$\int f\, d\sigma$

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-XIII"

$$dx = dF$$

(3-9 мая 2002 г.)

Воронеж

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ РАН
им. В.А. СТЕКЛОВА

"СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ"

Материалы
Воронежской весенней математической школы
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XIII"

(3–9 мая 2002 г.)

Воронеж — 2002

УДК 517.94 (92;054;97)
"Понтрягинские чтения — XIII". Сборник материалов — Воронеж, ВГУ, 2002. — 168 с.

В сборнике представлены статьи ученых, выступивших с лекциями на Воронежской весенней математической школе, проведенной Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом РАН им. В.А. Стеклова и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики.

Оргкомитет: Ильин В.А. - председатель, Борисов И.И. - сопредседатель, Покорный Ю.В. - зам. председателя, Звягин В.Г. - зам. председателя, Костин В.А. - зам. председателя.

Члены оргкомитета: Антипов С.А., Бобылев Н.А., Овчинников В.И., Потапов А.С., Репников В.Д., Розов Н.Х., Савинков Ю.А., Сапронов Ю.И., Сысоев В.В., Провоторов В.В. - ученый секретарь.

Программный комитет: Ильин В.А. - председатель, Осипов Ю.С. Мищенко Е.Ф. - сопредседатель, Емельянов С.В. - сопредседатель, Покорный Ю.В. - зам. председателя, Звягин В.Г. - зам. председателя, Боровских А.В. - ученый секретарь.

Оргкомитет благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований

ISBN 5-7458-0738-7

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абдурагимов Г.Э. (Махачкала)

Рассматривается краевая задача

$$Lx \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{2}$$

где $p(t)$ — неотрицательная непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция, $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ $(t \in [0,1]$, $-\infty < u < \infty)$ неотрицательна в полосе $[0,1] \times [0,\infty)$ и удовлетворяет условию Каратеодори, причем $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Ниже предполагается, что $[0,1]$ является промежутком неосцилляции для оператора L. Как известно [1], в этом смысле существует функция Грина $G(t,s)$ оператора L при краевых условиях (2).

Обозначим через K — конус неотрицательных выпуклых вверх функций $x(t)$ пространства C, обращающихся на концах отрезка $[0,1]$ в нуль. Пусть $v^*(t) = \alpha t(1-t)$ $(\alpha > 0, t \in [0,1])$. Очевидно, $v^* \in K$. Положим $K(v^*) = \{x : x \in K, x \geq \|x\| v^*\}$.

Теорема 1. Предположим, что $T : C \to L_p$ — положительный (монотонный) на конусе $K(v^*)$ оператор и выполнено условие:

$$a(t)\varphi(u) \leq f(t,u) \leq bu^{p/q} \quad (t \in [0,1],\ u \geq 0,\ q \in (1,\infty), p > q)$$

где $a(t)$ — неотрицательная ($a(t) \not\equiv 0$) суммируемая на отрезке $[0,1]$ функция, b — некоторое число, $\varphi(u)$ — неотрицательная неубывающая функция, такая, что $u^{-1}\varphi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$.

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Следует заметить, что близкий теореме 1 результат был ранее получен М. А. Красносельским, и Ю. В. Покорным [2].

Литература

1. Ю. В. Покорный. О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи. // Математические заметки, т. 4, №5(1968), с. 533–540.

2. М. А. Красносельский, Ю. В. Покорный. Ненулевые решения уравнений с сильными нелинейностями // Математические заметки, т. 5, №2(1969), с. 253–260.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ФДУ)[1]

Алвеш М.Ж. (Мапуту, Мозамбик), Симонов П.М. (Пермь)
mjalves@tvcabo.co.mz, simonov@prognoz.ru

Выделен класс сингулярных ФДУ второго порядка, на который удалось распространить утверждения типа теоремы Валле–Пуссена. Эта теорема позволила получить для таких уравнений новые эффективные условия однозначной разрешимости и знакоопределенности функций Грина линейных краевых задач. На основе этого подхода оказалось возможным доказать новые утверждения типа теоремы Нагумо о существовании и единственности решений краевых задач для квазилинейных сингулярных ФДУ второго порядка. В качестве следствия были получены известные и новые признаки разрешимости возникающих в приложениях сингулярных краевых задач. Была рассмотрена задача, описывающая процессы, происходящие в химическом реакторе с цилиндрической симметрией по закону Аррениуса. Этой задаче и ее модификациям посвящен большой цикл работ американских математиков (S.V.Parter, M.L.Stein, P.R.Stein). В первых работах этих авторов использовались численные методы (например, метод Рунге–Кутта) нахождения решений задачи. Далее, на основе идеи и результатов А.М.Красносельского и В.Я.Стеценко эти авторы доказали теоремы о существовании нескольких решений такой задачи. Нами были найдены условия, при выполнении которых решение задачи существует и единственно. Найдены также условия, когда задача имеет по крайней мере два решения. Далее, указаны условия существования и единственности решения краевой задачи для уравнения Фёппля-Хенки (C.A.Stuart), которое описывает процессы, возникающие в нелинейной теории упругости. Аналогичный результат в пространстве гладких функций был получен ранее другим путем в работе C.A.Stuart. Нами найдены условия существования и единственности решения краевой задачи, возникающей при изучении оболочек вращения (Л.С.Срубщик, Г.П.Гризанс). Эти результаты являются новыми и непосредственно не следуют из результатов статей Г.П.Гризанса.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Алданов Е.С. (Актобе, Казахстан)
kopshaev@e-mail.ru

Рассмотрим задачу

$$Lu \equiv -\Delta u + u|u| = f(x,t),\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, а $\partial\Omega$ - граница этой области. Задачу (1), будем изучать в $L_2(\Omega)$. Испоользуя [1], строим вспомогательную задачу

$$-\Delta u + u = v,\ u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (01-01-00511) и Программы "Университеты России" (УР.04.01.001, УР.03.01.023)

Решение задачи (2) выражается в виде [1]:

$$u = Av = \int_0^1 d\eta \int_0^1 G(x, y, \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi,$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ - функция Грина задачи (2). Тогда задачу (1) можно записать в виде: $Mv \equiv L(Av) \equiv Av|Av| - Av + v = f(x, y)$.

Построим и минимизируем функционал:

$$J(w_n) = \int_0^1 ds \int_0^1 |Mw_n - f|^2 dy.$$

Теорема Пусть выполнены предположения П2 - П4 работы [1]. Определим последовательность по реккурентным формулам

$$w_{n+1} = w_n + \varepsilon w, w = -B_1^*(w_n)(Mw_n - f),\ n = 0, 1, 2, ...,$$

где $\varepsilon > 0$, $w_0 = const$.

Тогда существует $\delta = (0, 1)$ зависящее только от w_0, такие, что w_n при $n \to \infty$ стремится к решению уравнения $Mw_n = f$ и справедливы оценки

$$J_n = ||Mw_n - f||^2 \leq J(w_0)\delta^{2n},$$

$$||w_n - w|| \leq C\delta^n,\ n = 0, 1, 2, ...$$

где $C - const$, зависящая от w_0 и f.

Полученные результаты подтверждены численными расчетами.

Литература

1. *А.Т. Мухамбетжанов, М.О. Отельбаев, Ш.С. Смагулов* Об одном методе фиктивной области для нелинейных краевых задач. Вычислительные технологии. г. Новосибирск, т.3, 4, 1998, С.41-64.

УБЫВАНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА R^n

Астахов А.Т. (Воронеж)

В настоящей статье доказаны:

Теорема 1. *Если гармоническая функция $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ задана на однополостном гиперболоиде*

$$x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \leq \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) x_1^2 + 1,\ \ x_1 > 0,$$

пространства R^n, непрерывна вплоть до его границ и выполняется условие

$$|u(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq Me^{-\varepsilon\|x\|^\alpha},$$

$$\alpha > 1,\ \varepsilon > 0,\ \ \|x\| \to \infty,\ \ M = \text{const} > 0,$$

тогда $u(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$.

Теорема 2. *Если полигармоническая функция $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ задана на однополостном гиперболоиде*

$$x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \leq \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) x_1^2 + 1,\ \ x_1 > 0,$$

пространства R^n, непрерывна вплоть до его границ и выполняются условия:

$$|u(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq Me^{-\varepsilon \|x\|^\alpha},$$

$$|\Delta^j u(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq Me^{-\varepsilon \|x\|^\alpha}, \; j = 1, \ldots, m-1,$$
$$\alpha > 1, \; \varepsilon > 0, \; \|x\| \to \infty, \quad M = \text{const} > 0,$$

где m — порядок полигармонической функции. $\Delta^j u(x_1, x_2, ..., x_n)$ при каждом значении j являются непрерывными функциями вплоть до границ однополостного гиперболоида. Тогда $u(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$.

Методы доказательства применимы к вопросам об убывании полигармонической функции в телах вращения пространства R^n. При некоторых довольно естественных предположениях на тело вращения характер убывания полигармонической функции будет такой же как и в плоском случае.

Автор благодарен проф. В.З. Мешкову за внимание к работе.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА - ФАУЛЕРА С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

Асташова И.В. (Москва)
ast@mail.ecfor.rssi.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) = p(x)|y(x)|^{-m} y(x), \tag{1}$$

где $0 < m < 1$, а $p(x)$ — заданная на прямой непрерывная положительная функция, имеющая ненулевые пределы при $x \to \pm\infty$.

Для любого n доказано существование в произвольной точке a решения с асимптотикой $y(x) = \pm C(x-a)^\beta (1 + o(1))$, $\quad x \to a + 0$, где

$$\beta = n/m, \qquad C = \left(\frac{p(a)}{\beta(\beta - 1) \ldots (\beta - n + 1)} \right)^{1/m}. \tag{2}$$

Теорема. *При $n = 3$ у любого не равного тождественно 0 решения уравнения (1) может быть не более двух точек $a_1 \leq a_2$, в которых $y(a_i) = y'(a_i) = y''(a_i) = 0$, $\quad i = 1, 2$, и на отрезке $[a_1, a_2]$ решение тождественно равно нулю.*

При этом в левой полуокрестности точки a_1 решение либо тождественно равно 0, либо является знакопеременным и если $x_1 < x_2 < \ldots$ и $x'_1 < x'_2 < \ldots$ — такие стремящиеся к $a_1 - 0$ последовательности, что $y(x_i) = 0$, $y'(x'_i) = 0$, а $y(x) \neq 0$ при $x \in (x_i, x_{i+1})$ и $y'(x) \neq 0$ при $x \in (x'_i, x'_{i+1})$, $\quad i = 1, 2, \ldots$, то

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} \to B, \quad \frac{y(x'_i)}{y(x'_{i+1})} \to -B^\beta \qquad (i \to \infty)$$

[1]Работа выполнена в рамках научной программы 015 Министерства образования РФ "Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России", код проекта /НИР 015.04.01.22.

для некоторой константы $B > 1$, зависящей только от m и $p(a_1)$.

В правой полуокрестности точки a_2 решение либо тождественно равно 0, либо является знакопостоянным и удовлетворяет асимптотическому соотношению $y(x) = \pm C(x-a_2)^\beta(1+o(1))$, $x \to a_2+0$, где β и C задаются формулами (2) с заменой $p(a)$ на $p(a_2)$.

Некоторые аналоги этой теоремы получены для $n = 4$.

Литература

1. И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений,* М.: Наука, (1990) 432 с.

2. И. В. Асташова, // Докл. расшир. заседания семинара ИПМ им. И. Н. Векуа, Т.3, No 3, с. 9–12. Тбилиси, 1988.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

Афанасьев С.Н. (Воронеж)

Рассмотрим в банаховом пространстве E краевую задачу

$$u''(t) - t^{2\alpha}Au(t) = f(t),\ \alpha > 0,\ t \in [0;T], \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,\ u(T) = u_T. \tag{2}$$

Здесь A — слабо позитивный оператор (см. [2]). Пусть G есть комплексная плоскость без отрицательной полуоси $(-\infty; 0]$.

Решение задачи (1)-(2) есть функция $u(t) \in C^2([0;T], E)$, такая, что $t^{2\alpha}Au(t) \in C([0;T], E)$ и $u(t)$ удовлетворяет (1) и (2).

Теорема 1 *Пусть $u_0, u_T \in D(A^2)$. Пусть $f(t) \in D(A)$ и $f(t), Af(t) \in C([0;T], E)$. Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение.*

Для доказательства теоремы сначала решается соответствующая скалярная задача, когда оператор A есть комплексное число $\lambda \in G$. Решение такой задачи находится в явном виде с помощью модифицированных функций Бесселя (см. [4]). Решение исходной задачи выписывается с помощью формулы Коши-Рисса.

Литература

1. Орлов В. П. Слабо вырождающиеся дифференциальные уравнения с неограниченным операторным коэффициентом. // Известия вузов. — Математика, 1997, No. 1 (416).

2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Москва: Наука, 1967.

3. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, Москва: Наука, 1966.

4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения, Москва: Гостехиздат, 1963.

[1]Работа выполнена при поддержке Благотворительного фонда С. Г. Крейна.

О ДОПУСТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАР ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Афанасьева Т.Н. (Краснодар)
du@math.kubsu.ru

Рассматривается линейное разностное уравнение

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} A_{nk} x_k + f_n, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

где $\{x_n\}, \{f_n\}$ – последовательности элементов из C^m, A_{nk} – $m \times m$ матрицы с комплексными элементами. Предполагается, что матрицы $(I - A_{nn})$ обратимы при $n \geq 0$ (I – единичная матрица). Кроме того, выполнено условие

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \|A_{nk}\| < \infty. \tag{2}$$

Введем оператор $\tilde{A}$, который каждой последовательности x ставит в соответствие последовательность $\tilde{A}x = \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} A_{nk} x_k \right\}$.

Определение 1. *Уравнение (1) устойчиво, если при любом свободном члене f таком, что $\sup\limits_{n \geq 0} \|f_n\|_{C^m} < \infty$ решение x уравнения (1) удовлетворяет условию $\sup\limits_{n \geq 0} \|x_n\|_{C^m} < \infty$.*

Определение 2. *Пара пространств (X, Y) допустима относительно уравнения (1), если при любом $f \in X$ решение $x \in Y$.*

Обозначим через α_0 пространство последовательностей, имеющих предел при $n \to \infty$ и $\|x\| = \sup\limits_{n \geq 0} \|x_n\|_{C^m}$.

Пусть X – замкнутое подпространство из α_0.

Теорема. *Пусть уравнение (1) устойчиво, выполняется условие (2) и $\tilde{A}(X) \subset X$, тогда пара (X, X) допустима относительно уравнения (1).*

Литература

1. Пуляев В. Ф. *О допустимости некоторых пар пространств относительно линейных интегральных уравнений Вольтерра* // Диф. уравнения. - 1984. - т. 20. - №10. - С. 1800-1805.

ЯВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО–КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ИМЕЮЩИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ашурбеков К.Д. (Махачкала)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad 0 < x,\ y < 1,\ t > 0, \tag{1}$$

при начальных и граничных условиях

$$u(0, x, y) = \varphi_1(x, y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x, y), \tag{2}$$

$$u(t, 0, y) \equiv u(t, x, 0) \equiv u(t, 1, y) \equiv u(t, x, 1) \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} \equiv \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=1} \equiv \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=0} \equiv \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=1} \equiv 0, \tag{3}$$

где $a^2 > 0$, $\varphi_2 \in C^3([0,1]^2)$, $\varphi_1 \in C^1([0,1]^2)$, $\varphi_1|_{x,y=0,1} = 0$; $\varphi_2, \Delta\varphi_2|_{x,y=0,1} = 0$.

Доказана

Теорема. Решение задачи (1)–(3) представимо в виде:

$$u(t, x, y) = \frac{-i}{4\pi a t} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}} \psi_1(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{i}{4\pi a t} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}} \psi_2(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $\psi_1(\xi, \eta) = \sum\limits_{k,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{km}}{\pi^2(k^2+m^2)} \sin \pi k\xi \cdot \sin \pi m\eta$, α_{km} — тригонометрические коэффициенты Фурье функции $\frac{\Phi_2 + ia\Delta\Phi_1}{2ia}$.

$\psi_2(\xi, \eta) = \Phi_2(\xi, \eta) - \psi_1(\xi, \eta)$, а $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Phi_2(\xi, \eta)$ — нечетные периодические продолжения функций $\varphi_1(\xi, \eta)$, $\varphi_2(\xi, \eta)$ на всю ось по каждой из переменных ξ и η.

ON WELL-POSEDNESS OF DIFFERENCE SCHEMES FOR ABSTRACT PARABOLIC EQUATIONS IN $L^p([0,T]; E)$ SPACES

Ashyralyev A. (Buyukcekmece *aashyr@fatih.edu.tr*) Piskarev S. (Москва *piskarev@srcc.msu.su*) Weis L. (Germany *lutz.weis@math.uni-karlsruhe.de*)

We establish corcive inequality in the discrete spaces $L^p_{\tau_n}([0,T]; E_n)$. We give discription of the general approximation scheme, where discretisation is considered. Then we give some information on general approximation processes and introduction to Pade approximations and present orientation in discrete coercive inequalities and drow almost complete picture of discrete coersive inequalities obtained during last 20 years.

First, we establish in $L^p_{\tau_n}([0,T];E_n)$ for general Banach spaces E_n the coercive inequalities with logarithm, as it is shown also for the case of $C_{\tau_n}([0,T];E_n)$. The second we concern to UMD space case.

A set $M \subset B(E)$ is called R–bounded, if there is a constant $C < \infty$, such that for all $Q_1,\ldots,Q_k \in M$ and $x_1,\ldots,x_k \in E, k \in N$,

$$\int_0^1 \|\sum_{j=0}^{k} r_j(u)Q_j(x_j)\|\,du \le C\int_0^1 \|\sum_{j=0}^{k} r_j(u)x_j\|\,du,$$

where $\{r_j\}$ is a sequence of independent symmetric $\{-1,1\}$– valued random variables, e. g. the Rademacher functions $r_j(t) =$ sign $(\sin(2^j\pi t))$ on $[0,1]$.

Теорема 1 [3] *Let A generates a bounded analytic semigroup* $\exp(tA)$ *on a UMD-space E. Then the Cauchy problem*

$$u'(t) = Au(t) + f(t),\ t \in [0,T],$$
$$u(0) = u_0,$$

in a Banach space E is coercive well-posed in the space $L^p(R_+;E)$ if and only if one of the sets i), ii) or iii) above is R-bounded.

So as our second aim to give a discrete analogy of the Theorem 1. We consider two fundamental schemes in this occasion: Rothe scheme and Crank-Nicolson scheme. Both of them are appeared coercive stable in the spaces $L^p_{\tau_n}([0,T];E_n)$. under condition of R-boundedness.

Bibliography

[1] Ashyralyev A., Sobolevskiĭ P.E. Well-posedness of parabolic difference equations, V. 69 of Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[2] Vasilev V.V., Krein S.G., and Piskarev S. Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations. In *Mathematical analysis, Vol. 28 (Russian)*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 87–202, 204. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990. Translated in J. Soviet Math. 54 (1991), no. 4, 1042–1129.

[3] Weis L. Operator-valued multiplier theorems and maximal L_p regularity. // Mathematische Annalen, - 2001. - v. 319, - pp. 735 - 758.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРЕРЫВИСТОЙ МАТРИЦЕЙ

Бабич О.В. (Ижевск)

lg@udm.ru, lg@parc.uni.udm.ru

Определение. *Функции $f : [a,b] \to R^1$, имеющие в любой точке t интервала (a,b) конечные пределы слева и справа, а в точках a и b — пределы справа и слева соответственно, называются прерывистыми. Множество*

$m \times n$-матриц с прерывистыми на отрезке $[a,b]$ элементами обозначается $G^{m\times n}[a,b]$.

Всюду ниже матрица $B(\cdot)$ является элементом $G^{m\times n}[a,b]$.

Через B^+ обозначим обобщенную обратную матрицу Мура-Пенроуза к матрице B.

Теорема 1. *$B^+(\cdot) \in G^{n\times m}[a,b]$ в том и только том случае, когда множество точек разрыва матрицы $B^+(\cdot)$ содержится в множестве точек разрыва $B(\cdot)$.*

Теорему 1 можно сформулировать следующим образом. Условие $B^+(\cdot) \in G^{n\times m}[a,b]$ эквивалентно условию: в достаточно малых односторонних окрестностях любой точки t отрезка $[a,b]$ матрица $B(s)$, $s \neq t$, имеет ранг, совпадающий с рангом одностороннего предела матричной функции $B(\cdot)$ в этой точке.

Таким образом справедлива

Теорема 2. *Пусть E_n– $n \times n$-матрица, $z(\cdot), g(\cdot) \in G^{m\times 1}[a,b]$ и множество точек разрыва матрицы $B^+(\cdot)$ содержится в множестве точек разрыва $B(\cdot)$.*

Тогда

1) уравнение

$$B(\cdot)x(\cdot) = g(\cdot) \tag{1}$$

разрешимо в том и только том случае, когда

$$\left(E_m - B(\cdot)B^+(\cdot)\right) g(\cdot) = 0,$$

2) решениями уравнения (1) могут быть только прерывистые функции, и если уравнение (1) разрешимо, то все его решения даются формулой

$$x(t) = B^+(t)\,g(t) + \left(E_n - B^+(t)\,B(t)\right) z(t),$$

где $z(\cdot)$– произвольная вектор-функция.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ГРУПП БОЛЬНЫХ ВЫСОКОГО И НИЗКОГО РАСКА ПРОГРЕССИРОВАНИЯ АТЕРОСКЛЕРОТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Бабкин А.П., Пастухова Ю.И. (Воронеж)

Накопленный опыт в понимании развития атеросклероза - морфологической основы большинства сердечно-сосудистых заболеваний свидетельствует о том, что течением сосудистых поражений можно управлять, воздействуя на так называемые факторы риска, распространённость и выраженность которых ассоциируется с развитием патологического процесса. Для рационального использования медицинских ресурсов нам представляется необходимым выделение лиц, имеющих высокий и низкий риск прогрессирования атеросклероза. Целью исследования явилось изучение степени развития атеросклероза, опираясь на факторы риска, доступные для определения в практическом здравоохранении. Обследовано 377 больных коронарным атеросклерозом, верифицированным коронарографией, и 200 больных с выявленным с помощью ультрозвуковой томографии каротидным атеросклерозом.

В качестве факторов риска рассматривались показатели жирового обмена (общий холестерин, триглицериды, липопротеиды высокой и низкой плотности), масса тела, рост, индекс Кетле, уровень систолического и диастолического АД, показатели свёртывающей системы (фибриноген, ПТИ, АЧТВ), конечно-диастолический и систолический размеры сердца и др.

Разработаны коэффициенты устойчивости и пороги, превышение которых свидетельствует о вероятности ускоренного развития атеросклероза названных бассейнов кровообращения.

Очевидно, что отклонение от нормы значений основных параметров, влияющих на развитие атеросклероза, не обязательно сопровождается увеличением количества атеросклеротических бляшек. Формально это связано с тем, что наблюдаемое значение параметра X_i — случайная величина, которая может быть представлена в виде: $X_i = m + \varepsilon_i + \xi_i$, где i – номер наблюдения, m – физиологическая норма для наблюдаемого объекта, ε_i – ошибка ("шум"), возникающая вследствие индивидуальных особенностей развития, генетической природы и образа жизни индивидума, ξ_i – ошибка измерения.

Естественно предположить для каждого i, что $M\varepsilon_i = 0$, $M\xi_i = 0$, а дисперсии ошибок ограничены: $D\varepsilon_i < C_\varepsilon$, $D\xi_i < C_\xi$, причём значение константы C_ε может быть достаточно велико. В связи с этим решено отказаться от выявления аномальных наблюдений.

Коэффициент устойчивости к атеросклеротическому поражению сонной артерии вычисляется следующим образом:

$$K_s = \Big(\frac{L}{G} - \frac{\max(S_1-140,0)}{140} - \frac{\max(S_2-50,0)}{50} - \frac{\max(60-S_3,0)}{60} - \frac{\max(S_4-100,0)}{100}\Big)\frac{100}{V},$$

где L – рост (см.), G – вес (кг.), S_1 – систолическое артериальное давление (N 100-140), S_2 – общий холестерин (N 35-50), S_3 – фибриноген (N более 60), S_4 – протромбиновый индекс (N 80-100), V – возраст (число полных лет).

Статистический анализ выявил достаточно высокое, учитывая ограниченное число факторов и наличие аномальных наблюдений, выборочное значение корреляционного отношения η_{Y_1/K_s} между Y_1 – толщиной стенки сонной артерии и коэффициентом устойчивости K_s. Для рассмотренной выборки $|\eta_{Y_1/K_s}| = 0,56308$.

Следующая формула определяет коэффициент устойчивости к склеротическому поражению коронарных артерий:

$$K_c = \left(\frac{L}{G} - \frac{\max(S_1 - 140,0)}{140} - \frac{\max(S_2 - 50,0)}{50} - \frac{\max(S_5 - 55,0)}{55}\right)\frac{100}{V}.$$

Здесь K_c – конечно-диастолический размер (N менее 55).

Коэффициент K_c отрицательно коррелирован с Y_2 – степенью поражения коронарного русла, выборочное значение коэффициента корреляции равно 0,5802. Выборочное корреляционное отношение $|\eta_{Y_2/K_c}|$ равно 0,7972.

"Лучший" показатель для K_c по сравнению с K_s можно объяснить тем, что Y_1 – наблюдаемое значение физиологического параметра, а Y_2 – сумма баллов, вычисленная по определенным методикам, хотя и основанная на наблюдаемых значениях указанных выше факторов, по сути является экспертной оценкой.

Таким образом, применение коэффициентов устойчивости позволяет сконцентрировать усилия врачей на профилактике лиц, имеющих высокий риск прогрессирования заболевания.

РАВНОСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Бадков В.М. (Екатеринбург) [1]

E-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{\Phi_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированная на $[0, 2\pi]$ с 2π-периодическим весом $\varphi(\tau)$ система тригонометрических полиномов, полученная из последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau \ldots$ методом ортогонализации Шмидта. Если $F\varphi \in L^1$, то имеют смысл суммы Фурье

$$S_{\varphi,n}(F;\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\sum_{k=0}^{n}\Phi_k(\theta)\Phi_k(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \quad (n \in Z_+,\ \theta \in R). \qquad (1)$$

Очевидно, $S_{1,2n}(F;\theta)$ – обычная сумма Фурье $S_n(F;\theta)$. Для $F \in L^r$ положим $\omega(F;\delta)_r := \sup_{|\lambda|\le\delta} \|F(\cdot+\lambda) - F(\cdot)\|_r$. Равносходимость суммы (1) с $S_n(F;\theta)$ для $F \in L^r$ изучали при $r = \infty$ Г.Сегё и автор (см. [1]), а при $r = 1$ – автор [2]. Рассмотрим случай $1 < r < \infty$.

Теорема 1. *Если $1 < r < \infty$, $r' = r/(r-1)$, $0 < \varphi(\tau) \in C_{2\pi}$ и $\omega(\varphi;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^{r'}[0,\pi]$, то найдется константа $C_1(\varphi;r) > 0$ такая, что*

$$|S_{\varphi,2n}(F;\theta) - S_n(F;\theta)| \le C_1(\varphi;r)\,\|F\|_r \quad (F \in L^r, n \in N, \theta \in R). \qquad (2)$$

Норму $\|F\|_r$ в (2) можно заменить наилучшим приближением функции F в L^r тригонометрическими полиномами порядка не выше n. Из приведенной теоремы выводятся соответствующие результаты для многочленов, ортогональных на отрезке или на окружности.

Литература

1. Бадков В. М. *Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам*// Тр. МИАН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 20–62.

2. Бадков В. М. *Равносходимость рядов Фурье по системам тригонометрических полиномов, ортогональных с весами без особенностей*// Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. – Т. 8. Казань: УНИПРЕСС. – 2001. – С. 32–33.

ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ

Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. (Москва, Йошкар-Ола)

bakush@isa.ru, kokurin@marsu.ru

Рассматривается обратная задача восстановления неоднородности в трехмерной акустической среде по набору диаграмм рассеяния плоских гармонических по времени волн с комплексной амплитудой $u_{in}(d;x) = \exp(-ikx \cdot$

[1] Работа поддержана грантами РФФИ (проект 02-01-00783) и Минобразования РФ (проект Е00-1.0-184)

$d), d \in S^2$. Задача сводится [1, гл. 10] к нелинейному операторному уравнению $F(a)(d,\hat{x}) = u_\infty(d,\hat{x})$, где функция $a = a(x)$ с носителем из заданного компактного множества $R \subseteq \mathbf{R}^3$ описывает искомую неоднородность, $F(a)(d,\hat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi}\int_R \exp(-ik\hat{x}\cdot y)a(y)u(d;y)dy; d,\hat{x} \in S^2$, $u(d;x)$–комплексная амплитуда колебаний в присутствии неоднородности, определяемая уравнением Липпмана-Швингера $u(d;x) + k^2\int_R \Phi(x-y)a(y)u(d;y)dy = u_{in}(d;x), x \in R$. Здесь $\Phi(x) = (4\pi|x|)^{-1}\exp(ik|x|)$, k–волновое число, S^2–единичная сфера в $\mathbf{R}^3$, $u_\infty(d,\hat{x})$ есть амплитуда рассеяния волны $u_{in}(d;x)$ в направлении $\hat{x}$. Известно, что оператор $F : L^\infty(R) \to L^2(S^2 \times S^2)$ дифференцируем по Фреше и обладает вполне непрерывной производной, поэтому исходное уравнение относится к классу нерегулярных. Для устойчивой аппроксимации его решения предлагается использовать итерационные процессы вида $a_{n+1} = P_M(a_n - \xi - \gamma F'^*(a_n)F(a_n)) + \xi$, где M–подходящее конечномерное подпространство, ξ– управляющий параметр (см. [2]). Пусть $a^*(x)$–решение рассматриваемой задачи. При условии $\|(P_M - E)(a^* - \xi)\| \le \Delta$ в предположении близости a_0 к a^* устанавливается стабилизация вырабатываемых приближений в окрестности решения с радиусом, пропорциональным Δ и погрешностям в задании амплитуд $u_\infty(d,\hat{x}); (d,\hat{x}) \in S^2 \times S^2$.

Литература

1. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Springer, 1998.

2. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. Об итеративных методах градиентного типа для решения нелинейных некорректных уравнений // Сибирский журнал вычислительной математики.–2001.– Т.4, N4.–С.317–329.

ОБ ОШИБКЕ РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ МАЯКОВ

Барабанова Л.П. (Ковров)

Разностно-дальномерная задача с минимальным числом маяков $a_j \in R^n, j \in \{0,...,n\}$ состоит в решении системы

$$|x - a_j| - |x - a_0| = t_j - t_0 \qquad (1)$$

относительно объекта $x \in R^n$. Скорость сигнала равна 1. Точность решения (1) характеризуется коэффициентом геометрии K: $\sigma_x = K \cdot \sigma_t$, где σ_t — среднеквадратическая ошибка (СКО) измерения каждой псевдодальности t_j, σ_x — СКО местоопределения. Формально [1]:

$$\mathrm{K} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(B^T E_2^{-1} B\right)^{-1}},$$

где B — матрица Якоби для левой части (1), а E_2 — такая постоянная матрица, что каждый элемент ее главной диагонали равен 2, а каждый элемент вне главной диагонали равен 1. Случай $K = \infty$ исследован в [2].

Теорема 1. *В случае симплекса маяков коэффициент K подчиняется формуле*

$$K^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{S_j}{V}\right)^2,$$

где V — n-мерный объем симплекса концов ортов направлений от x на маяки $\{a_0, ..., a_n\}$, а S_j — $(n-1)$-мерный объем симплекса $\{a_0, ...\widehat{a_j}, ..., a_n\}$.

Важное значение придается минимизации K.

Теорема 2. *Коэффициент K принимает минимальное значение (3/2 в трехмерном пространстве) тогда и только тогда, когда направления от объекта x на маяки a_j расположены в пространстве равномерно.*

Литература

[1] Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС / Под ред. В. Н. Харисова, А. И. Перова, В. А. Болдина. — М.: ИПРЖР, 1998, 400 с.

[2] Барабанова Л. П. Алгоритмы для наземных одометрических и разностно-дальномерных навигационных систем.- Канд. дисс., М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2000.

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Барышева И.В. (Липецк)
baryshev@lipetsk.ru

Операторы Вольтерра с частными интегралами имеют приложения в ряде задач математической физики, теории изгиба тонких пластинок и теории пологих упругих оболочек [1]. Построение алгоритмов численного решения уравнения

$$x(t,s) = \int_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_0^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$$

$$+\int_0^t\int_0^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau + f(t,s) \equiv (Kx)(t,s) + f(t,s),$$

где $t,\tau,s,\sigma \in [0,1]$, l,m,n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега, приводит к изучению условий непрерывности и вопросов аппроксимации оператора K с частными интегралами и переменными пределами интегрирования. В данной заметке эти вопросы рассматриваются для оператора K, действующего в пространстве X функций $x(t,s)$, непрерывных на $D = [0,1]\times[0,1]$ вместе с производной по переменной t. X — банахово пространство относительно нормы $\|x\| = \||x| + |x'_t|\|_{C(D)}$. Отметим, что свойства оператора K в различных классах функциональных пространств изучались в [2].

Теорема 1. Если оператор $K : X \to X$ и $K : C(D) \to C(D)$, то оператор K непрерывен как оператор из X в X.

Теорема 2. Пусть функции $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными по переменной t на $D \times [0,1]$ и $D \times D$ соответственно. Тогда $K : X \to X$ — непрерывный линейный оператор.

Пусть $\widetilde{K}$ — оператор K с ядрами $\widetilde{l}, \widetilde{m}, \widetilde{n}$ вместо ядер l, m, n.

Теорема 3. Пусть для функций l, m, n, $\widetilde{l}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{n}$ выполнены условия теоремы 2, причем $|(l_t^{(i)} - \widetilde{l}_t^{(i)})(t,s,\tau)| < \varepsilon/9$, $|(m_t^{(i)} - \widetilde{m}_t^{(i)})(t,s,\sigma)| < \varepsilon/9$, $|(n_t^{(i)} - \widetilde{n}_t^{(i)})(t,s,\tau,\sigma)| < \varepsilon/9$ $(i = 0,1)$. Тогда справедлива оценка $\|K - \widetilde{K}\| < \varepsilon$.

Приведенные теоремы позволяют аппроксимировать действующий в X оператор K действующими в X операторами $\widetilde{K}$, ядра которых обладают достаточно хорошими свойствами.

Литература

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. — 294 с.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ ПЕРВОГО РОДА[1]

Баскаков В.Б. (Пермь)

nva@prognoz.ru

Пусть L_∞ – пространство классов эквивалентности измеримых и ограниченных в существенном функций $u : [0,b] \to R$ с нормой $\|u\|_{L_\infty} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,b]} |u(t)|$, AC — пространство абсолютно непрерывных на $[0,b]$ функций, $\gamma \in L_\infty$, $B_\gamma = \{z : z = \gamma\varphi, \varphi \in L_\infty\}$ — весовое банахово пространство с нормой $\|z\|_{B_\gamma} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,b]} |z(t)/\gamma(t)|$.

Пусть, далее, функция $C(t,s)$ измерима по совокупности аргументов в треугольнике $\Delta = \{(t,s) : 0 \le s \le t \le b\}$, при почти всех $s \in [0,b)$ функция $C(\cdot,s)$ абсолютно непрерывна на $[s,b]$, при каждом $t \in (0,b]$ функция $C(t,\cdot)$ суммируема на $[0,t]$, функция $C_t'(t,s)$ измерима по совокупности аргументов в Δ и $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,b]} \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,t]} \left|C_t'(t,s)\right| < \infty$. Обозначим $\pi(t) = C(t,t)$.

Теорема. Пусть $\pi(0) = 0$, $\pi(t) \ne 0$ для всех $t \in (0,b]$, причем $\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,b]} t/|\pi(t)| < \infty$. Если существует $\lambda \in (0,1)$ такое, что $\operatorname*{vraisup}_{s\in[0,t]} \left|C_t'(t,s)/\pi(t)\right| \le \lambda/t$ при почти всех $t \in (0,b]$, то уравнение $\int\limits_0^t C(t,s)x(s)ds = f(t)$, $t \in [0,b]$ имеет единственное решение $x \in L_\infty$ при любом $f \in AC$ таком, что $f(0) = 0$, $f' \in B_\pi$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (01-01-00511) и Программы "Университеты России" (УР.04.01.001).

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бахтин И.А. (Воронеж)

Проводится качественное исследование решений одного класса линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, возникающих в электро-магнитной теории света.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{d\rho^2}E_z + \frac{1}{\rho}E_z - \frac{m^2}{\rho^2}E_z + [\frac{w^2}{c^2}n^2(\rho) - k_{11}^2]E_z = 0, \tag{1}$$

в котором E_z — компонента напряженности электрического поля, число $m \geq 0$, c — скорость света и $w > 0$, $k_{11} > 0$ и $n(\rho) > 0$ — некоторые константы и функция.

Будем предполагать, что непрерывная положительная функция $n(\rho)$ ограничена в полуинтервале $[0, +\infty) : 0 < n_1 \leq n(\rho) \leq n_2 < +\infty$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. При $m = 0$ существуют решения уравнения (1): при ρ — 0

$$E_1 \sim d_1 > 0, \quad E_2 \sim -d_2 \ln \rho \quad (d_2 > 0).$$

При $\rho \to 0$ каждое нетривиальное решение

$$E \sim c_1 + c_2 \ln \rho,$$

где $|c_1| + |c_2| > 0$, и существует конечный предел $\lim\limits_{\rho \to 0} E'$.

Теорема 2. При $m \neq 0$ существуют решения уравнения (1)

$$E_1 \sim \rho^m, \quad E_2 \sim \rho^{-m}$$

при $\rho \to 0$ такие, что при $\rho \to 0$

$$\rho E_1'/E_1 \to m, \quad \rho E_2'/E_2 \to -m.$$

Теорема 3. При любом $m \geq 0$ существует ограниченное в полуинтервале $[0, +\infty)$ решение E уравнения (1), если выполняется по крайней мере одно из условий:

1) $\frac{w^2}{c^2}n^2(\rho) - k_{11}^2 = const < 0 \quad (\rho \geq \rho_0)$;
2) $\frac{w^2}{c^2}n^2(\rho) - k_{11}^2 = const > 0 \quad (\rho \geq \rho_0)$;
3) $\int\limits^{+\infty} |\frac{w^2}{c^2}n^2(\rho) - k_{11}^2|\rho d\rho < +\infty$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ГРИНА ОДНОГО КЛАССА РАЗНОПОРЯДКОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ

Белоглазова Т.В. (Воронеж)

Пусть Γ – геометрический граф в R^3, состоящий из шести вершин $\{a_k,\ k = \overline{1,6}\}$ и шести ребер $\gamma_i,\ i = \overline{1,6}$. Механическая система образована треугольником из шарнирно - сочлененных стержней $\gamma_i,\ i = \overline{1,3}$ в точках $a_i,\ i = \overline{1,3}$, растянутым за вершины тремя струнами γ_i, $i = \overline{4,6}$ (причем концы струн закреплены в точках a_4, a_5, a_6) и имеет положение равновесия Γ. Отклонение системы от положения равновесия и плотность внешней нагрузки можно описать функциями $u, f : \Gamma \to R$ соответственно. Сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i, $i = \overline{1,6}$ будем обозначать $u_{\gamma_i}(x)$, $i = \overline{1,6}$ и будем писать $u_i(x)$, $i = \overline{1,6}$. Зададим на Γ функция $f(x)$ и достаточно гладкие внутри ребер функции $p(x)$ и $p(x)$, причем внутри ребер треугольника $q(x) > 0$, $p(x) = 0$ и на остальных ребрах $q(x) = 0$, $p(x) > 0$. Вариационным методом – минимизируя потенциальную энергию виртуальных состояний – имеем для реальной деформации нашей системы $u(x)$ условия непрерывности функции $u(x)$ в вершинах a_1, a_2, a_3, краевые условия

$$u_i(a_i) = 0, \ i = \overline{4,6}, \tag{1}$$

$$\left(p_{\gamma_j} u''_{\gamma_j}\right)(a_i + 0) = \left(p_{\gamma_j} u''_{\gamma_j}\right)(a_i + 0) = 0 u_i(a_i) = 0, \ i = \overline{4,6}, \tag{2}$$

$$\left(p_{\gamma_j} u''_{\gamma_j}\right)'(a_i + 0) + \left(p_{\gamma_j} u''_{\gamma_j}\right)'(a_i + 0) - \left(q_{\gamma_j} u_{\gamma_j}\right)'(a_i + 0) = 0 \tag{3}$$

(где γ_j, $j = \overline{1,6}$ – примыкающие к a_i ребра) и следующие уравнения:

$$\left(p_i u_i''\right)'' = f_i, \quad i = \overline{1,3} \qquad -\left(q_i u_i'\right)' = f_i, \quad i = \overline{4,6}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Однородная (при $f_i = 0$, $i = \overline{1,6}$) задача (1) – (4) невырождена, т.е. имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$ на Γ.*

Следствие 1. *Для любых непрерывных функций f_i, $i = \overline{1,6}$ задача (1) – (4), однозначно разрешима.*

Следствие 2. *Существует единственная непрерывная на $\Gamma \times \Gamma$ функция $G(x,s)$ такая, что для любых f_i, $i = \overline{1,6}$ решение задачи (2) – (4), может быть записано в виде: $u(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x,s) f(s) ds$.* ($G(x,s)$ – функцией Грина задачи (1) – (4).

Литература

[1] Покорный Ю. В. О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях. // Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2001, том 37, 5, с. 661 - 671.

О ВЛИЯНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ ТИХОНОВА[1]

Белоглазова Т.В., Зубова С.П. (Воронеж)

Изучается влияние возмущений εD правой части системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (c_{11} + \varepsilon d_{11})\, x + (c_{12} + \varepsilon d_{12})\, y \\ \varepsilon \dfrac{dy}{dt} = (c_{21} + \varepsilon d_{21})\, x + (c_{22} + \varepsilon d_{22})\, y \end{cases}$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00-351).

на поведение частных решений, здесь $x(t,\varepsilon) \in R^k$; $y(t,\varepsilon) \in R^m$; $c_{11}, d_{11} : R^k \longrightarrow R^k$; $c_{12}, d_{12} : R^m \longrightarrow R^k$; $c_{21}, d_{21} : R^k \longrightarrow R^m$; $c_{22}, d_{22} : R^m \longrightarrow R^m$; $t \in [0, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$.

Для этой системы получено уравнение ветвления, по которому строится диаграмма Ньютона. Вид диаграммы Ньютона и соответствующие определяющие уравнения характеризуют поведение решений при $\varepsilon \to 0$.

Возмущение εD может существенно изменить решение системы. Например, если решение системы без εD имело асимптотическое разложение по степеням ε с функциями погранслоя с некоторым порядком сингулярности, то добавка εD может изменить порядок сингулярности; может решение возмущенной системы стремиться к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, причем, может существовать $k \in N$ такое, что при $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^k \cdot x(t,\varepsilon) < \infty$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^k \cdot y(t,\varepsilon) < \infty$; но может быть для любых k $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^k \cdot x(t,\varepsilon) = \infty$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^k \cdot y(t,\varepsilon) = \infty$.

Существуют, однако, и такие операторы D, что решение системы с εD и без εD отличаются незначительно.

Литература

[1] Белоглазова Т.В., Зубова С.П. О разрешимости задачи Коши для предельной системы Тихонова // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ. - Воронеж, 2001. С. 70-75.

ДИАГНОСТИКА УРОВНЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 7-х КЛАССОВ

Белоусова А.Г. (Воронеж)

Одним из инициаторов изучения математических способностей школьников был выдающийся французский математик А. Пуанкаре.

Впоследствии психологи выделили три вида математических способностей — арифметические, алгебраические и геометрические и четыре основных сложных компонента - "ядро" математических способностей: пространственный; логический; числовой; символический. Также отметим вербальную способность и способность сохранять в памяти данные в их точном и строгом порядке и значении.

Одно из самых значительных исследований математических способностей принадлежит шведскому психологу И. Верделину. Он дает весьма широкое определение математических способностей, но основное внимание он уделяет важнейшему аспекту - продуктивному, который исследует в процессе решения задач. Ученый полагает, что на характере математических способностей может сказываться метод обучения.

Можно предположить, что принятая сегодня пятибалльная система оценки знаний учащегося не в полной мере раскрывает уровень его математических способностей и уровень успеваемости по математике.

Согласно программе для школ с углубленным изучением математики школьник может начать изучение математики как с 8-го, так и с 10-го класса. Обычно классы формируются уже на первом этапе.

На мой взгляд, важно проанализировать уровень математических способностей, овладения знаниями, навыками и умениями в области математики каждого ученика 7-го класса в течение учебного года. Диагностика уровня математического мышления и математических способностей, по моему мнению, должна состоять из нескольких компонентов, один из которых - общая годовая балльная оценка по математике. Все письменные тесты и работы, математические диктанты по всем темам алгебры и геометрии, кроме обычной оценки оцениваются в баллах. Каждому заданию присваивался один балл. В отдельную таблицу я записывала баллы каждого учащегося 7-х классов по всем текущим работам за год. Из чего сложилась годовая балльная оценка по алгебре, по геометрии и общая. Три раза за год 7-е классы тестировались психологом на уровень математических способностей. Определение уровня мотивации проводилось мною в начале и в конце учебного года. А далее просматривалась уже картина достижений по математике.

Системный подход в оценке математических способностей, знаний, умений и навыков семиклассников, наиболее адекватно выявляет учащихся, которые хотят и могут углубленно изучать математику в старших классах.

МНОГОМЕТОДНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ [1]

Белышев Д.В., В.И. Гурман (Переславль-Залесский)
belyshev@u-pereslavl.botik.ru, gurman@cprc.botik.ru

Исследование больших управляемых систем является сложной, но вместе с тем необходимой для практики задачей. В данной работе рассматривается подход для эффективного решения задачи моделирования сложных динамических систем и поиск оптимального управления построенной моделью. Предлагается архитектура Интеллектуальной Системы поддержки построения процедур Оптимизации Управления [1] (ИСОУ), которая предоставляет инструментарий описания модели и составления эффективных оптимизационных процедур. Описывается подход построения процедуры улучшения управления в виде последовательности сменяющих друг друга базовых методов. Полученную конструкцию назовем *многометодной процедурой* оптимального управления.

Предлагается методика построения многометодных процедур на основе составления классификации задач и алгоритмов; анализа свойств моделей и алгоритмов на основе знаний экспертной системы; конкурсного отбора наиболее эффективных алгоритмов и т.д. Данная концепция позволяет для каждой задачи автоматически генерировать алгоритм ее решения путем комбинации и специфической настройки базовых процедур оптимизации, которые описываются в Библиотеке Алгоритмов, также являющейся частью ИСОУ. Ведется полнофункциональная программная реализация предлагаемой методики для решения задач оптимального управления.

Многометодный подход лег в основу программного комплекса поиска оптимального управления дискретными системами, который нашел приме-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 00-01-000731

нение в исследовательской работе по социо-эколого-экономическому моделированию региона [2].

Литература

1. Белышев Д.В., Гурман В.И. Интеллектуальные процедуры оптимального управления. Автоматика и телемеханика. (в печати) 2. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона/Под ред. В.И. Гурмана. Е.В. Рюминой. — М: Наука, 2001.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Берёзкина Н.С., Литвинова Т.А., Мартынов И.П., Пронько В.А.
(Гродно, Белоруссия)
pecevich@grsu.unibel.by

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$v_{xxx} + 6v_x^2 = \alpha\mu_t + 2av_t + a_tv + b,\ \mu_x = v_t, \tag{1}$$

где $\alpha = const,\ a_x = 0,\ b_{xx} = \frac{1}{12}(a^2)_{tt}$.

Если искать решения системы (1) в виде рядов

$$v = \varphi^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k\varphi^k,\ \mu = \varphi_t\varphi^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\varphi^k,$$

то найдем, что коэффициенты μ_0, v_0, v_3 и функция φ остаются произвольными функциями переменных x, t, а остальные коэффициенты выражаются через них по рекуррентным формулам. Значит, для (1) выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве.

Для системы (1) построим соответствующую линейную систему

$$\begin{gathered}\gamma y_{xt} = (\delta - v_x)y_x + \tfrac{1}{2}ay_t + \tfrac{1}{2}(v_{xx} - 3\gamma v_t)y,\\ y_{xx} = \gamma y_t - (2v_x + \delta)y,\end{gathered} \tag{2}$$

где $6\delta_x = a_t$, а число γ – такое, что $\alpha = -3\gamma^2$.

Полагая $y_x = uy$, из (2) получим

$$\begin{gathered}2v_x = \gamma w - \delta - (u_x + u^2),\\ \gamma u_t + \gamma uw = (\delta - v_x)u + \tfrac{1}{2}aw + \tfrac{1}{2}v_{xx} - \tfrac{3}{2}\gamma v_t,\end{gathered} \tag{3}$$

где $w_x = u_t$.

Из (3) для u получим систему

$$\begin{gathered}(u_{xx} - 2u^3)_x + 6\gamma u_xw + 3\gamma^2w_t = a_tu + 6\delta u_x + 2au_t + 3\gamma\delta_t,\\ w_x = u_t.\end{gathered} \tag{4}$$

Равенства (3) можем рассматривать как преобразования Беклунда, связывающие решения системы (4) с решением системы (1).

Можно построить автомодельные решения системы (1), выражающиеся через решения обыкновенных диф уравнений Пенлеве-типа. Наряду с этим строится появление для функции φ, $\varphi = \frac{y_1}{y_2}$, где y_1, y_2 - два решения систем (2).

О РЕШЕНИЯХ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, КОГДА УРАВНЕНИЕ Ф.Д. ГАХОВА ИМЕЕТ КОНТИНУУМ РЕШЕНИЙ

Бирюков В.Ю., Галкина Е.Е., Микка В.П., Печникова А.Ю. (Йошкар-Ола)

Решение внешней обратной краевой задачи в постановке Ф. Д. Гахова [1] восстанавливается с помощью оператора

$$Af \equiv F(\zeta) = \int_0^\zeta f'(t) \left(\frac{1 - \bar{\zeta}_0 t}{t - \zeta_0} \right)^2 dt, \tag{1}$$

где регулярная функция $lnf'(\zeta)$ в $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ определяется по формуле Шварца через краевые условия, а параметр ζ_0 удовлетворяет уравнению Ф. Д. Гахова

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1 - |\zeta|^2}, \zeta \in E. \tag{2}$$

В работе [2] показано, что необходимое условие экстремума конформного радиуса

$$R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2), \tag{3}$$

имеет вид [2]. Здесь же передоказана при более общих условиях теорема Хиги о том, что в классе выпуклых областей конформный радиус имеет единственную точку максимума, если области отличны от прямолинейной полосы. В случае полосы $f(E)$ нормировки $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, максимальные значения конформного радиуса (3) достигается при всех $\zeta_0 \in (-1, 1)$.

В сообщении показано, что образом $F(E)$ являются однолистные области, граница которых неспрямляема и сами области при разных ζ_0 отличаются друг от друга только положением на плоскости. Таким образом, обратная краевая задача в постановке Ф. Д. Гахова имеет единственное решение, если функция $f(\zeta)$ является выпуклой в E.

Литература

1. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд.– М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Аксентьев Л. А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области*// Изв. вузов. Математика. – 1984. – N 2. – С. 3–11.

ОБОБЩЕННАЯ СИММЕТРИЗАЦИЯ: постановка задачи и пример реализации

Блюмин С.Л. (Липецк)

slb@stu.lipetsk.su

1. Классическая процедура симметризации [1] коммутативного ассоциативного закона $\top$ композиции элементов множества E дает положительный ответ на вопрос о возможности "погружения" E в более широкое множество $\overline{E}$ с законом $\overline{\top}$ так, чтобы $\overline{\top}$ индуцировал $\top$ на E и чтобы относительно него каждый *регулярный (по Н. Бурбаки)* элемент из E был симметризуем в $\overline{E}$.

2. Если элемент $a \in E$ не симметризуем ни в E, ни в каком-либо $\overline{E}$ (например, не регулярен (по Н. Бурбаки)), то он может быть *обобщенно симметризуемым* (*регулярным (по Дж. фон Нейману)*; [2]): уже в E может существовать элемент g, *обобщенно симметричный* a, определяемый условием $a \top g \top a = a$. Если же такой $g \in E$ для $a \in E$ не существует, то процедура *обобщенной симметризации* определяется как дающая ответ на вопрос о возможности "погружения" E в более широкое множество $\widetilde{E}$ с законом $\widetilde{\top}$ так, чтобы $\widetilde{\top}$ индуцировал $\top$ на E и чтобы относительно него $a \in E$ был обобщенно симметризуем в $\widetilde{E}$, то есть чтобы существовал $\widetilde{g} \in \widetilde{E}$ (*"обобщенно вне-симметричный"* a [2]), определяемый условием $a \widetilde{\top} \widetilde{g} \widetilde{\top} a = a$.

Не обсуждая здесь все аспекты обобщенной симметризации, приведем пример ее реализации, следуя [2,3].

3. Пусть $E = \mathbf{V} = \Lambda(\alpha) = \{v = a + b\alpha, a, b \in \mathbf{R}, \alpha^2 = 0\}$ - алгебра дуальных чисел (двумерная алгебра Грассмана) с законом $\top$ естественного умножения. Ее необратимые элементы $b\alpha$ не являются обобщенно обратимыми (кроме нуля). Для нее $\widetilde{E}$ строится, в соответствии с [2], как алгебра $\mathbf{W} = \{w = a + b\alpha + c\beta + d\gamma + e\delta, a, b, c, d, e \in \mathbf{R}, \alpha^2 = \beta^2 = 0, \gamma^2 = \gamma, \delta^2 = \delta, \gamma = \alpha\beta, \delta = \beta\alpha, \alpha\gamma = \gamma\beta = \delta\alpha = \beta\delta = \gamma\delta = \delta\gamma = 0, \alpha\delta = \gamma\alpha = \alpha, \beta\gamma = \delta\beta = \beta\}$ с законом $\widetilde{\top}$ умножения, определяемым выписанными соотношениями для базисных единиц, так что, в частности, выполняются *отношения регулярности (по Дж. фон Нейману)* $\alpha\beta\alpha = \alpha, \beta\alpha\beta = \beta$, а в соответствии с [3] - как свободное произведение двух алгебр $\mathbf{V}$ по модулю указанных отношений регулярности : $\mathbf{W} = \Lambda(\alpha) \times \Lambda(\beta) / \tilde{\ }^{reg}$, чем определяется ее *регулярность*, то есть обобщенная обратимость всех ее элементов. В частности, для любого ненулевого необратимого $b\alpha \in \mathbf{V}$ обобщенно вне-обратный $\widetilde{g} \in \mathbf{W}$ записывается в виде [2] $x + y\alpha + b^{-1}\beta + s\gamma + t\delta$, где $x, y, s, t \in \mathbf{R}$ произвольны (в частности, можно положить $\widetilde{g} = b^{-1}\beta$), чем достигнута цель обобщенной симметризации.

Литература

1. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. - М.: ГИФМЛ, 1962. - 516 с.

2. Blyumin S., Milovidov S. // Comp. Maths Math. Phys. 1994. Vol.34. No.2. P. 133-142.

3. Duplij S., Marcinek W. // http://xxx.lanl.gov arXiv.org e-Print archive math.QA/0107022 3 Jul 2001. 13 pp.

КОНТРОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ В ФОРМЕ ТЕСТИРОВАНИЯ КАК СРЕДСТВО АДАПТАЦИИ К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ

Бондаренко Т.Е., Занина О.В., Плетнева О.К.

Планируемый с 2005 года переход к Единому государственному экзамену (ЕГЭ), при итоговой аттестации учащихся средних общеобразовательных учреждений, предполагает предварительную адаптацию школьников к новой форме контроля, т.к. действующие учебники и дидактические материалы в основном ориентированы на традиционные формы.

