1} > 0$.

Теорема 1. При $\beta^2 + \beta + a < 0$ все нетривиальные решения, определенные в окрестности $\pm\infty$, имеют вид

$$u(x) \sim c|x|^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}}, \quad x \to \pm\infty,$$

а определенные в окрестности нуля — вид

$$u(x) \sim c|x|^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}}, \quad x \to 0.$$

Теорема 2. При $\beta^2 + \beta + a = 0$ все нетривиальные решения, определенные в окрестности $\pm\infty$, имеют вид

$$u(x) \sim \pm\left(\frac{\beta^2+\frac{\beta}{2}}{x^2\ln|x|}\right)^{\beta/2}, \quad x \to \pm\infty,$$

а определенные в окрестности нуля — вид

$$u(x) \sim c|x|^{\beta+1}, \quad x \to 0.$$

Теорема 3. При $\beta^2 + \beta + a > 0$ все нетривиальные решения, определенные в окрестности $\pm\infty$, имеют вид $u(x) \sim U(x)$, $x \to \pm\infty$, где $U(x) = (\beta^2 + \beta + a)^{\beta/2}|x|^{-\beta}$ — решение уравнения.

Теорема 4. При $-\beta^2 - \beta < a < 1/4$ любое нетривиальное решение, определенное в окрестности нуля, имеет при $x \to 0$ вид $u(x) \sim U(x)$ или $u(x) \sim cx^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a}}$.

Теорема 5. При $a = 1/4$ любое нетривиальное решение, определенное в окрестности нуля, имеет при $x \to 0$ одну из следующих трех асимптотик:

$$u(x) \sim U(x), \qquad u(x) \sim \frac{c}{\sqrt{x}}, \qquad u(x) \sim \frac{c\ln x}{\sqrt{x}}.$$

---

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Министерства промышленности, науки и технологий РФ (грант НШ 1464.2003.1)

Теорема 5. При $a > 1/4$ любое нетривиальное решение, определенное в окрестности нуля, имеет при $x \to 0$ вид $u(x) \sim U(x)$ или является колеблющимся, а его локальные экстремумы (x_j, u_j) в последнем случае удовлетворяют соотношениям

$$|u_j| \sim c\sqrt{x}, \quad x_j \sim x_0 q^j, \quad j \to \infty, \qquad \ln q = -\frac{\pi}{\sqrt{a-\frac{1}{4}}}.$$

Теорема 6. Любое решение $u(x)$, определенное в полуокрестности точки $x^* \neq 0$ и не продолжаемое за x^*, имеет вид

$$u(x) \sim \pm(\beta^2+\beta)^{\beta/2}|x^*-x|^{-\beta}, \quad x \to x^*.$$

Для любого $x^* \neq 0$ существует решение с такой асимптотикой.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ В КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Асхабов С.Н. (Майкоп)
E-mail askhabov@yandex.ru

Приводятся условия при которых интегральные и дискретные операторы с разностными ядрами обладают свойством положительности в комплексных пространствах Лебега L_p и ℓ_p, соответственно. Используя эти свойства методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказываются теоремы существования и единственности решения для соответствующих нелинейных интегральных и дискретных уравнений с разностными ядрами (ср. [1], [2]).

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 2$, $h \in L_1(R^1) \cap L_{p/2}(R^1)$ и $Re\,\hat{h}(x) \geqslant 0$. Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям*

1) $|F(x,z)| \leqslant c(x) + d\cdot|z|^{p-1}$, где $c \in L^+_{p'}(R^1)$, $d > 0$;

2) $Re\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\} \geqslant 0 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

то уравнение $u(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot F[t,u(t)]\,dt = f(x)$ имеет в $L_p(R^1)$ единственное решение при любом $f(x) \in L_p(R^1)$.

Аналогичный результат имеет место для дискретного уравнения $u_n + \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k}\cdot F(k,u_k) = f_n$, $n \in \mathbf{Z}$, в пространстве ℓ_p, для нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, и для нелинейного интегрального уравнения с ядром типа потенциала $h(x) = |x|^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$. При дополнительных ограничениях на нелинейность получены оценки нормы решения и изучен вопрос о приближенном решении таких уравнений различными итерационными методами. Приводятся примеры ядер и нелинейностей, удовлетворяющих всем требованиям доказываемых теорем.

Рассмотрены также случаи, когда операторы свертки, сингулярные интегральные операторы и операторы типа потенциала входят в уравнения нелинейно. Полученные результаты обобщены на случай соответствующих систем нелинейных интегральных уравнений.

Литература

1. Askhabov S.N. Integral equations of convolution type with power nonlinearity // Colloq. Math. 1991. Vol. 62, N1. P. 49-65.
2. Askhabov S.N. Singular integral equations with monotone nonlinearity in complex Lebesgue spaces // Z. Anal. Anwend. 1992. Vol. 11, N1. P. 77-84.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ[1]

Ахметжанов А.Р., Тарабанько Ю.В. (Москва)

E-mail yorik_t@mail.ru

Известно, что любое дифференциальное уравнение n-го порядка можно привести к системе n уравнений в форме Коши. Обратная процедура не только более трудоемкая, но и для некоторых случае просто невозможна. Пример такой системы, который часто приводится в литературе, следующий:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{y} = g(y). \end{cases}$$

В классе систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами третьего и выше порядков строятся более иллюстративные примеры. Пример такой системы, неэквивалентной одному уравнению относительно одной из переменных построен в [1]. Проводится исследование таких систем уравнений. Исследуется связь свойства неэквивалентности с формой Фробениуса матрицы системы [2]. Формулируются достаточные условия неэквивалентности. Проводится исследование особенностей управляемости и наблюдаемости таких систем. Доказывается, что система, неэквивалентная одному уравнению относительно любой переменной, неуправляема со скалярным управлением.

Литература

1. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматлит, 2003.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04-01-00461

2. *Гантмахер Р. Ф.* Теория матриц. М., Наука, 1988.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ С НЕРАВЕНСТВАМИ

Бабич О.В. (Ижевск)
E-mail lg@izh.com

Пусть $t_i = iT$, $T = ln\ 3$, $i = 0,\dots,5$, $\beta_{j\,i} \in R^1$, $j = 1,2$, $i = 1,\dots,4$, $y:\ [t_0,t_5] \to R^1$.

Задача

$$\begin{aligned}&\dot{y}(t) = y(t-T) + y(t) + y(t+T),\ t \in [t_1,t_4],\\ &y(t) \equiv const,\ t \in [t_0,t_1],\ y(t) \equiv const,\ t \in [t_4,t_5],\\ &\beta_{1\,i} \leqslant y(t_i) \leqslant \beta_{2\,i},\ i = 1,\dots,4,\end{aligned}$$

имеет непрерывное на $[t_0,t_5]$ и непрерывно дифференцируемое на $[t_i,t_{i+1}]$, $i = 1,\dots,3$, решение $y(\cdot)$ тогда и только тогда, когда

$$\max_{i=1,\dots,4} a_i\,\beta_{1\,i} \leqslant \min_{i=1,\dots,4} a_i\,\beta_{2\,i},$$

где

$$\begin{aligned}&a_1 = \frac{9\,ln\,3\ -11}{3(ln\,3\ -1)},\ a_2 = \frac{33-\ 27\,ln\,3}{9\,ln\,3 + 72\,ln^2\,3\ -107},\\ &a_3 = \frac{9\,ln\,3\ -11}{3(1+\,ln\,3)(6\,ln\,3\ -7)},\ a_4 = 1.\end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ППП

Багдуева Х.Н., Багдуева А.В. (Иркутск)
E-mail ayunab2000@mail.ru, bagdueva-av@isea.ru

Современное развитие науки и техники требует включения в курс высшей математики новых разделов, но число часов, отводимых на лекции и практические занятия, при этом не изменяется. Существует тенденция дальнейшего развития дистанционного образования, возрастания доли самостоятельной работы студентов. Меняются психологические особенности восприятия нового материала. Все это выдвигает необходимость изменения методики преподавания математики. Лекция не должна повторять учебник, она предназначена в первую очередь для того, чтобы облегчить студенту понимание основных идей дисциплины, развернуть перед ними связи данной темы с другими дисциплинами специальности, ознакомить с актуальными проблемами. Использование ЭВМ на лекциях дает возможность быстро получить решение задачи, проиллюстрировать его графически, что значительно повышает интерес студентов к изучаемому предмету. Особенно эффективным это оказывается при изучении задач математической физики. Здесь важно за громоздкими выкладками не потерять физическую сущность задачи. Студент на лекции должен получить представление о том, математической моделью какого процесса является данное уравнение. Какие методы существуют для его решения. Здесь уместно показать возможности пакетов прикладных программ: MathCad, MatLab, Mathematica. ППП позволяют показать зависимость решений от краевых условий, параметров математической модели и внешних воздействий визуально, оценить изучаемое явление качественно и количественно. Использование ЭВМ на лекциях позволяет с поразительной силой и точностью проникать в глубинные процессы явлений.

Литература

1. М.Г. Семененко. Введение в математическое моделирование.- М.: СОЛОН-Р, 2002.-112С.

2. М.Г.Семененко. Математическое моделирование в MathCad.- м.: АЛЬТЕКС-А, 2003.-208С.

ОЦЕНКА РАЗНОСТИ СУММ ФУРЬЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ФУНКЦИИ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ[1]

Бадков В.М. (Екатеринбург)

E-mail Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{\Phi_n(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная с 2π-периодическим весом φ система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации на $[0, 2\pi]$ методом Шмидта последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \ldots$. Если $F\varphi \in L^1$, то имеют смысл суммы

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проект 02–01–00783) и Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект НШ–1347.2003.1).

Фурье функции F по системе $\{\Phi_n(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$s_{\varphi,n}(F;\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\tau)\sum_{\nu=0}^{n}\Phi_\nu(\theta)\Phi_\nu(\tau)\varphi(\tau)d\tau \ (n=0,1,\ldots).$$

При $\varphi(\tau)\equiv 1$ сумма $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ есть обычная сумма Фурье $s_n(F;\theta)$. Разность $s_{\varphi,2n}(F;\theta)-s_n(F;\theta)$ оценена в [1] для $F\in L^\infty$ и φ со степенными особенностями. Основным результатом сообщения является

Теорема. *Пусть* $\varphi(\tau) := h(\tau)\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu(|\sin[(\tau-\theta_\nu)/2]|)$, *где* $-\pi<\theta_1<\ldots<\theta_m\leqslant\pi$; $w_\nu(t) := t^{\gamma_\nu}g_2(\nu;t)$; $\gamma_1,\ldots,\gamma_m\geqslant 0$; $g_2(\nu;t) := \int\limits_0^1\int\limits_0^1 g(\nu;tu_1u_2)\,du_1\,du_2$; $g(\nu;t)$ *— вогнутые модули непрерывности такие, что* $[g(\nu;t)]^{\frac{1}{2}}t^{-1}\in L^1[0,1]$ $(\nu=1,\ldots,m)$; *функция* $h\in C_{2\pi}$ *и положительна, а для ее модуля непрерывности выполнено условие* $\omega(h;t)t^{-1}\ln(2/t)\in L^1[0,1]$. *Тогда найдется константа* $C_1=C_1(\varphi)$ *такая, что для всех* $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ *и* $F\in L^\infty$ $|s_{\varphi,2n}(F;\theta)-s_n(F;\theta)|\leqslant C_1\prod_{\nu=1}^{m}\{w_\nu(|\sin[(\theta-\theta_\nu)/2]|+n^{-1})\}^{-\frac{1}{2}}\|F\|_\infty$, *причем, для* $F\in C_{2\pi}$ *норму* $\|F\|_\infty$ *в этом неравенстве можно заменить наилучшим равномерным приближением функции* F *тригонометрическими полиномами порядка не выше* n.

Заметим, что $4^{-1}g(\nu;t)\leqslant g_2(\nu;t)\leqslant g(\nu;t)$ $(t\geqslant 0;\ \nu=1,\ldots,m)$.

Литература

1. Бадков В.М. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам// Тр. МИАН. - 1980. - Т. 145. - С. 20-62.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК[1]

Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. (Казань)

E-mail Ildar.Badriev@ksu.ru; Oleg.Zadvornov@ksu.ru

Изучаются задачи об определении положения мягких [1] сетчатых оболочек, закрепленных по краям и находящихся под воздействием массовых и поверхностных сил, при наличии препятствия. Рассматриваются как плоские задачи (бесконечно длинная

[1]Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 03-01-00380, 04-01-00821) и КЦФЕ Минобразования России (гранты Е02-1.0-189, А03-2.8-660).

цилиндрическая оболочка), так и пространственные задача (оболочка образована двумя семействами нитей). Математически рассматриваемые задачи описываются вариационными и квазивариационными неравенствами. Исследована разрешимость этих неравенств для конкретных физических соотношений, связывающих относительные удлинения и усилия в нитях. Для решения рассматриваемых задач предложены итерационные методы, которые были реализованы численно. Для плоских задач в случае выпуклого препятствия была исследована сходимость этих методов (см. [2]). Проведены численные эксперименты, их результаты хорошо согласуются с известными (см. [1]). Кроме того, для ряда модельных задач были построены точные решения, проведенное сравнение их с приближенными решениями также подтвердило эффективность предложенных методов.

Литература

1. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. - М.: Наука, 1990. - 206 с.

2. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М. Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомононными операторами // Дифф. уравн. - 2001, - Т. 37. - N 7, - С. 891-898.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЦЕЛИКАХ ОСТАТОЧНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ НЕФТИ[1]

Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н. (Казань)

E-mail Ildar.Badriev@ksu.ru; Oleg.Zadvornov@ksu.ru

Изучаются вариационные неравенства второго рода с обратно сильно монотонными операторами и выпуклыми недифференцируемыми функционалами в гильбертовых пространствах, возникающие при математическом моделировании задач об определении целиков остаточной вязкопластичной нефти ([1]). Для их решения предложены метод итеративной регуляризации ([2]), когда недифференцируемый функционал аппроксимируется регуляризованным дифференцируемым, а также метод декомпозиции ([3]), позволяющий разделить задачи обращения оператора двойственности и минимизации функционала. Указанные методы были реализованы численно, проведен сравнительный анализ этих

[1]Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 03-01-00380, 04-01-00821) и КЦФЕ Минобразования России (гранты Е02-1.0-189, А03-2.8-659).

методов. Для ряда модельных задач были построены точные решения. Сравнение приближенных решений с точными подтвердило эффективность обоих предложенных итерационных методов.

Литература

1. Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В. Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. - Томск: Изд-во Томского ун-та. - 1989. - 196 с.

2. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Ismagilov L.N. On the methods of iterative regularization for the variational inequalities of the second kind// Computational Methods in Appl. Math. - 2003, - Is.3. - N. 2. - P.223-234.

3. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами// Дифф. уравнения. - 2003, - Т. 39. - N 7. - С. 888-895.

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Баева С.А. (Воронеж)

На множестве $R_{++} = \{(x,t) : x_1 \in R^1,\ x_2 \in (0,+\infty),\ t \in (0,+\infty)\}$ рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & = & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}) + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & = & 0 \\ \alpha^2 \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial u_2} & = & 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $\alpha \neq 0$, $\nu > 0$ постоянные числа. Задача состоит в исследовании гладкости решения системы уравнений (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$u_1(x_1, x_2, +0) = 0,\ u_2(x_1, x_2, +0) = 0,\ u_3(x_1, x_2, +0) = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u_1(x_1, +0, t) = 0,\ u_3(x_1, +0, t) = w(x, t) \quad (3)$$

где $w(x_1, t) = P_1(x_1) \cdot P_2(t)$, причем $P_1(x_1)$ - характеристическая функция некоторого отрезка $[-1, 1]; P_2(t) \in C^\infty(0; +\infty)$ и имеет компактный носитель, $P_2(0) = 0$.

При выполнении этих условий доказано, что существует обобщенное решение $(u_1(x_1,x_2,t), u_2(x_1,u_2,t), u_3(x_1,x_2,t))$ задачи (1)-(3) такое, что $u_j(x_1,x_2,t)$, $j = 1,2,3$, - непрерывные функции при всех $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$. Причем

$$\lim_{\substack{x_2\to+0\\ x_1\to\pm1}} |u_j(x_1,x_2,t)| = +\infty \quad j = 1,2; \lim_{x_2\to+0} u_3(x_1,x_2,t) = C_3(x_1,t),$$

где $C_3(x_1,t)$ - непрерывная ограниченная функция при всех $x_1 \in R^1$, $t \geqslant 0$.

МНОГОШАГОВЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ СО СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ

Баранова Е.М. (Санкт-Петербург)

E-mail barlena@hotmail.ru

Стохастические игры представляют собой подкласс позиционных игр (игр в развернутой форме). Здесь, также как и в детерминированных динамических и дифференциальных играх возникает проблема, аналогичная проблеме динамической устойчивости или состоятельности во времени рассматриваемых кооперативных принципов оптимальности. Содержательный смысл этой проблемы состоит в том, что как оказалось в подавляющем большинстве случаев, оптимальное решение игры, выбранное в соответствии с некоторым кооперативным принципом оптимальности (ядро, НМ-решение, вектор Шепли и др.) в начале стохастической игры, может потерять свою оптимальность с точки зрения того же принципа оптимальности в некоторой под игре, развивающейся из начального состояния на кооперативном поддереве. Последнее обстоятельство может привести к желанию пересмотра первоначального выбранного кооперативного решения и в результате к нарушению устойчивости всего процесса игры. Такой феномен мы называем позиционной несостоятельностью выбранного кооперативного принципа оптимальности. Игра задана на конечном дереве G. В каждой вершине z дерева G задана одновременная игра n лиц $\Gamma(z)$. В работе предусмотрена возможность окончания игры в каждой вершине дерева игры, исследуется позиционная состоятельность вектора Шепли и в случае ее нарушения предлагается метод регуляризации, основанный на построении новой неотрицательной процедуры распределения вектора Шепли вдоль ветвей кооперативного поддерева игры. Доказана теорема о позиционной состоятельности вектора Шепли.

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. М: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998.

2. Петросян Л.А., Шевкопляс Е.В. Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью. // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2000, вып. 4(№25).

3. Petrosjan L.A. Cooperative Stochastic Games. //Proceeding of the "10th International Symposium on Dynamic Games and Applications", St.Petersburg, 2002.

О НЕОДНОРОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЯДРОМ НА ПОЛУОСИ

Барсукова В.Ю. (Краснодар)

E-mail vub@math.kubsu.ru

Пусть $K(t,s)$ – $n \times n$ - матрица, удовлетворяющая условиям:
1. Существует такое $\omega > 0$, что $K(t+\omega, s+\omega) = K(t,s)$ при всех $t \in R^1 \backslash \{k\omega, k \in Z\}$ и почти всех $s \in R^1$.
2. При всех $t \in R^1 \backslash \{k\omega, k \in Z\}$ $K(t,s)$ суммируема по $s \in R^1$.
3. $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ (t,t+h \in (0;\omega))}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|K(t+h,s) - K(t,s)\| ds = 0$, равномерно на $(0;\omega)$.

В пространстве ограниченных функций, непрерывных всюду, кроме, возможно, точек вида $\{k\omega\}$, изучается уравнение

$$x(t) = \int\limits_0^{\infty} K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Определим операторнозначную функцию

$K(\xi) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} \xi^p K_p$, где $K_p x = \int\limits_0^{\omega} K(t, s-p\omega)x(s)ds$, $t \in [0;\omega]$.

Будем считать, что $I - K(\xi)$ допускает при $|\xi| = 1$ факторизацию $I - K(\xi) = (I + K_-(\xi))D(\xi)(I + K_+(\xi))$, $D(\xi) = P_m + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \xi^{\chi_j} P_j$ (см.[1]). Использование факторизации позволило установить условия, при которых однородное уравнение, соответствующее (1), имеет конечномерное пространство решений. Пусть

$$D_{+}^{-1}(\xi) = P_m + \sum_{j=1}^{m-1} \xi^{-\max\{\chi_j;0\}} P_j,\ D_{-}^{-1}(\xi) = P_m + \sum_{j=1}^{m-1} \xi^{-\min\{\chi_j;0\}} P_j.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. *1. Если в факторизации $I - K(\xi)$ оператор $D(\xi) = I$ (I – единичный), то уравнение (1) имеет и притом единственное решение, принадлежащее рассматриваемому пространству.*

2. Если оператор $D(\xi) \neq I$ и уравнение разрешимо, то одно из его решений имеет вид $x(t) = (I + \widetilde{K}_{+})^{-1} \widetilde{D}_{-}^{-1} \Pi_{+} \widetilde{D}_{+}^{-1} (I + \widetilde{K}_{-})^{-1} f_{+}(t)$, $t \geqslant 0$, где $\widetilde{K}_{+}, \widetilde{K}_{-}$, $\widetilde{D}_{+}^{-1}, \widetilde{D}_{-}^{-1}$ – интегральные операторы, порождаемые функциям $K_{\pm}(\xi), D_{\pm}^{-1}(\xi)$, соответственно.

Литература

1. Гохберг И. Ц. *Задача факторизации оператор-функций* // Изв. академии наук СССР, серия математич. – 1964 – Т. 28. – С. 1055–1082.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КОНУСОМ

Бахтин И.А. (Воронеж)

В вещественном полном счетно-нормированном пространстве E с конусом K приводятся новые признаки существования положительных собственных векторов линейных положительных операторов. Полученные результаты применены к одному классу интегральных операторов.

Теорема 1. Пусть

1) в вещественном полном счетно-нормированном пространстве E воспроизводящий конус $K \subset E$ нормален;

2) линейный положительный оператор A ($AK \subset K$) вполне непрерывен и u - ограничен сверху на конусе K;

3) существуют элемент $v > 0$ и числа $p \in N$ и $c > 0$, такие, что $A^p v \geqslant cv$.

Тогда существуют элемент $x_0 > 0$ и число $\lambda_0 > 0$, такие, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

Теорема 2. Пусть

1) в вещественном полном счетно-нормированном пространстве E воспроизводящий конус $K \subset E$ нормален и линеарен;

2) линейный оператор A положителен и монотонно компактен на конусе K.

Тогда существуют элемент $x_0 > 0$ и число $\lambda_0 > 0$, такие, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

Теорема 3. Пусть

1) $C_{[0,\infty)}$ - счетно-нормированное пространство непрерывных в полуинтервале $[0,\infty)$ функций $u = x(t)$ с полунормами:

$$\|x\|_n = \max_{t\in[0,n]} |x(t)| \quad (n \in N)$$

и с конусом $K \subset C_{[0,\infty)]}$ неотрицательных функций $x(t) \geqslant 0$;

2) ядро $K(t,s)$ интегрального оператора

$$Ax(t) = \frac{1}{t}\int_0^t K(t,s)x(s)ds$$

и функции $a(t), b(t)$ непрерывны и положительны соответственно на множествах $[0,\infty) \times [0,\infty)$ и $[0,\infty)$ существуют числа $m > 0$, $M > 0$ и $L > 0$, такие, что

$$m \cdot a(t) \cdot b(s) \leqslant K(t,s) \leqslant M \cdot a(t) \cdot b(s) \quad (t, s \in [0,\infty))$$

и

$$\frac{1}{t}\int_0^t a(s)b(s)ds \leqslant L \quad (t \in (0,\infty))$$

Тогда существуют элемент $x_0 = x_0(t) \in K \setminus 0$ и число $\lambda_0 > 0$, такие, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

О БИФУРКАЦИИ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ ФАЗ В СЛУЧАЕ ДВУХМОДОВОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Белых Ф.А. (Воронеж)
E-mail Feodor_belyh@mail.ru

Хорошо известно, что в сегнетоэлектрической теории кристаллов рождение и смена точек минимума интеграла энергии соответствуют фазовым переходам второго или первого рода. Бифуркацию экстремалей можно весьма эффективно исследовать редукцией к ключевой функции на конечномерном пространстве, порожденном основными модами [1], [2] . Таким способом удобно изучать топологические и аналитические характеристики теоретически допустимых бифурцирующих фаз (кратности, индексы Морса, топологические индексы), а также каустики кратных критических фаз.

Для распространенной в теории кристаллов особенности $n-$мерной сборки (тип которой определяется квартичной частью тейлоровского разложения ключевой функции) при $n \leqslant 3$ получены достаточно полные списки $bif-$раскладов [1], [2]. Значительная часть из них трактуется как разрушения непрерывной симметрии.

При $n = 3$ совокупность особых точек, в которых матрица Гессе ключевой функции имеет три положительных собственных значения, определяет суммарное количество стабильных и метастабильных фаз кристалла. Они также представляющим интерес при изучении процесса переключения доменных структур, строения доменных границ и т.д.

При описании раскладов фаз кристаллов часто допускаются повторные редукции к функциям от одной или двух переменных. На основе повторных редукций можно давать описание максимальных $bif-$раскладов и каустик. В данном сообщение приведены результаты исследования каустики двумерной сборки, соответствующей четным возмущениям.

Литература

[1] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки// Известия ВУЗов. Математика. – 1997. Казань, изд. Форт-Диалог. Т.2. – С.35-46.

[2] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков// В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж, ВГУ, 2000. – С. 41-57.

О 4-МЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ЛИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ $M(2,\mathbb{C})$[1]

Белых Ф.А., Борзаков А.Ю., Лобода А.В. (Воронеж)

E-mail lob vgasu.vrn.ru

В связи с изучением однородных вещественных подмногообразий комплексных пространств представляет интерес задача описания вещественных подалгебр Ли комплекснозначных матричных алгебр.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 03-01-96022(р-2003-ЦЧР)).

В [1] представлен полный список трехмерных вещественных подалгебр Ли алгебры . Отметим, что все они, кроме двух классических алгебр $su(2)$ и $su(1,1)$ сводятся к некоторым верхнетреугольным алгебрам. Несложно показать, что все одномерные и двумерные подалгебры $M(2,\mathbb{C})$ также подобны верхнетреугольным алгебрам.

Теорема 1 *Всякая 4-мерная вещественная подалгебра Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$ подобна либо некоторой верхнетреугольной алгебре, либо алгебре $M(2,\mathbb{R})$, либо одной из алгебр ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - координаты в алгебре):*

$$g_{\xi}^{(4)} = \left\{ \left\| \begin{matrix} (\alpha + i\beta) & \gamma \\ \delta & -\alpha + (i+\xi)\beta \end{matrix} \right\| \right\}, \ \xi \in \mathbb{R}.$$

При доказательстве этой теоремы используется процедура "расширения"алгебр меньшей размерности. Например, если 4-мерная алгебра $g^{(4)}$ не является верхнетреугольной, то она может быть представлена в виде $g^{(4)} = E_1 + h^{(3)}$ или $g^{(4)} = E_1 + E_2 + h^{(2)}$.

Здесь $h^{(3)}$ (или $h^{(2)}$) - некоторая трехмерная (соответственно, двумерная) верхнетреугольная алгебра, E_1, E_2 - некоторые матрицы, не являющиеся верхнетреугольными.

Рассмотрение в такой ситуации известных списков трехмерных и двумерных алгебр позволило относительно легко получить сформулированный в виде теоремы качественный результат, а также построить полное описание всех 4-мерных подалгебр $M(2,\mathbb{C})$.

1. Loboda A.V. Tree-dimensional Lie subalgebras of matrix algebra $M(2,\mathbb{C})$ // "Russian Journal of mathematical Physics". 2003, V. 10, N 4, P. 495 - 500.

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ, НЕ ОБЛАДАЮЩИМ СВОЙСТВОМ ВЫПУКЛОСТИ ПО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЮ ЗНАЧЕНИЙ[1]

Беляева О.П., Булгаков А.И. (Тамбов)
E-mail aib@tsu.tmb.ru

В последние годы интенсивно изучаются включения, правая часть которого состоит из алгебраической суммы значений "хорошего" (имеющие замкнутые образы) и "плохого" (не обладающего свойством замкнутости и выпуклости значений) многозначных отображений. Причем "плохое" многозначное отображение представляет суперпозицию линейного интегрального оператора и многозначного отображения с выпуклыми по переключению значениями (см., например, [1]). Если отказаться от требования выпуклости по переключению значений многозначного отображения, то все существующие в настоящее время методы исследований многозначных включений неприменимы для таких возмущенных включений. В докладе утверждается, что иногда выход из подобной ситуации можно найти с помощью введения обобщенного решения для таких включений.

Для того, чтобы более точно сформулировать обобщенное решение приведем необходимые обозначения и определения. Пусть R^n – пространство n – мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $L^n[a,b]$, $C^n[a,b]$ пространство суммируемых непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$, $2^{L^n[a,b]}(2^{C^n[a,b]})$ – множество всех непустых, ограниченных подмножеств пространства $L^n[a,b]$ $(C^n[a,b])$.

Будем говорить, что множество $\Phi\subset L^n[a,b]$ выпукло по переключению (разложимо), если для любого измеримого по Лебегу множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ и любых $x,y\in\Phi$ справедливо включение $\chi(\mathcal{U})x+\chi([a,b]\backslash\mathcal{U})y\in\Phi$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответсвующего множества.

Пусть $W\subset L^n[a,b]$. Обозначим через ΠW совокупность всевозможных конечных комбинаций $\chi(\mathcal{U}_1)x_1+\chi(\mathcal{U}_2)x_2+\ldots+\chi(\mathcal{U}_j)x_j$ элементов $x_i\in W$, в которых $\mathcal{U}_i\subset[a,b]$, $i=1,2,\ldots,j$ – непересекающиеся измеримые множества, удовлетворяющие условию $[a,b]=\bigcup\limits_{i=1}^{j}\mathcal{U}_i$. Обозначим $\overline{\Pi}W$ замыкание в пространстве $L^n[a,b]$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00324), Министерства Образования РФ (проект № Е02-1.0-212)

множества ΠW. Отметим, что множество $\overline{\Pi}W$ – наименьшее замкнутое выпуклое по переключению множество, содержащее множество W; множество $\overline{\Pi}W$ будем называть замкнутой выпуклой по переключению оболочкой множества W.

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi : C^n[a,b] \to 2^{C^n[a,b]}$, $\Phi : C^n[a,b] \to 2^{L^n[a,b]}$ многозначные отображения, а $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ линейный интегральный непрерывный оператор.

Под обобщенным решением включения (1) будем понимать непрерывную функцию $x : [a,b] \to R^n$, для которой существуют $v \in \Psi(x)$ и $z \in \overline{\Pi}\Phi(x)$, удовлетворяющие равенству $x = v + Vz$.

В докладе исследуются свойства обобщенных решений включения (1).

Литература

1. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т. 189, №6, С. 3-32.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ, НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ КЛАСС ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Бережной Е.И. (Ярославль), Перфильев А.А. (Москва)

E-mail ber@uniyar.ac.ru, alex0304@mail.ru

Основной пример дифференциального базиса, который не дифференцирует класс характеристических функций измеримых множеств, принадлежит А. Зигмунду. Используя довольно тонкие оценки конструкции "дерева Перрона", он показал, что базис из прямоугольников с произвольно ориентированными сторонами не дифференцирует L^∞. С другой стороны, этот базис дифференцирует все характеристичесие функции открытых и замкнутых множеств.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 02-01-00428

В настоящем докладе приведен простой пример дифференциального базиса, который не дифференцирует даже класс характеристических функций открытых множеств.

Дифференциальным базисом $B(t)$ в точке t называется семейство содержащих t ограниченных подмножеств положительной меры, удовлетворяющих условию $diam\{B_k \in B(t)\} \to 0$. Дифференциальным базисом **B** называется объединение указанных семейств. Говорят, что базис **B** дифференцирует интеграл от f, если почти всюду верхняя производная интеграла относительно **B** совпадает с нижней производной интеграла относительно **B**.

Теорема. *Пусть* $Q_0 = [0,1]*[0,1]$ *- единичный квадрат на плоскости. Тогда существуют дифференциальный базис* $\mathbf{B}_0$ *и открытое множество* U *такое, что базис* $\mathbf{B}_0$ *не дифференцирует интеграл от характеристичекой функции* U.

Идейно конструкция дифференциального базиса напоминает построения из работы [1]. Каждый элемент дифференциального базиса $\mathbf{B}_0$ представляет собой объединение двух квадратов с одинаковыми длинами сторон.

Литература

1. Бережной Е.И., Перфильев А.А. Различение симметричных пространств и L^∞ с помощью дифференциального базиса. // Матем. заметки. 2001. Т. 69. Вып. 4. С. 515 - 523.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА ПУАНКАРЕ-ПЕРРОНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Беседина С.В. (Воронеж)
E-mail besedina_sv@mail.ru

Данная работа посвящена модификации метода Пуанкаре-Перрона для доказательства разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. В настоящее время результаты исследования получены для случая, когда на множество накладывается ряд ограничений, однако в дальнейшем планируется обобщение этих результатов для более общего случая.

Рассматривается связное множество $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, являющееся подмножеством в $\mathbb{R}^3$, составленное из двумерных многогранников,

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ, проект 04-01-00697

прочно примыкающих друг к другу. На Ω задается стратификация, составленная из двумерных стратов σ_{2i} (многогранники) и их граничных отрезков σ_{1i} - одномерных стратов. Граница множества состоит из одномерных стратов.

На Ω рассматривается задача Дирихле

$$\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = \varphi,$$

$p = const$ в пределах каждого страта.

В основе метода Пуанкаре-Перрона лежит теорема о среднем, неравенство Харнака и формула Пуассона в шаре. Уже при введении понятия шара (вид которого может быть достаточно необычным) появляется ряд особенностей, что связано с достаточно сложной геометрией рассматриваемого множества. В результате необходимые теоремы удалось доказать только для шаров достаточно малого радиуса, но этого оказалось достаточно для доказательства разрешимости.

Литература

[1] Пенкин О.М. О принципе максисума для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. // Дифференц. уравн., 1998.-Т.34-№10.-С.1433-1434.

[2] Хейман У. Кенеди П. Субгармонические функции.,М.:Мир., 1980, 304 с.

[3] F.John. Partial Differential Eqation. Springer Verlag, 1986, 250 P.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРА КРУЧЕНИЯ

Беспалов М.С. (Владимир)
E-mail bespalov@vpti.vladimir.ru

Пусть $\mathcal{F}$ – унитарный линейный оператор конечного порядка ($\mathcal{F}^N = I$) в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Теорема. *Операторы* $\mathcal{P}_m = \frac{1}{N}(I + q^m\mathcal{F} + q^{2m}\mathcal{F}^2 + \ldots + q^{(N-1)m}\mathcal{F}^{N-1})$, *где* $q = \exp(\frac{2\pi i}{N})$, $m = 0, 1, \cdots, N-1$, *являются проекторами для разложения* $H = H_0 \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_{N-1}$ *в прямую сумму инвариантных подпространств:* $\mathcal{F}[f] = q^{-m} f$ *для любой* $f \in H_m$.

Матричный вид данного утверждения. Пусть W – матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ) порядка N, F – вектор-столбец степеней оператора $\mathcal{F}$, P – вектор-столбец проекторов. Тогда $P^* = P$, $P \cdot P^T = W \cdot F \cdot F^T \cdot W = D$, где D – диагональная квадратная матрица с проекторами $\mathcal{P}_m$ на диагонали. Очевидно, что $F = W^{-1}P$, где W^{-1} – матрица обратного ДПФ: $W^{-1} = N \cdot W^*$. Соотношение инвариантности $\mathcal{F}^k\mathcal{P}_m = q^{-km}\mathcal{P}_m$ запишется в виде $F \cdot P^T = W^{-1} \cdot D$ или как спектральное разложение [1]: $\mathcal{F} = \int_0^{2\pi} e^{-i\lambda} dE_\lambda$.

Примеры. Оператор преобразования Фурье является [1] оператором четвертого порядка. Оператор Λ-мультипликативного преобразования Фурье [2], его частные случаи – операторы мультипликативного преобразования Фурье [3] и операторы Крестенсона-Леви, есть операторы четвертого порядка в $L^2[0,\infty)$. Обобщим данное утверждение. Интегральный оператор с ядром в виде скрещенного произведения любого ортонормированного базиса $L^2[0,1]$ на себя имеет второй порядок, если пространство и функции базиса действительнозначные, и четвертый порядок для комплексных функций базиса. Данная конструкция не обобщается на преобразования с ядром в виде скрещенного произведения двух разных систем. Однако при кодировании цифровой информации с помощью ортогональных преобразований можно строить ядро преобразования как скрещенное произведение заданной системы (например системы Уолша) со своей перестановкой и ограничиваться конечномерным пространством финитных ступенчатых функций. В этом случае $N = 2^n$ $(n > 2)$ и матрица W есть матрица ДПФ классического вида, для которого широко применяются алгоритмы "быстрого"ДПФ. Разложение по собственным функциям оператора позволяет предложить альтернативные алгоритмы "быстрого"дискретного преобразования.

Литература

1. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.:Мир.1979.

2. Ефимов А.В., Поспелов А.С., Умняшкин С.В. Труды МИАН В.А.Стеклова, 1997, т.219, с.137-182.

3. Беспалов М.С. //Деп. в ВИНИТИ №5826-83, 27с.

О ТЕОРЕМАХ СТОУНА И БИШОПА

Билалов Б.Т. (ИММ НАН Азербайджана, Баку)
E-mail b-bilalov@mail.ru

Пусть M-некоторый хаусдорфовый компакт, $C_c(M)$ ($C_r(M)$) банаховая алгебра комплекснозначных (действительных) функций с sup-нормой. Для $K \subset M$ и $\Phi \subset C_c(M)$ примем обозначения:

$$C_K^0(M) \equiv \{f \in C_c(M) : f|_K \equiv 0\};$$

$$L_f(x) \equiv \{y \in M : f(y) = f(x)\};$$

$$K_\Phi(x) \equiv \bigcap_{f:f\in\Phi} L_f(x); \; N_f \equiv \{x \in M : f(x) = 0\};$$

$$C_\Phi(M) \equiv \left\{f \in C_c(M) : f|_{K_\Phi(x)} \equiv f(x)\right\};$$

$N_\Phi \equiv \bigcap\limits_{f:f\in\Phi} N_f$; $\mathrm{Re}A \equiv \{\varphi : \varphi = \mathrm{Re}f, f \in A\}$; $\mathcal{B}_r$-замыкание $\mathrm{Re}A$ в $C_r(M)$; $A_c \equiv \{\varphi : \varphi = f + \overline{g}, f, g \in A\}$; $\mathcal{B}_c$-замыкание A_c в $C_c(M)$; $\mathcal{B}^r$-замыкание алгебры $A^r \subset C_r(M)$ в $C_r(M)$.

Имеет места следующая

Theorem 1 *Пусть $M \subset C$-компакт, $A^r \subset C_r(M)$-некоторая подалгебра. Тогда $\mathcal{B}^r \equiv C^0_{N_{A^r}}(M) \cap C_{A^r}(M)$.*

Аналогичная теорема имеет места и в комплексном случае.

Theorem 2 *Пусть M-компакт, $A \subset C_c(M)$ некоторая подалгебра. Тогда $\mathcal{B}_c \equiv C_c(M)$ только в том случае, когда $\mathcal{B}_r \equiv C_r(M)$.*

Theorem 3 *Пусть $M \subset C$-компакт, $A \subset C_c(M)$ некоторая подалгебра. Если $\mathcal{B}_c$ образует алгебру, то $\mathcal{B}_r \equiv C^0_{N_A}(M) \cap C_A(M)$ (правая часть содержит только действительные функции).*

Эти теоремы являются соответствующими обобщениями аппроксимационных теорем Стоуна и Бишопа (см. напр. [1]).

Литература

1. Рудин У. Функциональный анализ, М., "Мир", 1975, с. 448.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $\mathbb{R}^N$ И ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ[1]

Блошанский И.Л. (Москва)
E-mail i.bloshn@g23.relcom.ru

1. Обозначим через $\mathbb{F} = \mathbb{F}_N = \left\{A_k^{(j)}\right\}_{k,j}$ матрицу $N \times M$ ($N \geqslant 2$, $M \geqslant 6$), элементами которой являются функциональные пространства $\mathcal{A} = \mathcal{A}_k^{(j)}$, $k = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$. При этом пространство $\mathcal{A}_k^{(j)}$ либо L_1, либо некоторое линейное подпространство L_1. Например, $\mathcal{A}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1^{(2)} = L_1$; $\mathcal{A}_2^{(2)} = L_\infty$; $\mathcal{A}_2^{(4)} = L_2$; $\mathcal{A}_2^{(5)} = L_p$, $1 < p < 2$; $\mathcal{A}_2^{(6)} = L(\log^+ L)^2$; $\mathcal{A}_k^{(2)} = H^{\omega^{(k)}}$, где $\omega^{(k)} = \omega^{(k)}(\delta)$ – некоторые модули непрерывности.

Далее, для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant N$, определим класс невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^N$, матрицы $\mathbb{A} = \{a_{l,m}\}_{l,m=1}^N$ которых удовлетворяют условию: существуют $m_1, \ldots, m_k$, $1 \leqslant m_1 < \ldots < m_k \leqslant N$ такие, что $\min\limits_{1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_{k-1} \leqslant N} \max\limits_{\substack{1 \leqslant l \leqslant N, \\ l \neq \nu_1, \ldots, \nu_{k-1}}} \sum\limits_{s=1}^{k} |a_{l,m_s}| < 1$. Обозначим этот класс через $\Psi = \Psi_k$. Обозначим также через $\Psi = \Psi_0$ группу вращений $\mathbb{R}^N$ относительно начала координат.

2. Изучается задача: как изменяются множества сходимости и расходимости всюду или почти всюду кратного тригонометрического ряда (интеграла Фурье) функции f, принадлежащей одному из пространств $\mathcal{A}$ (элементов матрицы $\mathbb{F}$) и равной нулю на некотором множестве положительной меры $\mathfrak{A} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, в зависимости от преобразования $\psi \in \Psi$, где $\Psi \in \mathcal{F} = \{\Psi_k\}_{k=0}^N$? Таким образом, мы хотим дать описание пары $(\mathcal{A}, \Psi)$.

3. Нами сформулированы результаты, описывающие взаимосвязь "гладкости" (в рамках матрицы $\mathbb{F}$) функции f ($f = 0$ на $\mathfrak{A}$) и преобразования ψ (в рамках множества $\mathcal{F}$) для кратных разложений Фурье.

4. Ранее (см., например, [1] - [3]) данная задача исследовалась нами для Ψ_0, а также линейных преобразований, т.е. для классов $\widetilde{\Psi}_k$, $k = 1, \ldots, N$, определяемых "более обременительными", чем классы Ψ_k, условиями на элементы матрицы $\mathbb{A}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00428).

КОНЕЧНЫЕ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛЫ НА БУЛЕАНАХ НАД ПОЛУКОЛЬЦАМИ
(методические аспекты)

Блюмин С.Л. (Липецк)
E-mail slb@stu.lipetsk.su

Изучение мер и интегралов полезно начинать с их конечных аналогов, применяемых в статистической механике [1], идемпотентной математике [2], искусственном интеллекте [3] и других областях. Пусть $(\Omega, \Im(\Omega))$ и $(\Im(\Omega), \Im(\Im(\Omega))$ - измеримые пространства (Ω - конечное множество, $\Im(\Omega)$ - его булеан, $\Im(\Im(\Omega))$ - второй буле- ан), $\varphi, g : \Omega \to S$ и $\Phi, G : \Im(\Omega) \to S$ - функции ($S = (S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ - полукольцо). По φ строятся мера $m_\varphi : \Im(\Omega) \to S$, $m_\varphi(A) = \bigoplus_{\omega\in A}\varphi(\omega)$, $A \in \Im(\Omega)$, и интеграл $I(\Omega, S, m_\varphi, g) = \bigoplus_{\omega\in\Omega} g(\omega)dm_\varphi = \bigoplus_{\omega\in\Omega}(g(\omega) \odot \varphi(\omega))$ на Ω. По Φ строятся мера $M_\Phi : \Im(\Im(\Omega)) \to S$, $M_\Phi(\wp) = \bigoplus_{A\in\wp}\Phi(A)$, $\wp\in\Im(\Im(\Omega))$, и интеграл $I(\Im(\Omega), S, M_\Phi, G) = \bigoplus_{A\in\Im(\Omega)} G(A)dM_\Phi = \bigoplus_{A\subseteq\Omega}(G(A) \odot \Phi(A))$ на $\Im(\Omega)$. Если $S = \mathbf{R} = (\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$ и $\varphi(\omega) \geqslant 0, \sum_{\omega\in\Omega}\varphi(\omega) = 1$, то $m_\varphi(A) = \sum_{\omega\in A}\varphi(\omega) = P(A)$, $I(\Omega, \mathbf{R}, P, g) = \sum_{\omega\in\Omega} g(\omega)\cdot\varphi(\omega)$; если [2] $S = \mathbf{R}_{\max} = (\mathbf{R}\cup\{-\infty\}, \oplus = \max, \odot = +, \mathbf{0} = -\infty, \mathbf{1} = 0, \leqslant)$, так что $\varphi(\omega) \geqslant \mathbf{0}$, то $m_\varphi(A) = \max_{\omega\in A}\varphi(\omega)$ и $I(\Omega, \mathbf{R}_{\max}, m_\varphi, g) = \max_{\omega\in\Omega}(g(\omega) + \varphi(\omega))$ - примеры идемпотентных меры и интеграла. Если [1] $S = \mathbf{R}$ и $\Phi(A) \geqslant 0, \sum_{A\in\Im(\Omega)}\Phi(A) = 1$, то $M_\Phi(\wp) = \sum_{A\in\wp}\Phi(A) = \Pi(\wp)$ - состояние на Ω и $I(\Im(\Omega), \mathbf{R}, \Pi, G) = \sum_{A\subseteq\Omega} G(A)\cdot\Phi(A)$ - интеграл на $\Im(\Omega)$; если [3] $S = ([0,1], \max, \min, 0, 1, \leqslant)$ и $\Phi(\emptyset) = 0, \Phi(\Omega) = 1, \Phi(A) \leqslant \Phi(B), A \subseteq B$ - нечеткая мера на Ω, то $M_\Phi(\wp) = \max_{A\in\wp}\Phi(A)$ - нечеткая мера на $\Im(\Omega)$ и $I(\Im(\Omega), S, M_\Phi, G) = \max_{A\subseteq\Omega}(\min(G(A), \Phi(A)))$ - нечеткий интеграл Сугено (здесь $G(A) = \min_{\omega\in A}(g(\omega))$); еще пример - интеграл Шоке [3]. Изучение конечных мер и интегралов представляет как методический, так и научный интерес.

Литература

1. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. - М.: Мир, 1977. - 126 с.

2. Литвинов Г.Л., Маслов В.П. Идемпотентная математика // Современный анализ и его приложения: Тез. докл. ВЗМШ. - Воронеж: ВГУ, 2000. - С.20-22.

3. Grabisch M., Murofushi M., Sugeno M. Fuzzy Measures and Integrals - Theory and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 40. - Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. - 543 p.

ЧАСТИЧНАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ТОЛЩИНОЙ

Богданова Л.М., Кириченко В.Ф. (Саратов)

Объектом исследования является первая краевая задача для системы дифференциальных уравнений, определяющих, в рамках асимптотически согласованной модели, условия движения однородной пологой изотропной оболочки в смешанной форме. Определение задачи и доказательство ее корректности даны в работе [1]. Следующая теорема доказывает частичную диссипативность эволюционных уравнений из работы [1].

Теорема. Пусть $\partial\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения и выполняются такие условия:

1) $\operatorname{ess\,sup}|g(x_1, x_2, t)|_\Omega < \infty$; $\psi_{30} \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_{30} \in H_0^2(\Omega)$; $\varphi_{i1} \in H_0^1(\Omega)$, $\psi_{i1} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$; $h(t) \in C^1([t_0, t_1])$

2) матрица коэффициентов при производных второго порядка от искомых функций u_{30}, u_{i1}, $i = 1, 2$ по переменной t в системе уравнений (1) (из работы [1]), определяет положительно определенную квадратичную форму $\forall t \in [t_0, t_1]$. Тогда 1) существует хотя бы одно решение $\{\tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{30}, \tilde{F}\}$ задачи (1)-(4) (из работы [1]), при этом $\tilde{F}, \tilde{u}_{30} \in L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega))$; $\tilde{u}_{i1}, \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \in L^\infty(t_0, t_1, H_0^1(\Omega))$; $\frac{\partial \tilde{u}_{i1}}{\partial t} \in L^\infty(t_0, t_1, L^2(\Omega))$; $\tilde{u}_{i1}, \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \in L^2(t_0, t_1, H_0^1(\Omega))$; $i = 1, 2$;

2) решение задачи может быть продолжено на интервал (t_0, ∞);

3) система эволюционных уравнений (1)-(3) (из работы [1]) частично диссипативна при всех допустимых в теореме начальных условиях (4) (из работы [1]), то есть при произвольных φ_{i1}, ψ_{i1}, ψ_{30}, φ_{30}, из указанного класса функций, найдется такое $t_2 > t_0$ и вещественное число $\gamma > 0$, что для почти всех $t > t_2$ выполняется условие

$$\left|\frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t}\right|_\Omega^2 + |\Delta \tilde{u}_{30}|_\Omega^2 \leqslant \gamma^2, \quad \text{где } \left|\ \right|_\Omega \text{ — норма в пространстве } L^2(\Omega)$$

Литература

1. Богданова Л.М. Кириченко В.Ф. Корректность первой краевой задачи для уравнений движения пологой оболочки с зависящей от времени толщиной // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб., Саратов, СГТУ, 2003 г., с. 89-96.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПАКТ - КАРТ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ К РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЕГЭ

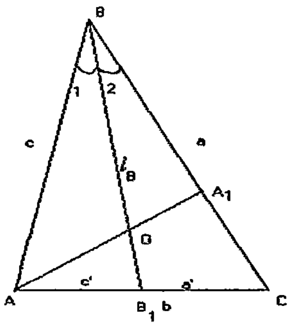
Бондаренко Т.Е. (Воронеж)

Подготовка учащихся к решению планиметрических задач на ЕГЭ предполагает актуализацию их знаний по планиметрии, а также развитие умения применять эти знания при решении задач. Содержащаяся в части В КИМов планиметрическая задача считается решенной, если учащийся получил и записал верный ответ.

Одним из средств, способствующих достижению поставленной цели, могут служить компакт - карты.

Компакт - карта содержит набор доказанных и усвоенных школьником фактов, относящихся к некоторым геометрическим фигурам или к их конфигурациям. В них наглядно и компактно представлены данные, полезные при решении задач.

Биссектриса угла треугольника



Пусть BB_1 — биссектриса $\angle B$.

1. $\angle A = \angle B$.

2. l_b — гмт, равноудаленных от сторон угла.

3. $\frac{a}{c} = \frac{a'}{b'}$.

4. $l_b^2 = ac - a'c'$.

5. $l_b = \dfrac{2ac \cdot \cos \frac{B}{2}}{a + c}$.

6. Если AA_1 — биссектриса $\angle A$, то $\angle BOA = 90^0 + \frac{\angle C}{2}$.

Роль компакт карт состоит в том, что они представляют базу данных, полезных при решении задач. Так, решая задачу, предложенную в тренировочном варианте — 2004 «Биссектриса угла B пересекает сторону AC треугольника ABC в точке M и делит ее на отрезки $AM = 21$ и $CM = 27$. Найдите периметр треугольника ABC, если биссектриса угла AMB перпендикулярна прямой AB», учащийся на основании имеющихся данных легко составит систему уравнений $\frac{x}{y} = \frac{21}{27}$ и $21^2 = xy - 21 \cdot 27$, где $AB = x$, $BC = y$.

Использование компакт карт по основным темам курса планиметрии обеспечивает повторение, расширение и систематизацию теоретических основ решения планиметрических задач, способствует выявлению и применению фактической базы для получения результата.

УПРАВЛЕНИЕ С ПОВОДЫРЁМ В НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Борзов А.В. (Москва)
E-mail borz_off@cs.msu.su

Рассматривается дифференциальная игра с динамикой

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x,u) + f_3(x,v),\ t \in [t_0,\theta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P,\ v \in Q, \quad (1)$$

где P и Q — компакты в пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, функция $f = f_1 + f_2 + f_3$ удовлетворяет стандартным условиям [1]. Цель первого игрока — приведение траектории на терминальное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ из позиции $\{t_0, x_0\}$, цель второго игрока противоположна.

Рассматривается также линейная игра [2] с динамикой

$$\dot{x} = Ax + u_1 + v_1,\ t \in [t_0,\theta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u_1 \in P_1,\ v_1 \in Q_1, \quad (2)$$

где P_1 и Q_1 — компакты в $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 1. Пусть $\forall s \in \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in D$, где D — некоторое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, гамильтониан $H(x,s)$ игры (1) и гамильтониан $H_1(x,s)$ игры (2) связаны соотношением

$$H_1(x,s) \geqslant H(x,s). \quad (3)$$

Тогда [3–4] можно реализовать процедуру управления с поводырём для игры (1) с системой (2) в качестве поводыря, обеспечивающую взаимное отслеживание движений данных систем на D.

Утверждение 2. Пусть в задаче (2) существует u-стабильный мост W_1, обрывающийся на M к моменту θ, такой, что $W_1 \subseteq [t_0,\theta] \times D$, $\{t_0, x_0\} \in W_1$. Тогда указанная процедура управления с поводырём обеспечивает сближение траектории системы (1) с M^ε к моменту θ.

Приводится решение задачи о нахождении по заданной игре (1) параметров A, P_1 и Q_1 игры (2) и множества D таких, что для них выполнены условия утверждений 1 и 2. Предлагается разбиение множества достижимости системы (1) на области D_i, в каждой из которых используется свой линейный поводырь вида (2).

Литература

[1] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
[2] Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. М., «Наука», 1988.
[3] Пашков А. Г. Об одном достаточном условии для нелинейных позиционных игр сближения. ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1.
[4] Борзов А. В. Сборник «Нелинейная динамика и управление», вып. 2. М., Физматлит, 2003.

О СИЛЬНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Брук В.М., Бредихин Д.А. (Саратов)
E-mail bredikhin@mail.ru

Пусть B - банахово пространство, $\{T_n\}$ - последовательность подпространств (замкнутых) и $T_n \subset B$. Последовательность $\{T_n\}$ назовем сильно сходящейся, если существует такое N, что для каждого $n > N$ найдется подпространство $\{M_n\}$ со свойством: B - прямая сумма T_n и M_n; соответствующая последовательность проекторов P_n на T_n параллельно M_n сильно сходится. Если $P = \lim P_n$ и T - область значений P, то пишем $T_n \to T$. Можно доказать, что сильный предел $\{T_n\}$ не зависит от выбора $\{M_n\}$, т.е., если $T_n \to T$ и $T_n \to T'$, то $T = T'$. Пусть B_1 , B_2 - банаховы пространства, $B = B_1 \oplus B_2$, $\{T_n\}$ - последовательность замкнутых линейных операторов или отношений из B_1 в B_2. Последовательность $\{T_n\}$ называется сильно сходящейся в обобщенном смысле, если последовательность графиков $\{T_n\}$ сильно сходится.

Далее предполагается, что $B_1 = B_2$, и используются обозначения: $T(\lambda)$- график отношения $T - \lambda E$ ($\lambda \in C$, E - тождественный оператор); $\Omega(T, M)$ - множество таких $\lambda \in C$, что B - прямая сумма $T(\lambda)$ и M; $P(\lambda)$ - проектор на $T(\lambda)$ параллельно M. Пусть $\{T_n\}$ и $\{M_n\}$ - последовательности подпространств в B. Будем говорить, что $\lambda \in C$ принадлежит области ограниченности $\Delta_b(T_n, M_n)$ (области сходимости $\Delta_s(T_n, M_n)$), если существует такое N, что для всех $n > N$ имеем $\lambda \in \Delta_b(T_n, M_n)$ и соответствующая последовательность проекторов ограничена, т.е.$\|P_n(\lambda)\| \leqslant c(\lambda)$ (сильно сходится).

Теорема 1. $\Delta_b(T_n, M_n)$ *- открытое множество;* $\Delta_s(T_n, M_n)$ *открыто и замкнуто в* $\Delta_b(T_n, M_n)$.

Для резольвентой сходимости этот результат имеется в [1].

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \in \Delta_s(T_n, M_n)$ *и* $P(\lambda) = \lim P_n(\lambda)$. *Тогда* $Ker\, P(\lambda)$ *не зависит от* λ, *и существует такое отношение* T, *что* $\lambda \in \Omega(T, Ker\, P(\lambda))$ *и* $P(\lambda)$ *является проектором на* $T(\lambda)$.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda \in \Delta_s(T_n, M_n)$ *и* $P_n(\lambda)$, $P(\lambda)$, T *такие, как в теореме 2,* $M_0 \subset B$ *и* $\lambda \in \Delta_b(T_n, M_n) \cap \Omega(T, M_0)$. *Тогда* $\lambda \in \Delta_s(T_n, M_0)$.

Литература

[1] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Буробин А.В. (Обнинск)
E-mail burobin@iate.obninsk.ru

Рассматривается уравнение

$$\dot{f} = S(f), \tag{1}$$

связанное с кинетическим описанием эволюции многочастичных систем. К такому уравнению сводятся, например, уравнение Больцмана [1], уравнение коагуляции [2].

Предполагается, что $S : F_1 \to F_2$, где F_1 и F_2 — банаховы пространства, причем F_1 вложено в F_2, $f(t) \in F_1$ при $t \geqslant 0$. Исследуется нелокальная разрешимость задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$f(0) = f_0$$

при соблюдении соотношений

$$l_k(f(t)) = l_k(f_0), \qquad t > 0, \tag{2}$$

для фиксированных функционалов $l_k \in F_1^*$, $k = \overline{1,n}$, отражающих интегральные законы сохранения.

Отметим, что в случае уравнения коагуляции условия (2) содержат только одно соотношение ($n = 1$), отвечающее за сохранение полной массы коагулирующих частиц. В ряде работ, в частности в работе [3], изучается проблема существования решений уравнения, допускающих нарушение закона сохранения массы в конечный момент времени. В настоящем сообщении эта проблема решается за счет выбора пространств F_1 и F_2.

Литература

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.

2. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

3. Escobedo M., Mischler S., Perthame B. Gelation in coagulation and fragmentation models. Preprint of the E.N.S. Paris, 2001.

О ЛЯПУНОВСКОЙ ПРИВОДИМОСТИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Быкова Т.С. (Ижевск)

E-mail tsbkv@udm.net

Рассматривается система уравнений с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \tag{1}$$

где функция $A : \mathbb{R}\times[-r,0] \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши системы (1). В качестве пространства начальных функций рассматриваеся пространство $\mathfrak{S} \doteq C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. L_2-показателем Ляпунова решения $t \to x_t(\cdot,u)$ системы (1) с начальным условием $x_0(\cdot,u) = u(\cdot)$ будем называть число

$$\lambda(u) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|x_t(\cdot,u)\|_2}{t}, \quad \text{где} \quad \|u\|_2 = \Big(\int_{-r}^{0} |u(s)|^2\, ds\Big)^{1/2}.$$

Пусть $\mathfrak{S}^- = \{u \in \mathfrak{S} : \lambda(u) = -\infty\}$, $\mathfrak{S}^+$ — прямое дополнение подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, т.е. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$.

В [1] доказано, что сужение системы (1) на конечномерное (размерности p) подпространство пространства $\mathfrak{S}^+$, приводимо ляпуновским преобразованием к системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{R}^p \tag{2}$$

с непрерывной верхней треугольной матрицей B. В продолжение этих исследований найдены достаточные условия, при которых $B(t)$ ограничена. Показано также, что если $A(t,s)$ рекуррентна по t, то $B(t)$ тоже рекуррентна. Приведены примеры систем вида (1) с конечномерным пространством $\mathfrak{S}^+$.

Литература

1. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференц. уравнения — 2003. Т. 39. № 6. С. 731–737.

ШКОЛА НАУЧНОГО ТВОРЧЕСТВА

Вавилов В.В., Часовских А.А. (СУНЦ МГУ)
E-mail vvavilov@mtu-net.ru , chasovskich@mail.ru

Физико-математическая школа-интернат при МГУ им. М.В. Ломоносова была открыта чуть более сорока лет назад и задумана она была, прежде всего, как школа научного творчества для молодежи, куда на конкурсной основе принимаются школьники из Центральной России. Школа небольшая (около 350 учащихся), в ней организованы только десятые и одиннадцатые классы; имеется как двухгодичный цикл обучения, так и одногодичный. Специализаций обучения, в настоящее время, пять — физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая и биофизическая; для одногодичного обучения — только физико-математическая. Система обучения лекционно-семинарская и приближена к вузовской. Говоря о школе научного творчества мы имеем в виду не только профилирующие дисциплины. Так, выступая на одном из заседаний педагогического совета, основатель школы А.Н. Колмогоров специально выделял эту учительскую задачу: "Существенно, что здесь в интернате, школьники приходят в соприкосновение с творческой мыслью. Это наш запрос, но по всем предметам!.. Метод работы - имитация научного исследования, шаг за шагом находить, вычислять нечто..., а не давать готовенькое..."

В 1988 году на базе школы-интерната был организован Специализированный учебно-научный центр, который стал самостоятельным структурным подразделением Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова со всеми его атрибутами: возникло звание "учащийся Московского университета", появились кафедры, ученый совет и т.д.

Доклад раскрывает деятельность школы им. А.Н. Колмогорова (ранее школы-интерната), нацеленной на повышение общей культуры школьников, на развитие их творческих способностей и на подготовку их к будущей учебной и научной работе. При этом, мы остановимся на вопросах нового набора школьников, на содержании наших основных профилирующих курсов и учебных материалов к ним. Часть доклада посвящена системе наших факультативных курсов и кружков, работе уникального математического практикума и практикумов по другим дисциплинам, участию наших учащихся на олимпиадах и других научных командных соревнованиях школьников, системе подготовки докладов исследовательского характера и участию в школьных научных конференциях, подготовке в стенах школы к вступительным экзаменам и к обучению в вузе в целом.

Школа уникальна по организации всего учебного процесса, по уровню преподавания профилирующих дисциплин и по подбору преподавателей. В школе всегда был, и сложился сейчас, дружный и работоспособный педагогический коллектив, который и решает самые разнообразные задачи - от организационных, культурно-просветительских, воспитательных до методических и научных. Источником преподавательских и воспитательских кадров школы был и остается МГУ им. М.В. Ломоносова, ректор которого академик Виктор Антонович Садовничий, кроме всего, еще и лично патронирует ее работу.