В связи с этим Администрация и Главное управление образования Воронежской области приняли решение о проведении в 11-х классах серии контрольных работ по математике в тестовой форме, и тем самым дать возможность учителям и учащимся овладеть техникой выполнения тестовых заданий.

Всего предполагалось провести три контрольных работы, первые две по материалу 10-11 классов, изученному на момент контроля, последняя охватывала весь курс математики средней школы. Группой специалистов кафедры теории и методики математического образования Воронежского областного института повышения квалификации работников образования (ВОИПКРО) совместно с ведущими учеными вузов г. Воронежа были разработаны тестовые контрольные работы. Каждая работа состояла из трех частей, различающихся уровнем сложности и формой тестовых заданий. Первая часть (A) была ориентирована на проверку обязательной подготовки и состояла из заданий, предполагающих выбор верного ответа из четырех предложенных. Вторая часть (B) содержала задания, соответствующие более высокому уровню математической подготовки, для которых нужно было записать верный ответ на специальном бланке. Наконец, третья часть (C) состояла из задач повышенного уровня сложности, решение которых учащиеся должны были представить полностью.

Первым этапом регионального эксперимента были охвачены 2407 школьников общеобразовательных классов, ко второму этапу были привлечены 3542 ученика, на заключительном этапе планируется выйти на 5000 участников

Сравнительный анализ результатов даже двух проведенных контрольных работ продемонстрировал их зависимость от степени знакомства испытуемых с тестовыми контрольно - измерительными технологиями. Среди учащихся, которые писали контрольную работу второй раз, итоги по отдельным показателям были значительно выше, чем у тех, кто впервые столкнулся с такой формой контроля.

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ КРЭНДЕЛЛА-РАБТНОВИЧА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Борисович А.Ю. Морозов Ю.Г. (Воронеж)

В данной работе предлагается некоторая общая схема исследования бифуркаций в случае, когда уравнение $F(x, \lambda) = 0$ имеет вариационную природу.

В механике часто используется гильбертово пространство $\mathrm{H}^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Скалярное произведение в этом пространстве содержит сумму m интегралов и найти потенциал E чрезвычайно трудно.

Предлагаемый подход основан на конечномерной редукции типа Ляпунова-Шмидта, лемме Морса, теореме Крэнделла-Рабиновича о простой точке бифуркации и методе ключевой функции Сапронова. Его преимущества в следующем:

1) минимизация трудоемких вычислений в вариационных задачах теории упругости и перенесение их с дифференциального оператора F на потенциал

E;

2) сокращение до минимума дополнительного теоретического исследования проблемы и сведение его к установлению фредгольмовости дифференциального оператора F, определение его индекса и проверке потенциальности F относительно скалярного произведения в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$ по известной схеме Эйлера-Лагранжа;

3) предлагаемый подход не требует, чтобы оператор F и его потенциал E были определены на гильбертовом пространстве.

В работе получено некоторое обобщение теоремы Крэндалла-Рабиновича о простой точке бифуркации $(0, \lambda_0)$, где $F : X \times \to Y$ - зависящий от параметра λ нелинейный фредгольмов оператор индекса 0, действующий в банаховых пространствах и $(0, \lambda_0)$ - точка однократного вырождения производной Фреше $F'_x(0, \lambda_0)$.

УРАВНЕНИ ЭЙКОНАЛА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ [1]

Боровских А.В.

bor@bor.vsu.ru

Исследуется уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x,y,z)}, \tag{1}$$

описывающего распространение фронтов волн (уравнение фронта имеет вид $t = \psi(x, y, z)$), и связанного с волновым уравнением

$$m(x,y,z)(\partial^2 u)/(\partial t^2) = \operatorname{div}(p(x,y,z)\operatorname{grad} u).$$

Неоднородность среды реализуется как зависимость коэффициентов от x, y, z, $v^2(x, y, z) = p(x, y, z)/m(x, y, z)$

Осуществлена групповая классификация этого уравнения: выделено пять особых распределений скоростей, имеющих 15-параметрические инвариантные группы Ли, четыре семейства (плоские, сферические, цилиндрические и осесимметричные), имеющие четырехпараметрические инвариантные группы Ли и содержащие, в качестве частных случаев, по нескольку конечномерных подсемейств, имеющих шестимерные инвариантные группы Ли. Кроме того, имеются распределения, описываемые произвольной функцией от двух аргументов, для которых группа Ли всего лишь двумерна, и, наконец, для всех остальных распределений скоростей группа Ли одномерна (группа сдвигов по ψ).

Группы преобразований, связанные с уравнением эйконала, содержат, помимо сдвигов, вращений, и растяжений, содержат также группу преобразований, аналогичных движению воздуха в атмосферных циклонах.

---

[1] Результаты, представленные в данной работе, получены при финансовой поддержке Госкомвуза РФ (грант N E00-1.0-154), РФФИ (гранты N 01-01-00417, 01-01-00418, 02-01-00307) и программы "Университеты России" (грант УР.04.01.047)

Обнаружено, что не только для постоянного, но и для других особых распределений (линейного и квадратичного) скоростей фронт волны от точечного источника является сферическим, причем центр сферы (псевдоисточник) представляется наблюдателю движущимся в направлении возрастания $v(x,y,z)$ со скоростью, пропорциональной расстоянию до псевдоисточника (для линейно распределеной скорости) и произведению расстояний до псевдоисточника от точки наблюдения или от начала координат (для квадратично распределенной скорости).

МЕТОД РЕДУКЦИИ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФЕ[1]

Боровских А.В., Лазарев К.П. (Воронеж)

На графе Γ рассмотрим задачу (см.[1,2]) с положительными и достаточно гладкими коэффициентами:

$$(p_\gamma y_\gamma'')'' - (q_\gamma y_\gamma')' = f_\gamma(x) \quad x \in \gamma,\ \gamma \in E(\Gamma), \tag{1}$$

$$y_\nu(a) = y_\mu(a) \quad \nu,\mu \in E(a),\ a \in J(\Gamma), \tag{2}$$

$$\beta_\gamma(a)y_\gamma''(a+0) - \theta_\gamma(a)y_\gamma'(a+0) = 0 \quad \gamma \in E(a),\ a \in V(\Gamma), \tag{3}$$

$$\sum_{\gamma\in E(a)} \alpha_\gamma(a)[(p_\gamma y_\gamma'')' - q_\gamma y_\gamma'](a+0) = 0 \quad a \in J(\Gamma), \tag{4}$$

$$y(a) = 0 \quad a \in \partial\Gamma \tag{5}$$

($E(\Gamma)$ - множество ребер, $V(\Gamma) = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$ - множество вершин, $E(a)$ - множество ребер, содержащих вершину a, y_γ - сужение y на ребро γ).

Пусть μ - это внутреннее ребро $[a_1,a_2]$, $\Psi = \Gamma \setminus \mu$ состоит из компонент связности Γ_j и y_{Γ_j} - сужение y на Γ_j.

Теорема 1. *Задача (1)-(5) при $f(x) = 0$ ($x \in \Psi$) эквивалентна задаче на ребре μ:*

$$(p_\mu(x)y_\mu'')'' - (q_\mu(x)y_\mu')' = f_\mu(x), \tag{6}$$

$$\beta_\mu(a_k)y_\mu''(a_k+0) - \theta_\mu(a_k+0)y_\mu'(a_k) = 0, \tag{7}$$

$$\rho_1(a_k)y_\mu(a_1) - \rho_2(a_k)y_\mu(a_2) = (-1)^k\alpha_\mu(a_k)[(p_\mu y_\mu'')' - q_\mu y_\mu'](a_k+0), \tag{8}$$

(причем $k = \overline{1,2}$, $\rho_1(a_1) > \rho_2(a_1) > 0$, $\rho_2(a_2) > \rho_1(a_2) > 0$)

и задачам (1)-(4) на Γ_j с условиями $y_{\Gamma_j}|_{\partial\Gamma\cap\Gamma_j} = 0$, $y_{\Gamma_j}(a_k) = y_\mu(a_k)$ (для $a_k \in \Gamma_j$).

Теорема 2. *Задача (1)-(5) однозначно разрешима, для нее существует функции Грина $G(x,s)$, которая непрерывна, если при каждом $a \in J(\Gamma)$ $\alpha_\gamma(a) \equiv \alpha(a)\,\forall\gamma \in E(a)$.*

Теорема 3. *Для $x,s\in\mu$ $G(x,s)=G_\mu(x,s)$ (G_μ - функция Грина задачи (6)-(8)), для $s\in\mu$, $x\in\Psi$ $G(x,s)=z_1(x)G_\mu(a_1,s)+z_2(x)G_\mu(a_2,s)$, причем $z_1(x) \ge 0$, $z_2(x) \ge 0$ и $z_1(x) + z_2(x) > 0$ при $x \notin \partial\Gamma$.*

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00417, 01-01-00418, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ, проект №Е00-1.0-154) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047).

Теорема 4. *Функция Грина задачи (1)-(5) положительна в* $(\Gamma \setminus \partial\Gamma) \times (\Gamma \setminus \partial\Gamma)$.

Литература

1. Боровских А.В., Мустафокулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. // Доклады РАН. 1995. Т. 345, N 6. С. 730-732.

2. Боровских А.В., Лазарев К.П. // Современные проблемы теор. функц. и их прилож. Тез.докл. 11 Саратовской зимней школы. - Саратов, 2002.- С.29-30.

К ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С. (Тамбов)

aib@tsu.tmb.ru

Пусть C – пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}, L(U)$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x : U \to \mathbf{R}^n$ ($U \subset [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество, $\mu(U) > 0, \mu(\cdot)$ – мера Лебега) с нормой $\|x\|_{L(U)} = \int_U |x(t)|dt, L([a,b]) = L, \mathrm{comp}[C]$ – множество всех непустых компактов пространства C.

Будем говорить, что множество $\Psi \subset L$ выпукло по переключению, если для любого измеримого по Лебегу множества $U \subset [a,b]$ и любых $x, y \in \Psi$ справедливо включение $\chi(U)x + \chi([a,b] \setminus U)y \in \Psi$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим $\Pi[L]$ – множество всех непустых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению подмножеств из L.

Рассмотрим в пространстве C включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где многозначные отображения $\Psi : C \to \mathrm{comp}[C]$, $\Phi : C \to \Pi[L]$ непрерывны по Хаусдорфу, линейный непрерывный оператор $V : L \to C$.

Под решением включения (1) будем понимать такой элемент $x \in C$, для которого справедливо включение (1). Таким образом, для каждого решения x найдутся $\psi \in \Psi(x)$ и $\varphi \in \Phi(x)$, удовлетворяющие равенству $x = \psi + V\varphi$.

Включение (1) будем называть возмущенным. Изучение включения (1) представляет интерес, поскольку к этому включению, например, сводятся краевые задачи для обыкновенных дифференциальных, функционально-дифференциальных включений и другие. Исследование возмущенного включения наталкивается на следующие трудности. Прежде всего значения произведения $V\Phi$ не являются, вообще говоря, не только выпуклыми, но и замкнутыми множествами пространства C. В связи с этим для изучения разрешимости включения (1) нельзя применить классические теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений (теорему Какутани, принцип сжимающих отображений), даже в том случае, когда значения оператора $\Psi : C \to \mathrm{comp}[C]$ выпуклы. В то же время в докладе утверждается, что если значения отображения $\Psi : C \to \mathrm{comp}[C]$ выпуклы, а многозначное отображение, порожденное правой частью включения (1), переводит в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства C, то для каждого $\varepsilon > 0$ и

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-01-00140)

каждых $r \in C$ и $w \in L$ существует решение возмущенного включения $x \in C$ и существуют $\psi \in \Psi(x)$ и $\varphi \in \Phi(x)$, удовлетворяющие равенству $x = \psi + V\varphi$, которые обладают свойствами:

$$\|r - \psi\|_C \leq \rho_C[r, \Psi(x)] + \varepsilon, \tag{2}$$

для любого измеримого $U \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|w - \varphi\|_{L(U)} \leq \rho_{L(U)}[w, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(U), \tag{3}$$

где $\rho_Y[\cdot, \cdot]$ – расстояние от точки до множества в пространстве Y. Отметим, что неравенства (2), (3) позволяют корректно определить понятие приближенного решения, например путем простым подбором функций r и w, и получить оценки погрешности приближенного решения возмущенного включения. Если отказаться от требования выпуклости значений отображения $\Psi : C \to \text{comp}[C]$ можно доказать аналог приводимого выше утверждения о существовании решения включения (1).

Кроме рассмотренного выше вопроса о разрешимости включения (1) в докладе изучаются свойства квазирешений возмущенного включения, формулируются принцип плотности и бэнг-бэнг принцип.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ И ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1]

Булгаков А.И., Пучков Н.П., Скоморохов В.В. (Тамбов)

aib@tsu.tmb.ru, uaa@hmd.nnn.tstu.ru

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$; $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $B[u, r]$ – замкнутый шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке u и радиусом $r > 0$; $B[u, 0] \equiv \{u\}$; $h[\cdot, \cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами в $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$. Обозначим $\overline{V}$ замыкание множества V в соответствующем пространстве; $V^\varepsilon \equiv \overline{\bigcup_{u \in V} B[u, \varepsilon]}$, если $\varepsilon > 0$, и $V^0 \equiv \overline{V}$. Обозначим через $K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ множество всех функций $\eta : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждых $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ функция $\eta(\cdot, x, \delta)$ измерима; при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $\delta \in [0, \infty)$ функция $\eta(t, \cdot, \delta)$ непрерывна; для каждых $U \in \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0, \infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta} : [a, b] \to [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in U$ и $\tau \in [0, \delta]$ выполняется неравенство $\eta(t, x, \tau) \leq m_{U,\delta}(t)$; при почти всех $t \in [a, b]$ и каждого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения $\lim\limits_{z \to x,\ \delta \to 0+0} \eta(t, z, \delta) = 0$, $\eta(t, x, 0) = 0$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

где отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00140).

$\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, что при всех $(t,x,\delta) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ выполняется оценка $h[F(t,x), \widetilde{F}(t,x,\delta)] \leq \xi(t,x,\delta)$. Отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть аппроксимирующим и степенью аппроксимации, соответственно.

Рассмотрим отображение $Q_{\eta_0,\eta} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_{\eta_0,\eta}(t,x,\delta) = \widetilde{F}(t, B[x, \eta_0(t,x,\delta)], \delta)^{\eta(t,x,\delta)}.$$

Будем считать, что функции $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot), \eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ задают соответственно внутренние и внешние возмущения аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$. Для каждого $\delta > 0$ рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Q_{\eta_0,\eta}(t, x(t), \delta), \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

В докладе обсуждаются условия, при которых множества решений включения (2) сходятся к множеству решений задачи (1).

Литература

1. Булгаков А.И., Скоморохов В.В. Аппроксимация дифференциальных включений // Мат. сб. 2002. Т.193, N2. С.35–52.

РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП И ДИССИПАТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА

Булинский А.В. (Москва)
bulinski@math.mipt.ru

Изучение эволюции квантовой системы может быть сведено к решению дифференциального уравнения в некоммутативной операторной алгебре, определяющего динамическую полугруппу вполне положительных отображений этой алгебры, см., например, [1,2]. Мы рассматриваем такие динамические полугруппы, в частности, квазисвободные E_0-полугруппы на факторах Неймана, порожденных фоковскими и нефоковскими представлениями алгебры канонических (анти)коммутационных соотношений, в связи с теорией дилатации таких полугрупп, обобщая результаты [3]. Для E_0-полугрупп эндоморфизмов алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и их генераторов Р.Пауэрсом было инициировано создание теории индекса, обобщающей на некоммутативный случай анализ симметрических операторов в гильбертовом пространстве. Мы используем для конструкции квазисвободных полугрупп, их генераторов и их расширений затравочные полугруппы в $L^2(R_+)$, определяемые диссипативными операторами Шредингера. Установлены условия, обеспечивающие существование волновых операторов для этих динамических полугрупп и возможность построения для них теории рассеяния Лакса – Филлипса.

Литература

1. B.V.R. Bhat, K.R. Parthasaraty. Markov dilations of nonconservative dynamical semigroups and a quantum boundary theory// Ann. Inst. H. Poincare. Probab. Statist. 1995. 31(4), 601-651.

2. А.М. Чеботарев. Квантовое стохастическое уравнение унитарно эквивалентно симметричной краевой задаче для уравнения Шредингера// Матем. заметки. 1997. 61(4), 612-622.

3. Г.Г. Амосов, А.В. Булинский, М.Е. Широков. Регулярные полугруппы эндоморфизмов факторов Неймана// Матем. заметки. 2001, 70(5), 643-659.

РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛОСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА МЕТОДОМ ФУРЬЕ–БИРКГОФА

Вагабов А.И. (Махачкала)

Рассматривается задача

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{\substack{2k_0+k_1\le 2m\\ k_0<m}} A^{(2k_0,k_1)}(x)\frac{\partial^{k_0+k_1}u}{\partial t^{k_0}\partial x^{k_1}}+f(t,x), \quad a<x<b,\ t>0, \quad (1)$$

$$\sum_{k_1<2m}\left\{\alpha^{(k_1)}\left.\frac{\partial^{k_1}u}{\partial x^{k_1}}\right|_{x=a}+\beta^{(k_1)}\left.\frac{\partial^{k_1}u}{\partial x^{k_1}}\right|_{x=b}\right\}=0, \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^{k_0}u}{\partial t^{k_0}}\right|_{t=0}=h_{k_0}(x), \quad k_0=\overline{0,m-1}. \quad (3)$$

Наши предположения относительно задачи (1)–(3) следующие:

а) Функции $\frac{dA^{(2k_0,k_1)}(x)}{dx}$ при $2k_0+k_1=2m$, и $A^{(2k_0,k_1)}(x)$ при $2k_0+k_1<2m$ непрерывны на $[a,b]$.

б) φ–корни характеристического уравнения

$$A^{(0,2m)}(x)\varphi^m+A^{(2,2m-2)}(x)\varphi^{m-1}+\ldots+A^{(2m-2,2)}(x)\varphi-1=0$$

имеют вид

$$\varphi_i(x)=c_iq(x),\ i=\overline{1,m},\ q(x)>0,\ x\in[a,b],\ |\arg c_i|<\frac{\pi}{4},\ c_i\ne c_j \text{ при } i\ne j.$$

в) Граничные условия (2) регулярны.

г) $h_k(x)$, $k=0,\ldots,m-2$, принадлежат области определения оператора задачи (1)–(3), $h_{m-1}(x)\in C[a,b]$, $h_{m-1}(x)|_{x=a,b}=0$.

д) $f(t,x)$ непрерывна на $[0,T]\times[a,b]$.

Неравенство $|\arg c_i|<\frac{\pi}{4}$ в условии б) означает условие 2 — параболичности уравнения (1) по И. Г. Петровскому.

Теорема. При условиях а)–д) классическое решение задачи (1)–(3) единственно и оно представимо в виде обобщенного ряда Фурье по собственным элементам дифференциального пучка, соответствующего уравнению (1) и краевым условиям (2).

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА ЗАЩИТНОГО ЭКРАНА

Вельмисов П.А., Еремеева Н.И. (Ульяновск)

velmisov@ulstu.ru, gvi@ditud.dgrad.ru

Исследуются колебания вязкоупругого элемента (в виде вязкоупругой пластины) защитного экрана, который является частью стенки резервуара, служащего для хранения жидкости. С одной стороны вязкоупругий элемент находится в контакте с жидкостью, полностью заполняющей резервуар, с другой обтекается неограниченным потоком жидкости.

Рассматривается задача о совместных малых колебаниях идеальной несжимаемой жидкости и вязкоупругой пластины-вставки, расположенной на бесконечной прямолинейной стенке. Колебания жидкости происходят в двух областях: сверху над стенкой - в верхней полуплоскости и снизу под стенкой - внутри резервуара прямоугольной формы.

На плоскости xOy, в которой происходят совместные колебания вязкоупругой вставки и жидкости, на оси Ox недеформируемым прямолинейным участкам стенки соответствуют промежутки $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$, вставке - $[a, b]$. В бесконечно удаленной точке скорость жидкости равна v_0, и имеет направление, совпадающее с направлением Ox.

Если обозначить через $w(x,t)$ прогиб пластины, $\varphi_1(x,y,t)$ - потенциал возмущенного потока жидкости в верхней полуплоскости, $\varphi_2(x,y,t)$ - потенциал возмущенного течения в прямоугольной области, то математическая постановка линейной задачи будет иметь вид:

$$\Delta\varphi_1 \equiv \varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), y > 0;$$

$$\varphi_{1y}(x,0,t) = 0, \quad x \in (-\infty, a] \cup [b, \infty); \quad \varphi_{1y}(x,0,t) = w_t + v_0 w_x, \quad x \in (a,b);$$

$$|\nabla\varphi_1|^2_\infty = \left(\varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2 + \varphi_{1t}^2\right)_\infty = 0;$$

$$\Delta\varphi_2 \equiv \varphi_{2xx} + \varphi_{2yy} = 0, \quad x \in (0,l), y \in (-c, 0);$$

$$\varphi_{2x}(0,y,t) = 0, \quad y \in [-c, 0]; \quad \varphi_{2x}(l,y,t) = 0, \quad y \in [-c, 0];$$

$$\varphi_{2y}(x,-c,t) = 0, \quad x \in [0,l]; \quad \varphi_{2y}(x,0,t) = 0, \quad x \in [0,a] \cup [b,l];$$

$$\varphi_{2y}(x,0,t) = w_t, \quad x \in (a,b);$$

$$L(w) \equiv D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \int_0^t R_1(\tau,t)\frac{\partial^4 w(x,\tau)}{\partial x^4}d\tau\right] + N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1\frac{\partial w}{\partial t} +$$

$$+\beta_0\left[w - \int_0^t R_2(\tau,t)\,w(x,\tau)\,d\tau\right] + \beta_2\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t};$$

$$L(w) = \rho_1(\varphi_{1t} + \nu_0\varphi_{1x}) - \rho_2\varphi_{2t} + P_2 - P_1 + \frac{1}{2}\rho_1\nu_0^2, \quad x \in (a,b), \ y = 0,$$

где ρ_1, ρ_2 – плотности жидкостей, P_1, P_2 – давления в жидкостях в состоянии покоя; D - изгибная жесткость, $R_1(\tau,t), R_2(\tau,t)$ - ядра релаксации, характеризующие вязкоупругие свойства материала вставки и ее основания. M - погонная масса пластины, N- сжимающая (растягивающая) пластину сила, β_1, β_2 -коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, β_0 - коэффициент жесткости основания

Решение поставленной задачи сведено к исследованию интегро-дифференциального уравнения относительно функции $w(x,t)$. Для этого уравнения проведено исследование его свойств, в том числе устойчивости по Ляпунову, и разработан численный метод решения начально–краевых задач.

ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Вздорнова О.Г. (Екатеринбург)
vog@imm.uran.ru

Рассматривается задача об управлении трубкой траекторий дифференциальной управляемой системы [1-5]

$$dx = A(t)xdt + B(t)du, \qquad x(0) \in X_0, \quad 0 \le t \le T$$

с обобщенными (импульсными) управлениями $u(\cdot) \in V_p^m$, где V_p^m - пространство m-векторных функций $u(\cdot)$ ограниченной вариации.

Управляющие воздействия выбираются из следующего класса функций U. Пусть $E_0 = \{l \in R^m \mid l'Ml \le 1\}$, - эллипсоид в R^m, где M – симметрическая положительно определенная матрица.

В пространстве C_q^m непрерывных m-векторных функций рассмотрим эллипсоид

$$E = \{y(\cdot) \in C_q^m | y'(t)My(t) \le 1 \forall t \in [0,T]\} = \{y(\cdot) \in C_q^m | y(t) \in E_0 \forall t \in [0,T]\}.$$

Пусть $U = E^*$ – эллипсоид в V_p^m, сопряженный к E.

Управление $u^*(\cdot)$ назовем допустимым, если $u^*(\cdot) \in U$ и при любом начальном условии $x(0) = x_0 \in X_0$ решение $x(t)$ дифференциальной системы с $u(t) = u^*(t)$ удовлетворяет требованию: $x(T) \in X_1$, где X_1 – заданный выпуклый компакт в R^n.

Ограничение $u(\cdot) \in U$ допускает, в частности, кусочно-постоянные функции $u(\cdot)$, скачки которых $\Delta u(t_i) = u(t_{i+1}) - u(t_i)$ $(t_i \in [0,T])$ лежат в эллипсоиде

$$E_0^* = \{l \in R^m \mid l'M^{-1}l \le 1\},$$

сопряженном к E_0. Рассматривается следующая задача:

Среди допустимых управлений найти управление u_0, минимизирующее полный импульс $\varphi(u_0) = ||u_0(\cdot)||_{v,p} = \min ||u(\cdot)||_{v,p}$.

В работе установлена структура оптимального импульсного управления, решающего данную задачу, доказан аналог принципа максимума и рассмотрен иллюстрирующий пример.

Литература

1. А.Б. Куржанский Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

2. Э.Б. Ли, Л. Маркус Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

3. С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ. грант № 00–01–00369.

4. О.Г. Вздорнова О построении множества достижимости в задаче импульсного управления с эллипсоидальными ограничениями//Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 33-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002. С. 224-228.

5. Т.Ф. Ананьина Задача оптимизации управляемой системы в классе обобщенных воздействий // Дифференц. уравнения, 1975. Т. 11, 4. С. 595-603.

ВЫБОР ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Вишнякова О.М. (Псков)
viom@volny.edu

Рассмотрим модель управления проектом в условиях неопределенности. Пусть $x \in X$ - состояние системы, $X \subset R^l$ - множество возможных состояний системы, $Y \subset R^n$ - множество всех неопределенностей. Неопределенность $y \in Y$ реализуется одновременно с выбором $x \in X$ Величина $f(x, y)$ есть выигрыш лица принимающего решение (ЛПР). ЛПР действует исходя из принципа гарантированного результата [1]. При этом ЛПР привлекает экспертов. $c(\alpha)$ - функция стоимости эксперта и α - уровень компетентности эксперта, $\alpha \in [0,1]$ Чем больше,α тем более знающий эксперт, и тем более "узкий" интервал Y_α из которого реализуется y он указывает. Считаем $c(0) = 0$, $c(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 1$ В этом случае ЛПР выбирает x и α так, чтобы получить гарантированный результат для ЛПР

$$F = \max_{\alpha\in[0,1]} \max_{x\in X} \min_{Y_\alpha\in Y} \min_{y\in Y_\alpha} (f(x, \alpha, y,) - c(\alpha)) \qquad (1)$$

Теорема1 *Пусть $X \subset R^l$ и $Y \subset R^n$ - выпуклые компакты. Функция $f(x, y, \alpha)$ - непрерывна на $X \times [0,1) \times Y$ и строго выпукла на $Y \in R^n$ при каждых фиксированных $(x, \alpha) \in X \times [0,1]$. Функция стоимости эксперта $c\alpha$ непрерывна на $[0,1)$ и $c(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 1$. Тогда существует значение в (1).*

Теорема2 *Пусть $X \subset R^l$ и $Y \subset R^n$ - выпуклые компакты. Функция $f(x, y, \alpha)$ - непрерывна на $X \times [0,1) \times Y$ и строго выпукла на $Y \in R^n$ при каждых фиксированных $(x, \alpha) \in X \times [0,1]$ и строго вогнута на $X \times [0,1)$ при каждом фиксированном $Y \subset R^n$. Функция стоимости эксперта $c\alpha$ непрерывна и строго выпукла на $[0,1)$. Тогда значение в (1) единственно.*

Модельный пример Пусть функция цели $f(x, \alpha, y,) = (x + \alpha - y)^2$ рассматривается при $x \in [0,2]$; $y \in [0,1]$; $\alpha \in [0,1]$. Функция стоимости эксперта $c(\alpha) = \frac{k\alpha}{1-\alpha}$ Для данных функций соблюдены все условия теоремы 1. Коэффициент $k > 0$ характеризует рынок экспертов. Пусть $(x, \alpha) \subset [0,2] \times [0,1]$ фиксированы, $\min\limits_y (x + \alpha - y)^2 = (x + \alpha - 1)^2$ если $(x + \alpha) > 1$, $y^* = 1$. В случае $(x + \alpha) \le 1$ имеем нулевое решение. $F(\alpha) = \max\limits_x (x + \alpha - 1)^2 = (\alpha + 1)^2$, $x^* = 2$. Теперь ищем $\max\limits_\alpha (F(\alpha) - c(\alpha))$ Условие первого порядка: $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 2 - k = 0$

Для различных k , будем получать различные решения. k=0.5, α= 0.6, F=1.81; k=1, α=0,4, F=1.29; k=1.5,α=0.21, F=1.065; k=2, α=0, F=1 ;

Литература

1.Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мицниереба, 1996.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ГУРСА-ДАРБУ С ПОТОЧЕЧНЫМ ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

Гаврилов В.С., Сумин М.И. (Нижний Новгород)
m_sumin@mm.unn.ac.ru

В докладе анонсируются новые результаты исследования параметрических задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, начатого в [1]. Изучается задача оптимального управления

$$I_0(u) \to \inf,\ \ I_1(u) \in \mathcal{M} + q,\ \ u \in \mathcal{D},\ \ q \in C(\hat{\Pi}) \text{ -- параметр,} \tag{1}$$

где $I_1(u)(x,y) \equiv H(x,y,z[u](x,y))$,

$$I_0(u) \equiv \int_{\Pi} F(x,y,z[u](x,y), z_x[u](x,y), z_y[u](x,y), u(x,y))\,dxdy +$$

$$\sum_{j=1}^{l} G_j(z[u](x^j,y^j)),\ \ (x^j,y^j) \in \Pi,$$

$\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(\Pi) : u(x,y) \in U \text{ п.в. на} \Pi\}$, $U \subset R^m$ - компакт, $\Pi \equiv [0,a] \times [0,b]$, $\hat{\Pi} \subset \Pi$ - компакт, $\mathcal{M} \subset C(\hat{\Pi})$ - множество неположительных на $\hat{\Pi}$ функций, $z[u](x,y)$, $(x,y) \in \Pi$, - абсолютно непрерывное решение нелинейной системы Гурса-Дарбу ($z \in R^n$)

$$z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y,u(x,y)),\ z(x,0) = \varphi(x),\ z(0,y) = \psi(y).$$

При некоторых естественных для теории оптимального управления условиях на исходные данные задачи (1) показывается, что для подобных нелинейных распределенных систем естественным является рассмотрение в качестве "основного элемента" теории так называемых минимизирующих приближенных решений (м.п.р.) в смысле Дж.Варги. Рассматриваются дифференциальные свойства соответствующей понятию м.п.р. функции значений $\beta : C(\hat{\Pi}) \to R^1 \cup \{+\infty\}$ задачи (1) как функции параметра q, а также их связь с различными свойствами регулярности и нормальности задачи [1]. Показывается, в частности, что: 1) регулярность задачи (1) имеет место для значений q из достаточно богатого в $dom\,\beta$ множества (типичность регулярности); 2) нормальность задачи (1) влечет липшицевость ее функции значений (проблема чувствительности). Приводятся иллюстративные примеры.

Литература

1. Sumin M.I. // Control and Cybernetics. 2000. V.29. No.2. P.449-472.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №01-01-00979.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ФОПМУЛА ГРИНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ[1]

Гаршин С.В. (Воронеж)

На множестве $\Gamma \times \mathbf{R}$, где $\Gamma = \cup_{i=1}^{3} \{\overline{\Theta} + x_i \overline{h_i} \, | x_i \geq 0\}$ ($\overline{\Theta}$ - нулевой вектор, являющийся началом трех единичных, компланарных, попарно неравных векторов $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$) рассматривается задача

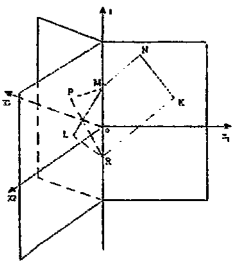
$$\begin{cases} LU = U^i_{x_i x_i} - U_{tt} \quad (i = \overline{1,3}), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} U^i_{x_i}(0,t) = 0 \\ U^1(0,t) = U^2(0,t) = U^3(0,t) \end{cases} , \tag{1}$$

$U^i(x_i, t): \ R^+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \forall i = \overline{1,3}$ На точках $M(0,a) \in Ot$, $N(x_1^0, t^0)$, $K(x_1^1, t^1) \in tOx_1$, $L(x_2^1, t^2) \in tOx_2$, $P(x_3^1, t^2) \in$
$\in tOx_3$ строятся характеристики MN ($\angle OMN = \frac{3\pi}{4}$), NK ($\angle MNK = \frac{\pi}{2}$, $x_1^1 > x_1^0$), ML ($\angle LMO = \frac{3\pi}{4}$), MP ($\angle PMO = \frac{3\pi}{4}$). Соединив точки K, L, P с точкой $R(0, 2t^1 - a)$, получим в $\Gamma \times \mathbf{R}$ область $\Pi = (MNKR) \bigcup (MRL) \bigcup \bigcup (MRP)$. Ищется решение задачи (1), определенное на Π и принимающее заданные значения на отрезках MN, NK, ML, и MP:

$$\begin{cases} U^1(x_1, x_1 + a) = \psi^1, \ 0 \leq x_1 \leq x_1^0 \\ U^1(x_1, -x_1 + 2x_1^0 + a) = \psi^2, \ x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^1 \\ U^2(x_2, -x_2 + a) = \gamma, \ 0 \leq x_2 \leq x_2^0 \\ U^3(x_3, -x_3 + a) = \kappa, \ 0 \leq x_3 \leq x_3^0 \end{cases} . \tag{2}$$

Теорема. Пусть ψ^1, ψ^2, γ, κ удовлетворяют естесственным условиям гладкости. Тогда задача (1)-(2) разрешима, причем единственным образом.

На $\Gamma \times \mathbf{R}$ введен также сопряженный к L оператор, и он оказывается совпадающим с исходным. Для любой области из $\Gamma \times \mathbf{R}$ получен аналог формулы Грина. Тем самым, созданы предпосылки к применению метода Римана для нахождения решения гиперболического уравнения на $\Gamma \times \mathbf{R}$.



[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00417,01-01-418,02-01-00307),Минобразования РФ (КЦ СПбГУ)(проект N E00-1.0-154) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047)

К ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Гедда Л. (Воронеж)

В работе изучается оператор $\mathcal{F}$, соответствующий задаче о периодических решениях для нелинейного дифференциального включения

$$x'(t) + Ax(t) \in F(t, x(t))$$

в гильбертовом пространстве E. Предполагается, что:

A) оператор $A : \Delta(A) \subset E \to E$ — антимонотонный, т.е. существует $p > 0$ такой, что $\forall z_i \in Ax_i$, $i = 1, 2$ $\langle z_1 - z_2, x_1 - x_2 \rangle \le -p\|x_1 - x_2\|^2$;

F_1) для любого $x \in E$ многозначное отображение $F(\cdot, x) : [0, T] \to KV(E)$ имеет измеримый селектор;

F_2) почти для всех $t \in [0, T]$ отображение $F(t, \cdot) : E \to KV(E)$ полунепрерывно сверху;

F_3) для любого непустого ограниченного множества $\Omega \in E$ существует функция $U_\Omega \in L^1_+[0, T]$ такая, что для всех $x \in \Omega$ и почти всех $t \in [0, T]$ выполняется неравенство $\|F(t, x)\| \le U_\Omega(t)$;

F_4) существует константа $k > 0$ такая, что для любого ограниченного множества $\Delta \subset E$ выполнено равенство: $\mathcal{X}(F(t, \Delta)) \le k\mathcal{X}(\Delta)$ для п.в. $t \in [0, T]$. Здесь $\mathcal{X}$ — мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве E;

F_T) оператор F — T-периодический относительно первого аргумента, т.е. для любого $x \in E$, $F(t, x) = F(t + T, x)$ для п.в. t.

Оператор $\mathcal{F}$ строится следующим образом: сначала рассматривается оператор S, сопоставляющий непрерывной T-периодической функции f того же периода периодическое решение дифференциального включения $x'(t) + Ax(t) \ni f(t)$, а затем $\mathcal{F}$ определяется равенством $\mathcal{F} = S \circ \mathcal{P}_F$, где $\mathcal{P}_F(x) = \{g : g \in L^1_T(E), g(t) \in F(t, x(t))$ для п.в. $t\}$.

В случае задачи Коши подобный оператор суперпозиции рассматривался в [1].

Теорема. *Пусть выполнены условия A), F_1)-F_4) и F_T). Тогда многозначный оператор $\mathcal{F}$ имеет стягиваемые образы, полунепрерывен сверху и уплотняет относительно меры некомпактности Ψ, для любого ограниченного подмножества Ω из $C_T(E)$, определенной следующим образом:*

$$\Psi(\Omega) = \max_{\Delta \in D(\Omega)} \sup_t \mathcal{X}(\Delta(t))$$

где $D(\Delta)$ — множество всех счетных подмножеств множества Δ. Более того $\Psi(\mathcal{F}(\Omega)) \le \frac{k}{p}\Psi(\Omega)$.

Литература

1. J.-F. Couchouron, M. Kamenski. // Nonlinear Analysis. 42 (2000). 625–651.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 02-01-00307

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Геккиева С.Х. (Нальчик)

niipma@yahoo.com

Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = u_{xx}(x,y), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y) : 0 < x < \infty, \ y > 0\}$. Здесь D_{0y}^{α} – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования порядка α [1, с. 28].

Задача. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y \to 0} y^{1-\alpha} u(x,y) = \tau(x), \quad u(0,y) = \varphi(y), \tag{2}$$

где $\tau(x)$, $\varphi(y)$ – заданные функции $\left(\lim\limits_{y\to 0} y^{1-\alpha}\varphi(y) = \tau(0)\right)$.

Теорема. *Пусть функция $\tau(x) \in C(\bar{R}_+)$, $y^{1-\alpha}\varphi(y) \in C(\bar{R}_+)$ и $u(x,y)$, $u_x(x,y)$ – ограничены для $0 < x < \infty$, $y \geq 0$. Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение такое, что $y^{1-\alpha}u(x,y) \in C(\bar{D})$, u_{xx}, $u_y \in C(D)$.*

Решение представимо в виде

$$u(x,y) = \int_0^{\infty} G(x,y,\xi,0)\tau(\xi)d\xi + \int_0^{y} \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \varphi(\eta)d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2}(y-\eta)^{\delta-1}\left[e_{1,\delta}^{1,\delta}(-|x-\xi|(y-\eta)^{-\delta}) - \right.$$

$$\left. -e_{1,\delta}^{1,\delta}(-|x+\xi|(y-\eta)^{-\delta})\right].$$

Здесь $\delta = \alpha/2$ и ([2]) $e_{b,c}^{p,q}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k/[\Gamma(p+kb)\Gamma(q-ck)]$, $\quad b > c$.

Литература

[1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301с.

[2] Псху А.В. Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. -Нальчик: Сообщения Научно-исследовательского института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. 2001 – 43с.

О БИФУРКАЦИИ ХОПФА В ОДНОЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОЙ СИСТЕМЕ

Глебова Н.В. (Воронеж)
gga_nvg@mail.ru

Рассматривается система вида

$$\begin{cases} \dot{x} &= a1x - a2xy - a3x^2 \\ \dot{y} &= -b1y + b2xy - b3y^2 + b4(b5 - y); \end{cases}$$

моделирующая поведение сообществ типа "хищник - жертва" с учетом влияния "заповедника".

Изучаются условия возникновения бифуркации Хопфа в данной системе. Характер устойчивости положения равновесия исследуется с помощью алгоритма Мак - Кракена [1].

Литература

1. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. - М.:Мир,-1980.

2.Эрроусмит Д.,Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения качественная теория с приложениями.- М:Мир,-1986.-243.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В НЕКОТОРЫХ СМО

Головко Н.И., Катрахов В.В. (Владивосток)
katrakhov@mail.ru, zi-fesaem@mail.ru

Рассматривается система массового обслуживания (СМО) с конечным накопителем, экспоненциальным обслуживанием, с дважды стохастическим входным пуассоновским потоком заявок со скачкообразной интенсивностью, приведённая в монографии [1]. Развивая методику этой монографии. в [2] предложен матричный метод нахождения стационарного распределения числа заявок, доказана теорема существования и единственности стационарного режима. В докладе рассматривается нестационарный вариант этой системы. Имеем систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial q_0(t,x)}{\partial t} = -(x+\alpha)q_0(t,x) + \mu q_1(t,x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_0(t,y)dy,$$

$$\frac{\partial q_k(t,x)}{\partial t} = xq_{k-1}(t,x) - (x+\mu+\alpha)q_k(t,x) + \mu q_{k+1}(t,x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_k(t,y)dy,$$

$$1 \le k \le N-1,$$

$$\frac{\partial q_N(t,x)}{\partial t} = xq_{N-1}(t,x) - (\mu+\alpha)q_N(t,x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_N(t,y)dy.$$

Здесь 1) $\varphi(x)$ есть функция распределения (скачков входного потока) на отрезке $[a,b]$, $0 < a < b$, то есть $\varphi(x) \ge 0$ и $\int_a^b \varphi(x)dx = 1$, 2) интегралы по этому отрезку от характеристик $q_k(t,x)$ представляют по k распределение числа заявок, находящихся на обслуживании в данной СМО, 3) $\alpha > 0$ –

параметр системы, 4) $\mu > 0$ – интенсивность пуассонского выходного потока (интенсивность обслуживания).

Теорема. *Приведённая выше система интегро-дифференциальных уравнений при любой функции распределения φ и при любых параметрах α, μ имеет в подходящем банаховом пространстве единственное решение, которое с экспоненциальной скоростью при $t \to \infty$ сходится к финальному состоянию, причём это финальное состояние не зависит от начального состояния $q_k(0,x)$, $1 \le k \le N-1$.*

С точки зрения теории случайных процессов это утверждение доказывает одну из важнейших характеристик – эргодичность рассматриваемых СМО.

Литература

1. Головко Н.И., Катрахов В.В. Анализ систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде. Владивосток, изд-во ДВГАЭУ, 2000, 18 п.л.

2. Головко Н.И., Катрахов В.В., Кучер Н.А. Матричный метод анализа стационарной модели системы массового обслуживания при скачкообразной интенсивности входного потока. Владивосток, "Дальнаука", 2001. 19 с. (Препринт / ДВО РАН. Институт прикладной математики; 3).

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Гоц Е.Г., Пенкин О.М. (Воронеж)

penkin@comch.ru

Для решений уравнения $\Delta u = 0$, где Δ - аналог оператора Лапласа на стратифицированном множестве, обсуждается следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы о среднем для гармонических функций.

Теорема. *Пусть u - гармоническая функция в смысле оператора Δ на стратифицированном множестве. Тогда для любого $X \in \Omega$ и достаточно малого $r = r(X) > 0$ имеет место следующая формула:*

$$\frac{d}{dr}\left(\lambda_m \mathfrak{M}^m_{r,x}(u) + \frac{\lambda_{m-1}}{r}\mathfrak{M}^{m-1}_{r,x}(u) + \ldots + \frac{\lambda_0}{r^m}\mathfrak{M}^0_{r,x}(u)\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\lambda_{m-1}\mathfrak{M}^{m-1}_{r,x}(u) - \ldots - \frac{m\lambda_0}{r^{m+1}}\mathfrak{M}^0_{r,x}(u)$$

Здесь

$$\mathfrak{M}^k_{r,x}(u) = \frac{1}{|\partial\mathfrak{B}^k_r(X)|}\int\limits_{\partial\mathfrak{B}^k_r(X)} u\,d\mu$$

- среднее по стратифицированной сфере $\partial\mathfrak{B}^k_r(X)$, вычисленное по специальной "стратифицированной" мере.

В качестве приложения доказывается сильный принцип максимума для решения неравенства $\Delta u \ge 0$.

[1]Работа выполнена при поддержки РФФИ: гранты 01-01-00417, 01-01-00418 и программой "Университеты России" грант УР.04.01.047

ОДНА МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА В НЕЙРОНЕ[1]

Грищенко А.В. (Воронеж)

Рассматривается следующая модель распространения электрического импульса в нейроне (см., например,[1]):

$$\begin{cases} u_t = pu_{xx} - q(x,t)u, \ x \in [0,l], t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) \equiv u_0 (= const) \end{cases}, \qquad (1)$$

где $q(x,t) = q_0 + e^{-t}$ при $x \in U_\varepsilon(\xi)$, $q(t) = q_0$ при $x \notin U_\varepsilon(\xi)$. О решении $u(x,t)$ предполагается, что $u(x,\cdot) \in C^1[0,\infty]$ и $u(\cdot,t) \in C^2[0,l]$ Введём в рассмотрение следующие функции: $f_1(x,s) = \frac{u_0}{2(s+q_0)}(e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} - e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}(\xi-\varepsilon)}) + C_1(s)$; $f_2(x,s) = \frac{u_0}{2(s+q_0)}(e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} - e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}(\xi-\varepsilon)}) + C_2(s)$; $\alpha_1(x.s) = \frac{u_0}{2(s+q_0)}(e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} - 1) + C_3(s)$; $\alpha_2(x,s) = \frac{u_0}{2(s+q_0)}(e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} - 1) + C_4(s)$; $\beta_1(x,s) = \frac{u_0}{2(s+q_0)}(e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} - e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}(\xi+\varepsilon)}) + C_5(s)$; $\beta_2(x,s) = \frac{u_0}{2(s+q_0)}\times$ $\times(e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} - e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}(\xi+\varepsilon)}) + C_6(s)$.

Утверждение. Если существует решение ($C_1(t)$, $C_2(t)$,$C_3(t)$,$C_6(t)$) системы:

$$\begin{cases} e^{-e^{-t}}(C_1(t) * G_1(t) + C_2(t) * G_2(t)) = F_1(t) + C_3(t) * G_3(t) \\ e^{-e^{-t}}(C_2(t) * G_4(t) - C_1(t) * G_5(t)) = F_2(t) + C_3(t) * G_6(t) \\ e^{-e^{-t}}(C_1(t) * G_7(t) + C_2(t) * G_8(t)) = F_3(t) + C_6(t) * G_9(t) \\ e^{-e^{-t}}(C_2(t) * G_{10}(t) - C_1(t) * G_{11}(t)) = F_4(t) + C_6(t) * G_{12}(t) \end{cases}$$

тогда решение задачи (1) описывается равенствами: $u(x,t) = e^{-e^{-t}} \frac{1}{2\pi i}\times$ $\times \int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{st}(f_1(x,s)e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} + f_2(x,s)e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x})ds$, при $x \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$;

$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{st}(\alpha_1(x,s)e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} + \alpha_2(x,s)e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x})ds$, при $x \in [0.\xi - \varepsilon]$

$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{st}(\beta_1(x,s)e^{-\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x} + \beta_2(x,s)e^{\sqrt{\frac{s+q_0}{p}}x})ds$, при $x \in [\xi + \varepsilon]$.

Функции $G_i(t)$, $F_j(t)$ могут быть явно описаны через p, q_0, u_0 и l.

Аналогичный результат получен и при $u_0(x) \not\equiv const$.

Литература

[1] Pokornyi Yu. V., Pryadiev V. L.,Borovskikh A. V., Pokrovsky A. N. The problem of intracellular and extracellular potentials of dendritic trees // Proceedings of The International Symposium "electrical Activity of The Brain: Mathematical Models & Analytical Methods". Pushchino, 1997.P.22-24.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00417, 01-01-418, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ)(проект № Е00-1.0-154) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047)

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Губенков А. А. (Саратов)

Рассмотрим произвольную спектральную задачу $Lu = \lambda qu$. Запишем функционал $F = \frac{q^{-1}[Lu-\lambda qu], Lu-\lambda qu}{(qu,u)}$. Очевидно, что данный функционал стационарен на собственных функциях u_n оператора L и принимает минимальное значение $F = 0$ тогда и только тогда, когда $u = u_n$ и $\lambda = \lambda_n$.

Ниже предлагается способ, который позволяет без каких-либо дополнительных мер, например, без ортогонализации используемой функции сравнения к ряду других, при отсутствии сведений о других собственных числах уравнения, найти с желаемой точностью все λ_i в интересующем нас интервале $[\xi, \eta]$. Схема вычислений такова. Выберем полную систему координатных функций $\{v_n\}$. Пробную функцию представим в виде $u = \sum_{n=1}^{N} a_n v_n$.

Используя процедуру Ритца, несложно найти для введенной функции сравнения минимально возможное значение F при заданных λ и N. Обозначим его через $F_N(\lambda)$. Тогда при переборе λ мы получим:

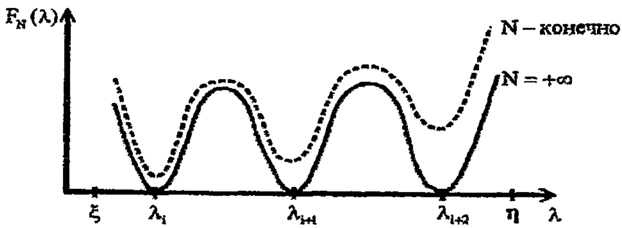


Рис.1. Качественное поведение функции $F_N(\lambda)$ на $[\xi, \eta]$.

Минимальные значения для кривой соответствуют с определенной точностью собственным числам λ_i. С помощью метода Вайнштейна несложно найти грубые границы искомых собственных чисел, а затем эти границы уточнить с помощью формул Като или других методов оценки приближенного решения.

Данный метод апробирован на акустических твердотельных задачах, описываемых оператором линейной теории упругости. Детально разработанный эффективный алгоритм нахождения собственных значений приведен в работе [1].

Литература

1. Губенков А.А. Вариационный метод расчета собственных частот трехмерных акустических резонаторов. // Межвузовский сборник научных трудов "Функциональные электродинамические системы и устройства низких и СВЧ частот". Саратов. СГТУ. 2001. С. 48-53.

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^\alpha[0,1]$ [1]

Гуревич А.П., Хромов А.П. (Саратов)

Рассмотрим оператор $Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)dt$, где ядро $A(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям: а) производные $A_{x^s t^j}(x,t) = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)$, $s,j = \overline{0,n}$ непрерывны при $t \le x$ и $t \ge x$; б) $P_{sj}(t) = \Delta A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t} = A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t+0} - A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t-0} \in C^{n-1-j}[0,1]$, $j = \overline{0,n-1}$, $s = \overline{0,n}$; в) A^{-1} существует; г) $\Delta A_{x^s}(x,t)|_{x=t} = \delta_{s,n-1}$, $s = \overline{0,n}$ ($\delta_{s,n-1}$ - символ Кронекера).

В настоящей работе изучается сходимость в пространстве $C^\alpha[0,1]$ средних Рисса вида $-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f d\lambda$. Здесь α – одно из чисел $0,1,\dots,n-1$, $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ – резольвента Фредгольма, а $g(\lambda,r)$ удовлетворяет следующим условиям: д) $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$; е) существует постоянная $C > 0$ такая, что $|g(\lambda,r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$; ж) существуют положительные β, h такие, что

$$g(r\exp i\varphi, r) = \begin{cases} O(|\varphi|^\beta) \text{ при } |\varphi| \le h, \ n = 4n_0, \\ O(|\varphi - \pi|^\beta) \text{ при } |\varphi - \pi| \le h, \ n = 4n_0 + 2, \\ O\left(\left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right|^\beta\right) \text{ при } \left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right| \le h, \ n - \text{нечетное}; \end{cases}$$

з) $g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Известно [1], что при выполнении условий а)-г) оператор A^{-1} представляет собой интегро-дифференциальный оператор $A^{-1}y = (E+N)(y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y)$, $V_j(y) = U_j(y) - (y,\varphi_j) = 0$, $j = \overline{1,n}$, где E - единичный оператор, $Nf = \int_0^1 N(x,t)f(t)dt$, ядро $N(x,t)$ которого непрерывно при $t \le x$ и $t \ge x$, $a_1,\dots,a_n$ – некоторые константы, $U_j(y) = \sum\limits_{\mu=0}^{\sigma_j}(a_{j\mu}y^{(\mu)}(0) + b_{j\mu}y^{(\mu)}(1))$, $j = \overline{1,n}$, $|a_{j,\sigma_j}| + |b_{j,\sigma_j}| > 0$, $n-1 \ge \sigma_1 \ge \dots \ge \sigma_n \ge 0$, $\sigma_j > \sigma_{j+2}$, $(y,\varphi_j) = \int_0^1 y(x)\varphi_j(x)dx$, $\varphi_j(x) \in C[0,1]$. Предположим дополнительно, что выполнено условие

и) $U_j(y)$, $j = \overline{1,n}$, регулярны по Биркгофу ([2], с.66).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* а)-и). *Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\, d\lambda \right\|_{C^\alpha[0,1]} = 0, \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in C^\alpha[0,1]$ *и* $V_j(f) = 0$ *для тех* j, *для которых* $\sigma_j \le \alpha$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-01-00075), программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123) и программы "Университеты России".

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* а)-з) *и еще* $A(x,t) = \overline{A(t,x)}$. *Тогда для того, чтобы имело место* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x) \in \Delta_\alpha$, *где* Δ_α *- замыкание в пространстве* $C^\alpha[0,1]$ *множества* $\{f(x) \mid f(x) = Ag,\ g(x) \in L[0,1]\}$.

Литература

1. Хромов А. П. *Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов* // Матем. сб. – 1981. – Т. 114(156). – № 3. – С. 378–405.

2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ

Данкова И.Н.

Проверочные контрольные работы за полугодия и полный курс основной школы можно проводить с использованием ПЭВМ.

Из всего многообразия умений в большей степени проверяются при решении заданий: умение оперировать понятиями; умение применять теорию к решению практических задач; умение самостоятельно мыслить; знание "языка математики" и умение записать символами математические соотношения.

На основе критериев, определяющих объективный контроль, установлено, что основным фактическим требованием эффективности использования ЭВМ для проверки знаний с учетом объема, полноты, обобщенности, целенаправленности и действенности является оптимальный уровень сложности заданий, предъявляемых к контролю. Мы использовали три уровня сложности задач.

Первый уровень — репродуктивно-адаптивный, базовый, который заключается в накоплении "фонда знаний", состоящий в основном из фактов; в умении осуществлять простейшие логические операции по готовому образцу.

Второй уровень — аналитико-синтетический; достигнув его, учащиеся проявляют умение обобщать, устанавливать связи ранее изученного материала с новым, выделять главные идеи, основные положения темы, раздела, обосновывать разнообразные связи и проводить аналогии.

Третий уровень — творческий; он требует переноса знаний в новые ситуации, создания нестандартных алгоритмов познавательных и практических действий.

При контроле на ПЭВМ используются задания с альтернативной формой ответа. Допускаемые при решении задач ошибки можно условно разбить на три вида: ошибки в вычислениях; незнание формул, неумение выбрать из них наиболее быстро приводящие к рациональному решению; незнание алгоритмов решения задач конкретного типа.

Компьютер в процессе контроля выполняет не только диагностическую роль, но и предоставляет возможности для реализации "индивидуальной" технологии обучения. Во время диалога с ПЭВМ происходит "объединение мышления" человека и машины. Компьютер оказывает стимулирующее воздействие на внимание учащегося, активизирует его мыслительную деятельность и создает психологический климат, благоприятный для эффективного выполнения заданий.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ, ОХВАТЫВАЮЩИХ ВСЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ, $4k+1$ ИЗ КОТОРЫХ РАСПОЛОЖЕНЫ НА ОСИ АБСЦИСС, ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Денисов В.С., Примакова С.И. (Витебск)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$x' = y^r + f(x);\ y' = g(x); \tag{1}$$

где $r = (2m-1)/(2n-1)$ и $m, n \in N$, при выполнении условий:

A. $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные непрерывные функции;

B. $f(x) > 0, g(x) \geq 0$ на $(x_{n_{2i-2}}; x_{n_{2i-1}})$; $f(x) < 0, g(x) \leq 0$ на $(x_{n_{2i-1}}; x_{n_{2i}})$; при $i = \overline{1,k}$; $g(x) < 0$ на $(x_{n_{2k}}; \infty)$; $f(x) < 0$ на $(x_{n_{2k}}; x_j)$; $f(x) > 0$ на $(x_j; x_{j+2})$; $g(x_i) = 0$ при $i = \overline{1, n_{2k}}$; $f(x_{n_i}) = f(x_j) = 0$ при $i = \overline{0, 2k-1}$, где $x_0 = x_{n_0} = 0$, и функции $f(x)$ и $g(x)$ обеспечивают существование и единственность решений при любых начальных значениях (x, y).

Обозначим

$$G(x) = \int_0^x -g(s)ds;\ \varphi(x) = \int_0^x -g(s)f(s)ds;\ M = \max_{[0, x_{j+2}]} |f(x)|;$$

$$k_i(\gamma) = \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{r}} + \frac{d_i}{M^\alpha(\gamma-1)^\alpha}\right)^r + \frac{1}{\gamma-1}, \alpha = \frac{2p}{2m-1} = \frac{2(m+n-1)}{2m-1};$$

$d_i = G(x_{n_{2i-2}}) - G(x_{n_{2i-1}})$; $b_i = G(x_{n_{2i}}) - G(x_{n_{2i-1}})$; $\beta = 2p/(2n-1)$.

Сформулируем один из полученных результатов.

Теорема. Если выполнены условия A, B и существуют $x_{j+1} \in (x_j; x_{j+2})$ и $\gamma > 1$ такие, что выполнены неравенства:

$$\max_{i=\overline{0,n_{2k}}} \left\{\frac{1}{\beta}(-f(x_i))^\beta + G(x_i)\right\} < G(x_j);\ \varphi(x_{j+1}) \geq 2\varphi(x_j)/(1-\gamma);$$

$$G(x_{j+2}) - G(x_{j+1}) \geq \frac{1}{\beta}(\gamma M)^\alpha + 2M(\gamma M)^{\frac{1}{r}}; b_i \geq k_i(\gamma)d_i,\ i = \overline{1,k},$$

то система (1) в полосе $-x_{j+2} \leq x \leq x_{j+2}$ имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, окружающий все особые точки системы, $4k+1$ из которых лежат на оси абсцисс.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ И СБЕРЕЖЕНИЯМИ

Дикусар В.В. (Москва), С. Рудецка - Гутковска (Радом)
E-mail: dicussar@ccas.ru

Рассматривается простая модель производителя, предложенная в работе [1]. Динамика капитала и заемного капитала описывается следующей системой уравнений

$$\dot{K} = -aK + F(K, L) - sL/p + \frac{\sigma u - rB}{p},$$
$$\dot{B} = u, \quad \dot{L} = vL, \quad t \in [0, T],$$
$$K(0) = K_0, \quad B(0) = B_0, \quad L(0) = L_0,$$
$$0 \le u \le u_1, \quad L \le 0, \quad k \le 0, \quad pK \le \sigma B$$

Здесь K — капитал, B — накопленный заемный капитал (фазовые переменные); u — скорость эмиссии ценных бумаг (управления); остальные переменные известные функции времени [1].

Рассматривается также неопределенный горизонт времени.

$$\int_0^i nftye^{-\delta t} p(t) K(t) g(t) dt \Longrightarrow \max,$$

где δ — коэффициент дисконтирования капитала; $g(t)dt$ — вероятность нахождения времени в интервале $[t, t + dt]$.

Модель формирования сбережений описывается уравнениями

$$\dot{M} = aM + rB = pC - Z + \Phi, \quad t \in [0, T],$$

$$\dot{B} = Z/\sigma, \ M(0) = M_0, \quad B(0) = B_0, \int_0^T e^{-\delta} R(t) dt \Longrightarrow \max,$$

$$-\frac{\sigma B}{\Delta} \le Z \le \frac{M}{\Delta}, \quad pC \le M/\tau, \quad M \le 0, \ B \le 0,$$

где M — деньги, B — ценные бумаги, Z — скорость приобретения ценных бумаг (управление), C — объем совокупного потребления. Здесь $R(t)$ — функция полезности потребления.

Смысл остальных переменных приведен в работе [1].

Для поставленных задач анализируются необходимые и достаточные условия экстемума с конечным и неопределенным горизонтами времени для различных граничных условий.

Литература

1. Гуриев С.М. Некоторые математические модели формирования инвестиций и сбережений. Автореферат кандидатской диссертации. М.:ВЦ РАН, 1994.

К АСИМПТОТИКЕ ТИПА БИРКГОФА-ТАМАРКИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Дмитриев М.Г., Коняев Ю.А. (МГСУ, РУДН)

В теории сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления, когда уравнения динамики объекта описываются линейными системами с быстрыми и медленными движениями при различии постановок имеется один общий признак — использование метода пограничных функций для построения асимптотики решения. С одной стороны, эта общность подчеркивает естественность такого формализма построения асимптотики, вытекающего из свойства спектра основной функциональной матрицы (первая половина ее спектра находится в левой полуплоскости, а вторая — в правой) и это свойство есть следствие достаточно красивых и зачастую естественных предположений об управляемости и наблюдаемости в соответствующих присоединенных задачах. С другой стороны, учитывая, что свойство наблюдаемости, связано с коэффициентами критерия оптимальности, а выбор критерия, как правило, неформализуемая задача, то естественно расширить рамки предположений о коэффициентах критерия оптимальности, а выбор критерия, как правило, неформализуемая задача, то естественно расширить рамки предположений о свойствах спектра реальных математических моделей управляемых систем.

В докладе приводятся постановки некоторых задач оптимального управления, которые могут быть исследованы с помощью одного из вариантов метода расщепления, в основе которого лежат идеи Биркгофа-Тамаркина. По-видимому, первая работа в этом направлении была выполнена Н.Н. Моисеевым.

Литература

1. Дмитриев М.Г., Коняев Ю.А. Асимптотика типа Биркгофа-Тамаркина некоторых сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления// Труды девятых математических чтений МГСУ. М.2002,стр 65-69

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НЕТОЧЕЧНОГО ТИПА

Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. (Черноголовка)
duba@icp.ac.ru

Рассматривается задача оптимального управления (ОУ)

$$\begin{array}{l} J(x) \to \min, \quad \varphi(x) \leq 0, \quad \kappa(x) = 0. \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in \Delta = [t_0, t_1] \end{array} \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования РФ, грант №Е00-10-158.

Здесь x, u, f функции, принимающие значения в конечномерных пространствах размерности d_x, d_u, x; U подмножество R^{d_u}, а J, φ, κ являются нелинейными функционалами, определенными над $x \in C(\Delta)$ со значениями в пространствах размерности $1, d_\varphi, d_\kappa$ соответственно. Минимум ищется среди пар-траекторий (x, u), где x липшицева, а u ограниченная измеримая функция. Предположим, что "равенственные" функция f и функционал κ гладкие, а "неравенственные" J,φ локально выпуклы. Доказан принцип максимума (ПМ)

Теорема. Пусть (x^0, u^0) есть минимизирующая траектория задачи (1). Тогда существует набор элементов $\alpha, \beta, c, \psi, J', \varphi'$, где $\alpha \in R_+, \beta \in R_+^{d_\varphi}, c \in R^{d_\kappa}$, $\psi(t)$ функция ограниченной вариации на Δ со значениями в R^{d_x}, а J', φ' борелевсеие меры на Δ, причем $J' \in \partial J(x^0), \varphi' \in \partial\varphi(x^0)$, такой что выполнены условия

$$
\begin{array}{ll}
a) & \alpha + |\beta| + |c| + \|\psi\|_\infty > 0 \\
b) & d\psi = -f_x'^*(x^0, u^0)\psi dt + \alpha J' + \beta\varphi' + c\kappa' \\
c) & \psi(t_0) = 0, \psi(t_1) = 0 \\
d) & \psi(t) f(x^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} \psi(t) f(x^0(t), u) \quad \text{почти всюду}
\end{array}
\qquad (2)
$$

Эта постановка обобщает изученный в [1] класс задач ОУ с фазовыми ограничениями и терминальными функционалами J, φ, κ, зависящими от концов фазовой траектории. Она позволяет расширить применимость аппарата ПМ к актуальными задачам оптимизации. Например, таковы задачи о сглаживающих сплайнах с распределенным множеством узлов аппроксимации, задачи ОУ устойчивыми стационарными состояниями реакторов. Общая же постановка (1), допускающая переформулировку ПМ [1], содержит точечные смешанные ограничения $G(x(y), u(t)) \leq 0, g(x(t), u(t)) = 0$.

Литература

[1] А.Я.Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Теория принципа максимума. Сборник Методы теории экстремальных задач в экономике, Москва: Наука, ЦЭМИ АН СССР, 1981, 6-46.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИЛИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Дунаев С.А. (Воронеж)

dsame@mail.ru

В различных задачах химического, биологического и экономического содержания важно уметь устанавливать факт существования ограниченного решения нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n; \quad \dot{x} = f(t, x), \qquad (1)$$

неотрицательного ($0 \leq x_i(t) \leq c_i, \quad t \in R, \quad i = 1, \ldots, n$) или неположительного ($0 < x_i(t) \leq c_i$ при прежних предположениях). М.А. Красносельским в книге [1] приведены разнообразные признаки существования указаных решений, причем основную роль (помимо свойств положительности правых частей системы (1)) играет сравнение решений системы (1) с мажорантной или мажорантной линейной системой

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \dot{x} = A(t)x, \tag{2}$$

в которой матричная функция $A(t)$ внедиагонально неотрицательна ($a_{ij}(t) \geq 0, \quad i \neq j, \quad t \in R$) и обладает свойством периодичности: $A(t+\omega) \equiv A(t). \quad t \in R, \quad \omega > 0$. Основная идея заключается в том, что требование периодичности снимается и заменяется требованием ограниченности: $|A(t)| \leq C$, где C - неотрицательная $n \times n$ матрица, $t \in R$. Предположение о том, что спектральный радиус неотрицательной матрицы монодромии меньше единицы, заменяется предположением о равномерной асимптотической устойчивости системы (2).

Литература

1. М. А. Красносельский. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. - Москва: Наука, 1966.

2. М. А. Красносельский. Положительные решения операторных уравнений. - Физматгиз, 1962. 3.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Евдокимова Н.Н. (Самара)

www.klim@amv.ru

Уравнение вида

$$u_{xxy} + Au_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1}$$

лежит в основе математических моделей, связанных с динамикой почвенной влаги и грунтовых вод [1]. Интересны для изучения локальные и нелокальные краевые задачи и для различных частных случаев уравнения (1).

Рассмотрим нелокальную задачу для уравнения

$$u_{xxy} + Au_{xx} + u_y = 0 \tag{2}$$

в прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) : \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ со следующими условиями:

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad \int_{x_0}^{l} u(x,y)dx = \varphi(y), \tag{3}$$

где A — действительная постоянная, а функции $\tau(x)$, $\varphi(y)$ заданы, причем $\varphi(0) = \int_{x_0}^{l} \tau(x)dx$.

Интегрируя уравнение (2) по x, приходим к задаче:

$$w_{xy} + Aw_x = F_1(x,y,w_y), \tag{4}$$

$$w(x,0) = 0, \qquad \int_0^l w(x,y)dx = 0, \tag{5}$$

где $F_1(x,y,w_y) = \int_0^x w_y(\xi,y)d\xi + \frac{x}{l-x_0}\int_0^{x_0} w_y(x,y)dx + Q(x,y)$, причем $Q(x,y)$ — известная функция.

Для доказательства существования решения задача сведена к интегральному уравнению

$$w(x,y) - Sw(x,y) = g(x,y)$$

и показано, что оператор S является вполне непрерывным.

Доказательство единственности решения задачи базируется на полученной априорной оценке.

Литература

[1] Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. //Дифференциальные уравнения. 1979. Том 15. 1. С.101-105.

[2] Pulkina L.S. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation.// Ejde. 1999. vol.45. p.1-6.

МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Евченко В.К. (Воронеж)

В 1958 г. М.А. Красносельский и А.И. Перов в своем сообщении [1] предложили новый принцип доказательства существования периодических, почти периодических и ограниченных решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t,x)$, где $t \in R$ и $x \in R^n$, обладающих свойством периодичности, почти периодичности или ограниченности по времени t. В дальнейшем этот принцип получил название: *метод направляющих функций*. Обоснование метода для периодических и ограниченных решений было дано в четвертой главе кандидатской диссертации А.И. Перова [2]. Дальнейшее развитие указанные результаты получили в книге М.А. Красносельского [3].

Определенную на множестве $G \subset R^n$ непрерывно дифференцируемую функцию $u(x)$ назовем *направляющей*, если $(grad\ u(x), f(t,x)) \geq 0$ для $t \in R$ и $x \in G$, круглые скобки означают стандартное скалярное произведение. Направляющую функцию называют *строгой*, если $(grad\ u(x), f(t,x)) > 0$ для $t \in R$ и $x \in G$ и *равномерной*, если $(grad\ u(x), f(t,x)) \geq \alpha\ \|grad\ u(x)\| \cdot \|f(t,x)\|$ для $t \in R$ и $x \in G$, а $0 < \alpha = const < 1$. Отметим, что данные нами определения отличаются от используемых в математической литературе. В терминах этих определений уточняются известные результаты и формулируются новые признаки существования периодических решений в предположении, что рассматриваемая нелинейная система является периодической: $f(t+\omega,x) = f(t,x)$, где $\omega > 0$ и $t \in R$, а $x \in R^n$. Производится сравнение метода направляющих функций с методом функций Ляпунова и топологическим методом Важевского.

Литература

1.М. А. Красносельский, А.И. Перов Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1958, т. 123, N 2, с. 235-238.

2.А.И. Перов Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений, Воронеж, 1959, 129 с.

3.М.А. Красносельский . Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1966, 332 с.

ГУМАНИЗАЦИЯ И ГУМАНИТАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Егорова М.И. (Воронеж)

Принцип гуманитаризации образования на данном этапе реформирования школьного образования является основополагающим. Смысл данного принципа в приложении к обучению математике заключается не в обеспечении математического образования как такового, а в повышении интеллектуального потенциала ученика посредством математики, ибо, как сказал Платон, "способный к математике способен и к другим наукам". Поэтому необходимо решать проблему внедрения гуманитарного компонента, действуя изнутри в каждой науке, исходя из её корней, поскольку математика, как и другие негуманитарные области, столь же важный компонент общечеловеческой культуры, как музыка и театр.

Основным направлением развития школы сегодня является поворот обучения к человеку, его психологическим особенностям. Источником формирования содержания образования являются основные сферы самоопределения личности-человек, общество, природа, ноосфера.

Самоопределение ценностей в сфере "человек" определяет гуманистические начала жизнедеятельности и образования личности. Поэтому гуманизация естественно-математического образования важная проблема всего образования. "Ноосфера" включает в себя становление нравственной ответственности в использовании продуктов научно-технического прогресса, освоение методов культурно-образовательной деятельности. Поэтому гуманитаризация ещё одна проблема школьного образования.

Принципы гуманизации и гуманитаризации сориентированы

– на личность ребёнка и создания условий для развития его способностей, его внутреннего духовного мира,

– на свободное сотрудничество педагогов и учеников, учащихся друг с другом, педагогов и родителей,

– на целенаправленное взаимодействие по всем учебным предметам, обеспечивающим гармонизацию в развитии интеллектуальной сферы каждого учащегося.

К сожалению, не все дети, одаренные в математическом смысле. Но учесть максимально особенности, возможности, склонности, интересы и темперамент ребёнка через гуманизацию обучения, возможно. Учёба должна быть в радость, ребёнку должно быть интересно и понятно, чтобы не наступило разочарование. Решить эту проблему можно через гуманитаризацию школьного курса математики.

ФУНКЦИИ ПРЕДЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА[1]

Елисеев Д. В. (г. Воронеж)
pmmmmio@main.vsu.ru

Изучается структура спектра функций предэкспоненциального роста. Абстрактные результаты, полученные для данного класса функций, применяются для изучения решений дифференциальных уравнений вида $\dot{x} - Ax = f$, где x, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Y}$ - векторные функции со значениями в банаховом пространстве Y и A – линейный замкнутый оператор, являющийся генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T(t), t \geq 0\} \subset EndY$.

Пусть $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ – неквазианалитическая весовая функция. $AP_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$ – пространство α-почти периодических функций, $\Lambda(x)$ - спектр Берлинга функции $x \in L^\infty_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$ и $\Lambda(x, F)$ - спектр Берлинга функции x относительно замкнутого инвариантного относительно сдвигов подпространства F из $C_{u\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$. Далее $F = AP_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$.

Будем говорить, что $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ не является спектральной точкой роста функции $x \in C_{u\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$, если существует $f \in L_\alpha(\mathbf{R})$ такая, что $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $f*x \in C_{ub}(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$. Множество спектральных точек роста функции x обозначим $\Lambda_{inc}(x)$.

Теорема 1. *Пусть $x \in C_{u\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$, множество $\Lambda(x, F)$ не имеет предельных точек на $\mathbf{R}$ и ни одна из предельных точек множества $\Lambda(x)$ не принадлежит $\Lambda_{inc}(x)$. Тогда $x \in F$, если выполнено одно из следующих условий:*
1) пространство Y не содержит подпространств изоморфных пространству c_0.
2) множество значений функции x предкомпактно в Y.
3) для каждой предельной точки $\lambda \in \Lambda(x)$ найдутся такие $f \in L_\alpha(\mathbf{R})$, $\hat{f}(\lambda) \neq 0$ и λ-последовательность $(f_n) \subset L_1(\mathbf{R})$, что $y = f * x \in C_{ub}(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$ и существует предел $\lim f_n * x \in C_{ub}(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$.

Получены условия, когда решение x из $C_{u\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{Y})$ принадлежит F.

Литература

[1] А. Г. Баскаков // Мат. зам., 1978, Т. 24, №2, с. 195-205.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 01-01-00408

ПОЛУФРЕДГОЛЬМОВЫ И ПОЛУБРАУДЕРОВЫ СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

Еровенко В.А., Мартон М.В. (Минск)

erovenko@bsu.by

Настоящее сообщение посвящено нахождению полуфредгольмовых и полубраудеровых существенных спектров оператора взвешенного сдвига $T : l_1 \to l_1$, $Tx = (0, a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$, в банаховой алгебре ограниченных линейных операторов $B(l_1)$, которые обозначаются, соответственно, $\sigma^+_{es-f}(T)$, $\sigma^-_{es-f}(T)$, $\sigma_{ab}(T)$, $\sigma_{db}(T)$.

Рассмотрим четыре классификации операторов взвешенного сдвига T в зависимости от последовательности весов a_k следующего вида:

a) $\forall k, a_k \neq 0, inf|a_k| > 0$;

b) $\forall k, a_k \neq 0, inf|a_k| = 0$;

c) $\exists k, a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k конечно;

d) $\exists k, a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k бесконечно.

Для ограниченного линейного оператора $T - \lambda I$ полуфредгольмовы и полубраудеровы спектры определяются как дополнения в комплексной плоскости полуфредгольмовых и полубраудеровых множеств операторов: $\sigma^+_{es-f}(T) := \mathbf{C}\setminus\Phi^+(T)$, $\sigma^-_{es-f}(T) := \mathbf{C}\setminus\Phi^-(T)$, $\sigma_{ab}(T) := \mathbf{C}\setminus B^+(T)$, $\sigma_{db}(T) := \mathbf{C}\setminus B^-(T)$, где $\Phi^+(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I), nul(T-\lambda I) < \infty\}$, $\Phi^-(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I), def(T-\lambda I) < \infty\}$, $B^+(T) := \{\lambda \in \Phi^+(T) : asc(T-\lambda I) < \infty\}$, $B^-(T) := \{\lambda \in \Phi^-(T) : des(T-\lambda I) < \infty\}$, а $nul(T) = dimKer(T)$, $def(T) = diml_1/R(T)$, $asc(T) = \min\{n \geq 0 : Ker(T^n) = Ker(T^{n+1})\}$, $des(T) = \min\{m \geq 0 : R(T^m) = R(T^{m+1})\}$. По поводу этих обозначений и свойств описанных множеств см., например, книгу [1].

Теорема. *Пусть T — оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$ и веса удовлетворяют условию c). Тогда для полуфредгольмовых и полубраудеровых существенных спектров справедливы следующие утверждения: если* $\inf\{|a_n| : n \geq k+1\} > 0$, *где a_k — последний нулевой вес,* $\sigma^+_{es-f}(T) = \sigma^-_{es-f}(T) = \sigma_{ab}(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : r_1 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, *где r_σ — спектральный радиус, равный* $r_\sigma = \lim\limits_{k\to\infty}(\sup\limits_{m\geq 1}|a_m \ldots a_{m+k-1}|)^{1/k}$, $r_1 = \sup\limits_{k\geq 1}(\inf\limits_{m\geq j+1}|a_m \ldots a_{m+k-1}|)^{1/k}$, *а* $j = \max\{k \geq 1 : a_k = 0\}$, *и* $\sigma_{db}(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$: *если* $\inf\{|a_n| : n \geq k+1\} = 0$, *имеем* $\sigma^+_{es-f}(T) = \sigma^-_{es-f}(T) = \sigma_{ab}(T) = \sigma_{db}(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$.

Литература.

1. Еровенко В.А., Северенчук Н.Б. Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах. — Минск: БГУ, 2000.

КАЧЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ УСИЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОТИВАЦИИ ПЕРСОНАЛА В ОРГАНИЗАЦИИ С НЕЗАВИСИМЫМ УПРАВЛЕНИЕМ СИСТЕМОЙ СБЫТА ПРОДУКЦИИ

Жданкина Н.А. (Воронеж)
nataly@rsemil.vrn.ru

Рассматривается организация, состоящая из территориально разрозненных подразделений, управляющие центры которых определяют их локальные тактические цели и регулируют текущую хозяйственную экономическую деятельность. В сферу деятельности подразделений входит также сбыт произведенной продукции. Организация имеет общий управляющий центр, который определяет стратегические цели организации, механизмы сопряжения интересов подразделений и интересов организации в целом и осуществляет финансовый контроль над работой подразделений.

Разработана модель выбора траектории устойчивого функционирования, представляющая собой задачу оптимального управления. Целевой функционал данной задачи представляет собой свертку суммарного дохода каждого подразделения и фирмы в целом, система ограничений содержит балансовое ограничение на согласование объема полученных средств от реализации продукции и их использования, ограничение на расходы персонала, занимающегося сбытом продукции, ограничение на структуру заработной платы и т.д. Для случая, когда система содержит два подразделения, задача сведена на основе использования принципа максимума Понтрягина к задаче динамического программирования. Доказано, что данная задача имеет единственную особую точку, которая при определенных условиях, накладываемых на управляющие параметры, представляет собой устойчивый узел. Кроме того, показано, что исходная динамическая система имеет единственную точку устойчивого роста.

В докладе предполагается привести разработанную модель, изложить основы доказательства теорем и привести результаты экспериментов, реализованных в условиях и на основе данных одного из предприятий Воронежской области.

Литература

1. Математические методы поддержки процессов регулирования в сфере реализации продукции сложных экономических систем / Н.Б.Баева, Н.А.Жданкина // Вестник ВГТУ. Сер. Моделирование и оптимизация в автоматизированных системах, 2000.

2. Математическое моделирование функций продаж продукции фирмы с рентноориентированным управлением / Н.А.Жданкина // Труды Российской ассоциации "Женщины-математики". Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2001, т.9, вып.1

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ СУСПЕНСИРОВАННЫХ СЛОЕНИЙ[1]

Жукова Н.И., Чубаров Г.В. (Нижний Новгород)

zhukova@mail.nnov.ru; gvchub@mail.nnov.ru

Исследуются слоения, полученные предложенным Хефлигером методом суспенсии. Этот метод является естественным обобщением известной в теории динамических систем конструкции надстройки диффеоморфизма.

Под изоморфизмом слоений $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ мы понимаем гомеоморфизм $h : M \to M'$, отображающий слои слоения $\mathcal{F}$ на слои $\mathcal{F}'$. Проблема изоморфизма суспенсированных слоений сведена нами к эквивариантности действий ассоциированных групп диффеоморфизмов.

Мы доказали, что множество суспенсированных слоений открыто в пространстве всех слоений коразмерности q на n-мерном компактном многообразии M, наделенном C^r-топологией Эпштейна, где $r \geq 2$.

Одним из современных методов исследования слоений являются введенные А.Коном C^*-алгебры комплекснозначных функций, определенные на группоидах голономии, называемых также графиками $G(\mathcal{F})$, слоений $\mathcal{F}$. Графики $G(\mathcal{F})$ представляют собой, вообще говоря, неотделимые многообразия размерности ≥ 3, теория которых не развита. Большинство авторов ограничивается исследованием слоений с хаусдорфовыми графиками. Нами получен критерий хаусдорфовости графика $G(\mathcal{F})$ суспенсированного слоения $\mathcal{F}$.

В качественной теории слоений, как и в качественной теории динамических систем, центральной является проблема типичности.

Применяя теорему Купки-Смейла для динамических систем, мы доказали, что на любом компактном n-мерном многообразии M хаусдорфовость графика $G(\mathcal{F})$ является типичным свойством в пространстве одномерных суспенсированных слоений.

Для случае $n = 2$ это означает типичность хаусдорфовости $G(\mathcal{F})$ в пространстве всех суспенсированных слоений.

Нами построено множество мощности континуума попарно несопряженных диффеоморфизмов класса C^∞ компактного одномерного многообразия со счетным семейством изолированных неподвижных точек. С помощью этого семейства конструктивным методом доказано, что на каждой из следующих поверхностей: торе, бутылке Клейна, плёнке Мебиуса и цилиндре множество классов суспенсированных слоений с хасдорфовыми графиками эквивалентно множеству классов суспенсированных слоений с нехаусдорфовыми графиками и имеет мощность континуума.

Для любого натурального $n > 3$ приведены примеры n-мерных многообразий, все суспенсированные слоения на которых имеют хаусдорфовы графики и являются C^r-структурно нестабильными.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 01-01-00590.

ВОЛЬТЕРРОВЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Жуковская Т.В., Жуковский Е.С. (Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru

Предлагается исследование свойств обобщенно вольтеррового (в смысле определения, предложенного в [1]) интегрального оператора, действующего в пространстве суммируемых функций.

Пусть функция $\mathcal{K}(t,s)$, $t, s \in [a, b]$ измерима по совокупности аргументов.

Теорема 1. *Для того, чтобы интегральный оператор*

$$(Ky)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)y(s)ds\,, \quad t \in [a, b]\,,$$

действовал в пространстве $L_{p\,[a,b]}$, $1 \le p < \infty$ *и являлся регулярным необходимо, а при* $p = 1$ *и достаточно, чтобы существовало такое число* C, *что для любого измеримого множества* E *выполнялось неравенство* $\Big\| \int_E |\mathcal{K}(\cdot, s)|\, ds \Big\|_{L_p\,[a,b]} \le C(\mathrm{mes}E)^{\frac{1}{p}}$. *В случае* $p = 1$, *норма положительного оператора* $|K| : L_{[a,b]} \to L_{[a,b]}$ *равна* $\Big\| |K| \Big\|_{L_{[a,b]} \to L_{[a,b]}} = \sup\limits_{E \subset [a,b]} \left(\frac{1}{\mathrm{mes}E} \Big\| \int_E |\mathcal{K}(\cdot, s)|\, ds \Big\|_{L_{[a,b]}} \right)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы оператор* $|K| : L_{p\,[a,b]} \to L_{p\,[a,b]}$, $1 \le p < \infty$ *являлся улучшающим, необходимо, а при* $p = 1$ *и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое положительное* δ, *что для любых измеримых множеств* E, $e \subset [a, b]$ *из неравенства* $\mathrm{mes}\, e < \delta$ *следовало* $\left(\int_e \left(\int_E |\mathcal{K}(t,s)|\, ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon(\mathrm{mes}\, E)^{\frac{1}{p}}$.

Совокупность $\{ e_\gamma \subset [a, b] \mid \gamma \in [0, b-a] \}$ назовем v-системой, если мера каждого множества $\mu e_\gamma = \gamma$ и из $\gamma < \eta$ следует $e_\gamma \subset e_\eta$. Оператор $K : L_{p\,[a,b]} \to L_{p\,[a,b]}$ считаем обобщенно вольтерровым, если существует такая v-система, что для всех $\gamma \in [0, b-a]$ и для каждого $y \in L_{p\,[a,b]}$ если $y(t) = 0$, $t \in e_\gamma$, то $(Ky)(t) = 0$, $t \in e_\gamma$.

Теорема 3. *Если оператор* $K : L_{p\,[a,b]} \to L_{p\,[a,b]}$ *является обобщенно вольтерровым и улучшающим, то его спектральный радиус* $\rho(K) = 0$.

Теорема 4. *Если* $\rho(|K|) = 0$, *то оператор* $|K| : L_{p\,[a,b]} \to L_{p\,[a,b]}$ *является обобщенно вольтерровым.*

Литература

1. Жуковский Е.С. К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, 9. С. 1599-1605.

---

[1]Работа поддержана РФФИ, проект 01-01-00140

ОБ УПРАВЛЕНИИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ[1]

Жуковский С.Е. (Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru

Рассматривается Бэнг-бэнг принцип в управлении краевыми задачами для линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Обозначим $K_{[a,\,b]}$ – множество кусочно-постоянных функций $u : [a,\,b] \to \{-1, 1\}$, имеющих конечное число разрывов; $L_{[a,\,b]}$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $y : [a,\,b] \to R$ с нормой $\|y\|_L = \int\limits_a^b |y(t)|\,dt$; $C_{[a,\,b]}$ – пространство непрерывных функций $y : [a,\,b] \to R$ с нормой $\|y\|_C = \max\limits_{t\in[a,\,b]} |y(t)|$; $C^1_{[a,\,b]}$ – пространство дифференцируемых функций, имеющих непрерывную производную, с нормой $\|x\|_{C^1} = |x(a)| + \|x'\|_C$.

Пусть $l_1, l_2 : C^1_{[a,\,b]} \to R$ – линейные ограниченные функционалы. Рассмотрим краевые задачи

$$x''(t) - u(t)x(t) = f(t), \quad u(t) \in [-1, 1], \quad l_1 x = \alpha, \quad l_2 x = \beta, \tag{1}$$

$$x''_n(t) - u_n(t)x_n(t) = f(t), \quad u_n(t) \in \{-1, 1\}, \quad l_1 x_n = \alpha, \quad l_2 x_n = \beta. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого управления $u : [a, b] \to [-1, 1]$ краевая задача (1) имеет единственное решение x. Тогда существуют такие кусочно-постоянные управления $u_n \in K_{[a,\,b]}$, $n = 1, 2, ...$, при каждом из которых краевая задача (2) однозначно разрешима и для последовательности соответствующих решений x_n выполнено* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{C^1} = 0$.

Для управляемой задачи Коши для квазилинейного уравнения

$$x''(t) - u(t)x(t) = f(t, x(t)), \quad u(t) \in [-1, 1], \quad x(a) = \alpha, \quad x'(a) = \beta. \tag{3}$$

Последовательность "упрощенных" систем управления имеет вид

$$x''_n(t) - u_n(t)x_n(t) = f(t, x_n(t)), \; u_n(t) \in \{-1, 1\}, \; x_n(a) = \alpha, \; x'_n(a) = \beta. \tag{4}$$

Здесь предполагается, что функция $f : [a, b] \times R \to R$ удовлетворяет условиям: 1. измерима по первому аргументу; 2. непрерывна по второму аргументу; 3. для некоторого фиксированного $y_0 \in R$ функция $f(\cdot, y_0) \in L_{[a,b]}$; 4. существует такое число k, что при всех $t \in [a,\,b]$, $y, z \in R$ выполнено неравенство $|f(t, y) - f(t, z)| \le k|y - z|$.

Эти условия гарантируют однозначную разрешимость задач (3), (4) для каждого фиксированного управления.

Теорема 2. *Для любого измеримого управления $u : [a, b] \to [-1, 1]$ существуют такие кусочно-постоянные управления $u_n \in K_{[a,\,b]}$, $n = 1, 2, ...$, что для решений x_n задач (4) и решения x задачи (3) выполнено* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{C^1} = 0$.

[1]Работа поддержана РФФИ, проект 01-01-00140

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Жумагулов Б.Т., Мухамбетжанов А.Т., Аруова А.Б.
(Атырауский институт нефти и газа)

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f, \ \ x \in \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

где Ω-область в R^n и $\partial\Omega$ -граница области Ω, L -нелинейный дифференциальный оператор.

Задачу (1) будем изучать в $L_p(\Omega)$. Будем предполагать, что (П1) Найдутся операторы B и A такие, что преобразование $Mv = B(L(Av))$ таково, что M непрерывен и при любом $v \in L_2(\Omega)$ элемент Av удовлетворяет условиям: $Av = |_{\partial\Omega} = 0$, где A-интегральный оператор, а B -замкнутый и имеет плотную область определения.

В уравнении (1) положим $u = Av$ и подействуем оператором B. Тогда, если $\widetilde{f} \in D(B)$, обозначая $B\widetilde{f}$ через f, для v получаем уравнение

$$Mv = f \quad \text{в} \ L_p(\Omega) \tag{2}$$

где $M(\cdot)$ - непрерывное преобразование, $D(\cdot)$ - область определения. Решив (2), положив $u = Av$, получим решение (1). Ниже предложим один способ приближенного решения (2). Обозначим

$$J(v) = \int\limits_{\Omega} |Mv - f| dx \tag{3}$$

и будем искать решение (2) как элемент, доставляющий минимум J. Предположим, что выполняется условие в работе [1] П2-П4. Справедлива

Теорема. Пусть выполнены П2, П3 и П4 (в работе 1). Определим последовательность $\{v_n\}_{n=1}$ реккурентными формулами $v_{n+1} = v_n + \epsilon\omega_n$, где $\omega_n = B^* sign(Mv_n - f)|Mv_n - f|^{p-1}$, $n = 0, 1, 2, 3...$; v_0 - произвольно. Тогда существуют постоянные $\epsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1)$, зависящие только от v_0, такие, что v_n при $n \to \infty$ стремятся к решению уравнения $Mv = f$.

Причем $J_n = ||Mv_n - f||^p \leq J(v_0)\delta^{pn}$, $\quad n = 0, 1, 2, ...$; $||v_n - v||^p \leq c\delta^{\frac{pn}{2}}$, $\ n = 0, 1, 2, ...$, где постоянная c зависит от v_0 и f.

Литература

[1] А.Т.Мухамбетжанов, М.О.Отельбаев, Ш.С. Смагулов. // Выч. Технол. , т.3, 4, г. Новосибирск, 1998 г.

[2] М.О.Отелбаев, Ш.С. Смагулов // ДАН, т.378. 4, с.452-455.

АЛГОРИТМ В МЕТОДЕ ВНЕШНИХ ЦЕНТРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОЖЕСТВА, ВЛОЖЕННОГО В ДОПУСТИМОЕ

Заботин Я.И., Андрианова А.А. (Казань)

Yaroslav.Zabotin@ksu.ru

Приводится алгоритм в методе внешних центров для нахождения приближенного с заданной точностью $\varepsilon > 0$ решения задачи $\min\{f(x), x \in D\}, D = \{x : x \in R_n, g(x) \leq 0\}$, $D' = \{x : x \in R_n, g(x) < 0\} \neq \emptyset$, где $g(x) = \max\{f_i(x), i \in H\}, H = \{1...m\}$, $f(x), f_i(x), i \in H$ непрерывные функции в n-мерном евклидовом пространстве R_n, каждый локальный минимум которых является абсолютным. Пусть $f^* = \min\{f(x), x \in D\} > -\infty$, $X^*_\varepsilon = \{x : x \in D, f(x) \leq f^* + \varepsilon\}$, $Y = Arg\min\{f(x), x \in R_n\}$.

Пусть $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in D$.

Положим $F(x,t,\gamma,b) = \max\{f(x) - t, bg(x) + \gamma\}$, где t, b, γ - константы, $Z(t,\gamma,b) = Arg\min\{F(x,t,\gamma,b), x \in R_n\}$.

АЛГОРИТМ. Выбирается $x_0 \in Z(0,0,1)$. Если $x_0 \in D$, то $x_0 \in X^*_0$. Задача решена. В противном случае, фиксируются числа $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$, полагается $k = 0$ и осуществляется переход к п.1.

1. Выбираются значения параметров $b_k > 0, \delta_k \in [\delta; \varepsilon - b_k \min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}]$.
2. Принимается $x_{k+1} \in Z(f(x_k), \delta_k, b_k)$.
3. Если $x_{k+1} \in D$, то $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. Иначе переход к п.1 при $k := k + 1$.

Доказано, что если X^*_ε ограничено, то за конечное число итераций будут выполнены условия пункта 3 алгоритма и полученная точка будет являться ε-решением поставленной задачи. Частный случай алгоритма при $b_k = 1, \delta_k = \varepsilon$ для любого $k \geq 0$ приведен в [1].

Аналогичным образом построен алгоритм в методе внутренних центров, где критерием остановки, если $Y \cap D' = \emptyset$, является получение точки, не принадлежащей D'. Тогда предыдущая итерационная точка является ε-решением поставленной задачи.

Литература

1. Заботин Я. И., Андрианова А. А. Алгоритмы в методе центров с аппроксимацией множества допустимых решений // Изв.вузов. Математика. —2001. —№12. —С. 41-45.

АЛГОРИТМ МЕТОДА ШТРАФОВ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА

Заботин Я.И., Фукин И.А. (Казань)

Yaroslav.Zabotin@ksu.ru *Igor.Fukin@ksu.ru*

Пусть $f(x), f_i(x), i = \overline{1,m}$ - определены и непрерывны в $R_n, D_\lambda = \{x \in R_n : f_i(x) + \lambda \leq 0, \lambda \geq 0\}$. Требуется найти $f^* = \min\{f(x), x \in D_0\}$ с заданной точностью ε методом штрафных функций. Пусть $\varepsilon' > 0, V(x) = \sum_{i=1}^m (\max\{f_i(x) + \varepsilon', 0\})^2, D(\alpha) = \{x \in R_n : V(x) \leq \alpha\}, V_\gamma(x) = (\max\{V(x) - \gamma\varepsilon'^2, 0\})^2$, где $0 < \gamma < 1, x(C) = argmin\{f(x) + CV_\gamma(x), x \in R_n\}$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на D_0 условию Липшица с константой L, функции $f_i(x)$-выпуклые, ограничения множества D_ε, ρ-регулярны (см.[1],с.245) с параметром β и величина $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon\beta\gamma}{L(m-\gamma)}$, $0 < \gamma < 1$. Тогда $|f(x(C)) - f^*| \leq \varepsilon$ при $x(C) \in D_0 \setminus D(\gamma\varepsilon'^2)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\overline{C} = \frac{L}{2\beta\varepsilon'^3(1-\gamma)}$. Тогда $x(C) \in D_0 \setminus D(\gamma\varepsilon'^2)$ при $C \geq \overline{C}$.

Отметим, что D_0 является окрестностью множества $D(\gamma\varepsilon'^2)$. Здесь, как и в [2], используется идея применения погруженного множества. Так как на практике $\overline{C}$ вычисляется со значительным завышением, и включение $x(C) \in D_0$ достигается при $C < \overline{C}$, то имеет смысл постепенно увеличивать штрафной параметр до величины $\overline{C}$.

Алгоритм. Задается требуемая точность решения $\varepsilon > 0, x_0 \in R_n$, натуральное число $N > 0$. Выбирается $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon\beta\gamma}{L(m-\gamma)}$, возрастающая функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(N) \geq \overline{C}, \varphi(1) \geq 0$. Полагается $k = 1$.

1.Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.

2.Находится $x(C_k)$.

3.Если $x(C_k) \in D$, то $x(C_k)$ является допустимым ε - решением исходной задачи. Иначе следует переход к п.1 при k:=k+1.

Очевидно, алгоритм гарантированно будет остановлен при $k = N$.

В экспериментах выбиралась функция $\varphi(t) = \frac{\overline{C}}{p^{N-t}}$, $p > 1$. Если в алгоритме необходимо задать определенное значение C_0, то достаточно положить $p = (\frac{\overline{C}}{C_0})^{1/N}$.

Литература

1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации.– М.:Наука,1986.–328 с.

2. Заботин Я. И., Фукин И. А. Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Изв. вузов. Матем. — 2000. —N12. —с. 49–54.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО СВЕРХУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕПРЕРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Зайчикова Н.А. (Самара)

zajna@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши для дифференциальных включений (ДВ)

$$dx/dt \in \mu F(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $\mu \in (0, a]$, $a > 0$, $F : D_0 \to Kv(R^m)$ — выпуклое компактнозначное отображение. $D_0 = R_+ \times P$, область $P \subset R^m$. $X(t_0, x_0, \mu)$ — множество всех решений типа Каратеодори задачи (1), $t \in T(t_0, \mu) = [t_0, t_0 + 1/\mu]$.

Поставим задачу аппроксимации сверху [1] для (1) с помощью более простой задачи

$$d\xi/dt \in \mu F_0(\xi), \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где отображение $F_0 : P \to Kv(R^m)$.

ДВ (2) является точным в задаче аппроксимации сверху ДВ (1) в области $P_0 \subset P$ в классе $L_0(m,P)$[1], если ДВ (2) аппроксимирует сверху задачу (1), при этом любая другая аппроксимирующая сверху задача из $L_0(m,P)$ аппроксимирует сверху также и точное ДВ $\forall x_0 \in P_0$.

Построение правой части аппроксимирующего ДВ связано с вычислением усредненной опорной функции[1], которая была определена в [2] следующим образом:

$$M\{c(F,\psi)\}(\chi_0) = \overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int c(F(t,\chi_0),\psi)\,dt, \qquad (3)$$

где верхний предел существует равномерно по $(\tau_0,\chi_0) \in D_0$.

В [2] рассматривалось построение точного сверху ДВ, когда F липшицево. Данная теорема охватывает задачи с непрерывной правой частью и основана на следствии теоремы[3] об аппроксимации ДВ с полунепрерывной сверху правой частью.

Теорема. *Пусть* $F \in N(m,D_0)$[1], *для некоторой непустой области* $P_0 \subset P$ $\exists \rho_0 > 0$: $\forall x \in X(t_0,x_0,\mu)$ $[x(t)]^{\rho_0} \subset P$ $\forall t \in T(t_0,\mu)$; *равномерно по* $(\tau_0,\chi_0) \in D_0$ *и* $\psi \in R^m$, $\|\psi\| = 1$, *существует (3);* F_0, *определяемое* $M\{c(F,\psi)\}$, *принадлежит классу* $L_0(m,P)$. *Тогда ДВ (2) — точное сверху для задачи (1) в области* $P_0 \subset P$ *в классе* $L_0(m,P)$.

Литература

[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: МГУ, 1998, 160 с.

[2] Филатов О.П. //Труды Средневолжского Матем. Об-ва, 1999, т.2, N 1, с.28 – 33.

[3] Зайчикова Н.А. //Научные труды конференции СГПУ. Самара: СГПУ, 2001, с. 34 – 42.

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ КУРСОВ В СИСТЕМЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА

Запрягаев С.А., Кургалин С.Д., Толстобров А.П. (Воронеж)

tap@main.vsu.ru

Дистанционное образование прочно вошло в сферу образовательных услуг ведущих стран мира – экспортеров образования. Базовой причиной бурного расширения такой формы образования является появление мощных телекоммуникационных сетей, способных обрабатывать и передавать огромные объемы цифровой информации сравнимой с объемами информации при организации очной формы обучения.

Систематическое, полное высшее образование в области естественных и физико-математических наук встречается с рядом трудностей: недостаточное владение новыми информационными технологиями преподавателями и профессорами высшего учебного заведения; неразвитость средств создания учебных цифровых материалов со сложной иерархией формул, таблиц, графиков, гиперссылок, мультимедиа и т.п.; большая трудоемкость создания учебных материалов не текстового типа; отсутствие универсальной организации учебного процесса и контроля знаний при дистанционной форме обучения.

В рамках выполнения НТП Министерства образования РФ "Создание системы открытого образования Российской Федерации" на базе Воронежского госуниверситета (ВГУ) создан портал Voronezh.openet.ru — "Воронежский виртуальный университет", входящий в Российский научно–образовательный портал www.openet.ru. Созданы полные математические курсы "Дифференциальные уравнения", "Функциональный анализ", "Алгебра" и курсы по разделам теоретической физики со сложным математическим аппаратом – "Электродинамика", "Квантовая механика" и ряд других. Созданные курсы обеспечивают функционирование физико–математического раздела системы открытого образования портала ВГУ.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В ПРОИЗВОДНОЙ

Зарубин А.Н. (Орел)

Рассматривается задача Коши

$$L(u) = H(x-\tau)u_x(x-\tau,y),\ x>0,\ -x<y<0; \tag{1}$$

$$u(x,0)=\omega(x),\ \omega(x)\in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty); \tag{2}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x),\ \nu(x)\in C^1(0,+\infty). \tag{3}$$

Здесь $L(u)\equiv u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)$, $0<\tau\equiv\mathrm{const}$, $H(x)$ – функция Хевисайда; $\omega(x)$ и $\nu(x)$ – заданные абсолютно интегрируемые функции.

Теорема. Регулярное решение задачи Коши (1)-(3) существует и единственно.

Единственность решения доказана методом вспомогательных функций.

Решение задачи Коши (1)-(3) построено с помощью общего решения уравнения (1), которое получено в форме

$$u(x,y)=\{u_k(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_k\ (k=0,\,1,\,2,\,...)\},$$

если

$$u_k(x,y)=[g_1(x-y)+g_2(x+y)]\,H(x)+$$
$$+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}\eta\left((x-m\tau)^2-\eta^2\right)^{m-1}[g_1(\eta-y)+g_2(\eta+y)]d\eta,$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $k\tau\le t\le(k+1)\tau$ $(k=0,1,2,...)$ функции, $\gamma_m = \left(m!\,\Gamma(m)\,2^{2m-1}\right)^{-1}$, $\overline{D}_k=\{(x,y):k\tau\le x\le(k+1)\tau,-x<y<0\}$ $(k = 0,\,1,\,2,\,...)$.

При этом вопрос существования решения задачи Коши (1)-(3) сводится к разрешимости интегрально-разностного уравнения

$$\alpha_i(x)+\sum_{m=1}^{k}2^{m-1}(m-1)!\gamma_m H(x-m\tau)(x-m\tau)^m\alpha_i(x-m\tau)+$$

$$+\sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}\eta\alpha_i(\eta)\left(\frac{d^m}{dx^m}\left(\int\limits_\eta^{x-m\tau}\xi d\xi\right)^{m-1}\right)d\eta=\beta_i(x),$$

$k\tau\leq x\leq(k+1)\tau$ $(i=1,\,2)$; $\beta_1(x)=\omega(x)$, $\beta_2(x)=\nu(x)$.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО СМЕШАННО-ПАРАБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зарубин Е.А. (Орел)

Уравнение

$$Lu(x,y)=H(y(y+\pi))u(x,y)+H(x-\tau)u(x-\tau,y), \qquad (1)$$

$L\equiv(\partial/\partial x)^{2+H(y(y+\pi))}-\operatorname{sgn}y(\partial/\partial y)^{2-H(y(y+\pi))}$, $0<\tau\equiv\text{const}$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда, рассматривается в смешанной области $D=D_1\cup\cup D_2\cup D_3\cup J_1\cup J_2$, где $D_1=\{(x,y):x>0,0<y<1\}$, $D_2=\{(x,y):x>0,-\pi-1<y<-\pi\}$, $D_3=\{(x,y):x>0,-\pi<y<0\}$, $J_j==\{(x,y):x>0,y=-\pi(j-1)\ (j=1,2)\}$.

Задача. Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$, непрерывно дифференцируемое в D (производная $u_x(x,y)$ непрерывна вплоть до границы $x=0$), исчезающее на бесконечности и удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\leq y\leq 1,$$

$$u(0,y)=\varphi_3(y),\ u_x(0,y)=\varphi_4(y),\ \ -\pi-1\leq y\leq -\pi,$$

$$u(0,y)=\varphi_5(y),\ -\pi\leq y\leq 0,$$

где $\varphi_i(y)$ $(i=\overline{1,5})$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_1(0)=\varphi_5(0)$, $\varphi_5(-\pi)=\varphi_3(-\pi)$.

Пусть $\omega_1(x)=u(x,0)$, $\nu_1(x)=u_y(x,0)$; $\omega_2(x)=u(x,-\pi)$, $\nu_2(x)==u_y(x,-\pi)$.

Теорема. Однородная задача ($\varphi_i\equiv 0$ $(i=\overline{1,5})$) имеет при $\tau\leq\sqrt{2}$ в области $\overline{D}$ тривиальное решение.

Доказательство теоремы осуществлено с помощью априорных оценок.

ПРИМЕНЕНИЕ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Засядко О.В. (Краснодар)
du@math.kubsu.ru

В школе при изучении функций основное внимание уделяется исследованию функций и построению их графиков. Меньше используются функции при рассматривании других разделов.

Наглядным примером использавания свойств функций является применение монотонности функций при решении уравнений и неравенств.
Чаще всего это свойство применяется тогда, когда одна часть уравнения представляет собой возрастающую функцию, а другая убывающую или постоянную. Такое уравнение не может иметь более одного действительного решения.

Пример 1. Решить уравнение $x^{2002} + 2001x = 2002$.
Корень уравнения x=1 находится подбором. Других корней нет, так как левая часть уравнения- возрастающая функция (является суммой двух возрастающих функций $y = x^{2002}$ и $y = 2001x$), а правая- постоянная.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
Функция $\sqrt{t^2+a}$ поэтому $\sqrt{x^2+1} < \sqrt{x^2+2}$. Значит левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна значит уравнение решений не имеет.

Пример 3. Решить уравнение $12^x + 13^x = 25^x$.
Очевидно, что $x = 1$ является корнем уравнения. Однако его единственность не очевидна, так как в обеих частях уравнения имеем возрастающие функции. Разделив обе части уравнения на $25^x (25^x \neq 0)$, имеем $(\frac{12}{25})^x + (\frac{13}{25})^x = 1$. Теперь в левой части уравнения убывающая функция,а в правой постоянная. Значит $x = 1$- единственный корень.

Приведем некоторые примеры уравнений,которые решаются приведенным методом.

$2x + 3\lg(3x+4) - 7 = 0; \quad \arcsin(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}) - arcsin(\sqrt{\frac{3}{x}}) - \frac{\pi}{6} = 0;$
$\log_{\frac{\pi}{4}} x + \log_{\frac{\pi}{5}}(x + \frac{\pi}{5} - 1) - 1 = 0; \quad (\cos\frac{\pi}{7})^x + (\sin\frac{\pi}{7})^x - 1 = 0;$
$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x - 2^x = 0.$

ТРЕХМОДОВЫЕ ВЫРОЖДЕНИЯ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Зачепа А.В.(Воронеж)

Рассматриваемая задача связана с описанием стабильных и метастабильных состояний физической системы после 3–модовой потери стабильности в нулевой фазе. Пусть фазовые состояния моделируются решениями ОДУ шестого порядка.

$$f = \frac{d^6p}{d^6x} + \kappa_1\frac{d^4p}{d^4x} + \kappa_2\frac{d^2p}{d^2x} + \alpha p - p^3 = 0, \tag{1}$$

рассмотренного на отрезке $[0, \pi]$ с краевыми условиями

$$p(0) = \frac{d^2p}{dx^2}(0) = \frac{d^4p}{dx^4}(0) = p(\pi) = \frac{d^2p}{dx^2}(\pi) = \frac{d^4p}{dx^4}(\pi) = 0. \tag{2}$$

Причем отбор решений, соответствующих стабильным фазам, производится посредством правила Максвелла. После пересечения точкой $(\kappa_1, \kappa_2, \alpha)$ характеристической плоскости L_j (в пространстве управляющих параметров) нулевая функция теряет стабильность и рождается ненулевое состояние. Огибающая поверхность L этих плоскостей ограничивает область управляющих параметров с единственной точкой минимума (в нуле).

Точки пересечения плоскостей приводят к двумерным и трехмерным бифуркациям.

Любые три характеристические плоскости L_n, L_m, L_l пересекаются по единственной точке

$$(\kappa_1, \kappa_2, \alpha) = (n^2 + m^2 + l^2, n^2m^2 + m^2l^2 + n^2l^2, n^2m^2l^2)$$

Анализ бифуркационных эффектов, происходящих при локализации (управляющих параметров) $\alpha = \bar{\alpha} + \delta_1$, $\kappa_1 = \bar{\kappa_1} + \delta_2$, $\kappa_2 = \bar{\kappa_2} + \delta_3$ можно осуществить посредством редукции Ляпунова-Шмидта к ключевой функции (от трех ключевых переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{p: <p,e_1>=\xi_1, <p,e_2>=\xi_2, <p,e_3>=\xi_3} V(p, \bar{\alpha} + \delta_1, \bar{\kappa_1} + \delta_2, \bar{\kappa_2} + \delta_3). \quad (3)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

Для ключевой функции (6) получено асимптотическое представление.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОГО ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Ибрагимов М.Г. (Махачкала)

Рассматривается следующая смешанная задача

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{\substack{k_0 + k_1 \le n \\ k_0 < n}} A^{(k_0,k_1)}(x) \frac{\partial^{k_0+k_1} u}{\partial t^{k_0} \partial x^{k_1}} + f(t,x), \quad a < x < b, \quad (1)$$

$$\sum_{k_1=0}^{n-1} \left\{ \alpha^{(k_1)} \left. \frac{\partial^{k_1} u}{\partial x^{k_1}} \right|_{x=a} + \beta^{(k_1)} \left. \frac{\partial^{k_1} u}{\partial x^{k_1}} \right|_{x=b} \right\} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = h_k(x), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (3)$$

Предполагаются следующие условия:

а) Функции $\frac{d^{m+1} A^{(k_0,k_1)}(x)}{dx^{m+1}} \in C[a,b]$ при $k_0 + k_1 = m$, $m = \overline{0,m}$.

б) Корни $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ характеристического уравнения

$$A^{(0,n)}(x)\varphi^n + A^{(1,n-1)}(x)\varphi^{n-1} + \ldots + A^{(n-1,1)}(x)\varphi - 1 = 0$$

вещественны, различны при всех x и отличны от нуля.

в) Граничные условия (2) регулярны.

г) $h_0, \ldots h_{n-2}$ — функции из области определения оператора задачи (1)–(3), h_{n-1} непрерывно дифференцируема на $[a,b]$,

$$\left. \frac{d^j h_i}{dx^j} \right|_{x=a,b} = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \ j = \overline{0, n-i}.$$

д) $f(t,x)$ непрерывна на $[0,T] \times [a,b]$.

Теорема. При условиях а)–д) классическое решение задачи (1)–(3) единственно и оно представимо в виде ряда Фурье по собственным элементам дифференциального пучка, соответствующего уравнению (1) и условиям (2).

ФОРМАЛИЗОВАННЫЕ МОДЕЛИ ТЕСТ-КОНТРОЛЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Иванов В.А., Фирстов В.Е.

1. Формально процедуру тест-контроля можно описать некоторым конечным распознающим автоматом вида $(T; A; P; f; g)$, где входной алфавит T — это множество заданий данного теста; множество состояний A — это всевозможные ответы к этим заданиям; выходной алфавит P — это шкала рейтингов результатов тестирования; функция переходов $f : A = \times T \to A$ определяет всевозможные состояния данного автомата, возникающие в процессе диалога $A \times T$; функция выходов $g : A \times T \to P$ задает рейтинги соответствующих состояний автомата, оценивая результаты тестирования. Цель работы — формально-алгоритмическое описание данного конечного автомата, реализующееся в некоторых наиболее распространенных процедурах тестирования с открытой и закрытой формой заданий.

2. В рамках приведенной модели тест – контроля и действующей программы по математике для общеобразовательных учреждений, разработан пакет тестов для школьников 6-х классов, в строгом соответствии с тематическим планированием по учебнику "Математика 6" Н. Я. Виленкина и др.

Пакет тестов состоит из 6 тестов, из которых 5 тематических и 1 рубежный (для итогового тестирования в конце учебного года), причем, каждый тест выполнен в 3-5 вариантах одинаковых по сложности и, таким образом, полностью охватывается программа по математике в 6-х классах. В тестах используются задания 2-х форм: A — закрытой формы, когда к каждому заданию прилагается 4 варианта ответов , из которых один верный, и B — открытой формы, требующие записи ответа в виде числа. В каждом тесте 8 заданий формы A и 2 задания формы B (повышенной сложности). Среднее время выполнения отдельного задания теста предполагается равным 3-5 мин., а общее время выполнения теста составляет 40 минут.