КАБИНЕТ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ[1]

Вавилов В.В., Мельников И.И., Потапов М.К., Сергеев И.Н. (Москва)

Создание такого кабинета на механико-математическом факультете Московского университета произошло в конце 80-х годов прошедшего столетия, именно тогда, когда научной общественностью уже были осознаны все достоинства и недостатки проведенной в стране реформы средней школы. Главной целью было желание по существу разобраться с проблемами школьного математического образования и помочь их решению, по возможности повлиять на содержание математических курсов в средней школе и методику их преподавания. Создание кабинета сопровождалось организационным оформлением той огромной работы со школьниками и учителями, которую традиционно проводили преподаватели механико-математического факультета, и выделением из нее, в качестве одного из важнейших направлений, задачи совершенствования, в самом широком смысле, постановки математического образования в

[1]Работа М.К.Потапова и И.Н.Сергеева выполнена при поддержке РГНФ (проект № 02-06-00057а)

стране. Не случайно, что по инициативе В.А.Садовничего кабинет был организован именно при кафедре математического анализа, которая одной из первых сталкивалась с выпускниками средних школ, причем на целом ряде факультетов Московского университета.

На первых порах кабинет методики преподавания элементарной математики фактически представлял собой научную лабораторию с соответствующей тематикой исследований. При этом, разумеется, сотрудники кабинета вели и значительную педагогическую работу (помимо основной): работали преподавателями в школе-интернате им. А.Н. Колмогорова при МГУ и в других школах Москвы, занимались проведением школьных олимпиад различного уровня и подготовкой команды страны для участия в Международной олимпиаде, готовили заочные задания для учащихся малого механико-математического факультета и вели занятия на подготовительном отделении, читали лекции учителям средних школ и выступали с докладами на конференциях, писали статьи, пособия и книги, участвовали в проведении вступительных экзаменов и т.д. Постепенно кабинет приобрел функцию <выпускающей кафедры>: в нем стали обучаться студенты, желающие параллельно с основной специальностью на механико-математическом факультете получить дополнительную специализацию - преподаватель математики, и даже аспиранты, готовящие диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук (такие возможности открылись благодаря соответствующим решениям факультета, Московского университета и Министерства образования).

Студенты кабинета в течение двух лет должны прослушать и сдать два годовых специальных курса, читаемых сотрудниками кабинета, посещать специальный семинар кабинета, получить зачет по математическому практикуму. Кроме того, они должны подготовить две курсовые работы, сдать экзамен по курсу лекций психолого-педагогического характера и пройти преподавательскую практику в школе.

Ежегодно в кабинете читается один из трех специальных курсов лекций.

1. В курсе <Содержание и методика преподавания математики в школе> рассматриваются существующие программы обучения, действующие и пробные учебники, выявляются и изучаются проблемы методическогохарактера в процессе преподавания отдельных тем, рассматриваются некоторые вопросы перспективно-

го характера по совершенствованию содержания математического образования, анализируется передовой и новаторский опыт преподавания как у нас в стране, так и за рубежом.

2. Основными целями курса <Научные основы школьного курса математики> являлись развитие у слушателей правильных представлений о природе математики и тенденциях ее развития, о сущности и происхождении математических абстракций, о соотношении реального и идеального, о логических и теоретических основах математического образования в средней школе. Более конкретная задача этого курса - изучение некоторых тем, имеющих важное значение для повышения математической культуры слушателей и которые в малой степени включаются или вообще не включаются в программы подготовки будущих преподавателей математики.

3. При разработке курса <Математические основы естествознания> кабинет руководствовался, главным образом, желанием раскрыть характер отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, определить место математики в системе наук и роли математического моделирования в научном познании. Этот курс содержит многие конкретные задачи с реальным практическим содержанием, которые не на словах, а на деле способствуют формированию более широкого мировоззрения и пробуждают интерес к прикладным исследованиям.

<Математический практикум> для студентов кабинета посвящен изучению конкретных методов решения задач из различных разделов школьной программы, который состоит из 6-8 заданий в год. Каждое задание, выполненное студентом, проверяется и оценивается специальной комиссией, а итоги выполнения некоторых заданий обсуждаются на спецсеминаре кабинета.

Сотрудники кабинета активно участвуют в постановке школьного математического образования в масштабах всей страны. Они участвуют в работе практически всех общественно значимых педагогических конференций и различных комиссий, связанных с математическим образованием, публикуют статьи в научных и методических журналах, готовят и издают книги и учебные пособия, продолжают непосредственную работу в нескольких школах Москвы и, конечно, в специализированной школе им. А.Н. Колмогорова при МГУ (деятельность которой патронируется и лично ректором университета), а также на подготовительном отделении МГУ. Последнее время кабинет проводит также и курсы повышения квалификации учителей математики.

Так, за пару последних лет силами сотрудников кабинета опубликовано семь книг, три учебных пособия и пятнадцать научно-методических статей. Коллективом авторов (С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин) подготовлены учебники для 5-11 классов средней школы: Арифметика 5-6, Алгебра 7-9, Алгебра и начала анализа 10-11. Эти учебники рекомендованы МОРФ и вышли в свет в издательстве <Просвещение>. Символично, что эти учебники относятся к серии <МГУ - школе>, организованной по инициативе ректора МГУ им. М.В.Ломоносова, академика Виктора Антоновича Садовничего.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Вагабов А.И., Рагимханов В.Р. (Махачкала)
E-mail vadim@mail.dgu.ru

Вопросы суммируемости рядов по собственным элементам дифференциальных операторов занимают значительное место в работах многих математиков: В.А. Ильина, В.Б. Лидского, А.Г. Костюченко, А.П. Хромова и др. Нами рассматривается регулярная спектральная задача

$$A(x)\,\tfrac{dy}{dx} + A^0(x)\,y, \qquad a < x < b, \tag{1}$$

$$\alpha y(a) + \beta y(b) = 0, \tag{2}$$

в пространстве вектор-функций $y(x)$. Здесь $A(x), A_0(x), \alpha, \beta$ — $n \times n$ матрицы.

Через $G(x,\xi,\lambda)$ обозначим матрицу Грина соответствующую этой задаче, а через Γ_s — расширяющуюся последовательность замкнутых контуров λ-плоскости, последовательно охватывающих полюса $G(x,\xi,\lambda)$. Пусть $h(x)$ — существено ограниченная вектор-функция, определенная на $[a,b]$.

Положим

$$J^s(h) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_s} d\lambda \int_a^b G(x,\xi,\lambda)\tilde{h}(\xi)d\xi.$$

Тогда ряд Фурье $\lim\limits_{s\to\infty} J^s(h)$ по корневым векторам оператора (1) – (2) сходится при тех же условиях и к тому же пределу, что и тригонометрические ряды Фурье от компонент $h(x)$. Сходимость будет равномерной на любом компакте из (a,b), на котором тригонометрические ряды Фурье от компонент $h(x)$ сходятся равномерно.

Более того, почти всюду справедливо $(C,1)$-суммируемость ряда Фурье по корневым векторам оператора (1) – (2) к $h(x)$:

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{s=1}^{l}J^s(h)=h(x)\qquad \text{п.в. на}\qquad [a,b].$$

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ: РЕШЕНИЕ В «ТЕКУЩИХ» КООРДИНАТАХ

Ванько В.И., Сейранян А.А. (Москва)
E-mail lvanko@mail.ru aseiran@hotbox.ru

В теории тонких оболочек наиболее простая форма уравнений равновесия получается при их записи в главных координатах, когда координатные линии на срединной поверхности оболочки являются линиями главных кривизн. Если же в процессе продолжающегося нагружения точки срединной поверхности перемещаются на величины порядка толщины оболочки, то исходные координатные линии значительно искажаются и поиск новых линий главных кривизн на деформированной срединной поверхности становится затруднительным.

В данной работе с использованием метода последовательных нагружений [1, 2, 3] (метод продолжения по параметру) строится алгоритм решения задачи о нагружении произвольной оболочки вращения возрастающими осесимметричными нагрузками. При этом первоначальные линии главных кривизн остаются таковыми на протяжении всего процесса нагружения, вследствие чего структура уравнений равновесия инвариантна: на каждом шаге нагружения необходимо лишь пересчитывать параметры Ламэ и главные кривизны, от которых зависят коэффициенты уравнений равновесия.

В качестве примера рассмотрено нагружение первоначально круглоцилиндрической оболочки внутренним гидростатическим давлением при различных краевых условиях. Даны сравнения результатов при различных подходах к решению задачи.

Литература

1. Петров В.В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // Научные доклады высшей школы. Строительство. — 1959, № 11. – С. 27-35.

2. Даревский В.М. Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек. – М.: Наука. – 1966. – С. 355-364.

3. Ванько В.И. Решение задач нелинейной теории оболочек методом Ритца // Мат. моделирование в образовании, науке и промышленности: Сб. научных трудов. – СПб.: СПбургское отделение Межд. Академии наук ВШ. – 2000. – С. 42-45.

РОЛЬ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ В ФОРМИРОВАНИИ ТВОРЧЕСКОЙ ЛИЧНОСТИ

Ванько В.И., Григорьян И.С. (Москва)

E-mail Ale-Grigor@yandex.ru

В "Национальной доктрине образования" Российской Федерации в качестве одной из основных задач образования выдвигается обеспечение разностороннего и своевременного развития детей, их творческих способностей.

Своей задачей мы видим формирование у учащихся не только академических знаний, но и прежде всего способности трудиться, жить и адаптироваться в быстро меняющемся мире.

Гимназия В1516 г. Москвы создаёт условия, при которых каждый учащийся может попробовать себя в разных областях знаний, при этом большое внимание уделяется организации научно-исследовательской работы учащихся. ***Научно-исследовательская, творческая работа учащихся*** – это целенаправленная и результативная работа, которая проводится под руководством учителей гимназии и преподавателей университетов. Программа научно-исследовательской, творческой работы учащихся в гимназии позволяет максимально учитывать творческие и интеллектуальные способности молодых исследователей, создавать условия для реализации каждой личности. Подготовка к исследовательской деятельности начинается с 5 класса. Она основана на развитии общенаучных и исследовательских умений, на выполнении творческих заданий и предполагает участие в работе творческих объединений. Исходя из своих интересов и увлечений, учащиеся выбирают тему для исследования, подбирают литературу, проводят само исследование и готовят отчет. При проведении исследований у учащихся формируется способность применять усвоенные знания и алгоритмы в различных ситуациях, исследовать окружащюющий мир и взаимодействовать с ним. Итогом данной деятельности является участие школьников в научно-социальной программе "Шаг в будущее", Международной конференции-конкурсе "Юниор", Всероссийском конкурсе исследовательских работ им. В.И. Вернадского.

Организация исследовательской деятельности учащихся достаточно сложна; она направлена на выполнение социального заказа высшей школы на подготовку молодых людей, обладающих творческим потенциалом, способных самостоятельно овладевать новейшими достижениями науки и техники.

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ КАК ФУНКЦИЯ ПОТЕНЦИАЛА[1]

Винокуров В.А., Садовничий В.А. (Москва)
E-mail vinokur@narod.ru

Рассматривается *первая краевая задача* на отрезке $[0, \ell]$, состоящая из дифференциального уравнения $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ и граничных условий $y(0) = 0$, $y(\ell) = 0$. Функция q, называемая потенциалом, вещественнозначная и суммируемая по Лебегу на $[0, \ell]$, т.е. принадлежит банахову пространству $L_1[0, \ell]$. При сформулированных условиях для любой фиксированной функции $q \in L_1[0, \ell]$ первая краевая задача имеет бесконечную последовательность вещественных однократных *собственных значений* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, строго возрастающую к $+\infty$. Таким образом, n-ное собственное значение λ_n является функцией элемента $q \in L_1[0, \ell]$, $\lambda_n = \lambda_n(q)$.

Изучается отображение $\lambda_n : L_1[0, \ell] \to \mathbf{R}$. В нашей работе [1] показано, что каждое собственное значение $\lambda_n(q)$ является дифференцируемой на банаховом пространстве $L_1[0, \ell]$ функцией и его производная $\lambda_n'(q)$ действует на элемент $h \in L_1[0, \ell]$ по правилу $\lambda_n'(q)(h) = \int_0^{\ell} y_n^2(q, x)h(x)dx$, где $y_n(q, x)$ — n-ная нормированная собственная функция для потенциала q. В данной работе устанавливается, что первое собственное значение $\lambda_1(q)$ есть вогнутая слабо полунепрерывная сверху функция на банаховом пространстве $L_1[0, \ell]$, а также вводятся и исследуются величины супремума и инфинума собственного значения $\lambda_n(q)$ на шаре банахова пространства $L_p[0, \ell]$.

Изложение представленных здесь результатов смотрите в статье [2] и по адресу "http://vinokurov.150m.com/eval.html".

Литература

[1] Настоящая работа поддержана грантом Минобразования России Е02-7.0-4 и научной программой "Университеты России"(проект ур.04.01.013).

[1] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Собственное значение и след оператора Штурма-Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала. Доклады Академии наук. 1999. Т. 365. № 3. С. 295-297.

[2] Винокуров В.А., Садовничий В.А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала. Доклады Академии наук. 2003. Т. 392. № 5. С. 592-597.

О ЗАДАЧЕ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ВЕСОМ[1]

Владимиров А.А., Шейпак И.А. (Москва)

E-mail vladimi@mech.math.msu.su, iasheip@mech.math.msu.su

Изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \tag{1}$$

где ρ есть функция из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$, имеющая арифметически самоподобную первообразную. При этом требование знакоопределённости на вес ρ не накладывается.

В качестве операторной модели задачи (1) выбирается линейный пучок $T_\rho : \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1] \to \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall y, z \in \mathcal{H} \qquad \int_0^1 \{T_\rho(\lambda)y\}\,\overline{z}\,dx \int_0^1 y'\overline{z'}\,dx - \lambda \int_0^1 \rho \cdot (y\overline{z})\,dx,$$

Теорема 1. *Все собственные значения пучка T_ρ являются простыми. Все собственные значения пучка T_ρ, расположенные правее нуля, имеют положительный тип, а все собственные значения пучка T_ρ, расположенные левее нуля, имеют отрицательный тип. Для любого $\lambda > 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(0, \lambda)$, совпадает с индексом инерции оператора $T_\rho(\lambda)$. Аналогично, для любого $\lambda < 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(\lambda, 0)$, совпадает с индексом инерции оператора $T_\rho(\lambda)$.*

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №01-01-00691 и гранта поддержки ведущих научных школ №НШ-1927.2003.1

Теорема 2. *Если ρ имеет арифметически самоподобную первообразную $P(x)$, то считающая функция $N(\lambda)$ имеет асимптотическое представление $N(\lambda) = \lambda^d(S(\ln\lambda) + o(1))$, где $S(t)$ — непрерывная периодическая функция, а d является решением системы $\sum_{i=1}^{m}(a_i|d_i|)^d = 1$, где a_i и d_i — числа, определяющие самоподобие $P(x)$.*

Теорема 3. *Если самоподобная функция $P(x) \in L_2[0,1]$, то $d < 1$.*

УНИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА СИСТЕМ С НЕРАВНОВЕСНЫМ НАГРЕВОМ

Волов Д.Б. (Самара)

E-mail volovdm@mail.ru

Рассмотрим построение единого алгоритма для расчета термодинамических систем, в которых возможно разбиение на конечное число элементов установки. Такое действие возможно, если:

1) параметры газа одинаковы внутри выделенной секции и скорость изменения этих параметров много меньше скорости распространения возмущения по секции;

2) характерные времена межсекционных процессов много больше времени прохода звуковой волны между секциями.

Будем рассматривать в качестве рабочих веществ газы с известными уравнениями состояния. Изменение параметров газа в отдельной секции описывается системой, выражающей законы движения, сохранения массы и энергии.

Искомую систему можно записать в матричном виде, если ввести в рассмотрение операнд так называемого условного умножения. Правила условного умножения схожи с правилами умножения матриц, с той лишь разницей, что для каждого ненулевого члена рассматриваются еще дополнительные условия, определенные для антисимметричного члена.

Рассмотрим полученную систему применительно к импульсному устройству сжатия с неравновесным нагревом. Унифицированная схема дает в данном случае систему из восьми нелинейных дифференциальных уравнений. Решение проводится численными методами на компьютере.

Полученные результаты позволяют говорить о приемлемых для инженерных расчетов точностях вычислений (погрешность до 15%).

Литература

1. Математическое моделирование в термодинамических системах с разделенными секциями// Журнал ММ т.16, №1, 2004, С. 23-36.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Вязьмина Е.А., Полянин А.Д. (Москва)
E-mail vav@krasn.mosreg.ru

Развитию методов точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных всегда уделялось самое пристальное внимание. Наиболее распространенными и эффективными методами, применяемыми для этой цели, являются методы теории групп [1]. В последние годы для некоторых классов нелинейных уравнений были построены точные решения методом функционального разделения переменных [2].

Рассмотрим нелинейное уравнение диффузии, описывающее нестационарный массоперенос в неподвижной непрерывной среде, когда коэффициент диффузии и кинетическая функция объемной химической реакции являются произвольными функциями концентрации

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w),$$

где w - неизвестная функция, t - время, x - координата, f и g - произвольные функции искомой величины w. Получим его точное решение методом функционального разделения переменных.

Будем искать решение в виде

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t).$$

После подстановки его в исходное уравнение и применения процедуры функционального разделения переменных [2], приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для $\varphi(t)$, $\psi(t)$, f, g и w. Первое уравнение автономно и легко интегрируется, что дает возможность определить функцию $\psi(t)$ из второго. Оставшиеся соотношения могут быть решены численно и определяют связь между функциями f, g и w, для которых рассматриваемое уравнение допускает решение выбранного вида.

Литература

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

2. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002.

СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ h_*^p, $p>0$, ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Гаврилов В.И., Субботин А.В.

E-mail awsubbotin@mail.ru

В статье [1] рассмотрены сепарабельные F-пространства h_*^p, $p>0$, гармонических функций в круге $D:|z|<1$ на комплексной z-плоскости, у которых функции $Mu(e^{i\theta})=\sup\limits_{0\leqslant r<1}|u(re^{i\theta})|$ интегрируемы в степени p на $[0,2\pi]$, а инвариантные метрики ρ_p вводятся в h_*^p посредством числовой характеристики $\|u\|_p=\left[\int\limits_0^{2\pi}(Mu)^p(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\right]^{1/p}$ по формуле $\rho_p(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|_p^{\alpha_p}$, где $u_1,u_2\in h_*^p$ и $\alpha_p=\min(1,p)$.

Теорема 1. *Для произвольного $p>0$ последовательность (u_n) функций $u_n\in h_*^p$, $n\in\mathbf{N}$, сходится в метрике ρ_p к некоторой $u\in h_*^p$ тогда и только тогда, когда 1) семейство $\left\{\int_0^\theta(Mu_n)^p(e^{i\varphi})\,d\varphi;\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi, n\in\mathbf{N}\right\}$ равностепенно абсолютно непрерывно на $[0,2\pi]$; и 2) двойная последовательность $\{M(u_n-u_k)(e^{i\theta}); 0\leqslant\theta\leqslant2\pi, n,k\in\mathbf{N}\}$ при $n,k\to\infty$ сходится к нулю по мере на $[0,2\pi]$.*

Теорема 2. *Если для $p>0$ последовательность (u_n) гармонических в D функций сходится равномерно на почти каждом радиусе круга D и удовлетворяет условию $\sup_{n\in\mathbf{N}}\|u_n\|_p<+\infty$, то (u_n) сходится равномерно на компактах круга D к предельной функции $u\in h_*^p$, причем (u_n) содержит подпоследовательность (u_{n_k}), обладающую свойством: для любых $\varepsilon>0$ и $\alpha>1$ на $[0,2\pi]$ существует такое совершенное множество P с $\mathrm{mes}([0,2\pi]\setminus P)<\varepsilon$, что (u_{n_k}) сходится равномерно в области, полученной объеднением по всем $\theta\in P$ областей $D_\alpha(\theta)=\{z\in D; |z-e^{i\theta}|<\alpha(1-|z|)\}$.*

Теорему 2 можно считать аналогом известной теоремы А.Я. Хинчина–А. Островского для голоморфных функций (см. [2], гл. II, §7), дополненной Г.Ц. Тумаркиным [3].

Литература

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ №НШ-680.2003.1

1. В.И. Гаврилов, В.С. Захарян, А.В. Субботин // Докл. НАН Арм. 2002, 102, №3, 203–210. 2. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. 3. Г. Ц. Тумаркин // ДАН СССР. 1955. 105, №6, 1151–1154.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

Гаврилов В.С., Сумин М.И. (Нижний Новгород)
E-mail m.sumin@mm.unn.ru

Излагаются результаты исследования параметрической задачи оптимального управления (см., например, [1])

$$I_0(\pi) \to \inf, \;\; I_1(\pi) \in \mathcal{M} + q, \;\; \pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

где $\mathcal{D} \equiv \{\pi \in L^m_\infty(Q_T) \times L_\infty(\Omega) : u(x,t) \in U \subset R^m$ п.в. на $Q_T, v(x) \in V \subset R^1$ п.в. на $\Omega\}$, U – компакт, V – выпуклый компакт, $I_0(\pi) \equiv \int\limits_\Omega G(x, z[\pi](x,T), v(x))dx$, $I_1(\pi)(t) \equiv \int\limits_\Omega \Phi(x,t,z[\pi](x,t),v(x))dx$, $\mathcal{M}$ - множество всех непрерывных неположительных на компакте $X \subseteq [0,T]$ функций, $z[\pi] \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(Q_T)$ – решение начально-краевой задачи

$$z_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t,u(x,t))z = f(x,t,u(x,t)),$$
$$z(x,0) = \varphi(x), \;\; z_t(x,0) = v(x), \;\; x \in \Omega, \;\; z|_{S_T} = 0.$$

Рассматривается аппроксимация исходной задачи (1) с фазовым ограничением последовательностью задач, каждая из которых содержит лишь конечное число функциональных ограничений типа неравенства и конечномерный параметр. На основе такой аппроксимации устанавливается, в частности, что нормальность задачи (1) влечет липшицевость ее функции значений. Показывается, что наличие нормали Фреше к надграфику конечномерной функции значений в каждой аппроксимирующей задаче позволяет организовать алгоритм ее решения типа точного недифференцируемого штрафа. Обсуждается приложение этих результатов для нахождения субоптимального управления в исходной задаче (1).

Литература

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 01-01-00979) и КЦФЕ Минобразования РФ при СПбГУ (код проекта Е02-1.0-173).

1. Sumin M.I. Optimal control of semilinear elliptic equation with state constraint: maximum principle for minimizing sequence, regularity, normality, sensitivity // Control and Cybernetics. 2000. V.29. No.2. P.449-472.

К ВОПРОСУ О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Гайшун Л.Н., Широканова Н.И., Глушанкова Л.Я.
(Минск)

Среди разделов математических дисциплин теория вероятностей занимает особое положение. Она является теоретической основой статистических предметов и математической статистики, кроме того методы теории вероятности и математической статистики используются при изучении и обработке результатов наблюдений массовых случайных явлений и выявлении определенных закономерностей. Особенно важным становится определение общих закономерностей на основе наблюдения за частью случайных явлений, определение основных главных связей и зависимостей, отделение их от случайных воздействий. Полученные таким образом результаты будут характеризовать процесс "в среднем", выражаться в форме не однозначных и вполне определенных, а вероятностных утверждений. Своеобразная форма таких утверждений - одна из проблем, с которой сталкиваются студенты при изучении теории вероятностей. Другая проблема возникает при решении конкретной задачи. Важно составить ее теоретико-вероятностную модель, чтобы решить математическими методами. Все это вызывает ряд трудностей в процессе обучения. Чтобы их преодолеть нужно решить много задач. С этой целью было выпущено учебное пособие для экономистов: Гайшун Л.Н., Игнатьева Г.К., Велько О.А."Теория вероятностей",Минск, 2002. Типовые задачи, рассмотренные в рекомендуемом пособии, следует разобрать внимательно, обращаясь при необходимости к соответствующим указаниям и пояснениям. Затем самостоятельно решить предложенные в конце каждого параграфа задачи по изученной теме (все задачи снабжены ответами). В конце приводятся вопросы для самоконтроля. При решении задач следует не только формально выполнять расчеты, но и анализировать логическое содержание задач и оценивать соответствие полученного результата исходным данным. Во многих задачах полезно найти другие способы решения задачи и сравнить их. В течение семестра выполняются две контрольные работы по теории вероятностей и математической статистике. Завершающим этапом является выполнение расчетной работы по теории вероятностей и математической статистике, устное собеседование и обсуждение результатов.

Литература

1. Гайшун Л.Н., Игнатьева Г.К., Велько О.А. "Теория вероятностей учебное пособие для экономистов, Минск, 2002.

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Галатенко В.В. (Москва)
E-mail vvgalatenko@yahoo.com

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — невырожденный промежуток, $\Xi = \{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система входящих в I невырожденных конечных промежутков, удовлетворяющая следующим требованиям: 1) система Ξ покрывает промежуток I в смысле Витали; 2) для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, промежутки Δ_m, Δ_n либо не пересекаются, либо $\Delta_m \supset \Delta_n$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ положим $e_n(x) = \chi_{\Delta_n}(x)$. Зафиксируем произвольную функцию $f(x) \in L^1_{loc}(I)$ и произвольную числовую последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Индуктивно определим последовательность остатков $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$: положим $r_0(x) = f(x)$; если уже определен остаток $r_n(x)$, то положим $c_{n+1} = \frac{\int_{\Delta_n} f(x)e_{n+1}(x)\,dx}{\int_{\Delta_n} |e_{n+1}(x)|^2\,dx} + \xi_{n+1}$, $r_{n+1}(x) = r_n(x) - c_{n+1}e_{n+1}(x)$. В результате функции $f(x)$ сопоставлен ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x)$ (в случае $f \in L^2(I)$ этот ряд является орторекурсивным разложением f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками в вычислении коэффициентов). Описанный процесс для $f \in L^1_{loc}(I)$ и $\xi_n \equiv 0$ был изучен в работе [1]. Основные результаты этой работы без труда переносятся на рассматриваемый более общий случай. Мы ограничимся следующей теоремой.

Теорема. *Пусть $\xi_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда для почти всех $x \in I$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x)$ сходится к $f(x)$. Если, кроме того, для некоторого $p \in (1, \infty)$ $f \in L^p(I)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x)$ сходится к f в метрике $L^p(I)$.*

---

[1]Работа выполнена при финансоваой поддержке РФФИ (проект №02-01-00420) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1657.2003.1).

Для сходимости в метрике L^1 разложений функций $f \in L^1(I)$ и для равномерной сходимости на всех принадлежащих I компактах разложений функций $f \in C(I)$ необходимо, вообще говоря, наложить на систему Ξ некоторые дополнительные ограничения (те же, что и в работе [1]).

Литература

[1] Лукашенко Т.П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механ. 2001. №1. С. 6–10.

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ОСОБЕННОСТЬЮ В УЗЛЕ[1]

Глотов Н.В., Прядиев В.Л. (Воронеж)
E-mail nick_gl@bk.ru, pryad@mail.ru

Ниже приводится развитие результата [1]. Пусть Γ — граф-звезда, то есть $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{m}[a, b_i]$, $a, b_i \in \mathbb{R}^n$, b_i - попарно различны, $\|b_i - a\| = \frac{1}{2}$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma \setminus \{a\},\ t \geqslant 0) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} u_{h_i}^{+}(a,t) = \lambda u_t(a,t) \quad (t \geqslant 0) \\ u(b_i,t) = 0 \quad (i = \overline{1,m}, t \geqslant 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma) \end{cases}, \qquad (1_{\varphi,\ \psi})$$

где $h_i = 2 \cdot (b_i - a)$, уравнение понимается в смысле [2]. Решение $u_{\varphi,\ \psi}$ задачи $(1_{\varphi,\ \psi})$ представимо виде суммы $u_{\varphi,\ 0} + u_{0,\ \psi}$.

Для $(1_{\varphi,\ 0})$ найдены представление $u_{\varphi,\ 0}$ через начальные данные, а также уникальное значение λ, при котором $u_{\varphi,\ 0}$ совпадает, начиная с определенного момента времени, с решением смешанной задачи для волнового уравнения с нулевыми значениями на концах отрезков $[a, b_i]$, с начальной деформацией $\xi(x) = \varphi(x) - (1/m) \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi(a + \|x - a\| \cdot h_i)$, с нулевой начальной скоростью.

Задача $(1_{0,\ \psi})$ в случае m=1 сведена к задаче с нулевой и начальной скоростью и ненулевым начальным отклоненем, что позволяет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минообразования РФ (КЦ СПбГУ) (грант N E02-1.0-46), РФФИ (гранты N 04-01-00049, 02-01-00307), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004), грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ, N НШ-1643.2003.01

надеяться на распространение этого результата на случай граф с произвольным количеством ребер.

Литература.

1. Глотов Н. В., Прядиев В. Л. О колебаниях с трением на сети: Тез. докл. конф. Современные методы теории краевых задач. – Воронеж, 2003. – С. 39-40.

2. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети // ДАН. – 2003. – Т. 388, № 1, С. 16-18.

СЦЕНАРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕСТРОЕК ОДНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Глызин С.Д., Кубышкин Е.П. (Ярославль)
E-mail glyzin@uniyar.ac.ru

Рассмотрим динамическую систему

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x + \big(\beta + g\big(x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)\big)\big)\dot{x}(t-h) = 0, \qquad (1)$$

широко применяемую в различных радиофизических задачах. В уравнении (1) параметры α, β, h положительны, а $g(\cdot,\cdot,\cdot)$ – достаточно гладкая функция своих аргументов. Будем предполагать, что величины α, β, h подобраны так, что квазиполином линейной части (1) имеет две пары корней $\pm i\sigma$, $\pm 2i\sigma$ на мнимой оси в резонансном соотношении, а остальные корни находятся в левой комплексной полуплоскости. В этом случае для значений параметров близких к критическим в окрестности нулевого состояния равновесия может быть построена нормальная форма. Принятие ряда упрощающих предположений позволяет ее свести к следующей укороченной системе медленных переменных:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\rho}_1 & = & \left(\tau_1 + a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2\right)\rho_1 + b_1\rho_1\rho_2\cos(\theta+\gamma_1), \\ \dot{\rho}_2 & = & \left(\tau_2 + a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2\right)\rho_2 + b_2\rho_1^2\cos(\theta+\gamma_2), \\ \dot{\theta} & = & \delta + c_1\rho_1^2 - c_2\rho_2^2 - b_1\rho_2\sin(\theta+\gamma_1) - b_2\rho_1^2\sin(\theta+\gamma_2)/\rho_2. \end{array} \qquad (2)$$

В системе (2) величины τ_j, δ определяются линейной частью уравнения (1), а $a_{ij}, b_j, c_j, \gamma_j$ $(i,j=1,2)$ – нелинейностью. Зафиксируем все параметры кроме b_1, b_2 и рассмотрим возможные фазовые перестройки (2) при изменении b_1 или b_2. Первый, наиболее общий из сценариев относительно прост: в этом случае система (2) имеет либо глобально устойчивое состояние равновесия, либо цикл. Таким фазовым перестройкам соответствуют циклы и торы исходной системы (1). Для реализации второго сценария требуются некоторые дополнительные условия на параметры (2). В случае, если $\tau_1=\tau_2=\tau>0$, $a_{11}=a_{22}=a<0$, $a_{12}=a_{21}=0$, $b_1=b_2=b>0$, $c_1=c_2=c>0$, $\gamma_1=-\gamma_2$ изменение параметра b, характеризующего связь между колебательными модами (1), приводит к возникновению в результате бифуркации расщепления сепаратрис хаотического режима. Вычисление ляпуновских показателей и ляпуновской размерности притягивающего множества системы (2) позволяет проследить за фазовыми перестройками и определить моменты возникновения и коллапса аттракторов.

ПОРЯДОК НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ СЕГЁ

Головань Д.А. (Екатеринбург)
E-mail Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть функция $g(\tau)$ 2π-периодична, неотрицательна и суммируема вместе с $\ln g(\tau)$ (или произведение нескольких таких функций); $\pi(g;e^{i\tau})$ — радиальное граничное значение функции Сегё

$$\pi(g;z) := \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\ln g(\tau)\,d\tau\right\} \quad (|z|<1);$$

функция $\zeta(\tau)$ 2π-периодична, измерима и положительна почти всюду на периоде; π_n — множество всех алгебраических многочленов (с комплексными коэффициентами) степени не выше n ($n \in \mathbb{Z}_+$). При $1 \leqslant r < \infty$ наилучшим (ζ, r)-приближением функции $\pi(g;e^{i\tau})$ многочленами степени не выше n условимся называть величину

$$\delta_{r,n}(g,\zeta) := \inf_{Q\in\pi_n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left|1-\frac{Q(e^{i\tau})}{\pi(g;e^{i\tau})}\right|\zeta(\tau)\right)^r d\tau\right\}^{\frac{1}{r}}. \qquad (1)$$

Величина (1) интенсивно изучалась рядом авторов при $\zeta(\tau) \equiv 1$, $r = 2$. В [1] доказана оценка $\delta_{r,n}(g,\zeta) = O(n^{-\frac{1}{r}})$ при условии, что $1 \leqslant r < \infty$, $\zeta(\tau) \equiv 1$, $g(\tau) = h(\tau)\prod_{\nu=1}^{m}|1-e^{i(\tau-\theta_\nu)}|^{\gamma_\nu}$, где $\gamma_\nu \in \mathbb{R}$; $-\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqslant \pi$, $h(\tau)$ — ограниченная сверху и снизу положительными константами, измеримая, достаточно гладкая функция периода 2π. В [1] также доказана неулучшаемость в ряде случаев этой оценки. Основным результатом сообщения является

Теорема. *Пусть* $1 < r < \infty$; $\zeta(\tau) = \prod_{\nu=1}^{m}|1-e^{i(\tau-\theta_\nu)}|^{\Gamma_\nu}$, $g(\tau) = h(\tau)\prod_{\nu=1}^{m}|1-e^{i(\tau-\theta_\nu)}|^{\gamma_\nu}$, *где* $-\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqslant \pi$,

$\gamma_\nu, \Gamma_\nu \in \mathbf{R}$; $0 < r^{-1} + \Gamma_\nu < 1$ $(\nu = 1, \ldots, m)$; *функция* $h(\tau) > 0$ *и удовлетворяет условию Липшица порядка* $\Gamma + r^{-1}$ *в* $C_{2\pi}$, *где* $\Gamma := \min\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$. *Тогда* $\delta_{r,n}(g, \zeta) = O(n^{-\frac{1}{r}-\Gamma})$ $(n \to \infty)$.

Доказана неулучшаемость этой оценки в ряде случаев.

Литература

1. Бадков В.М. Обобщение одной теоремы И.А.Ибрагимова – В.Н.Солева // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 15-29.

2. Бадков В.М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41-88.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Голубева Н.Д. (Самара)

Рассматривается следующая задача:

Найти функцию $u(,y) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, где

$$D = \{(x,y): \quad 0 < x < a, \ 0 < y < b\},$$

удовлетворяющую в D уравнению:

$$Lu = u_{xy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y)$$

и условиям:

$$u(x,0) + l(x) \int_0^b u(x,y)dy = \varphi(x)$$

$$u(0,y) + \mu(y) \int_0^a u(x,y)dx = \psi(y)$$

где $l(x)$, $\varphi(x)$, $\mu(y)$, $\psi(y) \in C^1(\bar{D})$ - заданные функции, удовлетворяющие условию:

$$\varphi(0) - l(0) \int_0^b u(0,y)dy = \psi(0) - \mu(0) \int_0^a u(x,0)dx$$

Доказана теорема существования и единственности классического решения поставленной задачи. Для этого исходная задача сводится к задаче Гурса для нагруженного уравнения. Получен явный вид решения для некоторого частного случая поставленной задачи.

Литература

1. Голубева Н.Д., Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями // Математические заметки. 1996. Т. 59. Вып. 3. С.456-458.

2. Климова Е.Н. Интегральная задача Гурса и связанные с ней нагруженные уравнения // Дифференциальные уравнения и их приложения. Самара. 2002. Т. 1. № 1. С. 101-113.

3. Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925-1935.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ТЕСТИРОВАНИЮ

Гончарова Г.А., Егорова Л.Н., Колпакова А.В. (Саратов)

Широко применяемые в современном обществе различные формы тестирования, как подтверждают статистические данные, являются наиболее демократическими и справедливыми способами проверки уровня знаний на любом этапе обучения. Если сравнить итоговые школьные оценки (при традиционной форме сдачи экзаменов), результаты вступительных испытаний в вуз в форме тестирования, особенно компьютерного, результаты первого промежуточного контроля первокурсников, то хорошо видно, что между выпускными и вступительными оценками наблюдается большая разница (в зависимости от уровня оценки), в то время как далее - корреляция очень высока.

Отметим, что если в период обучения в школе учащиеся привыкли к тестам, то соответствие выпускных оценок и результатов абитуриентского тестирования очень высоко (может достигать 91%). Отдельные неудачи можно объяснить различными субъективными факторами, проявляющимися при сдаче экзамена : от плохого самочувствия- до погодных условий.

В Саратовском государственном техническом университете уже несколько лет работают курсы по подготовке школьников к тестовым формам контроля знаний. "Входное"тестирование при поступлении на курсы, как правило, показывает низкий уровень знаний и умений школьника (примерно 25% получают положительные оценки), что приводит школьников в стрессовое состояние, так как в школе оценки "благополучные". И на этом фоне целесообразно, на наш взгляд, применить метод педагогического шока ("клин клином вышибают") по схеме "толчок - рывок - подъём". Само психологическое состояние во время компьютерного тестирования (не у кого спросить, не с кем посоветоваться так как задание индивидуальное) является толчком для детального изучения материала и тренировки умений оперировать полученными знаниями, что и является рывком в победе над собственной трусостью и неуверенностью, а это, в конце концов, и приводит к подъёму уровня знаний и умений. Существенную роль, при этом, играет не только постоянная работа по изучению конкретного предмета, но и прихологический тренинг. Так при повторном тестировании (после трех-четырех занятий) уже более 60% слушателей курсов имеют положительные оценки. Отметим, что после четвертого репетиционного тестирования не происходит существенного улучшения оценок у конкретного учащегося, хотя общий уровень оценок к этому времени существенно возрастает. То есть учащийся приближается к максимуму своих возможностей, при имеющейся базе знаний. Наиболее существенный рост оценок наблюдается среди тех учащихся, которые в школе отнесены к группе "твердых троечников", а самый низкий среди традиционных отличников (которые, как правило, при тестировании получают оценки на уровне четверки (по пятибалльной шкале)). Анализ этих данных показывает, что в настоящее время в школе акцент сделан не на развитие мышления, особенно его оригинальности, а на шаблонность и унифицированность. Много внимания в школе уделяется оформлению записей, а не его сути задания, не поощряется своеобразие решения (пусть не всегда рационального). Школьные отличники, в основном, очень прилежны и аккуратны. Поэтому, когда при решении тестовых заданий нужно не описать, а логически рассуждая получить решение, они проигрывают "троечнику", который наказывался в школе за то, что решал "через действие", не был аккуратен в написании классических формул и теорем, формулировке правил, хотя хорошо понял их суть и умел ими оперировать. Процесс переучивания от схемы действий : увидел задачу -начал писать -решение ведется по усвоенному шаблону; - к схеме: увидел задачу- проанализировал путь и метод решения- решил при минимальном количестве записей; - наиболее сложен и технически и психологически. Можно отметить, что методом выполнения задания "от противного"практически школьники не владеют, а только знают о его существовании и применении при доказательстве теорем.

При подготовке учащихся к независимым формам контроля знаний, к которым относитится и тестирование, много путей: от изменения методики обучения детей в школе, начиная с начальных классов, вплоть до индивидуальных занятий.

При подготовке к тестированию компьютерные технологии имеют очевидное преимущество, которое состоит в том, что задания можно сгруппировать строго по одной теме или какому либо сочетанию тем, и тестируемый сразу получит оценку своих знаний (которая будет абсолютно объективна), сможет проверить свои ошибки. При этом присутствие преподавателя не является обязательным.

Многолетний опыт работы с учащимися на курсах по подготовке к тестированию (компьютерному и бланковому) показывает высокую эффективность такой схемы коллективной подготовки, пока учителя школы не освоили в достаточной мере новые методики обучения. Так, например, основная часть абитуриентов, посещавших курсы по подготовке к компьютерному тестированию в СГТУ в 2002-2003 учебном году, успешно поступили в различные вузы (95% слушателей курсов различной длительности). Многие из них отмечали, что без компьютерного тренинга они бы не получили столь хороших результатов. Одновременно нашел подтверждение тот факт, что уровень владения компьютером не сказывается, в конечном итоге, на результатах тестирования, но более комфортно с психологической точки зрения, себя чувствуют те учащиеся, которые предварительно поработали с репетиционным материалом.

СТЕПЕННЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Горючкина И.В. (Москва)
E-mail chukhareva@yandex.ru

Рассмотрим шестое уравнение Пенлеве

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right) + \qquad (1)$$

$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a+b\frac{x}{y^2}+c\frac{x-1}{(y-1)^2}+d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right],$$

где параметры a, b, c, $d = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$ и a, $b \neq 0$, $x \in \mathbb{C}$.
В окрестности точки $x = \infty$, используя методы степенной геометрии (см. [1]), вычисляются все разложения вида

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s,$$

где r, s — комплексные показатели степени, $c_r = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, c_s — коэффициенты: либо $c_s = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, либо $c_s = \alpha + \beta \ln(x)$, где α — произвольный коэффициент, а $\beta = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$.

Пусть $\tilde{c} = (b + \epsilon\sqrt{-bc})/(b + c)$, $\xi = \sqrt{2c} + \epsilon\sqrt{-2b}$, $\epsilon = \pm 1$, а φ есть то значение ξ, у которого $\mathrm{Re}(\xi) < 0$.

Т е о р е м а 1. В случае когда $\varphi = -n$, $n \in \mathbb{N}$, формальное разложение решений уравнения (1) в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$y = \tilde{c} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} x^{-k},$$

где коэффициенты c_{-k} для $k \leqslant \varphi$ суть многочлены от $\ln x$, а для $k > \varphi$ суть константы.

З а м е ч а н и е. Для уравнения (1) были получены и другие асимптотические разложения решений, которые приводятся в [2], [3].

Литература

1. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с. **2.** Gromak V.I., Laine I., Shimomura S., Painleve Differential Equations in the Complex Plane, Walter de Gruyter. // Berlin, New York, 2002. 303 p. **3.** Брюно А.Д., Чухарева И.В. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. // Препринт N49, 2003, М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 32 с.

О СТЕПЕННЫХ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ[1]

Гриднев А.В. (Москва)
E-mail gridnev_a@mail.ru

Рассматривается третье уравнение Пенлеве

$$-w''w + w'^2 + e^z w(aw^2 + b) + e^{2z}(cw^4 + d) = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — ненулевые комплексные числа.

Исследуются все возможные степенные асимптотики его решений $w(z)$. Имеет место следующее утверждение:

Т е о р е м а 1. Степенные разложения решений уравнения (1) в окрестности произвольной точки z_0 имеют вид:

[1]Работа выполнена при поддержке гранта НШ 1464.2003.1, РФФИ 04-01-00344

1. $w = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, где $c_0 \neq 0$, c_1 — произвольные постоянные, а остальные c_k однозначно определены;

2. $w = c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \sum\limits_{k=4}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, где $c_1 = \pm\exp(z_0)\sqrt{-d}$, $c_2 = \exp(z_0)[-b/2 \mp \sqrt{-d}]$, c_3 произвольно, а остальные c_k однозначно определены;

3. $w = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, где $c_{-1} = \pm\exp(-z_0)/\sqrt{c}$, $c_0 = \exp(-z_0)[-a/(2c) \mp 1/\sqrt{c}]$, c_1 произвольно, а остальные c_k однозначно определены.

Для исследования экспоненциальных асимптотических разложений решений уравнения (1) рассматривается модифицированное третье уравнение Пенлеве

$$-\ddot{w}wt - \dot{w}wt + \dot{w}^2t + w(aw^2+b) + t(cw^4+d) = 0, \quad \text{где } t = \exp z. \quad (2)$$

Т е о р е м а 2. Для любого $r \in (-1,1)$ уравнение (2) в окрестности точки $t_0 = 0$ имеет решение вида:

$$w = c_r t^r + c_q t^q + \sum c_s t^s, \quad (3)$$

где суммирование производится по $s \in \{k = r + l(1+r) + m(1-r)$, целые $l, m \geqslant 0$, $l+m > 0\}$, $s \geqslant q$, $c_r \neq 0$ произвольно, c_q зависит от r, а остальные c_s однозначно определены.

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА НЕЙМАНА[1]

Гриценко А.В., Прядиев В.Л. (Воронеж)

E-mail alex_gr@rambler.ru; prayd@vmail.ru

Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} -u''(x) + s\,u(x) = f(x), \\ u'(x)|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1, гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ)(грант № Е02-1.0-46), РФФИ (гранты № 04-01-00049, 02-01-00307), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004)

Γ – открытый связный геометрический граф, $\partial\Gamma$ – множество его граничных вершин; s – комплексный параметр ($\mathrm{Re}\, s > 0$). Уравнение в задаче (1) понимается в соответствии с [1], что в частности означает непрерывность $u(x)$ в вершинах графа и выполнение в них условия гладкости, адекватного закону Кирхгофа.

Один из возможных путей исследования краевой задачи для параболического уравнения на геометрическом графе, моделирующей распределение электрического потенциала в нейроне (см. [2]), подразумевает исследование асимптотики функции Грина $G(x, \xi; s)$ (при $s \to \infty$) задачи (1).

Теорема. *Пусть* Γ *– граф-дерево, т.е. не содержит циклов. Пусть* α *– произвольная граничная вершина* Γ*, тогда* $G(x, \alpha; s) = O^*(s^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho(\alpha,x)\sqrt{s}})$ *(при* $s \to \infty$*), где* $\rho(\alpha, x)$ *– длина несамопересекающегося пути (содержащегося в* Γ*), соединяющего точки* x *и* α.

Замечание. Утверждение этой теоремы сохраняет свою силу в случае, когда уравнение в (1) заменяется на $-(p(x)u'(x))' + s\,u(x) = f(x)$, где $p(x)$ – кусочно-постоянна и положительна и может иметь разрывы лишь в вершинах графа. При этом, правда, в показателе у экспоненты следует добавить множитель $\sqrt{\overline{p}(x)}$, где $\min\limits_{\Gamma} p(x) \leqslant \overline{p}(x) \leqslant \max\limits_{\Gamma} p(x)$.

Литература

[1] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2003.-272 с.

[2] Грищенко А.В., Прядиев В.Л. Решение одной модели распределения электрического потенциала в нейроне // Материалы конференции "Современные методы теории функций и смежные проблемы".-Воронеж, 2003.- С. 83-84.

О ПРИНЦИПЕ ХИКСА ДЛЯ РАСПЛЫВЧАТОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Гулынина Е.В. (Минеральные Воды)

E-mail belgtasm@mw.narzan.com

Рассматривается каноническая модель Леонтьева

$$x = Ax + y, \tag{1}$$

с неотрицательной расплывчатой матрицей $A = \|a_{ij}\|_1^n$ и расплывчатой правой частью y. Предполагается, что технологическая матрица A имеет неразложимую минеранту и что модель (1) продуктивная, т.е. хотя бы для одного запроса y существует какое-либо решение (расплывчатое) системы (1).

Справедлив точный аналог детерминированного принципа Хикса.

Теорема. При существенном увеличении правой части (1) преимущественно по одной компоненте соответствующее оптимальное решение существенно возрастет — абсолютно и относительно — по этой же компоненте.

Учитывая реальный экономический смысл модели (1), мы использовали при описании расплывчатых дефиниций естественный порядок в R^n и положительность резольвенты $(I - \overline{A})^{-1}$, где $\overline{A}$ — одна из уточняющих версий A. Расплывчатость отдельных элементов нами трактовалась с помощью числовых промежутков или конусных отрезков, а расплывчатость целевого множества решений — сдвинутым конусом.

ОБ ОДНОЙ СЛАБО НЕРЕГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Гуревич А.П., Хромов А.П. (Саратов)

Пусть L - оператор дифференцирования

$$L(y) = y'(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

с интегральным условием

$$\int\limits_0^1 ty(t)\,dt = 0. \tag{2}$$

Резольвента $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E - единичный оператор, имеет степенной рост по спектральному параметру λ.

Рассмотрим средние Рисса вида $-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f\,d\lambda$, где $g(\lambda, r)$ удовлетворяет условиям: 1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leqslant r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любых $r > 0$;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы "Университеты России" (проект ур.04.01.041) и гранта РФФИ (проект № 03-01-00169).

2) при фиксированном λ $\lim_{r\to\infty} g(\lambda, r) = 1$; 3) $\exists C > 0$ такое, что $|g(\lambda, r)| \leqslant C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leqslant r$; 4) $\exists \beta > 0$ такое, что $g(r\exp(i\varphi), r) = O\left(|\varphi \pm \frac{\pi}{2}|^{\beta}\right)$ (оценка равномерна по φ).

Основной результат работы содержится в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть средние Рисса задачи (1)-(2) при некотором $\beta > 0$ сходятся к $f(x)$ в $C[0,1]$, тогда: 1) $f(x) \in C[0,1]$; 2) $\int_0^1 xf(x)\,dx = 0$; 3) $f(1) - \int_0^1 f(x)\,dx = 0$.*

Теорема 2. *Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет условиям 1)-3) и $f(x) \in C^1[1-\delta, 1]$, где $0 < \delta < 1$, тогда при $\beta > 1$ средние Рисса сходятся к $f(x)$ в пространстве $C[0,1]$.*

Отметим, что свойства средних Рисса на произвольном отрезке $[a,b] \subset (0,1)$ для слабо нерегулярных краевых задач в случае дифференциальных операторов n-го порядка с краевыми условиями на концах отрезка $[0,1]$ изучались в [1].

Литература

1. Гуревич А.П., Хромов А.П. // Spectral and Evolutional Problems, KROMSH–2002, Sept. 18–19, 2002, Sevastopol, Laspi, Vol.13, Simferopol, 2003, p. 113–120.

КОРРЕКТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Гурьянова Н.Ю., Кириченко В.Ф. (Саратов)

Рассмотрим первую краевую задачу, определяющую условия статического равновесия неоднородных пластин переменной толщины в рамках геометрически нелинейной теории Рейсснера

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{h_1}^{h_2}\sigma_{ii}dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\int_{h_1}^{h_2}\sigma_{12}dx_3 = 0;$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{h_1}^{h_2}A\sigma_{ii}dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\int_{h_1}^{h_2}A\sigma_{12}dx_3 + \int_{h_1}^{h_2}C\sigma_{i3}dx_3 = 0,\ i = 1,2;$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\int_{h_1}^{h_2}B\sigma_{ii}dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\int_{h_1}^{h_2}\sigma_{ii}dx_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\int_{h_1}^{h_2}\sigma_{12}dx_3\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{h_1}^{h_2}C\sigma_{i3}dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_{3-i}\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\int_{h_1}^{h_2}B\sigma_{12}dx_3\right) = g(x_1, x_2); \tag{1}$$

$$u_{30}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_{30}}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, u_{ij}\Big|_{\partial\Omega} = 0, i = \overline{1,2}, j = \overline{0,1}, \qquad (2)$$

где Ω — измеримая односвязная область в евклидовом пространстве R^2 с границей $\partial\Omega$; $h_1 = h_1(x_1,x_2)$, $h_2 = h_2(x_1,x_2)$ — известные функции, определенные на замыкании $\overline{\Omega}$; $E(x_1,x_2)$ — модуль Юнга; $\nu(x_1,x_2)$ — коэффициент Пуассона; $u_{i0}(x_1,x_2)$, $u_{i1}(x_1,x_2)$, $u_{30}(x_1,x_2)$ — искомые функции; $g(x_1,x_2)$ — интенсивность поперечной нагрузки (определение компонент тензора напряжений σ_{ij}, тензора деформаций ε_{ij} и функций $A(x_1,x_2,x_3)$, $B(x_1,x_2,x_3)$, $C(x_1,x_2,x_3)$, — соответствует определениям из работы [1]). Имеет место

Теорема. *Пусть $\partial\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения и, кроме того,*

$$g \in H^{-2}(\Omega), h_i(x_1,x_2) \in C^2(\overline{\Omega}); E(x_1,x_2), \nu(x_1,x_2) \in C(\overline{\Omega}), i = \overline{1,2}.$$

Тогда

1) существует хотя бы одно обобщенное решение $\{\widetilde{u}_{ij}, \widetilde{u}_{30}\}$, $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{0,1}$, задачи (1), (2), при этом

$$\widetilde{u}_{30} H_0^2(\Omega), \widetilde{u}_{ij} \in H_0^l(\Omega); \qquad (3)$$

2) приближенное решение задачи (1), (2) может быть найдено методом Бубнова–Галеркина, при этом все множество приближенных решений слабо компактно в пространствах, соответствующих (3), и его предельные точки определяют решение задачи (1),(2).

Литература

1. Кириченко А.В. Корректность эволюционных уравнений в теории неоднородных оболочек Рейсснера переменной толщины // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: СГТУ, 2003. С.138–143.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВХОДОВ В ЗАДАЧАХ ГАРАНТИРОВАННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ[1]

Гусев М.И. (Екатеринбург)
E-mail gmi@imm.uran.ru

Исследуется задача оптимального выбора входов при идентификации параметров управляемой системы по результатам измерений в рамках минимаксного (гарантированного) подхода. Управляемую система задана уравнением

$$\dot{x} = f(t, q, x, u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

($x \in R^n$, $u \in R^r$) правая часть которого зависит от неизвестного векторного параметра q, априорная информация о q исчерпывается включением $q \in Q$, Q– компакт в R^m, имеющий ненулевую меру Лебега. Ограничения на управление (вход системы) заданы в виде $u(t) \in U$, п.в. $t \in [t_0, t_1]$. Пусть на промежутке $[t_0, t_1]$ измерению доступен вектор $y(t) = g(t, x(t), u(t)) + \xi(t)$, где $g : [t_0, t_1] \times R^n \times U \to R^k$ – непрерывная функция, $\xi(t)$ – ошибка измерений, априорная информация о которой задана неравенством $W(\xi(\cdot)) \leqslant 1$, W – непрерывный неотрицательный функционал в $L_\infty[t_0, t_1]$. Пусть $y(t) = y^*(t) + \xi(t)$ реализовавшийся сигнал в системе, порожденный неизвестным "истинным"значением параметра $q^* \in Q$, управлением $u(t)$ и ошибкой измерения $\xi(t)$. Точность оценивания неизвестного параметра q^* характеризуется величиной интеграла

$$I(y(\cdot), u(\cdot)) = \int_Q \alpha(q) V(q, y(\cdot), u(\cdot)) dq,$$

где $V(q, y(\cdot), u(\cdot)) := W(y(\cdot) - g(\cdot, x(\cdot, q), u(\cdot)))$ – информационная функция задачи, $x(t, q)$ – решение системы (1), $\alpha(q) \geqslant 0$ – заданная весовая функция. В докладе рассматривается задача

$$\max_{u(\cdot)} \min_{W(\xi(\cdot)) \leqslant 1} I(y^*(\cdot) + \xi(\cdot), u(\cdot)).$$

В предположении, что W –интегральный квадратичный функционал получены необходимые условия оптимальности входов в форме принципа максимума, приведены основанные на данных условиях алгоритмы решения рассматриваемой задачи и результаты численного моделирования.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00663) и гранта Н.Ш. 1889.2003.1

О НЕОБХОДИМОСТИ КОРРЕКЦИИ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ ВЫПУСКНЫХ КЛАССОВ

Данкова И.Н. (Воронеж)

Приступая к работе с учащимися в начале учебного года, учитель должен установить степень усвоения материала, изученного ранее. Необходимыми источниками содержания оценочных средств являются программы, учебники и материалы государственных образовательных стандартов. Содержание контролируемой информации должно полностью отвечать целям контроля, куда включаются те разделы, которые более ценны по значимости учебной информации.

Проверочная работа, предназначенная для диагностики знаний учащихся 11-х классов, имеет целью показать преподавателю и учащимся недостатки в ходе обучения, выявить учеников, испытывающих трудности в овладении учебным материалом, а также актуализировать знания и мотивировать работу учащихся по повторению изученного материала. Необходимость организации обобщающего повторения в начале учебного года имеет ряд причин. Во-первых, неизбежен непроизвольный процесс забывания, который приводит к утрате четкости, уменьшению объема знаний. Во-вторых, возвращаясь к ранее изученному, обобщающее повторение в начале учебного года дополнит ранее полученные знания новыми сведениями, создаст условия для более прочного закрепления всей системы знаний. В-третьих, повторение позволит скоординировать действия преподавателя по ликвидации пробелов в знаниях учащихся.

В соответствии с программой, материал изучается и обобщается крупными блоками. После изучения каждого блока, учащимся предлагаются трехуровневые контрольно-измерительные материалы, состоящие из трех частей. В первой части используются задания с выбором одного ответа из четырех предложенных вариантов, во второй части - задания с кратким ответом и в третьей - задания с развернутым ответом.

Для адаптации учащихся к новой форме аттестации некоторые работы выполняются на бланках идентичных бланкам ЕГЭ.

Организуя обучение учащихся выпускных классов, больше внимания следует уделить содержательному раскрытию математических понятий, объяснению сущности математических методов и границ их приложений, показу возможностей применения теоретических фактов для решения различных классов математических задач.

О КОНСТАНТЕ $\mathcal{K}$-ДЕЛИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛА ПЕТРЕ ПАРЫ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

Дмитриев А.А. (Владивосток)
E-mail dmitriev@iacp.dvo.ru

Для заданной пары банаховых пространств (A_0, A_1) и элемента $a \in A_0 + A_1$ $\mathcal{K}$-функционал определяется при $t \in \mathbb{R}^+$ равенством $\mathcal{K}(t, a, A_0, A_1) = \inf\{\| a_0 \|_{A_0} + t \| a_1 \|_{A_1} : a = a_0 + a_1,\ a_i \in A_i,\ i = 0, 1\}$. $\mathcal{K}(\cdot, a, A_0, A_1)$, очевидно, положительная вогнутая функция на $\mathbb{R}^+$.

В работе [1] доказано, что для любого $a \in A_0 + A_1$ и вогнутых функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ из условия $\mathcal{K}(\cdot, a, A_0, A_1) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ вытекает, что найдутся $a_n \in A_0 + A_1$, для которых $\mathcal{K}(\cdot, a_n, A_0, A_1) \leqslant \gamma\varphi_n$ с некоторой константой $\gamma (\leqslant 14)$. (Свойство $\mathcal{K}$-делимости).

В [2] было показано, что $\gamma \leqslant 8$. Мною была получена оценка $\gamma \leqslant (1 + \sqrt{2})^2$. Это неравенство также доказано в [3].

В случае пары банаховых решеток (E_0, E_1) для константы γ справедливо неравенство $\gamma \leqslant 4$.

Доказательство использует «фундаментальную лемму Питре», положительность элемента $f \in (E_0 + E_1)$ и следующее утверждение

Для любой вогнутой функции φ найдутся возрастающая последовательность точек $t_n \in \mathbb{R}^+$ и производные числа α_n^1 такие, что $\varphi'(t_n + 0) \leqslant \alpha_n^1 \leqslant \varphi'(t_n - 0)$, $\alpha_n^0 = \varphi(t_n) - \alpha_n^1$,

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(+0) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \min\{\alpha_{n+1}^0, t\alpha_n^1\} + t\varphi'(+\infty) \leqslant 4\varphi(t). \qquad (1)$$

Константа 4 в неравенстве (1) является точной.

Литература

1. *Брудный Ю.А., Кругляк Н.Я.*, Функторы вещественной интерполяции// ДАН СССР, 1981, Т. 256, № 1, С. 14-17.

2. *Cwikel M.*, K-divisibility of the K-functional and Calderon coupels // Arc.Math., V. 22, 1984, P. 39-62.

3. *Cwikel M., Jawerth B., Milman M.*, On the fundamental lemma of interpolation thiory // J.Approx.Theory, V. 60, 1990, P. 70-82.

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ СОЛИТОНОВ ПРИ КВАЗИРЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С НЕОДНОРОДНО-УШИРЕННЫМ КВАНТОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

Дмитриев А.Е., Паршков О.М. (Саратов)
E-mail tech@mail.saratov.ru

Начиная с работы [1] и по настоящее время большое количество работ было посвящено исследованию процессов образования солитонов электромагнитного излучения при взаимодействии коротких мощных импульсов излучения с резонансной нелинейной средой. Одним из наиболее важных результатов, полученных при исследовании проблемы этой, была т.н. «теорема площадей», предсказывающая характер эволюции входного импульса по величине площади под кривой, описывающей его амплитудную модуляцию. При выводе этой теоремы авторы пренебрегали наличием фазовой модуляции, что не позволяло рассматривать, например, случай отстройки от резонанса. Кроме того, не учитывались релаксационные процессы, что приводило к нереальным предсказаниям стабильности солитонов на бесконечно больших расстояниях. Это существенно сужало область применения теоретических результатов к реальным ситуациям.

В серии работ [2-4] были теоретически предсказаны и экспериментально исследованы случаи формирования т.н. «бризеров», возникающих при существенных отличиях входной формы импульса от асимптотической. Эти импульсы отличались заметной амплитудной и фазовой модуляцией и большей скоростью распространения. Однако дальнейшего развития эта теория в то время также не получила.

Математическая модель процесса квазирезонансного взаимодействия импульсов когерентного электромагнитного излучения со спектрально-неоднородной средой была построена на основе системы уравнений в частных производных относительно комплексных амплитуд полей и элементов матрицы плотности среды, моделируемой набором двухуровневых квантовых систем [5]. Учет спектральной неоднородности резонансного перехода выразился в наличии интеграла в уравнении для амплитуды поля, описывающего «усреднение» поляризации перехода по неоднородно-уширенному спектральному контуру.