Для оценки результатов тестирования используется шкала: за 6 верных ответов оценка "3", за 7-8 — оценка "4", за 9-10 — оценка "5" и оценка "2" ставится, если имеется менее 6 верных ответов.

3. Педагогические измерения в рамках данного тест – пакета проводились в средней общеобразовательной школе № 18 Фрунзенского района г. Саратова, в которой имеются три 6-х класса, причем, по уровню развития 6^a — "сильный" класс, 6^b — "средний" класс и 6^v — "слабый" класс (фактически класс коррекции).

Ниже представлены результаты соответствующих измерений, которые примерно охватывают материал по математике за первое полугодие 6-ого класса.

Тестирование в 6^a классе.

Кол-во верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Средний балл
Тест №1 (пробный)	-	-	-	1	2	2	3	1	-	2	14	4.12
Тест № 1	-	-	1	3	2	1	7	5	8	-	-	3.22
Тест № 2	1	1	3	3	5	3	6	-	-	-	-	2.27

Тестирование в 6^b классе.

Кол-во верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Средний балл
Тест №1 (пробный)	-	-	-	-	2	2	8	7	3	1	1	3.42
Тест № 1	-	-	3	3	6	6	1	2	1	3	-	2.64
Тест № 2	1	6	7	7	3	-	-	-	-	-	-	2.00

Числа во внутренних клетках таблиц — это количества учащихся с соответствующим количеством верных ответов (по верхней строке).

О РАВНОМЕРНОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Рассматриваются линейные операторы, не являющиеся, вообще говоря, ограниченными или непрерывно обратимыми, и действующих на произвольных линеалах пространства Крейна H : $H = H_+ \oplus H_-$, $H_\pm = P_\pm H$, $P_\pm^2 = P_\pm^+ = P_\pm$ $P_+ + P_- = I$ с индефинитной метрикой

$$[x,y] = (Jx,y), \quad J = P_+ - P_-, \quad x,y \in H.$$

Пусть $L \neq \{0\}$ — линеал в H, T — линейный оператор и $L \subset D_T$. Установлено, что равномерная отрицательность линеала TL, т.е. условие

$$[Tx,Tx] \leq -\gamma \cdot \| Tx \|^2 \quad \forall x \in L \quad \text{для} \quad \text{некоторого} \quad \gamma > 0 \tag{1}$$

не эквивалентно в общем случае условию

$$\omega_+(T \mid L) = \sup_{x \in L, x \neq 0} \frac{[Tx,Tx]^2}{\| x \|} > 0. \tag{2}$$

Тем не менее, при некоторых дополнительных условиях такая эквивалентность все же имееет место.

Теорема 1 *Если выполнено условие (1) и оператор $(T \mid L)$ — непрерывно обратим, то выполнено и условие (2).*

Теорема 2 *Если выполнено условия (2) и оператор $(P_+T \mid L)$ ограничен, то выполнео и условие (1).*

Пример *Линейный оператор T в пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, где*

$$H_+ = \text{з.л.о.}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, H_- = \text{з.л.о.}\{f_n\}_{n=1}^{\infty},$$

задан на векторах ортогонального базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ формулами:

$$Te_n = \sqrt{n} \cdot e_n + \sqrt{n+1} \cdot f_n \quad \forall n \in N \tag{3}$$

Можно показать, что неограниченный оператор T определен формулами (3) на линеале L, плотном в подпространстве H_+, выполнено условие $\omega_+(T \mid L) = -1$, однако линеал TL не являдется равномерно отрицательным.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРАНГОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исламов Г.Г. (Ижевск)

islamov@uni.udm.ru

Аналогом неприводимой матрицы с неотрицательными элементами в бесконечномерном случае является потенциально компактный положительный оператор A, действующий в комплексной банаховой решетке B и обладающий следующим свойством: не существует нетривиальных A–инвариантных замкнутых идеалов решетки B. Известно, что для оператора A с перечисленными выше свойствами спектральный радиус $r(A)$ является положительным собственным значением; все собственные значения, лежащие на спектральной окружности $|\lambda| = r(A)$, простые и даются формулой $\lambda_k = r(A)\exp[2\pi i(k-1)/m]$, $k = \overline{1,m}$, где m – число различных собственных значений, совпадающих с $r(A)$ по модулю. Число m равно единице при выполнении одного из трех условий: Ax – квазивнутренняя точка решетки B, если $x > 0$; A принадлежит операторному идеалу со следом τ и $\tau(A) \neq 0$; $B = C(X)$ – банахова решетка непрерывных функций, заданных на связном хаусдорфовом компакте X. Далее, для сопряженного оператора A^* найдется строго положительный линейный функционал $v \in B^*$ такой, что $A^*v = r(A)v$. Кроме того, существует $u \in B$ такое, что $u > 0, Au = r(A)u$ и u – квазивнутренняя точка решетки B. Согласно теореме 8 статьи [1] существует биективный ортоморфизм D банаховой решетки B такой, что $|Dx| = |x|$ для всех $x \in B_0 = \{x \in B : |x| \leq \lambda u$ для некоторого $\lambda, 0 \leq \lambda < \infty\}$. Вектор $\varphi_k = D^{k-1}u$ есть единственный с точностью до постоянного множителя собственный вектор оператора A, отвечающий λ_k, а $\psi_k = S^{k-1}v(S = (D^*)^{-1})$ будет единственным с точностью до постоянного множителя собственным вектором сопряженного оператора A^*, отвечающим $\bar{\lambda}_k$.

Теорема. *Пусть $< u, v >= 1$. Тогда для одноранговогo оператора $K = a < \cdot, b >$, где при $m = 1$ $a = u, b = v$, а при $m > 1$*

$$a = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\varphi_k, b = \sum_{k=1}^{m} \bar{\beta}_k\psi_k, \quad \alpha_k\beta_k = \lambda_k^m / \prod_{j=1, j\neq k}^{m} (\lambda_k - \lambda_j), k = \overline{1,m},$$

имеем:

$$r(A-K) < r(A), \|K\| \leq \frac{r(A)}{m}\|u\|\|v\| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^{-1}.$$

Литература

1. J.J. Grobler. A note on the theorem of Jentzsch–Perron and Frobenius // Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., A90, No 4, pp. 381–391 (1987).

ИЗУЧЕНИЕ КУРСА "ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЧЕРЧЕНИЕ"

Кадменская Н.В. (Воронеж)

Эксперимент по изучению нового курса "Геометрическое черчение" проводиться в Воронеже с 1998-1999 учебного года. Школа 88 одна из первых, подключившихся к эксперименту. Работа велась под контролем и при помощи авторов учебника, а также в контакте с группой психологов. Изначально, авторы рассматривали введение курса "Геометрическое черчение" — как пропедевтику изучения геометрии и черчения. Потому в различных школах города Воронежа "Геометрическое черчение" ведут как учителя математики, так и учителя черчения.

Начиная с 1998 года, предмет изучался в 5б классе, а тестирование проводилось в 5б и 5г классах, причём 5г класс не изучал "Геометрическое черчение". Результаты, начиная с I полугодия пятого класса и по сей день (а сейчас эти дети учатся в восьмых классах), ярко показывают, что учащиеся нынешнего 8б опережают своих сверстников из 8г как в плане изучения геометрии, так и черчения и в том числе алгебры.

Очевидно и бесспорно, курс "Геометрическое черчение" развивает геометрическую интуицию, пространственное воображение, чертежные навыки и, главное, умение мыслить логически.

От задумки создания учебников до их издания — большой срок — около десяти лет. За эти годы отобрано столько интересных и разнообразных задач и предлагаются они (учителю) в таком количестве, что даёт возможность, как начинающему, так и опытному педагогу, работать творчески.

Из опыта моей работы могу с уверенностью сказать, что предмет стал "семейно изучаемым". Любой вопрос, заданный ребёнком родителям, при выполнении домашнего задания, неизменно вызывал интерес взрослых, желание вместе прочитать, поспорить, решить нестандартную задачу различными, подчас, самыми неожиданными способами. Я думаю, что это, в частности, аргумент в пользу "Геометрического черчения" и подтверждение успеха авторов.

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ТЕРМИНАХ ВЕКТОРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Калинин А. В., Калинкина А. А. (Нижний Новгород).

В работе предлагаются несколько калибровочных соотношений для векторного магнитного потенциала:

$$\mathrm{div}\sigma A(x) = 0,\ x \in \Omega,\ A_n(x) = 0,\ x \in \Gamma;$$

$$\varphi(x) = -\kappa \mathrm{div} sigma \vec{A}(x),\ x \in \Omega,\ A_n(x) = 0,\ x \in \Gamma,$$

где $\Omega \in R^3$–ограниченная открытая область с гладкой границей Γ, $\kappa > 0$.

При рассматриваемых калибровочных соотношениях приводятся обобщенные формулировки соответствующих стационарных задач и вариационные принципы, в которых исключается одна из неизвестных функций – скалярный электрический потенциал:

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}u)^2 dx - \frac{4\pi}{c}\int\limits_\Omega \sigma E^{st} u dx \to \inf,\ u \in V$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}u)^2 dx + \frac{2\pi}{c}\kappa\int\limits_\Omega (\mathrm{div}\sigma u)^2 dx - \frac{4\pi}{c}\int\limits_\Omega \sigma E^{st} u dx \to \inf,\ u \in W,$$

функциональные пространства V и W сформулированы в постановке задач, коэффициенты $\mu = \mu(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ при почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяют условиям: $\mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2, \varepsilon_1 \leq \varepsilon(x)_1 \leq \varepsilon_2, \sigma_1 \leq \sigma(x) \leq \sigma_2$.

Доказывается теорема об однозначной разрешимости краевых задач для векторного магнитного потенциала и изучается связь рассматриваемых задач при различных калибровочных соотношениях.

Устанавливается теорема об эквивалентности постановки стационарных задач в терминах векторного магнитного потенциала и альтернативной постановки в терминах напряженности магнитного поля.

Предлагаемые обобщенные формулировки стационарных задач электромагнитной теории могут быть эффективно использованы при построении численных схем решения этих задач, и, в частности, при решении проблемы аппроксимации векторных полей.

Литература.

1. Калинин А. В., Калинкина А. А. // Деп. в ВИНИТИ - 8-В2002. – М.:ВИНИТИ, 2002.

2. Калинин А. В., Морозов С. Ф. // Вестник Нижегородского университета. Математическое моделирование и оптимальное управление.–1997. с. 24–32.

3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. –М.: Наука, 1976.

ОБ УСЛОВИЯХ ЛИПШИЦА ДЛЯ ОПЕРАТОРА УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С. (Липецк)

kalitvin@lipetsk.ru

Пусть $T \subset R^n, S \subset R^m$ -компактные множества, $D = T \times S$ и функции $a_1(t,s,\tau,u), a_2(t,s,\sigma,u)$, где $t,\tau \in T, s,\sigma \in S, u \in R$, удовлетворяют условиям Каратеодори. В заметке приводятся условия Липшица в банаховых идеальных пространствах (БИП) для оператора $A = A_1 + A_2$, где

$$A_1x(t,s) = \int_T a_1(t,s,\tau,x(\tau,s))d\tau, A_2x(t,s) = \int_S a_2(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma.$$

Пусть $U_i = U_i(T)$ и $V_i = V_i(S)$ — почти совершенные БИП с носителями T и S $(i = 1,2)$, U_1' и V_1' -двойственные к U_1 и V_1 —БИП, $X_1 = V_1[U_1], X_2 = U_1[V_1], Y_1 = V_2[U_2]$ и $Y_2 = U_2[V_2]$ — БИП со смешанными нормами, U_2/U_1 и V_2/V_1 — БИП мультипликаторов с нормами $\|u\|_{U_2/U_1} = sup\{\|ux\|_{U_2} : \|x\|_{U_1} \leq 1\}, \|v\|_{V_2/V_1} = sup\{\|vx\|_{V_2} : \|x\|_{V_1} \leq 1\}$, нормы в БИП $U_1, U_2, U_2/U_1$ и U_1' (в $V_1, V_2, V_2/V_1$ и V_1') "берутся" по переменным t и τ (s и σ) соответственно, $Z_1 - Z_{12}$—БИП $(V_2/V_1)[U_1'[U_2]]$, $(V_2/V_1)[U_2[U_1']]$, $V_1'[V_2[U_2/U_1]]$, $V_2[V_1'[U_2/U_1]]$, $U_2[(V_2/V_1)[U_1']]$, $V_1'[(U_2/U_1)[V_2]]$, $U_1'[(V_2/V_1)[U_2]]$, $V_2[(U_2/U_1)[V_1']]$, $U_2[U_1'[V_2/V_1]]$, $U_1'[U_2[V_2/V_1]]$, $(U_2/U_1)[V_2[V_1']]$, $(U_2/U_1)[V_1'[V_2]]$ соответственно со смешанными нормами и

$$|a_i(t,s,\gamma,u) - a_i(t,s,\gamma,v)| \leq f_i(t.s,\gamma,\omega)|u - v|(|u|,|v| \leq \omega, i = 1,2),$$

где $\gamma = \tau$ при $i = 1$ и $\gamma = \sigma$ при $i = 2$, а функция $f_i(t,s,\gamma,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Через F_1 и F_2 обозначим обобщенные операторы суперпозиции $F_1 : x(\tau,s) \to f_1(t,s,\tau,x(\tau,s))$ и $F_2 : x(t,\sigma) \to f_2(t,s,\sigma,x(t,\sigma))$.

Теорема. Пусть операторы A_1 и A_2 действуют из БИП X в БИП Y, где $X = X_1$ или $X = X_2$, $Y = Y_1$ или $Y = Y_2$. Тогда оператор A удовлетворяет условию Липшица, если: $X = X_1, Y = Y_1, F_1$ действует из X в Z_1 или в Z_2 и ограничен, F_2 действует из X в Z_3 или в Z_4 и ограничен; $X = X_1, Y = Y_2, F_1 : X \to Z_5, F_2 : X \to Z_6$ и операторы F_1 и F_2 ограничены; $X = X_2, Y = Y_1, F_1 : X \to Z_7, F_2 : X \to Z_8$ и операторы F_1 и F_2 ограничены; $X = X_2, Y = Y_2, F_1$ действует из X в Z_9 или в Z_{10} и ограничен, F_2 действует из X в Z_{11} или в Z_{12} и ограничен.

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С. (Липецк), Елецких И.А. (Елец)
kalitvin@lipetsk.ru

Интегральное уравнение $x = K_i x + f$ $(i = 1, \ldots, 4)$ обобщает уравнение, полученное В.И.Романовским в 1932 году при изучении одной задачи теории марковских цепей [1]. Здесь $K_1 = L\Pi + M + N$, $K_2 = L\Pi + M + N\Pi$, $K_3 = L + M\Pi + N$, $K_4 = L + M\Pi + N\Pi$ — операторы типа Романовского с частными интегралами,

$$(Lx)(t,s) = \int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, \ (Mx)(t,s) = \int_T m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_T \int_T n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \Pi x(t,s) = x(s,t),$$

$t, s, \tau, \sigma \in T = [a,b]$, $l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma)$ — измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. В [2] показано, что теория уравнения $x = K_i x + f$ $(i = 1, \ldots, 4)$ существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма. Условия фредгольмовости этого уравнения в пространстве $C(T \times T)$ изучались в [3], а критерии фредгольмовости в пространстве $X = L^p(T \times T)(1 \le p \le \infty)$ — в [4].

Теорема. Если операторы L, M и N действуют в пространстве X, $(L\Pi)^2$ и $N + ML\Pi$ — компактные операторы в X и $x = Mx + f$ — нетерово уравнение в X, то $x = K_i x + f$ $(i = 1, 2)$ — нетерово уравнение в X. Если дополнительно $x = Mx + f$ — фредгольмово уравнение в X, то в X фредгольмовость уравнения $x = K_i x + f$ $(i = 1, 2)$ равносильна фредгольмовости уравнения $x = Mx + f$.

Для уравнения $x = K_i x + f$ $(i = 3, 4)$ утверждения аналогичны.

Литература

1. Романовский В.И. Избранные труды. Т.2. Теория вероятностей, статистика и анализ.—Ташкент: Наука, 1964.—390 с.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

3. Елецких И.А., Калитвин А.С. О фредгольмовости уравнений типа Романовского с частными интегралами// Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тезисы докладов международной конференции. Минск, 2001. С. 59–60.

4. Kalitvin A.S. Romanovskij type equations with partial integrals // Internacional conference on functional Analysis. Kyiv, 2001. P. 43–44.

УСЛОВИЯ ДЕЙСТВИЯ ОПЕРАТОРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Калитвин А.С., Фролова Е.В. (Липецк)

lsn@lipetsk.ru

Пусть K — оператор с частными интегралами вида

$$(Kx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma$$

$$+ \int_a^b \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau.$$

Через $C_h(D)$ обозначим множество классов эквивалентных измеримых на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций x таких, что $hx \in C(D)$, с нормой $\|x\|_{C_h(D)} = \|hx\|_{C(D)}$. Если функция h непрерывна и не обращается на D в нуль, то $C(D)$ и $C_h(D)$ состоят из одних и тех же элементов. если же h непрерывна и обращается в нуль, то $C(D) \subset C_h(D)$.

Теорема 1. Пусть h и g — непрерывные на D функции, $l(t,s,\tau) = l_1(t,s)g(\tau,s)$, $m(t,s,\sigma) = m_1(t,s)g(t,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = n_1(t,s)g(\tau,\sigma)$, а $l_1, m_1, n_1 \in C_h(D)$. Тогда оператор K действует из $C_g(D)$ в $C_h(D)$.

Если в условии теоремы множество нулей функции h содержится в множестве нулей функции g и в окрестности каждого нуля функции h функция g имеет такой же или более высокий порядок малости, чем функция h, то $C_h(D) \subset C_g(D)$. В этом случае оператор K действует из более широкого пространства в более узкое, в частности, оператор K с ядрами указанного вида действует из $C_g(D) = C_{(t-a)^2}(D)$ в $C_h(D) = C_{t-a}(D)$. Отметим, что в случае пространств $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ оператор K с $lm \not\equiv 0$ из более широкого пространства в более узкое не действует.

В теореме 1 пространства с весом определяются по виду функций l, m, n и свойствам функций l_1, m_1, n_1. Еще одна конструкция пространств с весом содержится в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть h_1, h_2, h_3 и g_1, g_2, g_3 — непрерывные функции, $h = h_1h_2h_3$, $g = |g_1| + |g_2| + |g_3|$, $l(t,s,\tau) = l_1(t,s)\,g_1(\tau,s)$, $m(t,s.\sigma) = m_1(t,s)\,g_2(t,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = n_1(t,s)\,g_3(\tau,\sigma)$, где $l_1 \in C_{h_1}(D)$, $m_1 \in C_{h_2}(D)$, $n_1 \in C_{h_3}(D)$. Тогда оператор K действует из $C_g(D)$ в $C_h(D)$.

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин В.А. (Липецк)
kalitvin@mail.ru

Уравнение $x = Ax + f \equiv Lx + Mx + Nx + f$, где

$$(Lx)(t,s) = \int_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma.$$

$$(Nx)(t,s) = \int_0^t \int_S n(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma \quad (t \in [0,a], s,\sigma \in S),$$

S — компактное множество положительной меры в R^n, l,m,n,f — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега, обобщает интегральное уравнение $x = Nx + f$, к которому приводятся некоторые нелинейные задачи теплоизлучающих тел с термически тонким покрытием [1]. Уравнения $x = Ax + f$ и $x = Nx + f$ с непрерывными функциями l,m,n,f принципиально отличаются друг от друга, так как в этом случае N — компактный оператор в $C = C([0,a] \times S)$, а оператор A с частными интегралами не является компактным в C. Свойства операторов с частными интегралами изучались в [2—4].

Теорема. Если $l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma,u)$ — непрерывные по совокупности переменных функции, $I - M$ — обратимый оператор в C и $|n(t,s,\tau,\sigma,u) - n(t,s,\tau,\sigma,v)| \leq K|u-v|$, то $\forall f \in C$ уравнение $x = Ax + f$ имеет единственное решение в C и оно может быть получено методом последовательных приближений.

Литература

1. Березовский А.А. Нелинейные задачи теплоизлучающих тел с термически тонким покрытием//Задачи нестационарной теплопроводности. Препринт 83.29 /Ин-т математики АН УССР. —Киев, 1983. —С.6-11.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. —252 с.

3. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. —New York: Marcel Dekker, 2000. —578 p.

4. Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002. —208 с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ[1]

Каменский М.И., Макаренков О.Ю. (Воронеж)
kmi@kma.vsu.ru, *omakarenkov@mail.ru*

В работе исследуется устойчивость периодических решений системы с малым параметром в случае, когда предельная система автономна и имеет устойчивый цикл.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 02-01-00307

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon\varphi(t, x) + \psi(x), \tag{1}$$

в которой функция $\varphi : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ непрерывно дифференцируема и T-периодична по первой переменной, $\psi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ дважды непрерывно дифференцируема, ε - малый параметр. Пусть дана сходящаяся при $n \to \infty$, $n \in \mathrm{N}$ последовательность $\{x_n\}$ T-периодических решений системы (1) соответствующая последовательности $\varepsilon_n \to 0$, причем $\|x_n - x_0\| \neq 0$ и $x_0 \not\equiv 0$, где $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Обозначим через $K(t)$ фундаментальную систему решений линеаризованной при $\varepsilon = 0$ и $x = x_0$ системы (1). В работе изучается ситуация, когда 1 является простым собственным значением матрицы $K(T)$ (случай Андронова-Витта). Поэтому $K(t) = \Phi(t) \circ (1, e^{\lambda t})$.

Обозначим через $RY \subset R_+ \times Y$ множество таких пар (r, y), что

$$\dot{y} = \psi'(x_0(t))y + r\varphi(t, x_0(t)),$$

где Y - множество всех дифференцируемых T-периодических функций удовлетворяющих условию $\|y\| = 1$. Положим

$$v(r, y) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\Phi^{-1}(s)\left(\psi''(x_0(s))y(s) + r\varphi'_{(2)}(s, x_0(s))\right)\Phi(s)\right]_{11} ds.$$

$$v_0 = \min\{v(r, y) \in RY\}, \quad v^0 = \max\{v(r, y) \in RY\},$$

где $[\Phi(s)]_{11}$ - элемент матрицы $\Phi(s)$ с соответстствующим индексом.

Теорема. Пусть $\lambda < 0$, то есть цикл x_0 ассимптотически орбитально устойчив при $t \to \infty$. Пусть $\varphi(t, x_0(t)) \not\equiv 0$. Тогда если $v^0 < 0$ ($v_0 > 0$), то при достаточно больших n функции x_n являются ассимптотически устойчивыми при $t \to \infty$ (неустойчивыми по Ляпунову) решениями системы (1) при соответствующих значениях ε.

Задача о существовании T-периодических решений у системы (1) при $\varepsilon \neq 0$ исследована в [1].

Литература

[1] M. I. Kamenskii, O. U. Makarenkov, P. Nistri. The problem of the existence of periodic solutions. International conference on functional differential equations and applications. Ben Gurion University of the Negev. Beer-Sheva. Izrael. 9-13, 2002.

О ГЛАВНОМ СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ КОРНЕВОЙ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ[1]

Катрахов В.В., Харченко Ю.Н. (Владивосток)

katrakhov@mail.ru

Целью доклада является изложение основных результатов монографии [1] по новому методу, названному методом корневых трансфер-матриц, который

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 01.01.00666.

позволяет аналитически и численно исследовать двухмерные, трёхмерные модели Изинга с полем на кубических решётках. Численный алгоритм кардинально снизил вычислительную сложность моделей и реализуется даже на персональных компьютерах.

Рассмотрим, например, двумерную модель с полем с соответствующей статистической суммой вида

$$Z_{N,M} = \sum_{\chi} \prod_{n=1}^{N} \prod_{m=1}^{M} \exp(\nu\chi_{nm}\chi_{n+1m} + \mu\chi_{nm}\chi_{nm+1} + \eta\chi_{nm}),$$

где ν, μ – параметры межмолекулярного взаимодействия, η – параметр взаимодействия с внешним полем, N, M – количества узлов по двум направлениям двумерной квадратной решётки, а χ – набор бинарных переменных $\chi_{nm} = \pm 1$, связанных с узлами решётки с координатами (n, m). Введём ещё корневую трансфер-матрицу UP размера $2^N \times 2^N$, где U представляет собой блочно-диагональную матрицу с 2^{N-2}-я одинаковыми блоками

$$\begin{bmatrix} e^{+\nu+\eta+\mu} & e^{+\nu+\eta-\mu} & 0 & 0 \\ e^{-\nu-\eta-\mu} & e^{-\nu-\eta+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\nu+\eta+\mu} & e^{+\nu+\eta-\mu} \\ 0 & 0 & e^{+\nu-\eta-\mu} & e^{+\nu-\eta+\mu} \end{bmatrix},$$

а P – матрица перестановок размера $2^N \times 2^N$, в которой единицы стоят в левой половине по ходу шахматного коня начиная с левого верхнего угла, тогда как в правой половине – также по ходу шахматного коня, но начиная уже с правого нижнего угла. Обозначим через λ_N главное собственное значение матрицы UP, т.е. положительное и максимальное по модулю (оно существует, единственно и однократно). Тогда основное положение метода имеет вид равенства

$$\lim_{N,M\to\infty} \frac{\ln Z_{N,M}}{NM} = \lim_{N\to\infty} \ln\lambda_N.$$

Аналогичный результат имеет место и для трёхмерных моделей.

Литература

1. Катрахов В.В., Харченко Ю.Н. Модели статистичнской механики. Метод корневых трансфер-матриц. Владивосток, изд-во ДВГАЭУ, 2002, 12 п.л. (в печати).

ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Квитко А.Н. (Санкт-Петербург)

Пусть объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$, $r \leq n$, $t \in [0, 1]$, $f \in C^3(R^n \times R^r \times R^1; R^n)$.

$$\|x\| < C_1, \quad \|u\| < C_2. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект №01-01-00319.

Задача. Найти функции $(x(t), u(t)) \in C[0,1)$, удовлетворяющие системе (1) так, чтобы были выполнены соотношения

$$x(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to 1. \tag{3}$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$x = a(t) + x_1, \quad u = b(t) + u_1^1, \tag{4}$$

где x_1, u_1^1 — некоторые фиксированные вектора.

В работе предложен алгоритм построения искомых функций, который реализуется посредством решения задачи стабилизации линейной стационарной системы и нахождению решения задачи Коши для нелинейной системы специального вида. Сформулирован критерий выбора конечных состояний, гарантирующий реализацию алгоритма.

СВОЙСТВА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Клочков М. А. (Ижевск)

m_k@udm.ru, mike@ulm.uni.udm.ru

Аналогично задаче удаления заданного подмножества собственных значений [1,2], можно рассмотреть задачу добавления новых собственных значений в спектр операторов:

$$\sigma_p(T - K) = \sigma_p(T) \cup \Omega \setminus \Omega'. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть T—самосопряжённый оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $Tu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < u, X_k > X_k$— его спектральное разложение, $D(T) = \left\{u | u \in H, \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 | < u, X_k > |^2 < \infty\right\}$—область определения. Пусть, далее, $\Omega = \left\{\lambda_{k_1}\right\}$—множество, состоящее из одной точки, добавляемой к спектру оператора T, задано также некоторое подмножество $\Omega' = \left\{\lambda'_{k_1}\right\}$, такое, что $TX_{k_1} = \lambda'_{k_1} X_{k_1}$, где λ'_{k_1} и X_{k_1} - собственные значение и функция оператора T соответственно. Имеется оператор $Ku = a < u, b >$, причём для K выполнено соотношение (1), тогда и только тогда найдутся две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел $\{\nu_i\}$ и $\{\beta_i\}$ такие, что:*

а) $a = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j$, $\quad b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j X_j$; б) $\nu_j \beta_j = 0$ для индексов $j \neq k_1$; в) $\dfrac{\beta_1 \nu_1}{\lambda'_{k_1} - \lambda_{k_1}} = 1$.

Если не ограничиваться одной добавляемой точкой спектра, то, как следствие, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть T—самосопряжённый оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $Tu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < u, X_k > X_k$— его спектральное разложение, $D(T) = \left\{u | u \in H, \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 | < u, X_k > |^2 <\right.$*

$\infty\}$*—область определения. Пусть, далее,* $\Omega = \left\{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\right\}$*—множество точек, добавляемых к спектру оператора* T*, задано также некоторое подмножество* $\Omega' = \left\{\lambda'_{k_1}, \ldots, \lambda'_{k_m}\right\}$*, такое, что* $TX_{k_i} = \lambda'_{k_i} X_{k_i}$*, где* λ'_{k_i}, X_{k_i} *— собственные значения и функции оператора* T *соответственно. Имеется* m *операторов* $K_i u = a_i < u, b_i >$*, причём для* $\sum_{i=1}^{m} K_i$ *выполнено соотношение (1), тогда и только тогда найдутся две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел* $\{\nu_i\}$ *и* $\{\beta_i\}$ *такие, что:*

а) $i = \overline{1, m}$, $a_i = \nu_i X_{k_i}$, $b_i = \bar{\beta}_i X_{k_i}$;

б) $\frac{\beta_i \nu_i}{\lambda'_{k_i} - \lambda_{k_i}} = 1$, $i = \overline{1, m}$.

Литература

1. Клочков М.А. // Удм. гос. ун-т.-Ижевск, 2001.-18с. Деп. в ВИНИТИ. 23.01.01, 196-В01. 2. Клочков М.А. // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2001, 3. С.59-64.

ОПЕРАЦИЯ ВСТАВКА

Ключанцев М.И. (Воронеж)

pmemm@vgta.vrn.ru

Пусть операторы A и B и все их временные формы — операторы: $DtR \to DtR$ и пусть $I_A = detQ = \Sigma\Pi ...p_i...r_j...$, $I_B = detQ' = \Sigma\Pi ...p_{i'}...r_{j'}...$ - представления операторов A и B соответственно [1].

Вставкой (внедрением) оператора B в оператор A называется преобразование $A \to \tilde{A}$, сохраняющее все временные формы оператора A за исключением формы $p_0 p_1 ... p_{n-1} p_n$, которая преобразуется по правилу: оператор максимального ранга p_n умножется справа на $I_{n+1} = I_{n+1,B} = det\tilde{Q}' = \Sigma\Pi ... p_{n+i'+1} ... r_{n+j'+1} ...$ и затием раскрываются скобки.

Другими словами, *вставка* – это вставка оператора B в начало (оператор p_n выполняется в первую очередь) наиболее высокой по рангу будущей временной формы оператора A. Оператор B имел самую высокую по рангу будущую временную форму $p_0 p_1 ... p_{m-1} p_m$, поэтому $\tilde{A}$ будет иметь наиболее высокую по рангу будущую временную форму $p_0 p_1 ... p_{n-1} p_n p_{n+1} ... p_{n+m+1}$.

К основным свойствам операции *вставка* следует отнести: 1) однозначность; 2) *вставка* может быть применена последовательно сколько угодно раз; 3) *вставка* ассоциативна, но не коммутативна.

При очевидных ограничениях определяется операция *вырезка* оператора B из оператора A, которую следует рассматривать, как обратную к *вставке*.

Операция *вставка* опирается на *принцип запрета*: для реальной системы (оператора) *вставка* единичного оператора I_B левее любого p_i или правее любого r_j запрещена - представления $...r_i p_{i+1}...$ противоречат определению временных форм оператора. В исчислении будущих [1] *принцип запрета* частично игнорируется - каждому слогаемому произведения $I_i I_{i+1} = (p_i + r_i)(p_{i+1} + r_{i+1})$ придаётся тот или иной разумный смысл - *вставка* доопределяется до понятия *обобщенная вставка* .

Литература

1. Ключанцев М.И. Исчисление будущих // Понтрягиновские чтения-XI. Тез. докл., Воронеж, 2000. С.83.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ СО СТЕПЕННОЙ СКОРОСТЬЮ КЛАССА ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключев В.В. (Йошкар-Ола)

key@marsu.ru

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x) = 0, \quad x \in X$, где $F : X \to X$ – дважды дифференцируемый по Гато оператор, X – банахово пространство. При отсутствии непрерывной обратимости оператора $F'(x)$ исходная задача является некорректной.

Предполагается, что производная $F'(x^*)$, где x^* – решение уравнения, удовлетворяет условию секториальности: для некоторого $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ имеет место включение $\sigma(F'(x^*)) \subset K(\varphi_0)$, $K(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg\lambda| < \varphi_0\} \cup \{0\}$ и оценка $\|(\lambda E - F'(x^*))^{-1}\| \le C_0/|\lambda| \quad \forall\lambda \in \mathbf{C}\backslash K(\varphi_0)$. Здесь $\sigma(F'(x^*))$ - спектр оператора $F'(x^*)$. Для решения задачи применяется итерационный процесс $x_{n+1} = x_{n+1}^{(n)}, x_{n+1}^{(0)} = \xi, \quad k = 0, \ldots, n-1,$

$$x_{n+1}^{(k+1)} = x_{n+1}^{(k)} - g(F'(x_n))(F'(x_n)(x_{n+1}^{(k)} - x_n) + F(x_n)), \tag{1}$$

где функция $g(\lambda)$ аналитична в окрестности множества $K(\varphi_0) \cup \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le \|F'(x^*)\|\}$. Известно [1] , что при выполнениии условия секториальности и требования истокообразной представимости $x^* - \xi \in R(F'(x^*)^p), \quad p \ge 1$, а также соответствующих условий на $g(\lambda)$, процесс (1) сходится к x^* со степенной скоростью $\|x_n - x^*\| \le C_2 n^{-p}, n \in \mathbf{N}$. В работе выделен класс порождающих функций $g(\lambda)$, для которых справедлива обратная

Теорема. Пусть $p > 1$. Тогда при выполнении условия секториальности с $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$ и указанной оценки имеет место истокообразное представление $x^* - \xi \in R(F'(x^*)^{p-\varepsilon}) \quad \forall\varepsilon \in (0, p)$.

Условия теоремы выполняются, например, для $g(\lambda) = \mu$ при малых $\mu > 0$ и для $g(\lambda) = (\lambda + a)^{-1}, a > 0$ (явный и неявный итерационные процессы).

Литература

1. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Условия истокопредставимости и скорость сходимости методов решения некорректных операторных уравнений. Часть II // Вычислительные методы и программирование. 2001. Т.2, N 1, С 69–95.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ ЗНАКОВ ДЛЯ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ НА МНОЖЕСТВЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Колодежнов В.Н. (Воронеж)

kyn@vgta.vrn.ru

Пусть $R_p \subset R$ — множество неотрицательных действительных чисел, м M — множество из J некоторых знаков, указывающих на принадлежность некоторого числа $a \in R_p$ к одному из J классов.

Рассматриваются гиперкомплексные числа вида

$$A = \langle s_1 \rangle a_1 + \langle s_2 \rangle a_2 + \ldots \langle s_J \rangle a_J \qquad (1)$$

$a_j \in R_p$; $\langle s_j \rangle \in M$; $j = 1, 2, \ldots, J$. В данном случае знаки $\langle s_j \rangle \in M$ по сути играют роль традиционных базисных мнимых единиц (см. [1,2]). Будем считать, что для (1) определена операция умножения гиперкомплексных чисел, задаваемая с учетом матрицы умножения знаков $\langle s_{ik} \rangle = \langle s_i \rangle \cdot \langle s_k \rangle$; $\langle s_{ik} \rangle \in M \quad \forall\ i, k = 1, 2 \ldots, J$, представляющей собой таблицу знаков Кэли.

Определение. *Если для некоторого* $\langle u \rangle \in M$ *и* $\forall \langle s_i \rangle \in M$ *выполняются условия вида*

$$\langle u \rangle \cdot \langle s_j \rangle = \langle s_j \rangle \cdot \langle u \rangle = \langle u \rangle; \quad j = 1, 2, \ldots, J,$$

то $\langle u \rangle$ *называется единичным нейтральным знаком.*

Определение. *Некоторый знак* $\langle s_k \rangle \in M$ *называется обратным по отношению к знаку* $\langle s_j \rangle \in M$, *если выполняются условия вида*

$$\langle s_k \rangle \cdot \langle s_j \rangle = \langle s_j \rangle \cdot \langle s_k \rangle = \langle u \rangle; \quad \langle s_k \rangle = \langle s_j \rangle^{-1}.$$

Доказаны следующая и другие ([3]) теоремы, устанавливающие связь между структурной матрицы знаков и свойствами гиперкомплексных чисел вида (1).

Теорема. *Для того, чтобы для* $\langle s_j \rangle \in M$ *существовал единственный обратный знак из того же множества M, необходимо и достаточно, чтобы каждая строка и каждый столбец матрицы знаков содержал точно один нейтральный единичный знак.*

Литература

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. — М: Наука, 1973. — 144 с.

2. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. — М.: Наука, 1986. — 120 с.

3. Колодежнов В.Н. О возможности построения числовых систем на основе множества неотрицательных чисел. — В кн.: Информационные технологии и системы. Научное изд. Вып. 4, ВГТА, — Воронеж, 2001. С. 52-55.

ПАДЕ - АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ В КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУРАХ ТИПА СТУПЕНЬКТ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Комарова Е.В. (Москва)

evkomarova@mail.ru

Рассматривается задача

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = F(z, x), 0 < x < 1; \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования РФ, грант №Е00-10-158.

$$z(0,\varepsilon)=0, \quad z(1,\varepsilon)=0, \quad 0<\varepsilon<\infty$$

Имея две асимптотики при малых и больших значениях эпсилон, строится решение задачи с контрастной структурой типа ступенька при помощи Паде - апркссимации. В этом случае Паде - апркссимация имеет вид

$$z(x,\varepsilon)=\begin{cases} \frac{a_0(t)+\tilde{a}_0(\tau)+\varepsilon(a_1(t)+\tilde{a}_1(\tau))+\ldots+\varepsilon^n(a_n(t)+\tilde{a}_n(\tau))}{1+\varepsilon b_1(t)+\ldots+\varepsilon^{n-1}b_{n-1}(t)+\varepsilon^n b_n(t)} & \text{при} \quad 0\le x\le x^* \\ \frac{c_0(t)+\tilde{c}_0(\tau)+\varepsilon(c_1(t)+\tilde{c}_1(\tau))+\ldots+\varepsilon^n(c_n(t)+\tilde{c}_n(\tau))}{1+\varepsilon d_1(t)+\ldots+\varepsilon^{n-1}d_{n-1}(t)+\varepsilon^n d_n(t)} & \text{при} \quad x^*\le x\le 1 \end{cases} \tag{2}$$

Здесь x^*-точка перехода, а коэффициенты аппроксимации $a(t)$, $\tilde{a}(\tau)$, $b(t)$, $c(t)$, $\tilde{c}(\tau)$, $d(t)$ определяются по формулам [1].

Для примера

$$\varepsilon^2\frac{d^2z}{dx^2}=p^2(x)[z-\varphi(x)](z^2-1)$$

$$z(0)=-1, \qquad z(1)=1,$$

где $p(x)=1$; $-1<\varphi(x)<1$ и $\varphi(x)=x-1/2$ строится поверхность решения при любом неотрицательном эпсилон.

Литература

1. Беляева Н.П., Дмитриев М.Г. Сращивание асимптотик решения начальной задачи с параметром на основе Паде-апркссимации// Программные системы. М.1999

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Н.Н.Нефедов Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах //Фундаментальная и прикладаная математика 1998, т.4, №3, С.799 — 851.

ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА И КРИТЕРИЙ СТРОГОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Кондратьев В.А. (Москва)

vla-kondratievyandex.ru

Рассматривается оператор Шредингера в $\mathbf{R}^n$ с магнитным полем, который имеет вид:

$$H_{a,V}=\sum_{j=1}^{n}P_j^2+V(x),$$

где $P_j=\frac{1}{j}\frac{\partial}{\partial x_j}+a_j(x)$. Предполагается, что a_j и $V(x)$ вещественные функции, причем $a\in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $\quad V\in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$. Доказывается необходимое и достаточное условие дискретности спектра оператора H. В случае отсутствия магнитного поля $\vec{a}$ результат совпадает с теоремой А.М. Молчанова (1952). Электрический потенциал V предполагается ограниченным снизу.

Так же устанавливается необходимое и достаточное условие строгой положительности оператора $H_{a,V}$ с неотрицательным электрическим потенциалом.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТИХОНОВСКИХ СИСТЕМ

Коняев Ю.А. (РУДН)

Изложен эффективный метод построения квазирегулярной асимптотики (применимой и в критических случаях), при котором сингулярности решения, отражающие внутренних и краевых погранслоев, выписываются в явной аналитической форме.

Литература

1. Коняев Ю.А., Конструктивные методы исследоваения многоточечных краевых задач // Журнал Известия ВУЗ математика,1992 No 2 стр 57-61

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА СЕТИ[1]

Копытин А.В. (Воронеж)

Рассматривается связный геометрический граф (сеть) Γ из $\mathbf{R}^n$. Фиксируем некоторые вершины, принадлежащие ровно одному ребру, которые назовем граничными. Остальные вершины Γ назовем внутренними. Для каждого ребра e графа Γ фиксируем параметризацию $\gamma_e : [0,1] \to e$. Пусть $u : \Gamma \to \mathbf{R}$. Определим функцию u_e на отрезке $[0,1]$ следующим образом: $u_e(\xi) = u(\gamma_e(\xi))$, $\xi \in [0,1]$. Для каждой вершины v и каждого ребра $e \ni v$ определим также функцию $u_{e,v}$ как $u_{e,v}(\xi) = u_e(\xi)$, если $v = \gamma_e(0)$; $u_{e,v}(\xi) = u_e(1-\xi)$, если $v = \gamma_e(1)$. Присвоим каждому ребру e некоторый положительный вес p_e. Введем на Γ следующие функциональные пространства: $C_0(\Gamma)$ - пространство непрерывных функций, обращающихся в нуль на границе; $C_0^2(\Gamma)$ - подпространство $C_0(\Gamma)$, составленное из функций, дважды непрерывно дифференцируемых на каждом ребре e графа Γ и удовлетворяющих в каждой внутренней вершине v условию согласования $\sum\limits_{e \ni v} p_e u'_{e,v}(0+) = 0$. Через Δ_Γ обозначим оператор двукратного дифференцирования по параметру ξ с областью опеределения $C_0^2(\Gamma)$.

Теорема 1 *Оператор $-\Delta_\Gamma$ порождает в $C_0(\Gamma)$ сильно непрерывную КОФ*[2] *C, задаваемую посредством $(C(t)f)_e(\xi) = \frac{1}{2}(\widetilde{f}_e(\xi+t) + \widetilde{f}_e(\xi - t))$, $\xi \in [0,1]$, $t \in \mathbf{R}$, для $f \in C_0(\Gamma)$ (функции $\widetilde{f}_e$ строятся в [1]).*

Обобщенным решением задачи Коши

$$u''(t) = \Delta_\Gamma u(t), \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \qquad u'(0) = \psi \tag{2}$$

называется функция, представимая в виде $u(t) = C(t)\varphi + S(t)\psi$, где $\varphi, \psi \in C_0(\Gamma)$, а $S(t)$ - операторная синус-функция, определяемая как $S(t) = \int_0^t C(s)\,ds$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00307).

[2]см. Fattorini H.O. Second-order linear differential equations in Banach spaces.

Теорема 2 *Обобщенное решение задачи (1), (2) ограничено на* $\mathbf{R}$, *и при всех* $t \in \mathbf{R}$ *справедлива оценка* $\|u(t)\| \le K\left(\|\varphi\| + \pi/(2\sqrt{\lambda_1})\|\psi\|\right)$, *где* $K = \sqrt{2\sum_{e\in E} p_e / \min_{e\in E} p_e}$, *а* λ_1 *– первое собственное значение* $-\Delta_\Gamma$.

Литература

1. Копытин А.В. О представлении решения волнового уравнения на графе с соизмеримыми ребрами // Труды математического факультета ВГУ. - Воронеж, 2001. С. 67-77.

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Корнев В.В., Хромов А.П. (Саратов)

Рассмотрим интегральный оператор $Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)dt$ при следующих предположениях: а) производные $A_{x^s t^j}(x,t) = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j}A(x,t)$, $s,j = 0,\dots,n$, непрерывны при $t \le x$ и $t \ge x$; б) $\Delta A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t} = A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t+0} - A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t-0} \in C^{n-1-j}[0,1]$, $j = 0,\dots,n-1$, $s = 0,\dots,n$; в) $\Delta A_{x^s}(x,t)|_{x=t} = \delta_{s,n-1}$, $s = 0,\dots,n$ ($\delta_{s,n-1}$ – символ Кронекера); г) A^{-1} существует.

Как показано в [1], A^{-1} представляет собой интегро-дифференциальный оператор:

$$A^{-1}y = (E+N)(y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y),$$
$$V_j(y) = U_j(y) - \int_0^1 y(x)\varphi_j(x)\,dx = 0, \quad j = 1,\dots,n,$$

где E – единичный оператор, $Nf = \int_0^1 N(x,t)f(t)dt$, ядро $N(x,t)$ непрерывно при $t \le x$ и $t \ge x$, $\varphi_j(x) \in C[0,1]$, $a_1,\dots,a_n$ – некоторые константы, $U_j(y) = \sum_{\mu=0}^{\sigma_j}(a_{j\mu}y^{(\mu)}(0) + b_{j\mu}y^{(\mu)}(1))$, $|a_{j,\sigma_j}| + |b_{j,\sigma_j}| > 0$, $n-1 \ge \sigma_1 \ge \dots \ge \sigma_n \ge 0$, $\sigma_j > \sigma_{j+2}$,

Обозначим через $S_r(x,f)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A, соответствующим характеристическим значениям, которые лежат в круге $|\lambda| < r$.

Теорема. *Если краевые условия* $U_j(y) = 0$, $j = 1,\dots,n$, *регулярны, то для любой функции* $f(x) \in C^\alpha[0,1]$, *у которой* $f^{(\alpha)}(x)$ *имеет ограниченную вариацию и которая удовлетворяет условиям* $V_j(f) = 0$ *для тех* j, *для которых* $\sigma_j \le \alpha$, *выполняется соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) + S_r(x,f)\|_{C^\alpha[0,1]} = 0.$$

Здесь α *– одно из чисел* $0,1,\dots,n-1$.

Отметим, что для случая, когда A^{-1} является дифференциальным оператором с регулярными краевыми условиями, этот факт установлен в [2].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-01-00075), программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123) и программы "Университеты России".

Литература

1. Хромов А. П. *Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов* // Матем. сб. – 1981. – Т. 114(156). № 3. – С. 378–405.

2. Kaufmann F.-J. *Derived Birkhoff-series associated with* $N(Y) = \lambda P(Y)$. // Results in Mathematics. – Vol. 15 (1989). – P. 255–290.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Корнев С.В. (Воронеж)

kornev_vrn@rambler.ru

В докладе развивается и обобщается метод многолистной векторной направляющей функции (см. [1]) в периодической задаче для дифференциального включения следующего вида:

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \tag{1}$$

в предположении, что мультиотображение $F : R \times R^n \to Kv(R^n)$ $T-$ периодично по первому аргументу ($T > 0$) и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори.

Рассматриваемый метод оказывается эффективен при более общих условиях, чем использовавшиеся ранее (см., например, [2]).

Литература

1. D.I. Rachinskii, Multivalent guiding functions in forced oscillation problems. //Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, 1996, vol. 26, N 3, pp 631-639.

2. Корнев С.В. О периодических решениях дифференциальных включений // Воронежская зимняя математическая школа (ВЗМШ - 2002). Тезисы докладов. - Воронеж: изд-во ВГУ, 2002. - С.40-41.

МАТРИЧНО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ[1]

Корыпаева Ю.В. (Воронеж)

Рассматривается задача оптимального быстродействия с матрично сингулярно возмущенным уравнением состояния вида:

$$(A + \varepsilon B)\frac{dx(t)}{dt} = Cx(t) + Du(t), \tag{1}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N 02-01-00189

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 02-01-00351).

$$x(0) = x^0, \ x(T) = 0, \tag{2}$$
$$J(u) = T \to min, \tag{3}$$
$$|u(t)| \le 1. \tag{4}$$

Здесь $x(t) \in R^m$, $u(t) \in R$ - управляющая функция, удовлетворяющая ограничению (4), $\varepsilon > 0$ - малый параметр, A, B, $C : R^m \to R^m$, $D : R \to R^m$- постоянные матрицы, матрица $A+\varepsilon B$ обратима при достаточно малых ε, причем, все B жордановы цепочки матрицы A, соответствующие нулевому собственному значению, имеют одинаковую длину p.

При определенных условиях можно сделать линейную замену переменных, сводящую систему (1) к системе

$$\dot{\xi} = E_1(\varepsilon)\xi + G_1(\varepsilon)u,$$
$$\varepsilon^p \dot{\eta} = E_2(\varepsilon)\eta + G_2(\varepsilon)u,$$

где $\xi(t) \in R^{m-n}$, $\eta(t) \in R^n$ (см. [2]).

При этом для матриц-коэффициентов справедливы представления:

$$E_1(\varepsilon) = C_0 + O(\varepsilon), \ E_2(\varepsilon) = (-1)^{p-1}(C_1 + O(\varepsilon)),$$
$$G_1(\varepsilon) = D_0 + O(\varepsilon), \ G_2(\varepsilon) = (-1)^{p-1}(D_1 + O(\varepsilon)).$$

Вырожденной задачей будем считать задачу быстродействия для системы

$$\dot{\xi} = C_0\xi + D_0 u, \tag{5}$$
$$\xi(0) = \xi^0, \ \xi(T) = 0,$$

при ограничениях (4). Уравнение (5), с точностью до обозначений, совпадает с уравнением, получаемым из (1) при $\varepsilon = 0$.

Пусть $T(\varepsilon)$ и $T^{(0)}$ - оптимальные моменты быстродействия для задачи (1)-(4) и вырожденной задачи соответственно.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема:

1. $T(\varepsilon) \to T^{(0)}$ при $\varepsilon \to 0$.
2. Если матрица $(-1)^{p-1}C_1$ имеет собственные значения с положительными действительными частями, то оптимальное управление исходной задачи может иметь N_1 точек переключения $T_1(\varepsilon)$, $T_2(\varepsilon)$, ... , $T_{N_1}(\varepsilon)$, лежащих в ε^p-окрестности начального момента $t = 0$ при достаточно малых ε (N_1 может быть равным нулю).
3. Оптимальное управление исходной задачи имеет N_0 точек переключения $T_{N_1+1}(\varepsilon)$, $T_{N_1+2}(\varepsilon)$, ... , $T_{N_1+N_0}(\varepsilon)$, близких к точкам переключения оптимального управления вырожденной задачи, то есть $T_{N_1+r}(\varepsilon) \to T_r^{(0)}$ при $\varepsilon \to 0$, $r = \overline{1, N_0}$ ($T_r^{(0)}$, $r = \overline{1, N_0}$ - точки переключения оптимального управления для вырожденной задачи).
4. Если матрица $(-1)^{p-1}C_1$ имеет собственные значения с отрицательными действительными частями, то оптимальное управление исходной задачи может иметь N_2 точек переключения $T_{N_1+N_0+1}(\varepsilon)$, $T_{N_1+N_0+2}(\varepsilon)$, ... , $T_{N_1+N_0+N_2}(\varepsilon) = T_N(\varepsilon)$, лежащих в ε^p-окрестности конечного момента $t = T$ при достаточно малых ε (N_2 может быть равным нулю).

Построен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Аналогичный результат для случая $A + \varepsilon B = diag(I, \varepsilon I)$ получен в [1].

Литература:

1. Collins W.D. Singular perturbations of linear time-optimal control problems // Recent Mathematical Developments in control. L., N.Y.: Acad. Press, 1973.

2. Курина Г.А. Полная управляемость линейных матрично сингулярно возмущенных систем. ВЛТИ. Деп. в ВИНИТИ. 1987.

АБСТРАКТНЫЙ ДРОБНЫЙ ИНТЕГРАЛ БЕССЕЛЯ

Костин А.В. Костин В.А. (Воронеж)

Kostin@kostin.vsu.ru

Пусть E– банахово пространство, $f(x)$– векторно-значная функция со значениями в E при каждом $x \in R^1$, $U(t)$– полугруппа линейных ограниченных операторов в E, сильно непрерывная при $t > 0$ и удовлетворяющая оценке $\|U(t)\| \le Mt^{-\delta}e^{-\omega t}$ $(\omega > 0, 0 < \delta < 1)$, A– генератор этой полугруппы.

Рассмотрим операторы

$$(G^{\alpha}_{\pm} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1} U(\tau) f(t \mp \tau) d\tau, \tag{1}$$

Очевидно, что в случае $E = R^1$ и $U(t) = e^{-\omega t}$ (1) являются левым и правым дробными интегралами Бесселя (см [1]) и представляют собой отрицательными дробные степени дифференциальных операторов $(\omega I \pm \frac{d}{dx})$, и, следовательно операторы (1) формально можно рассматривать как отрицательные дробные степени операторов $(A \pm \frac{d}{dx})$.

В соответствии с [2] рассмотрим обобщенные пространства Степанова с нормами

$$\|f\|_{S^{\pm}_{p,\gamma}} = \sup_{t \in R^1} [\int_0^1 \tau^{\gamma-1} \|f(t \mp \tau)\|^p d\tau]^{\frac{1}{p}} \ (0 < \gamma < 1),\ p \ge 1).$$

Теорема 1. Если $\alpha > \delta$ и $\frac{\gamma_r}{r} - \frac{\gamma_p}{p} + \alpha - \delta > 0$, то операторы $G^{\alpha}_{\pm}$ ограниченно действуют из $S^{\pm}_{p,\gamma_p}$ в $S^{\pm}_{r,\gamma_r}$ и справедливо неравенство

$$\|G^{\alpha}_{\pm} f\|_{S^{\pm}_{r,\gamma_r}} \le C(\alpha, p, r) \|f\|_{S^{\pm}_{p,\gamma_p}} \tag{2}$$

Теорема 2. Операторы $G^{\alpha}_{\pm}$ ограниченно действуют из $S^{\pm}_{1,\alpha,\delta}$ в L_{∞} и справедливо неравенство

$$\|G^{\alpha}_{\pm} f\|_{L_{\infty}} \le C \|f\|_{S^{\pm}_{1,\alpha,\delta}}, \tag{3}$$

причем эти оценки не улучшаемы в классе банаховых структур.

Литература.

1. Самко С.Г. Килбас А.А. Маричев О.М. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987, 698с.

2. Костин А.В. Обобщенные пространства Степанова и дробные интегралы Бесселя. Труды XXIII конференции молодых ученых мех-мат, факультета МГУ (9-14 апреля 2001г.), Москва, 2001, с. 206-209.

МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Коструб И.Д. (Воронеж)

idk@amm.vsu.ru

В 1958 г. М.А.Красносельский и А.И.Перов в сообщении [1] предложили новый метод доказательства существования периодических, почти-периодических и ограниченных решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получивший впоследствии название *метода направляющих функций* (М.А.Красносельский). Основная идея метода была высказана А.И.Перовым еще раньше – в 1956 г.

Подробное изложение метода в периодическом и ограниченном случаях было дано в одной из глав кандидатской диссертации А.И.Перова [2]. Так как метод направляющих функций тесно связан с такими топологическими понятиями как вращение векторного поля (степень отображения), гомотопные векторные поля и индекс особой точки (индекс Пуанкаре), то совершенно естественно, что он нашел отражение в монографии "Векторные поля на плоскости" [3], в которой были указаны первые и наиболее элементарные его положения, касающиеся периодических и ограниченных решений нелинейных систем двух дифференциальных уравнений.