На базе этой модели были разработаны алгоритм решения поставленной задачи и основанная на нём программа расчета параметров импульсов когерентного электромагнитного излучения, распространяющихся в нелинейной резонансной среде. Обобщение результатов серии численных экспериментов, проведенных по указанной выше методике, позволило уточнить формулировку «теоремы площадей» на случай наличия отстроек от резонанса и расширить её смысл с учетом возможности формирования «бризеров».

Литература

1. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 908, (1967).
2. Lamb G.L., Jr. *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 99 (1971).
3. Hopf F.A., Lamb G.L., Jr., Rhodes C.K., Scully M.O. *Phys. Rev.*, **A3**, 758 (1971).
4. Diels J.C., Hahn, E.L. Phys. Rev., **A10**, 2501 (1974).
5. Вершинин А.Л., Дмитриев А.Е., Паршков О.М. Квантовая электроника, **33**, 993(2003).

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ УСТОЙЧИВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО РЕАКТОРА[1]

Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. (Черноголовка)

E-mail duba@icp.ac.ru

Рассматривается задача максимизации мощности устойчивого стационарного режима в одномерной модели тепловыделяющего реактора путем перераспределения источников. В рамках модели предполагается учесть реальный немонотонный S-образный закон теплообмена, наложение ограничения на температуру. При естественных упрощающих предположениях, задача формализуется как

$$\begin{array}{l} \int Q(T(x))dx \to \max, \quad y(0)=0, \quad y(L)=0 \\ T'=y, \quad y'=Q(T)-u \quad ,T(x)\leqslant T^* \quad ,0\leqslant u(x)\leqslant U^* \\ \lambda(Q'(T))\leqslant 0, \quad 0\leqslant x\leqslant L \end{array} \qquad (1)$$

Здесь L длина реактора, $Q(T)$ закон теплоотвода, $u(x), U^*$ интенсивность источника в точке x и ее верхняя граница, T^* есть верхняя допустимая граница температуры. Ограничение неравенства $\lambda(Q'(T)) \leqslant 0$ описывает устойчивость режима к возмущениям.

[1]Работа выполнена при поддержкне РФФИ (проект 03-01-00197)

Функционал $\lambda(z) := max\{\lambda : z'' - \sigma z = \lambda z, \int z^2 dx = 1, z'(0) = z'(L) = 0\}$ выражает правую границу спектра двухточечной краевой задачи Штурма-Лиувилля. Проблема (1) является задачей оптимального управления (ОУ) нетерминального типа, так как содержит функционал, зависящий от фазовой компоненты траектории "в целом". Для ее решения применим обобщенный принцип максимума (ПМ) задач ОУ с функциональными ограничениями. Система условий этого ПМ имеет вид

$$\begin{array}{l} d\psi_T = (\alpha - \psi_y)Q'(T) - \beta Q''(T)z^2 + \mu_T(dx) \\ d\psi_y = -\psi_T + c_0\delta(x) + c_L\delta(x-L) \\ \psi_y(0) = \psi_y(L) = \psi_T(0) = \psi_T(L) = 0, \quad (T - T^*)\mu_T(dx) = 0 \\ \psi_y(x)u(x) = \max_{0 \leqslant u \leqslant U^*} \psi_y(x)u \end{array} \qquad (2)$$

где $\psi_T, \psi_y, \alpha, \beta, c_0, c_L, \mu_T(dx)$ сопряженные множители, а $z(x)$ обозначает соответствующую правую собственную функцию. В докладе описаны свойства экстремалей этого ПМ, приведены результаты аналитического и численного исследования оптимальных стационарных режимов тепловыделения.

О МАССИВНОСТИ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК СУБДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ВЫПУКЛЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КОМПАКТАХ[1]

Дубовицкий В.А. (Черноголовка)
E-mail dubv@icp.ac.ru

Рассматривается непрерывный выпуклый функционал $f(x)$, определенный на выпуклом компактном подмножестве $Q = dom f$ Банахова пространства X. Согласно теореме Бренстеда-Рокафеллара [1], множество точек субдифференцируемости $dom\partial f$ выпуклого полунепрерывного снизу функционала плотно на его эффективной области $dom f$. Однако этот результат не характеризует "массивности"совокупности точек субдифференцируемости и не говорит о совместной субдифференцируемости семейства функций. Этому посвящена данная работа. Обозначим $int_Q(dom\partial f)$ относительную (на Q) внутренность области определения субдифференциала ∂f, т.е. внутренность множества точек субдифференцируемости f. Установлено следующее

[1]Работа поддержана фондом р2004 наукоград а (проект 04-01-97202).

a) Для всякого непрерывного выпуклого функционала, определенного на выпуклом компакте Q, множество $S = int_Q(dom\partial f)$ непусто и плотно в Q

b) Пусть $\{f_i\}_{i\in I}$ есть семейство выпуклых непрерывных функций, определенных на выпуклом компакте Q. Если это семейство предкомпактно в равномерной норме $C(Q)$, то множество $\cap_{i\in I} dom\partial f_i$ содержит плотное подмножество класса G_δ т.е. массивно.

Данный результат полезен, например, для характеризации устойчивости интегральных представлений Шоке [2] при помощи вероятностных мер, сосредоточенных на множестве $ex(Q)$ крайних точек выпуклого компакта Q. В этом случае рассматривается компактное, "зондирующее" представляющие меры, множество непрерывных аффинных на Q функций, имеющих на $ex(Q)$ единичную константу Липшица.

Литература

[1] Bronsted A., Rocafellar R.T. On a subdifferentiability of convex functions // Proc. Am. Math. Soc. 1965 (16). 605-611.

[2] Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир. 1968.

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ПРЕПОДАВАНИЮ КУРСОВ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В УНИВЕРСИТЕТАХ В РАМКАХ КОНЦЕПЦИИ ЕДИНОГО МНОГОУРОВНЕВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ[1]

Дьяченко М.И., Потапов М.К. (Москва)

E-mail mkpotapov@mail.ru, dyach@mail.ru

В настоящее время во многих университетах для студентов математических специальностей читаются курсы действительного и функционального анализа (иногда объединяемые вместе). По этой тематике имеется ряд хороших учебников и монографий (см., например, [1] и [2]), которые могут использоваться как основной или вспомогательный источник при чтении лекций. Имеются и задачники по данному курсу, хотя с ними дело обстоит несколько хуже. В то же время, при изучении предмета у студентов возникает определенный "разрыв"между теоретической частью курса и решаемыми на упражнениях задачами. Это связано с тем, что многие раз-

[1]Исследования были выполнены при финансовой поддержке РГНФ, проект 02-06-00057а.

делы действительного и функционального анализа не имеют, т.н. типовых задач, например, таких, как нахождение производных и неопределенных интегралов в математическом анализе, а имеющиеся задачи достаточно трудны и "уникальны". Данный "разрыв" неизбежно приводит к ухудшению восприятия учащимися данного курса. Известная книга [3], в определенной степени, была призвана изменить эту неблагоприятную ситуацию, однако не все разделы курса представлены в ней с достаточной полнотой.

Исследовательская группа, созданная для реализации проекта РГНФ 02-06-00057а, ставит перед собой задачу создания учебных пособий для непрерывного многоуровневого математического образования. Эти пособия должны сочетать теоретические и прикладные аспекты соответствующих областей математики, чтобы обеспечить наиболее высокую степень усвоения учащимися изучаемого материала. Применительно к рассматриваемой тематике, проходит работа по созданию учебного пособия по действительному анализу.

Это пособие состоит из двух частей. В первой из них теоретические факты излагаются в виде последовательно решаемых задач. Кроме того, в ней содержатся и много других задач, сгруппированных по темам. В общей сложности, первая часть книги содержит около 900 задач, относящихся ко всем основным разделам университетского курса действительного анализа, а также к некоторым темам из функционального анализа.

Во второй части книги приводятся подробные решения всех задач из первой части. По мнению авторов, такая система подачи материала будет, с одной стороны, способствовать развитию творческого потенциала учащихся, стимулируя их к самостоятельным размышлениям, и, с другой стороны, в случае появления серьезных затруднений при решении той или иной задачи, студент всегда имеет возможность ознакомиться с правильным решением. Представляется, что такая книга окажется востребованной, и в дальнейшем возможно написание аналогичного пособия по оставшимся разделам функционального анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

2. В.А.Садовничий. Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999.

3. А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАБИЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ И ГЕОМЕТРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Евтушик Л.Е. (Москва)
E-mail suvorova@mech.math.msu.su

Если $T^p(X_n)$- расслоение р-скоростей гладкого многообразия X_n, $J^pT(X_n)$- расслоение р-струй сечений касательного расслоения $T(X_n)$, то тождественное по $T(X_n)$ отображение γ^p

$$\begin{array}{ccc} T^p(x_n) & \xrightarrow{\gamma^p} & J^pT(X_n) \\ \downarrow{\scriptstyle pr} & & \downarrow{\scriptstyle pr} \\ T(X_n) & \xrightarrow{id} & T(X_n) \end{array}$$

даст естественное обобщение понятия связности для главного расслоения р-реперов $H^p(X_n)$ над X_n, не сводимое однако к классическому случаю, определяемому горизонтальным распределением (т.е. линейному в нашем понимании случаю) на расслоении $H^p(X_n)$. А так как расслоение $J^pT(X_n)$ обладает естественной проекцией π на $T^{p+1}(X_n)$, то среди нелинейных связностей γ^p обнаруживается большой запас таких γ^p_s, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^p(x_n) & \xrightarrow{\gamma^p_s} & J^pT(X_n) \\ \downarrow{\scriptstyle id} & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T^p(X_n) & \xleftarrow{id} & T^{p+1}(X_n) \end{array}$$

Следовательно, для стабильных связностей γ^p_s определена дифференциальная система порядка р+1

$$f_{p+1} = \pi \circ \gamma^p_s : \quad T^p(X_n) \longrightarrow T^{p+1}(X_n)$$

интегральные кривые которой играют роль обобщенных геодезических для связности γ^p_s.

МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД ВАЖЕВСКОГО

Евченко В.К.

Топологический метод Т. Важевского предназначен для доказательства существования решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, лежащего в заданном открытом множестве ("трубке") при изменении полупрямой. Он был опубликован в Ann. Soc. Polon. Math., 1947, 20, p. 279-313 и существенно опирался на теорию ретрактов, созданную другим польским математиком К. Борсуком. С исторической точки зрения интересно отметить, что специальные случаи этого метода и рассуждения, использованные при доказательстве, были известны ранее.

Метод направляющих функций в своем первоначальном виде был предназначен для обнаружения периодических или ограниченных решений, т.е. решений, определенных на всей числовой прямой; он тесно связан с оператором Пуанкаре, неподжвижные точки которого, как известно, определяют периодические решения. Этот метод был обнародован М.А. Красносельским и А.И. Перовым в Докладах АН СССР, 1958, 123, №2, 235-238. Он опирается на более классический фундамент – теорию степени отображения, разработанную Л. Кронекером, Л. Брауэром и Х. Хопфом.

В некоторых случаях результаты, полученных топологическим методом Важевского могут быть получены также методом направляющих функций Красносельского-Перова.

В качестве примера рассмотрим систему $\dot{x} = f(t,x,y)$, $\dot{y} = g(t,x,y)$, где f и g непрерывные функции при $t \geqslant 0$ и всех x, y. Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – произвольные положительные непрерывно дифференцируемые функции, причем выполнены следующие условия

$$xf(t,x,y) > u(t)\dot{u}(t) \text{ при } |x| = u(t), \ |y| < v(t);$$

$$yg(t,x,y) < v(t)\dot{v}(t) \text{ при } |x| \leqslant u(t), \ |y| = v(t).$$

Топологическим методом Важевского доказывается, что системы имеет решение $x(t)$, $y(t)$, для которого $|x(t)| < u(t)$, $|y(t)| < v(t)$ при всех $t \geqslant 0$.

Показывается, что после замены переменных $x = u(t)\xi$, $y = v(t)\eta$, изучаемая систем приводится к виду, для которого существование решения, удовлетворяющего ограничениям $|\xi(t)| < 1$, $|\eta(t)| < 1$, может быть доказано методом направляющих функций.

ОЦЕНКИ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ

Ежак С.С. (Москва)

E-mail vippro@rambler.ru

Рассматривается задача Штурма-Лиувилля с интегральным условием:

$$y''(x) - P(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \int\limits_0^1 P^\alpha(x)dx = 1, \quad \alpha \neq 0, \tag{2}$$

где $P(x)$ - неотрицательная ограниченная функция на $[0,1]$. Множество таких функций $P(x)$ обозначим A_α. Исследуется зависимость первого собственного значения λ_1 этой задачи от потенциала $P(x)$ при различных значениях α.

Пусть $R[P,y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx + \int_0^1 P(x)y^2(x)dx}{\int_0^1 y^2(x)dx}$.

Согласно вариационному принципу

$$\lambda_1 = \inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[P,y].$$

Пусть $m_\alpha = \inf_{P(x)\in A_\alpha} \lambda_1, \quad M_\alpha = \sup_{P(x)\in A_\alpha} \lambda_1$.

Теорема. Если $\alpha > 1$, то $m_\alpha = \pi^2$, $M_\alpha < \infty$, причем существуют функции $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $P(x) \in A_\alpha$, такие что

$$\inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[P,y] = R[P,u] = M_\alpha. \tag{3}$$

Если $\alpha = 1$, то $m_1 = \pi^2$, $M_1 = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+4}$, и существуют функции $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $P(x) \in A_1$, такие что выполняется условие (3) при $\alpha = 1$. Если $1/3 < \alpha < 1$, то $m_\alpha = \pi^2$, $M_\alpha = \infty$. Если $\alpha = 1/3$, то $m_\alpha \geqslant \pi^2$, $M_\alpha = \infty$. Если $\alpha < 1/3$, то $m_\alpha > \pi^2$, $M_\alpha = \infty$.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СВЯЗИ С ВВЕДЕНИЕМ ЕГЭ

Емелина Л.Л. (Воронеж)

В последние годы происходит переход от традиционных форм выпускных и вступительных экзаменов к централизованному тестированию, получившему название Единого государственного экзамена (ЕГЭ). Результаты тестирования засчитываются в качестве выпускных испытаний в средних учебных заведениях и в качестве вступительных экзаменов во многих вузах России.

Необходимость ЕГЭ не вызывает сомнений, поскольку в нашу жизнь все стремительнее внедряются информационные технологии и в перспективе реален переход к единому компьютерному тестированию. Вместе с тем это нововведение требует длительного адаптационного периода так как в корне меняет привычные установки в отношении экзаменов.

Анализ результатов ЕГЭ по данным Главного управления образования областной администрации показывает, что хорошие результаты выпускники 2003 года имеют по гуманитарным наукам. С точными науками ситуация не столь утешительна: свыше 15% выпускников, сдававших математику, и более 11%, выбравших физику, получили неудовлетворительные оценки.

В ходе подготовки учащихся к выпускному экзамену в форме централизованного тестирования учителя математики столкнулись с рядом проблем.

Прежде всего, такая форма контроля исключает возможность проследить то, как мыслил ученик при выборе правильного ответа, а, следовательно, учитель не может корректировать мышление учащегося. Кроме того, предлагаемые тесты охватывают значительно больший по объему материал, чем предусматривается программами 10-11 классов, что приводит к снижению итоговых результатов тестирования.

Количество часов, отводимых на математику в старших классах явно недостаточно, так как кроме изложения программного материала учитель должен отработать с учащимися навыки заполнения бланков и быстрого ответа на вопросы без обстоятельных вычислений и преобразований. Многие преподаватели в этих условиях пошли по пути "наименьшего сопротивления", предпочтя математической культуре тренинг, "натаскивание", механическое выполнение стандартных приемов.

Многочисленные публикации в специальной литературе и общественной прессе говорят о том, что многие школьники, набравшие высокие баллы на ЕГЭ и поступившие в вузы, не готовы изучать математику по вузовской программе. По видимому, итоговая аттестация в форме ЕГЭ должна строиться на принципах добровольного участия. Количество часов отводимых на математику в старшей школе должно быть увеличено.

Бесспорно, что ЕГЭ неизбежен, так как способствует более объективной оценке знаний учащихся, но вместе с тем возникает и ряд вопросов. Самое разумное в этой ситуации - сохранять чувство меры.

О НЕКОТОРЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

Ерзакова Н.А. (Москва)
E-mail naerz@mail.ru

Пусть H – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство с базисом $\{e_i\}$. Обозначим через $B = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$ замкнутый шар и через $S = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ сферу радиуса 1 в H. Пусть u есть фиксированный элемент из B с координатами $0 < u_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть в пространстве H задан линейный оператор F следующим условием: $F(e_i) = (1 - u_i)e_i$. Равенством $f(x) = F(x) + (1 - \|x\|)u$ зададим в пространстве H оператор f. Тогда непрерывный оператор f переводит единичный шар в себя, но не имеет неподвижных точек. Более того, является асимптотически правильным отображением.

Полагая $g(x) = f(x) - x$, построим отображение $g : B \to H \backslash \{0\}$ без положительных собственных значений, т.е. $g(x) \neq \lambda x$ при $\lambda > 0$ и $x \in S$.

Для $0 < r < 1$ и отображения g построим другое отображение

$$\sigma(x) = \begin{cases} -g(\frac{x}{r}) & \text{для } \|x\| \leqslant r, \\ \frac{\|x\| - r}{1 - r} x - \frac{1 - \|x\|}{1 - r} g(\frac{x}{\|x\|}) & \text{для } \|x\| > r. \end{cases}$$

Имеем $\sigma(x) \neq 0$ для всех $x \in B$. Таким образом, определено отображение $\rho(x) = \sigma(x)/\|\sigma(x)\|$, являющееся ретракцией.

Напомним, что мерой некомпактности $\beta(M)$ множества M называется супремум тех $d > 0$, для которых в M существует бесконечная последовательность $\{u_n\}$, такая, что $\|u_n - u_m\| \geqslant d$ для всех $n \neq m$.

Для оператора (вообще говоря, нелинейного) $T : X \to X$ обозначим

$$\beta(T) = \inf\{k > 0 : \beta(T(M)) \leqslant k\beta(M),\ \forall M \subset X\}$$

его меру некомпактности.

Пусть $W_\beta(H)$ обозначает инфимум всех таких $k > 0$, что существует ретракция $\rho : B \to S$ и $\beta(\rho) \leqslant k$.

Теорема. $W_\beta(H) = 1$.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КЛАССА S_2 НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО ЯДРА ДЖЕКСОНА

Ершова Е.М. (Тверь)

E-mail elersh@list.ru

Рассматриваются операторы класса S_2, имеющие вид

$$\begin{aligned} D^{[2]}_{n,6}(f,x) &= \frac{1}{\Delta^{[2]}_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)(\cos t - \cos\alpha)\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{3n-3} \varrho_k^{(n)}\cos kt\right] dt, \end{aligned}$$

где $K_n(t) = \frac{\sin^6(nt/2)}{\sin^6(t/2)}$, $\Delta^{[2]}_n = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(\cos t - \cos\alpha)\,dt$, $\varrho_k^{(n)} = \frac{1}{\Delta^{[2]}_n}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(\cos t - \cos\alpha)\cos kt\,dt$.

Параметр α подбирается так, чтобы значение величины $\delta_n(\alpha) = \left(1 - \varrho_1^{(n)}\right)^2 + \left(1 - \varrho_2^{(n)}\right)^2$ было минимальным (см. [1]).

Из этого условия получаем, что

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= (391n^8 - 440n^7 - 1179n^6 + 2260n^5 - 1376n^4 + 940n^3 - \\ &- 1456n^2 + 1240n - 400)[n(391n^7 - 6n^5 + 189n^3 - 134n - \\ &- 440n^6 + 20n^4 - 60n^2 + 80)]^{-1}. \end{aligned}$$

Нами получены следующие результаты:

Теорема 1. *Для множителей суммирования оператора $D^{[2]}_{n,6}(f,x)$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ справедливо следующее предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n^3(1 - \varrho_n) = \frac{400}{391}k^2 + \frac{50}{69}k - \frac{50}{69}k^3.$$

Теорема 2. *Если $f, \widetilde{f} \in C^5_{2\pi}$, то равномерно для всех x*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^3[D^{[2]}_{n,6}(f,x) - f(x)] = \\ &= \frac{50}{26979}\left[391\widetilde{f}^{(1)}(x) - 552f^{(2)}(x) + 391\widetilde{f}^{(3)}(x)\right]. \end{aligned}$$

Литература

1. Ершова Е. М. *Экстремальные операторы класса S2* // Воронежская зимняя математическая школа. Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции. Воронеж. 2003. с. 96-97.

ЛИЧНОСТНО ОРИЕНТИРОВАННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

Жуковская Ж.Д., Афендикова М.А., Петраченкова Ж.В. (Воронеж)

Образовательная технология - это способ реализации проекта педагогической системы, способ деятельности, который дает преподавателю возможности, недоступные ни отдельному техническому средству, каким бы совершенным оно ни было, ни отдельному преподавателю, каким бы искусным он ни был. Возможности, возникающие в соединении того и другого, позволяют не только более совершенно решать традиционные задачи, но ставить и решать принципиально новые, ранее неизвестные задачи. Одной из самых продуктивных педагогических технологий является личностно ориентированная технология. В личностно ориентированной педагогической технологии проектируется система человеческой деятельности и целью образовательного процесса становится не усвоение готовых знаний учащимися, а усвоение определенного способа мышления и деятельности, обеспечивающих получение и производство новых знаний.

Нами предлагается личностно ориентированная технология обучения математике в профильных классах и в школе для одаренных детей, реализуемая как в академических (урочных) видах деятельности, так и во внеурочной деятельности; технология, обеспечивающая высококачественную математическую подготовку учащихся в момент их профессионального выбора. Такая технология позволяет обеспечить глубокое и творческое усвоение теоретических знаний, практических навыков и способов деятельности, сформировать основы индивидуального стиля будущей профессиональной деятельности и интеллектуального потенциала учащихся.

Основу технологии составляет "личностная модель" обучения, отличительной особенностью которой является подчеркнутое внимание к индивидуальности каждого учащегося и направленность преподавателя на сотрудничество с детьми. Основной задачей обучения по этой технологии является развитие познавательных, эмоционально-волевых, нравственных и эстетических возможностей учащегося.

Наши исследования позволили выявить в условиях "личностной модели" обучения комплекс последовательных наиболее продуктивных форм организации различных видов учебно-развивающей деятельности: уроки-лекции, уроки решения опорных задач, уроки-семинары обучающих задач, уроки-консультации, зачет, уроки анализа результатов зачета, контрольной работы, уроки анализа результатов контрольной работы, выполнение индивидуальных и групповых заданий, имеющих практическую значимость (подготовка, создание и оформление рефератов, программ, используемых на уроках математики). Важной и продуктивной составляющей личностно ориентированной технологии обучения является организация и содержание внеурочной деятельности, в которую входят: работа в рамках научного общества учащихся (Малая академия наук), музея-лаборатории имени А.П. Киселева, участие в телекоммуникационной викторине, олимпиадах, индивидуальная работа с одаренными детьми, использование компьютерных технологий в системе обучения математике в профильных классах школы. Включение компьютерных средств в учебный процесс для одаренных детей влечет за собой и такие изменения в педагогической деятельности, что можно говорить о приобретении ею нового качества - проектирования системы обучающей деятельности, что является основой личностно ориентированной педагогической технологии.

Использование личностно ориентированной технологии обучения математике в профильных классах способствует самореализации интеллектуального потенциала, развитию одаренности учащихся, что свидетельствует о ее продуктивности в достижении главной цели - высокого качества математической подготовки учащихся.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Жуковская Т.В. (Тамбов)

Предлагается достаточно общий метод приближенного решения задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения

$$x'(t) = (Fx)(t), \quad t \in [a,\, b], \quad x(a) = \alpha, \tag{1}$$

с вольтерровым оператором $F : D^n_{[a,\,b]} \to L^n_{[a,\,b]}$. Разобьем $[a,\, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ и обозначим $\Delta\, t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{0, k-1}$. Пусть при каждом $k = 1, 2, \ldots$ построен такой оператор $F_k : D^n_{[a,\,b]} \to L^n_{[a,\,b]}$, что для $x,\, y \in D^n_{[a,\,b]}$, если $x(t) = y(t)$ при $t \in [a,\, t_i]$, $i = \overline{0, k-1}$, то $(Fx)(t) = (Fy)(t)$ при $t \in [a,\, t_{i+1}]$. Пусть, кроме того, для любого $x \in D^n_{[a,\,b]}$ имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} \|F_k x - Fx\|_L = 0$. Метод состоит в замене задачи (1) приближенной задачей

$$x_k'(t) = (F_k\, x_k)(t), \quad t \in [a,\, b], \quad x_k(a) = \alpha. \tag{2}$$

Решение z_k задачи (2) определяется равенствами:

при $t \in [a,\, t_1]$ $\quad z_{k\,1}(t) = \alpha + \int\limits_a^t (F_k\, 0)(s)\, ds,$

при $t \in [a,\, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, k-1}$,

$$z_{k\,i+1}(t) = \begin{cases} z_{k\,i}(t), & t \in [a,\, t_i], \\ z_{k\,i}(t_i) + \int\limits_a^t (F_k\, P_i\, z_{k\,i})(s)\, ds, & t \in [t_i,\, t_{i+1}]. \end{cases}$$

Здесь оператор $P_i : D^n_{[a,\,t_i]} \to D^n_{[a,\,b]}$ некоторым образом продолжает на весь $[a,\, b]$ функции, определенные на $[a,\, t_i]$.

Получены условия сходимости приближенного метода. Предложены конкретные способы построения операторов F_k, позволяющие получить аналоги методов Тонелли, Эйлера, Рунге-Кутта для решения функционально-дифференциальных уравнений.

К ТЕОРИИ КОНУСОВ В БАНАХОВОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Жуковский Е.С. (Тамбов)
E-mail aib@tsu.tmb.ru

Благодаря работам И.А. Бахтина, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, М.А. Красносельского, Н.В. Марченко, Ю.В. Покорного, А.В. Соболева, В.Я. Стеценко и других авторов, теория операторов в полуупорядоченных пространствах стала неотъемлемым разделом нелинейного анализа, нашла многочисленные приложения. Нашей целью являлось исследование свойств монотонных обобщенно вольтерровых операторов.

Пусть банахово пространство B функций $x : [a,\, b] \to R^m$, полуупорядоченно конусом $B_+ \subset B$. Каждому $\gamma \in [0\,,\, b-a]$ поставим в соответствие измеримое множество e_γ с мерой $\operatorname{mes}(e_\gamma) = \gamma$ так, что $\forall\, \gamma, \eta \in [0, b-a] \quad \gamma < \eta \quad \Rightarrow \quad e_\gamma \subset e_\eta$. Обозначим $v = \{\, e_\gamma \,\}$. Предположим, что для любых $e_\gamma \in v$, $\{y_i\} \subset B$, $\|y_i - y\|_B \to 0$, из равенства $y_i(t) = 0$, при всех $t \in e_\gamma$, $i = 1, 2, \ldots$, следует $y(t) = 0$ при $t \in e_\gamma$. Обозначим $B(e_\gamma)$ – пространство сужений функций из B на множество e_γ с нормой $\|y_\gamma\|_{B(e_\gamma)} = \inf \|y\|_B$, где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $y \in B$ функции $y_\gamma \in B(e_\gamma)$. Пространство $B(e_\gamma)$ является банаховым. Определим оператор $\Pi_\gamma : B \to B(e_\gamma)$ равенством $(\Pi_\gamma y)(t) = y(t)$ при всех $t \in e_\gamma$. Будем говорить, что *конус B_+ в пространстве B является вольтерровым на v*, если при любом $\gamma \in (0, b-a)$ множество $B_{+\gamma} = \Pi_\gamma B_+$ будет конусом в пространстве $B(e_\gamma)$.

В работе предложены определения вольтерровой миниэдральности, вольтерровой сильной миниэдральности, вольтерровой полной правильности, вольтерровой нормальности конуса B_+.

Оператор $K : B \to B$ назван вольтерровым на совокупности v, если для любых $e_\gamma \in v$, $y, z \in B$ из равенства $y(s) = z(s)$ на e_γ следует $(K\,y)(s) = (K\,z)(s)$ на e_γ.

Получены утверждения о локальной разрешимости, продолжаемости и оценках решений уравнения $x(t) = (K\,x)(t)$, $t \in [a, b]$, с вольтерровым на v оператором $R : B \to B$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00324), Министерства Образования РФ (проект № Е02-1.0-212)

О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Жуковский С.Е. (Тамбов)

E-mail aib@tsu.tmb.ru

Многие современные модели в физике, биологии, экономике сводятся к функционально-дифференциальным включениям. Если моделируемый процесс линеен, то соответствующее включение будет порождаться многозначным отображением, имеющим линейные сечения. Изучению свойств таких отображений посвящена эта работа.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, 2^X – множество всех подмножеств множества X, $\overline{A}$ – замыкание множества $A \subset X$, $B(X,Y)$ – линейное нормированное пространство линейных ограниченных операторов $f : X \to Y$, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$, $\mathcal{B} \subset B(X,Y)$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Будем говорить, что многозначное отображение $F_{\mathcal{B}} : X \to 2^Y$, $F_{\mathcal{B}}x = \bigcup\limits_{f \in \mathcal{B}} \{fx\}$, образовано линейными ограниченными операторами. Такое отображение назовем ограниченным, если существует $\sup\limits_{f \in \mathcal{B}} \|f\|$.

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение $F_{\mathcal{B}} : X \to 2^Y$ образовано линейными ограниченными операторами. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) отображение $F_{\mathcal{B}}$ полунепрерывно сверху в точке $x = 0$;

б) отображение $F_{\mathcal{B}}$ непрерывно на X;

в) отображение $F_{\mathcal{B}}$ ограничено;

г) для любого $x \in X$ множество $F_{\mathcal{B}}x$ ограничено в Y.

Теорема 2. *Пусть образованное линейными ограниченными операторами многозначное отображение $F_{\mathcal{B}} : X \to 2^Y$ ограничено. Тогда для его замкнутости необходимо и достаточно, чтобы $F_{\mathcal{B}}x = \overline{F_{\mathcal{B}}x}$ при всех $x \in X$.*

Теорема 3. *Если образованное линейными ограниченными операторами многозначное отображение $F_{\mathcal{B}} : X \to 2^Y$ замкнуто, то $F_{\mathcal{B}} = F_{\overline{\mathcal{B}}}$.*

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00324), Министерства Образования РФ (проект № Е02-1.0-212)

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И НЕСТЕПЕННЫЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ[2]

Завгородняя Ю.В. (Москва)
E-mail zavgorodnyaya@solid.com.ru

Для второго уравнения Пенлеве

$$-w'' + 2w^3 + zw + a = 0, \tag{1}$$

где a — комплексный параметр, исследуются асимптотики его решений $w(z)$. Имеют место следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. Пусть параметр уравнения (1) $a \neq 0$. Тогда

1. уравнение (1) в окрестности точки $z = 0$ имеет решения вида

   $$w = cz^2 + c_5 z^5 + \sum_{l=2}^{\infty} c_{2+3l} z^{2+3l}, \tag{2}$$

   где $c = a/2$, $c_5 = a/40$ и все остальные c_s однозначно определены;

2. уравнение (1) в окрестности бесконечно удаленной точки имеет асимптотические разложения решений вида

   $$w = c_{-1} z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-3k-1} z^{-3k-1}, \tag{3}$$

   где $c_{-1} = -a$, $c_{-4} = 2a(a^2+1)$ и все остальные c_s однозначно определены. Разложение (3) является формальным.

Т е о р е м а 2. Пусть параметр уравнения (1) $a = 0$. Тогда для уравнения (1) при $z \to \infty$ имеются асимптотические разложения решений вида

$$w = \frac{c}{z^{1/4}} \exp\left[\pm\frac{2}{3} z^{3/2} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2c_l}{3(1-l)} z^{3(1-l)/2}\right], \tag{4}$$

где в квадратной скобке знак берется так, чтобы $\pm \mathrm{Re} z^{3/2} < 0$. Разложение (4) является формальным.

---

[2]Работа выполнена при поддержке гранта НШ 1464.2003.1, РФФИ 04-01-00344

ОБОБЩЁННЫЙ ОПЕРАТОР ПРОНИ АППРОКСИМАЦИИ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ[1]

Завьялов М.Н. (Красноярск)
E-mail zavyalovmn@mail.ru

Рассматривается задача аппроксимации произвольной вектор-функции $F(t)$, заданной на конечном множестве, с помощью вектор-функции $Y(t)$, являющейся решением некоторой системы однородных линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t).$$

Здесь $Y(t)$ – вектор-функция из n компонент, A – квадратная матрица $n \times n$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющая определённым ограничениям.

Для решения этой задачи определяется обобщенный оператор Прони. В докладе приводятся условия, при которых указанный оператор корректно определён, дается описание его области устойчивости.

Литература

1. Маергойз Л.С. Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике // Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991, С. 272.
2. Завьялов М.Н. Модификация алгоритма Прони для системы ОЛДУ с постоянными неизвестными коэффициентами // сб. "Многомерный комплексный анализ", изд-во КГУ, Красноярск, 2002, С. 37–47.
3. Завьялов М.Н. Модификация алгоритма Прони для неоднородных систем ОЛДУ // Вестник КГУ. Физ.-мат. науки, 2003, Вып.1, Красноярск, С. 73–79.

ДИССИПАТИВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДЛИННЫХ МГД-ВОЛН В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Задорожный А.И., Задорожная Н.С. (Ростов-на-Дону)
E-mail simon@rnd.runnet.ru

Физическая постановка задачи следующая: рассматривается слой тяжелой однородной вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, граничащей с вакуумом ($z \geqslant 0$). Снизу ($z \leqslant -1$)

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00460.

расположена абсолютно твердая диэлектрическая подложка. Конфигурация находится в горизонтальном магнитном поле напряженности $H_0 = const$. Математическая модель заключается в анализе линеаризированной системы уравнений магнитной гидродинамики в области $-1 \leqslant z \leqslant 0, |x| \leqslant \infty$ и систем уравнений Максвелла вне ее. На границах раздела сред выполняются гидродинамические и электромагнитные условия, а также требование непрерывности нормальных и касательных компонент тензора полных напряжений.

Исследуются свободные колебания, то есть решения, пропорциональные $\exp(ix + \sigma t)$, где σ - подлежащий определению спектральный параметр. После ряда преобразований, аналогичных изложенным, например, в [1], получается в итоге краевая задача на собственные значения:

$$\sigma U(z) = -R_g^{-1}U'' + \sigma^{-1}J - iAX(z), J = \int_{-1}^{0} U(z)dz, \qquad (1)$$

$$\sigma X - R_m^{-1}X'' - iU = 0, z \in (0;1); \qquad (2)$$

$$U(-1) = 0, U'(0) = 0, X'(-1) = 0, X(0) = 0. \qquad (3)$$

Здесь $U(z), X(z)$ - амплитудные функции горизонтальных компонент скорости и индуцированного магнитного поля, соответственно; R_g -гидродинамическое, а R_m - магнитное числа Рейнольдса, A - число Альфвена.

Вполне стандартным приемом из (1)-(3) выводится уравнение баланса энергии

$$\sigma^2||U||^2 + |\sigma|^2A||X||^2 + \sigma\left(R_g^{-1}||U'||^2 + AR_m^{-1}||X'||^2\right) + |J|^2 = 0, \quad (4)$$

где норма понимается в смысле $L_2(0;1)$. Как видно, ситуация оказывается более сложной, чем в случае квадратичного операторного пучка, возникающего в бесконечнопроводящей жидкости ($R_m = \infty$) [2], операторный пучок относится в данном случае к классу голоморфных пучков [3].

Положим $\sigma = \alpha + i\beta$ и отделим в (4) действительную и мнимую части. Результат приводит к необходимости рассмотрения двух принципиально различных режимов движения.

1) Колебательные режимы ($\beta \neq 0$). В этом случае

$$\alpha = -0.5\left(R_g^{-1}||U'||^2/||U||^2 + AR_m^{-1}||X'||^2/||U||^2\right), \qquad (5)$$

то есть колебания носят затухающий ангармонический характер. При этом имеют место оценки

$$A||X||^2 = k||U||^2, k < 1, |\sigma| \leqslant \sqrt{(1-k)^{-1}}, R_g^{-1} + R_m^{-1} \leqslant |\alpha| < |\sigma|,$$

говорящие о том, что при условии дискретности и счетности спектра и наличии предельных точек только на вещественной оси осцилляционных режимов может быть лишь конечное число.

2) Апериодические режимы ($\beta = 0$). Из (4) следует

$$\left(||U||^2 + A||X||^2\right)\alpha^2 + \left(R_g^{-1}||U'||^2 + AR_m^{-1}||X'||^2\right)\alpha + |J|^2 = 0, \quad (6)$$

что при выполнении условия сильной демпфированности, которое в "огрубленном"виде сводится к неравенствам

$R \leqslant A$ при $A \leqslant 1$ или $R < 1$ при $A > 1$, где $R = \max\{R_g, R_m\}$.

Тогда, очевидно, $\alpha < 0$, что и требовалось. Кстати, из (6) следует вывод о наличии двух предельных точек спектра в 0 и на $-\infty$, которым отвечают "медленные"и "быстрые"моды [3].

Литература

1. Задорожный А.И., Грунтфест Р.А. Свободные колебания тонкого слоя жидкости конечной электропроводимости при воздействии внешнего магнитного поля //ПМТФ, 2000. Т.41, No. 6. - С. 27-35.

2. Задорожный А.И. Спектральные свойства длинных МГД-волн в вязкой жидкости //Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании. Тезисы докладов школы /Воронеж: ВГУ, 1993. - С. 58.

3. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.- М.:Наука, ГИФМЛ, 1989. - 416 с.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Зарубин А.Н. (Орел)

E-mail aleks_zarubin@mail.ru

Уравнение

$$u_{xx}(x,y) + \mathrm{sgn} y(\pi - y)u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u(x-\tau,y) = 0, \quad (1)$$

$0 < \tau \equiv \mathrm{const}$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда, рассматривается в области $D = D_3^+ \bigcup\limits_{j=1}^{2} D_j^- \bigcup\limits_{j=1}^{2} J_j$, где $D_3^+ = \{(x,y) : |x| < +\infty,\ 0 < y < \pi\}$ и $D_j^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{jk}$ – эллиптическая и гиперболические части области D, а $J_j = \{(x,y) : |x| < +\infty,\ y = (j-1)\pi\}$, причем $D_{j0} = \{(x,y) : -\infty < x < \tau - (-1)^j y + (j-1)\pi,\ (j-1)\pi < (-1)^j y < +\infty\}$, $D_{jk} = \{(x,y) : k\tau + (-1)^j y - (j-1)\pi < x < (k+1)\tau - (-1)^j y + (j-1)\pi,\ (j-1)\pi < (-1)^j y < +\infty\}$ $(j = 1, 2;\ k = 1, 2, ...)$.

Задача T. *Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = 0,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \pi;$$

$$u(x, (-1)^j(x - k\tau + (j-1)\pi)) = \psi_{jk}(x),\ \ k\tau \leqslant x \leqslant (2k+1)\tau/2;$$
$$u(x, (-1)^j(\tau - x + (j-1)\pi)) = \psi_{j0}(x),\ \ -\infty < x \leqslant \tau,$$

где $\psi'_{jk}(x)$, $\psi''_{jk}(x)$ принадлежат классу Гельдера внутри соотвутствующих промежутков

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_{jk}(x)| = 0\,(k = 1, 2, ...);\ \psi_{j0}(\pm\infty) = 0\,(j = 1, 2).$$

С помощью энергетических неравенств на линиях вырождения при $\tau \leqslant \sqrt{2}$ доказана теорема единственности.

Вопрос существования решения сведен к разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЖЕВРЕ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Зарубин Е.А. (Орел)
E-mail j_rubin@mail.ru

В области $M = \{(x,y) : |x| < 1, 0 < y < 1\}$ рассматривается уравнение

$$Lu(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$Lu(x,y) = \begin{cases} u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,t),\ x > 0; \\ u_{xx}(x,y) - D_{y1}^{\alpha} u(x,t),\ x < 0; \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1$; $D^{\alpha}_{0y}u(x,t)$, $D^{\alpha}_{y1}u(x,t)$ – производные дробного порядка, действующие на функцию $u(x,y)$ по переменной y.

Пусть $\Gamma_i = \{(x,y) : i-1 < x < i, y = i\}$ $(i = 0,1)$, $\Gamma = \partial M \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, $\Omega^+ = M \cap (x > 0)$, $\Omega^- = M \cap (x < 0)$, $J = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < 1\}$.

Задача. *Найти в области M решение $u(x,y)$ уравнения* (1) *из класса $D^{\alpha-1}_{0y}u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega^+}\right) \cap C^1(\Omega^+ \cup J)$, $D^{\alpha-1}_{y1}u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap C^1(\Omega^- \cup J)$, удовлетворяющее краевому условию*

$$u(x,y) = 0 \; \forall (x,y) \in \Gamma. \qquad (2)$$

Заданная функция $f(x,y)$ непрерывна и достаточно гладка в области M.

Теорема единственности доказана в силу того, что положительно определены интегралы

$$\iint\limits_{\Omega^+} u_x(x,y) D^{\alpha-1}_{0y} u_x(x,t)\, dxdy, \quad \iint\limits_{\Omega^-} u_x(x,y) D^{\alpha-1}_{y1} u_x(x,t)\, dxdy$$

и выполняются неравенства

$$\int\limits_0^1 u_x(0+,y) D^{\alpha-1}_{0y} u(0+,t)\, dy \leqslant 0, \quad \int\limits_0^1 u_x(0-,y) D^{\alpha-1}_{y1} u(0-,t)\, dy \geqslant 0.$$

ОБОБЩЕННЫЕ ФРЕЙМЫ И СИСТЕМЫ РИССА[1]

Захарова А.А. (Москва)

E-mail root@zaharova.mccme.ru

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω — пространство со счётно-аддитивной мерой μ.

Определение. Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система замкнутых расширяющихся подпространств в H, объединение которых всюду плотно в H. Обобщенная система $\{\mathbf{e}^{\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ состоит из последовательностей $\mathbf{e}^{\omega} = \{e^{\omega}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $e^{\omega}_n \in H_n$ и является ортогональной проекцией e^{ω}_{n+1} на H_n.

Обобщим понятия интегрального базиса Рисса и интегрального фрейма на случай обобщенных ортоподобных систем:

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ № 02-61-00420.

Определение. *Обобщенная система $\{\psi^w\}_{w\in\Omega}$ называется обобщенным базисом Рисса, если существуют $0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для любого $y \in H_n$, для $\gamma_w^n = (y, e_n^w)$ верно*

$$a \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\gamma_w^n|^2 d\mu(w) \leqslant \left\| \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \gamma_w^n \psi_n^w d\mu(w) \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant b \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\gamma_w^n|^2 d\mu(w).$$

Определение. *Назовём обобщенную систему функций $\Phi = \{\varphi^w\}_{w\in\Omega}$ обобщенным фреймом, если для $0 < a \leqslant b < \infty$ и любых $y \in H_n$*

$$a \parallel y \parallel_{H_n}^2 \leqslant \int_\Omega |(g, \varphi_n^w)|^2 d\mu(w) \leqslant b \parallel y \parallel_{H_n}^2 .$$

Теорема. *Для того чтобы система $\Phi = \{\varphi^w\}_{w\in\Omega}$ была обобщенным фреймом в H, необходимо и достаточно, чтобы нашлось гильбертово пространство $H' \supset H$, и в нём обобщенный базис Рисса $\Psi = \{\psi^w\}_{w\in\Omega}$, такой что*

$$a \left(\int_\Omega |\gamma_w|^2 d\mu(w) \right)^{1/2} \leqslant \left\| \int_\Omega \gamma_w \psi^w d\mu(w) \right\|_{H'} \leqslant b \left(\int_\Omega |\gamma_w|^2 d\mu(w) \right)^{1/2}$$

для любой функции $\gamma_w \psi^w$ интегрируемой на Ω и

$$\varphi^w = \pi_{H'\to H}(\psi^w), \quad w \in \Omega,$$

где $\pi_{H'\to H}$ — ортогональная проекция H' на H.

Литература

1.Кашин Б.С., Куликова Т.Ю. *Замечание об описании фреймов общего вида.*// Матем. заметки.– 2002.– Т. 72. № 6. С. 941-945.

О РАЗРЫВАХ СТИЛЬТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ[1]

Зверева М.Б. (Воронеж)
E-mail margz@rambler.ru

Классическая задача Штурма – Лиувилля

$$-(pu')' + qu = \lambda mu, \tag{1}$$

$$u(0) = u(l) = 0$$

для случая сингулярных особенностей коэффициентов, если те являются обобщенными производными элементов из $BV[0,l]$, может трактоваться, следуя М.Г.Крейну, в виде интегродифференциального уравнения

$$pu'(x) = pu'_+(0) + \int_0^{x+0} u(s)dQ(s) - \lambda \int_0^{x+0} u(s)dM(s). \tag{2}$$

Последнее уравнение Ю.В.Покорным распространено на множество функций $u(x)$, имеющих возможность терпеть разрывы в точках, где имеются разрывы и у $Q(x)$ и у $M(x)$. Делается это за счет расширения понятия интеграла и расширения области определения функций (в точках разрыва мера расщепляется). В рамках такого подхода на спектральную задачу (2) удается перенести классические (в том числе осцилляционные) свойства задачи (1). Основой такого переноса является линейная теория, уподобляющая уравнение (2) обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с аналогом вронскианной техники, теоремами о разрешимости, теоремами Штурма о распределении и перемежаемости нулей и проч.

Литература

Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. – 1999. – Т.364, №2. – С.167-169.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ) на поддержку научно-исследовательской работы аспирантов высших учебный заведений (грант № А03-2.8-65), гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1, гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ)(грант № Е02-1.0-46), РФФИ (гранты № 04-01-00049, 02-01-00307), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004)

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ЗА УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ[2]

Знаменская Л.Н. (Переславль-Залесский)
E-mail lznam@lznam.pereslavl.ru

Предварительно введем пространства. Пространство $\widehat{L}_2(Q_{l,T})$, состоит из функций $u(x,t)$, принадлежащих пространству $L_2(Q_{l,T})$, таких, что $u(x,t)$ принадлежит пространству $L_2[0,l]$ при любом t из сегмента $[0,T]$ и принадлежит пространству $L_2[0,T]$ при любом x из сегмента $[0,l]$. Здесь $Q_{l,T} = \{(x,t)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Пусть $\mathcal{F}_1[0,l] = \{ f(x) \in C^2[0,l]\colon\ f(0) = f(l) = 0\}$. Пространство, сопряженное к $\mathcal{F}_1[0,l]$, обозначим $\mathcal{F}_1'[0,l]$. Совокупность элементов g пространства $\mathcal{F}_1'[0,l]$, для которых первообразные $\widehat{g}$ принадлежат пространству $L_2[0,l]$, обозначим $\widehat{\mathcal{F}_1'}[0,l]$.

Задача граничного наблюдения. Найти функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, задающие начальное состояние $u(x,0) = \varphi(x)$ и $u_t(x,0) = \psi(x)$ системы, описываемой волновым уравнением $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ в прямоугольнике $Q_{l,T} = \{(x,t)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и условиями $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, по наблюдаемым значениям $u_x(0,t) = z^1(t)$, $u_x(l,t) = z^2(t)$.

Функции наблюдения $z^1(t)$ и $z^2(t)$ принадлежат $C^1[0,T]$, если $u(x,t)$ классическое решение первой краевой задачи; функции $z^1(t)$ и $z^2(t)$ принадлежат $\widehat{\mathcal{F}_1'}[0,T]$, если $u(x,t) \in \widehat{L_2}(Q_{l,T})$ — обобщенное решение первой краевой задачи.

Теорема. Задача граничного наблюдения для обобщенных решений $u(x,t) \in \widehat{L_2}(Q_{l,T})$ первой краевой задачи с однородными граничными условиями решается с помощью формул

$$\varphi(x) = \frac{a^2}{2}\left[\widehat{z^1}\left(\frac{x}{a}\right) + \widehat{z^2}\left(\frac{l-x}{a}\right)\right], \tag{1}$$

$$\frac{\psi(x)}{a} = \frac{a}{2}\left[z^1\left(\frac{x}{a}\right) + z^2\left(\frac{l-x}{a}\right)\right], \tag{2}$$

если период наблюдения T равен l/a. При этом начальное значение $u(x,0) = \varphi(x)$ находится с точностью до некоторой константы C.

В случае классических решений $u(x,t)$ на функции $z^1(t)$ и $z^2(t)$ накладываются дополнительные ограничения, решение задачи граничного наблюдения в этом случае единственно.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00461.

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Зубова С.П. (Воронеж)

Решаются две задачи Коши:

$$A\frac{dx}{dt} = Bx(t) + f(t), \quad x(0) = x^0 \tag{1}$$

$$\frac{dA\widetilde{x}}{dt} = B\widetilde{x}(t) + f(t), \quad \widetilde{x}(0) = x^0, \tag{2}$$

где A – замкнутый линейный фредгольмовский оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, с плотной в E_1 областью определения $D(A); B, C \subset L(E_1, E_2)$, $t \in [0;\infty), f(t)$ – функция со значениями в E_2.

Решением задачи (1) называется функция $x(t)$, имеющая производную $\dfrac{dx}{dt} \in D(A)$ и удовлетворяющая (1) при $t \in [0;\infty)$. Решением задачи (2) называется функция $\widetilde{x}(t)$ такая, что существует производная $\dfrac{dA\widetilde{x}}{dt}$ и выполняется (2) при $t \in [0;\infty)$.

Рассматриваются два случая:

1) операторный пучок $A - \varepsilon B$ регулярен при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$;

2) оператор $A - \varepsilon B$ необратим при всех достаточно малых ε.

Получены следующие результаты.

В случае 1 если $dim\ kerA = 1$ и $f(t) \equiv 0$, то задачи (1), (2) эквивалентны, $x(t) \equiv \widetilde{x}(t)$. Если уравнения неоднородные, то решения этих задач, вообще говоря, разные, но если на $f(t)$ наложить дополнительное ограничение, то решения можно привести к одному виду. Если $dim\ kerA > 1$ и нет B-присоединенных элементов к элементам $kerA$, то ограничения на x^0 в (1) и (2) одинаковые, $x(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ принадлежат одному пространству, но $f(t)$ в задаче (1) должно удовлетворять определенному требованию, а в задаче (2) этого не требуется. Если существует $x(t)$, то $x(t) \equiv \widetilde{x}(t)$.

Если B-жорданова цепочка имеет длину больше единицы, то для решения задачи (2) требуется меньшее количество более слабых ограничений на $f(t)$. Если же $x(t)$ существует, то $x(t) \equiv \widetilde{x}(t)$.

В случае 2 ограничения на $f(t)$ и x^0 также более слабые для решения задачи (2), чем для (1), но если существует $x(t)$, то найдется такое $\widetilde{x}(t)$, что $x(t) \equiv \widetilde{x}(t)$.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 02-01-00351

Все решения получены в видах, не содержащих дополнительный параметр. Для их построения операторный пучок $A - \varepsilon B$ не привлекался.

К ВОПРОСУ О ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зудашкина О.В. (Рязань)

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t, x, u) = 0, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, n \times n$-матрица $A(t)$ и $n \times m$-матрица $B(t)$ непрерывны на сегменте $[0; T], f(t, x, u)$ – n-мерная вектор-функция.

Введем в рассмотрение множество: $W(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant \varepsilon\}$. В качестве допустимых управлений будем рассматривать непрерывные на сегменте $[0; T]$ функции $u(t)$, удовлетворяющие условию $\|u(.)\| \leqslant \delta_0$. Множество всех допустимых управлений обозначим $U(\delta_0)$.

Будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра.

Ставится задача: найти окрестность $W(\varepsilon)$ такую, чтобы для любой точки $b \in W(\varepsilon)$ существовало управление $u \in U(\delta_0)$, при котором решение $x(T, u) = b$.

Управление $u(t)$ будем искать в виде: $u(t) = R(t)c$, где $R(t)$– известная $m \times n$-матрица, непрерывная на сегменте $[0; T]$, c– неизвестный n-мерный вектор.

Пусть $P = X(T)\int_0^T X^{-1}(\xi)B(\xi)R(\xi)d\xi$, где $X(t)$– фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = A(t)x$, удовлетворяющая условию $X(0) = E$.

Теорема. Если матрица P является неособенной, то найдется положительное число ε такое, что для любого $b \in W(\varepsilon)$ существует единственный вектор c, при котором управление $u(t) = R(t)c$ удовлетворяет системе $x(T, u) = b$.

ЯВНЫЙ ВИД ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Иванов Г.Е. (Москва)

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \qquad x(0) = x_0$$

на отрезке времени $t \in [0;\vartheta]$ с функционалом качества

$$\mathcal{J} = \frac{\|x(\vartheta)\|^2}{2} + \int\limits_0^{\vartheta} \left(\gamma(t)\sqrt{1 - v^T H(t) v} - \beta(t)\sqrt{1 - u^T G(t) u} \right) dt.$$

Здесь $x(t) \in I\!R^n$– фазовый вектор, $u(t) \in I\!R^p$, $v(t) \in I\!R^q$ – управления игроков. Цель игрока u – минимизировать $\mathcal{J}$, цель игрока v – противоположная. Заданы симметрическая $(n \times n)$-матрица F; $(n \times n)$-матрица $A(t)$, $(n \times p)$-матрица $B(t)$, $(n \times q)$-матрица $C(t)$, симметричные и положительно определенные $(p \times p)$-матрица $G(t)$ и $(q \times q)$-матрица $H(t)$, кусочно-непрерывно зависящие от времени, а также кусочно непрерывные функции $\beta : [0;\vartheta] \to I\!R$, $\gamma : [0;\vartheta] \to I\!R$ с положительными значениями.

Управления игроков подчиняются ограничениям

$$u^T(t)G(t)u(t) \leqslant 1, \qquad v^T(t)H(t)v(t) \leqslant 1, \qquad t \in [0;\vartheta].$$

Такие известные классы дифференциальных игр, как игры с квадратичным критерием качества и игры, рассматриваемые в методе эллипсоидов А.Б. Куржанского, являются предельными случаями дифференциальных игр данного класса.

Для дифференциальных игр рассматриваемого класса доказана теорема о существовании седловой точки в классе программных стратегий. Получены явные выражения оптимальных программных стратегий через вектор сопряженных переменных ψ:

$$\widehat{u}(t) = -\frac{G^{-1}(t)B^T(t)\Phi^T(t)\psi}{\sqrt{\beta^2(t) + \psi^T\Phi(t)B(t)G^{-1}(t)B^T(t)\Phi^T(t)\psi}},$$

$$\widehat{v}(t) = \frac{H^{-1}(t)C^T(t)\Phi^T(t)\psi}{\sqrt{\gamma^2(t) + \psi^T\Phi(t)C(t)H^{-1}(t)C^T(t)\Phi^T(t)\psi}},$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Для определения вектора сопряженных переменных ψ построены эффективные быстро сходящиеся алгоритмы.

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ СТИЛЬТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ

Ищенко А.С. (Белгород)
E-mail science@bupk.ru

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad (pu)'(x) + \int\limits_0^x u(s)dQ(s) = F(x) + const,$$

где $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ - функции ограниченной вариации на $[0, 1]$, причем мы будем предполагать, что p, Q и F непрерывны в точках $x = 0$ и $x = 1$, а $p(x) > 0$ при $x \in [0, 1]$. Интеграл в уравнении (1) понимается по Стильтьесу.

Уравнение (1) напоминает своими свойствами обыкновенное дифференциальное уравнение. Аналогом однородного уравнения является

$$(2) \qquad (pu)'(x) + \int\limits_0^x u(s)dQ(s) = const.$$

Если Q - абсолютно непрерывна, то дифференцирование равенства (2) приведет к обычному уравнению $(pu')' + Q'u = 0$.

Определение. Будем называть уравнение (2) *неосциллирующим* на $[0, 1]$, если всякое нетривиальное решение (2) имеет на $[0, 1]$ не более одного нуля.

Следующая теорема является аналогом теоремы о неосцилляции уравнения Якоби из вариационного исчисления.

Теорема. *Следующие свойства эквивалентны:*

1) *Уравнение* (2), *имеет строго положительное на* $[0, 1]$ *решение;*

2) *Решение* $u(x)$ *уравнения* (2) *при условиях* $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ *не имеет других нулей;*

3) *Уравнение* (2) *не осциллирует на* $[0, 1]$;

4) *Для любой монотонно неубывающей функции* $F(x)$ *существует хотя бы одно строго положительное решение уравнения* (1).

Автор благодарен Ю.В. Покорному и М.Б. Зверевой, за помощь в работе.

Литература

1. Атниксон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.: Мир, 1991.

2. Покорный Ю.В. Оптимальные задачи. - Воронеж: ВГУ, 2002. - 198с.

ОБ АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОЙ ПАРЕ С РАЗРЕЖЕННЫМИ ВЕСАМИ

Кабанко М.В. (Курск)

E-mail vio@func.vsu.ru

В данной работе выявлены существенные отличия алгебры операторов, действующих в гильбертовой паре с разряженными весами, от алгебры всех ограниченных операторов.

Рассмотрим гильбертову пару с сильно разреженными весами $\overline{H}^e = \{l_2(2^{2^n}), l_2(2^{-2^n})\}$. Ранее в работе [1] было показано, что алгебру операторов действующих в этой паре можно представить в виде прямой суммы трех замкнутых подалгебр: диагональной D, верхнетреугольной U и нижнетреугольной I. В любом пространстве шкалы гильбертовых пространств, соединяющей $l_2(2^{2^n})$ и $l_2(2^{-2^n})$, то есть $l_2(2^{(1-\theta)2^n-\theta 2^n}) = \overline{H}^e_{\theta,2}$ при $0 < \theta < 1$, операторы из подалгебр U и I оказываются ядерными (см. [1]).

Рассмотрим представление алгебры $L(\overline{H}^e)$ в интерполяционном пространстве l_2, а затем его образ в алгебре Калкина $L(l_2)/C(l_2)$. Полученная алгебра оказывается коммутативной C^* – алгеброй. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Алгебра $L(\overline{H}^e)$ является $*$-расширением коммутативной C^*-алгебры l_∞/c_0 с помощью некоторого замкнутого двустороннего идеала.

Благодаря такой структуре алгебра $L(\overline{H}^e)$ обладает рядом интересных топологических свойств. Рассмотрим группу обратимых элементов алгебры $GL(\overline{H}^e)$.

Теорема 2. Группа $GL(\overline{H}^e)$ – неодносвязное топологическое пространство.

Упомянутая выше коммутативная C^* - алгебра будет содержать континуум проекторов P, а следовательно и континуум обратимых элементов $I-2P$. Отсюда можно получить результат, повторяющий знаменитый результат И.Я.Шнейберга (см. [2])

Теорема 3. Группа $GL(\overline{H}^e)$ для пары $\overline{H}^e$ с вещественными координатами является несвязным множеством и имеет континуум связных компонент.

Литература

1. Кабанко М.В. Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре // Труды математического факультета ВГУ.– Воронеж: Изд.ВГУ, 2001. – № 6 (новая серия).– С.54-60

2. Шнейберг И.Я. О несвязности группы обратимых операторов в паре гильбертовых пространств // Труды НИИ математики ВГУ. Воронеж: ВГУ, 1970.– Т.1 – С. 36–41.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ОСКОЛКОВА[1]

Казак В.О. (Челябинск)

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbf{R}$ рассмотрим задачу Коши-Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R} \tag{2}$$

для уравнения

$$u_t - æ\Delta u_t = \nu\Delta u - K(u) + f, \tag{3}$$

где функция $u \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ такова, что $K(0) = 0$, $\langle K(u), u\rangle \geqslant 0$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$).

Уравнение (3) моделирует широкий класс процессов, главным участником которых являются вязкоупругие жидкости [1]. В частности, нелинейный член в (3) может иметь вид $K(u) = u^{2m+1}$ или $K(u) = \operatorname{sh} u$. Вообще говоря, нелинейность может быть представлена рядом $K(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^{2m+1}$, $a_m \in \overline{\mathbf{R}_+}$. В [2] задача (1) – (3) изучена при условии $æ, \nu \in \mathbf{R}_+$. Однако в [3] отмечено, что отрицательные значения параметра $æ$ не противоречат физическому смыслу модели.

Целью работы является изучение задачи (1) – (3) при $æ \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbf{R}_+$ и описание множества допустимых начальных данных, понимаемого нами как фазовое пространство задачи (2), (3) [4].

Литература.

[1]Работа поддержана грантом Министерства образования №ГРА 03/2.

1. Осколков А.П. Неустойчивые течения вязкоупругих жидкостей // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 159. С. 103–131.

2. Котсиолис А.А., Осколков А.П., Шадиев Р.Д. Нелокальные задачи для класса нелинейных диссипативных уравнений типа С.Л. Соболева // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1992. Т. 199. С. 91–113.

3. Войткунский Я.И., Амфилохиев В.Б., Ходорковский Я.С. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. 1970. Т. 69. С. 16–24.

4. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений типа Соболева // Дифференц. уравн. 1990. Т. 26. №2. С. 250–258.

О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ВОЛЬФА И ШЕХТЕРА ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С. (Липецк)

E-mail kalitvin@lipetsk.ru

Пусть A - ограниченный линейный оператор в комплексном банаховом пространстве. Множество всех комплексных чисел λ, при которых оператор $\lambda I - A$ имеет замкнутое множество значений, конечные (и равные) размерности ядра и коядра, называется областью нетеровости (фредгольмовости) оператора A, а дополнение до области нетеровости (фредгольмовости) оператора A - существенным спектром Вольфа (Шехтера): $\sigma_{ew}(A)$ ($\sigma_{es}(A)$). Хорошо известно, что $\sigma_{ew}(A)$ и $\sigma_{es}(A)$ - компактные множества, $\sigma_{ew}(A) \subset \sigma_{es}(A)$, а для компактного оператора A $\sigma_{ew}(A) = \sigma_{es}(A) = \{0\}$; в частности, это равенство верно, если A - действующий в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций интегральный оператор

$$(Ax)(t,s) = \int\int_D a(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

с непрерывным ядром. Оператор A - частный случай оператора

$$(Kx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + (Ax)(t,s)$$

с частными интегралами. Даже в общем случае непрерывных ядер существенный спектр Вольфа этого оператора вообще говоря отличен от нуля. В [1] приведены примеры, в которых $\sigma_{ew}(K) \neq \sigma_{es}(K)$, причем $\sigma_{ew}(K)$ и $\sigma_{es}(K)$ могут совпадать с произвольным содержащим нуль компактным множеством на комплексной плоскости.

Напомним, что измеримые функции l, m, a называются непрерывными в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t - t'| < \delta$, $|s - s'| < \delta$, $\int_a^b |l(t,s,\tau) - l(t',s',\tau)|d\tau < \varepsilon$, $\int_c^d |m(t,s,\sigma) - m(t',s',\sigma)|d\sigma < \varepsilon$, $\iint\limits_D |a(t,s,\tau,\sigma) - a(t',s',\tau,\sigma)|d\tau d\sigma < \varepsilon$, и интегрально ограниченными, если существует такое число B, что $\int_a^b |l(t,s,\tau)|d\tau, \int_c^d |m(t,s,\sigma)|d\sigma, \int\int_D |a(t,s,\tau,\sigma)|d\tau d\sigma \leqslant B$.

Теорема. Если l, m, a - непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции, то $0 \in \sigma_{ew}(K)$.

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. - Воронеж: ЦЧКИ, 2000. - 252 с.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И ВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C(C^{(p)}(t))$

Калитвин А.С., Барышева И.В. (Липецк)
E-mail baryshev@lipetsk.ru

Пусть $U = C(C^{(p)}(t))$ — пространство функций $x(t,s)$, непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ вместе с производными до порядка p включительно по переменной t. U — банахово пространство относительно нормы $\|x\|_U = \sup_{s,t} \sum_{k=0}^{p} |x_t^{(k)}|$.

Данная заметка содержит условия фредгольмовости в пространстве U уравнения $x = Kx + f$, где $K = L + M + N$, а L, M, N — операторы вида $(Lx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau$, $(Mx)(t,s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, $(Nx)(t,s) = \int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau$ с ядрами $l(t,s,\tau) = \sum_{i=1}^{u} l_i(t,s)a_i(\tau)$, $m(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^{q} m_j(t,s)b_j(\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{k=1}^{r} n_k(t,s)c_k(\tau,\sigma)$, где $l_i, m_j, n_k \in U$; a_i, b_j, c_k ($i = 1,...,u$; $j = 1,...,q$; $k = 1,...,r$) — непрерывные функции и системы функций $\{a_i | i = 1,...,u\}$, $\{b_j | j = 1,...,q\}$ ортонормированы.

Отметим, что свойства оператора K зависят от пространств, в которых они изучаются, и сильно отличаются от свойств обычных интегральных операторов [1]. Условия действия и непрерывности оператора K в пространстве U приведены в [2].

Теорема 1. *Уравнение $x = Kx + f$ фредгольмово точно тогда, когда фредгольмовы уравнения $(I - L)x = f$ и $(I - M)x = f$.*

Пусть $\mu_{ij}(s)=\int_a^b a_i(\tau)l_j(\tau,s)d\tau$, $\nu_{jk}(t)=\int_c^d b_j(\sigma)m_k(t,\sigma)d\sigma$ и

$$D_1(s)=\begin{vmatrix} 1-\mu_{11}(s) & \dots & -\mu_{1u}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\mu_{u1}(s) & \dots & 1-\mu_{uu}(s) \end{vmatrix}, \quad D_2(t)=\begin{vmatrix} 1-\nu_{11}(t) & \dots & -\nu_{1q}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\nu_{q1}(t) & \dots & 1-\nu_{qq}(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Если функции $a_i(\tau)$ $(i = 1, \dots, u)$ имеют непрерывные производные p-го порядка, то уравнение $x = Kx + f$ фредгольмово тогда и только тогда, когда $D_1(s) \neq 0$ и $D_2(t) \neq 0$.*

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.
2. Калитвин А.С., Барышева И.В. Об операторах с частными интегралами в пространствах частично дифференцируемых функций // Операторы с частными интегралами 2. — Липецк, 1997. — С. 12–19.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА[1]

Капустина Т.О. (Москва)

В области $\Omega = \{0 < x < 1, -1 < y < 1\}$ рассматривается уравнение эллиптико–параболического типа

$$\varepsilon u_{xx} - a(x,y)u_y - b(x,y)u = f(x,y), \qquad y > 0,$$

$$\varepsilon\Delta u + c(x,y)u_y - d(x,y)u = h(x,y), \qquad y < 0,$$

с дополнительными условиями

$$u(x,y,\varepsilon) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega \setminus \{0 < x < 1, \, y = 1\},$$

$$u(x,+0,\varepsilon) = u(x,-0,\varepsilon), \qquad u_y(x,+0,\varepsilon) = u_y(x,-0,\varepsilon).$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, коэффициенты и правые части уравнений бесконечно дифференцируемы в Ω, $a(x,y) > 0$, $b(x,y) > 0$, $d(x,y) > 0$. При различных условиях на коэффициент $c(x,y)$ построено приближенное решение рассматриваемой краевой задачи и доказан его асимптотический характер при $\varepsilon \to 0$.

Данная задача является продолжением исследований В.Г. Сушко и Н.Х. Розова [1], [2].

[1]Работа выполнена при содействии гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ № МК-2345.2003.01.

Литература.

1. Сушко В.Г. Асимптотические разложения решений бисингулярных задач. // Дисс. д.ф.–м. н., М., 1997.

2. Розов Н.Х., Капустина Т.О. Одна краевая задача для эллиптико–параболического уравнения. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 847–848.

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Карабанова О.В. (Йошкар-Ола)

Рассматривается уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1}$$

где $F : H_1 \to H_2$ – нелинейный дифференцируемый по Фреше оператор. Предполагается, что вместо $F(x)$ доступно его приближение $\tilde{F}(x)$ причем $F'(x), \tilde{F}'(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной L, линейный оператор $F'(x^*)$ вполне непрерывен и

$$\|\tilde{F}(x^*)\| \leqslant \delta, \quad \|\tilde{F}'(x^*) - F'(x^*)\| \leqslant \delta.$$

Здесь x^*– искомое решение уравнения (1). Зафиксируем семейства конечномерных подпространств $\{N_l\} \subset H_1, \{M_m\} \subset H_2$, плотные в H_1 и H_2. Пусть P_l и Q_m– ортопроекторы из H_1 и H_2 на N_l и M_m соответственно. В силу полной непрерывности $F'(x)$ существуют последовательности $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$ такие что $\|F'(x^*)(E - P_l)\| \leqslant C_1\eta_l, \|(E - Q_m)F'^*(x^*)\| \leqslant C_2\omega_m$, $\lim\limits_{l\to\infty} \eta_l = \lim\limits_{m\to\infty} \omega_m = 0$. Исследуется конечномерный итерационный процесс $x_0 \in N_l$,

$$x_{n+1} = x_n - \mu_n(P_l\tilde{F}'^*(x_n)Q_m\tilde{F}(x_n) + \alpha_nP_l(x_n - \xi)). \tag{2}$$

Предполагается, что начальная невязка $x^* - \xi$ допускает истокообразное представление $x^* - \xi = F'^*(x^*)v + w; v, w \in H_1, \|w\| \leqslant \Delta$. Выбираем $\mu_n = k\alpha_n, k > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Рассматривается схема реализации процесса (2) с остановом итераций на шаге $n = N(\delta, \Delta, l, m) \equiv max\{n = 0, 1, \cdots : \alpha_n > d(\delta + \Delta + \eta_l + \omega_m)\}$, $d > 0$. Получена оценка

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{4}k\alpha_n{}^2\right)\|x_n - x^*\|^2 + kL^2\left(\frac{3}{8}\alpha_n + C_3\right)\|x_n - x^*\|^4 +$$

[1]Работа поддержана РФФИ (проект N03-01-00352)

$$+C_4 k\alpha_n{}^3(d^{-4}+d^{-2}+\|v\|), \quad 0 \leqslant n \leqslant N(\delta,\Delta,l,m)-1.$$

Показано, что существует постоянная $C = C(\alpha_0, L, d) > 0$ такая, что если $\|x_0 - x^*\| \leqslant C\sqrt{\alpha_0}$, то $\|x_{N(\delta,\Delta,l,m)} - x^*\| \leqslant C\sqrt{\alpha_{N(\delta,\Delta,l,m)}}$. Здесь $\lim\limits_{\delta,\Delta\to 0, l,m\to\infty} N(\delta,\Delta,l,m) = \infty$.

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ В СТЕПЕННЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Карулина Е.С. (Москва)

E-mail karulina@mail333.com

Рассматривается пятое уравнение Пенлеве

$$\begin{aligned} w'' = w'^2\left(\tfrac{1}{2w}+\tfrac{1}{w-1}\right) - \tfrac{w'}{z} + \\ +\tfrac{(w-1)^2}{z^2}\left(aw+\tfrac{b}{w}\right) + c\tfrac{w}{z} + d\tfrac{w(w+1)}{w-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где a, b, c, d – ненулевые комплексные константы. Вычисляются все степенные асимптотики его решений в окрестности нуля, имеющие вид

$$w = c_r z^r + \sum c_s z^s,$$

где r, s, $c_r = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, c_s – многочлены от $\ln z$ степени $n \geqslant 0$. При этом используются методы степенной геометрии (см. [1]).

Пусть $\tilde{c} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$; ξ – то значение корня $\pm\sqrt{2a(1-\tilde{c})(1-4\tilde{c})}$, у которого действительная часть неотрицательна; η – то значение выражения $\pm c/\sqrt{-2d}$, у которого действительная часть неотрицательна.

Т е о р е м а 1. Если $\xi \in \mathbb{N}$, то уравнение (1) в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет формальное решение вида:

$$w = \tilde{c} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,$$

где c_k – многочлен от $\ln z$ степени $n \geqslant 0$, причем c_ξ является линейной функцией от $\ln z$ с произвольным свободным членом.

Т е о р е м а 2. Если $\eta \in \mathbb{N}$, то уравнение (1) в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет формальное решение вида:

$$w = w = 1 - (2d/c)z + c_2 z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k,$$

где c_k – многочлен от $\ln z$ степени $n \geqslant 0$, причем $c_{1+\eta}$ является линейной функцией от $\ln z$ с произвольным свободным членом.

Литература

1. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

МЕТОД ВАРИАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Кацаран Т.К. (Воронеж)

Исследованию задачи об успокоении твердого тела, подвергающегося действию малых возмущающихся моментов, за минимальное время посвящено значительное число работ. При этом предполагается, что твердое тело является динамически симметричным или близким к динамически симметричному. При рассмотрении трехосного твердого тела предполагается, что система уравнений, описывающая его движение, является слабо управляемой.

При более общих предположениях возникают трудности, связанные с интегрированием системы дифференциальных уравнений

$$\dot z_1 = a_1 z_2 z_3 l + \psi_1(t), \quad \dot z_2 = a_2 z_1 z_3 l + \psi_2(t),$$
$$\dot z_3 = a_3 z_1 z_2 l + \psi_3(t), \quad \dot l = -1 + \psi_4(t), \tag{1}$$

где $a_1 + a_2 + a_3 = 0,\ a_2 < 0,\ a_1, a_3 > 0$. При $\psi \equiv 0$ общее решение системы (1) находится с использованием эллиптических функций (подробно об этом смотрите работу [1]):

$$z_1(t) = C_1 cn(C_2\sqrt{a_1 \cdot |a_2|}(t^2/2 - l_0 t) + C_3),$$
$$z_2(t) = C_1/\alpha \cdot sn(C_2\sqrt{a_1 \cdot |a_2|}(t^2/2 - l_0 t) + C_3), \tag{2}$$
$$z_3(t) = C_2 dn(C_2\sqrt{a_1 \cdot |a_2|}(t^2/2 - l_0 t) + C_3), \quad l(t) = -t + l_0,$$

где $\alpha = a_1/|a_2|$, C_1, C_2, C_3, l_0 —произвольные постоянные. Предположив, что $C_i = C_i(t)$, $i = 1,2,3$, $l_o = l_0(t)$ и подставим выражения (2) в (1), получим следующую систему дифференциальных уравнений для этих неизвестных функций:

$$\dot C_3 - \dot C_2\sqrt{a_1 \cdot |a_2|}(t^2/2 - l_0 t) - C_2\sqrt{a_1 \cdot |a_2|} \cdot \dot l_0 t = 0,$$
$$\dot C_1 cn\, w = \psi_1(t),\ \dot C_1 sn\, w = \alpha\psi_2(t),\ \dot C_2 dn\, w = \psi_3(t),\ \dot l_0 = \psi_4(t), \tag{3}$$

где $w = C_2\sqrt{a_1 \cdot |a_2|}(t^2/2 - l_0 t) + C_3$. Система (3) легко интегрируется с использованием свойств эллиптичеких функций [2]. Последнее дает возможность найти общее решение системы (1) и в целом решить задачу об успокоении твердого тела при самых общих предположениях.

Литература

1. Кацаран Т.К. Об устойчивости угловых колебаний твердого тела. — В сб. Современные проблемы механики и прикладной математики. — Воронеж: ВГУ, 2000. — С. 194 - 198.

2. Ахиезер Н.Н. Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970. — 303С.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Климова Е.Н. (Самара)

Рассматривается уравнение

$$Lu = u_{xy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y)$$

в области

$$D = \{(x,y): \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b\},$$

ограниченной характеристиками уравнения, для которого поставлена нелокальная задача с условиями:

$$\int_0^a u(x,y)dx = \psi(y), \qquad u(x,0) = \varphi(x).$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ - заданные функции. Условие согласования имеет вид:

$$\int_0^a \varphi(x)dx = \psi(0).$$

Доказана теорема существования классического решения поставленной задачи. Рассмотрены различные примеры, в том числе получен явный вид решения для некоторого частного случая поставленной задачи.

Литература

1. Климова Е.Н. Интегральная задача Гурса и связанные с ней нагруженные уравнения // Дифференциальные уравнения и их приложения. Самара. 2002. Т. 1. № 1. С. 101-113.

2. Нахушев А.М. О нелокальных краевых задачах и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 92-101.

3. Пулькина Л.С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2002. Т. 236. С. 298-303.

ОПИСАНИЕ КЛАССА ВСЕХ ОДНОРАНГОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Клочков М.А. (Ижевск)
E-mail m_k@udm.ru, mike@ulm.uni.udm.ru

Рассмотрим некоторый самосопряжённый оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, спектр которого состоит из однократных собственных значений. Построен класс и изучены свойства всех возможных одноранговых возмущений вида:

$$Ku = a\langle u, b\rangle, \quad a \in L_2, \quad b \in L_2, \tag{1}$$

для которых выполнено соотношение

$$\sigma_p(T - K) = \kappa \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega), \tag{2}$$

здесь $\sigma_p(T)$—дискретный спектр оператора T, состоящий из однократных собственных значений, $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$—заданное подмножество собственных значений оператора T, $\kappa = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$—заданное подмножество точек, добавляемых в спектр оператора T, или другими словами, точек, в которые переводятся собственные значения из Ω. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть T—самосопряжённый оператор, имеющий однократный дискретный спектр и полную систему ортонормированных собственных функций $\{X_j\}$. Для того чтобы одноранговое возмущение (1) переводило заданное подмножество собственных значений Ω в произвольно заданное подмножество κ $(\kappa \cap \Omega = \emptyset)$, где

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j, \quad b = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j X_j,$$

здесь $\{\nu_i\}, \{\beta_i\}$—две квадратично суммируемые последовате- (3)

льности комплексных чисел, необходимо и достаточно, чтобы последовательности (3) удовлетворяли следующим условиям:
а) $\nu_j \beta_j = 0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda = \{k_1, \ldots, k_m\}$;

б) $\nu_{k_i}\beta_{k_i} = \dfrac{P(\lambda_{k_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m}(\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}, i = \overline{1,m}$, где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество $\sigma_p(T) \setminus \Omega$, дополненное значениями из κ.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ МЕДЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Ключев В.В. (Йошкар-Ола)
E-mail key@marsu.ru

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного параболического уравнения $dx/dt + Ax = 0, \quad x(0) = x_0$. Здесь $A : D(A) \subset X \to X$ – замкнутый в общем случае неограниченный оператор в банаховом пространстве X, $\overline{D(A)} = X$. Обозначим $K(\varphi) = \{\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\} : |\arg\lambda| \leqslant \varphi\} \cup \{0\}, \varphi \in [0,\pi]$. Предположим, что оператор A обладает компактным обратным $A^{-1} : X \to X$, спектр $\sigma(A)$ принадлежит полуполосе $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \psi_0/T, \mathrm{Re}\lambda \geqslant a\}$, где $\psi_0 \in (0,\pi/2), a > 0$, и выполняется оценка $\|R(\lambda,A)\| \leqslant C_1/|\lambda| \forall\lambda \in \mathbf{C}\setminus K(\varphi_0); \varphi_0 \in (0,\pi/2)$. Тогда решение задачи имеет вид $x = U(t)x_0$, где $U(t)$ – сильно непрерывная полугруппа операторов из $L(X)$ с генератором $-A$. При наших условиях задача, состоящая в определении начального условия $x_0 = x(0)$ по заданному состоянию $x(T)$ в момент $T > 0$, является в общем случае некорректной. Положив $B = U(T)$, $x_0 = u$, $x(T) = f$, представим эту задачу в виде $Bu = f, u \in X$. Для аппроксимации решения этого уравнеия применяется итерированный вариант метода М.М. Лаврентьева

$$u_\alpha = u_\alpha^{(N)}, u_\alpha^{(0)} = \xi \in X, (B + \alpha E)u_\alpha^{(k+1)} = \alpha u_\alpha^{(k)} - f, k = \overline{0, N-1}. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть выполняются указанные условия на A и приближения u_α порожденны методом (1) при $B = \exp(-TA)$. Тогда:*

1) условие истокопредставимости $u^* - \xi \in R(A^{-p}), \quad p > 0$ влечет оценку $\|u^* - u_\alpha\| \leqslant C_2(-\ln\alpha)^{-p}$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$. ([1])

2) из оценки $\|u^* - u_\alpha\| \leqslant C_2(-\ln\alpha)^{-p}$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$ следует истокообразное представление $u^* - \xi \in R(A^{-q})$, где $0 < q < p$.

Литература

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 03-01-00352

1. М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев. О логарифмических оценках скорости сходимости методов решения обратной задачи Коши в банаховом пространстве // Известия вузов. Математика. – 2004. – №2.

ЯВНЫЙ ВИД СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ САМОСАПРЯЖЁННОГО РАСШИРЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ $(-1)^m y^{(2m)}$ С КАНОНИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В НУЛЕ[1]

Козко А.И.(Москва)
E-mail prozerpi@ok.ru

На $\mathbf{R}_+ = [0;+\infty)$ для самосапряжённого расширения дифференциального выражения $(-1)^m y^{(2m)}$ с граничными условиями в нуле $y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0$, найден явный вид спектральной функции $\theta(\lambda, x, y)$:

$$\theta_m(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi}\left(\Psi_m(x-y, \lambda) - \Psi_m(x+y, \lambda)\right),$$

где

$$\Psi_m(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin\left(\lambda^{1/2m} \cdot \cos\frac{(k-1)\pi}{m} \cdot t\right) \cdot e^{-\lambda^{1/2m} \cdot \sin\frac{(k-1)\pi}{m} \cdot |t|}}{t}.$$

Используя данный результат вычисляется регуляризованный след возмущённого оператора. Данный результат получен в терминах функции $\psi(x) = (1/x)\int_0^x q(x)\,dx$, где $q(x)$ — потенциал возмущённого оператора. В случай оси $\mathbf{R}$ вопрос о нахождении спектральной функции решён полностью $\theta_m(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda^{1/2m}(x-y)}{x-y}$ (см. [1]). Более общий случай для $m = 1$ с ненулевым потенциалом рассматривался в работах В.А. Ильина. В случае полуоси $\mathbf{R}_+$ спектральная функция была известна лишь в случае $m = 1$, т.е. выражение $\theta_1(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-y)}{x-y} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x+y)}{x+y}\right)$ и на диагонали для $m = 2$, $\theta_2(x, x, \lambda) = \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(2\sqrt[4]{\lambda}x)}{x}$. Результат для $m = 2$ был получен А.Г. Костюченко в докторской диссертации [2].

Литература

[1] Работа поддержена грантами РФФИ (02-01-00248) и ФЦП "Интеграция"(И-0899/2139).

[1] *Б.М. Левитан, И.С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию. // Москва, "Наука", 1970.

[2] *А.Г. Костюченко.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов. // Москва, МГУ, докт. дисс., 1966.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Кокурин М.Ю., Паймеров С.К. (Йошкар–Ола)
E-mail kokurin@marsu.ru

Акустические колебания в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ описываются волновым уравнением $c^{-2}(x)u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) - f(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \geqslant 0$; $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, $x \in \Omega$; $u(x,t) = 0$, $x \in \partial\Omega$, $t \geqslant 0$. Функция $c(x) > 0$ определяет скорость распространения колебаний в точке $x \in \Omega$. Предполагается, что $c(x) = c_0$, $x \in \overline{\Omega} \setminus R$, где константа c_0 известна, а функция $c = c(x)$, $x \in R \subset \Omega$, подлежит определению. Заданы значения $u(x,t)$, $t \geqslant 0$, $x \in Y \subset \Omega$, где Y – гладкая замкнутая поверхность, $Y \cap R = \emptyset$. Считаем, что $f(x,t) = f(x,t;q) = \varphi(x;q)g(t)$, $q \in Q$; $\int_0^\infty g(t)\,dt \neq 0$. Положим $\xi(x) = c^{-2}(x) - c_0^{-2}$, $x \in R$; $S(q) = supp\,\varphi(\cdot;q)$, $R \cap (\cup_{q\in Q} S(q)) = \emptyset$; $G(x,x';p)$ – функция Грина задачи Дирихле для оператора $\Delta - p^2$ в области Ω. По наблюдаемым данным $u(x,t;q)$, $t \geqslant 0$, $x \in Y$, $q \in Q$ требуется определить функцию $c(x)$, $x \in R$.

Рассматриваемая нелинейная обратная задача сводится к линейному интегральному уравнению

$$\int\limits_R \Big(G(x,x';0) \int\limits_{S(q)} G(x',x'';0)\varphi(x'';q)\,dx'' \Big)\xi(x')\,dx' = \Big(\int\limits_0^\infty g(t)\,dt \Big)^{-1} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{2}\tilde{u}_{pp}(x,0;q) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty g(t)\,dt \int\limits_{S(q)} G_{pp}(x,x';0)\varphi(x';q)\,dx' + \int\limits_0^\infty tg(t)\,dt \times$$

$$\times \int\limits_{S(q)} G_p(x,x';0)\varphi(x';q)\,dx' - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^2 g(t)\,dt \int\limits_{S(q)} G(x,x';0)\varphi(x';q)\,dx' \Big)$$

$$\forall x \in Y \quad \forall q \in Q, \tag{1}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 03-01-00352.

где $\tilde{u}(x, p; q)$–аналитическое продолжение преобразования Лапласа функции $u(x, \cdot; q)$ в окрестность точки $p = 0$. Уравнение (1) однозначно разрешимо в случае специального выбора функций $\varphi(x; q)$, $q \in Q$.

О ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Колмыков В.А. (Воронеж)
E-mail kolmykov@vak.vsu.ru

В десятичной системе счисления имеются два замечательных равенства: $12 = 3 \cdot 4$ и $56 = 7 \cdot 8$.

Рассмотрим систему счисления с основанием n. Положим $\overline{ab}_n = a \cdot n + b$. Равенство $\overline{ab}_n = c \cdot d$ назовем замечательным, если a, b, c, d – последовательные натуральные числа.

Теорема. *Замечательные равенства существуют лишь при* $n = 10$.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КОКСТЕРА В АФФИННОМ СЛУЧАЕ

Колмыков В.А., Купцов В.С. (Воронеж)
E-mail kolmykov@vak.vsu.ru

Пусть Γ – граф Кокстера, являющийся деревом. Через $\Gamma(\lambda)$ обозначим характеристический многочлен преобразования Кокстера.

Если в графе Кокстера имеются циклы, то характеристический многочлен преобразования Кокстера, вообще говоря, зависит от нумерации вершин графа. Нумерации же вершин удобно заменять ориентациями ребер графа. Известно, что для $(n + 1)$-вершинного цикла $\tilde{A}_n$ характеристический многочлен преобразования Кокстера зависит лишь от числа k стрелок, идущих в одном направлении вдоль цикла (или, что то же самое, от числа $n + 1 - k$ стрелок, идущих в противоположном направлении). Соответствующий характеристический многочлен преобразования Кокстера удобно обозначить $\tilde{A}_{n,k}(\lambda)$.

Мы рассмотрели все аффинные графы Дынкина. Характеристические многочлены преобразований Кокстера удалось разложить через $\tilde{A}(\lambda)$ и $A_i(\lambda)$.

Теорема. *Справедливы соотношения*

$\tilde{A}_{n,k}(\lambda) = \tilde{A}_1(\lambda)A_{n-k}(\lambda)A_{k-1}(\lambda)$, $\tilde{B}_n(\lambda) = \tilde{A}_1(\lambda)A_1(\lambda)A_{n-2}(\lambda)$,
$\tilde{C}_n(\lambda) = \tilde{A}_1(\lambda)A_{n-1}(\lambda)$, $\tilde{D}_n(\lambda) = \tilde{A}_1(\lambda)A_1(\lambda)A_1(\lambda)A_{n-3}(\lambda)$,
$\tilde{E}_n(\lambda) = \tilde{A}_1(\lambda)A_1(\lambda)A_2(\lambda)A_{n-4}(\lambda)$, $\tilde{F}_4(\lambda) = \tilde{A}_1(\lambda)A_1(\lambda)A_2(\lambda)$,
$\tilde{G}_2(\lambda) = \tilde{A}_1(\lambda)A_1(\lambda)$.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ СПЛАЙН 5-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ С ПОГРЕШНОСТЬЮ В $C[a,b]$

Колпаков В.И. (Саратов)
E-mail victor38@san.ru

Пусть функция $f \in W^6 L_\infty = \{f \in C[a,b] : \|f^{(6)}\|_{L_\infty[a,b]} \leqslant M\}$ задана своим δ-приближением $f_\delta \in C[a,b] : \|f_\delta - f\|_{C[a,b]} \leqslant \delta$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, и задано множество узлов $\Delta = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$, $x - i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,n}$, $n \geqslant 4$, $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

Задача. Требуется построить интерполяционный сплайн $S_5(f_\delta, x)$: 1) $S_5(f_\delta, x) \in P_5$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = \overline{0, n-1}$; 2) $S_5(f_\delta) \in C^4[a,b]$; 3) $S_5(f_\delta, x_i) = f_\delta(x_i) = y_{i,\delta}$, $i = \overline{0,n}$. Сплайн $S_5(f_\delta, x)$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = \overline{0, n-1}$ имеет вид: $S_5(f_\delta, x) = y_{i,\delta} + \sum\limits_{k=1}^{3} S_5^{(k)}(f_\delta, x_i)(x - x_i)^k/k! + m_{i,\delta}(x - x_i)^4/4! + \Big((m_{i+1,\delta} - m_{i,\delta})/h\Big)(x - x_i)^5/5!$, $m_{i,\delta} = S_5^{(4)}(f_\delta, x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Моменты $m_{i,\delta}$ определяются из СЛАУ: $m_{i+4,\delta} + 26m_{i+3,\delta} + 66m_{i+2,\delta} + 26m_{i+1,\delta} + m_{i,\delta} = 5!\overline{m}_{i+2,\delta}$, $m_{k,\delta} = +\overline{m}_{k,\delta}$, $k = 2, 3, n-3, n-2$, где $\overline{m}_{i+2,\delta} = (y_{i+4,\delta} - 4y_{i+3,\delta} + 6y_{i+2,\delta} - 4y_{i+1,\delta} + y_{i,\delta})/h^4$, $i = \overline{0, n-4}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия постановки задачи и* $0 < \delta \leqslant \delta_0 = (|b-a|/8)^6 M/3$ *и* $h = h^* = 2(3\delta/M)^{1/6}$, *тогда для сплайна* $S_5^{(k)}(f_\delta, x)$ *имеют место оценки:* $\sup\{\|S_5^{(k)} f_\delta - f^{(k)}\|_{C[a,b]} : f \in W^6 L_\infty, \|f_\delta - f\|_{C[a,b]} \leqslant \delta\} \leqslant C_k M^{k/6} \delta^{1-k/6}$, $k = \overline{0,4}$. *Константы* C_k, $k = \overline{0,4}$ *не зависят от* M *и* δ *вычислены.*

ПРИЛОЖЕНИЕ СПЛАЙНА $S_5(f_\delta)$ К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ С ПОГРЕШНОСТЬЮ В $C[a,b]$

Колпакова Э.В., Колпаков В.И. (Саратов)
E-mail victor38@san.ru

Задача. Требуется по $f_\delta \in C[a,b] : \|f_\delta - f\|_{C[a,b]} \leqslant \delta$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$ построить регуляризованный ряд Фурье для восстановления $f^{(k)}$, $k = \overline{0,4}$, $f \in W^6 L_\infty(M, a, b) = \{f \in C[a,b];\ \|f^{(6)}\| \leqslant M\}$.

Решение задачи имеет два этапа: 1) по $f_\delta \in C[a,b]$ строим сплайн $S_5(f_\delta)$ (см. тезисы Колпакова В.И. в этом издании); 2) для сплайна $S_5^{(k)}(f_\delta)$ строим тригонометрический ряд Фурье от $\sigma(S_5^{(k)} f_\delta)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия постановки задачи и* $0 < \delta \leqslant \delta_0 = (|b-a|/8)^6 M/3$ *и* $h = h^* = 2(3\delta/M)^{1/6}$ *и,* $a < a' < b' <$

b, тогда справедливы оценки: $\sup\{|f^{(k)}(x) - \sigma(S_5^{(k)}(f_\delta, x))| : f \in W^6 L_\infty, \|f_\delta - f\|_{C[a,b]} \leqslant \delta\} \leqslant C_k M^{k/6} \delta^{1-k/6}$, $x \in [a', b'] \subset (a, b)$, $k = \overline{0,4}$. *Константы* C_k, $k = \overline{0,4}$ *не зависят от* M *и* δ.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из неравенства $|f^{(k)}(x) - \sigma(S_5^{(k)}(f_\delta, x))| \leqslant |f^{(k)}(x) - S_5^{(k)}(f_\delta, x)| + |S_5^{(k)}(f_\delta, x) - \sigma(S_5^{(k)}(f_\delta, x))|$. Т.к. $S_5^{(k)}(f_\delta, x) \in C^4[a, b]$ и $S_5^{(5)}(f_\delta, x)$ кусочно-непрерывна по построению, то ряд Фурье $\sigma(S_5^{(k)}(f_\delta, x))$ для $x \in [a', b'] \subset (a, b)$ сходится равномерно к $S_5^{(k)}(f_\delta, x)$, $k = \overline{0,4}$, поэтому второе слагаемое равно нулю для $x \in [a', b'] \subset (a, b)$. Оценка первого слагаемого получена в тезисах Колпакова В.И. в этом издании с той же константой C_k.

КРИТЕРИЙ ВОГНУТОСТИ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧЕК ДО ОБРАЗОВ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Коноплев А.Б. (Саратов)
E-mail ak-net@yandex.ru

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = X \times Y$, $F : X \to 2^Y$ - многозначное отображение с замкнутыми образами. Рассмотрим функцию расстояния (ФР) от точек до образов многозначного отображения в произвольной норме

$$d_F(z) = \inf_{v \in F(x)} \|y - v\|, \qquad z = (x, y).$$

Эта функция используется в негладком анализе как инструмент для исследования многозначных отображений и маргинальных функций [1].

Введем обозначения. D - выпуклое множество из Z,

$$D(x) = \{y \in Y | (x, y) \in D\},$$
$$V(x, y) = \{w \in Y | \|y - w\| < d_F(z)\}.$$

Имеет место следующая

Теорема. Для того, чтобы ФР была вогнутой на выпуклом множестве $D \subset \overline{[domF \times Y]} \backslash grF$ необходимо и достаточно, чтобы $grF \bigcap riD = \emptyset$ и многозначное отображение $G(x) \equiv \bigcup_{y \in D(x)} V(x, y)$ было выпуклым.

Литература

1. Минченко Л.И., Борисенко О.Ф., Грицай С.П. Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. —Мн.: Навука і тэхніка, 1993.

О НЕАВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПРОСТОЙ ДИНАМИКОЙ[1]

Константинов Р.В. (Долгопрудный)
E-mail roman@math.mipt.ru

Рассматривается дифференциальная игра преследования [1,2] вида $dz/dt = f(t,u,v)$, $u \in P$, $v \in Q$, на фиксированном отрезке времени $t \in [t_0, T]$ с выпуклым компактным целевым множеством M при наличие фазового ограничения $z(t) \in R(t)$ — выпуклого компактнозначного липшицевого на $[t_0, T]$ многозначного отображения. Предполагается, что правая часть $f(t,u,v)$ неавтономной динамической системы липшицева по времени, не зависит от фазового вектора z и непрерывна по управляющим параметрам игроков u и v. В работе построено выпуклое компактное множество гарантированной поимки, аналогичное альтернированной сумме Л. С. Понтрягина [3], и предложена гарантированная кусочно-программная стратегия преследователя, обеспечивающая попадание фазового вектора в конечный момент времени на целевое множество $z(T) \in M$, причем в течении игры значение фазового вектора удовлетворяет фазовому ограничению: $z(t) \in R(t)$ для всех $t \in [t_0, T]$. При определенных условиях доказана сходимость построенной альтернированной суммы в метрике Хаусдорфа [3] к выпуклому компактному множеству — аналогу альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина [3] для рассматриваемой дифференциальной игры. Работа обобщает результаты [4] на случай неавтономной динамической системы и нестационарного фазового ограничения.

Литература

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967.

2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985.

3. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. — Т. 112. № 3. — С. 307–330.

4. *Константинов Р.В.* О квазилинейной дифференциальной игре преследования с простой динамикой при наличии фазового

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-01-00743).

ограничения // Матем. зам. 2001. — Вып. 69. № 4. — С. 581—590.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Корнев В.В., Хромов А.П. (Саратов)
E-mail KhromovAP@info.sgu.ru

В работе [1] был найден класс интегральных операторов вида

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

при условиях $A(x,x) \equiv 1$ и $\left.\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x} = 0$, для которых справедлива теорема равносходимости. Теперь удалось убрать второе условие. Точнее, имеет место

Теорема. *Пусть функции* $\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}A(x,t)(j=0,1,2,3)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial x}A(x,t)$, $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial t\partial x}A(x,t)$ *непрерывны при* $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ *и* $A(x,x) \equiv 1$. *Тогда существует последовательность номеров* $\{k_l\}$ *такая, что для всякой функции* $f(x) \in L[0,1]$ *и любого* $\delta \in (0,1/2)$

$$\lim_{l\to\infty} \|S_{k_l}(f) - \sigma_l(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где $S_k(f)$ *и* $\sigma_k(f)$ *– частичные суммы рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора* A, *определяемого формулой (1), и по обычной тригонометрической системе* (k *– число членов и нумерация с.п.ф. осуществляется в порядке возрастания модулей характеристических значений).*

Литература

1. Хромов А. П. *Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования* // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. Сб. статей, посв. 70-летию П.Л.Ульянова. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – С. 255–266.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы "Университеты России"(проект ур.04.01.041) и гранта РФФИ (проект № 03-01-00169).

К ВОПРОСУ АППРОКСИМАЦИИ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ВЛОЖЕНИЕМ В СРЕДНЕМ

Коробко А.И. (Славянск-на-Кубани)

В работе [1] исследовано возмущенное включение, которое состоит из алгебраической суммы значений "хорошего" (имеющие замкнутые образы) и "плохого" (не обладающего свойством замкнутости и выпуклости значений) многозначных отображений. Такие включения в последнее время получили название возмущенные. В докладе рассматривается возмущенное включение, у которых соответствующие многозначные отображения, определяющие это включение, "подвергаются" "малым" внешним возмущениям, которые характеризуют погрешности вычисления значений этих отображений. В докладе утверждается, что этими "малыми" погрешностями нельзя пренебрегать, поскольку они могут вызвать значительные изменения множества решений возмущенного включения.

Перейдем к более конкретной постановке задачи. Для этого введем следующие обозначения. Пусть R^n– n-мер- ное пространство вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $C^n[a,b]$ $(L^n[a,b])$ пространство непрерывных (суммируемых по Лебегу) функций $x : [a,b] \to R^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ $(\|x\|_{L^n[a,b]} = = \int\limits_a^b |x(s)|ds)$.

Пусть $\Phi \subset L^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению*, если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi(\mathcal{U})x + \chi([a,b]\backslash\mathcal{U})y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ - характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим через $\Pi[L^n[a,b]]$ $(\mathrm{cl}[C^n[a,b]], \mathrm{cl}[L^n[a,b]])$ множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых ограниченных замкнутых) подмножеств пространства $L^n[a,b]$ $(C^n[a,b], L^n[a,b])$.

Обозначим через $P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ множество всех непрерывных функций $\omega : C^n[a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, для которых для любого $x \in C^n[a,b]$ справедливо соотношение $\omega(x,0) = 0$ и любых $(x,\delta) \in C^n[a,b] \times (0,\infty)$ выполняется неравенство $\omega(x,\delta) > 0$.

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi : C^n[a,b] \to \mathrm{cl}[C^n[a,b]]$, $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ - многозначные отображения, $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ линейный непрерывный интегральный оператор

Пусть $\eta(\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b]\times[0,\infty))$. Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ для каждого $\delta > 0$ включение

$$x \in (\Psi(x))^{\xi(x,\delta)} + V\Phi_\eta(x,\delta), \tag{2}$$

где отображение $\Phi_\eta : C^n[a,b] \times [0,\infty) \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$ задано соотношением $\Phi_\eta(x,\delta) = (\Phi(x))^{\eta(x,\delta)}$. Здесь U^ε– замкнутая ε-окрестность множества U в соответствующем пространстве. В докладе изучаются асимптотические свойства множеств решений включения (2) относительно малого параметра $\delta > 0$. Доказывается, что множества решений включения (2) не всегда стремятся к множеству решений включения (1) при $\delta \to 0$. Приводится необходимое и достаточное условие, когда это возможно.

Литература

1. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений //Матем. сб. 1998. Т.189, №6. С.3-32.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЦИРКУЛЯЦИИ УГЛЕРОДА В БИОСФЕРЕ

Коробочкина С.Ю. (Москва)
E-mail Korobochkina@yandex.ru

Модели циркуляции углерода в биосфере описывают динамику изменения количества углерода в атмосфере, океане, почве и.т.д. Существенную роль в естественном цикле угдерода играет приток углерода в атмосферу за счет антропогенного фактора. В работе [1] была предложена модель, учитывающая взаимодействие и динамику всех перечисленных параметров. Основные параметры модели включают $T(t)$ - температура атмосферы, $C(t)$ - количество углерода в атмосфере , $D(t)$ - количество углерода в океане , $S(t)$ - в почве , $N(t)$ - в растительности в момент времени t, C_0 , D_0 , S_0, N_0 -те же показатели в доиндустриальный период, $E(t)$ - приток углерода в биосферу за счет антропогенного фактора (управляемый параметр). В данной работе рассмотрен класс управлений $E(t) \geqslant 0$, обладающих следующими свойствами: $E(t) \to 0$ при $t \to \infty, W(t) = \int\limits_0^t E(\tau)d\tau \to \overline{W}$ при $t \to \infty$, где $\overline{W}$ -некоторая константа. Иначе говоря, предполагается, что выброс углерода в атмосферу за счет антропогенного фактора асимптотически стремится к нулю и суммарный выброс конечен. В работе рассмотрены две упрощенные модели двух и четырех переменных, полученые из модели, приведенной в [1] принятием ряда допущений. Проведено исследование поведения решений моделей на бесконечном времени, получены оценки скорости сходимости. В рамках этой работы проведен экперимент по применению стабилизационной схемы, предложенной в работе [2], для модели двух переменных и выполнена необходимая подготовка к стабилизации модели четырех переменных.

Литература

[1] Yu. Svirizhev, V. Brovkin, W. von Bloh, H.J. Schellnhuber, G. Petschel-Held. Optimization of reduction of global CO_2 emission based on a simple model of the cabone cycle. Enviromental Modeling and Assessment 4 (1999) 23-33.

[2] A. Kryazhimskiy, V. Maksimov. On the exact stabilization of an uncertain dynamics. International Institute for Applied Systems Analysis, Interim Report IR-03-067, December 2003.

ХОРОШО ЛИ МЫ УЧИМ МАТЕМАТИКЕ?

Костенко И.П. (Краснодар)

Вопрос этот почему-то не ставится математиками. В то время, как устрашающе низкое качество знаний и мышления признаётся многими. Молчаливо предполагается, что виноваты сами учащиеся.

Факты. Только 20% старшеклассников правильно выполняют простые тождественные преобразования (в 40-х годах их было 75%) [1]. Каждый второй абитуриент МГУ не в состоянии решить несложное алгебраическое неравенство [2]. С задачей по геометрии справились 1% абитуриентов МАДИ 2000 г. [3].

То ли это "образование, которое мы можем потерять" [4]?

Ежегодно я учу складывать дроби 20% первокурсников. 90 процентам студентов невозможно объяснить смысл понятий и рассуждений, потому что они не воспринимают смысла слов.

Причины. Ориентация обучения на абстрактную, формально научную дедуктивную систематику, недостаток конкретики, пренебрежение "не строгим" интуитивным смыслом понятий и методов, игнорирование, нарушение и искажение принципов классической дидактики и методики в программах и учебниках (школьных и вузовских). Причины эти взаимнообусловлены.

Способность осмысления атрофирована. Школой. Способность эта формируется длительной самостоятельной работой с книгой. Но учащиеся не читают учебников, потому что они не понятны. Современные учебники превратили математику в "уродливую схоластическую заумь" (В. И. Арнольд). Образование обессмыслено.

Пример. До реформы-70 школьники изучали 4 цельных математических предмета: арифметику, алгебру, геометрию и тригонометрию, которая в конце выпускного класса применялась к решению стереометрических задач. После реформы в начальной школе появился синтетический предмет "математика", а в старших классах кентавр "алгебра и начала анализа". Смешали качественно разнородные дисциплины. Только ли педагогическое невежество?

В высшей школе та же "прогрессивная" тенденция — перемешивают линейную алгебру, векторную алгебру и аналитическую геометрию на самом "высоком теоретическом уровне". Реформаторы-2000 продолжают эту тенденцию и планируют объединение физики, химии и биологии в единый предмет [4]. Приём, проверенный ими ещё в 20-х годах.

Что делать? "Я бы вернулся к Киселёву", — ответил В.И. Арнольд под аплодисменты участников Всероссийской конференции "Математика и общество" (Дубна-2000). В высшей школе стоит подумать о возвращении к Лузину.

Литература

1. Костенко И. П., Захарова Н. М. Причины деградации математических умений и пути её преодоления // Математика в школе. 2001. № 9. С. 33-35.

2. Математика в школе. 1996. № 1. С. 1.

3. Математика в школе. 2002. № 2. С. 63.

4. Образование, которое мы можем потерять. М. 2002.

СИММЕТРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ 1-Й СТЕПЕНИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ В C^*-АЛГЕБРАХ

Крейн М.Н. (Липецк)
E-mail travkin@lipetsk.ru

Продолжено изучение отображений вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$ в некоммутативных C^*-алгебрах, введенных ранее автором и названных отображениями 1-й степени.[1-3]

Назовем такое отображение *симметричным*, если изменение местами в каждом слагаемом левого и правого множителей не меняет отображения.

Утверждение 1. Если $f(x)$ - симметричное отображение 1-й степени, то $f(x) = f_1(x_1) + if_2(x_1) + i[f_1(x_2) + if_2(x_2)]$, где x_1 и x_2 - "действительная" и "мнимая" части элемента x ($x = x_1 + ix_2$, где x_1, x_2 - самосопряженные элементы), а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - самосопряженные отображения 1-й степени.

Назовем *одночленом n-й степени от x* произведение конечного числа сомножителей, n из которых равны x, а *симметричным ему* назовем одночлен с обратным порядком сомножителей. Конечную сумму одночленов различной степени естественно назвать *многочленом*, при этом сумму одночленов n-й степени - *отображением n-й степени*. Назовем многочлен *симметричным*, если замена каждого одночлена на симметричный ему оставляет многочлен прежним. Нетрудно убедиться, что отображения 1-й степени служат аналогами производной для многочленов, то есть $p(x + \Delta x) - p(x) = [p'(x)](\Delta x) + o(\Delta x)$, где $p'(x)$ - отображение 1-й степени с коэффициентами, зависящимим от x.

Утверждение 2. "Производная"симметричного многочлена является симметричным отображением 1-й степени.

Ряд, составленный из однородных отображений, назовем *аналитической функцией*. Такие функции обладают многими свойствами, аналогичными свойствам классических аналитических функций, но, в силу некоммутативности умножения, имеют и отличия от них.

Литература

1.Крейн М.Н. Дифференцирование в некоммутативных алгебрах.// Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения(МНК АДМ - 2000). Тезисы докладов. - Воронеж, 2000. С.135.

2.Крейн М.Н. Об отображениях 1-й степени в некоммутативных C^*-алгебрах.// Воронежская зимняя математическая школа - 2002. - Воронеж, 2002. С.46.

3.Крейн М.Н. Отображения 1-й степени в некоммутативных алгебрах и модулях над ними. Препринт. - Липецк, 2002. 10 С.

ОБ АСИМПТОТИКЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ МНОЖЕСТВ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ИНФОРМАЦИИ В НАБЛЮДАЕМОМ СИГНАЛЕ[1]

Кремлёв А.Г. (Екатеринбург)
E-mail aleksandr.kremlev@usla.ru

Рассматривается задача минимаксной фильтрации [1] для сингулярно возмущенных систем ($\mu > 0$ — малый параметр)

$$dx/dt = A_{11}(t,\mu)x + A_{12}(t,\mu)y + C_1(t,\mu)v,$$

$$\mu dy/dt = A_{21}(t,\mu)x + A_{22}(t,\mu)y + C_2(t,\mu)v,$$

с наблюдением $\eta(t) = G_1(t,\mu)x + G_2(t,\mu)y + D_1(t-h,\mu)x + D_2(t-h,\mu)y + \xi$, где $h > 0$ — запаздывание, элементы $A_{ij}(t,\mu)$, $C_i(t,\mu)$, $G_i(t,\mu)$, $D_i(t,\mu)$, $i = 1,2$, являются ограниченными при $\mu \to +0$. Реализации неопределенных воздействий v, ξ удовлетворяют интегральным квадратичным ограничениям.

Для построения асимптотических приближений опорной функции информационного множества системы указанного вида используется схема работы [2]. Решение задачи оценивания определяется через множество достижимости в данный момент наблюдаемого объекта — совокупности концов траекторий, выпущенных из множества возможных начальных состояний.

Приведено аналитическое описание указанных множеств в случае запаздывания информации, получены дифференциальные уравнения, описывающие динамику определяющих величин, выделена предельная задача наблюдения, доставляющая начальное приближение в итерационной процедуре построения асимптотических приближений информационного множества, реализована сама итерационная процедура.

Обсуждаются особенности построения асимптотики информационных множеств для систем указанного вида при различных вариантах разложений (по μ) элементов $C_2(t,\mu)$.

Литература

1. А.Б. Куржанский. Управление и наблюдение в условиях неопределенности // М.: Наука. 1977.

2. А.Г. Кремлёв. О построении асимптотики информационных множеств для сингулярно возмущенных систем // АиТ. 1996. №7. С. 32-42.

---

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №03-01-00594

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кукушкина Е.В. (Екатеринбург)
E-mail kukushkiny@r66.ru

Рассматривается линейная однородная система функционально-разностных уравнений [1]

$$x(t) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\, x(t+\vartheta), \quad t > t_0, \tag{1}$$

где $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; при каждом фиксир. $t \in \mathbb{R}$ матричная функция $\eta(t,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r,0]$, $\eta(t,0) = 0$, и периодически зависит от первого аргумента с периодом ω $(\omega \geqslant r)$.

В качестве элемента решения будем рассматривать отрезок траектории $x(t+\vartheta, t_0, \varphi_{t_0})$, $-r \leqslant \vartheta \leqslant 0$ [2,3]. Обозначим $x_t(\vartheta, t_0, \varphi_{t_0}) = x(t+\vartheta, t_0, \varphi_{t_0})$, $\vartheta \in [-r,0]$, $t \geqslant t_0$. Тогда $x_t \in \widetilde{\mathbb{C}}_t([-r,0],\mathbb{R}^n) = \{\, x_t : x_t \in \mathbb{C}([-r,0],\mathbb{R}^n),\ x_t(0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\, x_t(\vartheta) \,\}$ при фиксированном t. Элемент $x_t(\cdot, t_0, \varphi_{t_0})$ можно представить как образ элемента φ при некотором отображении: $x_t(\vartheta, t_0, \varphi_{t_0}) = X(t,t_0)\,\varphi_{t_0}(\vartheta)$ $t \geqslant t_0$, где $X(t,t_0) : \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathbb{C}}_t([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Для устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы* $\sup\limits_{t>t_0} \|X(t,t_0)\| < \infty$. *Для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t,t_0)\| = 0$.

Оператор $U(t_0) = X(t_0+\omega, t_0)$ называется оператором монодромии, $U(t_0) : \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. *Нулевое решение системы (1) асимпт-ски устойчиво, если радиус спектра оператора монодромии меньше единицы.*

Литература

1. Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В.Общий вид решения линейной нестационарной системы функционально-разностных уравнений.// Изв.вузов. Математика. 2003. №7. с.27-34.

2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

3. Борисович Ю.Г., Турбабин А.С. О связи функционального дифференциально - разностного уравнения с дифференциальным уравнением в банаховом пространстве.// Труды семинара по функ. анализу. Воронежск. ун-т, 1969, №12, с.105-110.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Кулманакова М.М., Обуховский В.В. (Воронеж)

E-mail valerio@org.vrn.ru

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; символ $Kv(E)$ обозначает совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E. Для $T > 0$, $h > 0$ обозначим $\mathcal{D} = C([-h,T];E)$, $\mathcal{C} = C([-h,0];E)$. Для $x \in \mathcal{D}$ и $t \in [0,T]$ определена функция $x_t \in \mathcal{C}$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$.

В докладе с помощью топологических методов изучается краевая задача для дифференциального включения в E следующего вида:

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t,x_t), \quad t \in [0,T] \qquad (1)$$

$$Bx \in Gx \qquad (2)$$

при следующих основных предположениях:

(A) линейный оператор $A : D(A) \subseteq E \to E$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы;

(F) мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{C} \to Kv(E)$ удовлетворяет верхним условиям типа Каратеодори и для любого непустого ограниченного равностепенно непрерывного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$ выполнено при п.в. $t \in [0,T]$:

$$\chi(F(t,\Omega) \leqslant k(t)\,\varphi(\Omega)$$

где $k \in L^1_+[0,T]$, χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\varphi(\Omega) = sup_{-h\leqslant t\leqslant 0}\chi(\Omega(t))$;

(B) $B : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ - линейный ограниченный оператор;

(G) $G : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{C})$ - полунепрерывный сверху компактный мультиоператор.

Рассматривается также ряд частных случаев граничного условия (2).

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00189 и US CRDF - R.F. Ministry of Education Award VZ-010-0.

Литература

M.Kamenskii, V.Obukhovskii, P.Zecca, ***Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces***, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 2001.

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОЙ МОДЕЛИ ПОСТРОЕНИЯ КОАЛИЦИИ

Кунаковская О.В., Губарева Н.Ю. (Воронеж)
E-mail ovk@alg.vsu.ru

Бинарные отношения эквивалентности могут быть включены, как известно, в более широкий класс отношений толерантности, выделенных в 60-х годах 20 в. Э. Зиманом. В настоящей работе предлагается рассматривать потенциальных деловых партнеров заказчика в качестве объектов, связанных с заказчиком отношением толерантности, и описывается адаптивная схема принятия решения о создании коалиции на языке пространств толерантности.

Первым этапом является построение соответствующего пространства толерантности (X, Φ_*) на множестве X участников рынка. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$ - возможные признаки фирмы $x \in X$. Обозначим через $\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_N^*$ характеристики фирмы-заказчика x_*. Предположим, что $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_k}$ – признаки, по которым ищем общность, $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, ..., \varphi_{j_l}$ – признаки, по которым ищем различие. Пусть $\overline{\varphi_{j_1}}, \overline{\varphi_{j_2}}, ..., \overline{\varphi_{j_l}}$ – дополнительные бинарные отношения к отношениям $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, ..., \varphi_{j_l}$ соответственно. Отношение толерантности на множестве X задается как $\Phi_* = \varphi_* \cup \Delta$, где

$$\varphi_* = (\cap_{q=1}^{k} \varphi_{i_q}) \cap (\cap_{p=1}^{l} \overline{\varphi_{i_p}}),$$

а $\Delta = \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ – диагональ множества X.

На следующем этапе построения коалиции задача состоит в выделении необходимых элементов в классах толерантности заказчика x_*. Таким образом, на этом этапе возможен реальный выбор одного (или нескольких, если это необходимо) партнеров по описанным признакам схожести и различия. В результате получаем некоторый новый объект – фирму x_{**}.

Третий этап заключается в выборе конкурентноспособного коалиционного множества для заказчика. Если фирма x_{**} не является конкурентноспособной, то необходимо вернуться к этапу 1, выписать признаки схожести и различия для x_{**} и построить новое пространство толерантности (X, Φ_{**}). С помощью нового отношения Φ_{**} следует подобрать новых партнеров, оценить качества новой фирмы и ее конкурентноспособность. Эту процедуру естественно повторять до тех пор, пока результаты анализа уровня конкурентноспособности являются тревожными.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Курбыко И.Ф., Левизов С.В. (Владимир)

E-mail hm@port33.ru

Получены усдовия однозначной разрешимости некоторых уравнений с бесконечномерными псевдодифференциальными операторами (ПДО) с символом, зависящим от двух аргуметнов $(x, y) \in H \times H$, где H - бесконечномерное гильбертово пространство. ПДО определяют непрерывные отображения в пространстве основных функций Z, а их сопряженные операторы - в пространстве обобщенных мер Z' [1]. Частным случаем таких ПДО являются дифференциальные операторы с переменными коэффициентами [2].

Псевдодифференциальным оператором (ПДО) с символом $a \in L_1$ [1], $a(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x) P_j(y)$ называется отображение $A(D, y) : Z \to Z$, определенное ра-венством:

$$A(D, y) f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} F[P_j(y) F^{-1}[Q_j f]](x),$$

где $f \in Z$; $F^{-1}[Q_j f]$, $P_j(y) F^{-1}[Q_j f]$ есть меры из M [1], равные произведению меры на функцию. ПДО $A^*(D, y)$ в пространстве обобщенных мер Z' есть отображение, сопряженное к $A(D, y)$.

Теорема. Если $A(D, y)$ и $A^*(D, y)$ - ПДО с символом $a \in L_1$, то существует действительное число λ_0, такое что для всех $|\lambda| > \lambda_0$ и всех $g \in Z, m \in Z'$ решение каждого из уравнений $\lambda h + A(D, y) h = g$ и $\lambda \mu + A^*(D, y) \mu = m$ существует и единственно, соответственно, в пространстве основных функций Z и в пространстве обобщенных мер Z'.

Литература

1. Курбыко И.Ф. Об эволюционных уравнениях с бесконечномерными ПДО. // Дифференц. уравнения, 1987, т.23, №9, с.1510-1519.

2. Курбыко И.Ф. Решение задачи Коши в одном пространстве функций на бесконечномерном пространстве. // Современные методы в теории краевых за-дач. "Понтрягинские чтения". - Воронеж, ВГУ, 2001, с. 99.

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

Курдюмов В.П. (Саратов)

Рассматривается вопрос об оценках для собственных функций (с.ф.) и собственных значений оператора L:

$$y^{(\nu)}(x) + Ny^{(\nu-1)}(x), \quad \nu = 4\nu_1 + 2, \quad x \in [0,1],$$

$$y^{(2k)}(0) = y^{(2k)}(1) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,\frac{n}{2} - 1, \tag{1}$$

где $Nf(x) = q(x)\int\limits_0^1 p(t)f(t)\,dt$, $q(x), p(x) \in L_2[0,1]$.

Аналогичная задача для оператора Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом исследовалась Винокуровым В.А. и Садовничим В.А. в [1]. Ульяновой Е.Л. в [2] исследовался оператор L для $\nu = 2$. Здесь обобщается и уточняется результат из [2]. Приведем полученный результат лишь для с.ф. .

Теорема. *При n достаточно больших и произвольном $m = 1,2,\ldots$ для с.ф. $\varphi_n(x)$ оператора L справедливы оценки*

$$\left|\varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x,n)\right| \leqslant 2b^{2(m+1)}\beta^{2(m+1)}(n),$$

причем $|g_m(x,n)| \leqslant \sqrt{2}b^{2m}\beta^{2m}(n)$,
где $\beta(n) = \max\left\{|q_n|, |p_n|, \sum\limits_{k=1,k\neq n}^{\infty} \frac{|q_k|}{|n-k|}, \left(\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{\infty} \frac{|q_k|^2}{|n-k|}\right)^{1/2},\right.$
$\left.\left(\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{\infty} \frac{|p_k|^2}{|n-k|}\right)^{1/2}\right\}$, $e_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$, $q_k = (q, e_k)$, $p_k = \frac{(p,e_k')}{(k\pi)}$, $b = 2(\pi)^{-1/2}$.

Литература

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. // ДАН. – 1998. – Т. 358. – № 3. – С. 298–301.

2. Ульянова Е.Л. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерным: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 1998.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы "Университеты России" (проект ур.04.01.041) и гранта РФФИ (проект № 03-01-00169).

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЗАДАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Курохтин В.Т. (Москва)
E-mail vkt54@rambler.ru

В настоящее время при постановке краевых задач в механике деформируемого твердого тела принято задавать значения функций или их частных производных на части поверхности, ограничивающей некоторое тело. В то же время, из механики вязкой жидкости известен феномен резкого изменения скорости жидкости в некотором слое конечной толщины, прилегающем к обтекаемой поверхности.Это явление сопровождается значительным выделением энергии в описанном выше пограничном слое. Аналогично, в теории ударных волн известно, что ударная волна это, строго говоря, некоторый слой, в котором претерпевают значительные изменения давление, скорость и другие параметры. (А отнюдь не поверхность разрыва, которой часто заменяют ударную волну в математических моделях. Поэтому кажется целесообразным в контактных задачах динамики упругопластической среды задавать количество энергии, выделяемое в зоне контакта конечной толщины. Следует отметить, что задание энергии как функции времени в качестве граничного условия применялось Л.И.Седовым при решении задачи о сильном взрыве. В настоящей работе предлагается математическая постановка задачи о распространении упругопластических волн сдвига в полубесконечном стержне круглого сечения в том случае, когда на конце стержня задана мощность выделяемой энергии.

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ НОРМ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Кусаинова Л.К. (Караганда)
E-mail kusainova@kargu.krg.kz

В работе получены двусторонние оценки нормы мультипликатора $\gamma \in M(W_1 \to W_2)$, где W_i– весовые пространства Соболева, содержащие как плотное класс $C^\infty W = \{u \in C^\infty(\Omega) : \ |u; W| < \infty\}$.

Здесь Ω– произвольная область в $\mathbb{R}^n$ с непустой границей $\partial\Omega$,

$$|u; W_p^l(\Omega;\rho,v)| = \left(\int_\Omega |\nabla_l u|^p \rho\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |u|^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty,$$

$l \geqslant 1$ – целое, $pl \neq n$. Пусть I^n – совокупность кубов $Q = Q_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \frac{d}{2},\ i = 1, \ldots, n\}$, v– вес на Ω, удовлетворяющий условию:

$$\int_\Omega v = \infty, \quad \text{как только} \quad \bar{Q} \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Положим $v^*(x) = \sup\limits_{d>0}\{d : Q = Q_d(x) \subset \Omega,\ d^{lp-n} \int\limits_Q v \leqslant 1\}$; $Q^*(x) = Q_d(x)$ при $d = (1-\varepsilon)v^*(x)$, $\varepsilon \in (0,1)$– фиксировано; $\mathcal{B} = \cup_{x\in\Omega}\{Q \in I^n : Q \subset Q^*(x)\}$, $\mathcal{B}(x) = \{Q \in \mathcal{B} : Q \ni x\}$; $M^* f(x) = \sup\limits_{Q\in\mathcal{B}(x)} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f|$.

Доказано, что если веса v и ω на Ω удовлетворяют определенным условиям типа (A_p) относительно базиса $\mathcal{B}$, то для пары $W_1 = W_p^l(\Omega; 1, v)$, $W_2 = W_p^m(\Omega; \omega, \omega v^{*-mp})$, $0 < m < l$, норма ($\|\gamma\|_{M(W_1 \to W_2)}$ $\sim \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} \mathcal{K}^*(x)$, где

$$\mathcal{K}^*(x) = \sup_{Q\subset Q^*(x)} |Q|^{-\frac{1}{p}+\frac{l}{n}} \left[\left(\int_Q |\nabla_m \gamma|^p M^*\omega\right)^{\frac{1}{p}} + |Q|^{-\frac{m}{n}} \left(\int_Q |\gamma|^p M^*\omega\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Если вес ρ на Ω подчиняется условию: $\forall Q \in \mathcal{B}$ $c^{-1} \leqslant \rho(y)/\rho(x) \leqslant c$, как только $x, y \in Q$, то для пары $W_1 = W_p^l(\Omega; \rho v^{*-lp})$, $W_2 = W_p^m(\Omega; \rho, \rho v^{*-mp})$ $0 < m < l$, норма $\|\gamma\|_{M(W_1 \to W_2)} \sim \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} \mathcal{K}(x)$, где

$$\mathcal{K}(x) = \sup_{Q\subset Q^*(x)} |Q|^{-\frac{1}{p}+\frac{l}{n}} \left[\left(\int_Q |\nabla_m \gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |Q|^{-\frac{m}{n}} \left(\int_Q |\gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ТИПА ПЕНЛЕВЕ

Лесниковская Т.П., Пронько В.А. (Гродно)

Рассмотрим уравнение

$$(y'' - A(t,y)y'^2 + B(t,y)y' + C(t,y))^2 = E(t,y), \tag{1}$$

где $A(t,y)$, $B(t,y)$, $C(t,y)$, $E(t,y)$ – функции, рациональные по y с аналитическими по t коэффициентами. В [1] выделены все классы уравнений (1) со свойством Пенлеве при условии $A(t,y) = (1-\frac{1}{n})/y$, где n – целое, не равное нулю или ∞.