Дальнейшее развитие и обобщение метод направляющих функций получил в монографии [4] и ряде журнальных статей, однако только для периодических и для ограниченных решений. В докладе показывается, что если нелинейная почти-периодическая система удовлетворяет условиям какой-либо из теорем метода направляющих функций, гарантирующих существование ограниченного решения, то она имеет рекуррентное решение. Этот результат выводится из теоремы В.М.Миллионщикова, опубликованной еще в 1968 г. [5]. Указываются также признаки, когда полученное рекуррентное решение является почти-периодическим.

Литература

1. Красносельский М.А., Перов А.И. // ДАН СССР.-1958.-123, N 2.-С. 235-238.

2. Перов А.И. // Кандидатская диссертация, Воронеж, 1959, 129 с.

3. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости.-М.: Физматгиз, 1963.-248 с.

4. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.-М.: Наука, 1966.-332 с.

5. Миллионщиков В.М. // Диф. уравнения.-1968.-4, N 9.-С. 1155-1159.

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ НЕКОТОРОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ[1]

Крохина И.С., Сухочева Л.И. (Воронеж)

Пусть $\Pi_\varkappa$ — пространство Понтрягина. Рассмотрим оператор $A : \Pi_\varkappa \to \Pi_\varkappa$, $A \in \sigma_\infty$, A — самосопряженный относительно метрики $\Pi_\varkappa$ $(A = A^c)$.

В 70-е годы Азизовым и Иохвидовым исследовался вопрос полноты системы корневых векторов таких операторов. Был получен критерий полноты системы корневых векторов в терминах невырожденности корневого линеала $L_0(A)$ оператора A в 0. Более того, было доказано, что если оператор рассматриваемого класса имеет полную систему корневых векторов в $\Pi_\varkappa$, то в $\Pi_\varkappa$ существует почти ортонормированный базис Рисса, составленный из корневых векторов оператора A. [1]

Рассмотрим вырожденное пространство Понтрягина $\Pi_{\varkappa,0} = \Pi^0 \bigoplus \Pi_\varkappa$, $\dim \Pi^0 < \infty$, $A : \Pi_{\varkappa,0} \to \Pi_{\varkappa,0}$. Для таких операторов полнота системы корневых векторов A не гарантирует свойство базисности системы его корневых векторов.

Выделен класс операторов и получены необходимые и достаточные условия, когда полная система корневых векторов оператора A будет являться и базисной.

В частности доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $A : \Pi_{\varkappa,0} \to \Pi_{\varkappa,0}, A = B(I + S)$, где $B = B^*$, $B \in \sigma_\infty, 0 \notin \sigma_p(B)$, $s \in \sigma_\infty$, $s = s^*$. Тогда для того, чтобы полная в $\Pi_{\varkappa,0}$ система корневых векторов самосопряженного относительно метрики $[\cdot,\cdot] = ((I+S)\cdot,\cdot)$ оператора A была базисной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$L_0(A) \bigcap L_0(A)^{[1]} = L_0(A) \bigcap \Pi^0$$

Отметим, что подобный результат верен и в случае оператор класса $K(H)$.

Литература

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.Р. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М. Наука 1986.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕНИ

Кузенков О.А., Рябова Е.А. (Нижний Новгород)
helen@sandy.ru

В работе исследуется задача оптимального управления на бесконечном

[1]работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-00353 и NWO-RFBR 047-008-008

времени процессом, описываемым следующей системой

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + a\frac{\partial z_i}{\partial x} = b_i z_i + u_i z_i - z_i \sum_{j=1}^{n}(b_j + u_j)z_j, \quad i = \overline{1,n},$$
$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \le t \le T,$$
$$z_i(x,0) = z_i^0(x), \quad i = \overline{1,n}; \tag{1}$$
$$z_1^0(x) > 0, \quad z_i^0(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in [0;L], \quad i = \overline{2,n},$$
$$\sum_{i=1}^{n} z_i^0(x) = 1 \;\forall x \in [0;L], \quad z_i^0(x) \equiv 0 \;\forall x \notin [0;L].$$

Здесь функция $a = a(x,t)$ - вещественная, непрерывно дифференцируемая по аргументам x, t, причем характеристики $x = x(x_0, t_0, t)$ уравнений системы (1), являются непрерывными, однозначными и монотонными функциями. Функции $b_i = b_i(x,t)$ - непрерывно дифференцируемые по x и t, причем

$$\tilde b_i(x) \ge \tilde b_1(x), \quad i = \overline{2,n}, \quad \tilde b_i(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T b_i(x,\tau)\,d\tau.$$

Компоненты управления $u_i = u_i(x,t)$ есть кусочно-гладкие функции, значения которых принадлежат выпуклой замкнутой области $U = \{(u_1, ..., u_n) : \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \le C\}$, где C - некоторая положительная константа. Параметр T - время управления процессом. Начальные функции $z_i^0(x)$ имеют разрывы при $x = 0$ и $x = L$; вне этих точек функции $z_i^0(x)$ являются гладкими. Тогда компоненты решения $z_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, терпят разрыв вдоль характеристик $x(0,0,t)$ и $x(L,0,t)$.

Требуется подобрать управление u таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - z_1(x,T))\,dx.$$

Установлено, что компоненты оптимального управления $u_i^0(x,T)$ есть функции от переменной x и параметра T. Оптимальное управление u^0 не зависит от переменной t. Доказано, что при $T \to +\infty$ критерий качества J стремится к нулю тогда и только тогда, если константа C, ограничивающая область управления U, удовлетворяет условию

$$C > \sum_{i=2}^{n}(\tilde b_1 - \tilde b_i)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=2}^{n}(\tilde b_1 - \tilde b_i)\right)^2.$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ В ВОРОНЕЖСКОМ ГОСУНИВЕРСИТЕТЕ

Кузнецов А.А., Кураков А.Н., Кузнецов А.В. (Воронеж)
kaa@main.vsu.ru

Одна из наиболее активно обсуждающихся в последние годы форм образования - это обучение с использованием глобальной сети Интернет или дистанционное образование. Использование World Wide Web позволяет организовать и построить такие учебные системы, как электронные интерактивные учебники и пособия, сложные тестовые системы, обеспечить обратную связь преподавателя со студентом.

В силу разных причин студенты вынуждены совмещать учебу с работой и не всегда могут регулярно посещать занятия, поэтому появилось множество систем для дистанционного обучения.

Из достаточно известных, используемой в обучении систем считается WebCT. Это основанная на Web-технологии, инструментальная среда для создания учебных курсов, предназначенных для организации и сопровождения процесса обучения в режиме on-line в сети Интернет. В этой системе создан образовательный портал и ведется обучение на базе МЭСИ.

В Воронежском государственном университете ведется создание курсов по технологиям Lotus. Lotus LearningSpace - это интегрированная обучающая система, основанная на Web-технологиях. Она позволяет создавать, администрировать и преподавать курсы, управлять регистрацией учащихся, следить за их результатами и генерировать отчеты. Авторы могут создавать материал курсов в любых стандартных программах вне LearningSpace. Уровень доступа пользователя к различным функциональным возможностям LearningSpace определяется его профилем. Пользовательский профиль - это набор прав доступа, разрешающих или запрещающих доступ к определенной функции, например, возможность добавлять пользователей в систему, создавать структуру курсов, регистрироваться для участия в них или создавать отчеты.

Создание курсов проводилось преподавателями и аспирантами университета в специализированной лаборатории. Использовались третья, четвертая и пятая версия пакета LearningSpace. Основной акцент делался на работу в четвертой версии, т.к. для нее был специально приобретен русификатор, что значительно облегчает процесс обучения студентов. К преимуществам этой системы можно отнести и разработанный курс по обучению работе в ней.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ДИЗЕЛЕЙ ТЕПЛОВОЗОВ

Кузнецов В.П. (Самара)
vl_kuzn@mail.ru

Рассматривается задача конструирования автоматической системы регулирования температуры дизелей тепловозов [1,2], которая описывается уравнением

$$a\varphi'''(t) + b\varphi''(t) + c\varphi'(t) + k\varphi(t-\tau) = 0,$$

где a, b, c, k – постоянные системы, τ — запаздывание, $\varphi(t)$ — безразмерная температура теплоносителя.

Начальные условия на отрезке запаздывания имеют вид

$$\varphi^{(k)}(\theta) = \begin{cases} 0; & \text{при } -\tau \leq \theta < 0; \\ 1; & \text{при } \theta = 0; \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2$.

Показано (см. также [3]), что достаточное условие асимптотической устойчивости такой системы имеет вид

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{(bz_m^2 + 1)\mathrm{ch}(\tau z_m) + (az_m^3 + cz_m)\mathrm{sh}(\tau z_m)}{\prod_{i=1, i\neq m}^{3} (z_m^2 - z_i^2)(k + (az_m^3 + cz_m)\mathrm{ch}(\tau z_m) + (bz_m^2 + 1)\mathrm{sh}(\tau z_m))} \geq 0,$$

где z_m – корни (с положительной действительной частью) уравнения

$$(bz^2 + 1)^2 - (az^3 + cz)^2 - k^2 = 0.$$

Литература

1. Луков Н.М. Автоматическое регулирование температуры.// М. Машиностроение. 1979.

2. Кузнецов В.П. Интегральная квадратичная оптимизация системы автоматического регулирования дизелей тепловозов.// Транспорт: наука, техника, управление. М.: ВИНИТИ, 2001, N 9, С.22-23

3. Кузнецов В.П. Оптимизация линейных управлений для систем с запаздыванием по времени.//Современные методы в теории краевых задач "Понтрягинские чтения", тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2001. С.97-98.

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОММУТИРУЮЩИМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Куижева С.К. (Нальчик)

niipma@yahoo.com

Рассмотрим кольцо $B^{\mu}[\partial]$ дифференциальных операторов

$$B^{\mu}[\partial] \quad = \left\{ \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_x^i \partial_y^{n-i} \mid b_i = b_i(t, s, x, y) \in C^n \left(R^4\right), n \leq \mu \right\}$$

с операцией коммутирования $\partial \circ b = \partial b + b\partial$, где $\partial = \partial_x = \partial/\partial x$ или $\partial = \partial_y = \partial/\partial y$.

Пусть $P = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \partial_x^i \partial_y^{n-i} \in B^{\mu}[\partial]$, $L = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \partial_x^j \partial_y^{m-j} \in B^{\mu}[\partial]$; $[P, L] = P \circ L - L \circ P$ – коммутатор операторов P и L.

Теорема. Коммутатор $[P, L]$ операторов P и L представим в виде

$$P \circ L - L \circ P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{i} u_i C_{n-i}^k C_i^l v^{(n-k-l)}_{j y^{n-i-k} x^{i-l}} \partial_y^{k+m-j} \partial_x^j -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-j}\sum_{q=0}^{j} v_j C^p_{m-j} C^q_j u^{(m-p-q)}_{iy^{m-j-p}x^{j-q}} \partial^{p+n-i}_y \partial^i_x.$$

Условие $P\circ L - L\circ P = 0$ при соответствующих ограничениях на функции u_i и v_j определяет ряд известных дифференциальных уравнений в частных производных [1].

Удачно подобранные линейные дифференциальные операторы первого порядка позволяют классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Это значит, что удается подобрать такие дифференциальные операторы первого порядка, что их нулевые коммутаторы порождают соответственно известные уравнения 3-х типов: гиперболический, эллиптический и параболический.

Литература

1. Кунжева С.К. О дифференциальных уравнениях в частных производных, порожденных коммутирующими линейными дифференциальными операторами // Труды Физического общества Республики Адыгея. 2000. №5. С.96-100. -299 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кукушкина Е.В. (Екатеринбург)
kukushkiny@mail.ur.ru

Рассматривается линейная система функционально-разностных уравнений

$$x(t) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\, x(t+\vartheta) + h(t), \tag{1}$$

где $x : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$, $h \in \mathrm{C}(\mathrm{R},\mathrm{R}^n)$, матрица-функция $\eta(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t \in \mathrm{R}$ имеет ограниченную вариацию на $[-r,0]$, $\eta(t,0) = \eta(t,-0) = 0$, $\eta(t,s) = 0$ при $s > 0$, $\eta(t,s) = \eta(t,-r)$ при $s < -r$.

Для указанной системы изучается начальная задача Коши в пространстве непрерывных функций. Для существования непрерывного решения начальной задачи Коши необходимо, чтобы для начальной функции выполнялось условие согласования

$$\varphi(t_0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t_0,\vartheta)\, \varphi(t_0+\vartheta) + h(t_0). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть h и φ - непрерывные вектор-функции, выполнено условие согласования () и*

1) матрица-функция $\eta(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t \in \mathrm{R}$ имеет ограниченную вариацию на $[-r,0]$;

2) матрица-функция $\eta(t,-r)$ непрерывна по t на R ;

3) матрица-функция $\int_{t-r}^{\tau} \eta(t,s-t)\,ds$ при каждом фиксированном $\tau \in \mathrm{R}$ непрерывна по t на R.

Тогда начальная задача Коши для системы () имеет единственное непрерывное решение.

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ [1]

Курдюмов В.П., Хромов А.П. (Саратов)

Пусть A – интегральный оператор:

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt, \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Предполагается, что при $0 \le t \le x \le 1$ существуют и непрерывны производные $\frac{\partial^{j+s}}{\partial x^j \partial t^s} A(x,t)$ ($j = 0, \ldots, n$; $s = 0, 1$) и, кроме того, что

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)|_{t=x} = \delta_{n-1,j} \quad (j = 0, \ldots, n), \tag{2}$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Оператор (1) с условием (2) является одним из простейших, ядро которого имеет разрывную производную $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} A(1-x,t)$ на линии $t = 1 - x$. В [1] для такого оператора при $n = 1$ была доказана равносходимость разложений для $f(x) \in L[0,1]$ по собственным и присоединенным функциям оператора A и в обычный тригонометрический ряд, а в [2] – теорема о базисности Рисса его собственных и присоединенных функций в $L_2[0,1]$. В настоящей работе обобщается результат из [2] для произвольного n.

Теорема. *Собственные и присоединенные функции оператора A образуют базис Рисса в $L_2[0,1]$.*

Литература

1. Хромов А. П. *Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным пределом интегрирования* // Тез. докл. Воронежской весен. матем. школы "Понтрягинские чтения". Воронеж, 1998. С. 208.

2. Курдюмов В.П. *О базисности Рисса корневых векторов интегральных операторов с разрывными ядрами* // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 9-ой Сарат. зимн. школы, 1998. С.96.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-01-00075), программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123) и программы "Университеты России".

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Курина Г.А. (Воронеж)
kurina@kma.vsu.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} < x_N, Vx_N > + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} < \begin{pmatrix} x_i \\ u_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_i & S_i \\ S_i^* & R_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ u_i \end{pmatrix} > \qquad (1)$$

на траекториях системы

$$A_{i+1} B_{i+1} x_{i+1} = C_i x_i + D_i u_i, \quad i = \overline{0, N-1}; \quad A_0 B_0 x_0 = z^0. \qquad (2)$$

Здесь $x_i \in X, u_i \in U$, N - фиксированное натуральное число, $B_i \in L(X,Y)$, $A_i \in L(Y,Z)$, $C_i \in L(X,Z)$, $D_i \in L(U,Z)$, $V, W_i \in L(X)$, $S_i \in L(U,X)$, $R_i \in L(U)$; X, Y, Z, U - вещественные гильбертовы пространства, z^0 - заданный элемент из Z, $V = V^*$, $W_i = W_i^*$, $R_i = R_i^*$, $< \cdot, \cdot >$ - означает скалярное произведение в соответствующих пространствах, звездочка сверху с обозначением оператора означает сопряженный оператор.

Предположим, что выполнены следующие условия. I. Операторы V и $\begin{pmatrix} W_i & S_i \\ S_i^* & R_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{0, N-1}$, являются неотрицательными. II. $ImV \subseteq ImB_N^*$, $z^0 \in ImA_0$. III. Операторы A_i, B_i нормально разрешимы, $i = \overline{0,N}$. IV. Имеют место разложения $KerA_i \oplus ImB_i = Y, i = \overline{0,N}$. V. Операторы $G_i : KerB_i \times KerA_{i+1}^* \times U \longrightarrow KerA_{i+1}^* \times KerB_i \times U$,

$$G_i = \begin{pmatrix} Q_{*(i+1)} C_i P_i & 0 & Q_{*(i+1)} D_i \\ P_i W_i P_i & -P_i C_i^* Q_{*(i+1)} & P_i S_i \\ -S_i^* P_i & D_i^* Q_{*(i+1)} & -R_i \end{pmatrix} \qquad (3)$$

обратимы, $i = \overline{0, N-1}$. Здесь P_i, Q_{*i} - ортогональные проекторы на подпространства $KerB_i, KerA_i^*$, отвечающие разложениям $X = KerB_i \oplus ImB_i^*$, $Z = KerA_i^* \oplus ImA_i$.

Теорема 1. Дескрипторная система, вытекающая из условий оптимальности управления для задачи (1)-(2), приводится к явной неотрицательной канонической системе относительно переменных $B_i x_i$, $A_i^* \psi_i$, то есть к системе вида

$$\begin{pmatrix} B_{i+1} x_{i+1} \\ -A_i^* \psi_i \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} B_i x_i \\ A_{i+1}^* \psi_{i+1} \end{pmatrix}, \ i = \overline{0, N-1}, \text{ при } E_i = \begin{pmatrix} E_i^1 & E_i^2 \\ E_i^3 & -E_i^{1*} \end{pmatrix},$$

где E_i^2, E_i^3 - самосопряженные неотрицательные операторы, $i = \overline{0, N-1}$.

Теорема 2. Задача (1)-(2) разрешима.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант N.02-01-00351).

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ НАДЕЖНОСТИ МОНОТОННОЙ СТРУКТУРЫ

Курицын Ю.Г., Алферов А.В. (Воронеж)

Рассмотрим монотонную структуру φ , определенную в терминологии книги [1] структурной функцией $\varphi : I^n \longrightarrow I$,где $I \in \{0,1\}$. Для случая идентичных элементов структуры, отказывающих независимо друг от друга с общей надежностью р, функция надежности структуры φ имеет вид:

$(1) h_\varphi(p) = \sum_{k=0}^{n} A_k p^k (1-p)^{n-k}$,где $p \in [0,1], A_k = |\{\overrightarrow{x} : \varphi(\overrightarrow{x}) = 1, \overrightarrow{x}'\overrightarrow{1} = k\}|$

Очевидно, что для любой монотонной структуры φ , функция (1) является функцией распределения вероятностей, сосредоточенной на отрезке [0,1]. Преобразуем функцию (1):

$(2) h_\varphi(p) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Представление (2) позволяет строить некоторое стохастическое представление функции надежности $h_\varphi(p)$.

Теорема. Функция надежности $h_\varphi(p)$ монотонной структуры, является функцией распределения, рандомизированной по номеру порядковой статистики Θ_φ , взятой из выборки объема n с равномерным распределением на отрезке [0,1]. Рандомизирующее распределение сосредоточено в точках 1,2,. . .,n, с весами $\beta_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$.

Другими словами, $\Theta_\varphi =^d \delta_{(\theta)}$, где $=^d$ означает совпадение распределений, $\delta_{(k)}$ — упомянутая выше, k-тая порядковая статистика, а $P\{\theta = k\} = \beta_k, k = \overline{1,n}$.

Литература

[1] Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность (перевод с английского)М.:Наука 1984, 327с.

СЛАБЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ[1]

Лазарев К.П. (Воронеж)

Принцип максимума использовался для исследования задач для дифференциальных уравнений второго порядка в [1-2], для уравнений четвертого порядка на графах в [3]. Здесь обсуждается слабый принцип максимума для аналогичной задачи с более общим условием (4).

Пусть Г - граф в $\mathbb{R}^3$, $E(\Gamma)$ - множество ребер и $V(\Gamma)$ - множество вершин, причем $V(\Gamma) = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$. Обозначим $E(a)$ - множество ребер, содержащих вершину a и $y_\gamma(x)$ - сужение $y(x)$ на ребро $\gamma \in E(\Gamma)$.

На графе Г рассмотрим задачу, определяемую на ребрах γ дифференциальными уравнениями (1) с положительными достаточно гладкими коэффициентами p_γ, q_γ и непрерывными f_γ, условиями согласования (2)-(4) с положительными коэффициентами и условиями Дирихле (5):

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00417, 01-01-00418, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ, проект Е00-1.0-154) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047).

$$(p_\gamma y''_\gamma)'' - (q_\gamma y'_\gamma)' = f_\gamma(x) \quad x \in \gamma,\ \gamma \in E(\Gamma), \tag{1}$$

$$y_\gamma(a) = y_\mu(a) \quad \gamma, \mu \in E(a),\ a \in J(\Gamma), \tag{2}$$

$$\beta_\gamma(a) y''_\gamma(a+0) - \theta_\gamma(a) y'_\gamma(a+0) = 0 \quad \gamma \in E(a),\ a \in V(\Gamma), \tag{3}$$

$$\sum_{\gamma \in E(a)} \alpha_\gamma(a)[(p_\gamma y''_\gamma)' - q_\gamma y'_\gamma](a+0) + \rho(a) y(a) = 0 \quad a \in J(\Gamma), \tag{4}$$

$$y(a) = \varphi(a) \quad a \in \partial\Gamma. \tag{5}$$

Рассмотрим решения однородного уравнения (1) с условиями (2)–(4).

Теорема 1. 1^0. *Если $\partial\Gamma = \emptyset$, то однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.*

2^0. *Если $\partial\Gamma \neq \emptyset$, то любое нетривиальное решение однородного уравнения может достигать положительного глобального максимума и отрицательного глобального минимума только на $\partial\Gamma$.*

Теорема 2. *Задача (1)–(5) однозначно разрешима и для нее существует положительная в $(\Gamma \setminus \partial\Gamma) \times (\Gamma \setminus \partial\Gamma)$ функции Грина.*

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. // Дифференц.уравнения. 1989. Т. 25, N 7. С. 1141-1190.

2. Пенкин О.М. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 10. С. 1433-1434.

3. Боровских А.В., Лазарев К.П. //Современные проблемы теор. функц. и их прилож. Тез.докл. 11 Саратовской зимней школы. – Саратов, 2002.– С.29-30.

О МЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В БИОТКАНИ ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ГИПЕТЕРМИИ

Листров Е.А., Рыжкова Н.А. (Воронеж), Шуринов Ю.А. (Москва)

Биотепловое уравнение, использованное в [1] при проведении экспериментов по локальной СВЧ-гипертермии лапы собаки, имеет вид

$$dT/dt = -T(W\dot{c}_k/\dot{\rho}) + SAR/c, \tag{1}$$

Реологическую модель Фойгта-Кельвина механического деформирования упруговязкого материала при динамических нагрузках представим в форме [2],

$$d\varepsilon/dt = -\varepsilon(E/\eta) + \sigma/\eta, \tag{2}$$

где ε — деформация материала при сдвиговом течении в одномерном случае, η — коэффициент вязкости, E - модель упругости. Из сравнения (1) с (2) видно соответствие $T \to \varepsilon$; $SAR \to \sigma$; $c \to \eta$; $W_{c_k}/\rho) \to E$. Из (2) видно, что при $\eta \equiv 0$ упругая максимальная деформация при приложении $\sigma = const$ достигается мгновенно, тогда как при $\eta \neq 0$ деформация $\varepsilon(t)$ монотонно асимптотически приближается к этому максимальному значению при условии, что E, η, σ постоянны во времени.

В докладе обсуждаются результаты одного из экспериментов [1], когда график $T_1(t)$ соответствует монотонному возрастанию температуры мышечной ткани от значения $T_0 = 36°C$ до максимальной температуры $T_1 = 41°C$ в течение часа. Показано, что если предположить, что $SAR = const$, $W = const$ во время эксперимента при постоянной мощности СВЧ-излучения и учесть, что $\rho \approx 1050$кг/м^3 , $c_k \approx c = 3600$(Дж/кг$°C$), то из графика $T_1(t)$ в [1] следует $SAR = 34,2$Вт/кг, $W = 1.9$кг/м^{3}сек. Решение уравнения (1) имеет вид

$$T(t) = 5(1 - \exp(-t/525)) \qquad (3)$$

График аналитического решения (3) практически не отличим от экспериментального, при этом из (3) при $t = 3600$(сек) получим $T = 4,995°C$.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод: в этом эксперименте при небольшой постоянной мощности облучения как SAR, так и W практически неизменны.

Литература

1. Roemer R.B., Olesion J.R., Gertas T.S. Pscillatory temperature response to constant power applied to canine muscle// Am. J. Phis. 1985. Vol. 249 (18) Pr 153-R158

2. Шульман З.П., Ковалев Я. Н., Зальцгендлер Э.А. Реофизика конгломератных материалов. Минск "Наука и техника", 1978, 238 с.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ЕЕ НОРМАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Лобода А.В.(Воронеж)

lob@vgasa.voronezh.su

Зададим вещественно-аналитическую гиперповерхность 3-мерного комплексного пространства, строго псевдо-выпуклую вблизи некоторой своей точки нормальным уравнением Мозера (см. [1])

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \sum_{k,l \geq 2, m \geq 0} h_{klm}(z, \overline{z}) u^m, \qquad (1)$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $w = u + iv$ - координаты в C^3.

Теорема 1 *Однородная строго псевдо-выпуклая поверхность трехмерного комплексного пространства определяется тейлоровскими коэффициентами не более, чем 7-го порядка своего нормального уравнения (1) .*

В [2] описаны однородные псевдо-выпуклые поверхности, группы изотропии которых имеют максимально возможную размерность 2.

Теорема 2 *В случае 1-мерной группы изотропии однородная поверхность (1) определяется коэффициентами не более, чем 6-го порядка этого уравнения и голоморфно эквивалентна одной из следующих попарно неэквивалентных однородных поверхностей пространства C^3:*

$$v = x_2^2 + ((1 + x_1)^\alpha - 1), \quad \alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty) \qquad (2)$$

$$v = x_2^2 - ((1 + x_1)^\alpha - 1), \quad \alpha \in (0, 1) \qquad (3)$$

$$v = x_2^2 + (1 + x_1) \ln(1 + x_1) \qquad (4)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + u^2 = 1 \tag{5}$$
$$x_1^2 - x_2^2 + u^2 = 1 \tag{6}$$
$$1 \pm (|z_1|^2 + |z_2|^2) + |w|^2 = a|1 + z_1^2 + z_2^2 + w^2|, \quad a > 1 \tag{7}$$
$$1 \pm (|z_1|^2 + |z_2|^2) - |w|^2 = a|1 + z_1^2 + z_2^2 - w^2|, \quad 0 < a < 1 \tag{8}$$

Литература

[1] Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math., 133, N 3 . 1974. P. 219 - 271.

[2] Лобода А.В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в C^3 с двумерными группами изотропии //Мат. сборник, Т. 192, N 12, 2001, С. 3-24.

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА НА ПОЛУОСИ

Лысова Т.В.(Москва)

anton_lchat.ru

Рассмотрим уравнение

$$y'' + P(x)y^\sigma = 0, \tag{1}$$

где $P(x) > 0$–непрерывная функция на $(0, +\infty)$, $\sigma = const < 0$, $y(x) > 0$–решение уравнения (1) на $(0, +\infty)$.

Теорема 1. *Если $P(x) \geq Cx^a$, $C = const > 0$, $a = const$, $x \geq x_0$, то существуют C_1, x_1, такие, что $y(x) \geq C_1 x^{\frac{a+2}{1-\sigma}}$ при $x \geq x_1$.*

Теорема 2. *Если $P(x) \geq Cx^a$, $C = const > 0$, $a = const$, $x \leq x_0$, то существуют C_2, x_2, такие, что $y(x) \geq C_2 x^{\frac{a+2}{1-\sigma}}$ при $x \leq x_2$.*

Доказательство этих теорем базируется на следующей лемме.

Лемма 1. *Если $y(x)$–решение уравнения (1) на (-1,1),$P(x) \geq p_0 = const > 0$, то существует константа $C(p_0, \sigma)$, такая, что $y(0) \geq C(p_0, \sigma)$.*

Отметим, что результаты теорем 1, 2 являются точными, так как если $P(x) \equiv x^a$, $0 < x < \infty$, то функция

$$y = \left|\frac{(a+2)(a+1+\sigma)}{(1-\sigma)^2}\right|^{\frac{1}{\sigma-1}} x^{\frac{a+2}{1-\sigma}}$$

является точным решением уравнения (1) при $(a+2)(a+1+\sigma) < 0$. Полное описание асимптотического поведения всех решений уравнения $y'' + x^a y^\sigma = 0$ при $x \to \infty$, $\sigma > 1$ дано в монографии [1].

Заметим, что уравнение (1) может и не иметь положительных решений на полуоси. В частности, если $a + 2 > 0$, $a + 1 + \sigma > 0$, то таких решений не существует.

Литература

[1] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Москва. Издательство иностранной литературы, 1954. С. 181-194.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ляхов Л.Н., Рыжков А.В. (Воронеж)

Пусть $E_N^+ = (x{=}(x', x''),\ x'{=}(x_1, \ldots, x_n),\ x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_N),\ x_1{>}0, \ldots, x_n{>}0)$ и $P(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha x^\alpha$ — многочлен порядка m четный по каждой переменной $x_1, \ldots, x_n$. Множество таких многочленоы обозначим $\mathcal{P}_m$. След многочлена $P{\in}\mathcal{P}_m$ на части единичной сферы $S_1^+{=}\{x : |x|{=}1,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$ обозначим $P(\Theta)$, $\Theta = x/|x|$.

Уравнения $\Delta_B f = 0$ и $\Delta_B^l f = 0$, где l — натуральное число, а

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{j=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

соответственно называется В-гармоническим и В-полигармоническим.

Из гауссовского разложения однородных многочленов четных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ по В-гармоническим многочленам вытекает, что для любого многочлена $P(x', x''){\in}\mathcal{P}_m$ существует единственный В-гармонический многочлен $P_\gamma(x){\in}\mathcal{P}_m$ такой, что $P_\gamma|_{S_1^+} = P(\Theta)$.

В работе [1] введены главные решения В-полигармонического уравнения первого, второго и третьего типов. Используя эти решения, получены следующие обобщения.

Теорема 1 *Всякая функция f, В-полигармоническая в части шара* $Ш^+ = \{x : |x| < 1,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$ *представляется рядом по главным решениям, содержашим лишь решения первого типа.*

Теорема 2 *Всякая функция f, В-полигармоническая в области E_N^+ и имеющая там конечный (полимиальный) порядок роста, является многочленом, четным по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$/*

Теорема 3. *Для любого многочлена $P(x', x''){\in}\mathcal{P}_m$ существует единственный В-полигармонический многочлен $P_\gamma(x){\in}\mathcal{P}_m$ такой, что* $P_\gamma^{(\alpha)}\Big|_{S_1^+} = P^{(\alpha)}(\Theta), \quad |\alpha| < l.$

Литература

1. Ляхов Л.Н., Рыжков А.В. О решениях В-полигармонического уравнения // Дифференц. уравнен.— 2000.— Т.36, N10.— С.1365-1368.

ОЦЕНКИ β-УСТОЙЧИВОСТИ МЕТРИЧЕСКОЙ ε-ПРОЕКЦИИ ЧЕРЕЗ МОДУЛИ ВЫПУКЛОСТИ И ГЛАДКОСТИ ПРОСТРАНСТВА[1]

Маринов А.В. (Екатеринбург)

Пусть X – линейное нормированное пространство (ЛНП), $\dim X \geq 2$. Для $x, y \in X$, $\varepsilon \geq 0$, $A, B \subset X$ положим $xy = \|x - y\|$, $xB = \inf\{xy : y \in B\}$, $AB = \beta(A, B) = \sup\{xB : x \in A\}$, $x_A^\varepsilon = \{y \in A : xy \leq xA + \varepsilon\}$ – метрическая ε-проекция элемента x на множество A.

Пусть $\varphi(t)$ – модуль выпуклости пространства X, $\vartheta(t)$ – его модуль гладкости. Для $a > 0$, $s \geq 0$ положим

$$\Psi(a, s) = (a + s)\varphi^{-1}\left(\frac{s}{a+s}\right) - \max\left[s, a\vartheta^{-1}\left(\frac{s}{2a}\right)\right], \qquad \Psi(0, s) = s.$$

где φ^{-1} и ϑ^{-1} – обратные функции. Обозначим $b = y_N^\delta M$, $t = \delta + yN + xy + b - xM$, $p = \delta + yN + xy + xM - b$. Заметим, что $t \geq \delta$, $p \geq 0$.

Теорема. *Пусть M - выпуклое, а N - произвольное непустые подмножества из X. В нижеперечисленных четырех случаях, исчерпывающих область допустимых значений набора из шести величин xy, ε, δ, xM, yN, b, при $y_N^\delta, x_M^\varepsilon \neq \emptyset$ справедливы следующие оценки:*

1) *если $b \leq xM$, $\delta(xM - b) \leq t \cdot yN$, $\varepsilon \leq t \neq 0$, то*

$$y_N^\delta x_M^\varepsilon \leq b + \frac{\Psi(xM - b, t)}{t}(t - \varepsilon) \leq b + \left(\frac{2(xM - b)}{t} + 1\right)(t - \varepsilon);$$

2) *если $\delta(xM - b) > t \cdot yN$, $\varepsilon \leq t$, то*

$$y_N^\delta x_M^\varepsilon \leq b + \frac{\Psi(yN, \delta)}{\delta}(t - \varepsilon) \leq b + \left(\frac{2 \cdot yN}{\delta} + 1\right)(t - \varepsilon);$$

3) *если $b > xM$, $p > 0$, то*

$$y_N^\delta x_M^\varepsilon \leq b + \left(1 - \frac{\min(\varepsilon, p)}{\Psi(b - xM, p)}\right)p \leq b + \left(1 - \frac{\min(\varepsilon, p)}{2(b - xM) + p}\right)p;$$

4) *если $\varepsilon \geq t$ или $p = 0$, то $y_N^\delta x_M^\varepsilon = b$.*

При этом для любого допустимого набора значений шести параметров xy, ε, δ, xM, yN, b, подпадающего под какой-либо из случаев 1)–3) теоремы, найдется ЛНП X, соответствующие этим параметрам точки $x, y \in X$, выпуклые подмножества M, $N \subset X$ такие, что оба неравенства в оценке этого случая обратятся в равенства.

---

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект 02-01-00782, и Совета по государственной поддержке ведущих научных школ, проект 00-15-96035.

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРУППЕ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ

Матакаев А.И.(г.Нальчик)

niipma@yahoo.com

Рассмотрим уравнение

$$[r(t)x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)x(t) + \left[a(t) + x(t)\sum_{j=1}^{n} a_j(t) D_{\varepsilon t}^{\alpha_j} x(\tau)\right] f[x(t)] = 0. \quad (1)$$

где $r(t) > 0$, $p(t)$, $q(t)$, $a(t)$, $a_j(t)$, $j = 1, 2, ..., n$ – заданные действительные функции из класса $C(R^+)$, $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n$, $-1 < \alpha_j = const < 1$; $f[z]$ как действительная функция точки $z \in R$ принадлежит $C(R)$ и является непрерывно дифференцируемой всюду в R за исключением быть может точки $z = 0$; $D_{\varepsilon t}^{\alpha_j}$ – оператор Римана-Лиувилля порядка $|\alpha_j| < 1$ [1, с.28], область определения $D_{\alpha_j}[\varepsilon, \delta]$ которого принадлежит пространству $L[A, B]$ функций $\varphi(x)$, интегрируемых по Риману на сегменте $[\varepsilon, \delta]$.

Уравнение (1) является квазилинейным нелокальным дифференциальным уравнением второго порядка с дробными производными (в смысле Летникова) в группе младших членов. Различные варианты этого уравнения широко встречаются в математической биологии [1]. Введем обозначения: $\rho_\alpha(t) = \alpha r(t) - tp(t), 0 < \alpha = const < 1$;

$$F(\varepsilon; \tau) = \int_{\varepsilon\, sign\, \tau}^{\tau} \frac{dz}{f[z]}, \ \varepsilon = const > 0, A_\alpha(\varepsilon; t) = \int_{\varepsilon}^{t} s^\alpha a(s)\, ds,$$

$$D_\alpha(\varepsilon; t) = \int_{\varepsilon}^{t} \frac{s^\alpha r(s)[x'(s)]^2}{f^2[x(s)]}\, ds, \ E_\alpha(t) = \frac{t^\alpha r(t) x'(t)}{f[x(t)]},$$

$$D_\alpha^*(\varepsilon; t) = \int_{\varepsilon}^{t} \frac{f'[x(s)]}{f[x(s)]} x'(s) E_\alpha(s)\, ds,$$

$$R_\alpha(\varepsilon; t) = \int_{\varepsilon}^{t} \frac{ds}{s^\alpha r(s)}, \ C_\alpha(\varepsilon; t) = \int_{\varepsilon}^{t} \frac{s^{\alpha-2}\rho_\alpha^2(s)}{r(s)}\, ds, \ q_\alpha(\varepsilon; t) = \int_{\varepsilon}^{t} s^\alpha |q(s)|\, ds.$$

Теорема. *Пусть заданные в уравнении (1) функции удовлетворяют следующим условиям:* $zf[z] > 0$, $f'(z) \geq k = const > 0\ \forall z \neq 0$, $\lim\limits_{|\tau| \to \infty} F(\varepsilon; \tau) < \infty$; $\lim\limits_{t \to \infty} R_\alpha(\varepsilon; t) = \infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} A_\alpha(\varepsilon; t) = \infty$; $\lim\limits_{t \to \infty} C_\alpha(\varepsilon; t) < \infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} q_\alpha(\varepsilon; t) < \infty$; $a_j(t) \geq 0$, $a_j(t) \geq a_j(t+h)$, $j = 1, 2, ..., n, \forall h > 0$. *Тогда все решения уравнения (1) осциллируют.*

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. -М.: Высш. шк. 1995. -301 с.

РАВНОВЕСИЕ ПО ПАРЕТО В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ N ЛИЦ С ВЕКТОРНЫМИ ВЫИГРЫШАМИ

Матвеев В.А. (Псков)
vlmatveev@svs.ru

Рассматривается бескоалиционная игра N лиц с векторными выигрышами

$$\langle N, \{X^i\}_{i\in N}, \{f^i(x)\}_{i\in N} \rangle. \tag{1}$$

Здесь $N = \{1, ..., n\}$ - конечное множество номеров игроков. Множество $X^i \subset R^{k_i}$ состоит из стратегий $x^i = (x^i_1, ..., x^i_{k_i})$ игрока $i \in N$. Набор стратегий всех игроков называется ситуацией и множество всех ситуаций $X = \prod_{i\in N} X^i$. Заданы векторные функции $f^i : X \to R^{l_i}$, которые каждой ситуации ставят в соответствие вектор $f^i(x) = (f^i_1(x), ..., f^i_{l_i}(x))$ выигрышей игрока $i \in N$. На содержательном уровне, каждый игрок стремиться достичь возможно большего значения каждой компоненты векторной функции выигрыша, учитывая выборы остальных игроков. В качестве решения задачи (1) предлагается векторное равновесие.

Определение. *Ситуация $x^* \in X$ называется равновесием Нэша - Парето в игре (1), если $\forall i \in N$, $x^i \in X^i$ несовместна система неравенств $f^i_j(x^* \parallel x^i) \geq f^i_j(x^*)$, $j = 1, ..., l_i$ в которой по крайней мере одно неравенство строгое.*

Содержательно ситуация равновесия Нэша - Парето означает, что, если игрок $i \in N$ может улучшить свой векторный результат $f^i(x^*)$ по какой-либо компоненте, уклонившись в одностороннем порядке от равновесия, то найдется другая компонента по которой результат этого игрока ухудшится.

Утверждение. *Пусть в игре (1) для любого игрока $i \in N$ множество $X^i \subset R^{k_i}$ является выпуклым компактом; векторная функция $f^i : X \to R^{l_i}$ непрерывна; существует вектор $\alpha^i = (\alpha^i_1, ..., \alpha^i_{l_i})$, $\alpha^i_j > 0$, $\alpha^i_1 + ... + \alpha^i_{l_i} = 1$, что скалярная функция $F^i(x) = \alpha^i_1 f^i_1(x) + ... + \alpha^i_{l_i} f^i_{l_i}(x)$ при любом $x \in X$ является вогнутой по x^i на множестве X^i. Тогда в игре (1) существует равновесие Нэша -Парето.*

Следствие. *Если игра (1) конечна, то в ней существует равновесие Нэша - Парето, возможно в смешанных стратегиях.*

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998.

ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНА ПО МАМЕТАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФИНАНСОВОЙ АКАДЕМИИ

Мелехина Т. Л. (Москва)

Вопрос о проведении экзамена по математике в виде теста долго обсуждался не только преподавателями, но и руководством Финансовой академии. Проводился опрос среди студентов и преподавателей на тему "за и против". Основное желание всех этих новшеств — исключить субъективность оценки и снять психологические проблемы в общении с преподавателем. Необходимым условием стало исключение "лотереи" в выборе билета и невозможность использования заранее подготовленных материалов.

Билет состоит из десяти вопросов, пять из которых носят теоретический характер, а остальные являются задачами. В связи с ограничением по времени (экзамен длится два астрономических часа) вопросы и задачи компактны. Помимо знаний определение, теорем и правильного их использования предусмотрены задания на понимание изучаемого материала.

Основная задача составляющего вопросы состояла в разделении материала по характерным моментам и выделении заданий на понимание. Кроме этого особенным было то, что вопросы не должны, по возможности, содержать названия теоремы. Приведу пример вопроса по теме дифференцирования функций одной переменной: "Доказать, что если функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b) и обращается на нем в нуль в двух точках, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$". Использование теоремы Ролля для производной функции показывает определенное владение материалом.

Оценивается работа по стобальной системе. Каждый теоретический вопрос может быть оценен до шести баллов, а задача — до десяти баллов. Такой опыт проведения экзамена показывает наибольшею объективность оценки и отсутствие претензий к преподавателю со стороны студентов.

В докладе помимо примеров и вопросов особое внимание уделяется составлению вариантов билетов с помощью математического процессора Scitntific Work Place.

АСИМПТОТИСЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Мельник Т.А. (Одесса)

asmelnik@mail.ru

При исследовании задач управления часто возникает необходимость исследования дифференциальных уравнений с многозначными правыми частями, решения которых образуют нелинейное пространство.

Введенное А.И. Панасюком понятие квазидифференциального уравнения, ввиду отсутствия требования линейности пространства решений, позволяет с общих позиций рассматривать дифференциальные уравнения как с однозначными так и многозначными правыми частями.

Рассматриваются асимптотические методы для квазидифференциальных уравнений с малым параметром. С этой целью исследованы вопросы устойчивости и прмтяжения решений квазидифференциальных уравнений. Построен аналог метода усреднения для квазидифференциального уравнения с малым параметром. Для систем квазидифференциальных уравнений с быcрыми и медленными переменными на конечном и бесконечном промежутках изменения независимой переменной получены результаты по усреднению, декомпозиции и итерационному методу решения. Метод усреднения распространен на интегро - квазидифференциальные уравнения. Для этого введено понятие интегро - квазидифференциального уравнения, установлены теоремы существования и единственности решений таких уравнений.

Для систем дифференциальных уравнений с однозначными правыми частями и малым параметром благодаря свойству линейности пространства решений построены более эффективные схемы итерационного метода, основанные на методе пограничных функций и методе усреднения. Для систем дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными и правыми частями, разрывными на некоторой поверхности переключения, получено асимптотическое разложение решения задачи Коши и краевой задачи на основе метода пограничных функций. Эти метоы использованы при исследовании задач управления.

ОБРАТИМОСТЬ ПО СОСТОЯНИЮ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Минюк С.А. (Гродно), А.В.Метельский (Минск)

Рассмотрим систему Σ нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\delta) + A_2\dot{x}(t-\delta), \quad t > 0 \tag{1}$$

с выходом

$$y(t) = Gx(t), \quad t > 0 \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ $(n \geq 2)$; A, A_1, A_2 — постоянные $n \times n$ — матрицы; $\delta > 0$ — постоянное запаздывание; $y(t) \in R^m$ $(m \geq 1); G$ — постоянная $m \times n$ — матрица.

Начальные условия для уравнения (1) имеют вид

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-\delta, 0); \quad 2x(0) = \eta_0, \tag{3}$$

где $\dot{\eta} \in C = C(H^-, R^n)$, $H^- = [-\delta, 0]$, C — банахово пространство непрерывных функций, $\eta_0 \in R^n$. В частности начальные данные могут быть непрерывными $(\eta_0 = \eta(0))$:

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in H^-. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} G\chi(\tau) = 0, \; (pE - A)\chi(\tau) = B(p)\eta(\tau), \\ \quad B(p)\chi(\tau) = 0, \; \tau \in H^-, \; \chi(0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

и граничное условие

$$\eta(0) = \chi(-\delta), \tag{6}$$

где $B(p) = A_1 + pA_2$, $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, E — единичная матрица.

Лемма. Для того, чтобы система Σ была c-обратима (d-обратима) необходимо и достаточно, чтобы граничная задача (5)-(6) (задача Коши (5)) имела решение, лишь если $\chi = 0$.

Отметим, что d-обратимость системы Σ влечет ее — c-обратимость. В тоже время понятия c и d-обратимости для системы Σ, где $A_2 \neq 0$, вообще говоря, не равносильны, что подтверждают соответствующие примеры.

Через исследование канонических пучков матриц сформулированы критерии обратимости системы Σ. Приведены примеры, иллюстрирующие основные результаты.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ

Молгачев А.А. (Ульяновск)

velmisov@ulstu.ru

Исследуется задача о плоском движении идеального несжимаемого газа (или жидкости) в канале, каждая из стенок которого содержит упругий элемент. Рассматривается плоское движение газа в прямоугольном канале $J = \left\{(x,y) \in R^2 : a < x < b, 0 < y < y_0\right\}$. Скорость невозмущенного потока газа V направлена вдоль оси Ох. Упругими являются части стенки y=0 при $x \in [a_1, a_2]$, $(a < a_1 \le a_2 < b)$ и части стенки $y = y_0$ при $x \in [b_1, b_2]$, $(a < b_1 \le b_2 < b)$. Введем обозначения: $w^+(x,t)$ и $w^-(x,t)$ - прогибы упругих элементов соответственно стенок $y = y_0$ и $y = 0$; $\varphi(x,y,t)$ - потенциал скорости возмущенного потока газа. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$L^+(w^+) = p_0 - p_* - \rho\left(\varphi_t(x,y_0,t) + V\varphi_x(x,y_0,t)\right), \qquad x \in (b_1, b_2),$$

$$L^-(w^-) = p_* - p_0 + \rho\left(\varphi_t(x,0,t) + V\varphi_x(x,0,t)\right), \qquad x \in (a_1, a_2),$$

$$L^\pm(w) \equiv D^\pm \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_2^\pm \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + M^\pm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^\pm \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta_1^\pm \frac{\partial w}{\partial t} + \beta_0^\pm w.$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in J.$$

$$\varphi(a,y,t) = 0, \qquad \varphi(b,y,t) = 0, \ y \in (0, y_0) \ ;$$

$$\varphi_y = w_t^+ + Vw_x^+, \quad x \in (b_1, b_2), \quad \varphi_y = w_t^- + Vw_x^-, \quad x \in (a_1, a_2).$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in [a, b_1] \cup [b_2, b]; \quad \varphi_y(x,0,t) = 0, \quad x \in [a, a_1] \cup [a_2, b].$$

$$w^+ = 0, \quad w_x^+ = 0, \quad x = b_1, b_2; \quad w^- = 0, \quad w_x^- = 0, \quad x = a_1, a_2.$$

В выражениях $L^\pm(w)$ под $w(x,t)$ следует понимать $w^\pm(x,t)$. Здесь индексы x,y,t снизу обозначают производные по x,y,t; ρ - плотность газа; $D^\pm$ - изгибные жесткости; $M^\pm$ - погонные массы пластин; $N^\pm$ - сжимающие (растягивающие) пластины силы; $\beta_2^\pm$ - коэффициенты внутреннего демпфирования (материала пластин); $\beta_1^\pm, \beta_0^\pm$ - коэффициенты демпфирования и жесткости оснований; P_0 - давление в однородном потоке; P_* - внешняя распределенная нагрузка, действующая на стенки канала.

Разработан численный метод определения частот колебаний упругих элементов и исследования их устойчивости. Метод заключается в сведении решения задачи к системе обыкновеных дифференциальных уравнений с помощью метода Бубнова– Галеркина, преобразовании системы в однородную систему линейных алгебраических уравнений и решении характеристического уравнения методом простых итераций.

Литература

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л., М. 1949. - 695с.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЖАТИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Муратов М.А., Пашкова Ю.С.(Симферополь), Рубштейн Б.А. (Беер-Шева, Израиль)

Пусть μ — мера Лебега на полупрямой $[0,+\infty)$ и $S_0(0,+\infty)$ — пространство всех измеримых по Лебегу, почти всюду конечных функций на $(0,+\infty)$, для которых их функция распределения

$$n_f(y) = \mu\{x : |f(x)| > y\} \not\equiv \infty.$$

Для каждой $f \in S_0(0,+\infty)$ определена функция $f^*(t) = \inf\{y > 0 : n_f(y) \le t\}$, а для $f \in L_1 + L_\infty$ — функция $f^{**}(t) = t^{-1}\int\limits_0^t f^*(x)dx$.

Пусть E — симметричное пространство (СП) в $S_0(0,+\infty)$. Обозначим через $H(E) = \{f \in L_1 + L_\infty : f^{**} \in E\}$ и $||F||_{H(E)} = ||F^{**}||_E$. Ясно, что $L_1 \cap L_\infty \subset H(E) \subset E \subset L_1 + L_\infty$.

Для каждого положительного сжатия $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$, $T(H(E)) \subset H(E)$.

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий. Обозначим через

$$B^+_{\{T_n\}}f(x) = \sup_{n\ge1}\{T_n|f|(x),\ f \in L_1 + L_\infty,\ x \in (0,\infty)\}.$$

Определение 1. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию (MI), если $\mu\{B^+_{\{T_n\}}f > t\} \le t^{-1} \int\limits_{\{B^+_{\{T_n\}}f>t\}} |f|d\mu$.

Теорема 1. Если E СП и $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию (MI), то из $f \in H(E)$ следует, что $B^+_{\{T_n\}} \in E$ и

$$||B^+_{\{T_n\}}f|| \le ||f||_{H(E)}.$$

Определение 2. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию (OI), если $\mu\{B^+_{\{T_n\}}f > t\} \le (2t)^{-1} \int\limits_{\{|f|>t\}} |f|d\mu$.

Теорема 2. Если E СП и $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию (OI), то из $B^+_{\{T_n\}}f \in E$ следует, что $f \in H(E)$.

Литература

[1]. С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов, "Интерполяция линейных операторов", Москва, Наука, (1978), 400с.

[2]. M.Braverman, B.Rubshtein, A.Versler, "Dominated ergodic theoremes in r.i.spaces", Studia Math., 128 (1998), No. 2, 145-157.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Мухамбетжанов А.Т. (Атырауский институт нефти и газа)

Рассмотрим уравнение

$$u_t - \theta(u)\Delta u = f, \qquad u|_{t=0} = 0 \quad \text{где} \quad \theta_\epsilon(u) = \begin{cases} a, & u > 0, \\ b, & u < 0 \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями $u(0,y,t) = u(1,y,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1}$, $u(x,0) = \psi(x) > 0$, $u(x,1) = \varphi(x) < 0$, где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ - периодические функции. Ставим условия согласования

$$u(0,0) = \psi(0), \;\; u(1,1) = \varphi(1), u(0,1) = \varphi(0), \;\; u(1,0) = \psi(1).$$

Коэффициенты $\theta_\epsilon(u)$ определим следующим образом

$$\theta_\epsilon(u) = \begin{cases} a, & u > \epsilon, \\ b, & u < \epsilon \end{cases} \tag{2}$$

и гладко соединим на $[-\epsilon, \; \epsilon]$. Положим

$$u = y \cdot \varphi(x) + (1-y)\psi(x) + v(x,y,t) \tag{3}$$

Тогда $v(x,y,t)$-периодическая по x и $v(x,0,t) = v(x,1,t) = 0$ имеем

$$v_t - \theta_\epsilon(y \cdot \varphi + (1-y)\psi + v)(\Delta v + y \cdot \psi(x) + (1-y)\psi''_{xx}) - f_1 = 0. \tag{4}$$

Сперва рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} v_t - \delta v = \omega, \\ v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0, \;\; v|_{y=0} = v|_{y=1} = 0, \\ v'|_{y=0} = v'|_{y=1}, v|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Тогда решение (4) имеет вид

$$v \equiv A\omega = \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)d\tau \tag{6}$$

$G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)$ -функция Грина задачи (4). В выражение (5) подставим (3), получим $M\omega = \omega - [\theta_\epsilon(y\varphi(x) + (1-y)\psi(x) + A\omega)\cdot$

$$\cdot(\Delta(A\omega) + y\psi(x) + (1-y)\psi''_{xx})] + \Delta(A\omega) - f_1 = 0,$$

Будем искать приближенное решение уравнение (6) и восстанавливаем приближенное решение (1) по формуле (5) и (2). Для этого строим функционал $J_n = \int_0^1 dt \int_0^1 dx \int_0^1 |M\omega_n - f|d\omega$ и минимизируем его. Применим метод, рассмотренный работе [1].

Литература

1. *А.Т.Мухамбетжанов, М.О.Отельбаев, Ш.С. Смагулов.* // Выч. Технол. , т.3, 4, г. Новосибирск, 1998 г.

О РЕШЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА[1]

Найдюк Ф.О. (Воронеж)
philinc2000666@omen.ru

Рассматривается следующая краевая задача:

$$
\begin{aligned}
&-u_{xx} + u_{tt} = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad t \in \mathbf{R},\\
&u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = -ku(l,t),\\
&u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Если искать решение (1) в виде суммы прямой и обратной волн, то возникает проблема о нахождении продолжения $\tilde{\varphi}$ функции φ на всю вещественную ось, что приводит к дифференциально-разностному уравнению:

$$
-\left(k\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}'\right)(l-t) = \left(k\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}'\right)(l+t) \tag{2}
$$

с начальными данными на $[-l; l]$. Найдено представление решения (2) в форме ряда:

$$
\tilde{\varphi}(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+b_n^2}{1+l+lb_n^2}\int_0^l \varphi(s)\sin(b_n s)ds\right)\sin(b_n x),
$$

где b_n - корни следующего трансцендентного уравнения $b_n = -tg(lb_n)$ (случай $k = 1$). Альтернативный подход, связанный с представлением решения (2), определенного на "необходимой" части вещественной оси, в виде конечных сумм дает:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(x) = {}& (-e)^{2knl}e^{-kx}\psi_0(x-2nl) + (2ke^{2kl})^n\sum_{i=0}^{n-1}\left\{R_i^n(x)e^{-kx}\times\right.\\
&\left.\times\int_{(2n-1)l}^{x} s^{n-i-1}\psi_0(s-2nl)ds\right\} + \sum_{j=1}^{n-1}(2ke^{2kl})^j\sum_{i=0}^{j-1}\left\{R_i^j(x)e^{-kx}\times\right.\\
&\left.\times\int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} s^{j-i-1}\psi_0(s-2jl)ds\right\},
\end{aligned}
$$

где $\psi_0(x) = e^{kx}\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(-x) = -\varphi(-x)$, $R_i^j(x)$ - многочлен степени i, посчитанный для интервала $(-(2j+1)l, (2j+1)l)$, коэффициенты которого, можно посчитать по соответствующим формулам (из-за громоздкости эти формулы здесь опущены).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00417,01-01-418,02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект N Е00-1.0-154) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЕМКОСТЕЙ СИСТЕМЫ ПРОВОДОВ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С МНОГОСЛОЙНОЙ ИЗОЛЯЦИЕЙ

Наркун З.М. (Гродно)

В [1] решена задача определения электрических емкостей (на единицу длины) системы бесконечно длинных проводов круглого сечения с изоляцией. В сообщении эта задача решается для такой же системы проводов с многослойной изоляцией. Метод основан на точном построении потенциала электростатического поля. Рассматриваемая электростатическая система является плоскопараллельной, поэтому в дальнейшем вместо проводов будем говорить об окружностях. Для краткости будем считать, что изоляция двухслойная.