В докладе находятся условия наличия свойства Пенлеве у уравнения (1), где $A(t,y) = \frac{M}{y} + \frac{N}{y-1}$. С помощью метода малого параметра убедимся в том, что для принадлежности рассматриваемого уравнения типу Пенлеве необходимо, чтобы оно имело вид

$$\begin{aligned}&\Big(y'' - (\tfrac{M}{y} + \tfrac{N}{y-1})y'^2 + (\sum_{i=-1}^{1} a_i y^i + \tfrac{b_{-1}}{y-1})y' + \\ &(\sum_{i=-2}^{1} c_i y^i + \sum_{i=-2}^{-1} d_i (y-1)^i) y(y-1)\Big)^2 = \\ &\Big(\sum_{i=-4}^{2} A_i y^i + \sum_{i=-4}^{-1} B_i (y-1)^i\Big) y^2 (y-1)^2,\end{aligned} \qquad (2)$$

где $(M;N) \in \{(1;1/2),(2/3;2/3),(3/4;3/4),(1/2;2/3)\}$, остальные функции являются аналитическими по t функциями.

Согласно [2], функция E не может иметь множителей $y-g(t)$, где $g(t) \neq 0; 1$, нечетной кратности. Следовательно, необходимо требовать $A_2 A_{-4} = 0$, так как в противном случае E становится полным квадратом. Введем в (2) параметр ε по формулам $y = \varepsilon^{-2}x$, $t = t_0 + \varepsilon^2\tau$, и будем искать решение полученного уравнения в виде ряда $x = \frac{\alpha}{\tau-\tau_0} + \varphi_1(\tau)\varepsilon + \varphi_2(\tau)\varepsilon^2 + \ldots$, где α удовлетворяет уравнению $(c_1(t_0)\alpha^2 - \alpha a_1(t_0) + 2 - M - N)^2 = \alpha^4 A_2(t_0)$. Требуя, чтобы каждая из функций $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, $\ldots$ не имела многозначных особенностей, с учетом резонансных условий, получим необходимые условия наличия свойства Пенлеве. Далее, используя преобразования $y = 1/x$, $y = 1-w$, $y = 1-1/u$, получаем другие необходимые условия наличия требуемого свойства и доказываем их достаточность.

Литература

1. Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, N 1. С. 33-38. 2. Cosgrove C.M., Scoufis G.// Stud. in Appl. Math. 1993. Vol.88. P.25-87.

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ЗАДАЧИ ГУРСА-ДАРБУ[1]

Лисаченко И.В., Сумин В.И. (Нижний Новгород)

E-mail v_sumin@mail.ru

Рассмотрим управляемую краевую задачу Гурса-Дарбу

$$\begin{aligned} &x''_{t_1t_2}(t) = g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t), u(t)), t \in \Pi \equiv [0,1]^2, \\ &x(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), t_1 \in [0,1]; x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), t_2 \in [0,1], \end{aligned} \tag{1}$$

где управление - $u(t) : \Pi \to R^m$, $g(t, l_1, l_2, l_3, \mathbf{u}) \equiv g(t, \mathbf{l}, \mathbf{u}) : \Pi \times R^{3k} \times R^m \to R^k$ дифференцируема по $\mathbf{l}$ $\forall \mathbf{u}$ при п.в. t и вместе с $g'_{\mathbf{l}}(t, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ измерима по t $\forall\{\mathbf{l}, \mathbf{u}\}$ и непрерывна по $\{\mathbf{l}, \mathbf{u}\}$ для п.в. t, $\varphi_i(t_i) : [0,1] \to R^k$ абсолютно-непрерывны, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. В [1,2] получены достаточные условия устойчивости (по возмущению управления) существования глобальных решений (1) в случае, когда $u \in L^m_\infty(\Pi)$ и рассматриваются абсолютно-непрерывные решения с ограниченными первыми и смешанной производными. В докладе приводятся обобщения результатов [1,2]. Дадим пример. Пусть: $p, s \in [1, \infty)$; $\varphi'_1, \varphi'_2 \in L^k_p[0,1]$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$; допустимы управления из ограниченного множества $D \subset L^m_s \equiv L^m_s(\Pi)$. Положим $f(t, \mathbf{l}, \mathbf{u}) \equiv g(t, l_1 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_2 + \varphi'_1(t_1), l_3 + \varphi'_2(t_2), \mathbf{u})$. Предположим, что формулы $\widehat{f}[z, u](t) \equiv f(t, A[z](t), u(t))$ и $\widehat{f}_1[z, u](t) \equiv f'_{\mathbf{l}}(t, A[z](t), u(t))$, где $A[z] \equiv \{A_1[z], A_2[z], A_3[z]\}$, $A_1[z](t) = := \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$, $A_2[z](t) = \int_0^{t_2} z(t_1, \xi) d\xi$, $A_3[z](t) = = \int_0^{t_1} z(\xi, t_2) d\xi$, определяют ограниченные операторы $\widehat{f}[\cdot,\cdot] : L^k_p \times D \to L^k_p$ и $\widehat{f}_1[\cdot,\cdot] : L^k_p \times D \to L^{k\times k}_p \times L^{k\times k}_\infty \times L^{k\times k}_\infty$. Глобальное решение (1) естественно искать в классе абсолютно-непрерывных функций с первыми и смешанной производными из L^k_p, каждому $u \in D$ отвечает не более одного такого решения x_u. Пусть $\Omega \equiv \{u \in D : \exists x_u\} \neq \emptyset$. Для $u \in D$, $u_0 \in \Omega$ положим $x_0 \equiv x_{u_0}$, $r(u, u_0) \equiv \|A[\Delta_u g]\|_{L^k_\infty \times L^k_p \times L^k_p}$, где $\Delta_u g \equiv g(t, x_0(t), x'_{0t_1}(t), x'_{0t_2}(t), u(t)) - -g((t, x_0(t), x'_{0t_1}(t), x'_{0t_2}(t), u_0(t))$.

Теорема. $\forall u_0 \in \Omega$ $\exists \varepsilon > 0 : u \in D$, $r(u, u_0) < \varepsilon \Rightarrow u \in \Omega$.

Литература

1. Плотников В.И.,Сумин В.И. // Дифференц. уравнения. 1972.

[1]Поддержка грантами: РФФИ №01-01-00979, Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) №Е02-1.0-173.

Т.8. №5. С.845-856. 2. Сумин В.И. // Укр. матем. журн. 1991. Т.43. №4. С.555-561.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ломакин Д.Е. (Орел)
E-mail DenisLomakin@rambler.ru

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ пространство гладких финитных функций в $\mathbb{C}^n$, $R\mathcal{D}$ - векторное пространство, образованное комплексными преобразованиями Радона $\hat{\varphi}(s,w)$ функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, $(s,w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}, S^{2n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через M векторное пространство функций вида

$$\psi(s,w) = \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \hat{\varphi}(s,w),$$

где $\hat{\varphi}(s,w) \in R\mathcal{D}$. В монографии [1] преобразование Радона $\hat{F}$ обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ определяется как линейный функционал, заданный на M и определяемый соотношением

$$(-1)^{n-1} b_n < \hat{F}, \psi >=< F, \varphi >,$$

где $b_n > 0$. Продолжение функционала $\hat{F}$ на $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ определяется неоднозначно. При этом показано что преобразование Радона целой аналитической функции $F(z)$ (как обобщенной) может быть задано в виде $\hat{F}(s,w) = |s|^{2n-2} H(s,w)$, где $H(s,w)$ — целая аналитическая функция комплексного переменного s. При этом доказано только существование функции $H(s,w)$. В работе [3] функция $H(s,w)$ получена конструктивно.

Пусть $H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ пространство функций вида $u(s,w) =$ $= |s|^{2n-2} H(s,w)$, где $H(s,w) = \tilde{H}(s\bar{w})$, $\tilde{H}(z)$ — целая функция.

Теорема. В классе функций $H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ преобразование Радона функции $F(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ определяется единственным образом.

Литература

1. Гельфанд И. М., Граев М.И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: Физматгиз, 1962. 656 с., ил.

2. Секерин А. Б. Применения преобразования Радона к аппроксимационным задачам многомерного комплексного анализа. Дис. ... д. ф.-м. н. / Уфа, 1992.

3. Ломакин Д. Е. Преобразование Радона целых функций многих переменных. / Орл. гос. ун-т. — Орел, 2003. — 24 с. Деп. в ВИНИТИ 07.07.2003 г., № 1276-В2003.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Ломовцев Ф.Е. (Минск)
E-mail lomovcev@bsu.by

Слабые решения $u \in W_2^1(G)$ смешанной задачи

$$u_{tt}(t,x) - a(t)u_{xx}(t,x) = f(t,x), (t,x) \in G =]0,T[\times]0,l[, \quad (1)$$

$$u(t,0) = 0, u_x(t,l) + \beta(t)u(t,l) = 0, t \in [0,T], \quad (2)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), x \in]0,l[, \quad (3)$$

аппроксимируются гладкими решениями $u^{(n)} \in W_2^2(G)$ задач

$$u_{tt}^{(n)}(t,x) - a(t)u_{xx}^{(n)}(t,x) = f_i^{(n)}(t,x), \ t \in I_i =]t_i, t_{i+1}[, \ x \in]0,l[, \quad (1')$$

$$u^{(n)}(t,0) = 0, u_x^{(n)}(t,l) + \beta(t_i)u^{(n)}(t,l) = 0, t \in I_i, i = \overline{0,n}, \quad (2')$$

$$u^{(n)}(0,x) = \varphi^{(n)}(x), u_t^{(n)}(0,x) = \psi^{(n)}(x), x \in]0,l[, \quad (3')$$

$$u^{(n)}(t_i - 0, x) = u^{(n)}(t_i + 0, x), u_t^{(n)}(t_i - 0, x) = u_t^{(n)}(t_i + 0, x),$$
$$x \in]0,l[, i = \overline{1,n}, n = 1,2,\ldots \ . \quad (4')$$

Определение. Функция $u \in W^1_{2,\Gamma(t)}(G)$ называется *слабым решением* задачи (1)-(3) для $\{f,\varphi,\psi\} \in L_2(G) \times W^1_{2,\Gamma(0)}(0,l) \times L_2(0,l)$, если для любого разбиения $\{I_i\}_0^n$ интервала $]0,T[$ и $\forall \{f^{(n)}, \varphi^{(n)}, \psi^{(n)}\} \to \{f,\varphi,\psi\}$ в $L_2(G) \times W_2^1(0,l) \times L_2(0,l)$ решения $u^{(n)} \in W^2_{2,\Gamma(t_i)}(G)$ задач $(1') - (4')$ сходятся к u сильно в $W_2^1(G)$ при $h^{(n)} = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |t_{i+1} - t_i| \to 0$, $u(0,x) = \varphi(x)$ в $L_2(0,l)$ и

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a(t) u_x v_x) dx dt + \int_0^T a(t)\beta(t)u(t,l)v(t,l)dt =$$
$$\int_0^T \int_0^l f v dx dt + \int_0^l \psi(x) v(0,x) dx$$

при любых $v \in W^1_{2,\Gamma(t),T}(G)$. Здесь $W^1_{2,\Gamma(t)}(G)$— пополнение множества $\{u \in W_2^2(G) : u \in (2) \ \ \forall t \in [0,T]\}$ по норме пространства $W_2^1(G)$, $W^1_{2,\Gamma(t),T}(G) = \{v \in W^1_{2,\Gamma(t)}(G) : v(T,x) = 0\}$, $W^2_{2,\Gamma(t_i)}(G) =$

$\{u \in W_2^2(G) : u \in (2')\forall i = \overline{0,n}\}$ и $W^1_{2,\Gamma(0)}(0,l)$— пополнение множества $\{u \in W_2^2(0,l) : \quad u \in (2)$ при $t = 0\}$ по норме пространства $W_2^1(0,l)$.

Теорема. *Если $0 < a_0 \leqslant a(t) \in C^1[0,T]$, $0 \leqslant \beta(t) \in C^2[0,T]$, то для каждых $\{f, \varphi, \psi\} \in L_2(G) \times W^1_{2,\Gamma(0)}(0,l) \times L_2(0,l)$ слабое решение $u \in W^1_{2,\Gamma(t)}(G)$ задачи (1)-(3) существует и единственно.*

Указывается оценка погрешности приближений $u^{(n)}$.

О РАВЕНСТВЕ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ[1]

Лукашенко Т.П. (Москва)

E-mail lukashen@mech.math.msu.su

Известно, что если f — 2π-периодическая функция, G — функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, то даже в случае существования интеграла Лебега-Стилтьеса $\int_0^{2\pi} f d\overline{G}$ равенство Парсеваля может не выполняться [1]. Приведем достаточное для случая кратных тригонометрических рядов условие выполнения равенства Парсеваля для интеграла Лебега-Стилтьеса.

Теорема. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ является 2π-периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, аддитивная функция бруса (n-мерного параллелепипеда) G ограниченной вариации на T^n и 2π-периодична по каждой переменной. Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от Mf по G на T^n, где $Mf(x) = \sup_{h_j \neq 0} \frac{1}{|h_n \cdots h_1|} \left| \int_0^{h_n} \cdots \int_0^{h_1} f(x+t)\, dt \right|$ — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f, или интеграл Лебега от произведения $f \cdot MdG$ на T^n, где $MdG(x) = \sup_{h_j \neq 0} \frac{|G([x,x+h])|}{|h_n \cdots h_1|}$ — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции бруса G, то выполняется равенство Парсеваля для метода суммирования Римана

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{L}-\mathcal{S}) \int_{T^n} \cdots \int f\, d\overline{G} = (\mathcal{R}, 2) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{dG}(k)},$$

где $\widehat{f}(k)$ и $\widehat{dG}(k)$ соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G, интеграл в равенстве Парсеваля — Лебега–Стилтьеса, ряд в правой части равенства

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00420) и программы "Научные школы" НШ-1657.2003.1.

Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана $(\mathcal{R}, 2)$.

Одномерный случай ранее рассмотрен в [2].

Литература

1. Горячева В.С. О равенстве Парсеваля для рядов Фурье-Стилтьеса //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2002. №2. С. 32-36.
2. Лукашенко Т.П. О равенстве Парсеваля для произведения функций//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. №23. С. 32-40.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК РАЗНОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Любасова Г.Ю. (Старый Оскол)

E-mail lyubasoba@mail.ru

Задача бифуркации инвариантных торов из особых точек динамических систем при отсутствии сильных резонансов (до четвертого порядка включительно) сводится к изучению бифуркаций стационарных точек динамических систем вида

$$\dot{\xi}_j = \xi_j(\varepsilon_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\varepsilon)\xi_k^2), \; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Одним из основных предположений при рассмотрении систем вида (1) является невырожденность матрицы $A(0) = (a_{jk}(0))_{j,k=1}^{n}$ и ее главных миноров.

При этом появляется возможность следить за бифуркацией не только n-мерных торов, но и торов меньшей размерности. Естественным развитием поставленной проблемы является задача о сосуществовании инвариантных торов разной размерности.

В докладе рассматривается трехмерный случай ($n = 3$). Полностью исследованы одномерные и двумерные торы (в частности, вычислены индексы неустойчивости бифурцирующих торов). Трехмерные торы и сосуществование торов исследованы частично. Доказана, например, невозможность сосуществования устойчивых одномерных и устойчивых двумерных торов, а также невозможность сосуществования устойчивых двумерных и устойчивых трехмерных торов.

Получен ряд теорем, содержащих достаточные условия существования устойчивых трехмерных стационарных точек. В докладе приводятся примеры векторных полей, удовлетворяющих условиям теорем. В одном из примеров построено векторное поле, имеющее в каждой точке окрестности нуля пространства параметров устойчивую стационарную точку, и притом ровно одну. Области устойчивости всех стационарных точек (как одного, так и разных порядков) не пересекаются.

РАВНОМЕРНАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ С КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА В КЛАССЕ ВИНЕРА[1]

Маергойз Л.С., Рыбакова Н.Н. (Красноярск)
E-mail maergoiz@krsk.info

Пусть W_σ - класс Винера целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, где $\sigma > 0$, принадлежащих пространству L^2 на вещественной оси в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Рассматривается задача оценки оптимальной ошибки наилучшего аналитического продолжения с конечного множества $U_N = \{z_1, ..., z_N\}$ в компакт $K \subset \mathbb{C}$ Для случая $K = \{z_0\}$, где $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$, в [1] исследовалась неустранимая погрешность оптимальной экстраполяции $\Omega_N(z_0)$ любой функции f из множества $V = \{f \in W_\sigma : \ ||f|| \leqslant r\}$ $(r > 0)$ в точку z_0.

В докладе излагаются иллюстрируемые примерами свойства следующей более сложной характеристики аналитического продолжения функций множества V с конечного множества размерности N : $\inf\{A(U_N; K) : U_N \subset B\}$, где $A(U_N; K) = \sup\{\Omega_N(z_0) : z_0 \in K\}$. Здесь B – фиксированное множество в $\mathbb{C}$. Близкий показатель качества экстраполяции изучался в [2].

Литература

1. *Маергойз Л.С.* Оптимальная оценка экстраполяции с конечного множества в классе Винера // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41, N 6. С. 1363-1375.

2. *Марчук А.Г., Осипенко К.Ю.*. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Матем. заметки. 1975. Т. 17. N 3. С. 359-368.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00460) и гранта Президента РФ по ведущим научным школам (проект НШ-1212.2003.1)

УСЛОВИЕ УВЕЛИЧЕНИЯ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ ПРИ МАЛОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ[1]

Макаренков О.Ю. (Воронеж)

E-mail omakarenkov@kma.vsu.ru

Пусть при $\varepsilon = 0$ система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \psi(x) + \varepsilon\varphi(t, x), \tag{1}$$

где $\psi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $\varphi : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ – T-периодическая по первой переменной функция и ε – параметр, имеет предельный цикл x_0 периода T. В работах [2] и [1] показано, что задача о существовании периодических решений у системы (1) при малых $\varepsilon > 0$ сводится к вопросу о поведении следующей скалярной функции

$$F_0(\theta) = \int_0^T z^*(\tau)\varphi(\tau - \theta, x_0(\tau))d\tau,$$

где z^* – периодическое решение системы, сопряженной к линеаризованной на цикле x_0 системе (1) при $\varepsilon = 0$. Именно, необходимым условием в поставленной задаче является $F_0(0) = 0$. Имеет место следующее свойство.

Лемма. Пусть при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1) имеет T-периодическое решение x_ε и существует $M > 0$ такое, что $\|x_\varepsilon - x_0\| < \varepsilon M$ (условия, обеспечивающие это, даны в [1] и [2]). Тогда если $F_0(0) > 0$, то $x_\varepsilon(0)$ лежит снаружи цикла x_0.

Литература

[1] М. И. Каменский, О. Ю. Макаренков и П. Нистри, Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, ДАН, Т. 388, N 4, 2003, С. 439-442.

[2] W.S. Loud, Periodic solutions of perturbed autonomous systems, *Ann. of Math.* **70** (1959), 490-529.

[1]Работа поддержана поддержана РФФИ, гранты 02-01-00189 и 02-01-00307 и грантом VZ-010 U.S.CRDF - Министерства Образования РФ.

О ПОСТРОЕНИИ СЛЕДОВ "ПОДХОДЯЩИХ РЕЗОЛЬВЕНТ" СТЕПЕНЕЙ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

Малеко Е.М., Королева В.В. (Магнитогорск)
E-mail maleko@masu.ru

Хорошо известно [1], что дискретный оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H имеет резольвентой вполне-непрерывный оператор $R_\lambda(T) = (T - \lambda E)^{-1}$ с комплексным параметром $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in C | \lambda \neq \lambda_i, \lambda_i \in S(T)\}$, $S(T) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ – спектр оператора T.

Пусть оператор T – самосопряженный, и для некоторого фиксированного $\lambda \in \Lambda$ совокупность $\{\tilde{\lambda}_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{-1}\}_{i=1}^{\infty}$ собственных чисел ядерного оператора $R_\lambda(T)$ занумерована по невозрастанию модулей. Для каждого номера i через $\{\tilde{\varphi}_{ij}(x)\}$ обозначим соответствующую числу $\lambda_i(\lambda)$ кратности m_i совокупность всех собственных функций. Функции $\{\tilde{\varphi}_{ij}(x)\}$ ортонормированы в совокупности. Считаем $H = L_2(\Omega)$, где Ω – некоторая замкнутая односвязная область, $\Omega \subset R^n$. Методом "подходящих резольвент"выведена формула для следа степени некоторого конечномерного оператора $\left[R_{\lambda,n}^{(n)}(T + P)\right]^t$, аппроксимирующего оператор $[R_\lambda(T + P)]^t$ в наиболее постом случае – коммутирования операторов P и $R_\lambda(T)$:

$$Sp\left[R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{kt}\frac{(P^{kt}\tilde{\varphi}_{ij}(x), \tilde{\varphi}_{ij}(x))}{(\lambda_i - \lambda)^{(k+1)t}},\ P^0 = E, t \in N,$$

и доказана следующая

Теорема 1 $Sp\left[R_{\lambda,n}^{(n)}(T + P)\right]^t \to Sp[R_\lambda(T + P)]^t$ *равномерно по* λ *на* Γ_a *(на* K*),* $t \in N$.

Здесь $\Gamma_a = \{\lambda \in \Lambda : |\lambda| = a \ \& \ \max\limits_{|\lambda|=a} \|PR_\lambda(T)\| = q < 1\}$ – окружность (K – любой компакт комплексной плоскости C, на котором выполняется оценка $\max\limits_{\lambda \in K} \|PR_\lambda(T)\| < 1$), $\|\cdot\|$ – операторная норма в H. Формулы следов могут быть использованы для нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов.

Литература

1. Садовничий В.А. Теория операторов. – 2-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 386 с.

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ НЕАТНАГОНИСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Марковкин М.В. (Санкт-Петербург)
E-mail markovkin@mail.ru

В статье рассмотрены линейно-квадратичные неатнагонистические дифференциальные игры, задаваемые следующим образом:

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)(u_1 + u_2 + ... + u_n),$$

где $x - m$—мерный вектор, $u_i - r$—мерный вектор для любого i=1..n, P и Q матрицы соответствующих размерностей,имеющие вещественные, непрерывные и ограниченные при $t \in [0, +\infty)$ элементы; выигрыши игроков заданы с помощью функционалов

$$J_i = \int\limits_0^\infty (x^T A_i(t)x + u_i^T C_i(t)u_i), i = 1..n,$$

где $A_i(t)$ и $C_i(t)$ - матрицы соответствующих размерностей, имеющие вещественные, непрерывные и ограниченные при $t \in [0, +\infty)$ элементы, причем квадратичные формы $u_i^T C_i(t)u_i$ отрицательно определённые функции переменных для любого i=1..n.

Рассмотрен кооперативный вариант данной игры. Определен способ построения так называемого пропорционального решения. Построена характеристическая функция, как выигрыш коалиции, направленный на увелечение суммарого дохода, при игре против стратегий, входящих в Нэш-равновесие, которые используют не вошедшие в коалицию игроки. Разработан метод последовательных приближений для решения задачи нахождения выигрыша коалиции.

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высш. шк.,Книжный дом "Университет", 1998.

2. Зубов В.И. Лекции по теории управления. Главная редакция физ.-мат. литературы изд-ва "Наука", М., 1975.

ПОСТРОЕНИЕ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Мастерков Ю.В., Родина Л.И. (Ижевск)
E-mail imi@uni.udm.ru

Получены условия, при которых существует неупреждающее управление для системы

$$\dot{x} = A(f^t\omega)x + B(f^t\omega)u, \quad (t,\omega,x,u) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \qquad (1)$$

со стационарными случайными параметрами, где $(A(f^t\omega), B(f^t\omega))$ — кусочно постоянная случайная матрица. Управление $u(t,x)$ называется *неупреждающим*, если для его построения в момент $t = \tau$ используется информация о поведении системы только при $t \leqslant \tau$.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2, P_1 \times P_2)$ — вероятностное пространство. Здесь Ω_1 — пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1 \ldots \theta_k \ldots)$, где $\theta_k \in (0,\infty)$,

$$\Omega_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_k \ldots), \varphi_k \in \Psi\},$$

$\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^s$ — конечное множество матричных пар $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$. На $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ определим преобразование сдвига f^t, сохраняющее меру P. Рассмотрим функцию $\xi(\omega) = (A(\omega), B(\omega))$, тогда $\xi(f^t\omega)$ — стационарный в узком смысле случайный процесс. Систему (1) отождествим с функцией $\xi : \Omega \to \Psi$. При каждом фиксированом ω функция $t \to \xi(f^t\omega)$ задает линейную детерминированную систему. В качестве *допустимых управлений* системы $\xi(f^t\omega)$ берутся всевозможные ограниченные функции $u_\omega(t,x,x_0)$ времени, состояния и начального положения системы. Решения системы ξ, соответствующие управлению $u_\omega(t,x,x_0)$, будем понимать в смысле А. Ф. Филиппова.

Пусть фиксировано $\omega \in \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{L}_{[0,T]}(\omega)$ множество неупреждающе управляемых состояний системы $\xi(f^t\omega)$ на $[0,T]$. Система ξ называется *неупреждающе управляемой с вероятностью* P_0 на $[0,T]$, если $P\{\omega : \mathfrak{L}_{[0,T]}(\omega) = \mathbb{R}^n\} = P_0$.

Описан алгоритм построения неупреждающего управления (в случае, когда неизвестны длины интервалов между переключениями процесса и будущие состояния системы при $t > \tau$). Получена оценка снизу вероятности того, что система ξ неупреждающе управляема на отрезке $[0,T]$.

О ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЯХ ИЗ КЛАССОВ БЕККЕРА

Микка В.П. (Йошкар–Ола)
E-mail mikkav@marsu.ru

Простейшие геометрические свойства однолистных в E регулярных функций $f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + a_{n+2}\zeta^{n+2} + \ldots$ из семейств $B_1 = \{f(\zeta) : |\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)| \leqslant 1/(1-|\zeta|^2)\}$, $B_2 = \{f(\zeta) : |f''(\zeta)/f'(\zeta)| \leqslant 1/(1-|\zeta|^2)\}$, введенных в работах [1], [2], мало изучены, поэтому вопрос выполнения включений $S^*_{\alpha,\beta} \subset B_1$, $S^*_{\alpha,\beta} \subset B_2$, где $S^*_{\alpha,\beta} = \{f(\zeta) : \zeta f'(\zeta)/f(\zeta) \prec (1+\beta\zeta)/(1-\alpha\zeta)\}$ – подкласс звездообразных функций при $\alpha + i\beta \in \Delta = \{(\alpha,\beta) \in [-1,1]\times[-1,1] : \alpha+\beta > 0\}$, является достаточно интересным. В данном сообщении найдены множества изменения параметра $\alpha + i\beta$, обеспечивающие указанные вложения, тем самым, в случае неулучшаемости полученных результатов, удается выяснить геометрические характеристики звездообразных экстремальных функций, не принадлежащих B_1, B_2, соответственно.

Теорема. *Пусть $G \subset \Delta$ является криволинейной трапецией со сторонами $\alpha + \beta = 0$, $2(\alpha+\beta)(n+1) = n$,*

$$L^n_{1/2} = \Big\{ (\alpha,\beta) \in \Delta : \alpha =$$

$$= -\beta \frac{(n+1+\beta)^2 - (1+\beta)n + 5n^2/4}{(n+1+\beta)^2 - (1+\beta)(n+1)n - (\beta - 1/4)n^2} \Big\},$$

$$\tilde{L}^n_{1/2} = \Big\{ (\alpha,\beta) \in \Delta : \alpha =$$

$$= -\beta \frac{(n+1-\beta)^2 - (1-\beta)n + 5n^2/4}{(n+1-\beta)^2 - (1-\beta)(n+1)n + (\beta + 1/4)n^2} \Big\}.$$

Тогда при $\alpha + i\beta \in \overline{G}$ $\quad S^*_{\alpha,\beta} \subset B_1$.

Литература

1. *Becker J.* Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen //J. reine und angew. Math. – 1972. – Bd. 255. – S.23-43.

2. *Becker J., Pommerenke Ch.* Schlichtheitskriterien und Jordangebiete //J. reine und angew. Math. – 1984. – Bd. 354. – S.74-94.

О КОНСТРУКТИВНОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Минюк С.А. (Гродно), Метельский А.В. (Минск)
E-mail zhuk@grsu.grodno.by, ametelski@bntu.by

Рассмотрим линейную систему Σ дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\delta) + A_2\dot{x}(t-\delta), t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in H^- = [-\delta, 0], \tag{2}$$

$$y(t) = Gx(t), t \in T = [0, t_1]. \tag{3}$$

Здесь x–n– вектор-столбец решения уравнения (1) ($n \geqslant 2$); y – m–вектор доступных измерению выходных величин ($1 \leqslant m \leqslant n$); $\delta > 0$ – постоянное запаздывание; $t_1 > 0$ – фиксированный момент времени; A, A_1, A_2, G – постоянные матрицы подходящих размеров; $\dot{\varphi} \in C(H^-, R^n)$.

Определение 1. Систему Σ назовем конструктивно идентифицируемой в направлении $p(\cdot) = p(\tau)$, $\tau \in H^-$ ($p(\cdot) \in C(H^-, R^n,)$) если найдется такая суммируемая с квадратом m– вектор-функция $v(t)$, $t \in T$, для которой выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{t_1} v'(t)y(t) = \left(p'(0) - p'(-\delta)A_2\right)x(t_1) + \\ &+ \int\limits_{t_1}^{t_1+\delta} p(t_1 - t)(A_1x(t-\delta) + A_2\dot{x}(t-\delta))dt \end{aligned} \tag{4}$$

какова бы ни была n–вектор-функция $x(t), t \in [t_1 - \delta, t_1]$, порожденная (2) ((′) – операция транспонирования). Если (4) имеет место для любого направления $p(\cdot) \in C(H^-, R^n)$, то систему Σ назовем полностью конструктивно идентифицируемой. Вектор-функцию $v(t), t \in T$, назовем разрешающей функцией.

Обозначим $W(\lambda) = \lambda E - A - (A_1 + \lambda A_2)e^{-\lambda\delta}$. Пусть $\det W(\lambda) = \lambda^n$ + $+ \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{j=n} r_{ij}y^{(n-i)}(t - j\delta)$ – характеритический квазиполином системы (1) запаздывающего типа, т.е $r_{0j} = 0, j = \overline{1, n}$.

Теорема 1. Систем Σ (с характеристическим уравнеием запаздывающего типа) полностью конструктивно идентифицируема при некотором $t_1 \geqslant nh$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} G \\ W(\lambda) \end{bmatrix} \forall\lambda \in C,$$

где C – поле комплексных чисел.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Минюк С.А., Наумович Е.А. (Гродно)
E-mail zhuk@grsu.grodno.by

Пусть ненаблюдаемый вектор $x(t)$ —решение стохастической системы

$$dx(t) = \left(A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + \int\limits_0^h R_1(t,\tau)x(t-\tau)d\tau\right)dt + \\ + f(t)dt + \sigma_1(t)d\xi_1(t), t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(s) = \dot{\varphi}(s), s \in [-h, 0), x(0) = x_0, \tag{2}$$

а доступный наблюдению на $[0,T]$ вектор $y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$dy(t) = \left(C_1(t)x(t) + C_2(t)x(t-h) + \int\limits_0^h R_2(t,\tau)x(t-\tau)d\tau\right)dt + \\ + \sigma_2(t)d\xi_2(t), \tag{3}$$

где $T > h$ – произвольный фиксированный момент времени, $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^m$; соответствующих размерностей матрицы A, A_1, R_1, σ_1, C_1, C_2, R_2, σ_2 и вектор f заданы и имеют кусочно-непрерывные элементы,причем $N_2(t) = \sigma_2(t)\sigma_2'(t) > 0$ (т.е. матрица $N_2(t)$ – положительно определена) для любого $t \in [0,T]$. Считаем, что $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – стандартные винеровские процессы произвольных размерностей, $\dot{\varphi}(s)$ – случайный процесс типа белого шума с заданной матрицей интенсивностей $D_H(s)$, x_0 – гауссовский случайный вектор, параметры распределения вероятностей которого неизвестны. Считаем, что все случайные величины $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\dot{\varphi}(s)$, x_0 взаимно независимы.

Необходимо построить наилучшую в среднеквадратичном смысле оценку вектора $x(T)$ по результатам наблюдений процесса (3) на отрезке $[0,T]$. Оптимальная оценка $m(T)$ является линейным функционалом от результатов наблюдений, т.е. $m(T) = \int_0^T u'(t)dy(t)$, причем матрица $u'(t)$ размера $n \times m$ (ядро оценки) подлежит определению из условия минимума по u выражения $I = M\|x(T) - m(T)\|^2$, где M – символ математического ожидания.

Литература

1.Минюк С.А. Об одной задаче оптимального управления для стационарных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. N 1.

2.Минюк С.А. Наумович Е.А. О некоторых задачах оптимальной
фильтрации для линейных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы. 2001. N 6.

О КОЛЕБАНИЯХ ПО НЕМЫЦКОМУ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мирзов Дж.Д. (Майкоп)

E-mail mirzov@adygnet.ru

Обсуждаются имеющиеся связи между теорией В.В.Немыцкого [1] и некоторыми результатами из [2] относительно осцилляционных свойств решений многомерных дифференциальных систем.

Литература

1.Немыцкий В.В. Колебательные режимы многомерных динамических систем // Труды Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Киев, 1963. Т.2, с. 308-314, 2.Мирзов Дж.Д. Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Майкоп, РИПО "Адыгея", 1993, 132 с.

О БАЗИСЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ L_p

Мирзоев С.С., Велиев С.Г. (БГУ; ИММ НАН Азербайджана)

E-mail b-bilalov@mail.ru

Пусть H_p^+,$_m H_p^-$-обычные классы Харди аналитических функций внутри и вне единичного круга, соответственно, где m-порядок главной части разложения в ряд Лорана на бесконечности функции из H_p^-. Обозначим через L_p^+ и ${}_mL_p^-$ сужение функций из H_p^+, и ${}_mH_p^-$, соответственно, на единичный круг. Пусть

$$L^+_{p,\nu^+} \overset{def}{\equiv} \left\{ f \in L^+_1 : \|f\|_{p,\nu^+} < +\infty \right\},$$

$${}_mL^-_{p,\nu^-} \overset{def}{\equiv} \left\{ f \in_m L^-_1 : \|f\|_{p,\nu^-} < +\infty \right\},$$

где

$$\|f\|_{p,\nu} \overset{def}{\equiv} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, \nu(t) dt \right)^{1/p},$$

$$\nu^\pm(t) = \prod_{i=0}^{l^\pm} \left| t - t_i^\pm \right|^{\beta_i^\pm},$$

$\left\{t_i^\pm\right\}_{i=0}^{l^\pm} : -\pi \leqslant t_0^\pm < t_1^\pm < \cdots < t_{l^\pm}^\pm < \pi-$ некоторые множества. Справедливо следующая

Theorem 4 *Пусть* $\left\{\beta_i^\pm\right\}_0^{l^\pm} : -1 < \beta_i^\pm < p-1,\ i = \overline{0, l^\pm}$ *некоторые множества. Тогда система экспонент* $\left\{e^{int}\right\}_{n\geqslant 0}$ $\left(\left\{e^{-int}\right\}_{n\geqslant m}\right)$ *образует базис в пространстве* L^+_{p,ν^+} $\left({}_mL^-_{p,\nu^-}\right)$, $1 < p < +\infty$.

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНУЛЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Моисеев Д.С. (Рязань)

Рассматривается система

$$A\dot{x} + Bx + f(x, \lambda) = 0, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n, A, B-$ постоянные матрицы, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $f(x,\lambda) = C(x,\lambda) + D(x,\lambda), C(x,\lambda)-$ форма порядка $s > 1$ относительно переменных $x, \lambda, D(x,\lambda)-$конечная сумма форм более высокого, чем s, порядка относительно $x, \lambda, C(0,\lambda) = 0, D(x,\lambda) = 0$. Ставится задача – определить условия существования ω-периодического решения системы

(1). Число ω принадлежит окрестности известного числа. Полагая $t = \dfrac{2\pi\tau}{\omega}$, систему (1) приведем к виду

$$A\dot{x} + \omega_0 Bx + f_1(\theta, x, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где, $f_1(\theta, x, \lambda) = \theta Bx + (\omega_0 + \theta)f(x, \lambda), \omega = 2\pi(\omega_0 + \theta)$, число ω_0 известно, θ – параметр. Решение системы (2) ищется во множестве M_n - рядов Фурье вида $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, где a_k, b_k – n-мерные векторы.

Система (1) имеет ненулевое ω-периодическое решение, если имеет ненулевое решение система

$$By + \sum_{k=1}^{s} P_i(y) + O(\rho) = 0, \tag{3}$$

где $B - p \times (p+m)$-матрица, $P_i(y)$ - форма порядка i относительно y, $\rho > 0$, число p определяется свойствами оператора $B^* = A\dot{x} + \omega_0 Bx$.

Теорема 1. Если $rangB = p$, то существует ненулевое ω -периодическое решение системы (1).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Мустафокулов Р. (Душанбе)
E-mail tgnu@mail.ru

Пусть $\Gamma = (b_1, b_2) \subset R^1$ и $b_1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b_2$. Обозначим $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = \overline{1,m})$ и $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$. Ниже обсуждается вопрос о суммарной кратности нулей решений уравнения

$$(p(x)y'')'' = f(x) \tag{1}$$

на Γ при условиях связи во внутренних узлах a_i

$$\begin{cases} y(a_i - 0) = y(a_i + 0), \quad y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0, \\ [(py'')' - qy'](a_i - 0) - [(py'')' - qy'](a_i + 0) - \rho(a_i)y(a_i) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

и граничных условиях вида

$$y(b_1) = y''(b_1) = y(b_2) = y''(b_2) = 0, \tag{3}$$

где $p(x)$ имеет абсолютно непрерывную первую производную и суммируемую вторую производную на Γ_0, а коэффициенты $q(a_i) \geqslant 0, \rho(a_i) \geqslant 0$ для всех $a_i (i = \overline{1, m-1})$.

Задачи (1) – (3) моделирует, например, малые колебания цепочки стержней с упругими опорами в узлах сочленения.

Пусть $\delta[\Gamma]$ -множество линейных комбинаций δ -функций, т.е. обобщенных функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta(x - s_i) \quad (b_1 < s_1 < \ldots < s_n < b_2; n = 1, 2, \ldots) \qquad (4)$$

Задачу (1) – (3) назовем *знакорегулярной*, если для каждой $f(\cdot) \in \delta[\Gamma]$, число различных нулевых мест соответствующего решения $y(\cdot)$ в Γ не более, чем число перемен знака в упорядоченном наборе коэффициентов $\{c_1, \ldots, c_n\}$ в (4) и если из дополнительного условия $c_1 \neq 0, c_i y(s_i) = 0 \ \ (i = \overline{2, n})$ вытекает $y(s_1) > 0$.

Отметим, что свойство знакорегулярности задачи (1) – (3) является, достаточным для осцилляционности спектра соответствующей спектральной задачи: все собственные значения вещественные, положительные, простые, k-ая собственная функция имеет k нулей внутри Γ, нули k-ой и $(k+1)$-ой собственной функций перемежаются и т.д.

<u>**Теорема:**</u> *Пусть $p(x) > 0$ при $x \in \Gamma_0$ и для коэффициентов $q(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ из* (2) *выполнено $q(a_i) + \rho(a_i) > 0$ для всех a_i $(i = \overline{1, m-1})$. Тогда задача* (1) – (3) *является знакорегулярной.*

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Назарова Е.В. (Саратов)

Рассматривается интегральный оператор вида:

$$Af = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t) f(t) dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t) f(t) dt +$$

$$+ \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t) dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t) dt,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

где α_i – комплексные константы.

Теорема. *Пусть: а) ядро оператора A непрерывно дифференцируемо по x и по t, за исключением диагоналей $t = x$ и $t = 1 - x$; б) $\frac{\partial^j}{\partial x^j} A_i(x,t)|_{t=x} = \delta_{j,0}$, $j = 0,1; i = 1,\dots,4$; в) $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$; г) $\overset{1}{\underset{0}{V}} \underset{x}{ar}\, A'_x(x,t)$ ограничена по t. Тогда для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ имеет место:*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta_1 \leqslant x \leqslant 1-\delta_1} \left| S_r(f,x) - \sigma_{r|\sqrt{\delta}|}(f(x),x) \right| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_{r|\sqrt{\delta}|}(f(x),x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k, для которых $\frac{1}{|\sqrt{\delta}|} 2k\pi < r$.

НАГРУЖЕННАЯ СТРУНА, КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ ТРЕТЬЕГО РОДА И МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГЕРРА[1]

Найдюк Ф.О., Прядиев В.Л., Ситник С.М. (Воронеж)
E-mail olegna@vmail.ru; prayd@vmail.ru; mathsms@yandex.ru

Найдено новое представление решения задачи о колебаниях нагруженной струны - через многочлены Лагерра. Это представление оказывается тесно связанным с полученным ранее (см. [1]) представлением решения волнового уравнения на отрезке с краевым условием 3-го рода. А именно.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (0 < x < 1,\, t > 0) \\ u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) + m u_{tt}(1,t) = 0 \quad (t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}, \tag{1}$$

в которой $m > 0$, $\varphi \in C^2[0;1]$. Определим оператор $A_m : C[0;1] \to$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-049, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект N Е02-1.0-46), программы Университеты России (проект УР.04.01.047) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (N НШ-1643.2003.1)

$C[0;+\infty)$ формулой:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}_m\varphi)(x) = \varphi_{\text{ч.}}(x-2n)+\\
&+\left(-\tfrac{2}{m}\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tfrac{m}{2}\right)^i L_i^{(n-i)}\left(\tfrac{2x}{m}\right) \int\limits_{2n-1}^{x} t^{n-i-1}\, e^{(t-x)/m}\varphi_{\text{ч.}}(t-2n)\,dt+\\
&+\sum_{j=1}^{n-1}\left(-\tfrac{2}{m}\right)^j \sum_{i=0}^{j-1}\left(\tfrac{m}{2}\right)^i L_i^{(j-i)}\left(\tfrac{2x}{m}\right) \int\limits_{2j-1}^{2j+1} t^{j-i-1}\, e^{(t-x)/m}\varphi_{\text{ч.}}(t-2j)\,dt,
\end{aligned}
$$

в которой $\varphi_{\text{ч.}}$ – чётное продолжение φ на $[-1;1]$, $n = [(x+1)/2]$, $L_i^{(j-i)}$ – многочлены Лагерра.

Теорема. Пусть $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$, $\varphi'(1) + m\varphi''(1) = 0$. Тогда решение (1) представимо в виде: $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big[f(x+t) + f(x-t)\Big]$, где f – нечётная функция, определяемая равенством $f'(x) = (\mathcal{A}_m\varphi')(x)$ $(x \geqslant 0)$.

Решение задачи (1) тесно связано с решением задачи

$$
\begin{cases}
u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (0 < x < 1,\ t > 0)\\
u_x(0,t) = 0,\ mu_x(1,t) + u(1,t) = 0 \quad (t > 0)\\
u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)
\end{cases}, \tag{2}
$$

а именно, решение последней (см. [1]) имеет вид:

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[(\mathcal{A}_m\varphi)(x+t) + (\mathcal{A}_m\varphi)(x-t)\Big].
$$

Подобным же образом связаны решения задачи $(1')$, получаемой из (1) заменой условия $u(0,t) = 0$ на условие $u_x(0,t) = 0$, и задачи $(2')$, получаемой из (2) заменой $u_x(0,t) = 0$ на $u(0,t) = 0$.

Литература

1. Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л. // "Понтрягинские чтения - XIV". - Воронеж, 2003. - С. 96-97.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ В МОДЕЛИРОВАНИИ РЕДКИХ ЯВЛЕНИЙ ПРИРОДНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА ЧАСТЬ 1. ШАРОВАЯ МОЛНИЯ И АТМОСФЕРНЫЙ СМЕРЧ ИЛИ ТОРНАДО[1]

Натяганов В.Л. (Москва)
E-mail tenzor@bks-mgu.ru

О шаровой молнии и "тифоне" (атмосферном смерче или торнадо) еще 250 лет назад писал М.В.Ломоносов как о наиболее редких и загадочных явлениях атмосферного электричества. Несмотря на огромное число различных моделей этих явлений, их природа и механизм до конца не поняты и сегодня. Трудности моделирования подобных явлений обусловлены тем обстоятельством, что по отдельным и часто противоречивым косвенным признакам необходимо фактически угадать истинную природу сложного нелинейного и многопараметрического явления.

В докладе на основе уравнений электромагнитной гидродинамики представлены:

электрокапиллярновихревая модель шаровой молнии, объясняющая все основные характерные черты и мнимые парадоксы (по Стаханову) ее поведения в зрелой фазе существования;

модель возможного сценария образования шаровой молнии из разрядного канала линейной молнии в межкомпонентной паузе через промежуточную стадию четочной молнии;

обобщение электровихревой модели смерча в зрелой фазе его существования с учетом переменности свойств среды в конической воронке смерча или форме однополостного гиперболоида вращения.

В модели шаровой молнии и сценарии ее "рождения"из четочной молнии важную роль играют свойства динамически обратимых течений, удовлетворяющих нелинейным уравнениям Навье-Стокса, когда кинематические характеристики ламинарного течения не зависят от числа Рейнольдса, а его изменение сказывается лишь на перераспределении давления.

Литература

1.Натяганов В.Л. Электрокапиллярно-вихревая модель шаровой молнии//ДАН, 2003, т.390, №6.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00269).

2.Натяганов В.Л.Четочная молния как промежуточная стадия между линейной и шаровой //Сб.докл.VII конфер. "Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей." Спб.,2003.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ В МОДЕЛИРОВАНИИ РЕДКИХ ЯВЛЕНИЙ ПРИРОДНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА ЧАСТЬ 2. СЕЙСМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ И СОПУТСТВУЮЩИЕ ЯВЛЕНИЯ[1]

Натяганов В.Л., Чайка А.А., Шалина А.А. (Москва)
E-mail tenzor@bks-mgu.ru

Сейсмоэлектрический эффект заключается в проявлении аномалий электромагнитного поля (АЭМП) Земли в период активизации сейсмической активности и относится к электромагнитным предвестникам землетрясений. Несмотря на обилие конкретных фактов, истинный физический механизм сейсмоэлектромагнитных явлений во многом остается загадкой.

В настоящей работе представлены:

"самолетная"модель сейсмоэлектрического эффекта (на основе магнитогидродинамической аналогии кинематического типа с задачей обтекания крыла самолета), которая единообразным способом теоретически объясняет все основные типы проявления АЭМП перед сильными землетрясениями;

модель аква-проводимости вдоль площадок скольжения, которая описывает динамический механизм разделения зарядов в горных породах до момента их электрического пробоя (этот солитонный механизм аналогичен протонной проводимости тонких слоев воды вдоль водородных связей в цепочках Бернала-Фаулера за счет перемещений ориентационных дефектов Бьеррума);

модели ряда сопутствующих сейсмоэлектрическому эффекту явлений (типа возникновения "огней землетрясений", самопроизвольного свечения люминесцентных ламп, выхода из строя ЭВМ и других электронных приборов) на основе уравнений диффузионного типа в активных системах с активатором и ингибитором.

Литература

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 04-01-00269 и НШ - 19.2003.1).

1.Натяганов В.Л. Магнитогидродинамическая аналогия и сейсмоэлектрический эффект. //ДАН, 2003, т.391, №1.

2.Натяганов В.Л., Шалина А.А. Сейсмоэлектрический эффект и сопутствующие явления. Тез. Математика. Компьютер. Образование. Вып.11.//М.-Ижевск,РХД, 2004.

ФОРМАЛИЗМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ[1]

Некрасова Н.В. (Воронеж)

При помощи прямой схемы, которая впервые применена для сингулярно возмущенных непрерывных систем в [1], строится асимптотика решения следующей сингулярно возмущенной задачи

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \langle x(k), Dx(k)\rangle + 2\langle f(k), y(k)\rangle + 2\varepsilon\langle g(k), z(k)\rangle +$$

$$+\langle u(k), Ru(k)\rangle \to \min_u, \tag{1}$$

$$y(k+1) = A_{11}y(k) + \varepsilon A_{12}z(k) + B_1u(k),$$

$$z(k+1) = A_{21}y(k) + \varepsilon A_{22}z(k) + B_2u(k), \tag{2}$$

$$y(0) = y(N), z(0) = z(N), \tag{3}$$

здесь $y(k) \in R^n, z(k) \in R^m, u(k) \in R^r$, $x(k) = [y(k), \varepsilon z(k)] \in R^{n+m}$, $A_{ij}(i,j = \overline{1,2})$ — вещественные матрицы соответствующих размерностей, $f(k), g(k)$ — заданные вектор-функции со значениями в R^n, R^m соответственно, число шагов N фиксировано, D — вещественная симметричная неотрицательно определенная матрица размерности $(n+m)\times(n+m)$, R — положительно определенная матрица размерности $r\times r$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Решение ищется в виде рядов $y(k) = \sum\limits_{j\geqslant 0} \varepsilon^j y_j(k)$, $z(k) = \sum\limits_{j\geqslant 0} \varepsilon^j z_j(k)$, $u(k) = \sum\limits_{j\geqslant 0} \varepsilon^j u_j(k)$, которые подставляются в задачу (1)-(3), в результате чего минимизируемый функционал записывается в виде

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon^j J_j. \tag{4}$$

При некоторых условиях справедлива теорема.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 02-01-00351)

Теорема 1. Коэффициент J_{2m+1} в разложении (4) известен после решения задач P_i, $i = \overline{0,m}$, из которых находятся $y_i(k)$, $z_i(k)$, $u_i(k)$. Преобразованный коэффициент J_{2m+2} в разложении (4) является критерием качества в задаче P_{m+1}.

Литература

[1] Belocopytov S. V. and Dmitriev M. G. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions. // Systems and Control Letters. 1986, V. 8, N 2, P. 129-135.

ПРИМЕНЕНИЕ «ГЕОМЕТРО-ОПТИЧЕСКОГО» АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ СТЕПЕННОГО ТИПА

Несененко Г.А., Селиванова Н.Ю. (Москва)
E-mail fn2@sm.bmstu.ru

В докладе представлены результаты исследования свойств приближенного решения $T(x, y, t)$ следующей сингулярно возмущенной задачи Коши ($0 < \varepsilon < 1$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + T^\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$T(x,y,t)\,\Big|_{t=t_0} = T^0(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < t < 1, \tag{2}$$

где x, y, t — безразмерные переменные, а $\varepsilon < 0$ — малый параметр. Необходимость исследования при $\varepsilon \to 0$ решения $T(x, y, t)$ уравнения (1) возникает во многих задачах прикладной математики. Приближенное решение задачи Коши (1)–(2) представлено в виде асимптотики Пуанкаре, которая получена при помощи «геометро-оптического» асимптотического метода [1], разработанного одним из авторов доклада, что позволило доказать утверждение:

Теорема 2 *Пусть задающая начальные условия функция $T^0(x, y)$ имеет частные производные любого порядка по аргументам x и y. Тогда для решения $T(x, y, t)$ задачи Коши (1)–(2) справедлива асимптотика Пуанкаре вида*

$$T(x,y,t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \cdot d_i(x,y,t), \tag{3}$$

причем коэффициенты $d_i(x, y, t)$ не зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$ и вычисляютя в явном виде.

Литература

1. *Несененко Г. А.* Решение задач нерегулярного нелинейного тепло- и массопереноса <геометро-оптическим> методом. — Бирск: Изд. Бирского ГПИ, 2003 — 127 с.

ОБЩАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЬЮТОНА ПРИ НАЛИЧИИ ВЫНУЖДЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Огарков В.Б., Шацкий В.П. (Воронеж)

В общем случае уравнение движения тела с фиксированной массой в среде с заданными коэффициентами сопротивления при вынужденном воздействии приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с заданным свободным членом:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{du}{dt} + bu = f(t) \tag{1}$$

Обычно уравнение (1) решают методом вариации произвольных постоянных. Однако по этому способу необходимо трижды решать систему двух уравнений с двумя неизвестными приходится вычислять несколько интегралов.

Для получения общей формы решения неоднородного уравнения (1) удобно воспользоваться резольвентным подходом.

Уравнение (1) может быть приведено к интегральному виду:

$$u(t) + \int_0^t [a + b(t-\tau)]u(\tau)d\tau = F(t) \tag{2}$$

$$F(t) = u_0 + v_0 t + au_0 t + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$u(t) = F(t) - \int_0^t R(t-\tau)F(\tau)d\tau \tag{4}$$

Для определения резольвенты $R(t)$ получено однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2R}{dt^2} + a\frac{dR}{dt} + bR(t) = 0 \tag{5}$$

Это однородное уравнение второго порядка, для которого имеются в общем случае три варианта решения в зависимости от значений спектра.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В РАЗДЕЛЕ "СТАТИКА" КУРСА ТЕОРИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ

Огарков В.Б., Щацких В.П. (Воронеж)

Вводится в рассмотрение единичная функция Хевисайда:

$$u_-(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ 1; x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

При помощи этой функции величины поперечной силы $Q(x)$ и изгибающего момента $M(x)$ могут быть подсчитаны в самом общем виде при произвольном конечном числе участков и произвольной системе внешних сил (изгибающие моменты, сосредоточенные силы и распределенные нагрузки). Например, поперечная сила $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) = Q_1 + \sum_{i=1}^{n-1}[Q_{i+1} - Q_i]u_-(x-\omega_i)+ \\ + \sum_{i=1}^{n} q_i l_i \cos\alpha_i u_i(x-\omega_i) + q_1\cos\alpha_1 x + \\ + \sum_{i=1}^{n-1}[q_{i+1}\cos\alpha_{i+1}(x-\omega_i) - q_i\cos\alpha_i(x-\omega_{i-1})]u_-(x-\omega_i); \end{aligned} \tag{2}$$

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{i} l_i; \quad Q_i = \sum_{j=1}^{i} P_j \cos\alpha_j. \tag{3}$$

Если рассматривается балка на двух опорах, то конечное общее выражение для реакции на опорах A и B принимает такой вид:

$$\begin{aligned} R_{Aoo}l = -\sum_{i=1}^{n-1} M_i \sin\alpha_i u_-(l-\omega_i) - M_n\sin\alpha_n - \\ - \sum_{i=2}^{n} P_i\cos\alpha_i(l-\omega_{i-1})u_-(l-\omega); \end{aligned} \tag{4}$$

$$R_{Aoo} = -R_{Boo} - P_2 \cos\alpha_2 - \sum_{i=2}^{n-1}[Q_{i+1} - Q_i]u_-(l - \omega_i); \qquad (5)$$

$$Q_i = \sum_{j=2}^{i} P_j \cos\alpha_j; \quad \omega_i = \sum_{j=2}^{i} l_j; \qquad (6)$$

$$R_{Aoo} = R_A \pm P_1; \quad R_{Boo} = R_B \pm P_{n+1}. \qquad (7)$$

Авторами составлены программы на ЭВМ и приведены примеры определения величин реакции опор балок, поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Ойнас И.Л. (Краснодар)
E-mail ioinas@mail.ru

Рассматривается разностное уравнение вида

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x_k + f_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $a_0 \neq 1$. Определяется свертка $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$ вида $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$ и обобщенная степень $n^{[r]} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$ $(r \in N), n^{[0]} = 1$. Последовательность $\{b_n\}$ вида $b_n = \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{r=0}^{m_j-1} c_{jr} \frac{n^{[r]}}{\lambda_j^n}$ называется регулярной, если $\prod\limits_{j=1}^{k} (z - \lambda_j)^{m_j}(1 - \hat{b}(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$, где $\hat{b}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. В случае, когда $1 - \hat{a}(z)$ при $|z| \leqslant 1$ имеет конечное число нулей целой кратности, структура резольвенты достаточно хорошо изучена для $\{a_n\} \in l_1$ (см.,[1]). Если же $\{a_n\} \notin l_1$, то о $\{r_n\}$ практически ничего неизвестно. Следующая теорема получена для класса ядер $\{a_n\}$, представимых в виде

$$a_n = \sum_{j=1}^{p} P_{n_j}(n)\mu_j^{-n} + a_n^{(0)}, \qquad (1)$$

где $|\mu_j| \leqslant 1$, n_i – целые числа. Далее $l_1 = \{\{x_n\} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\}$.

Теорема. Пусть $1 - \hat{a}(z)$ при $|z| \leqslant 1$ имеет нули $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ целых кратностей $m_1, \ldots, m_k$ соответственно. Пусть далее в (1) $\{n^{[m_j-1]}\hat{a}^{(0)}(\lambda_j)\} - \{n^{[m_j-1]}\} * \{\lambda_j^n a_n^{(0)}\} \in l_1$ ($|\lambda_j| = 1$), тогда для любой регулярной $\{b_n\}$ найдется такая $\{u_n\} \in l_1$, что резольвента $\{r_n\}$ представима в виде $\{r_n\} = \{u_n\} + \{b_n\} + \{b_n\} * \{u_n\}$.

Литература

1. Ойнас И. Л., Цалюк З. Б. Асимптотический характер резольвенты дискретного уравнения в свертках // Рук. деп. в ВИНИТИ 30.10.98, 3127- В98. 13 с.

О ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ СПЕКТРОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

Ощепкова С.Н. (Воронеж)

E-mail osonia@mail.ru

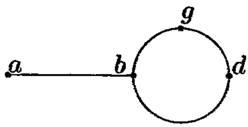
Рассмотрим на связном конечном открытом геометрическом графе Γ следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda\rho(x)u(x) \quad (x \in \Gamma), \\ u(x)|_{\partial\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

понимаемую так же, как и в [1]. Функции p', q и ρ равномерно непрерывны на каждом ребре Γ, причем $\inf p > 0$, $\inf \rho > 0$. Известно [2], что в случае графа-дерева собственные значения задачи перемежаются с собственными значениями аналогичных задач на подграфах, получаемых выбрасыванием из Γ одной точки. А именно, пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – возрастающая последовательность всех собственных значений задачи (1), а $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ – возрастающая последовательность, составленная из всех собственных значений задач вида (1), только не на Γ, а на Γ_i, где Γ_i - всевозможные компоненты связности (c – любая точка из Γ); тогда, $\lambda_0 < \nu_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, причем если $\nu_j < \nu_{j+1}$, то $\nu_j < \lambda_{j+1} < \nu_{j+1}$.

Пусть далее Γ – граф с одним циклом (см. рис.; длина цикла равна 2π, длина ребра ab равна $\frac{\pi}{2}$; $\partial\Gamma = \{a\}$), а p, q и ρ в задаче (1) – тождественные постоянные.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 04-01-00049), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004), гранта Президента РФ на пддержку ведущих научных школ (НШ-1643.2003.1)



Оказывается,что в этом случае приведенное выше свойство перемежаемости остается верным и при $c = b$, и при $c = d$, и при $c = g$ (d – точка, удаленная от точки b на расстоянии π, g – на расстоянии $\frac{\pi}{2}$), правда с дополнительной оговоркой: импликация $\nu_j < \nu_{j+1} \Rightarrow \nu_j < \lambda_{j+1} < \nu_{j+1}$ верна не при всех j.

Литература

[1] Покорный Ю. В., Пенкин О. М. // Дифференциальные уравнение., – 1989. – Т.25, №7. - с.1141–1150.

[2] Покорный Ю. В., Прядиев В. Л. // Дифференциальные уравнение. – 1999. – Т. 35, № 11. – с.1574–1575.

ПУТИ УГЛУБЛЕНИЯ РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Павлов Ю.С. (Воронеж)

В моделировании сложных систем S методом слоений очень важна процедура расщепления расслоеного пространства R^n на отдельные слои $L_i \in R^n, i = 1, 2, \ldots, a$. В теории она выполняется [1] использованием операций селекции и аннулирования $L_i, i = const \in \{1, 2, \ldots, a\}$, без учета соотношения глубины расслоения Δ_0 и предела разрешающей способности расщепления μ. Этих операций вполне достаточно, если $\mu \leqslant \Delta_0$, но если $\mu > \Delta_0$, что возможно для реальных S, то разделение $\{L_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, a$ невозможно.

Такая ситуация преодолима введением в набор расщепляющих операций обратимой трансформации метрики R^n вдоль оси расслоения. Она предусматривает выбор пары коэффициентов масштабирования $\{k_{\text{пр}}, \cdot k_{\text{обр}}\}$, где $k_{\text{пр}} \cdot k_{\text{обр}} = 1$ и $1 << k_{\text{пр}} \leqslant K_0$. Предполагается, что $K_0 = const$ и определяется моделью S.

При этом прямая трансформация метрики $\Delta_0 \to k_{\text{пр}} \cdot \Delta_0 = \Delta_1$ выполняется до обычных расщепляющих операций из [1], а обратная $\Delta_1 \to k_{\text{обр}} \cdot \Delta_1 = \Delta_0$ восстанавливает исходную метрику R^n в разделенных $L_i \in R^n, i = 1, 2, \ldots, a$. Условие полного разделения $L_i \in R^n$

$$K_0 \cdot \Delta_0 \geqslant \mu, \quad K_0 = const. \tag{1}$$

Если условие (1) не выполняется и физика модели S не позволяет выбрать $K_1 = const > K_0$, необходимо ввести в набор расщепляющих операций локальное скольжение $\{L_j\}$ относительно L_i, $i = const \in \{1, 2, \ldots, (a-1)\}$, $j = (i+1), (i+2), \ldots, a$, вдоль оси расслоения R^n. Предполагается, что возможны $n \leqslant N$ шагов скольжения с величиной шага $\varphi = const < \mu$, а величина N определяется моделью S. Выполнение локального скольжения до трансформации метрики R^n углубляет его расщепляемость.

Для локального расщепления R^n между L_i и $L_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, (a-1)$, необходимо, чтобы

$$K_0(N \cdot \varphi + \Delta_0) \geqslant \mu, \quad K_0 = const, \quad N = const. \qquad (2)$$

Если условие (2) также невыполнимо, можно принять, например, $\varphi = \varphi(j) = b \cdot j \cdot \Delta_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $b = [b] = const \geqslant 2$, $n \leqslant N$, или иную зависимость $\varphi(j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Обе дополнительные операции расщепления независимы и, в принципе, применимы на обоих уровнях слоения R^n для существенного углубления его расщепляемости. Сравнение (1) и (2) показывает , что эффекты от применения этих операций объединяются мультипликативно.

Литература

1. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. - М.: Мир, 1970. - 442 с.

АКТИВИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ НА ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Паньчева С.Б., Плетнева О.К. (Воронеж)

На кафедре математического анализа Воронежского государственного университета ведется работа по активизации самостоятельной деятельности студентов. Результаты работы следующие.

1. Разработано методическое пособие для студентов 1 курса “Вычисление неопределенных интегралов”. Методическое пособие включает в себя 9 лабораторных работ, каждая из которых содержит теоретическую часть — основные понятия, определения, формулы; справочный материал; подробное решение базовых примеров с комментариями; практическую часть — тестовые задания и примеры, а также вопросы для самопроверки. В пособии даны также проверочные работы по каждой теме в 6 вариантах, различающихся

по уровню сложности. Проведена апробация данного методического пособия в четырех учебных группах. Отмечается повышение эффективности занятия. Появляется возможность индивидуализации работы со студентами. Совершенствуется навык работы студентов с книгой. Теоретический блок вопросов позволяет развивать математический язык студентов. Включенные в пособие тестовые задания способствуют углублению понимания введенных понятий и их систематизации.

2. Некоторые темы, связанные с построением графиков функций, чертежей трехмерных поверхностей, громоздкими вычислениями, с визуализацией сходимости рядов, прорабатываются как в аудитории, так и в компьютерном классе. Разработаны и опробованы лабораторные работы, проводимые в компьютерном классе, по следующим темам: "Построение эскизов графиков", "Построение графиков функций с помощью полного их исследования", "Построение графиков функций, заданных параметрически", "Интегрирование дробно-рациональных функций", "Геометрические приложения двойного интеграла", "Ряды и некоторые вычисления". Перечисленные лабораторные работы проводятся с применением пакета "Математика".

3. Контроль работы студентов ведется с помощью рейтинговой системы, с обязательным подведением рубежных итогов трижды в семестр. По результатам третьего в семестре рейтинг контроля решается вопрос о выставлении студенту зачета.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СЛАБОГО ТИПА

Пелешенко Б.И. (Днепропетровск)

Пусть Φ множество выпуклых или вогнутых возрастающих на $[0,\infty)$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям: $\varphi(t) > 0$, когда $t > 0$, $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t) = \varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$, $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ при $t \to \infty$. Обозначим через $M_\varphi(t)$ функцию растяжения функции $\varphi(t)$ из множества Φ. Пусть $f^*(t)$ — не возрастающая перестановка модуля измеримой на R^n функции $f(x)$. Определим операторы, рассмотренные в работах Н. М. Ривьера.

Оператор называется оператором слабого типа (φ,φ), если существует такая постоянная C, что при любом $t > 0$ $\operatorname{mes}\{x \in R^n : |Tf(x)| > t\} \leqslant C \int\limits_{R^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx$ для всех функций $f(x) \in L^0_\infty(R^n)$.

В докладе получены теоремы интерполяции квазилинейных операторов слабых типов (φ_0, φ_0) и (φ_1, φ_1) или слабого типа (φ_0, φ_0) и сильного типа (L_∞, BMO). Приведем формулировку одного из утверждений.

Теорема. Пусть функция $\varphi(t)$ из множества Φ имеет показатели растяжения $\gamma_\varphi, \delta_\varphi \in (0,1]$, и показатели растяжения симметричного сепарабельного пространства $E(R^n)$ удовлетворяют неравенству $1 < \alpha_E \leqslant \beta_E < \infty$.

Если квазилинейный оператор T является оператором слабого типа (φ, φ) и ограничен из пространства $L_\varphi(R^n)$ в пространство ВМО (R^n), то существует такое постоянное $C > 0$, что $\|(Tf)^{**}\| \leqslant C\|f\|$ для всех $f \in E(R^n)$.

О СВОЙСТВЕ ФОКУСИРОВАНИЯ В РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МОДЕЛИ КАНАТНОГО МОСТА

Перловская Т.В. (Воронеж)

Связный граф Γ образован из двух горизонтальных континуумов, расположенных параллельно в вертикальной плоскости, между которыми имеются вертикальные перемычки. Все нижние ребра интерпретируют упругие стержни, попарно шарнирно скрепленные. Их поперечная деформация локально определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями типа $(EJu'')'' = f$, где f– интенсивность внешней нагрузки. Остальные ребра Γ есть схема канатов, их локальные деформации, как у струн, определяются уравнениями - $(pu')' = f$. В узлах Γ решения этих уравнений склеиваются условиями непрерывности и условиями трансмиссии естественного типа [1,2].

При условии закрепления системы на границе Γ (т.е. в четырех точках -концах верхнего и нижнего континуумов) возникающая краевая задача оказывается невырожденной, т.е. однозначно разрешимой при любой суммируемой на Γ внешней нагрузке $f : \Gamma \to R$. Ее решение может быть представлено в виде $u(x) = (Gf)(x)$, где

$$(Gf)(x) = \int_\Gamma (x,s)f(s)ds$$

и $G(x,s)$– функция Грина рассматриваемой задачи. Оказывается, что $G(x,s) > 0$ внутри Γ и, что самое интересное,

$$\inf_{s\in\Gamma} \frac{G(x,s)}{\max G(r,s)_{r\in\Gamma}} > 0 \quad (x \in \Gamma).$$

Последнее обеспечивает свойство типа $GK \subset K(u_0)$, где K – конус неотрицательных на Γ функций, что гарантирует фокусирование второй итерации G^2 оператора G. Работа выполнена при поддержке

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах// М., ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 272 с.

2. Покорный Ю.В. О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка / Ю.В. Покорный, Т.В. Белоглазова, Е.В. Дикарева, Т.В. Перловская// Математические заметки, - 2003. Т. 74, № 1. - С. 146-149.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Пескова О.С., Губатенко В.П. (Саратов)

Металлический провод, внесенный в среду для измерения электрического поля, изменяет распределение электропроводности исходной среды, что приводит к искажению показаний приборов. Представляет интерес количественная оценка степени этого искажения в зависимости от размеров провода, его электропроводности, электропроводности окружающей провод среды и частоты электромагнитного поля при измерении плоского и осесимметрического электрического поля в Е - полях специального вида [1]. Предложено два подхода к изучению этой проблемы: исследование аналитических решений и метод интегральных уравнений. Аналитический подход основан на решении уравнений Максвелла методом разделения переменных и необходим для проверки результатов, полученных с помощью интегральных уравнений. Для решения задачи о математическом моделировании измерения электрического поля прямолинейным цилиндрическим и тороидальным проводом составлены двумерные интегральные уравнения Фредгольма второго рода относительно напряженности электрического поля, искаженной проводом. Ядрами этих уравнений являются функции Грина исходной (в отсутствии провода) однородной среды. Получены решения интегральных уравнений относительно среднего значения измеренного электрического поля по поперечному сечению провода. Эти решения устанавливают линейную зависимость между средним значением истинного поля в отсутствии провода и измеренным полем.

Литература

1.Светов Б.С., Губатенко В.П. Аналитические решения электродинамических задач. - М.: Наука, 1988. - 344 с.

РЕЙТИНГОВЫЙ ПОДХОД К ОРГАНИЗАЦИИ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ

Плетнева О.К. (Воронеж)

Высокое качество повышения квалификации работников образования можно обеспечить, осуществляя дифференцированную стратегию организации курсовой переподготовки по регионам на информационно-аналитической основе, устанавливая определенным образом рейтинги районов области. Мы предлагаем делать это следующим образом: на базе статистической информации, полученной из официальных источников (представления районных отделов образования и методических центров, ежегодные информационно-аналитические отчеты Главного управления образования, сведения, предоставляемые слушателями курсов по личным документам, и пр.) сотрудниками ВОИПКРО (Воронежский областной институт повышения квалификации работников образования) составляется "визитная карточка" района, позволяющая априорно оценить состояние педагогических кадров, преподающих математику. Для этого выбираются данные по следующим показателям: демографическая ситуация в районе; количество школ и наполняемость классов; обеспеченность педагогическими кадрами; кадровый потенциал и др. Информация регулярно обновляется и сводится в специальные таблицы.

На основании этих параметров формируется общий рейтинговый коэффициент района по отдельно взятому предмету, например, математике. Таким образом, появляется возможность расположить районы в иерархической рейтинговой последовательности. Это позволяет выявить районы с наиболее "тревожной" ситуацией по состоянию профессионализма педагогических кадров и дает основание для корректировки стратегии образовательной политики в регионе, управления качеством дополнительного образования учителей и регулирования "географии" организации курсовой деятельности.

Рейтинговые коэффициенты устанавливаются на основе дискриминантного анализа, связанного с теорией распознавания. В нашем случае оценка рассматриваемого объекта (района), сравнение его с другим объектом (районом) и определение принадлежности его к одному из выделенных классов основывается на уровневых коэффициентах районов. С каждым районом связывается образ, представляющий собой совокупность количественных признаков наиболее полно характеризующая его по уровню квалификации и профессионализма учителей математики. Очевидно, что с изменением состояния изменяются все или отдельные признаки объекта (района, города), тем самым, порождая новые, соответствующие текущему положению дел, образы. Такого рода образы, характеризующие педагогические кадры районов, можно рассматривать как их математические аналоги и представлять их точками в пространстве R^n (нами было определено 12 основных уровневых коэффициентов).

Первоначально можно задать произвольное количество классов, по которым происходит распределение районов. Нами было выделено шесть классов, это количество определялось возможностями института. В течение учебного года институт готов организовать курсовую переподготовку для 6 - 7 районов области. Учитывая, что в Воронежской области официально выделяют 40 административных единиц, то в среднем в каждый класс в лучшем случае должно попасть именно необходимое число районов. Если районы распределятся неравномерно, то осуществляется более жесткая классификация.

Каждый класс определяется границами диапазонов уровневых коэффициентов. Предполагается, что с течением времени эти границы изменяются (примерно один раз в пять - шесть лет) в связи с перспективой роста показателей. Принадлежность образа района тому или иному классу определяется не одним из выбранных признаков - характеристик, а наибольшим числом общих значений признаков.

Для классификации районов используются стандартные программы прикладного пакета "Статистика", адаптированные для целей рейтингового анализа.

ОБ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Плетникова Н.И. (Ижевск)

Рассматривается оператор вида

$$H = -d^2/dx^2 + V_0\theta(x) + \epsilon_1(\cdot,\varphi_1)\varphi_1 + \epsilon_2(\cdot,\varphi_2)\varphi_2.$$

Здесь $V_0 < 0$, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\varphi_j(x)$ удовлетворяет неравенству вида $|\varphi_j(x)| \leqslant C_j e^{-\alpha_j|x|}$, где $\alpha_j > 0$, $C_j = \mathrm{const}$, наконец, $\epsilon_j = -A_j\epsilon^{\sigma_j}$, где $A_j \in \mathbf{R}$ – заданные числа $(j = 1,2)$, $\epsilon > 0$.

Под уровнем E будем понимать собственное значение или резонанс.

Обозначим

$$a_{jj} = \frac{A_j}{i}|\int_{\mathbf{R}} \varphi_j(x))dx|^2 \; (j = 1,2),$$

$$a_{12} = \frac{A_2}{i}\int_{\mathbf{R}} \overline{\varphi_2(x)}dx \int_{\mathbf{R}} \varphi_1(y)dy,$$

$$a_{21} = \frac{A_1}{i}\int_{\mathbf{R}} \overline{\varphi_1(x)}dx \int_{\mathbf{R}} \varphi_2(y)dy,$$

$$\sqrt{E} = k,\; S^{\pm} = \{k : |k - M^{\pm}\epsilon^{\gamma}| < K\epsilon^{\delta}\}.$$

Т е о р е м а . Предположим, что $\sigma > \sigma_1 + \sigma_2$, $K > 0$, $\delta \in (\gamma, 2\gamma)$, $(a_{11} - a_{22})^2 - 4|a_{12}|^2 \neq 0$, $a_{11} \neq 0$. Для всех достаточно малых $\epsilon > 0$ оператор H имеет внутри кругов $S^{\pm}$ ровно по одному уровню $E = k_{1,2}^2$ кратности единица, причем для $k_{1,2}$ справедива формула

$$k_{1,2} = M^{\pm}\epsilon^{\gamma} + O(\epsilon^{2\gamma}).$$

При этом, в случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma^*$

$$M^{\pm} = -(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2})/4,\; \gamma = \sigma^*,$$

а в случае $\sigma_1 < \sigma_2$

$$M^{\pm} = -\frac{F_{11}(0) \pm |F_{11}(0)|}{4},\; \gamma = \sigma_1.$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда оператор H имеет вид

$$H = -d^2/dx^2 + V_0\theta(x) + \Sigma_{k=1}^{n}\epsilon_k(\cdot,\varphi_k)\varphi_k,$$

можно доказать существование n уровней.

ТЕОРЕМЫ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЯКОБИ

Плещёва Е.А. (Екатеринбург)

E-mail Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ — n-я ($n = 0,1,\ldots$) сумма Фурье функции f по многочленам Якоби, ортогональным на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ ($\alpha,\beta > -1$). По теореме равносходимости Г.Сегё для ряда Фурье–Якоби (см. [1, глава 9]) условие

$$f(t)(1-t)^{\min\{\alpha,\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\}}(1+t)^{\min\{\beta,\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}\}} \in L^1[-1,1] \qquad (1)$$

является достаточным для того, чтобы разность

$$S_n^{\alpha,\beta}(f;x)-$$

$$-(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}((1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}f(t);x)$$

при $n\to\infty$ на каждом отрезке $[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$ ($0<\varepsilon<1$) равномерно сходилась к нулю.

Основными результатами сообщения являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполнено условие* (1), *то величины* $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ *и* $(1-x)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\beta-\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}((1-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+t)^{\beta+\frac{1}{2}}f(t);x)$ *при* $n\to\infty$ *равномерно равносходятся на каждом отрезке* $[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$ ($0<\varepsilon<1$).

Теорема 2. *Теорема* 1 *равносильна теореме Сегё.*

При доказательстве теоремы 1 применены методы работ [2, 3].

Автор благодарит В.М. Бадкова за постановки задач и внимание к работе.

Литература

1. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962.

2. Бадков В.М. Приближение функций частными суммами ряда Фурье по обобщенным многочленам Якоби // Матем. заметки. 1968. Т. 3, № 6. С. 671–682.

3. Бадков В.М. Равносходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам // Матем. заметки. 1969. Т. 5, № 3. С. 285-295.

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В ПОЛУЛИНЕЙНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ

Плотников В.А. (Одесса)
E-mail v.plotnikov@paco.net

Пусть Y полулинейное метрическое пространство, $\delta(x,y)$– расстояние.

Рассмотрим дискретное уравнение стандартного вида

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon F(i, x_i), \quad x_0 = x^0, \tag{1}$$

где $x_i \in Y$, $F : I \times Y \to Y$, $\varepsilon > 0$– малый пераметр, $i \in I = \{0, 1, ..., N\}, N = E(L\varepsilon^{-1})$, $E(s)$– целая часть s.

Пусть существует такая функция $F^0(i,x)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=p}^{p+n-1} F(i,x), \frac{1}{n}\sum_{i=p}^{p+n-1} F^0(i,x)\right) = 0.$$

Тогда уравнению (1) поставим в соответствие уравнение

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon F^0(i, x_i), \quad y_0 = x^0$$

и назовем его частично усредненным.

Если $Y = conv(R^n)$, $F(i,x_i) = \Delta\cdot\Phi(t_0+i\Delta, X(t_0+i\Delta))$, то уравнение (1) соответствует ломанной Эйлера для дифференциального уравнения с производной Хукухары

$$D_h X(t) = \varepsilon\Phi(t, X(t)), \quad X(t_0) = x^0,$$

где $X(t)$- многозначная траектория, $D_h X(t)$– производная многозначного отображения в смыле Хукухары.

Доказываются теоремы по обоснованию схем частичного и полного усреднения. Рассматривается приложение полученных результатов для обоснования численно-асимптотического решения задач оптмального управления дискретными системами.

ТЕОРЕМА М. КРАСНОСЕЛЬСКОГО - С. КРЕЙНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Плотникова Н.В. (Одесса)
E-mail talie@ukr.net

В работе доказывается аналог теоремы Красносельского-Крейна для дифференциальных включений в терминах обычных решений и $R-$решений.

Т е о р е м а. Пусть для дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda), \tag{1}$$

где многозначное отображение $F(t, x, \lambda)$, принимающее значения в $conv(R^n)$, определено при $0 \leqslant t \leqslant T, x \in D, D-$ ограниченная область в $R^n, \lambda \in *, *-$ некоторое множество значений параметра λ, имеющее $\lambda_0 \in *$ предельной точкой, выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F(t, x, \lambda)$ равномерно ограничено, непрерывно по t, равномерно непрерывно по x равномерно относительно t и λ;

б) многозначное отображение $F(t, x, \lambda)$ интегрально непрерывно по λ в точке λ_0, то есть для любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ и любого $x \in D$ выполняется условие:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} h\left(\int_{t_1}^{t_2} F(s, x, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s, x, \lambda_0) ds\right) = 0;$$

в) решения $x(t, \lambda_0)$ включения

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda_0), \tag{2}$$

удовлетворяющие начальному условию $x(0, \lambda_0) = x_0 \in D^1 \subset D$, определены при $0 \leqslant t \leqslant T$ и лежат вместе с некоторой $\rho-$окрестностью в области D.

Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, что при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для любого решения $x(t, \lambda)$ включения (1), определенного при $0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяющего начальному условию $x(0, \lambda) = x_0$, существует такое решение $x(t, \lambda_0)$ включения (2), что справедливо неравенство

$$||x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)|| < \eta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Имеет место аналогичная теорема для $R-$решений.

СУММИРОВАНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ МЕТОДОМ АБЕЛЯ И СЛАБАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Подольский В.Е. (Москва)

E-mail podolski@mech.math.msu.su

Теорема 1. Пусть A – дискретный оператор в гильбертовом пространстве с собственными числами λ_n, $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ такой, что в некотором секторе $|\arg t| < \varepsilon$ определена ядерная полугруппа $\exp(-tA)$, пусть оператор B таков, что там же определена ядерная полугруппа $\exp(-t(A+B))$, и пусть верны асимптотические разложения

$$\operatorname{Tr}(\exp(-tA)) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N_i} \alpha_{ij} t^{n_i} \ln^j t + o(t), \quad t \to 0, \ N_0 = 0,$$

$$\operatorname{Tr}(\exp(-t(A+B))) = \sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K_i} \beta_{ij} t^{k_i} \ln^j t + o(t), \quad t \to 0,$$

и пусть также

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda_n - \mu_n|^2}{\operatorname{Re}\lambda_n} < +\infty,$$

где $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ – собственные числа оператора $A+B$.

Тогда существует набор чисел $\{\varkappa_h, \delta_h, m_h\}_{h=1}^{H}$ такой, что

$$\lim_{t\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \left(\mu_n - \lambda_n - \sum_{h=1}^{H} \varkappa_h \lambda_n^{-\delta_h} \ln^{m_h} \lambda_n\right) = 0.$$

Теорема 2. Пусть $A+\tau B$, $\tau \in [0;1]$ – семейство дискретных операторов, собственные вектора которого для любого τ образуют ортонормированный базис. Пусть в секторе $|\arg t| < \epsilon$ определено семейство ядерных полугрупп $\exp(-t(A+\tau B))$ такое, что при $t \to 0$ существует равномерное и бесконечно дифференцируемое по $\tau \in [0;1]$ разложение

$$\operatorname{Tr}(\exp(-(A+\tau B)t)) \sim \sum_{i=0}^{\infty} t^{n_i} \sum_{j=0}^{N_i} \alpha_{ij}(\tau) \ln^j t.$$

Тогда для любого $p \in \mathbb{N}$ существует набор чисел $\{\varkappa_h, \delta_h, m_h\}_{h=1}^{H}$ такой, что имеет место равенство

$$\lim_{t\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \left(\mu_n^p - \lambda_n^p - \sum_{h=1}^{H} \varkappa_h \lambda_n^{-\delta_h} \ln^{m_h} \lambda_n\right) = 0.$$

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ[1]

Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)
E-mail margz@rambler.ru

Рассмотрим уравнение

$$-pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = const, \tag{1}$$

где $p(x)$, $Q(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0,1]$, определенные во всех точках отрезка $[0,1]$, $\mu(x)$ – строго возрастающая функция, соизмеримая с наблюдаемым процессом. Будем предполагать, что $p(x)$, $Q(x)$, $\mu(x)$ непрерывны в точках $x = 0$ и $x = 1$, а $p(x) > 0$ при $x \in [0,1]$. Интеграл, участвующий в (1), трактуется нами в расширенной (по сравнению со стилтьесовской) форме (последнее обстоятельство мы будем подчеркивать, заключая функцию, стоящую под дифференциалом в квадратные скобки). Решения $u(x)$ уравнения (1) будем искать в классе A_μ μ-абсолютно непрерывных функций, производные которых u'_μ являются функциями ограниченной вариации на $[0,1]$.

Будем называть s нулевой точкой $u(x)$, если $u(s-0)u(s+0) \leqslant 0$.

Будем называть уравнение (1) неосциллирующим, если всякое нетривиальное решение (1) имеет не более одной нулевой точки.

Теорема 1. *Для неосцилляции (1) достаточно, чтобы функция $Q(x)$ монотонно не убывала.*

Теорема 2. *Пусть уравнение (1) не осциллирует. Тогда найдутся положительные $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и отрицательная $\varphi_0(x)$ функции такие, что*

$$-pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] + p(0)u'_\mu(0) = \int_0^x \varphi_0 d[\varphi_1(\varphi_2 u)'_\mu]$$

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ) на поддержку научно-исследовательской работы аспирантов высших учебный заведений (грант № А03-2.8-65), гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1, гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ) (грант № Е02-1.0-46), РФФИ (гранты № 04-01-00049, 02-01-00307), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004)

О НАТУРАЛЬНОМ ЯДРЕ УЧЕБНОЙ МАТЕМАТИКИ

Покорный Ю.В., Покорная И.Ю. (Воронеж)

В обучении математике (как и в любом другом учебном процессе) взаимодействуют две разные интеллектуальные среды. Одна из них, назовем ее внешней учебной средой, носит название "Математика" и состоит из всего багажа, накопленного человечеством за всю его историю. Другая среда — а это почва, которую стараются засадить побегами новых знаний — образована личным интуитивно-бытовым опытом ученика и теми знаниями, которые им освоены вместе с языком (речью) и начальной учебой. В педагогике математики обычно считается, что наиболее полноценным для обучения материалом из внешней среды является так называемая "чистая математика". У этого взгляда есть, однако, крайне неприятный аспект.

Математику можно представить, как систему схем-моделей, накопленных человечеством за многие тысячелетия, вместе с рецептурой и технологиями анализа и использования этих моделей. Далее мы сошлемся на А.Н.Колмогорова (Математика — наука и профессия. М. Наука.1988.,с.270-275): "Математическая модель явления, как правило, это явление схематизирует. Поэтому она дает правильные представления лишь в некоторых пределах. За этими пределами математическая модель *теряет реальный смысл* и при ее бездумном применении приводит к ошибочным или бессмысленным результатам". При этом «исследование модели за пределами ее применимости типично для подхода чистого математика». Этим наблюдением величайшего математика XX века объясняется главный источник методических ошибок: глядя с "верхотуры" абстрактной математики на учебный материал, даже и хорошие ученые искренне не замечают, где те самые "пределы применимости" чистой математики к здравому смыслу и интуиции учеников, и получается, что половина — это число, и что число и цифра — одно и то же, и что $2:3 = 2/3$ — и дробь и число одновременно, и $0,3(3)$ — тоже число, хотя это запись бесконечного процесса (а какая разница?!). И $\overset{\text{def}}{\Delta x}$, причем $\dfrac{dy}{dx} \neq dy : dx$ (хотя $dy = y'dx$). А Ньютон с Лейбницем и Эйлером экзамен по высшей математике даже и в самом заурядном вузе наверняка не сдали бы. Ведь для современных ревнителей математической строгости (выражение А.Н.Колмогорова) вершина знания — кванторы и теория множеств, а без умения давать точные формулировки (особенно на эпсилон-дельта языке) математические знания не признаются.

Получается так, что освоить заклинание типа «представление о $\sqrt{2}$ (или о $\sqrt{5}$) как иррациональном числе, т.е. бесконечной десятичной дроби необходимо для понимания процесса расширения понятия числа» гораздо важнее, чем овладеть действиями с обыкновенными дробями. Или, например, умение вычислять пределы гораздо важнее умения решать дифференциальные уравнения (до которых в некоторых версиях учебного плана учащиеся и не доходят).

Из сказанного следует, что первоочередными в преподавании математики должны быть те результаты, знания и методы из чистой математики, которые лежат в зоне их применимости к проблематике, их породившей.

ВЕКТОРНЫЕ МЕРЫ НА ДЕРЕВЕ[1]

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)
E-mail anpokr@petrodvorets.spb.ru

Рассматриваются конечные меры с носителем из конечного числа изолированных точек. Векторной мерой $\bar{\mu}$ на отрезке назовём меру μ и заряд ν с общим носителем.

На каждом ребре конечного геометрического графа (дерева) Γ задана векторная мера $\bar{\mu} = \{\mu, \nu\}$ и уравнение $-u'' + (1+\mu)u = \nu$. В граничных вершинах заданы условия $u' = 0$, во внутренних – условия непрерывности u и условия Кирхгофа. Считаем, что $u = 0$ при $\bar{\mu} \equiv 0$. Известно, что решение этой краевой задачи существует и единственно. Следовательно, каждой векторной мере $\bar{\mu}$ соответствует единственная функция $u(x)$, $x \in \Gamma$.

Если на Γ заданы две различные векторные меры $\bar{\mu}$ и $\bar{\mu}^*$, то расстояние определяется как

$$\rho(\bar{\mu}, \bar{\mu}^*) = \max_{x \in \Gamma} |u(x) - u^*(x)|.$$

Множество всех векторных мер на Γ можно разделить на классы M_n, $n = 1, 2, \ldots$, определяемые числом точек носителя меры. Пусть $\bar{\mu} \in M_m$, $\bar{\mu}^* \in M_n$. Аппроксимацию $\bar{\mu}_n^0$ в классе M_n для $\bar{\mu}$ найдём из условия

$$\rho(\bar{\mu}, \bar{\mu}_n^0) = \min_{\bar{\mu}^* \in M_n} \rho(\bar{\mu}, \bar{\mu}^*) .$$

[1]Работа поддержана РФФИ проект 04-01-00048а.

При $n \geqslant m$ находим $\rho(\bar{\mu}, \bar{\mu}_n^0) = 0$. При $n < m$ имеем:

$$0 < \rho(\bar{\mu}, \bar{\mu}_{m-1}^0) < \rho(\bar{\mu}, \bar{\mu}_{m-2}^0) < \dots < \rho(\bar{\mu}, \bar{\mu}_1^0) < \max_{x \in \Gamma} |u(x)|.$$

О БИФУРКАЦИЯХ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Попов Е.В., Стенюхин Л.В. (Воронеж)
E-mail stenyuhin@mail.ru

Рассмотрим задачу о потере устойчивости шарнирно-закрепленного эйлерова стержня $x(t)$ единичной длины с функциональным ограничением $F(x) = \int_0^1 x(t)dt$ при продольной нагрузке λ. Как известно, прогиб $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \ddot{x} + \lambda \sin x = 0, \\ x(0) = x(1) = 0, \\ \int_0^1 x(t)dt = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Функция $x(t)$, удовлетворяющая (1) является условной критической точкой функционала $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{x}^2 + 2\lambda \cos x)dt$ при условии $F(x) = 0$. Подобные задачи являются актуальными, в частности, в железнодорожном строительстве.

Согласно лагранжевому формализму, образуем функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda^*) = f(x) + \lambda^* F(x)$, где $\lambda^* \in \mathbf{R}$ — множитель Лагранжа. В итоге, условные критические точки являются нулевыми точками оператора, состоящего из двух компонент

$$\Phi(x, \lambda^*, \lambda) = \left(\ddot{x} + \lambda \sin x + \lambda^*, \int_0^1 x(t)dt \right) \tag{2}$$

с граничным условием из (1). Линеаризованный по (x, λ^*) на $(0, 0)$ оператор имеет вид

$$\Phi_{(x,\lambda^*)}(0, 0, \lambda)(h, \xi^*) = \left(\ddot{h} + \lambda h + \xi^*, \int_0^1 h(t)dt \right), \tag{3}$$

ядро которого при граничных условиях $h(0) = h(1) = 0$ и при $\lambda_0 = \pi^2 n^2, n \in \mathbf{Z}$ порождается парой $(\sin \pi n t, 0)$, то есть одномерно.

Утверждение 1. *Точка* $(0, 0, \lambda_0)$ *является точкой бифуркации отображения* (2). *При этом множество решений задачи* (1) *вблизи нулевого решения состоит из двух кривых* Γ_1 *и* Γ_2, *пересекающихся только в точке* $(0, 0, \lambda_0)$. *Если гладкость функции* $x(t)$ *больше двух, то*

(i) кривая Γ_1 *касается оси* λ *в точке* $(0, 0, \lambda_0)$ *и параметризуется* $(x(\lambda), \lambda^*(\lambda), \lambda)$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$;

(ii) кривая Γ_2 *параметризуется* $(s \sin \sqrt{\lambda_0} t + x_1(s), \lambda_1^*(s), \lambda(s))$, $|s| \leqslant \varepsilon$, $x_1(0) = 0$, $\lambda_1^*(0) = 0$, $\lambda(0) = \lambda_0$.

Исследованы бифуркации следующих уравнений

$$f(x, \lambda) = \ddot{x} + \lambda(Ax - \nabla\omega(x)) = 0, \tag{4}$$

$$f(x, \lambda) = \ddot{x} + \lambda Ax - \nabla\omega(x) = 0, \tag{5}$$

$$f(x, \lambda) = \ddot{x} + Ax - \lambda\nabla\omega(x) = 0, \tag{6}$$

где $A \in \mathbf{R}$, а функция $\omega(x)$ гладкая и удовлетворяет условиям $\nabla\omega(0) = 0$, $\nabla^2\omega(0) = 0$ и такова, что уравнения (4) — (6) разрешимы на $[0, 1]$ при любых начальных условиях Коши $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.

Утверждение 2. *Точка* $(0, \frac{\pi^2 n^2}{A - (\nabla\omega(0))'})$ *является точкой бифуркации отображения (4);* $(0, \frac{\pi^2 n^2 + (\nabla\omega(0))'}{A})$ *— точка бифуркации отображения (5);* $(0, \frac{A - \pi^2 n^2}{(\nabla\omega(0))'})$ *— точка бифуркации отображения (6).*

О МНОГОУРОВНЕВЫХ УЧЕБНИКАХ МАТЕМАТИКИ[1]

Потапов М.К., Шевкин А.В. (Москва)

Всего пятнадцать лет назад отечественная школа была единой в том смысле, что все школы работали по единой программе, предусматривавшей два уровня обучения математике: в общеобразовательных классах с шестью недельными часами на математику и в классах с углубленным изучением математики с восемью недельными часами (иногда и с 12-ю часами). А теперь намечается переход к профильной школе в старших классах, где в разных профилях предполагается иметь различное число часов на математику. При этом ряд вопросов учащиеся могут изучить, выбрав их как курсы

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект № 02-06-0057а).

по выбору. В излагаемых ниже предложениях мы исходим из того, что профилизация старшей школы необходима, но считаем, что сейчас она проводится неправильно - за счет разрушения прежней общеобразовательной школы. А профильную школу надо строить не вместо образовательной, а рядом с нею, то есть сначала в некоторых школах. Тогда мы будем иметь возможность оценить ее достоинства и недостатки в сравнении с обычной школой. В случае успеха профильной школы не потребуется ее насильственное насаждение с 2006-го года одновременно по всей России. Дети и их родители проголосуют за нее <ногами> - будут стремиться в профильные школы, что заставит реформироваться остальные школы без всяких указаний сверху. И в случае очень вероятного провала неправильно выстраиваемой профильной школы у нас будет куда отступать. Так надо поступить, если нам нужна стабильность образования в России, а не великие потрясения. Нельзя же, в самом деле, ставить научно необоснованные опыты, успех которых не гарантирован, сразу на всех детях страны! Усложнение структуры школы ставит весьма актуальные вопросы: какая математика должна быть в каждом из профилей, число которых превышает 10, и как должны быть устроены учебники математики? Трудно предположить, что это будут 10 (или более) различных курсов математики (и еще больше учебников!), которые так или иначе приспособлены к целям обучения в своем профиле. Такое разнообразие учебников трудно реализовать физически, а издание большого числа малотиражных учебников приведет к их удорожанию. Скорее всего, более перспективными для профильной школы окажутся те учебники, которые будут пригодны для работы в нескольких профилях, то есть в классах с разными целями обучения и разным уровнем подготовки учащихся и разным числом часов на математику. Работа по таким учебникам может вестись в каждом профиле на своем уровне. Таким образом, профилизация старших классов средней школы ставит на повестку дня вопрос о создании многоуровневого учебника математики, позволяющего работать по нему на разных уровнях в классах с различными целями обучения. Известно, что математика едина - нет отдельной математики для геолога и для биолога. Поэтому целей обучения математике в разных профилях можно достичь, имея один учебник, по которому курс математики может изучаться более или менее основательно в зависимости от наличия учебного времени и поставленной цели обучения. Но такой учебник должен быть устроен так, чтобы по нему можно было работать и в классе с углубленным изучением математики, и в обычном классе, и даже с учащимися, не предполагающими использование математики в дальнейшем обучении и в своей будущей профессиональной деятельности ё(например, в художественном профиле). При этом в одном классе могут изучаться все пункты учебника и решаться все задачи, отмеченные как необязательные для остальных классов. В классах с меньшим числом недельных часов на математику, меньшими требованиями к математической подготовке выпускника необязательные пункты и необязательные задачи можно не рассматривать, при этом целостность курса не должна нарушаться, а должен уменьшаться лишь уровень погружения в теоретические подробности, должно уменьшаться число доказываемых фактов, число технически или идейно сложных задач. Однако учебник должен позволять ученику, не имеющему возможности обучаться математике в нужном профиле (а такие непременно будут), изучить необходимый материал по нему самостоятельно или под руководством учителя. Уменьшение упомянутого уровня погружения в изучаемый материал может быть различным в различных по уровню подготовки классах, в классах с различными целями обучения. За счет курсов по выбору ученик может изучить дополнительные вопросы, не включенные в учебник и отражающие специфику профиля (например, какие-то специальные вопросы <математики для биолога>), а дидактические материалы и различные сборники конкурсных задач должны расширить задачный материал учебника и обеспечить тренинг, необходимый для поступления в вуз и обучения в нем. Хочется отметить, что первые многоуровневые учебники математики уже есть. Это учебники <Арифметика 5-6>, <Алгебра 7-9>,<Алгебра и начала анализа, 10-11> (авторы С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин). Их выпускает издательство <Просвещение> в серии <МГУ - школе>, организованной по инициативе ректора МГУ академика Садовничего В.А.

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Провоторов В.В. (Воронеж)

Спектральная задача

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y,$$

$$y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,$$

для непрерывных на $[0, \pi]$ функций $y(x)$, производные которых имеют разрывы в точках $= \frac{\pi}{m}k$, $k = 1, 2, ..., m-1$, пропорциональные значениям функции $y(x)$:

$$y'(-0) - y'(+0) = a^{(k)}y(k)$$

является предметом изучения, когда рассматривается соответствующая ей задача для системы с распределенными параметрами.

Пусть λ_n, $\varphi_n(x)$ - собственные значения и собственные функции краевой задачи (1), соответственно.

Теорема. 1.Система собственных функций $\varphi_n(x)$ краевой задачи (1) полна в $L_2(0, \pi)$. 2. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, \pi]$ функции $f(x)$ имею.т место разложения

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n\varphi_n(x), \quad a_n = \frac{1}{n}\int_0^\pi f(t)\varphi_n(t)dt, \ \alpha_n = \| \varphi_n(x) \|, (2)$$

причем ряд сходится равномерно на $[0, \pi]$. 3. Для $f(x) \in L_2(0, \pi)$ ряд сходится в $L_2(0, \pi)$, причем имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_0^\pi f^2(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n a_n^2.$$

Доказательство теоремы основывается на оценке функции Грина задачи (1) по спектральному параметру, интегрированию решения (1) по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра λ. При этом во многом использованы идеи работ [1, 2]

Литература

1. Б.М.Левитан, И.С.Саргсян. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.- М.,"Наука", 1988 - 431 с.

2. В.А.Юрко. Обратные спектральные задачи и их приложения. - Саратов: Изд-во Саратовского госуниверситета, 2001 -499 с.

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Провоторова Е.Н. (Воронеж)

Рассматривается спектральная задача на графе $\Gamma = \cup_1^m \gamma_k$, $\gamma_1 = ... = \gamma_{m-1} = [0, \frac{\pi}{2}]$, $\gamma_m = [\frac{\pi}{2}, \pi]$:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \qquad (1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

функции $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ - непрерывные на $[0, \pi]$.

Фундаментальная система решений $\varphi_k(x, \lambda), k = 1, 2, \ldots, m$, уравнения (1) имеет вид:

$$\varphi_k(x, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} u(x, \lambda), x \in \gamma_i (i \neq k), \\ u(\frac{\pi}{2}, \lambda)\chi(x, \lambda) x \in \gamma_k, \end{array} \right\}$$

$$\psi_k(x, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} v(x, \lambda), x \in \gamma_1 \cup \gamma_m, \\ v(\frac{\pi}{2}, \lambda)\chi(x, \lambda) x \in \gamma_i \ (i = 2, 3, ..., m-1). \end{array} \right\}$$

Здесь пара $u(x, \lambda), v(x, \lambda)$ образует классическую фундаментальную систему решений уравнения (1) на отрезке $[0, \pi]$ $(u(0, \lambda) = v(\pi, \lambda) = 0)$, $\chi(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}[u(x, \lambda)v'(\frac{\pi}{2}, \lambda) - u'(\frac{\pi}{2}, \lambda)], \Delta(\lambda)$ - определитель Вронского.

Функция Грина $G(x, t; \lambda)$ задачи (1),(2) определяется соотношением:

$$G(x, t; \lambda) = \frac{1}{\omega_k(\lambda)} G_k(x, t; \lambda), \ x\gamma_k (k = 1, 2, ..., m), \ t\Gamma,$$

где $\omega_1(\lambda) = \omega_m(\lambda) = \Delta(\lambda)$, $\omega_k(\lambda) = v(\frac{\pi}{2}, \lambda)\Delta(\lambda)$ $(k = 2, 3, ..., m-1)$,

$$G_k(x, t; \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k(x, \lambda)\psi(t, \lambda), \ t\gamma_i \ (i = k), \\ g_k(x, t; \lambda), \ t\gamma_k, \end{array} \right\}, \ x\gamma_k (k = 1, 2, ...m-1)$$

$$G_m(x, t; \lambda) = G_{m-1}(x, t; \lambda),$$

$$g_k(x, t; \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \psi(t, \lambda), \ xt, \\ \psi(x, \lambda), \ xt, \end{array} \right\}, x, t\gamma_k, g_m(x, t; \lambda) = g_{m-1}(x, t; \lambda)$$

Теорема. Имеют место асимптотические оценки $(s = \lambda^2)$:

$$G(x, t; \lambda) = O(\frac{1}{s}). \tag{3}$$

Следствие. Оценки (3) можно уточнить, если на функцию $q(x)$ наложить дополнительные условия гладкости.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ В ОПИСАНИИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ[1]

Прядиев В.Л., Прядиева Е.В. (Воронеж)
E-mail prayd@vmail.ru

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma,\, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\, u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \Gamma) \end{cases}, \tag{1}$$

в которой $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ – открытый связный геометрический граф, а дифференцирование по x ($\in \Gamma$) понимается так же, как и в [1]. Для каждой вершины a_i $(i = \overline{1,m})$ графа Γ будем предполагать, что

$$\sum u_h^+(a_i,t) = k(a_i)u(a_i,t) \quad (t > 0), \tag{2}$$

где суммирование – по h, пробегающем множество допустимых в точке a_i векторов, u_h^+ – правосторонняя производная u по h, $k(a_i) \geqslant 0$ заданы.

Задача (1)–(2) сводится к задаче о распространении граничных режимов $\mu_i(t) = u(a_i,t)$, которые при единичной длине рёбер Γ определяются из уравнения

$$(2V^{-1}A - \mathcal{M} - \mathcal{M}^{-1})(\mathcal{G}\mu')(t) = V^{-1}(K\mu(t) - \psi(t)) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

где $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_m(t))^T$, A – матрица смежности вершин, а V – матрица валентностей Γ, $(\mathcal{M}f)(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t+1)$, $(\mathcal{G}\nu)(t) = \sum\limits_{k=0}^{[(t-1)/2]} \nu(t-(2k+1))$ при $t \geqslant 0$, $(\mathcal{G}\nu)(-t) = -(\mathcal{G}\nu)(t)$, $K = \mathrm{diag}(k(a_1), \ldots, k(a_m))$, $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))^T$, а $\psi_i(t)$ – чётная 2-периодическая функция, определяемая по φ.

Теорема. Пусть $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} ((2V^{-1}A - \mathcal{M} - \mathcal{M}^{-1})\mathcal{G})^{-1}V^{-1}$. Тогда

$$\mu(t) = e^{t\mathcal{E}K}\mu(0) - \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{E}K}\mathcal{E}\psi(s)\,ds. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-049, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект N E02-1.0-46), программы "Университеты России"(проект УР.04.01.047) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (N НШ-1643.2003.1)

В частных случаях графа Г (см. [2]) оператор правой части (3) выражается через многочлены Лагерра.

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2003. - 272 с.

2. Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л. // "Понтрягинские чтения - XIV". - Воронеж, 2003. - С. 96-97.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ КРИТЕРИЕВ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Раецкая Е.В. (Воронеж)

Рассматривается система управления

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + Du(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^k$; $u(t) \in R^s; B, D-$ матрицы соответствующих размеров; $t \in [0, T]$.

Производится сравнение критерия полной управляемости системы (1), приведенном в [1]:

$$rank(D\ BD\ ...B^{k-r}D) = k, \qquad \text{где } r = rankD \tag{2}$$

и условия критерия полной управляемости, полученного в [2]:

$$\exists l \in N \text{ такое, что } kerD_l^* = \{0\},$$

где D_l- оператор, полученный методом расщепления исходных пространств на подпространства, при переходе от системы (1) к системе управления:

$$\frac{dx_l(t)}{dt} = B_l x_l(t) + D_l u_l(t) \tag{4}$$

в пространстве меньшей размерности.

Доказывается, что $l \leqslant k - r$ и справедливо равенство

$$rank(D\ BD\ ...\ B^{k-r}D) = rank(D\ BD\ ...B^l D).$$

Показывается, что $l = k - r$ тогда и только тогда, когда подпространства imD_i в разложении

$$R^s = imD \dotplus imD_1 \dotplus ... + imD_l$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 02-01-00351

являются одномерными. Приводятся примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Литература

1. Андреев В.И. Управление конечномерными линейными объектами. М. "Наука", 1976. 424 с.

2. Раецкая Е.В. О критериях полной управляемости линейной системы//Труды Российской Ассоциации "Женщины-математики". Математика. Математическое образование. Т.11. Воронеж, 2003, с. 40-45.

КРИТЕРИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Ратыни А.К. (Иваново)

E-mail ratyni@isuct.ru

Объект исследования - краевая задача

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) \quad (x \in D), \tag{1}$$

$$u(x) - \beta(x)u(\sigma x) = \psi(x) \quad (x \in S). \tag{2}$$

Предполагаются выполненными следующие условия: D - ограниченная область R^n с границей S класса C^2; $a_{ij}, b_i, c \in C_\alpha(\bar{D})$; матрица (a_{ij}) положительно определена в $\bar{D}$; $\beta \in C(S)$; σ– однозначное, непрерывное отображение $\bar{D}$ в $\bar{D}$ такое, что множество $\Omega \equiv \{x \in S : \sigma^k x \in S,\ k = 1,2,\dots\} \neq \emptyset$. Последнее равносильно предположению о том, что не пуст аттрактор, порождаемый σ на S: $\Omega_0 \equiv \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma^m \Omega$.

Приводится обобщение результатов автора, опубликованных в сборнике "Современные методы в теории краевых задач". Воронеж, ВГУ, 2002.

Теорема 1. *Пусть существует функция $v(x) \in C(\Omega)$ такая, что $v(x) > 0$, $v(x) - |\beta(x)|v(\sigma x) > 0$, $x \in \Omega$. Тогда найдется такое число $c_0 < 0$, что при $c(x) \leqslant c_0$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любых $f \in C_\alpha(\bar{D})$, $\psi \in C(S)$ задача (1),(2) имеет единственное решение $u(x) \in C_{2+\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$.*

2. *$u(x) \geqslant 0$ в D, если, кроме перечисленных условий, выполнены неравенства $\beta(x) \geqslant 0$, $\psi(x) \geqslant 0$ на S, $f(x) \leqslant 0$ в D.*

3. *Существует такое линейное расширение $\hat{G}$ оператора G, разрешающего задачу (1),(2) с $\psi \equiv 0$, что $\hat{G}$— вполне непрерывный оператор из $L_p(D)$ в $C(\bar{D})$ (здесь $p > n/2$), а функция $\hat{u}(x) \equiv (\hat{G}f)(x)$, где $f \in L_p(D)$,*
удовлетворяет почти всюду в D уравнению (1) и всюду на S - (2).

Теорема 2. *Пусть выполнено хотя бы одно из предположений:*

$$a)\ \ |\beta(x)| < 1, \ \ x \in \Omega_0;$$

$$b)\ \ \Omega_0 = \bigcup_{k=1}^{m} e_k, \ \ \prod_{x \in e_k} |\beta(x)| < 1, \ \ k = 1, ..., m;$$

здесь e_k— циклы отображения σ, m— натуральное число. Тогда функция $v(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, существует.

МОДЕЛЬ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Редькина Т.В., Ищенко В.М. (Ставрополь)
E-mail stavsu@stavsu.ru

Уравнение $u_t = D\Delta \ln u + \lambda u$, является элементом ряда моделей процессов в средах с нелинейной диффузией [1]. Например, процесса переноса тепла в турбулентной среде с нелинейным турбулентным коэффициентом теплопроводности. Рассмотрим одномерный случай

$$\left(\frac{1}{a} - \beta\right) q_x + k(\ln q)_{xx} - 2u_x = q_t, \tag{1}$$

обладающий парой Лакса [2].

Теорема. Уравнение (1) представимо в виде билинейной квадратичной формы Хироты: а) при отсутствии возмущения ($u = 0$), уравнение имеет вид

$$p^2\left(\left(\frac{1}{a} - \beta\right) D_x - D_t\right) P \cdot Q + kPQD_x^2 P \cdot Q - kP^2 D_x^2 Q \cdot Q - k[D_x P \cdot Q]^2 = 0$$

где P и Q формальные ряды $P = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + ...$,

$$Q = -1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^3 q_3 + ...,$$

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n} e^{\tau_i}, \tau_i = k_i x + r_i t + \mu_i, q_1 = \sum_{i=1}^{n} e^{\tau_i'}, \tau_i' = k_i x + r_i t + \eta_i;$$

k_i, r_i, η_i, μ_i — $const$, и допускает решение солитонного типа в виде кинка или антикинка $q(x,t) = -\frac{ae^{k_1x+(\gamma k_1+kk_1^2)t}}{1+ae^{k_1x+(\gamma k_1+kk_1^2)t}}$, $\gamma = \frac{1}{a} - \beta$, $r_1 = \gamma k_1 + kk_1^2$, $e^{\eta_1} = -e^{\mu_1}$;б) при возмущении, имеющем кинковую зависимость $u(x,t) = \frac{p\gamma k_1 - 2kk_1^2}{4k_1} + \frac{kk_1}{e^{\tau_1}+1}$, решение исходного уравнения становится односолитонным $q = \frac{pe^{\tau_1}}{(e^{\tau_1}+1)^2}$, (p - const, $\tau_1 = k_1x + r_1t + \eta_1$); в) двусолитонное решение $q = \frac{p(e^{\tau_1}+e^{\tau_2})}{(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1)^2}$ ($\tau_i = k_ix + r_it + \eta_i$, $r_i = \gamma k_i + kk_i^2$) может возникнуть только при возмущении специального вида: $u(x,t) = -\frac{k(k_1e^{\tau_1}+k_2e^{\tau_2})}{2(e^{\tau_1}+e^{\tau_2})} + k\frac{k_1e^{\tau_1}+k_2e^{\tau_2}}{(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1)(e^{\tau_1}+e^{\tau_2})}$. Кроме того, для уравнения (1) выполняется свойство Пенлеве.

Литература

[1]. Аристов С.Н.//ПМТФ 40. 1. 22-26. 1999.

[2]. Редькина Т.В., Ищенко В.М. МОЗР с матричными коэффициентами. - Современные методы в теории краевых задач "Понтрягинские чтения - XIII", тезисы доклада, Воронеж, 2001. С. 133-134.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ЗАДАВАЕМЫХ БЕССЕЛЕВЫМИ СИСТЕМАМИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Родионов Т.В. (Москва)

E-mail rodiontv@mech.math.msu.su

Пусть X и Y — σ-конечные измеримые пространства со счетно-аддитивными неотрицательными мерами μ и ν соответственно. Пусть линейный оператор U удовлетворяет следующим условиям:
(1) U ограничен как оператор, действующий из $L^2(X)$ в $L^2(Y)$, т. е., $\|Uf\|_2 \leqslant B^{1/2}\|f\|_2$,
(2) $|(Uf)(y)| \leqslant M_2(y)\|f\|_2$ для всех $f \in L^2(X)$ и $y \in Y$,
(3) U определён и на $L^1(X)$ и $|(Uf)(y)| \leqslant M(y)\|f\|_1$ для всех $f \in L^1(X)$ и $y \in Y$.

Иными словами, $(Uf)(y) = \int_X f(x)\overline{\varphi_y(x)}\,d\mu(x)$, где $\Phi = \{\varphi_y\}_{y\in Y}$ — бесселева система в $L^2(X)$ и $\|\varphi_y\|_\infty \equiv \operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|\varphi_y(x)| \leqslant M(y)$.

Теорема. *Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Delta > 0$, а функция $\delta(y) > 0$ такова, что для всех $z > 0$* $\int\limits_{\{y\in Y:\,\delta(y)M^2(y)>z\}} \frac{d\nu(y)}{\delta^2(y)M^2(y)} \leqslant \frac{\Delta}{z}$. *Тогда*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (N 02-01-00420) и грантов Президента РФ для молодых российских ученых и ведущих научных школ (НШ-1657.2003.1 и МК-862.2004.1).

(а) если $1 < p \leqslant 2$ *и* $f \in L^p(X)$, *то верны оценки*

$$I_q(\hat{f}) \equiv \Big(\int\limits_Y |\hat{f}_y|^q M^{2-q}(y)\,d\nu(y)\Big)^{1/q} \leqslant B^{1/q}\|f\|_p,$$

$$J_p(\hat{f}) \equiv \Big(\int\limits_Y |\hat{f}_y|^p M^{p-2}(y)\delta^{p-2}(y)\,d\nu(y)\Big)^{1/p} \leqslant E(p)\Delta^{\frac{2}{p}-1}B^{1/q}\|f\|_p,$$

$$K_p(\hat{f}) = \Big(\int\limits_Y |\hat{f}_y|^2 \big(\delta(y)M^2(y)\big)^{\frac{p-2}{p}}\,d\nu(y)\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{E(p)\Delta^{\frac{2}{p}-1}}B^{1/q}\|f\|_p;$$

(б) если $2 \leqslant p < \infty$ *и для функции* $c(y)$ *конечны величины* $I_q(c)$, $J_p(c)$ *или* $K_p(c)$, *то существует такая функция* $f \in L^p(X)$, *что* $f = \int_Y c(y)\varphi_y\,d\nu(y)$ *в* L^p.

Для произвольной функции $M(y)$ всегда существует хотя бы одна функция $\delta(y)$, удовлетворяющая связывающему их условию. По конкретной же M стоит подбирать возможно меньшее δ, чтобы сделать оценки $\hat{f}$ более точными, а условия на c менее строгими.

Эта теорема обобщает результаты Хаусдорфа – Юнга, Харди – Литтлвуда, Марцинкевича и Зигмунда, В. А. Ильина и др.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ B-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рыжков А.В. (Воронеж)

Рассмотрим уравнение $\Delta_B^m f = 0$, где m — натуральное число,

$$\Delta_B = \sum_{j=1}^{n} B_j + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

$$B_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, число n фиксированно, $1 < n \leqslant N$. Его решение называется B-полигармоническими функциями. Эти функции рассматриваются в области

$$\Omega^+ \in E_N^+ = \{x : x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_N)\,, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}\,.$$

Она предполагается прилегающей к сингулярным гиперплоскостям $x_j = 0$, $j = \overline{1, N}$ оператора Δ_B. Часть границы области Ω^+, принадлежавшую указанным гиперплоскостям, будем обозначать Γ^0, другую же часть, принадлежащую области E_N^+, будем обозначать Γ^+.

Теорема 1. Произвольное решение уравнения $\Delta_B^m f = 0$ в области Ω^+ обладает непрерывными производными любого порядка.

Теорема 2. B-полигармоническая в области Ω^+ функция $f(x)$ аналитична в ней.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи // М.: Наука, 1997, С.199.

2. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом // Воронеж. гос. технол. акад. — Воронеж, 1997, С.144.

3. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул // М.: Наука, 1974, С. 808.

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

E-mail RykhlovVS@info.sgu.ru

Пусть L – оператор, порожденный на отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением $\ell(y) := y^{(n)}$ и краевыми условиями $U_j(y) = \alpha_j y^{(j-1)}(0) + \beta_j y^{(j-1)}(1) = 0$, $j = \overline{1,n}$, где $n = 2m+1$, $m \geqslant 2$, $\alpha_j \in \mathbf{C}$, $\alpha_s \neq 0$ и $\beta_s = 0$ для некоторого $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\beta_j = 1$ для $j \neq s$.

Обозначим через $\omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{n}$, $j = \overline{1,n}$, корни n-й степени из -1. Пусть $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ и $\Omega := \left(\omega_j^{\nu-1}\right)_{\nu,j=1}^n$. Очевидно, $\det\Omega \neq 0$. Введем числа $a_\nu := \hat{\alpha}_\nu \omega_1^{\nu-1}$, $\nu = \overline{1,n}$, где $\hat{\alpha}_\nu$ есть компоненты вектора $\hat{\alpha} := \left(\Omega^T\right)^{-1}\alpha$. Пусть $\tilde{a}_j := a_j - \frac{2a_{j-1}}{\omega_1^{2(s-1)}} + \frac{a_{j-2}}{\omega_1^{4(s-1)}}$, где индексы изменяются циклически по модулю n. Обозначим

$$\hat{\Delta}_{12\ldots k} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 & \ldots & \tilde{a}_{k+5} & \tilde{a}_{k+4} \\ \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 & \ldots & \tilde{a}_{k+6} & \tilde{a}_{k+5} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{n-k} & \tilde{a}_{n-k-1} & \ldots & \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, n-2}.$$

Теорема 1. *Оператор L регулярен по Биркгофу (см. [1, с. 66 – 67]) тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_{12\ldots m} \neq 0$ и $\hat{\Delta}_{12\ldots m+1} \neq 0$.*

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России" (проект ур.04.01.041).

Теорема 2. *Оператор L слабо нерегулярен тогда и только тогда, когда или* $\hat{\Delta}_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \hat{\Delta}_{12\ldots m+1} = 0$, *или* $\hat{\Delta}_{12\ldots m} = 0 \wedge \hat{\Delta}_{12\ldots m+1} \neq 0$.

Множество операторов L, для которых $\hat{\Delta}_{12\ldots m-1} \neq 0$, $\hat{\Delta}_{12\ldots m} = \hat{\Delta}_{12\ldots m+1} = 0$, $\hat{\Delta}_{12\ldots m+2} \neq 0$, обозначим NR_1. Операторы из NR_1 являются сильно нерегулярными в том смысле, что их функции Грина имеют экспоненциальный рост по спектральному параметру по любому направлению.

Теорема 3. *Если оператор $L \in NR_1$, то система собственных функций этого оператора является полной в пространстве $L_2[0,1]$.*

Литература

1. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.

ПУТИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ МАРКЕТОЛОГОВ В РАМКАХ УЧЕБНОЙ ПРАКТИКИ

Рычаго А.А. (Владимир)
E-mail rychago@rambler.ru

Успешность деятельности подготовленного специалиста в различных сферах маркетинга в значительной степени зависит от качества овладения им не только теоретическими знаниями, а и – одновременно с этим – практическими умениями и навыками. Поэтому особое значение приобретает здесь установление реально действующих межпредметных связей между всеми учебными дисциплинами и информатикой. Эта взаимосвязь может стать более ощутимой, если попытаться осуществить ее в ходе учебной практики.

Данный вид практики представляет собой некое "введение в специальность"будущих маркетологов: предполагается определенное моделирование будущей деятельности, а также работа с реальным эмпирическим материалом, отражающим структуру товарооборота, некоторые особенности рынка отдельных товаров в системе потребительской кооперации и т.п. Перед студентами-практикантами ставится , в частности, задачи сбора и обработки имеющейся статистичекой информации, ее анализа и прогнозирования. Опыт проведения учебной практики во Владимирском филиале МУПК показывает, что именно эта задача становится подчас невыполнимой для студентов-маркетологов, не обладающих изначально высокими математическими способностями и испытывающих серьезные затруднения в применении общих формул математической статистики для конкретных целей.

Вместе с тем, применение современных информационных технологий может позволить изменить ситуацию к лучшему, если проводить все необходимые расчеты на компьютере, например, с помощью популярного табличного процессора Microsoft Excel, включающего в себя большую библиотеку встроенных статистических функций, удобные програмные надстройки и широкие возможности для проведения качественного корреляционного анализа, не говоря уже о наглядном представлении полученных результатов.

Применение подобных технологий в ходе учебной практики должно способствовать более глубокому и осмысленному овладению практическими умениями и навыками будущими специалистами и помочь в достижении желаемой гармонии теоретического, практического и математико-статистического материала.

ОБ УСРЕДНЕНИИ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ МЕТОДОМ ДВУХМАСШТАБНОЙ СХОДИМОСТИ[1]

Рычаго М.Е. (Владимир)

E-mail rychago@vgpu.vladimir.ru

Пусть μ – неотрицательная, периодическая, борелевская мера на $\mathbb{R}^N$, нормированная условием $\int\limits_{\square} d\mu = 1$, где $\square = [0;1)^N$ – ячейка периодичности. Определим меру μ_ε равенством $\mu_\varepsilon(A) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}A)$ для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^N$, $\varepsilon^{-1}A = \{\varepsilon^{-1}x, x \in A\}$. Кроме того, предполагается, что мера μ является p-связной.

Пусть Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим нелинейное эллиптическое уравнение

$$-div(a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon)) + |u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon = g_\varepsilon \quad \text{на} \quad \Omega ,$$

дополненное краевым условием Дирихле: $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$. Здесь $g_\varepsilon \to g$ в $L^{p'}(\Omega, d\mu_\varepsilon), p' = p/(p-1)$, а периодическая по $y \in \mathbb{R}^N$, каратеодориева вектор-функция $a(y,\xi) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ – строго монотонна и коэрцитивна по $\xi \in \mathbb{R}^N$ для μ-п.в. $y \in \mathbb{R}^N$ с подходящими условиями роста по $\xi \in \mathbb{R}^N$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №02-01-00114) и гранта Минобразования образования РФ по фундаментальным исследованиям в области естественных наук Е02-1.0-57).

Введем усредненную задачу, связанную уже с мерой Лебега:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad -div\hat{a}(\nabla u) + |u|^{p-2}u = g,$$

где усредненная вектор-функция $\hat{a}(\xi)$ определена с помощью вспомогательной периодической задачи на ячейке, которую мы здесь не выписываем.

Основные свойства усреднения, состоящие в сильной сходимости решений u^ε исходной задачи к решению u усредненной задачи в "переменном" пространстве $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, доказаны методом двухмасштабной сходимости в комбинации с известной техникой p-связности В.В. Жикова.

Подобная задача усреднения изучена также (совместно с С.Б. Шульгой) в некоторых моделях сред с двойной пористостью (так называемые модели double-porosity).

ОБ УСЛОВИЯХ ЯКОБИ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ[1]

Рябцева Н.Н. (Белгород)

E-mail science@bupk.ru

Пусть Γ - конечная связная пространственная сеть из $\mathbb{R}^n$. Пользуемся терминологией из [1].

Рассмотрим функционал, определяемый записью

$$\Phi(u) = \int_\Gamma F(x, u, u')dx \qquad (1)$$

подразумевая в качестве $u : \Gamma \to R$ фиксированные на $\partial\Gamma$ функции. Переобозначая $F_{u'u'} = P, F_{uu} - \frac{d}{dx} F_{uu'} = Q$, мы можем придать второй вариации канонический вид квадратичного функционала:

$$\delta^2\Phi(u_0)h = \sum_i \int_{\gamma_i} (Ph^2 + Qh'^2)\, dx + \sum_a F_{uu}\, h^2(a),$$

где суммирование по a осуществляется на $J(a)$.