Итак, в плоской среде с диэлектрической проницаемостью ε (область G) имеется N троек концетрических окружностей $\gamma_s, \Gamma_s^{(1)}, \Gamma_s^{(2)}$ радиусов соответственно $r_s, R_s^{(1)}, R_s^{(2)}$ $(r_s < R_s^{(1)} < R_s^{(2)})$. Пусть $G_s^{(1)}, G_s^{(2)}$ — области колец, считая от провода $\varepsilon_s^{(1)}, \varepsilon_s^{(2)}$ — их диэлектрические проницаемости, $s = \overline{1, N}$.

Задача определения потенциала электростатического поля состоит в нахождении $2N+1$ решений уравнения Лапласа: φ — в области $G, \varphi_s^{(i)}$ — в областях $G_s^{(i)}$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi_s^{(1)}|_{\gamma_s} = f_s,\ \varphi_s^{(1)}|_{\Gamma_s^{(1)}} = \varphi_s^{(2)}|_{\Gamma_s^{(1)}},\ \varepsilon_s^{(1)} \frac{\partial \varphi_s^{(2)}}{\partial n}|_{\Gamma_s^{(1)}} = \varepsilon_s^{(2)} \frac{\partial \varphi_s^{(2)}}{\partial n}|_{\Gamma_s^{(1)}};$$

$$\varphi_s^{(2)}|_{\Gamma_s^{(2)}} = \varphi|_{\Gamma_s^{(2)}},\ \varepsilon_s^{(2)} \frac{\partial \varphi_s^{(2)}}{\partial n}|_{\Gamma_s^{(2)}} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_s^{(2)}},\ |\varphi|_\infty < \infty.$$

Решения представлены в виде рядов с неопределенными коэффициентами по разделенным решениям уравнения Лапласа в локальных полярных координатах, связанных с каждым проводом. Для определения коэффициентов с помощью теорем сложения получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Проведено исследование системы. Указан алгоритм получения приближенных расчетных формул. Написаны программы на *Pascal'e* для решения системы методом редукции, численного изучения погрешности приближенных формул, рисования эквипотенциальных линий поля для некоторых конфигураций проводов.

Литература

1. Наркун З.М. Вычисление электрической емкости системы параллельных бесконечно длинных проводов сечения с изоляцией// Энергетика. 1991, 5, с.60-63.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОПЕРАТОРА ГАММЕРШТЕЙНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Насонов С.Н. (Липецк)

nasonov1@fromru.com

Пусть $\varphi_j, \psi_j : (0,1] \to R$ – функции класса Φ [1-2], $D = [0,1] \times [0,1]$. Доопределим φ_j, ψ_j в точке 0, положив $\varphi_j(0) = \psi_j(0) = 0$. $H_j = \{h \in C(D) : |h(t,s) - h(\tau,\sigma)| \le a(\varphi_j(|t-\tau|) + \psi_j(|s-\sigma|))\}$, где $t,\tau,s,\sigma \in [0,1]$, $a = const$. H_j – банахово пространство с нормой $\|h\|_C + \sup\{|h(t,s) - h(\tau,\sigma)|/(\varphi_j(|t-\tau|) + \psi_j(|s-\sigma|)) : (t,s) \ne (\tau,\sigma)\}$ $(j = 1,2)$. Через $A = KF$ обозначим оператор Гаммерштейна с частными интегралами, где F оператор суперпозиции $(Fx)(t,s) = f(t,s,x(t,s)), K = C+L+M+N$ – линейный оператор с частными интегралами,

$$(Lx)(t,s) = \int_0^1 l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int_0^1 m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma.$$

$$(Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s), (Nx)(t,s) = \int_0^1\int_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Положим $a(t,s) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}(f(t,s,x_0(t,s)+u) - f(t,s,x_0(t,s)))$.

Теорема. Пусть F действует из H_1 в H_2, C, L, M и N действуют в H_2 и $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что при $r \le \delta$ и $|u|,|v| \le r$
$|f(t,s,x_0(t,s)+u) - f(t,s,x_0(t,s)) - a(t,s)u - f(\tau,\sigma,x_0(\tau,\sigma)+v) + f(\tau,\sigma,x_0(\tau,\sigma)) + a(\tau,\sigma)v| \le \varepsilon(\varphi_2(|t-\tau|) + \psi_2(|s-\sigma|) + \varphi_2(\varphi_1^{-1}(|u-v|/r - \psi_1(|s-\sigma|))) + \psi_2(\psi_1^{-1}(|u-v|/r - \varphi_1(|t-\tau|))))$.

Тогда оператор $A : H_1 \to H_2$, дифференцируем в точке x_0 и

$$A'(x_0)h(t,s) = c(t,s)a(t,s)h(t,s) + \int_0^1 l(t,s,\tau)a(\tau,s)h(\tau,s)\,d\tau$$

$$+\int_0^1 m(t,s,\sigma)a(t,\sigma)h(t,\sigma)\,d\sigma + \int_0^1\int_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)a(\tau,\sigma)h(\tau,\sigma)\,d\tau d\sigma.$$

Отметим, что производная оператора A изучалась в [3].

Литература

1. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. — М.: Наука, 1980.

2. Appell J., Zabrejko P.P. Nonlinear superposition operators. – Cambridge University Press, 1990.

3. Калитвин А.С. Производная оператора Гаммерштейна с частными интегралами // Труды института НАН Беларуси, Минск, 2001. Т. 9. С. 63 – 67.

СУММЫ ФУРЬЕ ПО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАМ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИМ ОБЛАСТЯМ

Нахман А.Д. (Тамбов)
nakhman@apmath.tstu.ru

Изучается поведение частичных сумм кратного ряда Фурье и ряда, сопряженного по любым (для определенности, по первым) r переменным, порожденного произвольной функцией $f = f(\mathbf{x})$ из класса $L^p = L^p(\Omega)$, $\Omega = (-\pi, \pi)^N$, $L = L^1$. Его поведение существенным образом зависит от выбора множества $\mathcal{P}_{\mathbf{m}} \subset \mathbf{Z}^N (\mathbf{m} \in \mathbf{Z}_+^N)$, по которому производится суммирование; мы рассматриваем параллелепипеды $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, определяемые с помощью треугольной целочисленной матрицы

$$Q = \{q_{\mu,\nu}; \mu, \nu = 1, 2, ...N; q_{\mu,\nu} \in \mathbf{Z}, q_{\mu,\mu} = 1; q_{\mu,\nu} = 0, \mu < \nu\}$$

и векторов $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^N, \mathbf{m} \in \mathbf{Z}_+^N$ ($\mathbf{m}$ - произволен; $\mathbf{n}$ и Q не зависят от $\mathbf{m}$) следующим образом:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathbf{m}} = \mathcal{P}_{\mathbf{m},Q,\mathbf{n}} =$$

$$= \{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^N : |q_{\mu,1}k_1 + q_{\mu,2}k_2 + ... + q_{\mu,\mu}k_\mu - n_\mu| \le m_\mu; \mu = 1, ..., N\}.$$

Обозначим $\tilde{S}^W_{\mathbf{m}}(f) = \tilde{S}^W(\mathcal{P}_{\mathbf{m}}, f, \mathbf{x})$ последовательность соответствующих частичных сумм указанного ряда. Установлено, что:

1) последовательность $\tilde{S}^W_{\mathbf{m}}(f)$ равномерно по $\mathbf{m}$ ограничена как последовательность операторов, действующих из $L^q(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$, $q > 1$; из $L(\ln^+ L)^N(\Omega)$ в $L(\Omega)$; из $L(\ln^+ L)^{N-1}(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$, $0 < q < 1$;

2) аналогичное утверждение об ограниченности верно и для частичных сумм по произвольным m-гомотетам симплектической области

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{k} \in Z^N : |k_1|/p_1 + ... + |k_N|/p_N \le 1\},$$

где все p_j-натуральные фиксированные числа, $m = 2, 3, ...$,

Изучено также поведение соответствующих сумм Валле-Пуссена почти всюду (для функций из класса $L(\ln^+ L)^{N-1}(\Omega)$) и в $L^q(\Omega)$, $q > 1$-метрике.

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ В ДОВУЗОВСКОМ И ВУЗОВСКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Нахман А.Д. (Тамбов)
nakhman@apmath.tstu.ru

Современные формы довузовской подготовки, существующие при университетах, дают возможность интенсифицировать изложение некоторых разделов математики, углубить внутрипредметные и межпредметные связи, на более раннем этапе ввести некоторые понятия из курса высшей математики. С учетом этих целей остановимся на следующих важных элементах тригонометрии.

1. Понятия функций $\sin t, \cos t$ можно ввести в связи с задачей о нахождении координат точки, движущейся по окружности, если с момента начала движения прошло t единиц времени.

2. На плоскости оказываются совмещенными две системы координат: точка имеет положение, характеризующееся t радианами и, одновременно с этим,

парой прямоугольных координат. Сама окружность приобретает теперь уравнения вида $x = \sin t, y = \cos t$, и на этом примере здесь водится понятие параметрических уравнений линии.

3. Линейное тригонометрическое выражение, записанное в виде $A \sin(wt + \gamma)$ рассматривается как математическая модель простейшего периодического процесса. Имеет смысл ввести (как обобщение простейшей гармоники) понятие тригонометрического многочлена произвольного порядка, подчеркнув при этом, что он описывает также некоторый периодический процесс. К этому кругу вопросов мы возвращаемся уже в анализе при постановке задачи о разложении функции в тригонометрический ряд.

4. График простейшей гармоники удобно строить не преобразованием синусоиды (как это традиционно делается в элементарной математике), а путем сжатий, растяжений, параллельного переноса координатных осей. Эта идея получит дальнейшее развитие в курсе аналитической геометрии и линейной алгебры. Кроме того, здесь может возникнуть ситуация неодинаковых единиц масштаба на координатных осях, с чем часто приходится сталкиватья в графических интерпретациях понятий и процессов естествознания.

Таким образом, уже на уровне довузовской подготовки закладывается база для изучения ряда вопросов алгебры, анализа и их приложений.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ СО СМЕНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОРЕГОНАТОРОВ

Нестеров М.В. (Самара)

nesterov@ssu.samara.ru

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после исключения времени приводится к виду:

$$\begin{aligned} y' &= Y(x,y,u,v,\varepsilon); \\ \varepsilon u' &= 2x\beta(x,y)u + U(x,y,u,v,\varepsilon) + \alpha(y,\varepsilon); \\ \varepsilon v' &= B(x,y)v + V(x,y,u,v,\varepsilon) + \alpha(y,\varepsilon)b(x,y,\varepsilon), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x, u \in R$, $y \in R^n$, $v \in R^m$, $B(x,y)$ — блочно-диагональная матрица m-порядка, а корни соответствующего ей характеристического уравнения λ_i $(i = \overline{1,m})$ удовлетворяют неравенству $Re\lambda_i \leq -2\omega < 0$, ε — малый скалярный параметр, $\alpha(y,\varepsilon)$, $\beta(x,y)$, $U(x,y,u,v,\varepsilon)$ — скалярные функции, $Y(x,y,u,v,\varepsilon)$, $V(x,y,u,v,\varepsilon)$, $b(x,y,\varepsilon)$ — вектор-функции соответствующих размерностей.

При определенных ограничениях, накладываемых на функции, входящие в правую часть системы, доказывается теорема о существовании непрерывного интегрального многообразия со сменой устойчивости. Непрерывность интегрального многообразия обеспечивается наличием скалярной функции $\alpha(y,\varepsilon)$. При некоторых дополнительных ограничениях доказывается также гладкость полученного интегрального многообразия и склеивающей функции $\alpha(y,\varepsilon)$.

В качестве иллюстрации применения данной теоремы исследуется математическая модель связанных орегонаторов, представляющая собой сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений шестого порядка:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \dot{x}_1 &= x_1(1-x_1) - y_1(x_1-q) + \varepsilon a(x_2-x_1); \\
\mu\varepsilon \dot{y}_1 &= b_1 g z_1 - y_1(x_1+q) + \mu\varepsilon a(y_2-y_1); \\
\dot{z}_1 &= 2x_1 - b_1 z_1 + a(z_2-z_1); \\
\varepsilon \dot{x}_2 &= x_2(1-x_2) - y_2(x_2-q) + \varepsilon a(x_1-x_2); \\
\mu\varepsilon \dot{y}_2 &= b_2 g z_2 - y_2(x_2+q) + \mu\varepsilon a(y_1-y_2); \\
\dot{z}_2 &= 2x_2 - b_2 z_2 + a(z_1-z_2).
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Заменой переменных известного типа данная система может быть приведена к виду (1).

Для системы (2) описан алгоритм построения медленного интегрального многообразия, состоящего из устойчивого и неустойчивого листов. Для "склеивания" устойчивого и неустойчивого листов используется дополнительный параметр a. Найдены асимптотические представления этого бифуркационного параметра по степеням малых параметров μ и ε. Проводится многопараметрическое исследование и качественный анализ системы (2) при различных значениях бифуркационного параметра.

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

Новоженов М.М., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

m_sumin@mm.unn.ac.ru

В докладе анонсируются новые результаты, связанные с исследованием задач так называемого субоптимального управления распределенными системами с поточечными фазовыми ограничениями и граничными управлениями [1]. Изучается параметрическая задача оптимального управления для полулинейного параболического уравнения с граничным управлением и содержащим функциональный параметр $q \in C(Q)$ поточечным фазовым ограничением

$$I_0(\pi) \to \inf, \quad I_1(\pi) \in \mathcal{M} + q, \quad \pi \in \mathcal{D}, \qquad (1)$$

где $\pi \equiv (u, v)$ - пара управлений, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_\infty(Q_T) : u(x,t) \in U \text{ п.в. на} Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(S_T) : v(x,t) \in V \text{ п.в. на} S_T\}$, $U \subset R^m$, $V \subset R^1$ - компакты, $\mathcal{M} \subset C(Q)$ - множество всех неположительных функций на компакте $Q \subset \overline{Q}_T$,

$$I_0(\pi) \equiv \int_\Omega F(x, z[\pi](x,T))\,dx + \int_{S_T} G(s,t,z[\pi](s,t),v(s,t))\,dsdt,$$

$I_1 : \mathcal{D} \to C(Q)$ - оператор, задаваемый равенством $I_1(\pi)(x.t) \equiv \equiv H(x,t,z[\pi](x,t))$, $(x,t) \in Q$, $z[\pi] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ - отвечающее паре π решение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №01-01-00979.

третьей краевой задачи

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,z,u(x,t)) = 0,$$

$$z(x,0) = \psi(x),\ x \in \Omega,\ \frac{\partial z(x,t)}{\partial \mathcal{N}} + g(x,t)z(x,t) = v(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$

$\partial z(x,t)/\partial \mathcal{N} \equiv a_{i,j}(x,t)z_{x_j}(x,t)\cos\alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ - угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i.

Рассматриваются, в частности, следующие вопросы: 1) необходимые условия для минимизирующих приближенных решений (м.п.р.) в смысле Дж.Варги; 2) достаточные условия для м.п.р.; 3) условия регулярности, нормальности [1] задачи (1); 4) дифференциальные свойства функции значений как функции параметра q. Приводятся иллюстративные примеры.

Литература

1. Сумин М.И. Субоптимальное управление полулинейным эллиптическим уравнением с фазовым ограничением и граничным управлением // Дифференц. уравнения. 2001. Т.37. № 2, С.260-275.

О СВЯЗИ МЕЖДУ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА И МЕТОДОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СОИЗМЕРИМЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТА, ИМЕЮЩЕГО ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ И ОПЕРЕЖАЮЩИЕ АРГУМЕНТЫ

Олемской Ю.В. (Санкт-Петербург)

Olemskoy@apmath.spbu.ru

В докладе рассматривается задача описания экспоненциально оцениваемых решений указанных уравнений, поставленная А.Д. Мышкисом [1]. Метод Эйлера приводит к необходимости рассмотрения характеристического квазиполинома соответствующего уравнения.

Методом представления решений в пространствах последовательностей [2] строится система собственных функций, отвечающих корням характеристического квазиполинома рассматриваемого уравнения, для данной задачи.

Описаны структура и способ нахождения решений задачи.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972, 352 с.
2. Олемской Ю.В. Вестн. Ленингр. ун-та, 1982, с. 108–111.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Павлов Ю.С. (Воронеж)

Взаимодействие пары любых сложных систем $(S_1 - S_2)$ независимо от формы математического представления этого процесса дает его количественное описание (аналитическую модель) для дискретных моментов времени $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$. Взаимодействие S и окружающей ее среды C — частный случай процесса $S_1 - S_2$.

При однокритериальной оценке любая реализация процесса $(S_1 - S_2)$ или $(S - C)$ формирует цепную последовательность фиксированных значений некоторой характеристики $\{A(t_i)\}$, $i = 0, 1, \ldots$, в пространстве $\mathbf{A}$ возможных значений этой характеристики. Каждое отдельное значение $A(t_k) \in \{A(t_i)\}$, $i = 0, 1, \ldots$, $k = \mathrm{const} \in \{0, 1, \ldots\}$, дает статическое описание $(S_1 - S_2)$ или $(S - C)$. Пары $\{A(t_k), A(t_m)\}$, $k, m = \mathrm{const} \in \{0, 1, \ldots\}$, $k \neq m$, определяет локальную динамику изменений $A(t)$ для $(S_1 - S_2)$ или $(S - C)$, если $m = k \pm 1$.

Когда $m \neq k \pm 1$, динамика изменений $A(t)$ превращается в интервальную. При $\Delta = |k - m| \gg 1$ она является глобальной и отличается от интервальной только шагом преобразования Δ цепи $\{A(t_i)\}$.

Все варианты динамики $(S_1 - S_2)$ и $(S - C)$ удобно описывать тензорными цепями, т.е. последовательностями тензоров преобразования $A(t_k)$ в $A(t_m)$, $k, m = \mathrm{const} \in \{0, 1, \ldots\}$, $k \neq m$. Эти тензоры одноименны с описываемым вариантом динамики $(S_1 - S_2)$ и $(S - C)$, а шаг их цепи тоже равен величине Δ.

Цепь тензоров локального преобразования $\{\mathbf{C}_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, с помощью операции укрупнения состояний тензорной цепи, стягивающей группу из Δ соседних состояний $\{\mathbf{C}_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, в одно новое состояние, легко преобразуется в цепь тензоров интервального и глобального преобразований $\{\mathbf{C}_j(k \to m)\}$, $j = 0, 1, \ldots$, с любым необходимым шагом Δ. Матрица тензора $\mathbf{C}(k \to m)$ определяется перемножением матриц образующих его тензоров локального преобразования $\mathbf{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, \Delta$:

$$\mathbf{C}(k \to m) = \prod_{j=k}^{k+\Delta} \mathbf{C}_j, \quad k, m = \mathrm{const} \in \{0, 1, \ldots\}, k \neq m, \Delta = \mathrm{const} \geq 2.$$

Использование при моделировании $(S_1 - S_2)$ и $(S - C)$ цепи $\{\mathbf{C}_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, имеющей достаточный интервал ретроспекции $t_p = V \cdot \Delta$, $V = \mathrm{const} >> 1$, позволяет прогнозировать тректорию движения и, соответственно, динамику $\{\mathbf{C}_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, на интервале упреждения $t_y = l \cdot \Delta$, $l = 1, 2, \ldots$. Здесь $l \leq (0{,}25 - 0{,}33)V$.

При сложной динамике тренда $l = V/a$, где $10 \leq a \leq 15$.

ОБОБЩЕНИЕ БАРЬЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ТРАНЗИТИВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Павлов Ю.С. (Воронеж)

Обычные барьерные модели описывают резкое демпфирование взаимодействия сложных систем $(S_1 - S_3 - S_2)$ или сложной системы S и среды C, окружающей ее, $(S - S_3 - C)$ через промежуточную систему S_3. Они учитывают только "высоту защитного барьера", геометрически отображающего тензор $\mathbf{P}_3$ реакции S_3 на внешнее воздействие, описываемое тензором $\mathbf{F}$. При этом $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3(b_3)$, где b_3 — скалярный коэффициент, отражающий упругость S_3, т.е. ее устойчивость и способность противостоять $\mathbf{F}$.

В более общих случаях свойства S_3 зависят и от топологии взаимодействия систем, свойств и размерности m функционального пространства взаимодействия, вида воздействий n и типа их направленности.

Топология взаимодействия должна учитывать длины участков d_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, между $(i-1)$ и i системами.

Минимальное семейство дополнительных параметров моделей:

$$\{\{d_i\};\{\varphi_i\}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, N, k = \text{const}, m = \text{const}; n = \text{const}, \tag{1}$$

где φ_i — угол "наклона i-го участка поверхности".

В простейших вариантах барьерных моделей семейство (1) отражает только степень необходимого смещения и прогиба g (пластичности) S_3 для реализации воздействия $\mathbf{F}_0$ на S (или S_1). В 1-м приближении если $g \geq d_0$, то

$$\mathbf{F}_0 = \begin{cases} \Delta > 0, & \text{если} \quad \mathbf{P}_3 < \mathbf{F}, \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{P}_3 \geq \mathbf{F}, \end{cases}$$

но если $g < d_0$, то $\mathbf{F}_0 = 0$. Это означает, что S_3 полностью демпфирует воздействие $\mathbf{F}$ при всех соотношениях $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}_3$. Аналогичное положение и при $N \geq 2$ для $\forall S_3^i \in S_3$.

Пороговую зависимость $\mathbf{F}_i$ от соотношения g_i и d_i, $i = \text{const} \in \{0, 1, \ldots, N\}$, проще всего учитывать в модели $(S - S_3 - C)$ или $(S_1 - S_3 - S_2)$ дополнительным тензором $\mathbf{H}(d_i/g_i)$ смещения и прогиба S_3 при $N = 1$ или $\forall S_3^i$ при $N \geq 2$, как бы увеличивающим $\mathbf{P}_3^i$

Это позволяет отразить реацию S_3^i на деформацию уравнением:

$$\mathbf{D}_3^i = \mathbf{P}_3^i(b_3) + \mathbf{H}^i(d_i/g_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{2}$$

где $\mathbf{D}_3^i$ — тензор упруго-пластической деформации S_3^i в функциональном пространстве взаимодействия.

Обобщение всех моделей достигается простой подстановкой выражения (2) в их уравнения вместо $\mathbf{P}_3^i$.

Литература

1. Павлов Ю.С. Тензорное представление взаимодействия системы с окружающей средой // Понтрягинские чтения - XII. Воронеж, 3–9 мая 2001г.: Тез. докл. — Воронеж: ВГУ, 2001. — С.116, 117.

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯЩИЧНЫХ СТРУКТУРАХ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ [1]

Пастухова С.Е. (Москва)

Пусть F^h – 1-периодическая ящичная структура из пластин толщиной $2h > 0$; ей соответствует 1-периодическая сингулярная ящичная структура F, которая на ячейке периодичности – единичном кубе $Y = [0,1)^3$ представлена тремя его гранями π_i, лежащими в координатных плоскостях. Каждая грань π_i есть серединная плоскость для соответствующей пластины из структуры F^h. Пусть $F^h_\varepsilon = \varepsilon F^h$ – гомотетическое сжатие сетки F^h; μ – периодическая нормированная мера, сосредоточенная на сингулярной структуре F и пропорциональная там плоской мере Лебега.

С ограниченной липшицевой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ свяжем перфорированную область $\Omega \cap F^h_\varepsilon$ и пространство $W_{\varepsilon,h}$ – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)^3$ по норме $\left(\int\limits_{\Omega\cap F^h_\varepsilon} [\varphi\cdot\varphi + e(\varphi)\cdot e(\varphi)]\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$, $\quad e(\varphi) = \frac{1}{2}\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\}$ – тензор деформации.

Рассмотрим задачу: найти вектор-функцию $u_{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}$, такую, что выполнено интегральное тождество $\int\limits_{\Omega\cap F^h_\varepsilon} [Ae(u_{\varepsilon,h})\cdot e(\varphi) + u_{\varepsilon,h}\cdot\varphi]\,dx = \int\limits_{\Omega\cap F^h_\varepsilon} f\cdot\varphi\,dx$, $\quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^3$, в котором A – постоянный изотропный тензор упругих коэффициентов, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^3$. Хорошо известно, что решение поставленной задачи существует и единственно. Требуется изучить поведение решений $u_{\varepsilon,h}$ при $\varepsilon \to 0$ в предположении, что $h = h(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Нас интересует критический случай: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon)\varepsilon^{-1} = \theta > 0$.

В пространстве $L^2(Y,d\mu)^3$ выделим множество $\mathbf{R}$ периодических жестких перемещений на сингулярной сетке F. По определению $u \in \mathbf{R}$, если найдутся гладкие векторы $\varphi_n \in C^\infty_{\rm per}(Y)^3$, такие, что $\varphi_n \longrightarrow u$, $\quad e(\varphi_n) \to 0$ в $L^2(Y,d\mu)$. Всякий вектор $u \in \mathbf{R}$ допускает единственное представление $u(y) = c + \chi(y)$, где c – постоянный вектор, а χ – поперечное перемещение, т.е. на каждой грани из F вектор χ ортогонален этой грани. Пусть $\mathbf{R}_1$ – множество периодических поперечных перемещений. Имеет место слабая двухмасштабная сходимость

$$u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x,y) = u_0(x) + \chi(x,y), \quad u_0(x) \in H^1_0(\Omega)^3, \quad \chi \in L^2(\Omega,\mathbf{R}_1).$$

Предельная функция $u(x,y)$ есть решение некоторой вариационной задачи на минимум на некотором подпространстве из $L^2(\Omega,\mathbf{R})$. Эту задачу можно переформулировать в дифференциальной форме: функция $u_0(x)$ – решение изолированной задачи Дирихле второго порядка в области Ω, а компонента $\chi(x,y)$ как функция аргумента y удовлетворяет на каждой грани π_i уравнению четвертого порядка и краевым условиям жесткого закрепления на ее ребрах; это уравнение содержит "пространственную" компоненту u_0 в качестве параметра.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №02-01-00114

ОЦЕНКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ ОСТРОВСКОГО

Перова Н.А.(Воронеж)

Пусть n - натуральное число и α - фиксированное число, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим квадратную $n \times n$ матрицу $A = (a_{ij})$ с ненулевыми диагональными элементами: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Мы будем предполагать, что она или удовлетворяет условиям *Островского*

$$(0 \leq)\epsilon_i^{1-\alpha}\delta_i^{\alpha} < 1, i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

или условиям *Брауэра-Островского*

$$(0 \leq)\epsilon_i^{1-\alpha}\delta_i^{\alpha}\epsilon_j^{1-\alpha}\delta_j^{\alpha} < 1, i \neq j; i, j = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

где

$$\epsilon_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|/|a_{ii}|, \delta_j = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|/|a_{ii}|, i = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

(встречающаяся здесь запись суммы означает, что суммирование распространено на все индексы $j = 1, 2, , ..., n$, кроме $j = i$).

Если в (1) положить $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, то мы придем к условиям *Адамара* по строкам или по столбцам соответственно; аналогично условия (3) превращаются в условия *Брауэра* .

Теорема 1. *Если выполнены условия Островского (1), то справедлива оценка*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - \epsilon_i^{1-\alpha}\delta_i^{\alpha}) \leq |detA/a_{11}...a_{nn}| \leq \prod_{i=1}^{n}(1 + \epsilon_i^{1-\alpha}\delta_i^{\alpha}). \tag{4}$$

Знак равенства в любой из оценок - нижней или верхней - достигается в том и только в том случае, если $\epsilon_i^{1-\alpha}\delta_i^{\alpha} = 0, i = 1, 2, ..., n$.

Теорема 2. *Если выполнены условия Островского (1) или условия Брауэра-Островского (2), то справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\prod_{i=1}^{[n/2]}(1 - (\epsilon_{(2i-1)}\epsilon_{(2i)})^{1-\alpha}(\delta_{(2i-1)}\delta_{(2i)})^{\alpha}) \leq \\ \leq |detA/a_{11}...a_{nn}| \leq \prod_{i=1}^{[n/2]}(1 + (\epsilon_{(2i-1)}\epsilon_{(2i)})^{1-\alpha}(\delta_{(2i-1)}\delta_{(2i)})^{\alpha}).\end{gathered} \tag{5}$$

В (5) $\epsilon_{(1)}, ..., \epsilon_{(n)}$ и $\delta_{(1)}, ..., \delta_{(n)}$ - это последовательности $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ и $\delta_1 ..., \delta_n$ - записанные в неубывающем порядке. Квадратные скобки означают целую часть числа. В случае $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ теоремы 1 и 2 были доказаны раньше.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ "c"-ЦВЕТНОГО РАЗБИЕНИЯ НА БЛОКИ[1]

Петрак Л.В. (Екатеринбург)

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{q_3}\sum_{l=1}^{q_2}\sum_{k=1}^{q_1}\sum_{i=1}^{3} A^{j,(i)}_{\overline{klm},klm} c^{(i)}_{klm} = F^{j}_{\overline{klm}}, \quad j=1,2,3,\ \overline{k}=\overline{1,q_1}, \overline{l}=\overline{1,q_2}, \overline{m}=\overline{1,q_3} \tag{1}$$

с симметричной положительно-определенной ленточной матрицей. Такая система получается при решении трехмерной задачи численного моделирования процесса образования осадочного бассейна в земной коре, описываемой классическими уравнениями движения, уравнениями переноса плотности, вязкости, условием несжимаемости. Компоненты используемой в уравнениях движения функции тока аппроксимируются произведениями одномерных функций, построенных на основе кубических B-сплайнов и удовлетворяющих граничным условиям.

Обозначим в (1) матрицу 3×3 через $G_{\overline{klm},klm} = (A^{j,(i)}_{\overline{klm},klm})$, $c_{klm} = (c^{(1)}_{klm}, c^{(2)}_{klm}, c^{(3)}_{klm})$, $F_{\overline{klm}} = (F^1_{\overline{klm}}, F^2_{\overline{klm}}, F^3_{\overline{klm}})$, $G_{\overline{lm},lm} = (G_{\overline{klm},klm})$ - матрицу $q_1\times q_1$, $c_{lm} = (c_{1lm},\ldots,c_{q_1lm})$, $F_{\overline{lm}} = (F_{\overline{1lm}},\ldots,F_{\overline{q_1lm}})$, $G_{\overline{m}m} = (G_{\overline{lm},lm})$ - матрицу $q_2\times q_2$, $c_m = (c_{1m},\ldots,c_{q_2m})$, $F_{\overline{m}} = (F_{\overline{1m}},\ldots,F_{\overline{q_2m}})$, $G = (G_{\overline{m}m})$ - матрицу $q_3\times q_3$, $c=(c_1,\ldots,c_{q_3})$, $F=(F_1,\ldots,F_{q_3})$, $r_m = [\frac{q_3+3}{4}]$, $r_l = [\frac{q_2+3}{4}]$, $r_k = [\frac{q_1+3}{4}]$. Имеет место следующее

Утверждение. *Для матрицы G как ленточной матрицы относительно элементов $G_{\overline{m}m}$ можно получить 4-цветное блочно-диагональное представление, где блоки на диагонали D_p являются блочно-диагональными матрицами с "элементами" $G_{\overline{j}j}$ на диагонали и индексы $\overline{j}, j = 4[i-(p-1)r_m-1]+p$, $i=\overline{(p-1)r_m+1, pr_m}$, $p=\overline{1,4}$, а блоки B_{ij}, $i<j$ (B_{ij}, $i>j$) - блочно-двудиагональные нижние (верхние) матрицы, с "элементами" $G_{\overline{j}k}$, $\overline{j} = 4(\widehat{i}-1)+i$, $k=4(\widetilde{i}-1)+j$, $\widehat{i},\widetilde{i}=\overline{1,r_m}$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,4}$, где $G_{\overline{j}k}=0$, если $|\overline{j}-k|\geq 4$. Аналогичные представления можно получить для каждого диагонального "элемента"-блока G_{jj}, G_{l_j,l_j}.*

Для полного разбиения матрицы G имеем $r_kr_lr_m$ локально независимо-разделенных групп неизвестных. Соответствующие этим группам уравнения можно решать независимо, используя $r_kr_lr_m$ процессоров. Приводится алгоритм организации обменов между процессорами, оптимизирующий затрачиваемое время.

[1]Работа поддержана грантами МНТЦ – 1293-99, РФФИ – 02-01-00782, Ведущих научных школ РФФИ – 00-15-96035.

ПОНЯТИЕ СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ В ДОВУЗОВСКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Петрова Е.А. (Тамбов)
nakhman@apmath.tstu.ru

Понятие системы и совокупности в довузовском курсе математики могут быть рассмотрены одновременно для нескольких типов задач, имеющих общую логическую основу: 1) всякое уравнение или неравенство есть предикат (как правило, не более чем двухместный); 2) записью этого предиката является равенство (неравенство) с переменной (переменными); 3) уравнение или неравенство- это задача о нахождении множества истинности данного предиката.

Подход к понятиям "система" и "совокупность" также должен быть единым. Система уравнений (неравенств) - это есть конъюнкция предикатов (логическое умножение). Совокупность уравнений (неравенств) - есть дизъюнкция предикатов (логическое сложение). Решения системы уравнений (неравенств) есть пересечение, а совокупности - объединение множеств истинности предикатов.

Изучение темы "Системы и совокупности уравнений и неравенств" дает возможность проанализировать и обобщить приемы решения многих задач. В теоретическом плане это приводит к усвоению более глубоких связей в изучаемом материале и создает предпосылки для дальнейшего обобщения приемов решения, а в практическом - к возможности запоминать меньшее количество приемов.

Сформулируем обобщенные приемы решения систем и совокупностей уравнений (неравенств) с одной или двумя неизвестными.

1. Совокупность уравнений (неравенств) с одним неизвестным интерпретируется в виде объединения множеств. Как правило, рассматриваемые в элементарной математике задачи сводятся к изучению взаимно исключающих случаев, так что множества истинности не пересекаются. Примерами являются неравенства с модулями, иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и другие.

2. Совокупность уравнений (неравенств) с двумя неизвестными реализуется при построении графиков с модулями на плоскости.

3. Система уравнений (неравенств) с одним неизвестным реализуется в задачах на пропорциональность, коллинеарность векторов и других.

4. Система уравнений (неравенств) с двумя неизвестными порождается задачами о пересечении линий или пересечении множеств на плоскости.

Указанная методика имеет развитие в приложениях, так как уравнения, неравенства, системы и совокупности уравнений и неравенств являются математическими моделями ряда экономических, физических и иных процессов.

Работа выполнена под руководством доцента А.Д.Нахмана.

КРИТЕРИЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЧЕТНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Погорелов Ю.В. (Воронеж)

Рассматривается решение $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве Лобачевского

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_2 u, \quad u(0,x) = f(x), \tag{1}$$

где Δ_2 — оператор Лапласа-Бельтрами, $f(x) \in C^{[\frac{n}{2}]+2}$, n — четное.

В [1] М. Н. Олевский получил решение задачи (1) для нечетномерного случая случая, которое после некоторых преобразований позволяет исследовать вопросы стабилизации (существования предела $u(t,x)$ при $t \to +\infty$). В. Д. Репниковым [2] получено решение и исследован этот вопрос для двумерного случая.

Возвращаясь к задаче (1), обозначим через $B(R,x_0)$ - среднее значение начальной функции $f(x)$ в шаре радиуса R с центром в точке x_0. Сформулируем полученные результаты

Теорема 1 *Для того, чтобы решение задачи Коши (1) стабилизировалось к с необходимо и достаточно, чтобы существовал предел*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^\mu} \int_t^{t+t^\mu} B(\rho,x)d\rho = c, \quad \mu \in (0,1/2)$$

Теорема 2 *Для того, чтобы решение задачи Коши (1) стабилизировалось к с достаточно, чтобы* $\lim_{\rho\to\infty} B(\rho,x) = c$. В евклидовом пространстве E (при $k=1$) сформулированные теоремы также имеют место. Но в E, в отличие от пространства Лобачевского, существование предела $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(\rho,x)d\rho$ эквивалентно существованию предела $\lim_{\rho\to\infty} B(\rho,x)$.

Литература

[1] Олевский Ю.В. ДАН СССР. 1995. Т.101. N1. С. 21-24

[2] Репников Ю.В. О стабилизации решения задачи Коши в плоскости Лобачевского. Дифференциальные уравнения. Том 38, N1. 2002.

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ЗАДАЧ С ПРОЦЕНТНЫМИ СТАВКАМИ

Покорная О.Ю. (Воронеж)

В последние годы выявилось недостаточное внимание школы к образованию в области процентов, хотя в некоторых ВУЗах начал появляться на вступительных экзаменах новый тип задач на вклады, сбережения, увеличение и падение объема производства, определение срока окупаемости проекта и увеличение дохода в n раз ($n > 0$, $n \in R$). Эти задачи тесно связаны с понятием постоянной или переменной процентной ставки, а также используют схему начисления процентов по простой или сложной процентной ставке. Причем задачи решаются как на нахождение будущих выплат, прибылей и т.д., так и на дисконтирование, т.е. нахождение предшествующих сумм, зная будущие платежи. Золотое правило бизнеса гласит: "Деньги, полученные сегодня, больше денег, полученных завтра". В это утверждение вкладывается смысл о риске проекта, инфляции и т. д.

В случае, когда приросты денежных сумм для любого периода будут составлять одну и ту же долю i от первоначальной суммы P (простые проценты), наращенная за n периодов сумма составит величину

$$S_n = P + niP = P(1 + ni),$$

где i — процентная ставка, выраженная в долях.

В отличие от простых, для сложных процентов одна и та же ставка берется не от первоначальной суммы, а от результата предыдущего начисления, т. е. от суммы, наращенной на начало данного периода:

$$S_n = P \cdot (1 + i)^n \quad (i - \text{сложные проценты}).$$

В случае переменных процентов i_t, меняющихся во времени, используют обобщения приведенных формул:

$$S_n = P \cdot (1 + \sum_t n_t i_t) - \text{для простых процентов}$$

$$S_n = P \cdot \prod_t (1 + i_t)^{n_t} - \text{для сложных процентов}$$

В задаче необходимо определить вид начисления процентов и воспользоваться одной из перечисленных формул для нахождения требуемой величины — S_n, P, i или n (в случае сложных процентов используя логарифмирование).

О НЕПРЕРЫВНОЙ СКЛЕЙКЕ СОСЕДНИХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ[1]

Покорный Ю.В., Зверева М.Б. (Воронеж)
pokorny@kma.vsu.ru

Рассмотрим два смыкающихся промежутка $[a, b]$ и $[b, c]$ вещественной оси. Мы предполагаем, что на каждом из них задана своя задача Штурма-Лиувилля, то есть задано уравнение $-(pu')' + Q'u = F'(= \lambda M'u)$, где функции p,Q,F,M ограниченной вариации, определенные отдельно на промежутке $[a, b]$ и отдельно на $[b, c]$.При этом смежная точка $x = b$ не закреплена ни в одной из этих задач. Согласно [1] это значит, что каждое из двух уравнений в точке $x = b$ имеет вид условия Штурма-Лиувилля, если учесть, что $p(b) = 0$. Последнее равенство мотивируется аналогично [1].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00418 и гранта Минобразования РФ(КЦ СПбГУ) № Е00-1.0-154 и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047)

Мы обсуждаем вопрос о непрерывной склейке этих задач, точнее —об объединении этих задач в одну, заданную в целом на промежутке $[a, c]$ так, чтобы определяемое естественным образом сужение новой задачи на каждый промежуток давало бы каждую из исходных задач.

Сказанное приобретает более конкретное очертание с помощью новой понятийной системы обобщенных производных по Риссу([1]), на которой мы здесь не останавливаемся. Отметим лишь, что при склейке двух уравнений особую роль приобретает толкование обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в граничной точке и интерпретация его в виде обычного условия Штурма-Лиувилля, что оказывается возможным сделать за счет обобщения понятия решений исходных уравнений в терминах обобщенных дифференциалов Рисса, когда производные решений оказываются элементами сопряженного к $C[a, b]$ пространства.Склейка осуществляется тривиально, если функции Q,F,M не имеют особенностей в точке $x = b$. В противном случае появляются необходимые условия типа связей между этими особенностями, заданные врозь на $[a, b]$ и $[b, c]$.

Литература

[1] Покорный Ю.В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля // ДАН, 2002.–Т.383, 5.–С.1-4.

[2] Покорный Ю.В., Клюева М.Б. О формализме интеграла Лебега-Стилтьеса и относительных производных в теории обобщенной задачи Штурма-Лиувилля // Труды Воронежской весенней математической школы (в печати)

МНОЖЬ УБЫТКИ НА УБЫТКИ — ВРАЗ ПОЛУЧИШЬ ПРИБЫЛЬ!

Покорный Ю.В., Покорная И.Ю.

Арифметическая дробь - положительное рациональное число. Трудно сказать, когда эта откровенная глупость стала математическим штампом. Между множеством измеряемых величин и Q^+ действительно можно установить изоморфизм. Но изоморфизм - это не тождество. Квалифицированные математики, подменяющие в школьных учебниках одно другим, ставят методические интересы выше математических истин, заставляя учителей, а затем и их учеников путать координаты и отклонения с результатами конкретных измерений, а начало отсчета - с абсолютным нулем, символом "ничего".

Отметим один логический провал, сопутствующий нынешней методике и связанный с нулем. На языке убытка и прибыли (долга и имущества, как говорится в классике) отсутствие убытка не означает отсутствие прибыли, а потому отрицательный нуль строго формально не адекватен положительному нулю. Почему $+0$ (плюс нуль) должен совпадать с -0 (минус нулем) и почему стыковка между множествами отрицательных и положительных чисел должна быть непрерывной? Ведь некоторые гении прошлого - Валлис, Эйлер - были не просто убеждены в обратном, но и приводили убедительные обоснования. Или, во имя методической целесообразности, их мнение необходимо отбросить прочь, как несовременное?!? Тем самым ставя методику выше математики и оставляя учеников в убеждении, что из НИЧЕГО можно (вопреки не только внутреннему голосу и здравому смыслу, но и такому титану мысли, как Даламбер) взять что угодно. И что убытки в квадрате должны давать прибыль. Превращая тем самым математические знания в весьма сомнительную часть интеллектуального багажа.

Жалко преподавателей, которые вынуждены вымучивать из себя объяснения совершенно нескладных ситуаций. Например. Если отрицательные числа приравнивать к реальным количествам, то половина долга (как половина целого) должна быть меньше долга. Но раз и то и другое отрицательны, то должно быть наоборот: половина долга больше целого долга. А так как это высказывание не лезет ни в какие ворота, приходится выкручиваться: "половина долга *лучше* целого долга". К сожалению, систематической теории таких выкручиваний нет, а потому материал об отрицательных числах мучителен не только для учеников.

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)
anpokr@niimm.spb.su

Пусть задана релаксационная система

$$\varepsilon\dot{x} = f(x,y);\ \dot{y} = g(x,y);\ x(0) = x^0;\ y(0) = y^0, \qquad (1)$$

где $x, x^0, f \in R^k; y, y^0, g \in R^m$. Системе (1) соответствует релейная система [1]:

$$\dot{y} = g(\Phi(y), y);\ y(0) = y^0\ , \qquad (2)$$

где $\Phi(y) = \Phi_1(y)$ или $\Phi(y) = \Phi_2(y)$, а $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$ – устойчивые корни алгебраического уравнения $f(x,y) = 0$. Моменты t^n, $n = 1, 2, ...$ замены $\Phi_1(y)$ на $\Phi_2(y)$, а также моменты τ^n замены $\Phi_2(y)$ на $\Phi_1(y)$ (т.-е. моменты разрыва правой части (2)) определяются из уравнения $c_1(y) \equiv f_x(\Phi(y), y) = 0$. Определим импульсную систему уравнением и условием разрывов решения в моменты t^n:

$$\dot{y} = g(\Phi_1(y), y),\ \ y(0) = y^0;\ \ y(t^n + 0) = h(y(t^n - 0)). \qquad (3)$$

Теорема 1. Существует импульсная система (3) такая, что её решение на интервалах $(\tau^{n-1} + \ \delta,\ t^n - \delta)$, где $\delta > 0$, совпадает с решением релейной системы (2).

Теорема 2. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывно дифференцируемы по аргументам $r + 1$ раз, выполняются условия из [1], гл.1, и $y(t,\varepsilon)$ – решение системы (1). Тогда существует импульсная система

$$\dot{y}^* = G(y^*, \varepsilon);\ y^*(0,\varepsilon) = y^0;\ y^*(t_*^n + 0) = h^*(y^*(t_*^n - 0), \varepsilon), \qquad (4)$$

и числа ε_1 и T такие, что при $0 \le t \le T$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$ на интервалах $\tau_*^{n-1} + \delta < t < t_*^n - \delta$, где $\delta > 0$, решение импульсной системы (4) $y^*(t,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству

$$|y^*(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| < K\varepsilon^r.$$

Литература

[1] Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995. -336 с.

О УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ МЕТОДА А.М.САМОЙЛЕНКО

Портнов М.М. (Воронеж)

В 1965-66 г.г. А.М.Самойленко предложил метод исследования Т-периодических решений определенного класса нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (Т-систем).

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in R, x \in R^n, f : R^{n+1} \to R^n,$$

$$f(t,x) = f(t+T,x), x(\tau) = x(\tau+T)$$

Схема метода основана на исследовании свойств уравнения

$$x(t,x_0) = x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} f(s,x(s,x_0))\,ds - \frac{t-\tau}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T} f(s,x(s,x_0))\,ds$$

В работах А.М. Самойленко метод назывался численно-аналитическим методом исследования периодических решений. В последующих публикациях других авторов данный метод назывался численно-аналитическим методом периодических последовательных приближений или методом Самойленко. Подробное изложение метода содержится в [1]. Подробный обзор метода содержится также в [3].

Под руководством А.И.Перова было проведено исследование метода с целью уточнения оценки погрешности метода Самойленко [2]. При рассмотрении метода с использованием нормы, порожденной собственной функцией некоторого интегрального оператора, соответствующей его максимальному собственному значению, возможно несколько расширить класс систем, к которым применим данный метод. Для расширенного класса систем получена новая оценка скорости сходимости метода.

Литература

1. А.М.Самойленко, Н.И.Ронто Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев: Вища школа, 1976, 180 с.

2. А.И.Перов, Л.Ю.Дикарева, С.А.Олейникова, М.М.Портнов К условию сходимости метода А.М.Самойленко // Вестник ВГУ, сер. физика, математика., 2001 г., вып. 1, С.111-119.

3. M.Ronto, A.M.Samoilenko Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. Ney-York: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000, 456 p.

О НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФАХ[1]

Провоторов В.В. (Воронеж)

Остановимся на случае, когда обыкновенное дифференциальное уравнение, задано на ориентированном графе-пучке $\Gamma = \left(\bigcup_{k=1}^{n+1}\gamma_k\right)\bigcup\{\xi\}$, $\lambda_k = (a,\xi)$, $a<\xi$, $(k=\overline{1,n})$, $\gamma_{n+1}=(\xi,b)$, $\xi<b$ соотношениями

$$
\begin{gathered}
-(py')'+qy=f, \quad x\in\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}\gamma_k\right),\\
y(\xi)_{\xi\in\overline{\gamma}_k}-y(\xi)_{\xi\in\overline{\gamma}_{n+1}}=0, \quad k=\overline{1,n}, \qquad (1)\\
\sum_{k=1}^{n}y'(\xi)_{\xi\in\overline{\gamma}_k}-hy'(\xi)_{\xi\in\overline{\gamma}_{n+1}}=0
\end{gathered}
$$

(здесь функции $p(x)>0$, $q(x)>0$, $f(x)$ непрерывны на $\overline{\Gamma}$; h — фиксированная постоянная). Соотношения (1) будем записывать одним формализмом: $Ly=f$, которое назовем обыкновенным дифференциальным уравнением на графе $\overline{\Gamma}$.

Интегрирование, аналогичное интегрированию на отрезке с переменным правым концом, определим по правилу:

$$
\int\limits_{\{s\le x\}} g(s)ds=\begin{cases}\int\limits_{\gamma_k(x)} g(s)ds, & x\in\gamma_k\ (k=\overline{1,n}),\\ \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\overline{\gamma_k}} g(s)ds, & x\in\overline{\gamma_k}\ (k=\overline{1,n}),\\ \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\overline{\gamma_k}} g(s)ds+\frac{1}{h}\int\limits_{\gamma_{n+1}(x)} f(s)ds, & x=\xi\in\gamma_{n+1}\end{cases} \qquad (2)
$$

(здесь $\gamma_k(x)=(a,x]$, $a<x<\xi$, $\gamma_{n+1}(x)=(\xi,x]$, $\xi<x<b$).

Интеграл (2) позволяет придать точный смысл начальной задаче для уравнения $Ly=f$ на графе $\overline{\Gamma}$:

$$
\begin{aligned}
Ly=f, \qquad & y(a)=\alpha,\ y'(a)=\beta,\ a\in\overline{\gamma}_{k_0}\ (k_0\in\{1,2,\dots,n\})\\
& y(a)=\alpha_k,\ a\in\overline{\gamma}_k,\ k=\overline{1,n}\ (k\ne k_0)
\end{aligned}
$$

и получить явное представление ее решения через фундаментальную систему решений уравнения $Ly=0$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00418 и гранта Минобразования РФ(КЦ СПбГУ) № Е00-1.0-154 и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047)

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. (Воронеж)

В обратных задачах теплопроводности при определении теплофизических характеристик исследуемого тела существенным является условие неразрушения испытуемого образца. Если образцом является стержень, то неразрушающий контроль реализуется исследованием нескольких таких стержней состыкованных в виде линейного графа (в местах стыковки стержней находятся термопары). Ниже приводится математическая модель такой конструкции на примере двух состыкованных стержней в предположениях: стержни одинаковые, толщина стержней не учитывается, теплопроводность стационарная (дифференциальное уравнение в обыкновенных производных). Пусть на интервале $(0,\pi) = \bigcup_{i=1}^{2} \gamma_i$, $\gamma_1 = (0,\xi]$, $\gamma_2 = [\xi,\pi)$, $\xi = \frac{\pi}{2}$, задано дифференциальное уравнение соотношениями:

$$-(py')' + qy = \lambda y, \quad x \in \left(\bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k\right) \setminus \{\xi\},$$

$$y(\xi)_{\xi\in\gamma_1} - y(\xi)_{\xi\in\gamma_2} = 0, \tag{1}$$

$$y'(\xi)_{\xi\in\gamma_1} - \alpha y'(\xi)_{\xi\in\gamma_2} = 0$$

Здесь описывающие теплофизические характеристики функции $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ необходимой гладкости на $(0,\pi)$; α — фиксированная постоянная; λ — спектральный параметр. Рассматривая краевые условия

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y(\pi) - Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

получим задачу на собственные значения (1),(2).

Имеют место утверждения: собственные значения задачи (1),(2) действительны; собственные функции, соответствующие различным собственным значениям ортогональны; асимптотические формулы для собственных значений $\lambda = s^2$ и нормированных собственных функций имеют вид, $s_n = n + O(\frac{1}{n})$, $\varphi_n(x,\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right) + O(\frac{1}{n^2})$. Увеличение числа стержней (точек стыковки $\xi_i, i = \overline{1,n}$) не меняет результатов.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ ГРИНА СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

Прядиев В. Л. (Воронеж)

Для уравнения $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ $(x \in \Gamma,\ t \in \mathbf{R})$ (Γ – граф; и сам граф, и дифференцирование функций на нём понимается в смысле [1]) рассматривается задача

$$\begin{cases} u(x,t) = 0 \ \ (x \in \partial\Gamma(\neq \emptyset)) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,t) = 0 \end{cases}. \qquad (1_{\varphi(x)})$$

Во внутренних вершинах графа Γ предполагается выполненным условие $\sum\limits_{\gamma \ni a} p_\gamma(a)(u_\gamma)_x(a,t) = 0$ (a – внутренняя вершина, u_γ – сужение u на $\gamma \times \mathbf{R}$, γ – ребро, $p_\gamma(a)$ – положительные числа). Решение задачи $(1_{\varphi(x)})$ представимо в виде $u(x,t) = \int\limits_\Gamma g(x,t,s)\varphi''(x)\,ds$, где $g(x,t,s)$ – решение задачи $(1_{G(x,s)})$, где $G(x,s)$ – функция Грина задачи $y''(x) = f(x)$ $(x \in \Gamma)$, $y\Big|_{\partial\Gamma} = 0$. Из формулы типа Даламбера [2] можно вывести представимость $g(x,t,s)$ в виде линейной комбинации функций $G(x,s_i)$ (s_i – конец пути длины t с началом в s); коэффициенты комбинации суть элементы матрицы рассеяния волны в узлах. Зафиксировав по одной точке s_γ внутри каждого ребра γ, каждую из функций $g(x,t,s_\gamma)$ разлагаем (если Γ – граф-дерево) в сумму прямой и обратной волн. Тем самым получим набор $\{w_i(t) \in C^2(\Gamma) \mid i = \overline{1,2m}\}$ таких волн (m – количество рёбер Γ) и систему уравнений с запаздыванием для них: $\sum\limits_{j=1}^{2m} a_{ij}w_j(t-\tau_{ij}) = 0$, $i = \overline{1,2m}$ (последняя решается стандартно); здесь $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{2m}$ – матрица рассеяния; $|\tau_{ij}|$ – расстояние от s_γ до одного из концов γ. Остальные функции $g(x,t,s)$ $(s \in \Gamma)$ линейно выражаются через сдвиги вида $\pm\|s - s_\gamma\|$ по аргументу t функций w_i.

Литература

[1] Покорный Ю. В., Пенкин О. М. О теоремах сравнения для уравнений на графах. Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1141-1150.

[2] Прядиев В. Л., Копытин А. В., Боровских А. В. К вопросу о периодичности колебаний упругих сеток. Тез. докл. конф. "Понтрягинские чтения - X". Воронеж, 1999. С. 198.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00417, 01-01-418, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект № Е00-1.0-154) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047).

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ШВАРЦА ДЛЯ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Псху А.В. (Нальчик)
pskhu@aport.ru

Рассматривается система Коши-Римана дробного порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}w(z) + i\, D_{0y}^{\alpha} w(z) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

где $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, D_{0t}^{ν} – оператор дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка ν [1, с.13]. В случае, когда $\alpha = 1$ уравнение (1) переходит в систему Коши-Римана.

Ставится задача: найти решение $w(z)$ уравнения (1) в верхней полуплоскости $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, такое, что $y^{1-\alpha}w(z) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, и $w(z)$ удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} \operatorname{Re} w(z) = \tau(x), \tag{2}$$

где $\tau(x)$ – заданная непрерывная функция.

Показано, что если $t^{\varepsilon}t(t) \to 0$, при $t \to \infty$, для некоторого положительного ε, то задача (1), (2) имеет единственное, с точностью до мнимого слагаемого, решение, представимое в виде

$$w(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(t) C(z,t)\, dt + ik\, y^{\alpha-1}, \tag{3}$$

где k – произвольное действительное число,

$$C(z,t) = \frac{y^{\alpha-1}}{t-x} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-s} E_{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{iy^{\alpha}s}{t-x}; \alpha \right) ds,$$

$E_{\rho}(z;\mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Выражение (3) является аналогом интеграла Шварца для полуплоскости в случае системы Коши-Римана дробного порядка.

Литература

1. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. - Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. -299 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОБОБЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕЙКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Пулькин И.С. (Москва)

Рассмотрим уравнение [1]:

$$Lu \equiv sgn(x) \cdot u_t - u_{xx} = f \tag{1}$$

в прямоугольнике $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+ = (-1;0)\times(0;T) \cup (-1;0)\times(0;T)$. Для этого уравнения рассмотрим задачу с граничными условиями [2], [3]

$$\begin{gathered} u(-1;t) = u(1;t) = 0 \\ u(x;0) = 0, 0 \le x \le 1; \quad u(x;T) = 0, -1 \le x \le 0, \end{gathered} \tag{2}$$

и условиями склейки на линии $x = 0$

$$\begin{matrix} u_+ = u_- \\ u'_+ = -u'_- \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} u_+ = -u_- \\ u'_+ = u'_- \end{matrix} \tag{3}$$

Пусть D_L — пространство дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (2) и условиям склейки (3), а W_L — замыкание этого пространства по норме

$$\| h \|_L = \iint\limits_{\Omega} h^2 dxdt + \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 dxdt + \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 dxdt + \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 dxdt. \tag{4}$$

Утверждение. *Для любого элемента $u \in W_L$ справедлива оценка*

$$Lu| \ge c \| u \|_L, \quad c > 0. \tag{5}$$

Из этого утверждения с очевидностью следует единственность решения задачи (1) — (3).

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственный элемент из W_L, удовлетворяющий уравнению (1), т. е. в пространстве W_L существует и единственно решение задачи (1) — (3). Кроме того, если $\{\varphi_k\}$ — система линейно независимых функций, полная в W_L (базис Рисса), то последовательные приближения

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

построенные с помощью метода наименьших квадратов, сходятся к единственному решению u_0 в норме пространства W_L.

Литература

1. Gevrey M. — J. Math. Pures and Appl., 1914, vol 10, №6, p. 105-108.
2. Кислов Н. В. — ДАН СССР, т. 280, №5, 1985.
3. Кислов Н.В., Пулькин И.С. — Вестник МЭИ, №6, 2000.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Пулькина Л.С., Климова Е.Н. (Самара)

www.klim@amv.ru

Рассматривается связь между нелокальными задачами с интегральными условиями и задачами для нагруженных [1] уравнений. В $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$ рассмотрим задачу:

$$Lu \equiv u_{xy}(x,y) + A(x,y)u_x(x,y) + B(x,y)u_y(x,y) + C(x,y)u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

$$\int_0^a u(x,y)dx = \psi(y), \quad y \in (0,b), \qquad \int_0^b u(x,y)dy = \varphi(x), \quad x \in (0,a). \tag{2}$$

С помощью введения новой неизвестной функции

$$v(x,y) = xyu(x,y) + x\int_y^b u(x,\eta)d\eta + y\int_x^a u(\xi,y)d\xi + \int_0^y\int_0^x u(\xi,\eta)d\xi\, d\eta$$

рассматриваемая задача сведена к задаче Гурса для уравнения:

$$Lv \equiv v_{xy}(x,y) + Av_x(x,y) + Bv_y(x,y) + Cv(x,y) = F(x,y), \tag{3}$$

где $F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y;v)$, $F_1(x,y)$ — известная функция, $F_2(x,y;v) =$ $= \quad Ax\int_y^b \frac{v_x(x,\eta)}{\eta^2}d\eta \quad + \quad By\int_x^a \frac{v_y(\xi,y)}{\xi^2}d\xi \quad + \quad Cy\int_y^b \frac{v(x,\eta)}{\eta^2}d\eta \quad + \quad Cx\int_x^a \frac{v(\xi,y)}{\xi^2}d\xi -$ $-Cxy\int_x^a\int_y^b \frac{v(\xi,\eta)}{\xi^2\eta^2}d\eta d\xi$, с условиями:

$$v(x,0) = x\varphi(x), \qquad v(0,y) = y\psi(y). \tag{4}$$

и доказано, что задачи (1)-(2) и (3)-(4) эквивалентны.

Для доказательства существования решения задача (3)-(4) сведена к уравнению:

$$v(x,y) - Pv(x,y) = g(x,y),$$

и показано, что оператор P является вполне непрерывным. Единственность решения задачи (1)-(2) следует из априорной оценки, полученной в [2].

Литература

1. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. // Дифференциальные уравнения. 1979. Том 15. 1. С.101-105.

2. Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения. // Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36. 2. С.279-280.

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ПРОБЕЛОВ СТУДЕНТОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Пыркина О.Е. (Москва)

pyrkina@fa.ru

Преподавание математики студентам нематематических специальностей имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать при создании учебных курсов. К ним можно отнести недостаточную развитость математического мышления и отсутствие навыков самостоятельного изучения математических текстов, что весьма характерно именно для студентов - первокурсников.

Вместе с тем большое количество студентов, обучающихся у одного преподавателя, не позволяет ему сформулировать индивидуальные рекомендации каждому студенту, что могло бы существенно повысить эффективность их самостоятельной работы и создать положительную мотивацию для учебы.

Частичным выходом из положения является формирование заданий тестового типа, с помощью которых возможно упорядочение студентов по уровню подготовки, получение итоговых оценок, выдача рекомендаций по дальнейшему обучению. Для этого тестовые задания должны быть построены таким образом, чтобы служить ¡экспресс - диагностикой¿ не вполне усвоенных разделов курса, которая даст возможность направить самостоятельную работу каждого студента на ликвидацию именно его пробелов.

Принципы построения таких заданий рассматриваются на примере построения тестов по курсу теории вероятностей. Для построения схемы тестирования по каждой теме используется граф, лишь один путь на котором ведет к правильному решению и ответу, а структура остальных ветвей учитывает типичные ошибки и позволяет тем самым выявить, какие именно разделы курса изучены недостаточно. Анализ результатов тестирования, проведенного для студентов второго курса Финансовой Академии при Правительстве РФ показывает эффективность подобного подхода для повышения усвояемости материала.

Литература

1. Анастази А. Психологическое тестирование (пер. с англ.). М.: Педагогика, 1982.

ON THE ASYMPTOTIK BEHAVIOR OF GROUND STATE OF NOT SELF-ADOJINT OPERATOR IN THE SPACE R^n

Piatnitski A.L., Shamaev A.S. (Moscow)

The problems associated with the asymptotic behavior of ground state for not self-adjoint operators defined in unbounded domains appear in many applications. Among them are mathematical physics, the theory of control in stochastic dynamic systems,financial mathematics.

We are going to study the conditions for existence and uniqueness of a positive eigenfunction of a second order elliptic operator and also the rate of decay of this eigenfunction at infinity.

We call this eigenfunction "ground state". We also consider the ground state asymptotics for a singularly perturbed non self-adjoint operator. We want to describe this asymptotic behavior in terms of an auxiliary variational problem. The Lagrangian of this problem will be found explicitly in terms of the coefficients of the original operator.

Let elliptic operator L have the form

$$L \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + C(x)$$

Here and later we assume summation over repeating indices,

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$$

Definition 1. We say that the property A holds for operator L, if the coefficients of L satisfy the following conditions:

- $|b(x)| < C|x| + C_1$, C_1, C_2 are constants;
- $C(x) \to -\infty$ if $|x| \to \infty$.

Definition 2. We say that the property B holds for operator L, if the coefficients of L satisfy the following inequalities:

- $(x, b(x)) > \alpha|x|^2$, where $\alpha > 0$ is a constant;
- $C(x) < r(x)|x|^2$, $r(x)$ is a function, tending to zero at infinity.

Definition 3. We say that a function $u(x)$ belong to class A, if $u(x)$ is positive and tend to zero, as $|x| \to \infty$.

Definition 4. We say that the function $u(x)$ belong to class B, if $u(x)$ is positive and there exists a constant $\gamma > 0$, such that $u(x)\exp(\gamma|x|^2)$ goes to zero as $|x| \to \infty$.

Theorem. Let the condition A be satisfied. Then there is a unique numbers λ, such that the equation $Lu + \lambda u = 0$ has a unique (up to multiplicative constant) solution from the class A. This solution is also unique in the class of functions tending to zero as $|x| \to \infty$ (without assumption that $u(x)$ is positive). For the function $u(x)$ the following estimate holds:

$$|u(x)| < C_N(|x| + 1)^{-N}$$

where $N > 0$ is an arbitrary constant, C_N is a constant, independent of $x \in R^n$.

If the property B is satisfied, then there exists a unique number λ, such that the equation $Lu + \lambda u = 0$ has a solution in the class B. This function is unique in the class of functions, tending to zero as $|x|$ tends to infinity (without positiveness conditions).

The some theorems describes the asymptotic behavior of a ground state for a singularly perturbed operator.

It should be also noted, that the equation from the class B might have two different solutions from the class A.

ON THE HIERARCHY OF WAVES IN MOMENT SYSTEMS OF EXTENDED THERMODYNAMICS

Radkevich E. (Moscow)

radk@defusion.math.msu.su

In this lecture we investigate the systems of equations of noneqilibrium thermodynamics. This system is derived in the context of extended [1-3] (nonequilibrium) thermodynamics for mon-atomic ideal gases. In extended thermodynamics the basic set of variables - density, momentum and energy is extended by the stress tensor, the heat flux, and so-called higher moments, which do not have an intuitive physical meaning. The main idea of introduction of these generalized variables is, that in the case of processes with strong gradients and rapid changes many variables are necessary for an appropriate theoretical description [4]. The constitutive theory of extended thermodynamics [1] yields dissipative, symmetric hyperbolic field equations for a special choice of variables. We will get the conditions of global stability of the solutions of the Cauchy and mixed problems for these systems. In order to formulate mixed problem, proper boundary conditions are required. Derivation of these boundary conditions is a very complicated problem (especialy in the high moment theories) because in experiments only few boundary values can be controlled. For example, in a rarefied gas temperature jumps at the walls and a velocity slip can occure. One will obtain the Shapiro-Lopatinskii conditions of well-posedness for the boundary conditions which describe these phenomena.

References

1. I. Muller Thermodynamics, Pitman advanced Publishing Program, 1985
2. I. Muller, T. Ruggeri Extended Thermodynamics, Springer-Verlag 1993
3. H. Grad On the kinetic theory of rarefied gases, Comm. Pure appl. Math. (1949), v.2, Wiley, New York
4. H. Struchtrup, W. Weiss Temperature jump and velocity slip in the moment method, Continuum Mech. Thermodyn. (2000), 12: 1-18

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ[1]

Раецкая Е.В. (Воронеж)

Работа посвящается исследованию полной наблюдаемости системы

$$\begin{cases} \frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = (B - \varepsilon C)x(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon) & (1) \\ (A - \varepsilon D)x(t,\varepsilon) = F(t,\varepsilon) & (2) \end{cases}$$

где $A, D : R^k \to R^l$ и $B, C : R^k \to R^k$; $x(t,\varepsilon) \in R^k$, $f(t,\varepsilon) \in R^K$, $F(t,\varepsilon) \in R^l$, $t \in [0,\infty)$ малый параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Получен критерий полной наблюдаемости предельной системы (определение полной наблюдаемости см.[2]) путем расщепления ее на уравнения в подпространствах $ker A$ и $coim A$ таким образом, что исходная система сводится к аналогичной системе в более узком подпространстве, то есть если $\exists(p \in N)$, что $ker A_p = \{0\}$, то предельная система является наблюдаемой. Приводятся рекуррентные формулы для нахождения A_p.

Тем же методом доказано, что из полной наблюдаемости предельной системы следует полная наблюдаемость системы (1), (2).

Показано, что в случае ненаблюдаемости предельной системы, можно подобрать такое возмущение, что система (1), (2) станет наблюдаемой. То есть $\forall(K \in N)[ker A_k \neq \{0\}]$, то $\exists(p \in N)\forall(\varepsilon \in (0,\varepsilon_1])[ker(A_p - \varepsilon D_p) = \{0\}]$

Литература

1. Раецкая Е.В. Исследование поведения решения одного сингулярно возмущенного уравнения Воронежская весенняя математическая школа: Тезисы докл. Воронеж, 3 мая - 9 мая 2001г.-с.128-129
2. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Новосибирск, 1980г.

[1] Работа выполненна при поддержке РФФИ, грант 02-01-00-351.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ОПЕРАТОРОМ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ратыни А.К. (Иваново)
E-mail:ratyni@icti.ivanovo.su

Продолжено изучение классической разрешимости задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + (c(x)+\lambda)u = f(x)\ (x \in D), \quad (1)$$

$$u(x) - \beta(x)u(\sigma x) = \psi(x)\ (x \in S). \quad (2)$$

Предполагаются выполненными следующие условия: D – ограниченная область R^n с границей S класса C^2; $a_{ij}, b_i, c \in C_\alpha(\bar{D})$; матрица (a_{ij}) положительно определена в $\bar{D}$; $\beta \in C(S)$, σ – однозначное непрерывное отображение $\bar{D}$ в $\bar{D}$, λ – числовой параметр (все величины – вещественны).

Известно(см. [1] и приведенный там список литературы), что если $|\beta(x)| < 1$ на S или $\beta(x) \equiv 1$ и пусто множество

$$\Omega \equiv \{x \in S : \sigma^k x \in S,\ k = 1, 2, \ldots\},$$

то задача (1),(2) фредгольмова в гельдеровом пространстве. Здесь предлагается обобщение этих результатов.

Теорема 1. *Пусть $\Omega = \emptyset$. Тогда существует такое число c_0, что для любых $\lambda \le c_0$, $f \in C_\alpha(\bar{D})$, $\psi \in C(S)$ задача (1),(2) имеет единственное решение $u_\lambda(x) \in C_{2+\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$. При этом для оператора G_λ, разрешающего задачу (1),(2) с $\psi \equiv 0$, существует линейное расширение на $L_p(D)$, которое является при $p > n/2$ вполне непрерывным оператором из $L_p(D)$ в $C(\bar{D})$.*

Кроме того, если $(c(x) + c_0) < 0$ в D, $\beta(x) \ge 0$ на S, $f(x) \le 0$ в D, $\psi(x) \ge 0$ на S, то $u_\lambda(x) \ge 0$ в D.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \ne \emptyset$ и $|\beta(x)| < 1, x \in \Omega$. Тогда справедливы все утверждения теоремы 1.*

Литература

1.Ратыни А.К. Условия фредгольмовости одной нелокальной краевой задачи// "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках".Тезисы докл. Воронеж. 2000.с.184.

МОЗР С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Редькина Т.В., Ищенко В.М. (Ставрополь)
stavsu@stavsu.ru

Теорема. Метод обратной задачи рассеивания (МОЗР) [2] применим к дифференциальному уравнению в частных производных, которое получается из операторного уравнения Лакса $L_t = [L, A]$ [1], где дифференциальные операторы L, A - первого порядка, с произвольными коэффициентами в виде матриц 2×2

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \partial x + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \partial x + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix},$$

где α_{ij}, β_{ij} - постоянные, $v_{ij}(x,y), u_{ij}(x,y)$ - произвольные функции ограниченные на $\pm\infty$, если выполнено одно из условий, которые будут приведены в докладе.

В качестве примера рассмотрен случай когда операторы L, A имеют вид:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \partial x + \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\left(\frac{q_x}{q} - \frac{q}{ak}\right) & -\frac{i}{2k}(ai+1)q \\ \frac{i}{2a}\left(i - \frac{1}{ak}\right)q & \frac{i}{2}\left(\frac{q_x}{q} + \frac{q}{ak}\right) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \beta & ak \\ -\frac{k}{a} & \beta \end{pmatrix} \partial x +$$

$$+ \begin{pmatrix} iu - \frac{i}{a}q & -\frac{i}{2}(aki+1)q + ia\frac{\beta q_x + q_t}{q} \\ \frac{i}{2a}\left(ki - \frac{1}{a}\right)q + i\frac{\beta q_x + q_t}{q} & iu \end{pmatrix}.$$

Операторное уравнение Лакса дает нам следующее уравнение в частных производных: $\left(\frac{1}{a} - \beta\right) q_x + k(\ln q)_{xx} - 2u_x = q_t$, где $q \to C$ ($C - const$) при $x \to \pm\infty$ и $u \to 0$ вместе с производными по x при $x \to \pm\infty$. Уравнение Лакса эквивалентно системе:

$$\begin{cases} L\varphi = \mu\varphi, & (1) \\ \varphi_t = A\varphi, & (2) \end{cases}$$

где (1) - задача на собственные значения, (2) - эволюция собственных функций по времени, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$. Выполнив все преобразования и подставив значения $\psi_1 = \delta_{11}\widetilde{\psi}_1 + \delta_{12}\widetilde{\psi}_2$, $\psi_2 = \delta_{21}\widetilde{\psi}_1 + \delta_{22}\widetilde{\psi}_2$, находим данные рассеяния:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{11} = 2aki\mu\delta_{21}, \\ \dot{\delta}_{12} = -2i\beta\mu\delta_{12}, \\ \dot{\delta}_{21} = 2i\beta\mu\delta_{21}, \\ \dot{\delta}_{22} = 2\frac{k}{a}i\mu\delta_{12}; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta_{11} = \frac{\delta_{21}^0\delta_{11}^0 ak}{\beta}e^{2i\beta\mu t}, \\ \delta_{12} = \delta_{12}^0 e^{-2i\beta\mu t}, \\ \delta_{21} = \delta_{21}^0 e^{2i\beta\mu t}, \\ \delta_{22} = -\frac{\delta_{12}^0\delta_{22}^0 k}{a\beta}e^{-2i\beta\mu t}, \end{cases}$$

где $\delta_{ij}^0 = const$ - начальные условия.

Литература

1. Лакс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. - Математика, 13:5, С. 128-150. - М.: Мир, 1969.
2. Новиков С.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рогова Н.В. (Воронеж)

Пусть Ω^+ – область, расположенная в полупространстве $x_{n-1} > 0$ и прилегающая к гиперплоскости $x_{n-1} = 0$. Граница $\partial\Omega^+$ есть объединение участка Γ^0, лежащего на гиперплоскости $x_{n-1} = 0$, и участка Γ^+, лежащего в полупространстве. Через $\bar{\Gamma}^+$ обозначим замыкание Γ^+. Будем предполагать, что Ω^+ ограничена и что $\bar{\Gamma}^+$ является бесконечно дифференцируемым многообразием размерности $n-1$ с краем, лежащим в гиперплоскости $x_{n-1} = 0$.

Кроме того, предполагается, что Γ^+ перпендикулярно примыкает к гиперплоскости $x_{n-1} = 0$.

Рассмотрим в Ω^+ следующую задачу: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta_{B_{x_{n-1}}} u = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{\gamma}{x_{n-1}} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad (\gamma > 0). \qquad (1)$$

граничному условию

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi \in W_{2,\gamma}^{1/2}(\Gamma^+), \qquad (2)$$

четную в направлении x_{n-1}, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = 0$.

Пусть $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)(\varphi)$ – множество функций $v \in W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)$, принимающих на $\bar{\Gamma}^+$ значения φ. Пусть функционал $\Phi_\gamma(u)$ на $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)(\varphi)$ определен формулой

$$\Phi_\gamma(u) = \int\limits_{\Omega^+} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 x_{n-1}^\gamma dx.$$

Теорема 1. Минимизирующая последовательность $\{v_k\}$ для этого функционала сходится в $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)$. Предельная функция принадлежит $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)(\varphi)$ и дает функционалу $\Phi_\gamma(v)$ наименьшее значение на множестве $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)(\varphi)$.

Теорема 2. Функция v_0, дающая минимум $\Phi_\gamma(v)$ в $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)$ единственна, причем она является решением сингулярной задачи Дирихле (1)-(2).

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Романова Е.Ю. (МГСУ)

Приводится новый численный алгоритм решения указанного класса задач, применимой и в критических случаях, когда не применим метод пограничных функций.

Литература

1. Коняев Ю.А., Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач // Журнал Известия ВУЗ математика,1992 No 2 стр 57-61

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В 10-11 КЛАССАХ

Рубцова Г.Р. (Воронеж)

Не секрет, что у большинства абитуриентов, сдающих письменно или устно математику, задачи по стереометрии вызывают неподдельный страх.

В чём же причина столь негативного отношения учащихся к интереснейшему предмету, входящему в школьную программу? В малом количестве часов, отводимых на изучение стереометрии, или в неумении учителя "преподнести" легко и доступно сложный материал? В нежелании учащихся кропотливо разбирать условие задачи, или же в неуёмном желании учителя самому строго обосновать каждый приведённый в учебнике факт.

Всегда ли мы, учителя, можем виртуозно превратить нудный урок в полезную, яркую дискуссию? Не боимся ли обсуждать способы решения задач, которые дети предлагают на уроке, если они не совпадают с нашими записями, подготовленными в домашнем конспекте? Эти вопросы волновали меня с давних пор. И в этом году я решилась на эксперимент, в основе которого лежат несколько идей:

1. От практики к теории. Наглядность и понимание поставлены на первое место, подкрепление теорией — на второе. Строгое логичное обоснование не должно предшествовать пониманию, которое может быть достигнуто лишь при решении определённого для каждого количества задач.

2. Геометрия мне интересна, я хочу, чтобы этот интерес в моих глазах видели мои ученики, ведь "главное не наполнять сосуд, а зажечь свечу".

3. Страх парализует ум. Стараюсь полностью исключить страх в детях на своих уроках. К доске вызываю лишь желающих; многих учащихся, которые по тем или иным причинам стесняются отвечать у доски, опрашиваю письменно. Выход к доске — не наказание, а поощрение.

4. Урок должен быть интересным — это аксиома. Скука на уроке, как засуха, убивает всё. Необходимы разнообразные формы и методы проведения урока, их разумное чередование.

5. Математические таланты бывают разные: геометрически-интуитивные, алгебраически-вычислительные, логически-дедуктивные, индуктивно-естествоиспытательские (Арнольд В.). Хочется обнаружить эти таланты, раскрыть их, развить. Особенно геометрически-интуитивные.

6. Младшие сёстры геометрии — рисование и черчение. Бесспорно, что "геометрия — искусство правильно рассуждать по неправильным чертежам", но наглядный чертёж — хороший помощник при решении задач.

7. Без шпаргалок в школе не обойтись, особенно если эти шпаргалки дети используют постоянно на уроках и дома, ведь ими разрешено пользоваться официально (даже на контрольных).

8. Тетради по стереометрии необычны. Их мы называем решебниками, ведь в них нет классных и домашних работ, а есть решения задач по темам. Учитель не имеет права что-то исправлять там красной ручкой, а лишь карандашом.

Безусловно, невозможно на одной странице перечислить все идеи, положенные в основу эксперимента. Работа идёт, но она возможна лишь при наличии главных движущих сил — тандема "учитель-ученик", находящихся в постоянном сотрудничестве и поиске.

ОБ ОПЕРАТОРЕ УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рудомёткина И.П. (Мичуринск)

Оператор Урысона с частными интегралами имеет вид

$$(Kx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau,x(\tau,s))d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma$$

$$+ \int_a^b \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \qquad (1)$$

где $t,\tau \in [a,b]$, $s,\sigma \in [c,d]$, $u \in (-\infty,+\infty)$, $l(t,s,\tau,u)$, $m(t,s,\sigma,u)$, $n(t,s,\tau,\sigma,u)$ — вещественные функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Свойства операторов такого типа в квазибанаховых идеальных пространствах изучались в [1]. В данной заметке оператор K рассматривается в пространстве $C^{(1)}(D)$ непрерывно дифференцируемых на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций.

Теорема. Пусть $\Omega \in \{[a,b],[c,d],D\}$ и $(a(t,s,\omega,u),\omega)$ принадлежит множеству

$\{(l(t,s,\tau,u),\tau),(m(t,s,\sigma,u),\sigma),(n(t,s,\tau,\sigma,u),(\tau,\sigma)),$
$(l'_t(t,s,\tau,u),\tau),(m'_t(t,s,\sigma,u),\sigma),(n'_t(t,s,\tau,\sigma,u),(\tau,\sigma)),$
$(l'_s(t,s,\tau,u),\tau),(m'_s(t,s,\sigma,u),\sigma),(n'_s(t,s,\tau,\sigma,u),(\tau,\sigma)),$
$(l'_u(t,s,\tau,u),\tau),(m'_u(t,s,\sigma,u),\sigma),(n'_u(t,s,\tau,\sigma,u),(\tau,\sigma))\}.$

Если при любом $h > 0$ $|a(t,s,\omega,u)| \le R_h^{(a)}(t,s,\omega)$ $(|x| \le h)$, где $R_h^{(a)}(t,s,\omega)$ — измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию

$$\int_\Omega R_h^{(a)}(t,s,\omega)d\omega < r(h) < \infty \ (0 < h < \infty),$$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{(t,s)\in D} \int_\Omega \max_{|u|,|v|\le 0,|u-v|\le\delta} |a(t,s,\omega,u) - a(t,s,\omega,v)|d\omega = 0,$$

$$\lim_{(t,s)\to(t_0,s_0)} \int_\Omega \max_{|u|\le h} |a(t,s,\omega,u) - a(t_0,s_0,\omega,v)|d\omega = 0$$

для любой точки $(t_0,s_0) \in D$, то оператор (1) действует в $C^{(1)}(D)$, непрерывен и ограничен.

Литература

1. Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002. — 208 с.

УСЛОВИЯ СИЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением $\ell(y) := y^{(n)}$, где $n = 2m + 1$, $m \geq 2$, и граничными условиями

$$U_\nu(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1,n},$$

где $\alpha_\nu \in C$.

Обозначим через $\omega_j = \exp\left(\frac{(2j-1)\pi i}{n}\right)$, $j = \overline{1,n}$, корни n-й степени из -1. Пусть $\alpha := (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^T$ и $\Omega := \left(\omega_j^{\nu-1}\right)_{\nu,j=1}^n$. Очевидно, $\det\Omega \neq 0$. Введем числа $a_\nu := \hat{\alpha}_\nu\omega_1^{\nu-1}$, $\nu = \overline{1,n}$, $\hat{\alpha}_\nu$ есть компоненты вектора $\hat{\alpha} := \left(\Omega^T\right)^{-1}\alpha$. Считаем, что в случае, если индекс у элемента a_ν выходит за диапазон $\overline{1,n}$, полагаем $a_\nu = a_{\mathrm{mod}_n(\nu)}$.

Теорема 1. *Оператор L является регулярным по Биркгофу (см. [1,с.66-67]) тогда и только тогда, когда $A \neq 0$ и $B \neq 0$, где*

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_n & \ldots & a_{m+3} & a_{m+2} \\ a_2 & a_1 & \ldots & a_{m+4} & a_{m+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+1} & a_m & \ldots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a_1 & a_n & \ldots & a_{m+3} \\ a_2 & a_1 & \ldots & a_{m+4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & a_{m-1} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Оператор L является нормальным (в смысле определения из [2]) тогда и только тогда, когда или $(A \neq 0 \wedge B = 0)$, или $(A = 0 \wedge B \neq 0)$.*

Определение 1. Будем называть оператор L сильно нерегулярным, если он не является ни регулярным, ни нормальным.

Теорема 3. *Оператор L является сильно нерегулярным тогда и только тогда, когда $A = 0$ и $B = 0$.*

Литература

1. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.

2. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1983. – 9. – С. 190–229.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ С УЧЕТОМ ПОСЛЕДСТВИЙ РЕФОРМИРОВАНИЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Ряжских В.И., Борисович О.Ю. (Воронеж)

В условиях реформирования средних учебных заведений, проводящегося в последние годы и дающего как положительные, так и отрицательные результаты, все более остро встаёт вопрос о том, что школа не справляется с

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-01-00075), программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123).

задачей подготовки учащихся к получению высшего образования. И одной из важнейших проблем, с которыми сталкиваются преподаватели кафедры математики технического вуза, стал низкий уровень обученности по алгебре и геометрии студентов первого и второго курсов. Несмотря на положительные оценки в школьном аттестате, будущие абитуриенты не владеют в полном объеме знаниями по элементарной математике, необходимыми для овладения курсом дифференциально-интегрального исчисления, аналитической геометрии и т.д. Они не готовы к самостоятельной работе, не умеют пользоваться математической литературой. Школьная программа перегружена элементами высшей математики, между тем, число часов, отведенных на алгебру и геометрию у школьников гуманитарных и химико-биологических классов, сокращено до трех часов в неделю. Вузовский курс высшей математики тоже претерпел изменения не в лучшую сторону. Количество разделов, объем фактического учебного материала, включенных в ГОС, увеличились, а число часов, отведенных на лекционные и практические занятия, при этом, уменьшилось. Для преодоления этих проблем в высших учебных заведениях для будущих абитуриентов создаются факультеты довузовской подготовки, деятельность которых обеспечивает основные принципы и формы обновленного взаимодействия средней и высшей школы. А для студентов младших курсов организуется компенсирующее обучение, улучшающее их общеобразовательную подготовку по математике. Если не преодолеть формальный подход к обучению, высшее техническое образование может постигнуть участь школьного среднего: его качество существенно снизится. Этому немало будет способствовать и введение единого тестирования вместо вступительных экзаменов в вузы.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ЛИНИЙ[1]

Сборец Ю.Н. (Воронеж)

В [1] для обоснования процедуры усреднения для системы уравнений, моделирующих передаточные линии, представленных Схемами 1 и 2, требовалось выполнение условия

$$\sqrt{\varrho}(-A+\varrho i)^{-1}e_0 \underset{\varrho\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (1)$$

на некотором векторе e_0.

Схема 1

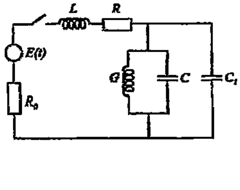
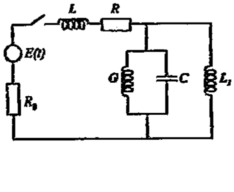


Схема 2



[1]Работа поддержана РФФИ, грант 02-01-00307

В случае Схемы 1 $A = A_1$, а для Схемы 2 $A = A_2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{L}\frac{d}{dx} & 0 \\ \frac{1}{C}\frac{d}{dx} & \frac{G}{C} & 0 \\ \frac{1}{C_1}\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{L}\frac{d}{dx} & 0 \\ \frac{1}{C}\frac{d}{dx} & \frac{G}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L}\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$D(A_1) = \{(\varphi, \psi, b) \in H : \varphi, \psi \in H^1[0, l], \psi(0) + R_0\varphi(0) = 0, b = \psi(l)\}, \gamma\varphi = \varphi(l),$$

$$D(A_2) = \{(\varphi, \psi, b) \in H : \varphi, \psi \in H^1[0, l], \psi(0) + R_0\varphi(0) = 0, b = \varphi(l)\}, \gamma\psi = \psi(l).$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема: **Теорема** *Операторы A_1 и A_2 являются производящими операторами сильно непрерывной полугруппы и их резольвенты удовлетворяют условию (1), где $e_0 = (0, I, 1)$, здесь I - функция, тождественно равная единице на $[0, l]$.*

Литература

1. Каменский М.И., Сборец Ю.Н. "О процедуре усреднения для уравнений передаточной линии", Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения, стр.118, Воронеж 2000.

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Северин Г.Ю., Стрыгин В.В.(Воронеж)

alsewer@mail.ru

Рассмотрена задача нахождения $u(t)$, удовлетворяющей системе, описывающей колебания неоднородных полимеров:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} a_i(t)u^{\alpha_i}(t) + \lambda(t)u(t) = f(t) \\ u^{\alpha_i - 1}(t_0) = x_i, \ i = 1..k \end{cases}$$

Существенно осложняют задачу аспекты, понятные из вида системы:

1) Содержание уравнением набора разнопорядковых дробных производных.

2) Переменные коэффициенты при этих производных.

Приближенное решение ищем в виде:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i\,(t - t_0 + 1)^{\alpha_k + \alpha_i - 1} + \sum_{j=0}^{n-1} B_j\,(t - t_j)_+^{\alpha_k + 1}$$

Коэффициенты первого слагаемого определяются из начальных условий, а второго - из узловых (на сетке) условий на искомое решение.

Для решения доказана оценка сходимости по равномерной норме:

$$\sum_{i=1}^{k} ||S^{\alpha_i} - u^{\alpha_i}|| + ||S - u|| \le Ch^{\alpha_k + 1},$$

где h - шаг сетки.

Алгоритм реализован в системе символьных вычислений Maple V R4.

Литература

1. R.Hilfer, Applications of Fractional Calculas in Physics, (Word Scientific Publ.Co.,Singapure, 2000)

2. С.Г. Самко, А.А. Килбас. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск, 1987.

ПЛОТНОСТЬ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРОИЗВОДНЫХ

Сексенбаева А.К., Какенова А.М. (Караганда)

ipm@nursat.kz

Пусть Ω–область в R^n, $0 < l$– целое, ρ_k, $0 \leq k \leq l$,– неотрицательные локально суммируемые в Ω функции, ρ_0–положительная функция. Через $V_p^l(\Omega, \overline{\rho})$– обозначим весовое пространство Соболева, определяемое как пополнение класса бесконечно дифференцируемых в области функций $u \in C^\infty(\Omega)$, для которых

$$\|u\|_{V_p^l(\Omega,\overline{\rho})} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{l} \rho_k |\nabla_k u|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $Q_d(x) = \{y \in R^n : \ |y_i - x_i| < d/2, \ i = 1, \ldots, n\}$. Для функций $v_k = \frac{\rho_0}{\rho_k}, 1 \leq k \leq l$, введем усреднения М. Отелбаева[1] :

$$v_k^*(x) = \sup\{d > 0 : \ d^{-pk+n} \geq \inf \int\limits_{Q_d(x)\setminus e} v_k(t)dt\},$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$– параметр усреднения, а инфинум берется по всем таким замкнутым $e \subset \overline{(Q_d(x))}$, что $\overline{Q_d(x) \setminus e} \subset \Omega$, $mes e < \varepsilon d^n$. Положим $Q^*(x) = Q_{v^*(x)}(x)$, $Q_\gamma^*(x) = Q_{(1-\gamma)v^*(x)}(x)$, $\gamma \in (0,1)$, $v^*(x) = \max\limits_{1 \leq k \leq l} v_k^*(x)$.

Теорема. Пусть $n \leq p < \infty$, $0 < l$– целое, Ω –область в R^n, ρ_0, ρ_k, v_k, $1 \leq k \leq l$,– локально суммируемые в Ω веса, веса ρ_k подчинены условию медленного колебания: $\frac{1}{c_k} \leq \frac{\rho_k(y)}{\rho_k(x)} \leq c_k$, $k = 1, \ldots, l$, $y \in Q_\gamma^*(x)$, где c_k, γ– константы, зависящие только от $p, n, l, \Omega, \varepsilon, k$. Тогда финитные функции плотны в $V_p^l(\Omega, \overline{\rho})$.

Литература

1. Отелбаев М.О. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра Оператора Шредингера // Труды МИАН.–1979.– Т.150. –С.265–305.

КОНСТРУКЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Семенов Ю.М. (Чебоксары)

Пусть C = (V,A,P) - линейная управляемая система с постоянными коэффициентами с замкнутым выпуклым ограничивающим множеством P содержащим точку 0. С t- семейством множеств достижимости K(C,t) (t¿0) системы C связываются монотонные по включению t-семейства линейных пространств lin(C,t) и конусов con(C,t). Конус con(C,t) отождествляется с конусом бесконечных направлений множества K(C,t), а линейное пространство lin(C,t) с линейным краем конуса con(C,t). При возрастании t, t-семейство линейных пространств lin(C,t) стабилизируется на некотором A-инвариантном линейном подпространстве, которое называется пространством полной линейной стабилизации системы C и обозначается L(C). Через conC обозначается система (V,A,conP), ограничивающее множество которой является конусом бесконечных направлений множества P.

Теорема 1. L(C)=0 тогда и только тогда, когда L(conC)=0.

Теорема 2. Пусть C - система с коническим ограничивающим множеством, U - A-инвариантное линейное подпространство коразмерности 1 в V, F - ограничение линейного оператора A на U, R - пересечение P с U, S=(U,F,R). Если P находится по одну сторону от U, то L(C)=0 тогда и только тогда, когда L(S)=0.

Теорема 3. Если W - A-инвариантное линейное подпространство, содержащееся в lin(C,t), а f - канонический морфизм системы C на факторсистему C/W, то L(C) совпадает с полным прообразом пространства L(C/W) при отображении f.

На основе данных теорем предлагается алгоритм построения пространства L(C), сводящий задачу к аналогичной для системы меньшего порядка.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГЕМОДИНАМИКИ[1]

Смирнов А.Н. (Воронеж)

Рассматриваются уравнения гемодинамики

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (uS)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = F_s + F_m \\ S = S_* + \theta(p - p*) \end{cases}$$

Здесь: $x \in [0, l]$, $u(x,t)$–скорость течения, $p(x,t)$-давление, $S(x,t)$–диаметр сосуда, S_* и p_*–константы, характеризующие данный кровеносный сосуд, F_s–сила вязкого трения, F_m–внешние силы. В статье [1] для случая стационарного потока (uS=const) в предположении ламинарности ($F_s = -8\pi\nu\frac{u}{s}$) предъявлена приближенная формула для перепада давления на эластичном

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00417, 01-01-418, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект N Е00-1.0-154) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.047)

сосуде, дающая результат, близкий к экспериментальному. В отличие от [1], нами рассмотрен случай пуазейлевского потока ($F_s = -\frac{\lambda\sqrt{\pi}u^2}{4\sqrt{S}}$). При $F_m = 0$ получены следующие приближенные значения для $\Delta S = S_0 - S_R$: $\Delta S = \frac{a-7bS_R^3+\sqrt{D}}{18bS_R^3}$, где $D = 49b^2S_R^6 - 14abS_r^3 + a^2 + 72blS_R^2\sqrt{S_R}$, $a = 8/\lambda\sqrt{\pi}$, $b = 87\lambda\sqrt{\pi}q^2\rho\theta$. Показано, что если $\varepsilon = |S_0 - S_R|/S_R \ll 1$, то для точного значения ΔS_{lim} выполнено: $|\Delta S - \Delta S_{lim}| \le C_1\varepsilon^{3/2}$ при $\varepsilon > 0$ и $|\Delta S - \Delta S_{lim}| \le C_2|\varepsilon|^{1/4}, \varepsilon < 0$, где C_1 и C_2 явно выражаются через S_R, ε, a, b. Аналогичные по структуре формулы (хотя и на порядок более сложные) получены и в предположении $F_m \neq 0$. В общем же случае путем применения инвариантов Римана и преобразования годографа система (1) сводится к системе алгебраических уравнений, получающихся после интегрирования системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dr_1} = \dfrac{\sqrt{S(r_1,r_2)}}{\mu u(r_1,r_2} + \dfrac{S(r_1,r_2)}{\mu\sqrt{\rho\theta}u^2(r_1,r_2)} - \dfrac{C}{\mu u^2(r_1,r_2)} \\ \dfrac{d\tau}{dr_2} = \dfrac{\sqrt{S(r_1,r_2)}}{\mu u(r_1,r_2} - \dfrac{S(r_1,r_2)}{\mu\sqrt{\rho\theta}u^2(r_1,r_2)} - \dfrac{C}{\mu u^2(r_1,r_2)} \end{cases}$$

и допускающих численное решение (здесь C=const, а функции r_1 и r_2 явно выражаются через $u(x,t)$, $p(x,t)$, $S(x,t)$.

Литература

1.Буничева и др. // Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37. N 7 С.905-912.

РЕДУЦИРУЮЩИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ И ДИСКРИМИНАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ФРЕДГОЛЬМОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Смольянов В.А. (Воронеж)

Многие нелинейные краевые задачи математической физики можно записать в виде абстрактного нелинейного уравнения $f(x) = b$, где f — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств X, Y. Исследование такого уравнения можно проводить по схеме Каччиополи [1] — через редукцию к конечномерному уравнению $\theta(\xi) = 0$, $\xi \in M$, $\theta = P \cdot f|_M$, где M — гладкое n-мерное (редуцирующее) подмногообразие в X, P — проектор на n-мерное подпространство в F (f трансверсально $Im\ P$ и $M = f^{-1}(Im\ P)$). Схема Каччиополи естественно переносится на случай, в котором вместо одного проектора P задано гладкое семейство проекторов $P(x)$, $x \in \mathcal{O}$, $dim\ Im\ P(x) = n$, с условием, что M является регулярным множеством нулей векторного поля $(I - P(x))f(x)$ [2]. Исходное уравнение сводится при этом к ключевому уравнению $\theta(\xi) = 0$, где $\theta(\xi) = P(\xi)f(\xi)$ — гладкое сечение n-мерного векторного расслоения над M, порожденного пучком n-мерных подпространств $Im\ P(x)$. Если исходное уравнение гладко зависит от параметра $\lambda \in \mathbf{R}^m$, то проводится параметрическая редукция, элементы которой (проекторы, редуцирующее подмногообразие и ключевое отображение) гладко зависят от λ.

Обобщенная схемы Каччиополи работает особенно эффективно в сочетании с редуцирующей схемой Ляпунова – Шмидта, позволяя исследовать ветви бифурцирующих решений уравнения с параметром, например, в условиях разрушений непрерывной симметрии [2]. Сочетание этих схем позволяет также получать новые результаты в задаче об описании топологической структуры дискриминантного множества $\Sigma := \{\bar{\lambda} \in \mathbf{R}^m \big| \exists \bar{x} \in X,\ f(\bar{x},\bar{\lambda}) = 0,\ dim Ker \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{\lambda}) > 0\}$.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера// Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. С.3-54.

2. Сапронов Ю.И., Смольянов В.А. Обобщенная редукция Каччиополи и бифуркации решений уравнений при разрушении непрерывной симметрии// Математические модели и операторные уравнения. Воронеж, ВГУ. 2001. С.25-39.

О НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМАХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Сумин В.И. (Нижний Новгород)[1]

v_sumin@mm.unn.ac.ru

Пусть: $Q \subset R^n$ - ограниченная односвязная область; $\partial Q \in C^2$; $\Pi \equiv Q \times [0,T]$; $D \subset L_2 \equiv L_2(\Pi)$ - выпукло; $\alpha(.) \in L_2(Q)$, $\overline{w}(.) \in L_6$, $a_{ij}(.) \in L_\infty$ $(1 \le i,j \le n)$. При условии равномерной параболичности рассмотрим на классе пар "управление v, состояние w" оптимизационную задачу

$$F[w,v] \equiv 6^{-1}\|w-\overline{w}\|_{L_6}^6 + 2^{-1}\|v\|_{L_2}^2 \to \min, \qquad \{w,v\} \in L_6 \times D; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{L}[w](x,t) \equiv w_t' - \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,t)\,w_{x^j}'\right)_{x^i}' = w^3 + v(x,t)\ ,\ \{x,t\} \in \Pi; \\ w(x,0) = \alpha(x),\ x \in Q; \quad w(x,t) = 0,\ x \in \partial Q,\ t \in [0,T], \end{gathered} \tag{2}$$

понимая решение *краевой задачи* (КЗ) (2) как обобщенное из $V_2^{1,0} \equiv V_2^{1,0}(\Pi)$. Получение *необходимых условий оптимальности* (НУО) для (1)-(2) было указано в [1, гл.1, §20, задача 11] как нерешенная задача. Вообще говоря, не каждому $v \in D$ отвечает решение КЗ (2). В подобных ситуациях в [1] НУО называются сингулярными системами оптимальности. Укажем решение поставленной задачи вывода НУО при $n = 1$, когда $V_2^{1,0}$ ограниченно вложено в L_6. Пусть $A[.] \in L(L_2, L_6)$ - оператор, задающий $V_2^{1,0}$-решение $u = A[z]$ КЗ

$$\mathcal{L}[u] = z(x,t), \quad \{x,t\} \in \Pi; \quad u(x,t) = 0, \quad \{x,t\} \in \partial\Pi \setminus (Q \times (t = T)).$$

Каждому $v \in L_2$ отвечает не более одного решения КЗ (2). Множество Ω тех $v \in L_2$, каждому из которых отвечает единственное решение w_v КЗ (2), открыто в L_2. Задача (1)-(2) переписывается в виде:

$$J[v] \equiv F[w_v, v] \to \min, \quad v \in D \cap \Omega. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 01-01-00979.

Функционал $J[.]$ L_2–дифференцируем в Ω по Фреше. Классическим варьированием управлений в задаче (3) получаем: если $\{v_0, w_0\}$ – оптимальная пара задачи (1)-(2) при $n = 1$ (такая пара существует [1]), то $\int\limits_{\Pi} (\psi(x,t) + v_0(x,t))(v(x,t) - v_0(x,t))dxdt \geq 0 \quad \forall \quad v(\cdot) \in D$, где $\psi(\cdot)$- единственное L_2-решение уравнения $\psi = A^* \left[3w_0^2\psi + (w_0 - \overline{w})^5\right]$.

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука. 1987.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Тарасян В.С. (Екатеринбург)

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = (Fx)(t), \quad t \in [0, \omega],$$

где $x : R \to R^n$, F - линейный вольтерровый оператор, действующий из $C(R, R^n)$ в $L(R, R^n)$ и инвариантный относительно сдвига времени t на период ω. Оператор F задается сужением $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n) \to L([0, \omega], R^n)$. Изучается специальная конечномерная реализация этого сужения

$$(\hat{F}x)(t) = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k, t_{k-1}+r]}(t) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d_s\alpha_k(s)x(s), \quad t \in [0, \omega],$$

где $\{t_k\}_{k=-M+1}^{N-1}$ - разбиение отрезка $[-r, \omega]$, $-r = t_{-M} < t_{-M+1} < \ldots < t_0 = 0 < \ldots < t_N = \omega$, $0 < r \leq \omega$, A_k ,$k = \overline{-M+1, N-1}$ - матричные функции, интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0, \omega]$, $\chi_{(\alpha, \beta]}$ - индикаторная функция промежутка $(\alpha, \beta]$, α_k , $k = \overline{-M+1, N-1}$ - матричные функции с ограниченной вариацией на отрезках $[t_{k-1}, t_k]$.

Оператор монодромии описывается формулой

$$(U\varphi)(\theta) = \sum_{k=-M}^{0} W_k(\theta)g_k(\varphi),$$

где g_k, $k = \overline{-M, 0}$ - линейные ограниченные функционалы, W_k, $k = \overline{-M, 0}$ - непрерывные матричные функции. Предлагается конструктивная процедура нахождения матричных функций W_k, использующая конечномерность оператора $\hat{F}$.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В КУРСЕ ВУЗОВСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Тихомиров В. Г. (Тамбов)

nakhman@apmath.tstu.ru

В настоящее время сфера образования является одним из объектов процесса информатизации общества. С приходом новых информационных технологий появилась возможность создать такие средства обучения, которые способны при грамотном подходе качественно повысить уровень подготовки специалистов.

Широкое распространение получили информационные технологии, связанные с созданием компьютерных учебников. Компьютерный учебник — это программно - методический комплекс, обеспечивающий возможность самостоятельно освоить учебный курс или его большой раздел. Он соединяет в себе свойства обычного учебника, справочника, задачника, лабораторного практикума и обладает следующими свойтсвами:

- обеспечивает индивидуальную последовательность работы с сохранением целостности изложения;
- обеспечивает возможность самоконтроля качества приобретенных знаний;
- прививает навыки исследовательской деятельности.

Как известно, основное влияние на качество обучения оказывает то, насколько удобно и наглядно представлен изучаемый материал, насколько хорошо он воспринимается. Для реализации этой стадии обучения открываются такие возможности, как гипермедийное представление информации, видео-, аудио- сопровождение. Особую роль на этой стадии обучения математике предлагается уделить системам компьютерной алгебры, таким как, "Maple", "Mathematica", "MathCAD". Они позволяют не только визуализировать некоторые темы курса математики, но и способствуют пониманию основных идей за счет автоматизации процесса рутинных вычислений. Это во многом определяет успех процесса обучения, так как стадия "понимание" является одной из важнейших.

Автор выражает благодарность доценту А. Д. Нахману за внимание к работе.

О КЛАССИФИКАЦИИ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР НАД ВЕЩЕСТВЕННО ЗАМКНУТЫМ ПОЛЕМ

Травкин Р.М. (Липецк)

travkin@lipetsk.ru

Решается задача классификации ассоциативных алгебр малой размерности, применяемых в системах искуственного зрения и др. технических вопросах ([3]-[7]). При классификации таких алгебр наибольшие затруднения вызывают вещественные алгебры, которые хуже описываются методами теории представлений ([1]).

Автором получена полная классификация 2-мерных и 3-мерных коммутативных алгебр с единицей над вещественно замкнутым полем, включающая 6 типов коммутативных и 4 типа некоммутативных двумерных и 5 типов коммутативных трехмерных неизоморфных друг другу алгебр.

Предлагаемый метод носит конструктивный характер и позволяет решать задачи распознавания алгебр.

Ниже приводится таблица произведений элементов канонического базиса i, j (в 3-мерном случае $(1, i, j)$) для всех типов алгебр, кроме 2-мерных с единицей, классификация которых известна ([2]).

	2-мерн.комм			2-мерн. некомм.				3-мерн. комм. с ед.				
i^2	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	i	0
ij	0	0	0	i	0	i	0	i	0	0	0	0
ji	0	0	0	0	i	0	i	i	0	0	0	0
j^2	j	i	0	j	j	$i+j$	$i+j$	1	0	0	$i-1$	i

Литература

1. Размыслов Ю.П. Введение в теорию алгебр и их представлений, М.,МГУ,1991

2. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир.1986

3. Kienle G. Experiments concerning the non-euclidian structure of the visual space.//In: Bioastronautics. N.Y.-L.-1964.-pp. 386-400

4. Luneburg R.K. Metric methods in binocular visual perception.//In: Studies and essays. N.Y. Intersci.Publ.-1948.-Courant anniv.- pp. 215-239

5. Hu M.-K. Visual Pattern Recognition my Moment Invariants.//IEEE Trans. on Information Theory.-1962.-IT-8.-pp.179-187

6. E.Labunets: Group-theoretical Methods in Image Recognition. Report No LiTH-ISY-R-1855.-Lincoping University.-1998.-281 p.

7. Диментберг Ф.М. Метод винтов в прикладной механике. М.: Наука,1971

О ФУНКЦИЯХ, СИНТЕЗИРУЮЩИХ СЕМЕЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Трушкова Е.А. (Саратов)

Рассматриваем задачи оптимального управления $\dot{x}(t) = Ax(t)+$ $+bu(t), t \in [0,1], J = \int\limits_0^1 \left((x, Mx) + u^2\right)dt \longrightarrow \min$, задавая различные условия, связывающие значения $x(0)$, $x(\alpha)$ и $x(1)$, $0 < \alpha < 1$. Здесь $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $b = (0, ..., 0, 1)^T$ есть n-векторы, $u \in R$ - управление. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ - матрица $n \times n$, $a_i \in R$, $i = 1, ..., n$, M - неотрицательно определенная матрица.

Из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач выделим подмножество $\mathcal{M}^{\alpha}_{n,D,d} = \left\{x(t) \middle| \exists p \in R^n : x(t) = \Phi_1(t)P_0(Dp+\right.$

$+d), t \in [0;\alpha], x(t) = \Phi_1(t)P_1(Dp+d), t \in (\alpha;1]\Big\}$. Здесь $\Phi_1(t)$ - первые n строк фундаментальной матрицы решений системы дифференциальных уравнений принципа максимума Л.С.Понтрягина: $\dot{x} = Ax+$
$+\frac{1}{2}bb^T\psi, \dot{\psi} = -A^T\psi + 2Mx$; $P_0 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ B & E & -B \end{pmatrix}$ - матрицы $2n \times 3n$, E - единичная матрица $n \times n$, $B = \Phi_{12}^{-1}(\alpha)\Phi_{11}(\alpha)$, $\Phi_{11}(t)$ $(\Phi_{12}(t))$ - первые (последние) n столбцов матрицы $\Phi_1(t)$; p - n-мерный вектор-параметр; $rankP_iD = n$, $i = 0, 1$.

С использованием результатов работы [1] были построены функции $u(t,x)$, синтезирующие семейства $\mathcal{M}^{\alpha}_{n,D,d}$.

Множество N_0 нулей функции $det\,(\Phi_1(t)P_0D)$ на $[0;\alpha]$ и множество N_1 нулей функции $det\,(\Phi_1(t)P_1D)$ на $(\alpha;1]$ конечны.

Теорема. *Пусть*

$$u(t,x) = \begin{cases} b^T\left(\dot{\Phi}_1(t) - A\Phi_1(t)\right)F_0(t,x), t \in [0;\alpha], \\ b^T\left(\dot{\Phi}_1(t) - A\Phi_1(t)\right)F_1(t,x), t \in (\alpha;1], \end{cases}$$

где $F_i(t,x) = P_iD\,(\Phi_1(t)P_iD)^{-1}\left(x - \Phi_1(t)P_id\right) + P_id$, $i = 0, 1$.

Если $x(t)$ - решение системы $\dot{x} = Ax + bu(t,x)$, и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $N_0\bigcup N_1$, то $x(t) \in \mathcal{M}^{\alpha}_{n,D,d}$.

Обратно, если $x(t) \in \mathcal{M}^{\alpha}_{n,D,d}$, то $x(t)$ - решение системы $\dot{x} = Ax+$ $+bu(t,x)$, и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $N_0\bigcup N_1$.

Литература

1. Хромов А.П. О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений: Сб.тр. 4-ой Сарат. зимн. шк. Ч.1. Саратов, 1990.

ОБОБЩЕННАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Тюрин В.М. (Липецк)
slb@stu.lipetsk.ru

В гильбертовом пространстве X рассматривается линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + P$, где $P = \sum\limits_{|\alpha| \le m} A_\alpha(t,x)D^\alpha x$, α — мультииндекс, $m \in N, A\alpha(t,x) \in C^m(R \times R^n, EndX)$, $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов $A : X \to X$. Двойственный оператор $\mathcal{L}_* = -\frac{\partial}{\partial t} + P_*$, P_* в свою очередь есть двойственный оператор к оператору P. Через $(u,v)_{00}$ обозначается скалярное произведение функций $u, v \in L^2(R \times R^n, X)$.

Функция $u(t,x) \in L^2(R \times R^n, X)$ называется обобщенным решением уравнения $\mathcal{L}u = f(f \in L^2(R \times R^n, X)$, если $(u, \mathcal{L}*\Psi)_{00} = (f, \Psi)_{00}$ для всех финитных функций $\Psi(t,x)$ из пространства Соболева $H^{1,m}(R \times R^n, X)$.

Положим $\|u(t,x)\|_{0,\infty} = esssup_{t\in R}\|u(t,x)\|_{L^2x}, u(t,x) \in L^2(R \times R^n, X)$, $\|u(t,x)\|_{0,b} = sup_{|t_2-t_1|\le 1}\|\int_{t_1}^{t_2} u(t,x)dt\|_{L^2_x}$.

Оператор $\mathcal{L}$ называется обобщенно корректным, если существует такая постоянная $k > 0$, не зависящая от u, f_1, f_2, Ψ, что из равенства $(u, \mathcal{L} * \Psi)_{00} = (f_1, \Psi)_{00} + (f_2, D * \Psi)_{00} (\Psi \in H^{1,m}(R \times R^n, X))$ вытекает неравенство

$$||u||_{0,\infty} \leq k(||f_1||_{0,\infty} + ||f_2||_{0,\infty})$$

как только $||u||_{0,\infty} < \infty, ||f_i||_{0,\infty} < \infty (i = 1, 2)$.

В докладе изучаются свойства обобщенной корректности оператора $\mathcal{L}$ в различных функциональных пространствах на основе следующего утверждения.

Теорема. Пусть $u(t, x)$— обобщенное решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, при этом $||u||_{0,\infty} < \infty, ||f||_{0,\infty} < \infty$. Если оператор $\mathcal{L}$ обобщенно корректен, то имеет место неравенство

$$||u||_{0,\infty} \leq d||f||_{0,b},$$

в котором положительная постоянная d не зависит от u и f.

Обсуждается возможность применения полученных результатов в теории колебаний систем с распределенными параметрами.

ПОДПРОСТРАНСТВА ПОЧТИСУЩЕСТВОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ АБСТРАКТНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Пусть Z – банахово пространство, L – замкнутое подпространство в Z, тогда для $x \in Z$ полагаем $P_L x = \left\{ y \in L : ||x - y|| = \inf_{z \in L} ||x - z|| \right\}$; $A_L = \{x \in Z : P_L x \neq \Omega\}$, $B_L = \{z \in L : ||z|| \leq 1\}$. L называется подпространством существования (почтисуществования), если $A_L = Z$ ($\overline{A_L} = Z$). Если E, F – подпространства в Z, то $d(E, F) = \max \left(\sup_{y \in B_E} \inf_{z \in B_F} ||y - z||, \sup_{z \in B_F} \inf_{y \in B_E} ||z - y|| \right)$.