Далее нас будет интересовать знакоопределенность соответствующей главной части, т.е. функционал $I(h) = \int_\Gamma (Ph'^2 + Qh^2)\, dx$.

[1]Работы выполнена при поддержке гранта президента РФ на поддержку ведущих научных школ №НШ-1643.2003.1.

Введем в рассмотрение уравнение

$$-\frac{d}{dx}\,(P\omega') + Q\omega = 0. \tag{2}$$

Пусть $\omega(x) : \Gamma \to R$ - такое его решение, которое непрерывно во всех внутренних вершинах Γ, а в каждой из них удовлетворяет дополнительному условию

$$\sum_i P_i(a)\omega_i'(a+0) = 0, \tag{3}$$

где суммирование ведется по индексам ребер, примыкающих к a, а $\omega_i'(a+0)$ означает крайнюю производную сужения $\omega(x)$ на ребро γ_i (промыкающее к a). Каждое из уравнений (3) на своем ребре γ_i адекватно классическому уравнению Якоби.

Теорема. Пусть $P(x) > 0$ на Γ. Если существует непрерывное на Γ решение уравнения (2), удовлетворяющее (3) и равномерно положительное на Γ, то квадратичный функционал $I(h)$ наверняка неотрицателен.

При доказательстве использованы некоторые соображения Ю.В. Покорного и Л.В. Прядиева, за которые автор им искренне благодарен.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев Л.В., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2003.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Савченко Г.Б. (Воронеж)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(-iD_x)u = f, \tag{1}$$

где $f(t,x)=(f_1(t,x), f_2(t,x),\cdots, f_n(t,x))$ — заданная, а $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots, u_n(t,x))$ — искомая комплекснозначные вектор-функции; $0 \leqslant t \leqslant T; x \in R^m; A(-iD_x)$ — матрица, элементами которой являются линейные дифференциальные операторы по x с постоянными коэффициентами. Для этой системы ставится условие

$$\mu_1 u(0,x) + \mu_2 u(t_0,x) + \mu_3 u(a,x) = 0, \tag{2}$$

здесь μ_1, μ_2, μ_3 - комплесные числа, $0 < t_0 < T$. Когда x пробегает m-мерный тор, корректность соответствующей задачи впервые была исследована А.А.Дезиным при условиях типа периодичности и $n = 1$. Обобщение этих результатов проведено в [1]-[2].

Исследуется корректность задачи (1)-(2).

В скалярном случае получены эффективно проверяемые условия L_2-корректности. При $n > 1$ построены примеры задач, показывающие, что в общем случае обобщение теоремы не является тривиальным. При дополнительных условиях на символ $A(s)$ получены оценки в дифференциальной норме [1].

Литература

1. Савченко Г.Б. Об одной краевой задаче для систем уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения. 1973, т.9, № 3 – стр. 527 - 532.

2. Савченко Г.Б. О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, XIV, 11 (1978), с. 2079 - 2082.

О НЕКОТОРОМ АБСТРАКТНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ УРАВНЕНИИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Савченко Ю.Б., Ярцева Н.А. (Воронеж)

В банаховом пространстве рассматривается вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка

$$a(t)\frac{du}{dt} + B(t)u = f(t), \quad t \in R_1^+, \tag{1}$$

где $a(t)$ положительная при $t \in (0,\infty)$ достаточно гладкая весовая функция, обращающаяся в нуль при $t = +0$. Будем предполагать, что относительно оператора $B(t)$ выполнено условие

$$\|U(t,s)\| \leqslant \exp\left\{\nu \int_t^s \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right\}, \ 0 < s < t < \infty, \quad \nu \in R,$$

здесь $U(t,s)$ — разрешающий оператор уравнения $a(t)u' + B(t)u = 0$.

Разрешимость уравнения (1) изучается в пространствах абстрактных сильно измеримых по Бохнеру функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве $W_p^m(0,\infty;E)$ $(p>1)$ таких, что конечна норма

$$\|U\|_{m,p}=\left\{\sum_{k=0}^{m}\int_0^\infty\left\|\frac{d^ku}{dt^k}\right\|dt\right\}^{1/p},$$

$\|U\|$ — норма элемента u в пространстве E. Пространства на множестве непрерывных оператор-функций $B(t)$ обозначаются $C(\mathcal{E})$, $C^m(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — пространство операторов, действующих в банаховом пространстве E.

Теорема 1. *Пусть $p>1$, $\alpha(t)\in C^1[0,\infty)$, $f(t)\in L_p(0,\infty;E)$, оператор-функция $B(t)\in C(\mathcal{E})$ и $\nu>\frac{1}{p}a'(0)$, тогда существует одно и только одно решение $u(t)$ уравнения (1), принадлежащее $L_p(0,\infty;E)$.*

Теорема 2. *Пусть $p>1$, $\alpha(t)\in C^m(0,\infty)\cap C^1[0,\infty)$, $f(t)\in W_p^m(0,\infty;E)$, оператор-функция $B(t)\in C^m(\mathcal{E})$ и $\nu>\frac{1}{p}a'(0)$, тогда существует одно и только одно решение уравнения (1), принадлежащее $W_p^m(0,\infty;E)$.*

Уравнение (1) и задачи для него при $0\leqslant t\leqslant a$ изучалось в работах В.П. Глушко.

Литература

1. Глушко В.П. О гладкости решений вырождающихся дифференциальных уравнений в банаховом пространстве// ДАН СССР. - 1971. - т. 198, №1 - с. 20 - 22.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПОТЕНЦИАЛАМИ — РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ (ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ)

Савчук А.М. (Москва)
E-mail artem_savchuk@mail.ru

Пусть $q(x)$ — вещественнозначная функция класса $W_2^{-1}[0,\pi]$, а $\sigma(x)\in L_2[0,\pi]$ — любая ее вещественнозначная первообразная, т.е. $\sigma'(x)=q(x)$. Рассмотрим оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)=-y''+q(x)y$ и краевыми условиями $y(0)=0$, $y^{[1]}(\pi)=hy(\pi)$ (см. [1], [2]). Здесь $y^{[1]}(x):=y'(x)-\sigma(x)y(x)$

— первая квазипроизводная функции $y(x)$, а h — фиксированное действительное число или $h = \infty$. В последнем случае краевые условия принимают вид $y(0) = y(\pi) = 0$.

Мы предложим метод решения обратной задачи Штурма–Лиувилля восстановления сингулярного потенциала $q(x) \in W_2^{-1}[0, \pi]$ по двум спектрам, отвечающим задачам Дирихле–Неймана (краевые условия $y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0$) и задаче Дирихле (краевые условия $y(0) = y(\pi) = 0$). При этом мы укажем алгоритм, позволяющий решать данную обратную задачу численно, а также найдем взаимно однозначное соответствие между классами гладкости потенциала $q(0 \in W_2^{\theta}[0, \pi]$, $\theta \in [-1, 1]$ и асимптотикой собственных значений двух данных краевых задач. Отличительной особенностью данного метода является то, что он позволяет решать поставленную задачу напрямую, не сводя ее к задаче восстановления потенциала по спектру и нормировочным числам (данная обратная задача была решена для потенциалов – распределений в работе [3]).

Будет показано, что решение сформулированной обратной задачи существует и единственно, а также непрерывно зависит от исходных данных. Кроме того, мы предложим вычислительный алгоритм поиска этого решения.

Литература

[1] Савчук А. М., Шкаликов А. А. // Матем. заметки, Т. 66. 6. 1999. С. 897–912.

[2] Савчук А. М., Шкаликов А. А. // Труды Моск. Мат. Общества, Т. 64, 2003.

[3] Hriniv R., Mykytyuk Ya. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials// submitted to Communications on Pure and Appl. Math.

РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ В РЯДЫ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ И ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ — РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Садовничая И.В. (Москва)

E-mail ivsad@yandex.ru

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \tag{1}$$

в пространстве $L_2[0,\pi]$ с граничными условиями Дирихле. Предполагается, что потенциал $q(x)$ является распределением первого порядка сингулярности, т.е. $q(x) \in W_2^{-1}$ или, что то же самое, $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in L_2[0,\pi]$ (производная здесь понимается в смысле распределений). Изучается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимости разложения в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L с разложением в ряд Фурье по системе синусов.

Теорема 1. (см. [1]) *Пусть $Ly = -y'' + q(x)y$ - оператор Штурма–Лиувилля, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in W_2^\theta[0,\pi]$, $0 \leqslant \theta < 1/2$.*

Тогда для любой функции $f(x)$ из пространства $W_2^{-\theta}[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in[0,\pi]} \left| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{m} c_{n,0} \sin nx \right| = 0. \qquad (2)$$

Здесь $c_n = (f(x), \overline{y_n}(x))$, $c_{n,0} = \frac{2}{\pi}(f(x), \sin nx)$, $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - нормированная система собственных и присоединенных функций оператора L.

Теорема 2. *Пусть $Ly = -y'' + q(x)y$ - оператор Штурма–Лиувилля, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, $u(x)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in[0,\pi]} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\left|\varphi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \varphi_x(t)\right|}{t} dt < C, \qquad (3)$$

где C не зависит от n, а $\varphi_x(t) = \frac{1}{2}(u(x+t)+u(x-t)-2u(x))$. Тогда для любой функции $f(x)$ из пространства $L_1[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость (2).

Условию (3) удовлетворяют, например, следующие классы функций

1) Функции с интегральным модулем непрерывности $\omega_1(1/n; u)$ порядка $O(1/n)$ (в частности, все функции ограниченной вариации)
2) Функции с модулем непрерывности $\omega(1/n, u)$ порядка $O(1/\ln n)$.

Литература

[1] Садовичая И.В. О равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением ДАН, 2003, Т. 392, №2, С. 170–173.

О МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО[1]

Самойлова Л.А. (Воронеж)
E-mail lidusha@fromru.com

В работе рассматривается вопрос о классической разрешимости краевой задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ возьмем прямоугольник П, в котором выделено n вертикальных отрезков $\gamma_i = \{(\xi_i, y), y \in (0,1)\}$. Эти отрезки разбиваются на группы $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, в каждую из которых входит некоторое число отрезков Γ_i (не обязательно идущих подряд). Задача состоит в нахождении непрерывной в замыкании П функции, которая гармонична в каждой полосе прямоугольника П, заключенного между Γ_i и Γ_{i+1}, т.е

$$\Delta U = 0 \tag{1}$$

и удовлетворяющая следующим условиям:

$$u(\xi_i, y) = u(\xi_j, y), \tag{2}$$

если γ_i и γ_j входят в одну группу Γ_k. Далее, если Γ_k состоит из отрезков $\gamma_{i1}, ..., \gamma_{i\nu}$, то

$$[u](\xi_{i1}, y) + ... + [u](\xi_{i\nu}, y) = 0, \tag{3}$$

где $[u](\xi_i, y)$ означает "скачок"производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y).$$

Кроме того задается условие Дирихле:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), x \in [0; l]; u(x, 1) = \varphi_1(x), x \in [0; l] \tag{4}$$

Предполагается, что $u(0,0) = u(l,0)$ и $u(0,1) = u(l,1)$. Функция u не предполагается гармонической во всей полосе П. Это обстоятельство не позволяет применить схему доказательства разрешимости

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00697

задачи (1)-(4), предложенную в работе [1] для рассматриваемого случая.

Для доказательства разрешимости задачи был применен метод Пуанкаре-Перрона, который заключается в том, что решение ищется как верхняя огибающая субгармонических функций.

Литература

1. Бицадзе А.В.,Самарский А.А. // Докл. АН СССР. 1969. Т185. С.739-740.

ЭКОНОФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БАЛАНСА РЕГИОНАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ[1]

Самонов В.Е. (Ставрополь)
E-mail samonov@mail.ru

Собственность является одним из ключевых понятий современной экономики. Отношения собственности определяют организацию экономических отношений, а также оказывают решающее влияние на политические и властные отношения. Острота рассматриваемой проблемы требует ее глубокого научного анализа, разработки математических и имитационных моделей, позволяющих "проигрывать"различные сценарии взаимодействия заинтересованных политических и финансовых групп по вопросу передела собственности. На первом этапе построения такой модели предложена система уравнений баланса объектов региональной собственности U, имеющих вид:

$$\frac{dU}{dt} = -\Phi(U,V) + f(U) - g(U). \tag{1}$$

Здесь $f(U)$ характеризует производство объектов собственности (строительство, изготовление, реконструкция и т.д.), $g(U)$ - разрушение объектов собственности (амортизация, приход в моральную негодность и т.д.), $/Phi(U,V)$ - продажа объектов собственности за пределы региона, зависящая также от финансовых потоков V. Величина U, согласно Общероссийскому классификатору форм собственности [1], складывается из собственности субъекта Российской Федерации U_1, муниципальной собственности U_2, частной собственности жителей региона U_3 и т.д. Количественно объем U может выражаться балансной стоимостью объектов собственности с учетом инфляции. (Использование рыночной стоимости объекта требует

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-06-80238)

дополнительного учета колебаний цен.) Заметим, что уравнение вида (1) может быть обобщено на анализ собственности Российской Федерации в целом, а также применено к исследованию отдельных составляющих U_1, U_2 и т.д. или объектов собственности, принадлежащих региональным властным элитам. При этом необходимо ввести дополнительное условие для перераспределения собственности внутри региона:

$$\frac{dU_i}{dt} = -\sum_{j\neq i}\frac{dU_j}{dt}. \qquad (2)$$

Использованный подход является частным случаем реализации аналогии между физическими и экономическими процессами, которая лежит в основе нового научного направления - эконофизики [2].

Литература

1. Постановление Госстандарта России от 30 марта 1999 г. № 97.
2. Mantegna R.N., Stanley H.E. An introduction to econophysics. - Cambridge: Cambridge Unv. Press, 2000.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ[1]

Сандакова С.Л. (Екатеринбург)

E-mail Svetlana_Sandakova@rambler.ru

Пусть $\{\Phi_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — система тригонометрических полиномов, ортонормированная на $[0, 2\pi]$ с весом $\varphi(\tau)$, полученная из последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \ldots$ методом Шмидта; $c_{\varphi,n}(F)$ и $s_{\varphi,n}(F;\theta) := c_{\varphi,0}(F)\Phi_0(\theta) + \cdots + c_{\varphi,n}(F)\Phi_n(\theta)$ — n-е ($n \in \mathbb{Z}_+$) коэффициент и сумма Фурье функции F по системе $\{\Phi_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$; $L_{\varphi,n}(\theta) := \sup\{|s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : F \in L^\infty, \|F\|_\infty \leqslant 1\}$ — функция Лебега сумм $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$; $\omega(F;\delta)_p$ — модуль непрерывности в L^p функции F; $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности; W^rH_ω - класс всех r раз непрерывно дифференцируемых функций $F \in C_{2\pi}$, для которых $\omega(F^{(r)};\delta)_\infty \leqslant \omega(\delta)$. Основным результатом сообщения является

Теорема. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$; $\varphi(\tau) := h(\tau)\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu(|\sin[(\tau-\theta_\nu)/2]|)$, *где* $-\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqslant \pi$; $w_\nu(u) := \prod_{\mu=1}^{l_\nu}[g_{\mu,\nu}(u)]^{\alpha(\mu,\nu)} \in L^1[0,1]$;

[1] Работа поддержана грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект НШ–1347.2003.1).

$m, l_\nu \in \mathbf{N}$; $\alpha(\mu,\nu) \in \mathbf{R}$; $g_{\mu,\nu}(u)$ — вогнутые модули непрерывности; $\int_0^\theta w_\nu(\tau)d\tau = O(\theta w_\nu(\theta))$ $(\theta \to +0;\ \nu = 1,\dots,m)$; $h(\tau)$ - неотрицательная, отграниченная от нуля функция из L^∞, для которой выполнено хотя бы одно из условий: 1) $\omega(h;\delta)_2 = O(\sqrt{\delta})$ $(\delta \to +0)$ и 2) $\omega(h;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi]$. Тогда отношение величин $\sup\{|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : F \in W^r H_\omega\}$ и $n^{-r}\omega(n^{-1})L_{\varphi,n}(\theta)$ заключено между положительными константами, не зависящими от $n \in \mathbf{N}$ и $\theta \in \mathbf{R}$.

Теорема обобщает соответствующий результат, установленный в [1] для веса φ обобщенного якобиева типа; при ее доказательстве использованы полученные в [2] оценки многочленов, ортогональных на окружности, и их производных.

Литература

1. Бадков В.М. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам// Тр. МИАН. - 1980. - Т. 145. - С. 20-62.

2. Бадков В.М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41-88.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА — БЕЛЬТРАМИ НА ПОЛНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

Светлов А.В. (Волгоград)

E-mail andrew.svetlov@volsu.ru

В работе исследуется структура спектра оператора Лапласа — Бельтрами $-\Delta = -\mathrm{div}\nabla$ на многообразиях специального вида. Мы рассматриваем многообразие M, представимое в виде $B \cup D$, где B – компактное мноогообразие, а конец D — простое скрещенные произведения. Простым скрещенным произведением порядка k мы называем полное риманово многообразие D, изометричное произведению $\mathbf{R}\times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{R} = (r_0, d)$ — конечный или бесконечный интервал, а S_i – компактные римановы многообразия без края) с метрикой $ds^2 = q_0^2(r)dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2$, где $d\theta_i^2$ метрика на S_i, а $q_i(r)$ — гладкие положительные на $\mathbf{R}$ функции, причем $q_0(r)$ удовлетворяет условию $\int\limits_{r_0}^{d} q_0(r)dr = +\infty$ для обеспечения полноты

[1]Работа выполнена при поддержке автора грантом РФФИ No 03-01-00304.

многообразия M. Положим, что размерность $\dim S_i = n_i$. Обозначим $s(r) = q_1^{n_1} \cdot \dots \cdot q_k^{n_k}$. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема. *Оператор Лапласа — Бельтрами $-\Delta$ на многообразии M имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда*

$$\int_{r_0}^{d} q_0(r)s(r)dr < \infty, \text{ и } \lim_{r\to d}\int_{r_0}^{r} q_0(r)s^{-1}(r)dr \int_{r}^{d} q_0(r)s(r)dr = 0,$$

либо

$$\int_{r_0}^{d} q_0(r)s^{-1}(r)dr < \infty, \text{ и } \lim_{r\to d}\int_{r}^{d} q_0(r)s^{-1}(r)dr \int_{r_0}^{r} q_0(r)s(r)dr = 0.$$

Отметим, что подобное утверждение справедливо и для многообразий M, представимых в виде $B \cup D_1 \cup \dots \cup D_p$, где все D_j — простые скрещенные произведения. Нужно лишь требовать выполнения условий Теоремы на каждом из концов D_j. Представляемый результат является естественным обобщением предыдущей работы автора [1].

Литература

1. Светлов А.В. *Критерий дискретности спектра оператора Лапласа — Бельтрами на квазимодельных многообразиях*// Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – No 6. – С. 1362–1371.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ЧЕТНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ[1]

Седов А.И., Дубровский В.В.(мл.) (Магнитогорск)
E-mail analysis@masu.ru

Рассматривается теорема существования и единственности решения обратной задачи спектрального анализа для оператора Штурма – Лиувилля. Также получена формула восстановления потенциала.

Рассмотрим в $L_2[0,\pi]$ дифференциальный оператор Штурма – Лиувилля T, порожденный краевой задачей с закрепленными концами:

$$-y'' = \lambda y, y(0) = y(\pi) = 0.$$

[1]Работа поддержана грантом для аспирантов вузов Минобразования России (шифр А03 - 2.8 - 59)

Пусть P – оператор умножения на вещественную, существенно ограниченную функцию $p \in L_\infty(0,\pi)$, удовлетворяющую условиям:

$$p(\pi - x) = p(x), \int_0^\pi p(x)dx = 0. \qquad (1)$$

для почти всех $x \in [0,\pi]$

Обозначим собственные числа операторов T и $T+P$ через $\lambda_n = n^2$ и μ_n, занумерованные в порядке возрастания, а через $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$ и u_n – соответствующие ортонормированные собственные функции.

Поставим следующую обратную задачу спектрального анализа: по известным собственными числами μ_n, и условиям (1) найти функцию p.

Теорема. *Если* $\|p\|_\infty \leqslant r = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}(1+ln7)\zeta(2)+4}$, *выполнены условия* (1) *и* μ_n *таковы, что:* $|\mu_n - \lambda_n| < r$, *то в замкнутом шаре* $U(0,r) \subset L_\infty[0,\pi/2]$ *существует единственный потенциал* p, *который представим в виде ряда:*

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\mu_n - \lambda_n)}{4\lambda_n - 1}\cos 2nx, x \in [0,\pi]$$

О ЛИНЕЙНЫХ И КОНИЧЕСКИХ ОСТОВАХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Семенов Ю.М. (Чебоксары)

Описание линейных и конических остовов линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами, ограничивающие множества которых содержат точку 0, опирается на следующие предложения.

Теорема 1. Если множество $\overline{K(C,t')}$ содержит линейное подпространство V', то для любого $t > t'$ $[V']_\alpha \subset \overline{K(C,t)}$.

Теорема 2. Если $\varphi : C \to D$ — t'-совершенный морфизм систем, то для любого $t > t'$ $\overline{K(C,t)} = \varphi^{-1}\overline{K(D,t)}$.

Теорема 3. $K_0(C) = con\Omega + [lin\Omega]_\alpha$, где $con\Omega$ — конус бесконечных направлений выпуклого множества Ω, а $lin\Omega$ — наибольшее линейное подпространство, содержащееся в $con\Omega$.

Теорема 4. Если Ω — конус, то

$$\overline{\int_0^t Z(s)\Omega\, ds} = \overline{\sum_{0<s<t} Z(s)\Omega}.$$

Теорема 5. Если множество $K(C,T)$ не содержит прямую линию, то для всех $t \in (0,T)$ $conK(C,t) = \overline{K(conC,t)}$, где $conC = (V, \alpha, con\Omega)$.

Описание семейства линейных подпространств $lin(C,t)$ и конусов $con(C,t)$ $(t > 0)$, сводится к следующей последовательности операций. Если $con\Omega = \{0\}$, то $lin(C,t) = con(C,t) = \{0\}$ $\forall t > 0$. Если $con\Omega \neq \{0\}$, то ищется линейное подпространство $V' = [lin\Omega]_\alpha$. Если $V' \neq \{0\}$, то описание остова системы C по теореме 2 сводится к описанию остова факторсистемы C/V':

$$\overline{K(C,t)} = \overline{\varphi^{-1}K(C/V',t)} \quad \forall t > 0.$$

Если $V' = \{0\}$, то ищется момент первого скачка $t(conC)$ линейного остова системы $conC$ и линейное пространство $V_1 = [\tilde{L}_1(conC)]_\alpha$, для чего оказывается полезной теорема 4. По теореме 5, $con(C,t) = \overline{K(conC,t)}$ $\forall t \in (0, t(conC))$. Также по теореме 5, $t(C) = t(conC)$. По теореме 2, $\overline{K(C,t)} = \overline{\varphi^{-1}K(C/V_1,t)}$ $\forall t > t(C)$. Таким образом, построение линейного и конического остовов системы C сводится к конечной серии последовательных факторизаций системы C.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ В n СОЦИАЛЬНЫХ ГРУППАХ

Семыкина Н.А. (Тверь)

E-mail Natalya.Semykina@ tversu.ru

Процесс распространения заболевания в n социальных группах, управляемый вакцинацией и карантином описывается системой дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i(t) \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} y_j(t)}{y_j(t)+x_j(t)} - v_i, \quad i = \overline{1,n}, \\ \dot{y}_i(t) = x_i(t) \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} y_j(t)}{y_j(t)+x_j(t)} - \gamma_i y_i(t) - y_i(t) u_i(t), \; i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

Затраты на проведения карантина и введения вакцины ограничены. Это требование выражается условиями

$$0 \leqslant u_i(t) \leqslant B_i, \quad 0 \leqslant v_i(t) \leqslant A_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Целью управления является минимизация количества инфицированных людей, людей, находящихся на карантине, затрат на карантин и введения вакцины во всех социальных группах.

$$\int\limits_0^T \sum_{i=1}^n (y_i(t) + c_i u_i(t) y_i(t) + d_i v_i) dt \to \inf,$$

здесь T – фиксированное время процесса, c_i – стоимость изоляции одного человека в i -й группе, d_i – стоимость вакцинации в i -й группе.

Литература

Андреева Е.А., Семыкина Н.А. Оптимальное управление. Тверь: ТвГУ, 2003.

О ПОСТАНОВКЕ КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Сергиенко Л.С., Даценко В.И. (Иркутск)
E-mail lusia ss@mail.ru

Представляются результаты исследования многомерной эволюционной системы $a^2 v_t = L(\lambda) \cdot v$, с вырождающимся эллиптическим оператором $L(\lambda)$, для которой могут стать некорректными граничные задачи в классической постановке.

Определяются условия и функциональные пространства, в которых задача Коши для изучаемой системы корректна. Доказывается существование и единственность решения задачи без начальных условий в случае, когда граничные функции задаются в виде гармоник с нулевыми начальными фазами, одинаковой известной постоянной частотой и меняющимися амплитудами. Решение поставленной задачи определяется в виде суперпозиции запаздывающих синусоидальных волн, в силу функциональной линейной независимости которых исследование изучаемой системы n параболических уравнений сводится к исследованию вырождающейся системы $2n$ эллиптических уравнений.

Полученные результаты могут быть использованы при математическом моделировании диффузионных процессов переноса массы и энергии, при исследовании движения жидкости со знакопеременной вязкостью и др.

Литература

Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени.—Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982.—168 с.

Сергиенко Л.С. О разрешимости граничной задачи для системы уравнений в частных производных второго порядка, вырождающейся во всем пространстве // Вестник Новосибирского гос. ун-та / Серия "Математика, механика, информатика".—Т. 2.—Вып. 2.—2002.—С. 60–63.

Сергиенко Л.С., Кочеткова О.Н. Задача без начальных условий для параболической системы с параметром // В кн.: Тр. Вост.-Сиб. зон. межвуз. конф. по матем. и пробл. ее преподавания в вузе.-- Иркутск: Изд-во ИГПУ.—1999.—С. 73–76.

ФОРМУЛА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСАМИ В МАТРИЦЕ СИСТЕМЫ И С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В. (Екатеринбург)
E-mail sesekin@imm.uran.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + f(t), \qquad (1)$$

где $\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{m} D_i(t)\dot{v}_i(t)$, $A(t)$ и $B(t)$– $n \times n$-матрицы с непрерывными элементами, $f(t)$ – вектор-функция с суммируемыми элементами, $D_i(t)\,(i \in \overline{1,m})$ – непрерывные $n \times n$ – матрицы-функции, $v_i(t)$ – компоненты вектора $v(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_m(t))^T$ – функции ограниченной вариации, $\tau > 0$ – постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ – начальная функция – функция ограниченной вариации, заданная на отрезке $[t_0 - \tau,\ t_0]$. Как и в [1] под аппроксимирующим решением этой системы в классе функций ограниченной вариации будем понимать поточечный предел последовательности абсолютно непрерывных решений $x_k(t)$ системы (1), порожденной абсолютно непрерывной последовательностью $v^k(t)$, поточечно сходящейся

[1] Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект №03–01–00722

к вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора последовательности. С помощью метода шагов [2] и результатов из [1] не трудно показать, что если матрицы $D_i(t)\,(i \in \overline{1,m})$ для каждого $t \in [t_0, \infty]$ взаимно коммутативны, то аппроксимируемое решение существует.

Получена формула Коши для аппроксимируемых решений уравнения (1).

Литература

1. Zavalishchin S.T. and Sesekin A.N. Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers, 1997. 268 p.

2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ ОДНОРАНГОВЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Сивков Д.А. (Ижевск)

E-mail dimasiv@udm.ru

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in H$ — некоторому гильбертову пространству, $A(t) \in [H]$ — ω-периодический по времени оператор, $A(t)$ компактен при любом $t \in [0, \omega]$, сильно измерим и интегрируем по Бохнеру на отрезке $[0, \omega]$. $X(t) = F(t)e^{tQ}$ — представление Флоке оператора Коши системы (1). Будем предполагать, что Q имеет полную систему ортонормированных собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Пусть в спектре оператора монодромии $X(\omega)$ системы (1) задано подмножество собственных значений $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$, не содержащее единицы, такое что геометрическая кратность собственного значения $\rho \in \Omega$ равна единице. Определим $\Lambda = \{\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_l}\}$ подмножество спектра $\sigma(Q)$, так что $\Omega = \{\rho : \rho = e^{\omega\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$. И построим возмущённую систему $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)$ таким образом, чтобы спектр оператора монодромии $Y(\omega)$ возмущенной системы не содержал элементов Ω.

Теорема. *Возмущение вида $u(t) = F(t)SF^{-1}(t)x(t)$ для уравнения (1) переводит Ω в единицу, где $S = a(x,b)$, $a = \sum\limits_{j\geqslant 1} \alpha_j\varphi_j$,*

$b = \sum_{j\geqslant 1} \overline{\beta}_j \varphi_j$, *если найдутся две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел* $\{\alpha_i\}$ *и* $\{\beta_i\}$, *что:*
а) $\alpha_j\beta_j = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих* $\{k_1, \ldots, k_l\}$;
б) $\alpha_{k_i}\beta_{k_i} = \frac{P(\mu_{k_i})}{\prod_{j=1, j\neq i}^{l}(\mu_{k_i} - \mu_{k_j})}, i = \overline{1, n}$, *где* $P(\lambda)$ — *некоторый многочлен степени* l *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество* $\sigma(Q) \setminus \Lambda \cup \{0\}$.

Литература

Исламов Г.Г. Свойства одноранговых возмущений // Изв. вузов. Математика.-1989.-№4.-С. 29-35.

Сивков Д.А. Управление спектром оператора монодромии периодической системы с компактной оператор-функцией возмущениями минимального ранга. // Вестник УдГУ. Математика.-2002.-№1.-С. 92-95.

ОБ ОЦЕНКАХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)
E-mail dvr@vstu.ru

Функция $\varphi(t)$ называется φ- функцией, если $\varphi(t)$- непрерывная, неубывающая, вогнутая на отрезке $[0,1]$ функция, равная нулю в точке $t = 0$ и имеющая в каждой точке интервала $(0,1)$ производную $\varphi'(t)$. Пусть $\varphi(t) - \varphi$ - функция. Квазинормированным пространством Лоренца $\Lambda(\varphi,\alpha)$ $(0 < \alpha < \infty)$ называется множество измеримых функций $f(x_1, \ldots, x_N)$, заданных на R^N, периодических с периодом 1 по каждой переменной, для которых конечна квазинорма $\|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} = (\int_0^1 (\varphi(t)\ f^{**}(t))^\alpha dt/t)^{1/\alpha}$, где $f^{**}(t) = \int_0^t f^*(u)du$ $(t > o)$, $f^*(u)(0 \leqslant u \leqslant 1)$- невозрастающая перестановка функции, равноизмеримая с $|\ f(x_1, \ldots, x_N)\ |$, рассмотренной на $I^N = [0,1]^N$. Пусть $\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0}\, \varphi(2t)/\varphi(t)$, $\beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0}\, \varphi(2t)/\varphi(t), \omega(t)$ - модуль непрерывности. Через $H^\omega_{\Lambda(\varphi,\alpha)}$ будем обозначать множество функций $f \in \Lambda(\varphi,\alpha)$, для которых $\omega_{\Lambda(\varphi,\alpha)}(f,\delta) = \sup\limits_{|h_i|\leqslant\delta(i=1,\ldots,N)} \|f(x_1+h_1, \ldots, x_N + h_N) - f(x_1, \ldots, x_N)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)}$. Доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть $0 < \alpha, \beta < \infty$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$- две φ- функции такие, что $\alpha_\psi > 1, \alpha_\varphi > \beta_\psi$ при всех $\delta \in (0,1]$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03 - 01 - 00080).

$\int_\delta^1(\varphi(t^N)/\psi(t^N))t^{-\beta-1}) \leqslant C_1(\varphi,\psi,\beta,N)\cdot(\varphi(\delta^N)/\psi(\delta^N)^\beta\delta^{-\beta})$. Если для функции $f\in\Lambda(\varphi,\beta)$ $\int_0^1(\varphi(t^N)/\psi(t^N)\omega_{\Lambda(\varphi,\beta)}(f,t))^\alpha dt/t<\infty$, то $f\in\Lambda(\psi,\alpha)$ и для любого $\delta\in(0,1]$ $\int\limits_\delta^1(\varphi(t^N)/\psi(t^N)\omega_{\Lambda(\varphi,\beta)}(f,t))/t)^\beta\times$ $dt/t\leqslant C_2(\varphi,\psi,\beta,N)\cdot\varphi(\delta^N)/(\psi(\delta^N)\delta)\cdot\int\limits_0^\delta(\varphi(t^N)/\psi(t^N)\omega_{\Lambda(\varphi,\beta)}(f,t))^\alpha\times$ $dt/t)^{1/\alpha}$.

Утверждение 2. Пусть $0<\beta<\infty$, $\varphi(t)$ φ- функция, для которой $\alpha_\varphi>1,\beta_\varphi<2,\omega(\delta)$- модуль непрерывности. Тогда найдется функция $f\in H^\omega_{\Lambda(\varphi,\beta)}$ такая, что при любом $0<\alpha<\infty$ и любой φ- функции $\psi(t)$ с $\alpha_\varphi>\beta_\psi$, для которой при всех $a\in(0,1]$ $\int_0^a(\psi(t^N)/\varphi(t^N))^\alpha dt/t\leqslant C_3(\varphi,\psi,\alpha,N)\cdot(a\cdot\psi(a^N)/\varphi(a^N))^\alpha$, при всех $\delta\in(0,1/2]$ выполнено неравенство $(\int\limits_\delta^1(\varphi(t^N)\omega_{\Lambda(\psi,\alpha)}(f,t)/(\psi(t^N)t))^\beta$ $\times\, dt/t)^{1/\beta}\geqslant C_3(\varphi,\psi,\alpha,\beta,N)\cdot(\int_0^\delta(\psi(t^N)\omega(t)/\varphi(t^N))^\alpha dt/t)^{1/\alpha}\times$ $\varphi(\delta^N)/(\psi(\delta^N)\delta)$.

О СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ФУНКЦИЙ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ[1]

Симонова И.Э., Симонов Б.В. (Волгоград)
E-mail dvr@vstu.ru

Пусть $1<p<\infty, 0<\theta\leqslant\min(2,p),\max(2,p)\leqslant\tau<\infty,\sigma(\lambda(s),f)$ — ряд Фурье функции f, преобразованный с помощью последовательности $\lambda(s)=\{\lambda(s,k,1/n)=(\int_{1/n}^{2\pi}\alpha(t)dt+n^{ks}\int_0^{1/n}\alpha(t)t^{ks}dt<\infty)^{1/s},n=1,2,\ldots\}$, для которой считаем $0<\int_0^{2\pi}\alpha(t)t^{ks}dt<\infty,\alpha(t)$ - неотрицательная функция на $[0,2\pi]$. Доказаны утверждения.

Утверждение 1. Если для $f(x)\in L_p^0$ ряд $\sigma(\lambda(\tau),f)$ есть ряд Фурье функции $\psi(x)\in L_p^0$, то для любых $\beta_1>\beta>0$ и любого $\delta\in(0,\pi)$ $\quad\omega_\beta(\psi,\delta)_p\gg(\delta^{\beta\tau}\int_\delta^{2\pi}t^{-\tau\beta-1}\int_t^{2\pi}\alpha(u)du\omega^\tau_{k+\beta}(f,t)_pdt+$ $\int_0^\delta t^{\tau k-1}\int_0^t\alpha(u)u^{\tau k}du\omega^\tau_{k+\beta}(f,t)_p)^{1/\tau}=A(\delta,\tau,p,k,\beta,f),\qquad(1)$
$B(\delta,\theta,\tau,p,k,\beta,\beta_1,\psi)=$
$(\delta^{(k+\beta)\theta}\lambda^\theta(\tau,k,\beta)\int_\delta^{2\pi}\omega^\theta_{k+\beta_1}(\psi,t)/(t^{(k+\beta)\theta}\lambda^\theta(\tau,k,t)t)dt)^{1/\theta}\gg$
$(\int_0^\delta t^{\tau k-1}\int_0^t\alpha(u)u^{\tau k}du\omega^\tau_{k+\beta}(f,t)_p)^{1/\tau}=D(\delta,\tau,p,k,\beta,f)$.

Утверждение 2. Если для $f(x)\in L_p^0$ $\quad I(k,\theta,p)=$ $=\int_0^{2\pi}\alpha(t)\omega^\theta_k(f,t)_pdt<\infty$, то существует функция $\psi(x)\in L_p$ с ря-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00080).

дом $\sigma(\lambda(\theta), f)$ причем для любых $\beta_1 > \beta > 0$ и любого $\delta \in (0,\pi]$ будут справедливы неравенства $\omega_\beta(\psi,\delta)_p \ll A(\delta,\theta,p,k,\beta,f)$, (2) $B(\delta,\tau,\theta,p,k,\beta,\beta_1,\psi) \ll D(\delta,\theta,p,k,\beta,f)$.

Полученные оценки точны на классах функций QM и Λ.

Следствие. Если $f(x) \in L_2$, то для существования $\psi(x) \in L_2^0$ с рядом $\sigma(\lambda(2), f)$ необходимо и достаточно, чтобы $I(k,2,2) < \infty$, причем для любых $\beta_1 > \beta > 0$ и любого $\delta \in (0,\pi]$
$\omega_\beta(\psi,\delta)_2 \asymp A(\delta,2,2,k,\beta,f)$, (3)
$B(\delta,2,2,2,k,\beta,\beta_1,\psi) \asymp D(\delta,2,2,k,\beta,f)$

Оценки (1), (2), (3) получены в работе [1].

Утверждение 3. Если $f(x) \in QM \bigcap L_p^0$ $(f(x) \in \Lambda \bigcap L_p)$, то утверждения 1 и 2 справедливы при замене условий $0 < \theta \leqslant \min(2,p), \max(2,p) \leqslant \tau < \infty$ на $0 < \theta \leqslant p, p \leqslant \tau < \infty$ $(0 < \theta \leqslant 2, 2 \leqslant \tau < \infty)$ соответственно.

Литература

1. Потапов М.К., Симонов Б.В. О взаимосвязи обобщенных классов функций Бесова - Никольского и Вейля - Никольского // Analysis Mathematica, 22 (1996), 229 - 316.

НОВЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Соколовская Е.В. (Самара)

E-mail solena@ssu.samara.ru; elsolona@list.ru

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения:

$$\dot{x} \in \mu F(t,x,\mu), \; x(0) = x_0; \tag{1}$$

здесь $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0,a] \to Kv(\mathbb{R}^m)$; $Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактов из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$; $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$; $\mu \in [0,a]$ $(a > 0)$ — малый параметр.

Как известно [1], в задачах аппроксимации (в частности, взаимной) ей сопоставляется так называемая усредненная задача Коши:

$$\dot{u} \in \mu F_0(t,u), \; u(0) = x_0, \tag{2}$$

$(F_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to Kv(\mathbb{R}^m))$, достаточно адекватно отражающая основные свойства решений задачи (1).

При условии липшицевости F и F_0 по x и u соответственно возможность взаимной аппроксимации задачи (1) задачей (2) установлена [1] , [2]. Однако стандартная процедура усреднения, позволяющая в ряде случаев найти вид задачи (2), может привести к усредненной задаче с нелипшицевой правой частью F_0. Рассмотрению этого случая посвящена настоящая работа. Вместо липшицевости от отображения F_0 требуется выполнение более слабого условия односторонней липшицевости (OSL) [3]. Выполнение условия OSL при каждом $\mu \in [0, a]$ требуется и от F.

В этих предположениях при некоторых дополнительных условиях доказано, что задача (2) аппроксимирует взаимно задачу (1).

Литература

[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений.М.: Изд-во МГУ, 1998.160 с.

[2] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 356 с.

[3] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions. SIAM, J.Control OPTIM, 1998. V.36, № 2.p.780—796.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Солдатов А.П. (Великий Новгород)

E-mail sap@mail.natm.ru

В верхней полуплоскости рассматривается эллиптическая система второго порядка с постоянными (и только старшими) коэффициентами. Показано, что в подходящих весовых пространствах Гельдера известное представление А.В.Бицадзе [1], выражающее общее решение этой системы через аналитические вектор- функции, обратимо. Как следствие даны явные формулы для решений задач Дирихле и Неймана. Приведен также пример нелокальной краевой задачи, которая однозначно разрешима для любой эллиптической системы. Наконец, указаны приложения к анизотропной плоской теории упругости.

Литература

Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных, М., Наука, 1981.

О РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО ХЕНСТОКУ И МАК-ШЕЙНУ[1]

Солодов А.П. (Москва)

Рассматриваются интегралы Хенстока и Мак-Шейна, определяемые при помощи обобщенных сумм Римана и эквивалентные интегралам Данжуа-Перрона и Лебега, соответственно. В ряде задач теории обобщенных интегралов Римана важную роль играет понятие равномерной интегрируемости. Всвязи с этим представляет интерес вопрос о взаимоотношении понятий равномерной интегрируемости в различных смыслах. В работе получены условия, при которых семейство равномерно интегрируемых по Хенстоку функций будет равномерно интегрируемым по Мак-Шейну.

Под *разбиением* T отрезка $[a,b]$ будем понимать конечный набор пар (ξ_k, Δ_k), где $\xi_k \in [a,b]$, отрезки $\Delta_k \subset [a,b]$ не перекрываются и в сумме составляют весь отрезок $[a,b]$.

Определение 1. Семейство функций $\{f_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ называется *равномерно интегрируемым по Хенстоку*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$, что для всякого разбиения T отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\xi_k \in \Delta_k \subset (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k))$, и для любого α выполняется неравенство $\|\sum_k f_\alpha(\xi_k)|\Delta_k| - \int_a^b f_\alpha(t)\,dt\| < \varepsilon$.

Определение 2. Семейство функций $\{f_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ называется *равномерно интегрируемым по Мак-Шейну*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$, что для всякого разбиения T отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_k \subset (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k))$, и для любого α выполняется неравенство $\|\sum_k f_\alpha(\xi_k)|\Delta_k| - \int_a^b f_\alpha(t)\,dt\| < \varepsilon$.

Теорема. *Для того чтобы семейство $\{f_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ равномерно интегрируемых по Хенстоку функций было равномерно интегрируемым по Мак-Шейну, достаточно выполнения следующих условий:*

1. *Функция f_α интегрируема по Мак-Шейну при любом α.*
2. *Множество $\{f_\alpha(t)\}$ ограничено при каждом $t \in [a,b]$.*
3. *Семейство $\{f_\alpha\}$ предкомпактно в пространсве $L[a,b]$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00420), программы "Университеты России" (проект УР.04.03.006) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1657.2003.1).

О ДИХОТОМИИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Степин С.А., Титов В.А. (Москва)

Как известно [1], дифференциальное уравнение

$$y'' - q(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

при условии определенной регулярности поведения $q(x)$ при $x \to \infty$, обладает фундаментальной системой решений (ФСР) $y^{\pm}(x)$, для которой справедливы приближения Лиувилля-Грина (ВКБ-асимптотики)

$$y^{\pm}(x) \sim \exp \int^x \Big(\pm \sqrt{q(t)} - \frac{q'(t)}{4q(t)} \Big) dt, \quad x \to \infty. \tag{2}$$

Решение $y^-(x)$ убывает к нулю и однозначно определяется своей асимптотикой, в то время как $y^+(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Для разностного аналога уравнения (1),

$$u_{n+1} - q_n u_n + u_{n-1} = 0, \tag{3}$$

мы исследуем поведение решений при больших $n \in \mathbb{N}$ и устанавливаем асимптотические формулы, аналогичные формулам (2).

Теорема. *Пусть* $q_n > 0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(q_n q_{n+1}\big)^{-1} < \infty$. *Тогда существует ФСР* $\{u_n^{\pm}\}$ *уравнения* (3) *такая, что*

$$u_n^+ \sim \prod_{k=1}^{n-1} q_k, \quad u_n^- \sim \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}, \quad n \to \infty.$$

Если же $q_n > 2$ *и ряд* $\sum \big(q_{n-1} q_n^2 q_{n+1}\big)^{-1}$ *сходится, то уравнение* (3) *имеет решения* $\{u_n^{\pm}\}$ *с асимптотиками при* $n \to \infty$ *вида*

$$u_n^+ \sim \prod^{n-1} \Big(q_k - \frac{1}{q_{k-1}}\Big), \quad u_n^- \sim \prod^{n} \Big(q_k - \frac{1}{q_{k+1}}\Big)^{-1}.$$

Литература

[1] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

---

[1] Работа выполнена при поддержке грантов Минпромнауки НШ-680.2003.1 и РФФИ 02-0100790

О ГЕОМЕТРИИ ПРИВОДИМЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Суворова Е.И. (Москва)

E-mail suvorova@mech.math.msu.su

Общеизвестно, что обыкновенные дифференциальные системы второго порядка на гладком многообразии X_n размерности n

$$x_2^i = f_2^i(x, x_1) \left(x(x^k) \in X_n, x_1(x_1^k) = \frac{dx}{dt}, x_2^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} \right), i, k = 1..n \tag{1}$$

допускают на X_n геометрическую трактовку как системы дифференциальных уравнений геодезических в определенном геометрическом смысле линий, если функции $f_2^i(x, x_1), x = (x^k), x_1 = (x_1^k)$ являются однородными второго порядка относительно скорости $x_1^k = \frac{dx^k}{dt}$, т.е. подчиняются уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial f_2^i}{\partial x_1^k} \cdot x_1^k = 2f_2^i.$$

Входящий сюда случай $f_2^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \Gamma_{kl}^i(x)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}$ индуцирует на многообразии X_n аффинную (в частности риманову) связность.

Важной является задача поиска подобной геометрической трактовки, одинаково подходящей для дифференциальных систем высших порядков. Один из наиболее естественных таких подходов, органично опирающийся на теорию Евтушика Л.Е. нелинейных стабильных связностей в расслоениях реперов высших порядков, иллюстрируется на системах третьего порядка

$$x_3^i = f_3^i(x, x_1, x_2), \quad x_3^i = \frac{d^3x^i}{dt^3}, \quad x_1(x_1^k), \quad x_2(x_2^k) \tag{2}$$

у которых правая часть f_3^i является решением системы уравнений в частных производных

$$\frac{2}{3}\frac{\partial f_3^i}{\partial x_2^k}x_2^k + \frac{1}{3}\frac{\partial f_3^i}{\partial x_2^k}x_1^k = f_3^i, \quad \frac{1}{3}\frac{\partial f_3^i}{\partial x_2^k}x_1^k = x_2^k,$$

что "почти" равносильно тому, что система (2) приводима к виду

$$\frac{d^3x^a}{(dx^1)^3} = \varphi^a\left(x, \frac{dx^b}{dx^1}, \frac{d^2x^b}{(dx^1)^2}\right), \quad a, b = 2, 3, ..., n$$

О СОБСТВЕННОЙ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Сухотин А.М. (Томск)
E-mail asukhotin@mail2000.tu

Пусть (a_n), $a_n \in R$, $n \in N$, некоторая числовая последовательность и $a_n = \mathrm{Arcsin}(x_n)$, $n \in N$. Это уравнение разрешимо относительно x_n при $\forall\ n \in N$, если последовательность (a_n) сходится к числу $a \in R$. Если последовательность (a_n) не ограничена и $a_\infty = \infty$, тогда уравнение $a_\infty = \mathrm{Arcsin}(x_\infty)$ является некорректной [1, с. 16] задачей. Легко показать, что $((a_{n+1} - a_n) \to 0) \Rightarrow ((x_{n+1} - x_n) \to 0)$.

Definition 1. *Числовую последовательность (a_n), $n \in N$, назовём собственно сходящейся последовательностью (ССП), если для неё при $n \to \infty$ выполняется предельное равенство*

$$\lim(a_{n+1} - a_n) = 0. \tag{1}$$

Theorem 1. *Если числовая последовательность (a_n), $n \in N$, сходится, то она и собственно сходится.*

Обратное утверждение, в общем случае, неверно. Например, последовательность (c_n), где $c_n = \ln(n)$, $n \in N$, удовлетворяет условию (1), но не ограничена. Из равенства (1) следует также

Theorem 2. *При всех конечных $p \in N$ для ССП (a_n) справедливо при $n \to \infty$ предельное равенство* $\lim(a_{n+p} - a_n) = 0$.

Definition 2. *Предельное значение $\Omega(a)$ неограниченной ССП (a_n) назовём бесконечно большим числом (ББЧ), определяемым этой ССП.*

Например, $\lim(\ln n) := \Omega(c)$. Множество всех *ББЧ* обозначим как Ω.

Statment 1. *Последовательность (a_n), $a_n := n^{1-\alpha}$, при всех $\alpha > 0$ является ССП.*

Theorem 3. *Неограниченная дифференцируемая в $+\infty$ функция $f : R \to R$ собственно сходится к некоторому элементу $\Omega(f) \in \Omega$ при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда $f'(\infty) = 0$.*

Так как последовательность частичных сумм S_n гармонического ряда $\sum n^{-1}$ удовлетворяет условию (1) и $S_n = \ln n + \gamma_n + C_e$, $\gamma_n \to 0$, C_e-постоянная Эйлера, то гармонический ряд собственно сходится в $\widetilde{R} := R \cup \Omega$ к *ББЧ*$= \Omega(c) + C_e$. Следовательно, для этого ряда справедливо (см. [2, с. 253]) утверждение: $(r_n \to 0) \Leftrightarrow (a_n \to 0)$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1986.

2. Sukhotin А.М. //Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции.-Воронеж: Воронежский государственный университет, 2003.-С. 252-253.

АЛГЕБРЫ НЕЧЁТКОЙ ТЕОРИИ МЕРЫ

Тарушкин В.Т., Тарушкина Л.Т., Юрков А.В.
(Санкт-Петербург)
E-mail Tar@VT8480.spb.edu

Нечёткие множества A,B,... в пространстве X определяются как $A = \{(x, \alpha_x),| \ \alpha_x = \mu_A(x), x \in X\}$, $B = \{(x, \beta_x) \mid \beta_x = \mu_B(x), x \in X\}$,..., где функции принадлежности μ_A, μ_B ,... отображают X в линейно упорядоченное отношением $\leqslant$ можество L с 0 , 1 - наименьшим и наибольшим элементами. Измеримость этих множеств для X=L=[0,1] изучалась в [1]. Введение более общих X , L вызвано потребностями приложений. Для рассматриваемого класса нечётких множеств вводится алгебры де Моргана (не выполнен закон исключённого третьего) и Гейтинга (не выполнены законы исключённого третьего , закон двойного дополнения , принцип двойственности). Рассмотрена аксиоматика А.Н. Колмогорова для этих алгебр . На примере однократного бросания монеты на нечёткую в смыле Л. Заде плоскость показано , что алгебра Гейтинга является более предпочтительной .

Литература

1. Тарушкин В.Т. , Тарушкина Л.Т. , Юрков А.В. Измеримость нечётких множеств // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы. Из - во Воронежского университета, 2003. - С. 254 - 255.

2. Тарушкин В.Т. Вероятностные методы оценки состояния международных отношений России // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 8 , в. 5 ,2001. - С. 696.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ПСЕВДОАСИМПТОТАМИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДЛЯ КОМПЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ МАТЕМАТИКА 4.0

Томова Анна В.
E-mail anna_bg_2000@yahoo.com

В этой работе мы вводим понятие псевдоасимптот для функции одной независимой переменной. Аннонсируем один критерий, который гарантирует существования трех групп два раза непрерывно дифференцируемых функций: функций без асимптот, функций с псевдоасимптотами и функций с асимтотами. С помощью системы для компютерной алгебры МАТЕМАТИКА 4.0 мы находим некоторые классы элементарных и специальных функций с псевдоасимптотами и асимтотами и исследуем поведение этих функций по отношению к собственным псевдоасимптотам или асимтотам, когда независимая переменная устремляется к бесконечности. Подчеркиваем необходимость применения систем комтютерной алгебры во всех уровнях математического образования.

REMARKS ON THE BEHAVIOURS OF SOME FUNCTIONS WITH PSEUDO ASYMPTOTES AND ASYMPTOTES

Abstract. We have defined the idea for pseudo asymptotes of differentiable functions. We proved one criterion for existence of pseudo asymptotes and asymptotes for differentiable functions. In this paper we restrict the attention over the behaviors of some functions with pseudo asymptotes and asymptotes. Using the system for computer algebra MATHEMATICA 4.0 we draw the graphics of some functions with pseudo asymptotes and asymptotes.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ В УСЛОВИЯХ АДДИТИВНОГО БЕЛОГО ШУМА

Тырсин А.Н. (Челябинск)
E-mail at@sla.urc.ac.ru

При анализе сигналов на практике часто нельзя пренебрегать присутствующим аддитивным белым шумом. Пусть временной ряд (или сигнал) $y(t_k) = y(k\Delta) = y_k$ имеет вид:

$y_k = x_r + \varepsilon_k$, где x_k — полезный детерминированный сигнал, для которого справедлива авторегрессионная модель $AP(m)$ порядка, имеющая вид $x_k = x(k\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_{k-i}$; ε_k — белый шум, для которого в асимптотическом случае при $N \to \infty$ выполняются условия:

$$r_\varepsilon(i) = \frac{\sum\limits_{k=m+1}^{N} \varepsilon_k \varepsilon_{k-i}}{N-m} = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} ; \; r_{x\varepsilon}(i) = \frac{\sum\limits_{k=m+1}^{N} x_k \varepsilon_{k-i}}{N-m} = 0.$$

Традиционно AP-коэффициенты определяются в виде: $\tilde{a} = C^{-1}b$, где $c_{ij} = \frac{1}{N-m} \sum\limits_{k=m+1}^{N} y_{k-i} y_{k-j}$; $b_i = \frac{1}{N-m} \sum\limits_{k=m+1}^{N} y_k y_{k-i}$; $i, j = \overline{1, m}$. При этом полученные оценки будут смещены, т.к. элементы главной диагонали автокорреляционной матрицы C завышены на величину, равную дисперсии аддитивного шума σ_ε^2. Указанную смещенность предлагается устранить посредством решения задачи:

$$s_*^2 = arg \min d[G(a), \tilde{a}], \text{ где} \tag{1}$$

$$\tilde{a} = (\tilde{C} - s_*^2 E)^{-1} \tilde{b} \text{ — вектор оценок } AP\text{-коэффициентов} \tag{2}$$

E - единичная матрица $m \times m$, $G(a)$ — область возможных значений теоретического вектора a AP-коэффициентов рассматриваемой модели полезного сигнала $x(t)$, являющаяся выпуклым множеством, $d[.,.]$ — оператор нахождения расстояния между вектором $\tilde{a}$ и выпуклым множеством $G(a)$.

Данная задача представляет собой одномерную задачу минимизации и решается с помощью любого из известных численных методов, например двоичного поиска. Процедуру (1), (2) можно условно назвать регуляризацией автокорреляционной матрицы C, устраняющей смещенность оценок AP-коэффициентов вследствие аддитивного шума.

ОБОБЩЕННЫЕ Φ_+ – ОПЕРАТОРЫ

Тюрин В.М. (Липецк)

E-mail tuvm@stu.lipetsk.ru

Пусть X и Y — банаховы пространства с нормами $||x||_X$ и $||y||_Y$, $A : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор.

Определение. Оператор $A : X \to Y$ назовем обобщенным Φ_+ — оператором, если ядро $KerA$ дополняемо в топологии X и образ $Im(A : X \to Y)$ замкнут в Y.

Обобщенные Φ_+ — операторы характеризуются следующим предложением.

Теорема. Оператор $A : X \to Y$ является обобщенным Φ_+ — оператором тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\|u\|_X \leqslant \|\Pi u\|_X + K\|Au\|_Y$$

с некоторой постоянной $k > 0$, не зависящей от элемента $u \in X$, и некоторым оператором проектирования Π на ядро $KerA$.

Приведенная теорема применяется при изучении линейных дифференциальных операторов $P : H^m \to L^2$ эллиптического типа с непрерывными ограниченными коэффициентами $A_\alpha : R^n \to X$. Оператор P имеет вид

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A\alpha(x)D^\alpha u, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$H^m = H^m(R, X)$ — пространство Соболева и $L^2 = L^2(R, X)$ — пространство Лебега функций $u : R^n \to X$. Отметим, что оператор $P : H^m \to L^2$ называется эллиптическим, если существует число $\lambda \in C(Re\lambda \neq)$ такое, что оператор $P_m + \lambda : H^m \to L^2$ обратим (P_m — главная часть оператора P).

УСЛОВНЫЕ ЧЕБЫШЕВСКИЕ ЦЕНТРЫ В M-ПРОСТРАНСТВАХ

Устинов Г.М. (Екатеринбург)
E-mail Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Пусть X – банахово пространство, L – замкнутое подпространство в X, F – компактное множество в X, $r_L(F) = \inf_{y \in L} \sup_{x \in F} \|x - y\|$, элемент $y^* \in L$, для которого $\sup_{x \in F} \|y^* - x\| = r_L(F)$ – условный чебышевский центр F в L. Скажем, что подпространство $L \subset X$ имеет свойство существования центров, если в L условный чебышевский центр существует для любого компакта $F \subset X$.

Как известно, каждое M-пространство X линейно изометрично и порядково изоморфно подпространству E в $C(Q)$ вида $E = \{f \in C(Q) : \ f(t'_\alpha) = \lambda_\alpha f(t''_\alpha), \ \lambda_\alpha \geqslant 0, \ t'_\alpha, \ t''_\alpha \in Q, \ \alpha \in A\}$.

Пусть $Z_E = \{t \in Q : f(t) = 0 \ \forall f \in E\}$, $Q_t = \{q \in Q : \exists \lambda = \lambda(t,q),\ f(q) = \lambda(t,q)f(t) \ \forall f \in E\}$. Точку $t^* \in Q_t$ назовем выделенной, если $\lambda(t^*,q) \leqslant 1 \ \forall q \in Q_t$ и пусть Q_1 – множество всех выделенных точек, $Q' = \{t \in Q : Q_t$ – одноточечно$\}$. Скажем, что M-пространство X удовлетворяет свойству (*), если: 1) каждое множество Q_t содержит лишь одну выделенную точку, 2) $\bar{Q}_1 \backslash Q_1 \subset Z_E \cup Q'$.

Теорема 1. *Пусть M-пространство X имеет свойство $(*)$, L – подпространство существования в X. Тогда эквивалентны утверждения:* 1) *L имеет свойство существования центров;* 2) *условный чебышевский центр существует в L для любого двухэлементного множества в X.*

Применение теоремы 1 позволяет установить, что некоторые подпространства существования L в X (G-подпространства, $C(T)$-подпространства) имеют свойство существования центров.

В работе [1] при других ограничениях на L условные чебышевские центры исследовались, в частности, для G-подпространств $L \subset C(Q)$.

Литература

1. Dan Amir, Jaroslav Mach and Klaus Saatkamp. Existence of Chebychev centers, best n-nets and best compakt approximants // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982, v. 271, no. 2, p. 513 – 525.

ЗАДАЧА УДЕРЖАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Ухоботов В.И., Никитина С.А. (Челябинск)

E-mail ukh@csu.ru, nikitina@cgu.chel.su

В докладе рассматривается задача построения гарантированного управления линейной системой с малой нелинейностью

$$\dot{z} = -u + v + \gamma \cdot f(t,z), \quad t \leqslant p, \quad |\gamma| << 1,$$

$$u \in U(t) \subset R^n, \quad v \in V(t) \subset R^n,$$

обеспечивающего удержание фазовой траектории вблизи заданного семейства замкнутых множеств $W(t)$. Отклонение фазовой траектории от заданного семейства оценивается с помощью введенной функции неточности. Найдены условия на функцию неточности, которая характеризует меру неточности семейства $W(t)$ до стабильного моста [1], при выполнении которых обеспечивается удержание траектории в заданном семействе множеств. Подробно разобран случай, когда вектограмма управления и заданное семейство множеств являются многогранниками специального вида

$$U(t) = C(t)A(\alpha(t)), \quad W(t) = C(t)A(y(t)).$$

Здесь $C(t)$ - невырожденная матрица, а многогранник $A(y)$ задается с помощью фиксированного набора векторов $x_j \in R^n, j = 1, \ldots, l$ системой линейных неравенств

$$A(y) = \{z \in R^n : \langle x_j, z\rangle \leqslant y_j, \quad j = 1, \ldots l\}.$$

Предполагается, что выполнено условие линейности

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*).$$

В качестве примеров рассматривается случаи, когда многогранник $A(y)$ является параллелепипедом и симплексом. В этом случае для определения функции $y(t)$ записана система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. –М.: Наука, 1974. 456 с.

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ

Фомин В.И. (Тамбов)

В некоторых учебных пособиях при доказательстве для однозначной и аналитической в области G и на ее границе L функции $f(z)$ интегральной формулы Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0}, \ \forall z_0 \in G, \tag{1}$$

после получения соотношения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0}, \ \forall \gamma_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\}, \tag{2}$$

такой, что $K_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| \leqslant \rho\} \subset G$, из которого следует, что для $\forall \gamma_\rho$ указанного вида

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} = A = const,$$

рассматривается предельный переход при $\rho \to 0$, что зачастую вызывает у студентов вопрос: зачем рассматривать предел постоянной, если он равен этой постоянной. Можно поступить иначе.

В силу (2) для справедливости (1) осталось показать, что $A = f(z_0)$. Предположим противное: $A \neq f(z_0)$. Возьмем произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию (3) $\varepsilon < |A - f(z_0)|$. В силу непрерывности $f(z)$ в точке z_0 $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Возьмем $\rho < \delta$. Тогда

$$A - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta,$$

и

$$|A - f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{\zeta\in\gamma_\rho}\left|\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}\right| \cdot l_{\gamma_\rho} \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = \varepsilon,$$

Получили: $|A - f(z_0)| \leqslant \varepsilon$, что противоречит условию (3).
Следовательно, $A = f(z_0)$.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Фролова Е.В. (Липецк)
E-mail lsn@lipetsk.ru

К уравнениям Вольтерра с многомерными частными интегралами приводятся некоторые задачи для интегро - дифференциальных уравнений, а также континуальные аналоги матричных дифференциальных уравнений теории солитонов.