Теорема 1. *Если Q – метризуемый компакт, X – равномерно выпуклое пространство, L – замкнутое подпространство в $C(Q, X)$,* $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, *то $\forall \varepsilon > 0$ найдется в $C(Q, X)$ подпространство почтисуществования E,* $d(L, E) < \varepsilon$, $\dim E = \operatorname{codim} E = +\infty$. (В случае пространств $C(Q)$частный случай этой теоремы был доказано в [1].)

Теорема 2. *Пусть Q – метризуемый компакт, пространство X^* имеет свойство Радона-Никодима, $L \subset C(Q, X)$,* $\operatorname{codim} L < +\infty$. *Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое подпространство существования $E \subset C(Q, X)$, что:* 1) $d(L, E) < \varepsilon$, 2) $\operatorname{codim} L = \operatorname{codim} E$, 3) *отображение $z \to P_E z$, $z \in C(Q, X) \setminus E$ допускает непрерывную селекцию.*

Предложение 1. *Подпространство $C(Q, L)$ есть подпространство почтисуществования в $C(Q, Z)$ тогда и только тогда, когда L есть подпространство почтисуществования в Z.*

Предложение 2. *Пусть L – чебышевское подпространство в Z. Тогда $C(Q, L)$ есть подпространство существования в $C(Q, Z)$ тогда и только тогда, когда отображение $x \to P_L x$, $x \in Z$ непрерывно.*

Отметим, что согласно [2], существует рефлексивное пространство Z, содержащее чебышевское подпространство L с разрывным отображением $x \to P_L x$. Следовательно, $C(Q, L)$ – подпространство почтисуществования в $C(Q, Z)$, не являющееся подпространством существования.

Литература

1. Устинов Г.М. О подпространствах почтисуществования // Мат. заметки, т.60, вып.2, 1996 г., стр. 278–287.

2. Brown A.L. A rotund reflexive space having a subspace of codimension two with a discontinuous metric projection // Michigan Math. J., v.21 (1974), p. 145–151.

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА[1]

Федоров В.Е. (Челябинск)

kar@csu.ru

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \tag{1}$$

$$L\dot{u} = Mu, \tag{2}$$

где оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ (т.е. линейный и непрерывный) не является непрерывно обратимым, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ (т.е. линейный замкнутый плотно определенный), пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы.

Определение. Замкнутое множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2), если

(i) любое ослабленное решение $u(t)$ уравнения (2) лежит в $\mathcal{P}$ (поточечно);

(ii) для любого u_0 из $\mathcal{P}$ существует единственное ослабленное решение задачи (1), (2).

Введем обозначение $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k L - M)^{-1} L$.

Следующая теорема получена в [1] при меньших требованиях на решение по сравнению с [2].

Теорема. *Пусть оператор M (L, p)-секториален. Тогда фазовым пространством $\mathcal{P}$ уравнения (2) является множество* $\overline{\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)}$.

Следствие. *В условиях теоремы любое ослабленное решение уравнения (2) аналитично в секторе* $\{t \in C : |\arg t| < \theta - \pi/2,\ t \neq 0\}$.

Например, аналитичными будут ослабленные решения задачи для уравнения свободной поверхности фильтрующейся жидкости

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \alpha \Delta u(x,t) - \beta \Delta^2 u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial n} \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

[1]Работа поддержана Государственной научной стипендией для молодых ученых

здесь $\lambda \in R$, $\alpha, \beta \in R_+$, $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область.

Литература

1. Федоров В.Е. О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравн. 2001. Т.37, 12. С.1646-1649.

2. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. матем. журн. 1998. Т.39, 3. С.604-616.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Феоктистов В.В., Феоктистова О.П. (Москва)

apmath@bmstu.ru

Контрастные структуры — это решения нелинейных сингулярно возмущенных задач, обладающие внутренними переходными слоями.

Рассматривается задача для уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$t \in [0,\infty)$, $x \in [0,\infty)$, $y \in [0,\infty)$ с начально-граничными условиями: $\dfrac{\partial \psi(0,x,y)}{\partial y} = u_0(x,y)$; $\dfrac{\partial \psi(t,0,y)}{\partial y} = u_1(t,y)$; $\dfrac{\partial \psi(t,x,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi(t,x,0)}{\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial \psi(t,x,\infty)}{\partial y} = U(t,x)$. Для $U(t,x) = at^n x^m$ на различных интервалах t и x существуют контрастные структуры и как переходная стадия между ними реализуются погранслойные решения. Записывая функцию ψ в виде: $\psi = \sqrt{\varepsilon U x} f(\xi,\eta)$, $\xi = x/(Ut)$, $\eta = y\sqrt{U}/\sqrt{\varepsilon x}$, исходное уравнение имеет вид [1]: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \xi\left[(n+1)\xi - (1-m)\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\right]\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + \left[\frac{m+1}{2} f + (1-m)\xi\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{n}{2}\xi\eta\right]\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + m\left[1 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right] + +n\xi\left(1 - \dfrac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 0$, $\xi \in [0,\infty)$, $\eta \in [0,\infty)$ с краевыми условиями, которые выводятся из начально-граничных условий исходного уравнения и условий согласований на границе. $\dfrac{\partial f(\xi,0)}{\partial \eta} = 0$; $\dfrac{\partial f(\xi,\infty)}{\partial \eta} = 1$; $\dfrac{\partial f(0,\eta)}{\partial \eta} = u_1(\eta)$, где $u_1(\eta)$ удовлетворяет уравнению $u_1''' + (m+1)u_1 u_1''/2 + m\left(1 - u_1'^2\right) = 0$, $u_1'(0) = 0$, $u_1'(\infty) = 1$. $\dfrac{\partial f(\infty,\eta)}{\partial \eta} = u_0(\zeta)$, $\zeta = y/\sqrt{\varepsilon t}$, $u_0(\zeta)$ решение уравнения $u_0''' + \frac{1}{2}\zeta u_0'' + n\left(1 - u_0'\right) = 0$, $u_0'(0) = 0$, $u_0'(\infty) = 1$. Контрастная структура решения определяется коэффициентом $(n+1)\xi - (1-m)\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$, так как $\xi \in [0,\infty)$, а $0 \le \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \le 1$.

Построить равномерную асимптотику решения, которое является контрастной структурой переменного типа, для всех рассматриваемых t, x, m, n не удается. При исследовании необходимо сочетать аналитические и численные методы [2]. Однако, в частном случае $m = 1$, $n = 0$ построена равномерная асимптотика решений.

Литература

1. *Феоктистов В. В., Феоктистов П. В.* Инвариантные решения нестационарных пограничных слоев и их связь с нелинейными уравнениями переменного типа// Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Машиностроение", 1997, N1.– с.14-22.

2. *Феоктистов В. В., Феоктистова О. П.* К нелинейным уравнениям переменного типа// Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели.– Тез. докл. международной конференции.– Челябинск, ЧГУ, 2002,– с.109-110.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ОБЛАСТЯХ С НЕКОМПАКТНЫМИ ГРАНИЦАМИ[1]

Филиновский А.В. (Москва)

Пусть Ω — неограниченная область в R^n, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ. Рассмотрим самосопряженный оператор первой краевой задачи для полигармонического уравнения

$$L = (-\Delta)^m : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega), \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

с областью определения $D(L) = \left\{u : u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega),\ \Delta^m u \in L_2(\Omega)\right\}$. Спектр оператора L расположен на полуоси $[0, +\infty)$. Нас интересует, имеет ли оператор L собственные значения. Известно, что для областей, являющихся внешностью компакта, у оператора L нет собственных значений [1]. Если L является оператором первой краевой задачи для уравнения Лапласа ($m = 1$), то достаточные условия непрерывности спектра оператора L установлены и для областей с некомпактными границами (обзор результатов содержится в [2]).

В настоящей заметке рассмотрен случай оператора L ($m > 1$) в областях с некомпактными границами.

Будем говорить, что поверхность Γ есть *равномерно гладкая поверхность класса* C^l, $l \geqslant 1$, если существуют положительные постоянные R_1 и C_1, такие, что для каждой точки $x^0 \in \Gamma$ поверхность $\Gamma \cap B_{R_1}(x^0)$, где $B_{R_1}(x^0) = \{x : |x - x^0| < R_1\}$, в местной декартовой системе координат (ось y_n направлена по внешней нормали к поверхности Γ в точке x^0, а оси $y_1, \dots, y_{n-1}$ лежат в плоскости, касательной к Γ в точке x^0) имеет вид $y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1})$ и

$$\|f\|_{C^l\left(\{y_1^2+\dots+y_{n-1}^2 \leq R_1^2\}\right)} \leq C_1.$$

Через mes_{n-1} будем обозначать $(n-1)$-мерную меру Лебега.

Теорема. *Пусть Γ — равномерно гладкая поверхность класса C^{2m} и существует множество $M \subset \Gamma$, такое, что* $\mathrm{mes}_{n-1} M = 0$ *и*

$$\nu_n < 0, \quad x \in \Gamma \setminus M.$$

[1]Работа финансировалась Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант ß 00-15-96100) и РФФИ (грант ß 01-01-00600).

Тогда оператор L не имеет собственных значений.

Литература

1. Эйдус Д.М. Принцип предельной амплитуды // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24. ß 3. С. 91–156.

2. Eastham M.S.P., Kalf H. Schrodinger-type operators with continuous spectra // Research Notes in Mathematics. V. 65. London: Pitman. 1982.

К ТЕОРИИ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Фирстов В.Е. (Саратов)

Vladimir.Molchanov@renet.ru

1. Пусть $M(n;Z)$ — множество всевозможных целочисленных магических $(n\times n)$-матриц. На $M(n;Z)$ строится кольцо, не являющееся целостным, так, что отображение $M(n;Z)\to Z$ — гомоморфизм.

Подмножество $M(n;S)\subset M(n;Z)$ образует класс $\overline{M}(n;S)$ матриц с магической суммой $S\in Z$ и, таким образом, порождается фактор-кольцо $\overline{M}(n;Z)\cong Z$. Подкольцо $M(n;0)\subset M(n;Z)$ является двухсторонним идеалом, по которому строится теория сравнений в $M(n;Z)$, упрощающая построение множества $M(n;Z)$.

2. Пусть P_n — множество $(n\times n)$-матриц перестановок. Каждой матрице из P_n ставится в соответствие вектор-индекс (l,d,d'), где d, d' — соответственно, суммы элементов по главной и побочной диагоналям.

Построение множества $M(n;Z)$ реализует следующая теорема:

Теорема 1. Каждый класс $\overline{M}(n;S)$ строится с помощью целочисленных решений уравнения

$$x_l(l,d,d')+\ldots+x_k(l,d_k,d'_k)=(s,s,s)$$

где k зависит от n, причем, при $n=2$ решения существуют только для четных s; при $n=3$ — только для s кратных 3; при $n>3$ — решения существуют при всех $s\in Z$.

Матрица из $M(n;Z)$ называется простой, если она не представляется в виде линейной комбинации магических матриц с меньшими (по модулю) магическими суммами. Справедлива теорема.

Теорема 2. Всякая матрица из $M(n;Z)$ либо простая, либо представляется линейной комбинацией простых матриц, в общем случае не единственным образом.

Следствие. Аддитивная группа кольца $M(n;Z)$ имеет конечное число образующих, зависящее от n.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 2-ГО ПОРЯДКА И ИХ СВЯЗЬ С КОНИЧЕСКИМИ СЕЧЕНИЯМИ

Фирстов В.Е. (Саратов)
Vladimir.Molchanov@renet.ru

1. Обобщенные пифагоровы построения (ОПП): на сторонах произвольного треугольника $A_1B_1C_1$ во внешнюю сторону строятся квадраты $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2'$ и $A_1C_1C_2'A_2'$, подобно тому как это делал Евклид при доказательстве теоремы Пифагора. От вершин построенных квадратов строятся квадраты $A_2A_3A_3'A_2'$, $B_2B_3B_3'B_2'$ и $C_2C_3C_3'C_2'$, затем $A_3B_3B_4A_4$, $B_3'C_3C_4B_4'$ и $A_3'C_3'C_4'A_4'$ и т.д. В результате получается сеть квадратов, называемая ОПП, в которой выделяется шесть серий квадратов. Показано, что в одноименных сериях стороны квадратов образуют реккурентные последовательности вида $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$, причем соответствующие вершины квадратов этой серии (например, A_1, A_3, A_5, ...) располагаются на ветви гиперболы $x^2 + 3xy - 3y^2 + x - 2y = 0$ в базисе $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$.

2. Обобщенные наполеоновы построения (ОНП): на сторонах произвольного треугольника $A_1B_1C_1$ во внешнюю сторону, подобно тому как это делается в известной задаче Наполеона, строятся правильные треугольники $A_1B_1C_2$, $B_1C_1A_2$, $A_1C_1B_2$, от вершин которых строятся правильные треугольники $A_2B_2C_3$, $B_2C_2A_3$, $A_2C_2B_3$, и т.д. В результате образуется цепочка треугольников $A_1B_1C_1 \to A_2B_2C_2 \to \ldots \to A_nB_nC_n$ (1). Показано, что соответствующие стороны треугольников цепи (1) образуют векторные рекуррентные последовательности вида $\vec{a}_{n+2} = -\vec{a}_{n+1} + 2\vec{a}_n$, с которыми связано вырожденное коническое сечение в виде пересекающихся прямых.

3. Для произвольного рекуррентного уравнения 2-го порядка, в зависимости от дискриминанта соответствующего характеристического уравнения, устанавливается общая связь с коническими сечениями, включая вырожденные случаи.

ОБ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n - ГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Фомин В. И. (Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru

В банаховом пространстве E изучается уравнение

$$u^{(n)} + A_1u^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}u' + A_nu = f(t), 0 \le t < \infty, \qquad (1)$$

где $A_i \in L(E), 1 \le i \le n; f(t) \in C([0,\infty); E)$. Пусть характеристическое операторное уравнение

$$\Lambda^n + A_1\Lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\Lambda + A_n = 0 \qquad (2)$$

имеет n различных корней $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \in L(E)$, удовлетворяющих следующим условиям: $\Lambda_i\Lambda_j = \Lambda_j\Lambda_i, \forall 1 \le i,j \le n; \exists(\Lambda_i - \Lambda_j)^{-1} \in L(E), \forall 1 \le j < i \le n.$

Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид $u = u_{o.o.} + u_*$, где $u_{o.o} = e^{\Lambda_1 t}x_1 + \ldots + e^{\Lambda_n t}x_n$; $x_1, \ldots, x_n$ - произвольные элементы из E;

$$u_* = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\prod_{1\le j<k}(\Lambda_k - \Lambda_j)^{-1}\prod_{k<i\le n}(\Lambda_i - \Lambda_k)^{-1}\int_0^t e^{\Lambda_k(t-\tau)}f(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Если уравнение (2) имеет корни $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p \in L(E)$ с кратностями $r_1, \ldots, r_p$ $(p \le n, r_1 + \ldots + r_p = n)$, то общее решение уравнения (1) имеет вид $u = u_{o.o.} + u_*$, где $u_{o.o.} = \sum\limits_{s=1}^{p} e^{\Lambda_s t}\sum\limits_{k=1}^{r_s} t^{k-1}x_{sk}$, где $x_{sk}(1 \le s \le p, 1 \le k \le r_s)$ - произвольные элементы из E; u_* имеет структуру, аналогичную (3). Рассмотрим, например, уравнение

$$u'' + A_1 u' + A_2 u = f(t), \quad (1')$$

где $A_1, A_2 \in L(E)$; $f(t) \in C([0;\infty); E)$. Вид корней уравнения

$$\Lambda^2 + A_1\Lambda + A_2 \quad (2')$$

определяется видом операторного дискриминанта $D = A_1^2 - 4A_2$. Пусть $D = F^2$, где $F \in GL(E) = \{Q \in L(E) | \exists Q^{-1} \in L(E)\}$, и $A_1 F = F A_1$. Тогда уравнение(2') имеет два простых корня $\Lambda_1 = \frac{1}{2}(-A_1 - F), \Lambda_2 = \frac{1}{2}(-A_1 + F)$ и общее решение уравнения (1') имеет вид

$$u = e^{\Lambda_1 t}x_1 + e^{\Lambda_2 t}x_2 + F^{-1}\int_0^t \left[e^{\Lambda_2(t-s)} - e^{\Lambda_1(t-s)}\right] f(s)ds.$$

где x_1, x_2 - произвольные элементы из E. Пусть $D = 0$. Тогда уравнение (2') имеет один корень $\Lambda_0 = -\frac{1}{2}A_1$ кратности $r = 2$ и общее решение уравнения (1') имеет вид

$$u = e^{\Lambda_0 t}(x_1 + tx_2) + \int_0^t e^{\Lambda_0(t-s)}(t-s)f(s)ds.$$

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Фомин В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t), \quad 0 \le t < \infty; u(0) = u_0, u'(0) = u_0', \quad (1)$$

с замкнутыми линейными неограниченными операторными коэффициентами B, C области определения которых плотны в E, и $f(t) \in C([0,\infty); E)$.

Исследования, проведенные в случае A, $B \in L(E)$ ([1]), показали, что вид решения задачи (1) определяется видом операторного дискриминанта $D = B^2 - 4C$.

В докладе предлагаются формулы для решения задачи (1) в двух случаях: $D = 0$ и $D = F^2$.

Пусть, например, $D = F^2$, где F — линейный оператор, имеющий ограниченный обратный (пример достаточных условий, при которых данный оператор A, действующий в банаховом пространстве, является квадратом другого оператора T, и конструкцию этого оператора T см. в [2, с. 169]).

Тогда при выполнении следующий условий:

1) $\Lambda_1 = \frac{1}{2}(-B - F)$ и $\Lambda_2 = \frac{1}{2}(-B + F)$ являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп $U_1(t)$ и $U_2(t)$;

2) $BFx = FBx$, $x \in D(\Lambda_1^2)$;

3) $f(t) \in D(\Lambda_1^2)$, $t \in [0, \infty)$; $\Lambda_1^2 f(t)$, $\Lambda_2^2 \in C([0, \infty); E)$;

4) $u_0 \in D(\Lambda_1^2)$, $u_0' \in D(\Lambda_1)$,

задача (1) имеет решение

$$u(t) = U_2(t)F^{-1}(u_0' - \Lambda_1 u_0) - U_1(t)F^{-1}(u_0' - \Lambda_0 u_0) +$$

$$+F^{-1} \int_0^t [U_2(t - \tau) - U_1(t - \tau)] f(\tau) d\tau.$$

Литература

1. Фомин В.И. // Вестник ТГТУ. - Тамбов, 2000. - Т. 6, 4. С.643-646.
2. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. - М.: Наука, 1988. - 312 с.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПСОИДОВ

Хабаров Н.В. (Москва)

nkhabarov@supermail.ru

Рассматривается фиксированная точка $y \in R^n$ и семейство выпуклых компактных множеств $\mathcal{M}(t) \subset R^n$, $t \in [t_o, T]$. Пусть $\delta(t, \psi) = \max_{m \in \mathcal{M}(t)} \psi^* m$.

Задача состоит в нахождении пары $(\hat{t}, \hat{p})$, такой что:

$$y \in \mathcal{M}(\hat{t}), \quad \delta(\hat{t}, \hat{p}) = y^* \hat{p} \quad \text{и} \quad y \notin \mathcal{M}(t), \quad \text{для любых } t \in [t_0, \hat{t}). \tag{1}$$

Рассматривается следующий итерационный процесс

$$t_{k+1} = T(p_k), \quad p_{k+1} = P(t_{k+1}, p_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где $P(t, p) = \operatorname*{argmin}_{q:\ |q|=1} |\omega_\psi'(t, p, q) - y|$, $\quad T = T(p): \quad \delta(T, p) = (y, p)$,

$(p_0, t_0) : \delta(t_0, p_0) < (y, p_0)$, $\quad \omega(t, p, \psi) = \psi^* a(t, p) + \sqrt{\psi^* B(t, p) \psi}$,

$a(t, p) = \frac{1}{2}[\delta_\psi'(t, p) + \delta_\psi'(t, -p)]$, $B(t, p) = \frac{1}{2}[\delta(t, p) + \delta(t, -p)]\delta_{\psi\psi}''(t, p) +$
$+[\delta_\psi'(t, p) - a(t, p)][\delta_\psi'(t, p) - a(t, p)]^*$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: (а) $y \notin \mathcal{M}(t_0)$, $y \in \operatorname{int} \mathcal{M}(T)$ и $\mathcal{M}(\bar{t}_1) \subseteq \mathcal{M}(\bar{t}_2)$, для любых $\bar{t}_1 \leq \bar{t}_2$; (б) $\operatorname{rg} \delta_{\psi\psi}''(t, \psi) = n-1$, для любых $\psi \neq 0$,

$t \in [t_0, T]$; (в) метод (2) сходится к некоторой точке $(\tilde{t}, \tilde{p})$; (г) существует последовательность $q_k : \omega(t_k, p_k, q_k) < y^* q_k$; (д) в окрестности точки $(\tilde{t}, \tilde{p})$ функция $\delta(t, \psi)$ имеет непрерывные смешанные производные по аргументам t, ψ_i до третьего порядка включительно, а по аргументам ψ_i – до четвертого порядка включительно; (е) $\frac{\partial}{\partial t}\delta(\tilde{t}, \tilde{p}) > 0$.

Тогда пара $(\tilde{t}, \tilde{p})$ является решением задачи (1) и существуют такие положительные константы K_0, C_1 и C_2, что для всех номеров $k \geq K_0$ выполняются неравенства:

$$|p_{k+1} - p_*| \leq C_1 |p_k - p_*|^2, \quad |t_{k+1} - t_*| \leq C_2 |t_k - t_*|^2.$$

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Хачев М.М. (Нальчик)

Для уравнения $\Delta u + sgnz \cdot u_{zz} = 0$ в цилиндрической области $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < R^2, \ -\alpha \leq z \leq \beta\}$, $\alpha, \beta, R = const > 0$ исследована краевая задача:

найти решение $u(x, y, z)$ уравнения (1) в области Ω удовлетворяющее условиям:

1) $u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega^+ \bigcup \Omega^-)$;

2) $u|_s = \psi(x, y, z), \quad u|_{s_k} = \varphi_k(x, y), \ k = 1, 2$;

3) $\lim\limits_{x \to +0} u = \lim\limits_{z \to -0} u, \quad \lim\limits_{z \to +0} u_z = \lim\limits_{z \to -0} u_z$,

где $\psi \in C(\overline{S}) \bigcap C^2(S), \quad \varphi_k \in C(\overline{S_k}) \bigcap C^2(S_k), \quad k = 1, 2$;

$$\Omega^+ = \Omega \bigcap (z > 0), \Omega^- = \Omega \bigcap (z < 0), S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, -\alpha \leq z \leq \beta\},$$

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < R^2, \ z = \beta\}, S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < R^2, \ z = -\alpha\}.$$

Методом разделения переменных Фурье в цилиндрических координатах доказана однозначная разрешимость искомой краевой задачи. Изучены качественные свойства построенных рядов и рядов, полученных дифференцированием до второго порядка включительно по переменным x, y, z.

О СВОЙСТВЕ ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Хворова М.В. (Гродно)
mvhvorova@grsu.grodno.by

Рассмотрим уравнение

$$(V_{xxx} + 6V_x^2)_x = F, \tag{1}$$

где F — полином 2-ой степени от функции V и ее частных производных по x, t до 3-его порядка (причем производные 3-его порядка входят линейно) с аналитическими в некоторой области D коэффициентами. Для уравнения (1) упрощенным является уравнение

$$V_{xxxx} + 12V_xV_{xx} = 0, \tag{2}$$

имеющее свойство Пенлеве, так как из (2) найдем: $V_{xxx} + 6V_x^2 = H, \quad H_x = 0$. Если решение уравнения (2) записать в виде

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k\varphi^{k-1}, \tag{3}$$

где $V_k = V_k(t)$, $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x = 1$, тогда функция φ_t и коэффициенты V_1, V_4, V_6 будут произвольными функциями от t (так называемые резонансные коэффициенты, отвечающие резонансам $r = 1, 4, 6$).

Требуя, чтобы в полном уравнении (1) с решением вида (3) функция φ_t была произвольной, и резонансные коэффициенты были те же, то есть V_1, V_4, V_6, найдем ограничения на коэффициенты функции F. С учетом этих ограничений получим, что уравнение (1) должно иметь следующий вид:

$$(V_{xxx} + 6V_x^2)_x = \alpha V_{tt} + 2\alpha V_{xt} + cV_x + b, \tag{4}$$

где

$$\alpha = const,\ \alpha \neq 0,\ c = a_t,\ a_x = c_x = 0,\ b_x = -\frac{1}{6}(ac_t + c^2), \tag{5}$$

$$\alpha = 0,\ a_x = c_x = 0,\ b_x = -\frac{1}{6}(ac_t + c^2) \tag{6}$$

Если $\alpha = 0$, то после интегрирования по x из (4) получим уравнение третьего порядка, которое приводится к уравнению, рассмотренному в [1].

Теорема. *Для наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) необходимо, чтобы оно имело вид (4) при условии (5) или (6).*

Литература

1. Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько. // Дифференциальные уравнения. 1994. Том 30. 10. С. 1703-1709.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬННОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ОДНОРОДНЫМ ЯДРОМ

Цалюк М.В. (Краснодар)
mtsalyuk@math.kubsu.ru

Изучается уравнение

$$x(t) = \int_1^t K(t,s)x(s)\,ds + f(t), \quad t \in [1,\infty) \tag{1}$$

с непрерывным однородным ядром $K(t,s)$, то есть $K(t,s) = \dfrac{1}{s^\alpha}Q(\dfrac{t}{s})$ при $s \neq 0$, $\alpha > 1$. Обозначим через **BC** пространство непрерывных ограниченных функций. Пусть также $\mathbf{A_0}$ — пространство функций $x(t) \in \mathbf{BC}$, имеющих конечный предел на бесконечности, и $\left(\tilde{Q}x\right)(t) = \int_1^t \frac{1}{s^\alpha} Q\left(\frac{t}{s}\right) x(s)\,ds$ — интегральный оператор Вольтерра, соответст-вующий уравнению (1). Рассматривается вопрос принадлежности решения уравнения (1) некоторому пространству $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{BC}$ в случае, когда свободный член $f(t) \in \mathbf{X}$.

Теорема 1 *Пусть* $\mathbf{X}$ *— замкнутое подпространство* $\mathbf{BC}$ *и выполнено условие* $\sup\limits_{t\geq 1} \int_1^t \frac{1}{s^\alpha} \left|Q\left(\frac{t}{s}\right)\right| ds < \infty$. *Тогда, если* $\tilde{Q}\left(\mathbf{X}\right) \subseteq \mathbf{X}$, *то для любого свободного члена из* $\mathbf{X}$ *решение уравнения (1) тоже лежит в пространстве* $\mathbf{X}$.

При $\mathbf{X} = \mathbf{BC}$ условия теоремы 1 обеспечивают устойчивость уравнения (1). В частности, справедлива

Теорема 2 *Если выполнено условие* $\sup\limits_{t\geq 1} \int_1^t \frac{1}{s^\alpha} \left|Q\left(\frac{t}{s}\right)\right| ds < \infty$ *и* $\int_1^t \frac{1}{s^\alpha} Q\left(\frac{t}{s}\right) ds \in \mathbf{A_0}$ *при* $t \to \infty$, *то для любого свободного члена из* $\mathbf{A_0}$ *решение уравнения (1) также принадлежит* $\mathbf{A_0}$.

Более подробную асимптотику дает

Теорема 3 *Пусть свободный член уравнения (1) имеет вид*

$$f(t) = \sum_{0\leq\beta_i<m} \frac{f_i}{t^{\beta_i}} + \frac{O(1)}{t^m}, \ \beta_i \in R$$

и существует такое $m > 0$, *что* $t^{1-\alpha} \int\limits_1^t \tau^{m+\alpha-2} \left|Q(\tau)\right| d\tau < c < \infty$. *Тогда решение допускает аналогичное асимптотическое представление по тем же степеням.*

Литература

[1] З.Б. Цалюк. Интегральные уравнения Вольтерра. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 15. – М.: ВИНИТИ, 1977. С. 131–198.

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ[1]

Царьков И.Г. (Москва)

tsarkov@mech.math.msu.su

В работе рассматривается нелинейная задача Дирихле, и для некоторых достаточно естественных условий устанавливается неединственность ее решений. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R^n}$ — ограниченная замкнутая область; через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых функций $u : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$, зануляющихся на $\partial\Omega$ (границе области Ω). Пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ относительно нормы $\|u\| = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2_{\mathbf{R^n}} dx\right)^{\frac{1}{2}}$ обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Пусть

[1]Работа выполнена при финансовой поддержки гранта РФФИ 02-01-00248.

$F : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — непрерывная однородная функция с показателем $\beta \neq 1$. Будем предполагать, что найдутся $C, \alpha > 0$ такие, что $n(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1}) < 1$ и для всех $(x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}$ верно неравенство $|F(x,t)| \leq Ct^{\alpha}$.

Теорема. *Пусть функция F не является монотонно неубывающей функцией по переменной t для некоторого $x \in \Omega$. Тогда существует функция* $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что задача

$$\begin{cases} \Delta u = F(x,u) + \varphi(x) \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \end{cases}$$

имеет два различных ненулевых решений $u_1, u_2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

E-mail v_sumin@mail.ru

Рассмотрим задачу Коши (см.[1]):

$$\begin{cases} x_t^{(i)\prime} + \beta^{(i)}(t,s,u^{(i)}(t)) \cdot x_s^{(i)\prime} = g^{(i)}(t,s,x), & i = \overline{1,m}, \\ x(0,s) = w(s), \quad s \in [a,b], \quad t \in [0,T], \end{cases} \tag{1}$$

где для $t \in [0,T]$, $s \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}^m$ функции $\beta^{(i)}(t,s,p)$, $\beta_s^{(i)\prime}(t,s,p)$, $g^{(i)}(t,s,p)$, $g_p^{(i)\prime}(t,s,p)$, $g_s^{(i)\prime}(t,s,p)$ измеримы по t, непрерывны по $\{s,p\}$, ограничены (огр.) на огр. множествах; вектор-функция $w(.)$ дифференцируема на $[a,b]$, причем $w'(.)$ огр.; $u \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset L_\infty^m[0,T]$ – огр. $(u \in U \subset \mathbf{R}^m)$, $\beta^{(1)}(t,s,p_1) < \ldots < \beta^{(m)}(t,s,p_m)$, $p \in U$. Пусть $\{(t,s) \mid s = y_u^{(i)}(t;\tau,\sigma)\}$ – i-я характеристика (1), проходящая через точку (τ,σ); $\ell_u^i(t;\sigma) \equiv y_u^{(i)}(t;0,\sigma)$, $\Pi_u = \{(t,s) \mid \ell_u^m(t;a) \leq s \leq \ell_u^1(t;b)\}$, $T_u^{(i)}(\tau,\sigma)$ – первая компонента точки пересечения $s = y_u^{(i)}(t;\tau,\sigma)$ с границей $\partial\Pi_u \setminus \{t=0\}$; Ω – множество тех $u \in \mathcal{D}$, для которых: 1) $\ell_u^i(.;\sigma) \in AC[0,T]\ \forall\sigma \in [a,b]$, $i = \overline{1,m}$, 2) существует единственное решение x_u задачи (1) в смысле п.в. вдоль почти каждой характеристики в Π_u; функция $\mathcal{M}(t,s,p,u)$ вместе с $\mathcal{M}_p'(t,s,p,u)$ измерима по t, непрерывна по $\{s,p,u\}$ и огр. на огр. множествах.

Теорема. Пусть $u \in \Omega$ – оптимальное управление в задаче:

$$J[v] = \iint\limits_{\Pi_v} \mathcal{M}_v(t,s)dtds \to \max_{\Omega}, \quad \mathcal{M}_v(t,s) \equiv \mathcal{M}(t,s,x_v(t,s),v(t)).$$

Тогда $\mathcal{J}(\tau,u(\tau)) = \sup\limits_{v \in U} \mathcal{J}(\tau,v)$, п.в. $\tau \in [0,T]$, где $\mathcal{J} \equiv [-I - \Phi](\tau,v)$,

$$I(\tau,v) \equiv \int_{\ell_u^m(\tau;a)}^{\ell_u^1(\tau;b)} \left\{ \mathcal{M}(\tau,s,x_u(\tau,s),v) + \sum_{i=1}^m [\psi^{(i)} x_u^{(i)\prime}{}_s](\tau,s)\beta^{(i)}(\tau,s,v^{(i)}) \right\} ds,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-00979.

$\Phi(t,v) \equiv \varphi_u^m(t;a;v) + \varphi_u^1(t;b;v)$, $\psi \in L_\infty^m(\Pi_u)$ – решение уравнения:

$$\psi(t,s) - A_u^*\left[g_p'(.,x_u(.))^*\psi\right](t,s) = A_u^*\left[\mathcal{M}_p'(.,x_u(.),u(.))\right](t,s),$$

$$A_u^{*(i)}[z](t,s) \equiv \int_t^{T_u^{(i)}(t,s)} z^{(i)}(\xi, y_u^{(i)}(\xi;t,s)) {y_u^{(i)}}'_s(\xi;t,s)d\xi, \quad \ell^i = \ell_u^i.$$

$$\varphi_u^i(t;\sigma;v) \equiv \beta^{(i)}\left(t, \ell^i(t;\sigma), v^{(i)}\right)\left[\ell^i(t;\sigma)_\sigma'\right]^{-1}\int_t^T \mathcal{M}_u\left(\xi, \ell^i(\xi;\sigma)\right)\ell^i(\xi;\sigma)_\sigma' d\xi.$$

Литература

1. Сумин В.И., Чернов А.В. // "Понтрягинские чтения-XII": Тезисы докл. Воронеж, 2001. С.149-150.

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Чиганова Н.В. (Стерлитамак)
busik@mail.rb.ru

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv sgny\cdot|y|^n u_{xx} + sgnx\cdot|x|^m u_{yy} + \lambda sgn(xy)\cdot|x|^m|y|^n u = 0, \quad n,m > 0, \ (1)$$

в области D, ограниченной простой кривой Γ, лежащей в первой четверти $x,y > 0$ с концами в точках $A(1,0)$ и $B(0,1)$, характеристиками OC_1 и C_1A, лежащими в четвертой четверти, и характеристиками OC_2 и C_2B, лежащими во второй четверти, уравнения (1), где O(0,0), $C_1\left(x_{C_1}, y_{C_1}\right)$, $C_2\left(x_{C_2}, y_{C_2}\right)$, где $x_{C_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $y_{C_1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $x_{C_2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $y_{C_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $\alpha = \frac{m+2}{2}$, $\beta = \frac{n+2}{2}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу Трикоми.

Задача T_λ.*Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:* $u(x,y) \in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D_+\cup D_1\cup D_2)$; $Lu(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in D_+\cup D_1\cup D_2$; $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in \Gamma_0$; $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in OC_1$; $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in OC_2$; *где* $D_+ = D\cap\{x > 0, y > 0\}$, $D_1 = D\cap\{x > 0, y < 0\}$, $D_2 = D\cap\{x < 0, y > 0\}$ *и* Γ_0 – *нормальная кривая уравнения (1).*

В работе Сабитова К.Б., Карамовой А.А. [1] были найдены собственные значения, построены в явном виде соответствующие собственные функции спектральной задачи T_λ для уравнения (1) при $m = n = 0$.

Данная задача решается методом разделения переменных.

Собственные значения $\lambda_{k,m}$ задачи T_λ определяются как корни уравнения $(\sqrt{\lambda})^{q-p}J_{\rho_k}(\sqrt{\lambda}) = 0$, где $\rho_k = p + q + 2k$, $k = 0,1,2,...$, а соответствующие им собственные функции задачи T_λ выражаются по явным формулам.

Литература

[1] Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // Изв. РАН. Серия математическая. – 2001.– № 4. – С. 133-150.

О СПЕКТРЕ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Чубурин Ю.П. (Ижевск)

chuburin@otf.fti.udmurtia.su

Рассматривается оператор $H^{(B)} = H_0^{(B)} + V(x)$, действующий в $L^2(\mathbf{R}^2)$, где $H_0^{(B)} = -1/2((\partial/\partial x_1 - iBx_2)^2 + \partial^2/\partial x_2^2), B = \text{const} > 0$ - величина магнитного поля. Предполагаем, что потенциал вещественный и принадлежит $L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$. Как известно, $\sigma_{\text{ess}}(H^{(B)}) = \sigma(H_0^{(B)}) = \{(n + 1/2)B\}_{n=0}^\infty$. Пусть P_n - ортогональный проектор на собственное подпространство L_n оператора $H_0^{(B)}$, отвечающего $E_n = (n + 1/2)B$. Через $\|\cdot\|_p$ обозначаем норму в $L^p(\mathbf{R}^2)$.

Теорема 1. *Пусть ψ - собственный вектор оператора $H^{(B)}$*, такойчто $\|\psi\|_2 = 1$, *отвечающий собственному значению $E \in (E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2)$. Тогда $\|\psi - P_{n_0}\psi\| = O(\|V\|_\infty^2/B)$.*

Теорема 2. *Пусть, в условиях теоремы 1, $\psi_0 \in L_{n_0}$ и $\|\psi - \psi_0\|_2 = O(\|V\|_\infty^2/B)$. Тогда имеют место равенства*

$$E - E_{n_0} = (V\psi, \psi) + O(\|V\|_\infty^2/B) = (V\psi_0, \psi_0) + O(\|V\|_\infty^2/B).$$

Следствие. *При $B \to \infty$ стремление $E \to E_{n_0}$ имеет место тогда и только тогда, когда $(V\psi, \psi) \to 0$.*

Теорема 3. *Пусть* $\text{supp}V \subset \{|x| \le R\}$ *и $\epsilon, \delta > 0$. Для произвольной собственной функции ψ оператора $H^{(B)}$ такой, что $\|\psi\|_2 = 1$ и соответствующее собственное значение E удовлетворяет условию $B/2 > |E - E_{n_0}| \ge \epsilon$, справедлива оценка*

$$\int_{\{|x| \ge R+\delta\}} |\psi(x)|^2 \, dx \le Ce^{-aB}, a > 0.$$

Теорема 4. *Предположим, что $\|V\|_\infty < B/2$. Тогда собственные значения E оператора $H^{(B)}$, лежащие в $(E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2) \setminus \{E_{n_0}\}$, находятся правее E_{n_0}, если $V \ge 0$, и левее E_{n_0}, если $V \le 0$. При этом $|E - E_{n_0}| = \|\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V}\| + O(B^{-1})$.*

ОБ ОДНОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ В БИДИСКЕ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ВНУТРЕННИМИ ФУНКЦИЯМИ В КРУГЕ

Шамоян Р.Ф. (Брянск)

Пусть $O(z)$ — внутренняя в круге $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ функция (см. [1]), $H(U^2)$ — класс всех голоморфных в бидиске U^2 функций, X и Y подпространства в $H(U)$ или в $H(U^2)$, $\Delta(Q) = \{(z_n)\}$ — множество нулей функции Q, занумерованное с учетом кратностей.

Пусть $R_{a,b,n}(Q) = \{\varphi(z_1, z_2) \in H(U^2); \varphi(z_1, z_2) = C\int Q(z)D^n(\varphi(z, z_1, z_2)) \cdot (1-|z|)^c dm_2(z)\}$, где $\varphi(z_1, z_2, z) = 1/((1-\bar{z}z_1)^a(1-\bar{z}z_2)^b), z_1, z_2 \in U, a, b > 0$, $n \in NU\{0\}$, $c = a+b-2$, $b > -1$, $C = C(a,b)$ — некоторая константа, $D^t f(z) = \sum(k+1)^t a_k z^k$, $(f(z) = \sum a_k z^k$, $t \in R)$, оператор из $H(U)$ в $H(U)$ (см[1]), $H^p(U^2)$ — класс Харди в бидиске (см.[2])

В докладе будет сказано, что при различных ограничениях на a, b, n $\varphi(x_1, z_2) \in H(U^2)$ или $\sup|\varphi(z_1, z_2)|1 - z_1, z_2| < \infty$.

Устанавливается точная скорость роста средних $M_p(\varphi, r)$ в случае, когда Q — конечное произведение Бляшке (см[1]).

Теорема 1. Пусть $\varphi \in R_{b,b,n}(Q)$, $1/p-1 < s < 1/p$, $q < 1, \gamma = 1/q-1+(n-1/p-s):2$, где n — любое, $n > s+1/p$, $n \in N, (1/p-1 < s < 1/p$, $q < p; q < 1$, $\gamma = (\alpha+2)./q-1+(n-s-1/p)/2$, $\alpha > -1$, $n > s+1/p$, n — любое., $n \in N)$. Тогда $\sum\limits_{k\geq 0}(1-|z_k|)^{1-ps} < \infty$ в том и только в том случае, когда последовательность $C_{k_1k_2} = \hat{\varphi}(k_1, k_2)(\Gamma(k_1+1)\Gamma(k_2+1)/(\Gamma(k_1+1+\gamma)(\Gamma(k_2+1+\gamma)), \varphi(z_1, z_2) = \sum\hat{\varphi}(k_1, k_2) \quad z_1^{k_1}z_2^{k_2}$ — является коэффициетным мультипликатором из H^q в $H^p(U^2)$ (из $A^p(U^2)$ в $H^p(U^2)$). Отметим, что аналогичные утверждения установлены и для других пар X и Y (X и Y подпространства $H(U^2)$.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in R_{\gamma,\gamma,n}\ (Q), n > 1$. Тогда 1) Оператор Ганкеля (см.[1]) $\Gamma_{(D^aQ)}$ действует ограничено из H^r в $\{h : h' \in H^q\}, p, q, r \in (1,\infty)$ $1/p = 1/p+1/r$ в том и только в том случае когда $\varphi \in A^p(U^2)$, $\beta = ((n-1-\alpha)p-3)/2$, $n > 1$ $\alpha \in (1/p-2,\ 1/p-1)$. 2) Оператор Ганкеля $\Gamma_{(D^aQ)}$ действует ограничено из H^p в $\{h : h \in H^1\ 1 < p < \infty$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in A^p(U^2)$, $\beta = ((n-1-\alpha)p-3)/2$ $n > 1$, $\alpha \in (1/p-2,\ 1/p-1)$.

Аналогично сформулированным в теореме 2 утверждения найдены нами также для других пар пространств X и $Y(X$ и $Y \subset H(U))$.

Литература

1. Пеллер В., Хрущев С. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и гауссовские процессы., УМН, 1982, т.37, стр. 53-227

2. Шамоян Р.Ф. О коэффициентных мультипликаторах пространств Харди и Блоха в поликруге. Сиб. мат. жур. т.42, 2002.,1,стр. 212-227.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИНВАРИАНТНОСТИ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Шананин Н. А. (Москва).

nshananin@sci.pfu.edu.ru

Для одного класса слабо нелинейных дифференциальных уравнений, содержащего уравнения распространения нелинейных волн, приведена теорема о распространении инвариантности ростков решений. Предположим, что в открытом множестве Ω в R^n дифференцированиям по координатным направлениям приписаны натуральные веса $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n) \in N^n$. Положим $x' = \{x_j | \varrho_j = \mu (= \min_k \varrho_k)\}$ и $x'' = \{x_j | \varrho_j > \mu\}$. Пусть J - некоторое подмножество множества мультииндексов α, удовлетворяющих неравенству $\langle \varrho, \alpha \rangle \leq m - \mu$, и N - их число. Через $\mathcal{B}(\Omega)$ обозначим пространство обобщенных функций $u(x)$, у которых $\partial^\alpha u(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $\langle \varrho, \alpha \rangle \leq m - \mu$ и $\partial^\alpha u(x) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $\alpha \in J$. Через $\partial_J u(x)$ обозначим совокупность производных функции $u(x)$ соответствующих подмножеству J.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(P(x, D)u =) \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f(x, \partial_J u(x)), \qquad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. Предполагается, что $P(x, D)$ есть линейный анизотропный дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, *главный пучок символов* которого имеет простые корни, удовлетворяющие условиям обобщающим условия Кальдерона на анизотропный случай [1]. Предположим, что функция $f(x, u)$ определена для почти всех $x \in G$ и всех $u \in C^N$, обладает свойством Каратеодори, $f(x, 0) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и локально по переменным u при почти всех x удовлетворяет липшицевой оценке. Будем говорить, что *росток* функции $u(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ в точке $x^0 \in \Omega$ *инвариантен относительно отображения* $g : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{B}(\Omega_g)$, если $x^0 \in \Omega_g$ и $g(u)(x) = u(x)$ в некоторой окрестности x^0. Будем говорить, что *отображение g сохраняет решения уравнения* (1), если $\Omega \cap \Omega_g \neq \emptyset$ и образ $g(u)(x)$ любого решения $u(x)$ уравнения является решением на множестве $\Omega \cap \Omega_g$.

Теорема. *Предположим, что оператор $P(x, D)$ и функция $f(x, u_J)$ удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда, если в точке x^0 росток решения $u(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ уравнения (1) инвариантен относительно отображения g, сохраняющего решения, то ростки $u(x)$ будут инвариантны относительно g во всех точках связной компоненты слоя $\Omega \cap \Omega_g \cap \{x'' = x''^0\}$, содержащей x^0.*

Список литературы.

[1] Шананин Н.А. // Матем. заметки, т. 71:1, 2002, 135-143.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00648.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Шмелёва Н.Г. (Стерлитамак)

sspi@soros.bashedu.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$ в области D, ограниченной кривой Ляпунова Г, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках A(0,0) и B(1,0) и характеристиками AC $(x + y = 0)$, CB $(x - y = 1)$ уравнения (1) при $y < 0$. Пусть $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача Трикоми. *Найти в области D функцию, удовлетворяющую условиям:* $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$, $Lu(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in D_+ \cup D_-$, $u(x,y) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma$; $u(x,-x) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1/2$, *где* $\varphi(0,0) = \psi(0)$, $\varphi(x,y)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Под регулярным в D решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям задачи Трикоми, кроме того, u_x, u_y непрерывны в $\overline{D}_+$ в замкнутой области $\overline{D}_+$, за исключением точек A и B, где они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

Теорема. *Если существует решение задачи Трикоми в классе регулярных в D решений уравнения* (1), *то оно единственно при всех* $\lambda \in \mathbf{C}$, *удовлетворяющих условию:*

$$|\lambda| < 2\alpha_0 - Re\lambda, \quad \alpha_0 = \frac{4}{9mesD_+},$$

где $mes\, D_+$ *– мера области* D_+.

Доказательство проводится аналогично [1,2].

Литература

1. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.– М.: МГУ, 1988. – 150с.

2. Сабитов К.Б. О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром. //Дифференц. уравнения.– 1986.– Т.22.– No11.– С.1977–1984.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ m-ЛИНЕЙНЫХ ОКРЕСТНОСТНЫХ СИСТЕМ В ЛИНЕЙНЫЕ m-АРГУМЕНТНЫЕ

Шмырин А.М., Шмырина О.А. (Липецк)

amshlipetsk.ru

Пусть K — некоторое числовое поле, U — K-линейное пространство, состоящее из всех K-значных функций, заданных на множестве элементов $A = \{a_1, ..., a_N\}$, $|A| = N$.

Пусть Ω обозначает множество, состоящее из всех m-линейных каузальных нестационарных отображений. С использованием понятия тензорного произведения функций каждый элемент из может быть расширен до линейного отображения.

Рассматривается m-линейная окрестностная система вида:

$$\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{\alpha\in O_{u_i}[a]} w_i[a,\alpha]u_i[\alpha]+\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{\alpha_1\in O_{u_i}[a]}\sum_{\alpha_2\in O_{\gamma_i}[a]} w[a,\alpha_1,\alpha_2]u_i[\alpha_1]\gamma_i[\alpha_2]+\ldots$$

$$+\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{\alpha_1\in O_{u_i}[a]}\cdots\sum_{\alpha_m\in O_{\gamma_i}[a]} w[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_m]u_i[\alpha_1]\ldots\gamma_i[\alpha_m]=0 \qquad (1)$$

Здесь $O_{u_i}[a]$ — окрестности по u_i элемента a, $a\in A=\{a_1,...,a_N\}$, $u_i\in U$, $w_i[a,\alpha]$, $\ldots$, $w_i[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_m]$ $(i=1,\ldots,\gamma)$ — некоторые матрицы. Нестационарные m-линейные отображения, представленные в (1) расширяются до линейных m-аргументных отображений. Система (1) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{\alpha\in O_{u_i}[a]} w_i[a,\alpha]u_i[\alpha]+\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{\alpha_1\in O_{u_i}[a]}\sum_{\alpha_2\in O_{\gamma_i}[a]} w[a,\alpha_1,\alpha_2]u_i[\alpha_1]\otimes\gamma_i[\alpha_2]+\ldots$$

$$+\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{\alpha_1\in O_{u_i}[a]}\cdots\sum_{\alpha_m\in O_{\gamma_i}[a]} w[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_m]u_i[\alpha_1]\otimes\ldots\otimes\gamma_i[\alpha_m]=0 \qquad (2)$$

Идентификация матриц $w_i[a,\alpha]$, $\ldots$, $w_i[a,\alpha_1,\ldots,\alpha_m]$ $(i=1,\ldots,\gamma)$ может быть осуществлена раздельно, в разных блоках общего алгоритма [1, 2].

Литература

1. Блюмин С.Л. Многомерные преобразования сигналов и анализ нелинейных систем./ С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин - Липецк: Изд-во ЛГТУ, 1992. - 79 с.

2. Блюмин С.Л. Смешанное управление смешанными системами/ С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин., Д.А. Шмырин. - Липецк: Изд-во ЛГТУ, 1998. - 80с.

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Ярославцева В.Я. (Липецк)

Дифференциальные операторы Лежандра-Гегенбауэра

$$P_x=\frac{1}{sh^{2v}}\frac{d}{dx}sh^{2v}x\frac{d}{dx}+v^2$$

возникают, когда уравнение Лапласа преобразуют к тороидальным координатам.

Обозначим через $C^{\infty}_{\text{чет.0}}[0;\infty)$ пространство четных бесконечно дифференцируемых функций, определенных на полупрямой $x\geq 0$. На функциях $V\in C^{\infty}_{\text{чет.0}}[0;\infty)$ определим оператор преобразования

$$\Phi_v V(x)=\begin{cases}\frac{2^{2v}\Gamma(v+1/2)}{\sqrt{\pi}}(shx)^{1-2v}\left(\frac{d}{dsh^2\frac{x}{2}}\right)^{-v}\frac{V}{shx}, v\geq 0\\ \frac{2\Gamma(\frac{3}{2}-v)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dsh^2\frac{x}{2}}\right)^{v}\frac{V}{shx}, v<0\end{cases}$$

Здесь $\left(\frac{d}{dsh^2\frac{x}{2}}\right)^v$ понимается, как дробная производная по аргументу $sh^2\frac{x}{2}$. $\Phi_v V(x)$, как функция параметра v, аналитически продолжается до аналитической мероморфной функции, имеющей простые полюсы в точках $v = -1/2, \pm\frac{3}{2}, \ldots$

Теорема. Для любой функции $V \in C^{\infty}_{\text{чет},0}[0,\infty)$ справедливы равенства

$$P_x \Phi_v V(x) = \Phi_v \frac{d^2 V(x)}{dx^2},$$

$$\lim_{x\to+0} \rho_v(x)\Phi_v V(x) = V(0),$$

— где $\rho_v(x)$ — весовая функция, определяемая формулой

$$\rho_v(x) = \begin{cases} 1, v & \geq 0 \\ (shx)^{2v-1}, v & < 0 \end{cases}$$

О МЕТОДЕ ИСКЛЮЧЕНИЙ, МАЛО ПОДВЕРЖЕННОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ

Степанов Г.Д. (Воронеж)

Классический метод исключения Гаусса, вместе с различными модификациями, бесспорно является одним из наиболее полезных и часто используемых вычислительных алгоритмов. Наряду с рядом достоинств (универсальность, простота, сравнительно невысокая трудоемкость) метод имеет и недостатки, например, чувствительность к вычислительным погрешностям.

Специфика метода такова, что все расчеты ведутся в поле вещественных чисел, что в обычной практике кажется естественным даже для целочисленных матриц. Положение меняется при необходимости вычисления функциональных определителей. Такие задачи возникают при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, при применении критерия осцилляционности функции Грина, полученного автором, требуется знание ряда определителей Вронского из многочленов. По понятным причинам использование обычной схемы Гаусса или ее модификаций здесь проблематично.

Возможен простой и эффективный алгоритм приведения квадратной матрицы к треугольному или диагональному виду, который при применении к целочисленным матрицам ограничивается действиями лишь с целыми числами, за счет того, что все встречающиеся в нем деления всегда выполняются нацело. Такой алгоритм успешно решает и задачу вычисления определителя матрицы из многочленов.

Основная расчетная формула в этом алгоритме напоминает аналогичную формулу в схеме Жордана и имеет следующий вид:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{vmatrix} a_{kk}^{(k)} & a_{kj}^{(k)} \\ a_{ik}^{(k)} & a_{ij}^{(k)} \end{vmatrix} / a_{k-1k-1}^{(k-1)},$$

где $a_{00}^{(0)} = 1$, $a_{ij}^{(1)}$ – элементы исходной матрицы, $a_{ij}^{(k)}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ – элементы матриц после $k-1$ шагов исключения. С помощью детерминантного тождества

Сильвестра можно доказать, что элементы $a_{ij}^{(k)}$ равны некоторым минорам исходной матрицы и для целочисленной матрицы тоже целочисленны.

Если исключать элементы, стоящие ниже ведущей строки k, то квадратная матрица приводится к верхнему треугольному виду, где на диагонали стоят ее главные миноры соответствующего порядка, включая определитель матрицы.

Если в расширенной матрице линейной системы уравнений исключать элементы строк ниже и выше ведущей строки, то матрица системы приводится к диагональному виду, причем диагональные элементы будут равны определителю матрицы, а в столбце свободных членов будут стоять определители, фигурирующие в числителях формул правила Крамера. Таким образом, для линейной системы с целочисленными коэффициентами и единственным решением алгоритм даст точное решение в рациональных числах. (Обычный метод Гаусса со сравнимыми трудозатратами дает приближенный результат.)

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ НА ОТДЕЛЕНИЯХ УСКОРЕННОГО ОБУЧЕНИЯ

Жуковская З.Д., Провоторова Е.Н., Глушко Е.Г.

Современный учебный процесс характеризуется интенсификацией всех форм обучения, как следствие, в технических университетах началась подготовка специалистов по ускоренной форме обучения. Для обеспечения необходимого уровня фундаментальной подготовки таких специалистов требуется разработка особых форм организации учебного процесса, особенно актуальна эта проблема при изучении математических дисциплин. Студентами, обучающимися по ускоренной программе, являются выпускники средних специальных учебных заведений, имеющие, как правило, разрыв в математическом образовании в три-четыре года, поэтому усвоение дисциплин физико-математического цикла у них вызывает значительные сложности.

Любые формы интенсификации учебного процесса невозможны без гибкой системы организации самостоятельной работы, управляемой и диагностируемой преподавателем. Для специалистов-ускоренников нами разработана система обеспечения качества самостоятельной учебной деятельности по курсу математики, включающая: разработку тестовых заданий; организацию консультационных занятий; подготовку методических пособий и электронных учебников; использование компьютерных технологий и управление процессом как поточных так и индивидуальных форм самостоятельной работы. Особенно продуктивным оказывается использование компьютерных контрольно-обучающих программ, позволяющих каждому студенту самостоятельно выяснять уровень своих знаний по изучаемому разделу, в частности, и по элементарной математике, и получать необходимую методическую помощь.

Ускоренная форма обучения уже с первых шагов преподавания математики требует использование контекстного подхода, при котором внимание акцентируется на применении математических методов к профессионально направленным задачам и обучении математическому моделированию.

Именной указатель

Компьютерная верстка и подготовка оригинал-макета:
Шабров С.А.

Центрально-Черноземное книжное издательство,
394053, г. Воронеж, ул. Лизюкова, 2.
Усл. п.л.10,5. Бум. писчая. Печать трафаретная.
Тир. 300 экз. Подписано к печати 27.04.2002.