В заметке рассматривается уравнение

$$x(t,s,r) = (Kx)(t,s,r) + f(t,s,r), \tag{1}$$

где $K = L + M + N + P + Q + V + W$,

$$(Lx)(t,s,r) = \int_a^t l(t,s,r,\tau)x(\tau,s,r)\,d\tau,$$
$$(Mx)(t,s,r) = \int_c^s m(t,s,r,\sigma)x(t,\sigma,r)\,d\sigma,$$
$$(Nx)(t,s,r) = \int_e^r n(t,s,r,\theta)x(t,s,\theta)\,d\theta,$$
$$(Px)(t,s,r) = \int_a^t\int_c^s p(t,s,r,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma,r)\,d\tau\,d\sigma,$$
$$(Qx)(t,s,r) = \int_a^t\int_e^r q(t,s,r,\tau,\theta)x(\tau,s,\theta)\,d\tau\,d\theta,$$
$$(Vx)(t,s,r) = \int_c^s\int_e^r v(t,s,r,\sigma,\theta)x(t,\sigma,\theta)\,d\sigma\,d\theta,$$
$$(Wx)(t,s,r) = \int_a^t\int_c^s\int_e^r w(t,s,r,\tau,\sigma,\theta)x(\tau,\sigma,\theta)\,d\tau\,d\sigma\,d\theta;$$

$t, \tau \in [a,b]$, $s, \sigma \in [c,d]$, $r, \theta \in [e,f]$; l, m, n, p, q, v, w — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Условия разрешимости уравнения (1) в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ функций связаны с условиями равенства нулю спектрального радиуса $r(K)$ оператора K. Случай пространства непрерывных функций двух переменных изучен в [1].

Пусть $\Omega \in \{[a,b], [c,d], [e,f], [a,b] \times [c,d], [a,b] \times [e,f], [c,d] \times [e,f], D\}$, $z \in \{\tau, \sigma, \theta, (\tau, \sigma), (\tau, \theta), (\sigma, \theta), (\tau, \sigma, \theta)\}$. Измеримая на $D \times \Omega$ функция $u(t,s,r,z)$ называется непрерывной в целом, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\|u(t_1, s_1, r_1, \cdot) - u(t_2, s_2, r_2, \cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$, $|r_1 - r_2| < \delta$, и интегрально ограниченной, если $\|u(t,s,r,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant U < \infty$.

Теорема. *Пусть ядра l, m, n, p, q, v, w непрерывны в целом и интегрально ограничены. Тогда $r(K) = 0$ и уравнение* (1) *однозначно разрешимо в пространстве $C(D)$ при любой функции $f \in C(D)$.*

Литература

1. Фролова Е. В. Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // Труды института математики НАН Беларуси. Минск, 2000. Т. 5. С. 131 – 135.

СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ

Фукин И.А. (Казань)
E-mail Igor.Fukin@ksu.ru

Решается задача нахождения $f^* = \min\{f(x), x \in D(0)\}$, где $D(p) = \{x \in R_n : f_i(x) + p \leqslant 0, i = \overline{1,m}\}$, с заданной точностью ε. То есть, необходимо найти точку $x' \in X^*_\varepsilon$, где $X^*_t = \{x \in D(0), f(x) \leqslant f^* + t\}$.

Пусть функции $f(x), f_i(x), i = \overline{1,m}$ выпуклы в R_n, функция штрафа $V(x,p)$ такая, что $V(x,p) = 0$ при $x \in D(p)$ и $V(x,p) > 0$ при $x \notin D(p)$, множество $M(\alpha) = \{x \in R_n : V(x,p) \leqslant \alpha\}$, число $\overline{\alpha} = \max\{\alpha : M(\alpha) \subset D(0)\}$, точка $x(C) \in \operatorname{Argmin}\{f(x) + CV(x), x \in R_n\}$. Считается, что выполнены следующие условия:

1. Функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве X^*_ε условию Липшица с константой L.
2. Множество X^*_0 ограничено.
3. Множество $D(0)$ удовлетворяет условию Слейтера.

В [1] было показано, что существуют числа $\lambda > 0$ и $\beta = \beta(\lambda)$ такие, что $\max\{f_i(x), i = \overline{1,m}\} + \lambda \geqslant \beta\rho(x, D(\lambda))$.

В данном докладе обосновывается

Утверждение 1. Пусть $0 \leqslant p \leqslant \min\{\frac{\varepsilon\beta}{L}, \lambda\}$, число $\gamma \in (0,1)$, величина $C > 0$ такая, что выполняется

$$\gamma\overline{\alpha} \leqslant V(x(C), p) \leqslant \overline{\alpha}. \tag{1}$$

Тогда $x(C) \in X^*_\varepsilon$.

Так как $V(x(C), p)$ непрерывна и монотонно невозрастает по $C > 0$, то для нахождения значения C, удовлетворяющего условию (1), можно любым численным методом решить по C уравнение $V(x(C), p) = \frac{1+\gamma}{2}\overline{\alpha}$ с точностью $\frac{1-\gamma}{2}\overline{\alpha}$ по функционалу $V(x, p)$. В [1] приведен алгоритм, основанный на методе секущих. Здесь же вычислено значение $\overline{\alpha}$ для некоторых конкретных функций штрафа.

Литература

1. Заботин Я.И., Фукин И.А. Алгоритмы в методе штрафов с аппроксимацией допустимого множества// Изв.вузов.Матем. - 2004. - N1. - с.36-47.

О НУЛЯХ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛЕ

Хабибуллин Б.Н. (Уфа)

E-mail khabib-bulat@mail.ru

В силу очевидного конформного преобразования угла на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в правую полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ достаточно обсудить вопрос для классов $H(\mathbb{C}_+)$ функций, голоморфных в $\mathbb{C}_+$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность различных точек в $\mathbb{C}_+$, а субгармоническая функция M с мерой Рисса ν_M непрерывна на $\mathbb{C}_+$ и $\sup_{|z-w|\leqslant\min\{\operatorname{Re} z/2, 1\}} M(w) \leqslant M(z) + \mathrm{const}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Субгармоническую в $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$ функцию $V \geqslant 0$ называем функцией Йенсена в $\mathbb{C}_+$ с полюсом в 1, если $V \equiv 0$ вне некоторого компакта из $\mathbb{C}_+$ и $\limsup_{z\to 0} V(1+z)/(-\ln|z|) \leqslant 1$. Пример такой функции — продолженная нулем функция Грина $g_D(1, \cdot)$ регулярной (для задачи Дирихле) области $D \ni 1$, предкомпактной в $\mathbb{C}_+$, т. е. $D \Subset \mathbb{C}_+$.

Теорема.(ср. [Kh91]) *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Существует ненулевая функция $f \in H(\mathbb{C}_+)$, обращающаяся в нуль на Λ и удовлетворяющая оценке $\ln|f(z)| \leqslant M(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$;*

2) $\sup_V \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int V d\nu_M\right) < +\infty$, *где $\sup_V$ берется по всем функциям Йенсена V в $\mathbb{C}_+$ с полюсом в 1.*

3) $\sup_D \left(\sum_k g_D(1, \lambda_k) - \int g_D(1, z) d\nu_M(z)\right) < +\infty$, *где $\sup_D$ берется по всем регулярным областям $D \Subset \mathbb{C}_+$, $1 \in D$.*

Доказательство основано на общих схемах из [Kh01] и [CR01]. Предполагается обсудить применения теоремы к нахождению явных условий (не-)полноты систем экспонент в пространствах функций на неограниченных выпуклых множествах из $\mathbb{C}$.

Выполнено при поддержке РФФИ, грант № 03-01-00033, и программы поддержки научных школ, проект НШ–1528.2003.1.

Литература

[Kh91] *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. 1991. Т. 55, № 5. С. 1101-1123.

[Kh01] *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I, II // Изв. РАН. 2001. Т. 65, № 4. С. 205-224; № 5. С. 167-190.

[CR01] *Cole B., Ransford T.* Jensen measures and harmonic measures // J. reine angew. Math. 2001. V. 541. P. 29–53.

ВЫРАБОТКА НАВЫКОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ – ПУТЬ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Халтанова М.М. (Якутск)

E-mail maRiaOSE@yandex.ru

В условиях ограниченности аудиторных часов по математике и расширении вузовских госстандартов большое значение приобретают организационно- методические возможности оптимизации учебного процесса, обеспечивающие необходимый уровень качества подготовки специалистов инженерно-технического профиля.

Предлагается путь интенсификации учебного процесса и выработки навыков самостоятельной работы путем повышения роли индивидуальной работы студентов на практических занятиях:

1. Ориентация лекционного материала для непосредственного приложения на практических занятиях - чтобы существенно большую часть аудиторного времени освободить на самостоятельную работу студентов по разбору индивидуальных тренировочных заданий по заданной теме.

2. Самостоятельное изучение указанных разделов дисциплины по учебным пособиям, оформление рефератов и защита их к определенному сроку.

Некоторые выводы:

1. Такая организация занятий позволяет заполнить аудиторное время индивидуальной самостоятельной работой всех студентов.

2. Студенты на занятиях максимально используют весь лекционный и предоставленный методический материал, различные учебные пособия - т.е., несомненно, повышается активность и качество работы каждого студента, уровень работы с учебной литературой.

3. Также повышается уровень индивидуальной работы преподавателя со студентами и, по крайней мере, учитывается индивидуальный темп работы каждого студента.

4. Общие замечания и комментарии преподавателя к возникшим общим вопросам при решении типовых задач на текущем практическом занятии вызывают, обычно, большой интерес и внимание - что заметно сказывается на качество выполнения индивидуальной практической работы.

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА-ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Хромов А.П. (Саратов)
E-mail KhromovAP@info.sgu.ru

Для оператора:

$$Ly = \beta y'(x) + y'(1-x), \quad x \in [0,1]$$

с интегральным граничным условием

$$U(y) = \int_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha (1-t)^\alpha} y(t)\, dt = 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

установлена

Теорема. *Если $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$, $k^2(0) \neq k^2(1)$, то для любой $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$, для которой $U(f) = 0$, выполняется соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda \right| = 0,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы "Университеты России" (проект ур.04.01.041) и гранта РФФИ (проект № 03-01-00169).

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, E – единичный оператор, λ – комплексное число.

Для оператора $Ly = y'(x)$ с условиями $U(y) = 0$ схожий результат установлен А.М.Седлецким [1] (правда в [1] граничное условие несколько иного вида, что не является существенным).

Литература

1. Седлецкий А. М. *О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье* // Тр. МИАН. – 1991. – Т. 100. – С. 299–309.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1]

Цалюк В.З. (Краснодар)

E-mail vts@math.kubsu.ru

Пусть система автоматического регулирования с обратной связью (в $\mathbb{R}^n$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t), \quad u(t) = Bx(t)$$

экспоненциально устойчива.

Предположим, что измерение состояния $x(t)$ системы возможно только в отдельные, повторяющиеся с периодом ω, моменты времени. Тогда вместо непрерывной обратной связи $Bx(t)$ мы имеем функциональный оператор

$$(\mathbf{B}_\omega x)(t) = B\,x(k\omega) \ \text{ для } t \in (k\omega,\, (k+1)\omega).$$

Если ω достаточно мало, то функция Коши новой системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + (\mathbf{B}_\omega x)(t) \tag{1}$$

по прежнему удовлетворяет экспоненциальной оценке.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + (\mathbf{B}_\omega x)(t) + F', \tag{2}$$

где F' – обобщенная производная функции F локально ограниченной вариации. Определения решения для таких систем предложены в работе [1]. Здесь, в частности, приемлемо понятие „решения с памятью", для которого справедлива формула Коши в виде [1]

$$x(t) \in C(t,\, a)\, x(a) + \int_a^t C(t,\, s)\, dF(s).$$

[1] Работа частично поддержана РФФИ, грант 03-01-00255.

(Т.к. обе функции $C(t,\cdot)$ и F могут иметь разрывы, здесь применяется многозначный интеграл Стилтьеса, описание которого можно также найти в [1].) На этом основании для системы (2) решается задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Литература

[1] В. З. Цалюк. Свойства решений функционально-дифференциальных уравнений с мерой. *Дифференциальные уравнения*, 2004, Т. 40, №2.

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ОДНОРОДНЫМ ЯДРОМ

Цалюк М.В. (Краснодар)
E-mail mtsalyuk@math.kubsu.ru

Рассматривается уравнение

$$x(t)=\int_1^t \tfrac{1}{s}Q\left(\tfrac{t}{s}\right)x(s)\,ds+f(t),\ t\geqslant 1,$$

где Q, f и x — непрерывны на $[1,\infty)$ и $t^{m-1}Q(t)\in \mathrm{L}_1[1,\infty)$ при некотором $m\geqslant 0$. Обозначим $\hat{Q}(z)\overset{\mathrm{df}}{=}\int_1^\infty u^{-(z+1)}Q(u)\,du$. Пусть, далее, $1-\hat{Q}(z)=0$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant -m$ конечное число корней. Если среди них есть корни нецелой кратности, то так как при $\operatorname{Re} z>-m$ функция $\hat{Q}(z)$ аналитична, они могут быть только на прямой $\operatorname{Re} z=-m$. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть уравнение* $1-\hat{Q}(z)=0$ *имеет в полуплоскости* $\operatorname{Re} z\geqslant -m$ *конечное число корней* $\lambda_1=-m+i\gamma_1,\dots,\lambda_k=-m+i\gamma_k,\lambda_{k+1},\dots,\lambda_q$ *кратности* $m_1+\alpha_1,\dots,m_k+\alpha_k,m_{k+1},\dots,m_q$ *соответственно, где* $m_j>0$ *целые,* $\alpha_j\in(0,1)$*, причем* $m_1=m_2=\dots=m_k=p_0=\max\limits_{\operatorname{Re}\lambda_j=-m} m_j$*. Пусть далее* $(lnt)^{p_0}t^{m-1}Q(t)\in \mathrm{L}_1[1,\infty)$ *и для всех* $j=1,2,\dots,k$

$$\frac{1}{t}\left\{(\ln t)^{p_0-1+\alpha_j}-\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{s}\right)^{p_0-1+\alpha_j}s^{-\lambda_j}\frac{Q(s)}{s}\,ds\right\}\in \mathrm{L}_1[1,\infty).$$

Тогда резольвента $R_Q(t,s)$ *представима в виде* $R_Q(t,s)=D(t,s)+R_1(t,s)+\int_s^t D(t,\xi)R_2(\xi,s)d\xi=R_3(t,s)+\int_s^t D(t,\xi)R_4(\xi,s)d\xi$*, где* $D(t,s)=\frac{1}{s}\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_j-1}P_{p_0}\left(\ln\frac{t}{s}\right)\left(\frac{t}{s}\right)^{\lambda_j}+\frac{1}{s}\sum\limits_{j=1}^{q}P_{m_j-1}\left(\ln\frac{t}{s}\right)\left(\frac{t}{s}\right)^{\lambda_j}$ *и*

$R_l(t,\,s) = \frac{1}{s}\bar{R}_l\left(\frac{t}{s}\right)$ *— однородные функции степени однородности -1, такие что* $t^{m-1}\bar{R}_l(t) \in \mathrm{L}_1[1,\,\infty)$. *Если, кроме того,* $t^m Q(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то и* $t^m \bar{R}_l(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Замечание. Условие теоремы $(lnt)^{p_0}t^{m-1}Q(t) \in \mathrm{L}_1[1,\,\infty)$ можно заменить более слабым

$$\frac{1}{t}\left\{(\ln t)^{m_j-1} - \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{m_j-1} s^{-\lambda_j}\frac{Q(s)}{s}\,ds\right\} \in \mathrm{L}_1[1,\,\infty),\ \operatorname{Re}\lambda_j = -m.$$

ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ

Цопанов И.Д. (Владикавказ)
E-mail i.tsopanov@globalalania.ru

Понятие регуляризованного следа для линейного оператора определено и изучено в работе [1]. Рассмотрим операторный пучок вида $N_\lambda = A - Q_0 - \lambda Q_1 - \lambda^2 E$, где A– неограниченный линейный самосопряженный оператор с компактной резольвентой в гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ – собственные значения оператора A и пучков N_λ, $A_{\lambda^2} = A - \lambda^2 E$ соответственно. В работе [2] при условии разреженности спектра оператора A и ядерности операторов Q_0, Q_1 была получена формула регуляризованного следа для натуральных значений параметра s:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{n_k}(\mu_p^s - \eta_p^s - c_p(s)) = F(s). \tag{1}$$

На самом деле, верна следующая

ТЕОРЕМА. Для пучка N_λ при условии принадлежности операторов Q_0, Q_1 некоторому операторному идеалу $\mathfrak{S}_p$ (см. [1]) и разреженности спектра: $\liminf\limits_{r\to\infty} N(r)r^{-\alpha} = \varepsilon < \infty \quad (0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2})$, где $N(r) = \sum_{|\lambda_k|\leqslant r} 1$, справедлива формула вида (1).

Доказательство теоремы содержит способ вычисления величин $\{c_p(s)\}$, $F(s)$. Например, при $s = 1, 2, 3$ имеем соответственно

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{n_k}\{\mu_p - \eta_p + (Q_1 e_p, e_p)\} = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{n_k}\{\mu_p^2 - \eta_p^2 + 2(Q_0 e_p, e_p) - (Q_1^2 e_p, e_p)\} = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\{\sum_{p=1}^{n_k}[\mu_p^3+(Q_1^3e_p,e_p)-3(Q_0Q_1e_p,e_p)]+3\sum_{p=1}^{n_k/2}\lambda_p(Q_1e_p,e_p)\}=0.$$

Здесь $\{e_p\}_{p=1}^{\infty}$– ортонормированный базис в H, составленный из собственных векторов оператора A.

Литература

1. Садовничий В.А. Теория операторов.– М.:ДРОФА, 2001.
2. Цопанов И.Д.Кандидадская диссертация.–М.:МГУ, 1987.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА, УПРАВЛЯЕМОГО ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)
E-mail v_sumin@mm.unn.ru

Пусть $Q\subset\mathbf{R}^n$ – ограниченная область, $\hat{t}\equiv\{t_1,\ldots,t_n\}\in Q$; $\Pi=[0,T]\times Q\subset\mathbf{R}^{n+1}$; $S=(0,T]\times\partial Q$; $t=\{t_0,\hat{t}\}$; обозначения $\overset{\circ}{D}(Q)$, $\overset{\circ}{D}_1(\Pi)$ и условия на a_{ij},a_i см.[1,2]. Положим $A[z]:L_2(\Pi)\to\overset{\circ}{D}_1(\Pi)$ – обобщенное [1] решение при $\omega=0$, $g(t,x,u)=z(t)$ задачи

$$(1)\quad\begin{cases}\sum\limits_{i,j=0}^{n}a_{ij}(t)x''_{t_it_j}+\sum\limits_{i=0}^{n}a_i(t)x'_{t_i}=g(t,x(t),u(t)),\ u\in\mathcal{D},\ t\in\Pi;\\ x(0,\hat{t})=\omega^{(1)}(\hat{t}),\ \hat{t}\in Q;\ x'_{t_0}(0,\hat{t})=\omega^{(2)}(\hat{t}),\ \hat{t}\in Q;\ x\,|_S=0,\end{cases}$$

где $\omega\equiv\{\omega^{(1)},\omega^{(2)}\}\in\mathcal{W}=\overset{\circ}{D}(Q)\times L_2(Q)$; $\mathcal{D}\subset L_2^s(\Pi)$ – огр. Тогда [1] $A\in L(L_2,L_q)$, $q\in[1,\frac{2(n+1)}{n-1})$. Пусть $\exists r\in L_q$, $B\in L(L_2,L_q)$: $|A[z](t)|\leqslant\max\{r(t)\|z\|,B[|z|](t)\}$ $t\in\Pi$; функция $g:\Pi\times\mathbf{R}^{s+1}\to\mathbf{R}$ вместе с производной g'_y измеримы по $t\in\Pi$ $\forall\{y,u\}\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^s$, непр. по $\{y,u\}$, формулы $G_u[y]\equiv g(.,y(.),u(.))$, $\hat{G}[y,u]\equiv g'_y(.,y(.),u(.))$, $y\in L_{q,l}$, $u\in\mathcal{D}$, определяют оператор $G_u:L_q(\Pi)\to L_2(\Pi)$, $\forall u\in\mathcal{D}$, и огр. оператор $\hat{G}:L_q\times\mathcal{D}\to L_\sigma$, непрерывный по y, $q^{-1}+\sigma^{-1}=2^{-1}$. Рассм. задачу: $\int\limits_\Pi M(t,x_u(t))dt\to\max$, $u\in\Omega=\{u\in\mathcal{D}|\exists^1x_u\in\overset{\circ}{D}_1$ – решение (1)$\}$ (условия на M – как на g). Пусть $\mathcal{D}_N[u_0]$ – множество $\forall v\in\mathcal{D}$, для которых имеет смысл игольчатое варьирование оптимального управления $u_0\in\Omega$; $\omega\in\mathcal{W}$, $x_0=x_{u_0}$.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-00979, и КЦФЕ при СпбГУ, грант Е02-1.0-173.

Теорема. $\forall v \in \mathcal{D}_N[u_0]$ $\exists \Pi_v \subset \Pi$: $\mathrm{mes}(\Pi \setminus \Pi_v) = 0$ и $\psi \in L_2$:

$$\psi(t) - A^* \left[\left\{ g'_y(.,x_0,u_0) \right\}^* \psi(.) \right](t) = A^* \left[M'_y\Big(.,x_0(.)\Big) \right](t), \quad t \in \Pi,$$
$$\psi(\tau) \cdot g\Big(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau)\Big) \geqslant \psi(\tau) \cdot g\Big(\tau, x_0(\tau), v(\tau)\Big), \quad \forall \tau \in \Pi_v.$$

Литература

1. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., 1953.

2. Сумин В.И., Чернов А.В. // Мат. моделирование в естест. и гуманит. науках: Тезисы док. симп. - Воронеж: ВГУ. 2000. С.209.

СИСТЕМА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРЕАТИВНОСТИ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

Чернякова Н.В. (Воронеж)

Качество математической подготовки учащихся обеспечивается сочетанием многих факторов, но во многом успех усвоения школьного курса зависит от методически грамотно и творчески организованной внеурочной и внеклассной работы по предмету. Внешкольная деятельность подростков приобретает социально ориентированную направленность при ее целевой организации со стороны взрослых в школе, учреждениях дополнительного образования, детских общественных организациях и объединениях.

В Воронежском учебно-воспитательном комплексе №2 им. А.П. Киселева разработана и внедрена в учебный процесс креативная система раннего профессионально ориентированного обучения математике, которая широко использует не только традиционные, но и нестандартные формы внеклассной работы. Система внеурочной деятельности во-первых, предоставляет ребенку возможность и обеспечивает свободу выбора интересующих форм и видов занятий и, во-вторых, создает предпосылки для появления у каждого чувства успешности своей деятельности. При этом для всех обучаемых конструируется единая система, но в ней разные по характеристикам своего ментального опыта учащиеся должны найти наиболее соответствующий их индивидуальным особенностям маршрут; выбрать предпочитаемые ими формы и способы участия. Система внеурочной работы включает в себя:

- использование новых информационных технологий (активное использование компьютерных технологий для создания презентаций, сайтов, участия в сетевых проектов, использование ресурсов Интернет);

- игровые формы внеклассной работы по предмету (различные викторины, конкурсы, КВНы, брейн-ринги, интернет - викторины, марафоны и т.д.);

- перевод на индивидуальный план обучения - часто возможности и желания познавательной деятельности одаренного учащегося не реализуются в условиях традиционной модели, поэтому обучение можно организовать по индивидуальной программе как на уроке (учащийся работает по собственному плану, учитель консультирует его), так и во внеурочное время (свободное посещение занятий, сдача экзаменов экстерном);

- проектно-проективную деятельность учащихся (ребенку предоставляется возможность самостоятельно выбрать интересующую его тему, изучить и осмыслить имеющийся материал, переработать и применить к решению определенных задач, выбрать и реализовать форму отчета о проделанной работе: реферат, статья, методическая разработка, web-ресурс, стихи, презентация, картины);

- организацию разновозрастных групп (школьные академии наук, клубы по интересам, команды участников различных викторин, игр, олимпиад, Интернет-проектов, детский музей-лабораторию). Формы работы с разновозрастными группами можно разделить на две категории. К первой относятся те, которые организуются в рамках только одной группы. Например, для учащихся 5-6 классов в программе обучения предусмотрен спецкурс "Решение логических задач". Вторая категория форм работы с разновозрастной группой включает в себя те направления, в которых могут принимать участие школьники всех возрастов, например, участие в семинарской и исследовательской работе Малой Академии наук комплекса, телекоммуникационной Интернет-викторине и т.д.;

- систему специальных курсов по выбору, когда учащиеся во внеурочное время по собственному желанию посещают дополнительные курсы по развитию пространственного или логического мышления, например, спецкурс "Решение конструктивных задач" для 7-9 класса, или "Решение задач с параметрами" для 8-9 класса;

- систему индивидуальных консультаций.

Но формы внеурочной работы постоянно совершенствуются и дополняются новыми, вызванными запросами учащихся или требованием времени. Сейчас в стадии формирования и апробации находится проект организации математической компьютерной лаборатории для учащихся 8-11 классов. Предполагается совместная разработка и создание компьютерных приложений для изучения различных разделов математики.

МЕТОД ПРЯМЫХ ДЛЯ СИСТЕМ НЕ ТИПА КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ

Чистяков В.Ф., Гайдомак С.В. (Иркутск)
E-mail chist@icc.ru, gaidamak@icc.ru

Рассматривается начально-краевая задача

$$AD_t u + BD_x u + Cu = f \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u(0,t) = \psi(t),\ (x,t) \in U = [0,X] \times [0,T] \subset R^2, \tag{2}$$

где $A \equiv A(x,t)$, $B \equiv B(x,t)$, $C \equiv C(x,t)$– некоторые $(n \times n)$-матрицы, $u \equiv u(x,t)$– искомая $f \equiv f(x,t)$– заданная n-мерные вектор-функции, $D_t \equiv \partial/\partial t$, $D_x \equiv \partial/\partial x$.

Предполагается, что система (1) является системой не типа Коши-Ковалевской: det $A(x,t) = 0$ $\forall (x,t) \in U$. Такие системы имеют большое прикладное значение.

Получена теорема существования.

Теорема. Если 1) $\mathrm{rank} A = d = const$, $\mathrm{rank} S = d + l = const$ $\forall (x,t) \in U, S = (A\ B)$; 2) $\det(\lambda A + \mu B + C) = a_0 \lambda^d \mu^l + \dots$, где коэффициент $a_0 \equiv a_0(x,t)$ не обращается в нуль ни в одной точке области U; 3) корни многочлена $\det(\lambda A + D)$, $D = B + (E_n - SS^-)C$, отрицательные и простые, S^-– любая полуобратная матрица к матрице S : $SS^-S = S$; 4) входные данные достаточно гладкие в U; 5) начальные и граничные данные удовлетворяют условиям: $A(x,0)u(x,0) = \varphi(x)$, $S(0,t)u(0,t) = \psi(t)$ и предполагаются согласованными в точке $(0,0)$ со своими производными до второго порядка включительно, тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение в области U.

Для численного решения задачи (1)-(2) был применен метод прямых по переменным x и t. В результате чего получается ряд задач Коши (для дискретизации по пространственной переменной) вида

$$A_{j+1} du_{j+1}/dt + [B_{j+1}/h + C_{j+1}]u_{j+1} = f_{j+1} + B_{j+1}/h u_j, \tag{3}$$

где $u_{j+1}(0) = \varphi((j+1)h)$, A_{j+1}, B_{j+1}, C_{j+1}– матрицы A, B, C, вычисленные на прямых $x = (j+1)h$, $f_{j+1} \equiv f((j+1)h, t)$, $j =$

$0, 1, 2, ..., N$, h– шаг сетки по пространству. Системы (3) решались методом сплайн-коллокации. Доказана теорема о сходимости метода. Получена оценка погрешности порядка $O(h)$.

Для проведения численных экспериментов создан комплекс программ в среде Delphi 6.

ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА НА СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ

Чихачева О.А. (Рязань)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + A(\lambda)\dot{x}(t-\varepsilon) + Bx(t) + C(\lambda)x(t-\varepsilon) = 0, \tag{1}$$

в которой $x(t) \in \mathbb{R}^n, B - n \times n$–постоянная матрица, $A(\lambda)$ и $C(\lambda)$ – $n \times q$–матрицы, ε – малое отклонение (вектор-параметр), $x(t-\varepsilon) \in \mathbb{R}^m, \lambda$– малый параметр, $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

Систему (1) запишем в виде

$$\overline{R}(x(t), \varepsilon, \lambda) = \overline{H}(x) + \overline{G}(x(t), \varepsilon, \lambda), \tag{2}$$

где $\overline{H}(x)$ зависит только от $x(t)$, $\overline{G}(x(t), \varepsilon, \lambda)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $\lambda \to 0$, равномерно относительно $x(t)$.

Разрешимость системы (2) равносильна разрешимости одной из следующих систем

$$P(\overline{R}(x(t), \varepsilon, \lambda)) = 0, \tag{3}$$

$$\xi_1(\overline{R}(x(t), \varepsilon, \lambda)) = 0, ..., \xi_s(\overline{R}(x(t), \varepsilon, \lambda)) = 0, \tag{4}$$

где P– оператор ортогонального проектирования на $\overline{M}_0$, $\xi_1, ..., \xi_s$– линейные функционалы.

Система (3) разрешается с помощью метода неподвижной точки, а система (4) приводится к виду

$$F(\zeta, \lambda) + o(\|(\zeta, \lambda)\|^{p+2}) + o(\|\alpha\|) = 0, \tag{5}$$

где $F(\zeta, \lambda)$– форма $(p+2)$-порядка по $(\zeta, \lambda), \zeta = (\alpha, \varepsilon)$.

Составлен алгоритм нахождения решения системы (5).

О КРАТНОСТИ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Чубурин Ю.П. (Ижевск)
E-mail chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассматривается двумерный оператор Шредингера с однородным магнитным полем $B = \text{const} \geqslant 0$

$$H = -\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial x_1} - iBx_2)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}) + V(x) = H_0 + V(x),$$

где $V(x)$ – вещественный ограниченный периодический потенциал с периодами T_1, T_2. Предполагаем, что выполнено обычное условие $BT_1T_2 \in 2\pi\mathbf{Z}$. Тогда операторы H_0, H разлагаются в прямом интеграле пространств $\int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega)dk$, где $\Omega = [0, T_1) \times [0, T_2)$, $\Omega^* = [0, 2\pi/T_1) \times [0, 2\pi/T_2)$, операторами $H_0(k), H(k)$ того же вида, но определенными на магнитно-блоховских функциях из $L^2(\Omega)$; здесь $k \in \Omega^*$ – квазиимпульс. Спектр оператора $H(k)$ чисто дискретный, его собственные значения $E_n(k), n = 1, 2, ...$, занумерованные в порядке неубывания с учетом кратности, являются непрерывными функциями на торе Ω^*, а спектр оператора H представляет собой объединение замкнутых промежутков $\cup_{n=1}^{\infty}\{E_n(k) : k \in \Omega^*\}$.

Пусть $W(x)$ – вещественная ограниченная периодическая с периодами T_1, T_2 функция. Положим $H_\epsilon(k) = H(k) + \epsilon W(x)$, где $\epsilon \in \mathbf{R}$. Собственные значения оператора $H_\epsilon(k)$ в окрестности любой точки $(E_0, k_0, 0) \in \mathbf{R}^4$ задаются уравнением вида $\Delta(E, k, \epsilon) = 0$, где Δ – аналитическая функция в комплексной (в $\mathbf{C}^4$) окрестности $(E_0, k_0, 0)$.

Теорема. Существует такое $\epsilon_0 > 0$, что для всех ϵ, удовлетворяющих неравенству $0 < |\epsilon| < \epsilon_0$, собственные значения оператора $H_\epsilon(k)$ в заданном промежутке $[A, B]$ могут иметь кратность большую единицы лишь на замкнутом множестве в Ω^* меры нуль. Это множество есть объединение конечного числа аналитических кривых на Ω^*, образованных проекцией на Ω^* точек пересечений графиков различных $E_n(k) \in [A, B]$ (вне пересечений имеющих кратность единица).

О ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФУРЬЕ ФИЛЬТРА В ФУНКЦИОНАЛЬНО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ[1]

Чушкин В.А., Разгулин А.В. (Москва)

E-mail chushkin@ccas.ru, razgulin@cs.msu.su

Рассмотрим ограниченные, выпуклые области $\Omega \subset R^2$ с кусочно гладкой границей и введем обозначения: $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$. Пусть $\mathcal{F}_\rho(A)$ – оператор Фурье-фильтрации, изменяющий ряд Фурье комплекснозначной функции $A(x,y)$ по ортонормированному в H базису $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ собственных функций задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}u \equiv u - D(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u)$ в области Ω с помощью дискретного фильтра-мультипликатора $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots) \in \ell_\infty$ по правилу

$$\mathcal{F}_\rho(A)(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \langle A, e_n \rangle_H e_n(x,y).$$

Обозначим $A_{fb}(u) = \mathcal{F}_\rho(A_{in} \exp\{iu\})$ и для функции $u(x,y,t;\rho)$ поставим начально-краевую задачу:

$$\tau \partial_t u + \mathcal{L}u = K_1 |A_{in}|^2 + K_2 Re(A_{in}^* A_{fb}(u)) + K_3 |A_{fb}(u)|^2, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x,y), \; u|_\Sigma = 0. \quad (2)$$

Здесь $(x,y,t) \in \Omega \times [0,T]$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0,T]$, $\partial\Omega$ – граница Ω, $\tau > 0$, $D > 0$. Такие задачи возникают при описании динамики фазовой модуляции $u(x,y,t)$ световой волны в оптических системах обратной связи с управляемым блоком Фурье-фильтрации.

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in H$, $A_{in} \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Тогда задача (1)-(2) при любом $T > 0$ для любого фильтра $\rho \in \ell_\infty$ имеет единственное решение $u \in L^2(0,T;V)$, $\partial_t u \in L^2(0,T;V^*)$.*

Фиксируем $\forall \rho^* \in \ell_\infty, u_1 \in H$ и поставим задачу оптимизации:

$$\mathcal{J}(\rho) = \|u(T;\rho^* + \rho) - u_1\|_H^2 \to \inf_{B_R}, B_R = \{\rho \in \ell_2 : \|\rho\|_{\ell_2} \leqslant R\}. \quad (3)$$

Теорема 2. *Пусть все собственные функции $e_n(x,y)$ равномерно по n ограничены в метрике $C(\overline{\Omega})$. Тогда $\forall \rho^* \in \ell_\infty$ и $\forall u_1 \in H$ множество оптимальных управлений задачи (3) непусто и слабо компактно. Функционал $\mathcal{J}(\rho)$ дифференцируем по Фреше на ℓ_2.*

Полученная формула градиента функционала $\mathcal{J}(\rho)$ используется при численном решении задачи оптимизации (3).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 01-01-00639) и AFOSR (грант CRDF RP0-1391-MO-03).

ОСОБЕННОСТИ ФИКСАЦИИ МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ УЧЕБНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КУРСОВ В МАТЕРИАЛАХ УЧЕБНИКА

Шабанова М.В. (Архангельск)
E-mail shabanova.maria@pomorsu.ru

Различные структурные компоненты содержания образования в учебнике фиксируются по-разному, при этом способ фиксации определяется их природой.

Методологическая составляющая учебных курсов (в том числе и математических) традиционно представлялась в виде относительно самостоятельных учебных текстов по методологическим вопросам науки (исторических справок, этимологических сведений, примечаний о практической и научной значимости математических положений, указаний по работе с задачей и т.п.). Однако полученные нами данные о роли и месте методологической составляющей в структуре учебных курсов и закономерностях естественного развития методологических знаний ставят под сомнение эффективность такого способа фиксации.

Работы Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчина, Л.Д. Кудрявцева, В.И. Арнольда и др., посвященные вопросам включения в содержание математического образования учащихся и студентов знаний о специфике математической деятельности, позволили нам прийти к выводу, что задачу отражения методологических знаний в структуре учебных текстов следует понимать как задачу преобразования методологического "подтекста" в "метатекст".

Данные литературоведческих исследований показывают, что эта задача может быть решена за счет выделения в учебном тексте методологического плана, выполняющего сюжетную функцию. Методологический план учебного курса представляет собой описание познавательной деятельности героя- действователя. Персонализированное изложение учебного материала в учебнике является необходимым условием вскрытия методологических оснований деятельности, а также их критической оценки учащимися. Сюжетное построение учебных математических текстов приводит также к изменению роли и места задачного материала в учебнике. Задачи становятся не только средством осмысления теоретических положений, формирования умений и навыков, но средством передачи учащимся ролевых функций персонажей, входящих в описание сюжетного плана, что создает благоприятные условия целенаправленного развития их методологических знаний.

ЭКСПОНЕНТА ОПЕРАТОРА ДИРАКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО МЕРЕ ПУАССОНА–МАСЛОВА

Шамаров Н.Н. (Москва)
E-mail nshamarov@yandex.ru

Для представления решения (квантового) уравнения Шредингера В.П. Масловым [1] построена комплексно-значная счётно-аддитивная мера — аналог распределения пуассоновского процесса на пространстве кусочно-постоянных траекторий в импульсном пространстве соответствующей классической системы. Преобразование Фурье этой меры совпадает с множителем в формуле для представления решения уравнения Шредингера (интегралом по (псевдо-) мере Фейнмана на пространстве траекторий) в конфигурационном пространстве классической системы. С другой стороны, экспоненциальный множитель в формуле Маслова для решения уравнения Шредингера является (с точностью до сдвига) преобразованием Фурье псевдомеры Фейнмана. Для электронного уравнения Дирака исторически первыми появились формулы для импульсного представления, использующие счётно-аддитивные функциональные распределения типа меры Пуассона–Маслова, но с некоммутирующими (матричными) значениями. Автором было недавно [2] доказано, что эти функциональные распределения порождены матрично-значными переходными мерами (то есть функциями двух аргументов — точки и множества) так же, как порождаются распределения марковских процессов системой переходных вероятностных мер (заданных на пространстве значений процесса).

Операторы (свёртки), отвечающие этим переходным мерам, а также эволюционные операторы (Грина), разрешающие для уравнения Шредингера в конфигурационном пространстве, являются прямыми аналогами псевдодифференциальных операторов. В докладе строятся обобщенные переходные меры и определяются отвечающие им аналоги псевдодифференциальных операторов Грина для решения уравнения Дирака в конфигурационном пространстве.

Литература

1.Маслов В.П.: Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1976.

2. Shamarov N.N.: Matrix-Valued Cylindrical Measures of Markov Type and Their Fourier Transforms // Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 10, No. 3, 2003, pp. 1–16.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ИНВАРИАНТНОСТИ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА[1]

Шананин Н.А. (Москва)

E-mail nshananin@sci.pfu.edu.ru

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ - открытое множество с координатами $(t, x_1, \ldots, x_n)$, $\mathcal{B}(\Omega)$ - линейное пространство, состоящее из векторнозначных функций $(v(t,x), p(t,x)) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega) \otimes \mathbb{R}^{n+1}$, у которых $\partial_{x_l} v_j(t,x)$ и $\partial_{x_l} p(t,x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $j, l = 1, \ldots, n$. Говорят, что *отображение* $\varkappa : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{B}(\Omega_2)$ *сохраняет решения* системы типа Навье-Стокса

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t v_l + \sum_{j=1}^n v_j \partial_{x_j} v_l - \nu \Delta v_l + \partial_{x_l} p & = & f_l(t,x,v) + a_l(t,x) p, \\ & & l = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} v_j & = & g(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

если $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subseteq \Omega$ и образ $\varkappa((v,p))$ любого решения $(v,p) \in \mathcal{B}(\Omega_1)$, определенного на Ω_1, является решением на Ω_2. Говорят, что росток функции $(v,p) \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ в точке $(t^0, x^0) \in \Omega_1$ *$\varkappa$-инвариантен*, если $(t^0, x^0) \in \Omega_2$ и $\varkappa((v,p))(t,x) = (v,p)(t,x)$ в некоторой окрестности (t^0, x^0).

Предположим, что функции $f_l(t,x,v)$ определены для почти всех $(t,x) \in \Omega$ и всех $v \in \mathbb{R}^n$, обладают свойством Каратеодори, локально липшицевы по v для почти всех (t,x) и $f(t,x,0) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Кроме того, функции g и a_l вместе с их первыми производными по переменным x принадлежат $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Теорема. *Предположим, что отображение $\varkappa : \mathcal{B}(\Omega_1) \to \mathcal{B}(\Omega_2)$ сохраняет решения системы (1) и росток решения $(v,p) \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ $\varkappa$-инвариантен в точке $(t^0, x^0) \in \Omega_1$. Тогда ростки этого решения $\varkappa$-инвариантны во всех точках связной компоненты слоя $\{t = t^0\} \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$, содержащей (t^0, x^0).*

Литература

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 020112-2-693.

[1] Shananin N.A. On Partial Quasi-Analyticity of the Set of Solutions of a set of Navier-Stokes-Type Equations. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 110, No. 2, 2002, 2467-2475.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СТЕПЕНИ ПЯТЬ

Шананина Е.Н. (Москва)
E-mail serpent@comail.ru

Пусть M — росток CR−многообразия типа (n, K), $(K = k_2 + k_3 + k_4 + k$, $k_2 = n^2$, $k_3 = n^2(n+1)$, $k_4 = n^2(n+1)(7n+11)/12$, $k_5 = n^2(n+1)(n+2)(3n+5)$, $k \leqslant k_5 + k_2k_3)$, с некоторыми простыми условиями невырожденности; построим к нему касательную модельную поверхность, аналогичную квадрике.

Теорема. *Невырожденная модельная поверхность пятой степени типа (n, K) является "хорошей"модельной поверхностью, а именно:*

1) группа автоморфизмов невырожденной модели конечномерна;

2) всякому невырожденному порождающему ростку (или, что то же самое, ростку типа $(l_1, l_2, \ldots, l_K)$ по Блуму-Грэхму, где $l_j = 2$ при $j = 1, \ldots, k_2$, $l_j = 3$ при $j = k_2+1, \ldots, k_2+k_3$, $l_j = 4$ при $j = k_2+k_3+1, \ldots, k_2+k_3+k_4$, $l_j = 5$ при $j = k_2+k_3+k_4+1, \ldots, k_2+k_3+k_4+k = K$) соответствует касательная модельная поверность пятой степени;

3) группа автоморфизмов невырожденной модельной поверхности транзитивна;

4) алгебра инфинитезимальных автоморфизмов невырожденной модельной поверхности состоит из полей с полиномиальными коэффициентами, чья степень не превышает $k+5$;

5) группа ее автоморфизмов есть подгруппа группы бирациональных преобразований объемлющего пространства. Оценка на степени числителей и знаменателей зависит от n, K;

6) невырожденная модельная поверхность обладает экстремальным свойством: размерность группы голоморфных автоморфизмов произвольной поверхности не превосходит размерности группы голоморфных автоморфизмов ее касательной модельной поверхности;

7) если модельные поверхности биголоморфно эквивалентны, то они линейно эквивалентны;

8) на модельной поверхности существует естественная структура группы Ли.

Литература

[1] Шананина Е. Н., *Полиномиальные модели степени 5 и алгебры их автоморфизмов,* выйдет в журнале Мат. Заметки в 2004 году.

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Шелковой А.Н. (Курск)

Рассматриваются интегро – дифференциальные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$, задаваемые выражениями

$$\mathcal{L}x = -\ddot{x} - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{2}$$

а также

$$\mathcal{L}y = -\ddot{y} - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \tag{3}$$

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = \int\limits_0^1 a_0(t)y(t)dt, \quad y(1) = \int\limits_0^1 a_1(t)y(t)dt. \tag{4}$$

Здесь $a_0(t)$ и $a_1(t)$ – функции из $L_2[0;1]$.

Исследуются случай вырожденного ядра $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(t)q_i(s)$, $p_i(t)$, $q_i(s)$, $i = \overline{1,k}$, принадлежат $L_2[0;1]$, и более общий случай, когда ядро $K(t,s)$ принадлежит гильбертову пространству $L_2([0;1] \times [0;1])$.

Методом подобных операторов получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этих операторов.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Шишкин А.Б. (Армавир)
E-mail Shishkin-home@mail.ru

Пусть $H = H(G)$ — пространство голоморфных функций в выпуклой области G, π — конечная система многочленов $\pi_1, ..., \pi_q$, $\pi(D)$ — соответствующая система дифференциальных операторов. Замкнутое подпространства $W \subseteq H$ называем $\pi(D)$-инвариантным, если оно инвариантно относительно любого из операторов системы $\pi(D)$. $\pi(D)$-инвариантное подпространство $W \subseteq H$ *допускает спектральный синтез*, если любой его элемент можно аппроксимировать в топологии H экспоненциальными полиномами, лежащими в W. Рассмотрим сильное сопряженное пространство H^*, P — интерпретация этого пространства в терминах преобразований Лапласа T. Рассматриваем P как модуль над кольцом многочленов $\mathbf{C}[\pi] = \mathbf{C}[\pi_1, ..., \pi_q]$. Пусть W — $\pi(D)$-инвариантное подпространство H. Попространство $I = T(W^0) \subseteq P$, где W^0 — аннулятор W в H^*, обладает структурой подмодуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ и называется его *аннуляторным* $\mathbf{C}[\pi]$-*подмодулем*. Обозначим $\Theta(G)$ — множество направлений звездности области G, m — наибольший общий делитель степеней многочленов $\pi_1, ..., \pi_q$, ω — оператор поворота комплексной плоскости на угол $\frac{2\pi}{m}$.

Теорема. *Пусть для некоторого целого числа n, $0 \leqslant n < m$, выполняется условие $\bigcap\limits_{k=0}^{n} \Theta(\omega^k \Omega) \neq \emptyset$. Если ранг аннуляторного подмодуля $I \subseteq P$ замкнутого $\pi(D)$-инвариантного подпространства $W \subseteq H$ не превосходит $n + 1$, то подпространство W допускает спектральный синтез.*

Выпуклая область G называется $\pi(D)$-*универсальной*, если любое $\pi(D)$-инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез. Из приведенной теоремы вытекает исчерпывающее описание универсальных областей.

Если $m = 1$, то к $\pi(D)$-универсальным областям относятся лишь выпуклые неограниченные области. Если $m = 2$, то к $\pi(D)$-универсальным областям относятся лишь плоскость, полуплоскость и прямолинейная полоса. Если $m \geqslant 3$, то $\pi(D)$-универсальной областью является лишь плоскость.

Точность описания достигается построением соответствующих контрпримеров.

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ КИПРИЯНОВА О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИИ r^λ НА ВЕСОВЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Шишкина Э.Л., Ляхов Л.Н. (Воронеж)

E-mail ilina_dico@mail.ru

Пусть R_n^+ часть евклидова пространства $R_N=\{x=(x',x''), x'=(x_1,\dots,x_n), x''=(x_{n+1}\dots,x_N)\}$, определенная неравенствами $x_1>0,\dots,x_n>0$. Рассмотрим многомерный оператор Пуассона $\mathcal{P}_{x'}^\gamma$, действие которого на интерируемые функции четные по каждой из первых n переменных определяется по формуле

$$(\mathcal{P}_{x'}^\gamma f)(x)=C(\gamma)\int_0^\pi\dots\int_0^\pi f(x_1\cos\alpha_1,\dots,x_n\cos\alpha_n,x'')\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}d\alpha_i,$$

где $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ — мультииндекс длиной $|\gamma|=\gamma_1+\dots+\gamma_n$, состоящий из положительных чисел, $C(\gamma)=\frac{1}{\pi^{n/2}}\prod\limits_{i=1}^n\frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma_i}{2})}$.

Пусть $Re\lambda>-1$. Справедливы следующие формулы:

$$\frac{1}{|S_n^+(1)|_\gamma}\int\limits_{S_n^+(1)}\mathcal{P}|\langle\Theta,\xi\rangle|^\lambda\,\Theta_n^\gamma\,dS(\Theta)=C(\gamma)\frac{\Gamma(\frac{n+|\gamma|}{2})\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+|\gamma|+\lambda+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\,|\xi|^\lambda,$$

$$\frac{1}{|S_n^+(1)|_\gamma}\int\limits_{S_n^+(1)}\mathcal{P}\left[|\langle\Theta,\xi\rangle|^\lambda\ln|\langle\Theta,\xi\rangle|\right]\,\Theta_n^\gamma\,dS(\Theta)=$$

$$=C(\gamma)\frac{\Gamma(\frac{n+|\gamma|}{2})\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+|\gamma|+\lambda+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\,|\xi|^\lambda\,(\ln|\xi|+c_{n,\gamma,\lambda}),$$

дающие разложение функции $r^\lambda=|xi|^\lambda$ на весовые плоские волны. Эти формулы для случая $n=1$ ранее получены в [1].

Литература

[1] Киприянов И. А. "Сингулярные эллиптические краевые задачи."М.: Наука, 1996

МАТРИЧНО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ РИККАТИ[1]

Щекунских С.С. (Воронеж)

Рассматривается периодическая задача для матрично сингулярно возмущенного уравнения Риккати вида

$$(A'+\varepsilon B')\frac{dK(t,\varepsilon)}{dt}=-K'(t,\varepsilon)C(t)-C'(t)K(t,\varepsilon)+$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00351).

$$+K'(t,\varepsilon)\,S(t)\,K(t,\varepsilon)-W(t)\,, \tag{1}$$

$$(A+\varepsilon B)'K(t,\varepsilon)=K'(t,\varepsilon)(A+\varepsilon B), K(0,\varepsilon)=K(T,\varepsilon). \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon>0$ малый параметр; $t\in[0,T]$; A,B, $C(t)$, $W(t)$, $K(t,\varepsilon)$, $S(t)=D(t)R^{-1}(t)D'(t)\in L(X)$; $D(t)\in L(U,X)$; $R(t)\in L(U)$, операторы $C(t)$, $D(t)$, $R(t)$, $W(t)$ непрерывно дифференцируемы; $R(t)=R'(t)>0$, $W(t)=W'(t)\geqslant 0$; оператор A вырожден; $A+\varepsilon B$ обратим при достаточно малых $\varepsilon\neq 0$; все B-жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину p. Все коэффициенты в уравнении предполагаются T- периодическими функциями.

Асимптотика решения задачи (1) - (2) ищется в виде

$$K(t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{q}\varepsilon^j K_j(t)+R_qK(t,\varepsilon). \tag{3}$$

Предполагается, что функции в разложении (3) непрерывно дифференцируемы, а остаточный член $R_qK\,(t,\varepsilon)$ имеет оценки

$$\left\|R_q^iK\,(t,\varepsilon)\right\|\leqslant c\varepsilon^{q+1-ip},\quad i=0,\,1.$$

Исследована разрешимость задачи при $\varepsilon=0$ путем сведения уравнения (1) к стандартным в теории оптимального управления алгебраическому и дифференциальному, разрешенному относительно производной, операторным уравнениям типа Риккати, обоснована однозначная разрешимость получаемых периодических задач, приведен алгоритм построения остальных членов асимптотики, получена оценка остаточного члена асимптотического разложения (3). Доказано, что при $\varepsilon\to 0$ решение $K(t,\varepsilon)$ возмущенной задачи стремится к решению вырожденной задачи по норме $C[0,T]$.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ (u,v)-ПРОИЗВОДНОЙ

Щербин В.М. (ВГУ)

Определение 1. Отображение $f:X\to Y$ X и Y K-пр-ва (u,v)-дифференцируемо в т.$x=a$, если выполняется следующее условие: существует такое линейное непрерывное отображение $g:X\to Y$,что $f(x)-f(a)-g(x-a)=0(\varepsilon_n)$, это означает $\frac{f(x)-f(a)-g(x)}{\varepsilon_n}\to 0$ при $\varepsilon_n\to 0$ с регулятором сходимости $V\in Y^+$ $\forall x:\{x\in X: |x_n-a|\leqslant\varepsilon_n*u\}$

Замечание. В дальнейшем, если не будет сделано оговорки, мы будем понимать непрерывность в смысле r-сходимости.

Если выполняется условие (1), то отображение g называется производной отображения f в точке $x = a$ и обозначается $f'(a) = g$. Определенную таким образом производную будем называть относительно равномерной производной или (u, v)-производной. Относительно терминологии K-пространств см. [1].

Можно показать, что для произвольно заданного отображения $f : X \to Y$ на компоненте X_u существует не более одного такого линейного отображения $g : X \to Y$; $g = f'(a)$, предполагая, что она равна нулю на X_u^d.

Пример1. Пусть $f : X \to Y$, где $X = R_1$, Y-K-пространство; $f - (1, v)$-дифференцируемо на R_1. Тогда f является функцией действительного переменного x. В этом случае мы получаем $f'(a) = g_a$.

Если отображение f и $g : X \to Y$ (u, v) дифференцируемо в точке $x = a$, то (u, v)-производное обладает свойством линейности и $f \to f'(a)$; $f'(a) \in L(X, Y))$.

Предложение 1. Если отображение $f : X \to Y$ (u, v)-дифференцируемо в точке $x = a$ и $\overline{u} = \alpha u$, $\alpha > 0$, тогда $f(\overline{u}, v)$-дифференцируемо в точке $x = a$.

Предложение 2. Если отображение $f : X \to Y$ (u, v)-дифференцируемо в точке $x = a$ и $u' \leqslant u$, то отображение $f(u'; v)$-дифференцируемо в точке $x = a$.

Предложение 3. Если отображение $f : X \to Y$ (u', v) и (u'', v) дифференцируемо на нормальном множестве $M \ni a$ и кроме того $f'(x)$ r-непрерывно в точке $x = a$, то отображение $f(u, w)$-дифференцируемо в точке $x = a$, где $u = \sup(u', u'')$.

Литература

1. Б.З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Гостех из-во, 1960.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПУАССОНОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Строева Л.Н.

В данной работе получена формула для математического ожидания решения задачи переноса для пуассоновского случайного процесса.

Постановка задачи. Рассмотрим начальную задачу для линейного дифференциального уравнения первого порядка в частных производных со случайными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \tag{2}$$

где $t \in [t_0, t_1] = T \subset \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon : T \to \mathbf{R}$, $f : T \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – случайные процессы, $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – случайный процесс, независимый с процессами ε, f.

Случайные процессы ε и f заданы характеристическим функционалом $\varphi(v(\cdot), w(\cdot))$

$$\varphi(v(\cdot), w(\cdot)) = Me(v(\cdot), w(\cdot)), \tag{3}$$

$v \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbf{R})$, где $L_1(T)$ – пространство суммируемых на отрезке T функций. $L_1(T \times \mathbf{R})$ – пространство суммируемых на множестве $T \times \mathbf{R}$ функций.

Теорема. *Пусть $v \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbf{R})$ и существуют вариационные производные*

$$\frac{\delta\varphi(v,w)}{\delta v(t)}, \frac{\delta^2\varphi(v,w)}{\delta v(t)\delta w(t,x)},$$

Случайный процесс ε имеет распределение Пуассона. тогда математическое ожидание решения задачи (1)-(2), в обобщенном смысле, имеет вид

$$Mu(t,x) =$$

$$= \frac{Mu_0(x)}{exp(\nu t)} * F_\xi^{-1}[exp(\nu \int_0^t M(exp(-iq\xi \int_{\max\{t_1,t_0\}}^t g(\tau - t_1)d\tau))dt_1] +$$

$$+ \int_{t_0}^t \frac{1}{exp(\nu s)} F_\xi^{-1}[exp(\nu \int_0^s M(exp(-iq\xi\times$$

$$\times \int_{\max\{t_1,t_0\}}^s g(\tau - t_1)d\tau)dt_1)] * Mf(s,x)ds,$$

где $*$ – свертка по переменной x.

Литература.

1. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайнонеоднородных средах. М., Наука, 1980. – 333 с.

2. Задорожний В.Г., Строева Л.Н. О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами // Дифференциальные уравнения, 2000, т.36, N3, – С.377-385.

НЕЛОКАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ГРАФА-ЗВЕЗДЫ И ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ[1]

Гаршин С.В. (Воронеж)
E-mail ankaletters@mail.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 V^i}{\partial\xi\partial\eta}+a(\xi,\eta)\frac{\partial V^i}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\frac{\partial V^i}{\partial\eta}+c(\xi,\eta)V^i = F(\xi,\eta),\ \ \xi+\eta>0, i=\overline{1,3}, \tag{1}$$

с условиями трансмиссии

$$\sum_{i=1}^{3}(V^i_\xi + V^i_\eta) = 0, \quad V^1(\xi,-\xi) = V^2(\xi,-\xi) = V^3(\xi,-\xi) \tag{2}$$

К задаче (1)-(2) приводит рассмотрение волнового уравнения на графе-звезде (понимаемого как и в (1)), только с непостоянными коэффициентами, принимающими одинаковые значения в точках, равноудаленных от узла графа. Зафиксируем точки (ξ_0,η_0), (ξ_0,η_1), $(-\eta_0,\eta_0)$, $(-\eta_0,\eta_1)$, предполагая, что $\eta_0<\eta_1$ и $\xi_0+\eta_0>0$. Зададим

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 02-01-00307 и 04-01-00049), гранта президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1, программы "Университеты России" (проект УР.04.01.004), минобразования РФ (КЦ СПбГУ)(грант № Е02-1.0-46)

краевые условия

$$\left\{\begin{array}{ll} V^1(\xi_0,\eta)=\psi^1(\eta), & \eta_0\leqslant\eta<\eta_1 \\ V^1(\xi,\eta_0)=\psi^2(\eta), & -\eta_0\leqslant\xi<\xi_0 \\ V^2(-\eta_0,\eta)=\gamma(\eta), & \eta_0\leqslant\eta<\eta_1 \\ V^3(-\eta_0,\eta)=\theta(\eta), & \eta_0\leqslant\eta<\eta_1 \\ \psi^1(\eta_0)=\psi^2(\xi_0) & \\ \psi^2(-\eta_0)=\gamma(\eta_0)=\theta(\eta_0) & \end{array}\right. , \tag{3}$$

предполагая, функцию $V^1(\xi,\eta)$ определенной на $\Omega_1 = \{(\xi,\eta)\mid\ \eta_0\leqslant\eta<\eta_1, -\eta\leqslant\xi<\xi_0\}$, а функции $V^2(\xi,\eta)$ и $V^3(\xi,\eta)$ — на $\Omega_2 = \{(\xi,\eta)\mid\ \eta_0\leqslant\eta<\eta_1, -\eta\leqslant\xi<-\eta_0\}$

Теорема. Задача (1)-(3) однозначна разрешима в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$2(\theta'(\eta_0)+\gamma'(\eta_0)) = -3(\psi^2)'(-\eta_0)+$$
$$+\int\limits_{\xi_0}^{-\eta_0}\left(\exp\int\limits_{\xi_0}^{s} b(t,\eta_0)\,dt\right)\left[F(s,\eta_0)-a(s,\eta_0)(\psi^2)'(s)-c(s,\eta_0)\psi^2(s)\right]ds+$$
$$+(\psi^1)'(\eta_0)\exp\left[-\int\limits_{\xi_0}^{-\eta_0} b(s,\eta_0)\,ds\right]$$

Литература

1. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети // Докл. РАН. - 2003. - Т. 388, № 1. - С. 16-18.

ОЦЕНКА ЯДЕРНОЙ НОРМЫ РАЗНОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛУГРУПП

Бобров А.Н. (Москва)

Пусть $A = A^*$ — самосопряженный дискретный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. B — самосопряженный оператор в H такой, что оператор $BA^{-\delta}$ при некотором $\delta > 0$ продолжается до ограниченного.

Рассмотрим полугруппы $e^{-t(A+B)}$ и e^{-tA} при $t > 0$. Исследуем ряд теории возмущений (здесь $t_0 = t$)

$$e^{-t(A+B)} = e^{-tA}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{k-1}} e^{-(t-t_1)A}B\dots Be^{-t_kA}\,dt_k\dots dt_1, \tag{1}$$

сходящийся по операторной норме. В случае $\lambda_n \sim C n^{1/\alpha}$ доказывается оценка ядерной нормы остаточного члена в (1)

$$\begin{aligned}&\left\| \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-(t-t_1)A} B \dots B e^{-t_k A}\, dt_k \dots dt_1 \right\|_1 \leqslant \\ &\leqslant M^k \frac{\Gamma^k(1-\delta-\frac{\alpha}{k+1})\Gamma(1-\frac{\alpha}{k+1})}{k^{\alpha+k\delta}\Gamma(k+1-k(\delta+\frac{\alpha}{k+1}))} t^{k(1-\delta)-\alpha}.\end{aligned} \tag{2}$$

Оценка (2) показывает, что при сделанных предположениях ряд теории возмущений сходится при $t > 0$, причем равномерно при $t \in [a, b] \subset (0, +\infty)$. Откуда при дополнительных предположениях можно получить асимптотическое разложение следа возмущенной операторной полугруппы

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} e^{-t(A+B)} = \operatorname{Tr} e^{-tA} + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \operatorname{Tr} \int_0^t \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-(t-t_1)A} B \dots \\ \dots B e^{-t_k A}\, dt_k \dots dt_1 + \mathrm{O}\left(t^{N(1-\delta)-\alpha}\right)\end{aligned}$$

при $t \to +0$.

Основным результатом является следующая

Theorem 1 *Если $0 \leqslant \delta < 1/2$ и $1 - 2\delta > \alpha$, то верна формула регуляризованного следа*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n - (B\varphi_n, \varphi_n))\, e^{-\lambda_n t} = 0,$$

где μ_n и λ_n — собственные значения операторов $A + B$ и A соответственно, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис из собственных векторов невозмущенного оператора A.

Именной указатель

Материалы Воронежской весенней математической школы
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XV"

Современные методы теории краевых задач

ЛР ИД № 00437 от 10.11.99. Подписано в печать 15.04.04
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Объем 15,75 п.л.
Тираж 250. Заказ 279.

Отпечатано с готового оригинала-макета в лаборатории оперативной полиграфии ВГУ
394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1